Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión

Tesis que para obtener el grado de

Doctor en Matemática Educativa

presenta:

Apolo Castañeda Alonso

Director de la tesis:

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

México, D.F., marzo de 2004

Índice

Capítulo II

Capítulo III

Capítulo IV

Capítulo V

Resumen

Esta investigación presenta los resultados obtenidos del análisis socioepistemológico al proceso de formulación del discurso didáctico de la idea de *punto de inflexión.*

Dentro del programa de investigación de *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, el cual se interesa por los procesos del pensamiento que inciden en el estudio de la matemática del cambio, la investigación analiza las dificultades asociadas con el estudio de las segundas derivadas y su tránsito entre los distintos órdenes, específicamente en lo que refiere al *punto de inflexión* como argumento para favorecer el *tránsito entre las derivadas sucesivas.*

Ubicada en la perspectiva socioepistemológica, la cual ofrece una visión incluyente las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento, la investigación incorpora un estudio de la didáctica de antaño, recuperando la información matemática del los primeros *libros de texto* (para difusión del saber). Agrega un estudio de la matemática del problema en el que se discute, desde una perspectiva analítica, la construcción formal del punto de inflexión. Además, un análisis epistemológico de libros de texto contemporáneos y un primer desarrollo de propuesta de trabajo didáctico.

Este acercamiento socioepistemológico de investigación, ha permitido sustentar un argumento teórico al que denominamos «Transposición Didáctica Inversa» formulado a partir de las evidencias de análisis de la obra matemática.

Abstract

This research work presents the results of a socioepistemological analysis about the construction of didactical speech around the point of inflection idea.

In to the Variational Language and Thinking research program, interested on the thinking process around the mathematics of change, our research work analyze associated difficulties with the second derivative studies and the transit between different derivatives orders. Particularly, this work states the *point of inflection* as an argument to favor this transit between different derivatives orders.

From our perspective, the *Socioepistemology*, wich vision includes cultural and social variables as fundamentals in the construction of mathematical knowledge; this research incorporates a study of original didactic texts, recovering mathematical information form the first scientific diffusion texts. Additionally, we analyze the mathematical portion of our research problem from an analytical perspective: the theoretical construction of the inflection point. At the same time, we present an epistemological study of the contemporary texts books in order to, with all the evidence, have a first didactic proposal.

This socioepistemological approach of investigation, has allowed to sustain a theoretical argument called “Inverse Didactic Transposition”, formulated from our work evidence.

Glosario

Comunicación. Son los procedimientos por los que se «expresan las ideas» y se reproducen «ideologías» o «formas de pensar». La comunicación se logra a través de un lenguaje que comparten un grupo de personas, de acuerdo con la información de que pueden disponer, con su nivel de tecnología.. En el caso de la comunicación escrita, se utiliza un conjunto de símbolos cuya codificación se comparte.

Derivada sucesiva. Práctica que caracteriza a las derivadas en sus distintos ordenes. Dado que es posible el tránsito entre ellas, cada nueva derivada refleja información de su anterior y su posterior, por lo que se privilegia un estudio de sus características; aquellas de permiten predecir comportamiento. Se han identificado 5 rasgos distintivos que caracterizan la derivada sucesiva.

1. Relativo a la multiplicidad de representaciones
2. Relativo al tratamiento simultáneo de sus variaciones
3. Relativo a sus regularidades
4. Relativo al problema de la dimensionalidad
5. Relativo a la aceptación de la metafísica del diferencial

Epistemología. Disciplina que se propone revisar la ciencia para definir su origen, determinar los criterios para su validez, revisar su consistencia lógica, predecir sucesos, entre otras acciones. Esta práctica es posible llevarla hasta niveles más específicos, y al menos, para los matemáticos educativos puede proveer de explicaciones detalladas de los procesos por los que se desarrolla una idea matemática; observando en ello las condiciones y contextos de descubrimientos pasados, los estancamientos, los momentos en los que se agregan significados ampliándose campos de estudio o los puntos en la historia en los que se descartan ideas asociadas a los conceptos en cuestión.

Obstáculo. Elemento sustancial que promueve el conocimiento, define una práctica didáctica la cual debe suponer que los estudiantes pueden lograr un aprendizaje al enfrentar obstáculos y generar estrategias exitosas. Desde la perspectiva epistemológica, se asume como principio fundamental que determina el progreso de la ciencia, en cierto sentido se conoce en contra de un conocimiento anterior, es decir, negando o destruyendo los conocimientos mal hechos y formulando nuevas explicaciones.

Sistema Didáctico. Modelo teórico que explica el funcionamiento del escenario escolar. Hace mención de tres subsistemas; el alumno, el profesor, el saber, aunque la aproximación socioepistemólgica asume la existencia de un tercer elemento que *contextualiza* la dinámica de la escuela, se refiere a ámbito socio-cultural.

Socioepistemología. Acercamiento metodológico que plantea la necesidad de desarrollar investigación sistémica y situada, incorporando cuatro componente de análisis; la epistemológica, la sociocultural, los planos cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Aporta explicaciones de cómo un conocimiento erudito se incorpora, a través de reformulaciones, al sistema de enseñanza, además de amplia las explicaciones de la naturaleza social del conocimiento. Así mismo explica la construcción del conocimiento como resultado de prácticas asociadas y problemáticas

Teoremas Factuales. Son formulaciones, en relación al conocimiento matemático, que se elaboran del a partir de supuestos que se asumen como verdaderos, aunque no lo sean. Su origen proviene de la actividad matemática en la que no hay aparentes contradicciones y se acepta como verdadero un resultado.

Transposición Didáctica Inversa. Es un argumento teórico que explica el proceso por el que la obra matemática, que se generar en un ámbito «no erudito», regresa como fuente de ampliación de la obra realizada en el «ámbito erudito». Esto implica más que un tránsito inverso de un ámbito al otro (en el sentido de la Transposición Didáctica). Pone especial atención en describir las condiciones que posibilitan este «regreso» y explica además los procedimientos por lo que ocurre.

Introducción

Como parte de un programa de investigación que estudia los procesos de *construcción social del conocimiento matemático*, éste trabajo examina el tratamiento del *punto de inflexión* a través del análisis de tres referentes documentales, publicados en distintos lugares y distintas épocas, a fin de identificar los usos de este conocimiento, las características que le definen y otorgan identidad así como los procedimientos de difusión que utilizan los autores para compartir esta idea a un colectivo más amplio.

Los documentos se han organizado en tres categorías atendiendo a su naturaleza. En las *fuentes primarias*, se han incluido los trabajos del Marqués de L'Hospital y de María de Agnesi; publicados en 1696 y 1748 respectivamente. Estas obras, consideramos, son la génesis de los libros modernos de cálculo debido a su *intencionalidad* didáctica y a la incorporación de estregias para *movilizar* al lector durante la lectura. Estos trabajos son los primeros que plantearon un tratamiento de la matemática desde la perspectiva de quien quiere *estudiar* por primera vez este campo de saber y necesita un documento organizado.

En la categoría de *fuente secundaria*, ubicamos el artículo de Taylor titulado «Derivatives in Calculus» publicado en la revista *American Mathematical Montly*. Este documento aparece como respuesta al diagnóstico escolar presentado en los años 40 del siglo XX, en el que se reporta un estudio del cálculo dentro del nivel medio superior ausente de un referente *formal*. Taylor revisa la matemática del problema y sugiere una estrategia de estudio basada en un cuerpo axiomático ordenado.

Por último, en las *fuentes terciarias* situamos a los libros de cálculo de «reciente publicación». Estas obras contienen un saber organizado, dispuesto para ser transmitido a estudiantes en tiempos y espacios escolares concretos. De estas, analizamos su epistemología, la forma en que se tratan las ideas, las prácticas asociadas a los conceptos y, los usos del conocimiento, entre otras.

Este ejercicio de análisis *socioepistemológico* a la obra matemática, tiene sus antecedentes en los trabajos de Valero, (2000); González, (1998) en los que se manifiesta la importancia del estudio de la derivada, a través de situaciones que favorezcan un tránsito entre los distintos órdenes. El punto de inflexión se convierte en un objeto *organizador* de este tránsito, al igual que otras ideas matemáticas como las de *máximo* y *minimo.*

Ya algunos trabajos en esta línea como el de González, han advertido que el estudio de la derivada en los sistemas didácticos se ha visto favorecida por la algoritmia, lo cual disminuye significativamente la posibilidad de coordinar las distintas órdenes entre derivadas, e inhibe algunas características que asocian la correspondencia entre la función y su derivada y viceversa.

En la experimentación de la Situación Didáctica para el estudio de la derivada[1] con un grupo de profesores de nivel medio superior, se observó que el tránsito se condiciona a la noción que se tiene de máximo, mínimo o punto de inflexión. Por ejemplo, de éste último se acepta que es el lugar en el que la segunda derivada se *hace* cero, o bien que si $f''(x)=0$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en *x*.

Este tipo de evidencias en forma de *teorema factual* [2] nos permite identificar al *punto de inflexión* como un objeto matemático significativo en el momento en que se estudian las variaciones de segundo orden. Así mismo, resulta importante entender su naturaleza y conocer sus caracterizaciones para favorecer el estudio de la derivada a través de múltiples acercamientos[3], que al estar coordinados y organizados en secuencias aporten un acercamiento robusto al estudio del cálculo.

[1] Documento publicado en la tesis de Maestría (Valero, 2000).
[2] Algunos de ellos son por ejemplo *si una función cumple con la condición* $f'(x)>0$ *entonces también cumple con la condición* $f''(x)>0$. Muchos de los entrevistados no perciben la necesidad de un "si y sólo si", es decir las implicaciones se hacen en un solo sentido si revisar si el regreso es también correcto.
[3] Es muy común que los libros de texto definan a la segunda derivada como la "derivada de la derivada" y que la estimación del punto de inflexión sea un procedimiento algoritmo para mostrar "aplicaciones de la segunda derivada"

El documento que presentamos, se compone de nueve capítulos. En el *Capítulo I* se ofrece un panorama general del problema de investigación, los antecedentes y la definición de un cuerpo metodológico. El *Capítulo II* se analizan los propósitos de la investigación, el marco teórico para el desarrollo de la investigación así como la definición de categorías de análisis. En el *Capítulo III* se revisa el discurso matemático escolar, con el fin de conocer el estado actual de la didáctica del punto de inflexión. El *Capítulo IV* ofrece un acercamiento al análisis de la matemática del problema, se revisa un artículo de investigación en el que apunta la necesidad de dotar de fundamentos matemáticos a algunos conceptos del cálculo, entre ellos, el del punto de inflexión. En el *Capítulo V* se analizan varios elementos del contexto en el que se desarrollaron los trabajos de L'Hospital y Agnesi. En los *Capítulos VI* y *VII,* se presenta el estudio realizado a las obras didácticas antiguas; la de Agnesi, *Institutione Analiche* y la de L'Hospital, *Analyse des Infiniment Petit pour intelligence des Lignes courbes*. En el *Capítulo VIII* se construye una caracterización de los conceptos del cálculo y se formula una primera actividad didáctica. Finalmente en el *Capítulo IX*, se expresan las conclusiones del trabajo y se propone y explica el argumento teórico de la Transposición Didáctica Inversa.

El acercamiento metodológico

La *socioepistemología* es un acercamiento metodológico de investigación en Matemática Educativa, que aporta elementos para explicar el origen del conocimiento a partir de un referente sociocultural analizando los mecanismos sociales de difusión e institucionalización del saber y de sus prácticas asociadas.

Una de las hipótesis que asume esta perspectiva, es que el aprendizaje de la matemática ocurre mediante un doble proceso; en lo individual, atendiendo a las funciones mentales involucradas en la adquisición y desarrollo de un *pensamiento matemático,* y en lo social, el cual atiende los procesos por los que se socializan las ideas matemáticas dentro de un ambiente propio de validación de la matemática.

Al seno de ésta perspectiva teórica, la investigación busca determinar los procesos por los que se construye la matemática, atendiendo a las dos rutas descritas anteriormente; primero al estudiar las *interpretaciones* que la gente (de cualquier época) tiene en relación al contenido matemático, así como caracterizar o modelar los procesos de compresión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos (Cantoral, 2000).

Por otro lado, y en ejercicio de una epistemología crítica, analizar la naturaleza del conocimiento matemático, los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen a la formación del pensamiento matemático y los métodos por los que se difunde y comparten ideas matemáticas.

Dos antecedentes

Este trabajo incorpora las reflexiones del programa de investigación de *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, el cual se interesa por estudiar los fenómenos relativos a la enseñanza, aprendizaje y comunicación del saber matemático propio de la variación y el cambio en la situación escolar, y en referencia al medio social que le cobija (Cantoral & Farfán, 1998). Explica que los conceptos matemáticos adquieren un significado en el seno de un determinado grupo social; son productos culturales, legitimados a partir de las prácticas humanas y de su relación con otros dominios científicos, de ahí que resulte importante describir y caracterizar los escenarios donde los estudiantes aprenden matemáticas, en un intento por entender los fenómenos de socialización del conocimiento en el salón de clase.

Así mismo se retoman los resultados presentados en Castañeda, (2000); y Castañeda, (2002) relativa a las caracterizaciones del conocimiento en dos obras específicas (Agnesi, 1741; L'Hospital, 1696), en donde se ha puesto de manifiesto que las variables de tipo social se hayan inmersas en los procesos de la construcción del conocimiento.

Capítulo I

En donde se plantean los antecedentes de la investigación

Antecedentes de la investigación

Los productos de investigación en el campo de la *Matemática Educativa* pretenden incidir positivamente en la marcha del *Sistema Didáctico* al proponer condiciones para un funcionamiento óptimo. Sin embargo, estos productos no se pueden reducir a proponer e implementar formas alternativas «*para una mejor* enseñanza», considera como prioridad, la formulación y ampliación de un cuerpo teórico capaz de explicar el funcionamiento de ese sistema y de sus componentes, con el fin de generar estrategias y orientaciones didácticas que afronten exitosamente situaciones de enseñanza – aprendizaje. Así como mejorar prácticas, sugerir métodos y enfoques, organizar contenidos escolares, por citar sólo algunos.

Esta práctica científica se ha visto favorecida por tres hechos importantes; el interés de comunidades docentes por hacer ciencia desde sus aulas, la creación y consolidación de comunidades de investigación que impulsan proyectos académicos y la labor de difusión que se cristaliza en la publicación de revistas especializadas en las que se *hace teoría desde y para su entorno* (Farfán, R. 1998)

a. El panorama de la investigación en matemática educativa

En Cantoral y Farfán (1998) se reporta que las investigaciones en nivel superior se han centrado en la exploración de nociones matemáticas, donde se describen dificultades de aprehensión generadas por una complejidad intrínseca que tienen los propios conceptos estudiados. Algunos trabajos que destacan en esta línea, son los acercamientos estadísticos de Anderson y Orton; donde se muestra una relación de problemas detectados con sugerencias didácticas al apoyarse con materiales diversos en clase a fin de lograr la apropiación de las ideas. Basándose en la unidad dicotómica de *imagen del concepto - definición del concepto*, Vinner y Tall explican algunas problemáticas escolares de aprendizaje, al referirse a la conducta que muestran los estudiantes en relación a la idea de imagen del concepto. Thompson, elabora una explicación más amplia con sus categorías de análisis; *proceso y objeto*, basadas en la aproximación teórica de Piaget.

Cornu y Sierpinska explican las dificultades que muestran los estudiantes en términos de *obstáculos epistemológicos*, intentando «equipararlas» con las reportadas en la historia del desarrollo conceptual de la matemática, los trabajos reportan listas de obstáculos epistemológicos que afrontan los alumnos al estudiar algunos conceptos, los hallazgos en este sentido, han podido ser utilizados como referencia al anticipar algunos comportamientos en los estudiantes en situaciones de aprendizaje.

Dentro de los acercamientos emergentes que han aparecido en las últimas décadas, se encuentran los programas de investigación que buscan responder estas preguntas incorporando nuevas variables de análisis. La perspectiva socioepistemológica, enmarcada en estos nuevos acercamientos, ofrece una hipótesis que sostiene que el conocimiento matemático emerge a partir de un referente sociocultural y mediante mecanismos sociales de difusión e institucionalización específicos. Esta perspectiva incluyente, sensible a reconocer que el conocimiento es una construcción social, asume el estudio epistemológico de los conceptos como medio para determinar su naturaleza a través del análisis de las circunstancias sociales y culturales que permitieron su construcción.

b. La aproximación socioepistemológica; un punto de vista emergente

El acercamiento *socioepistemológico*, como lo ha llamado Cantoral, (1998), cobija una epistemología que no se reduce a una eventual clasificación de *obstáculos*. Pretende conocer y precisar el origen de los conceptos matemáticos al reconocer los usos sociales que se le asocian desde su génesis, los sentidos (u orientaciones) y significados de los conceptos, así como evolución, desarrollo y los procesos de incorporación a los escenarios escolares.

Una de las hipótesis que asume esta perspectiva, es que el aprendizaje de la matemática ocurre en un doble proceso; en lo individual, atendiendo a las funciones mentales involucradas en la adquisición y desarrollo de un *pensamiento matemático*; esto es, referido a las *interpretaciones* que tiene la gente (de cualquier época) en relación al contenido matemático, así como a la caracterización o modelación de los procesos de compresión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos (Cantoral, 2000).

En lo social, describe los procesos por los que se socializan las ideas matemáticas dentro de un ambiente propio de validación de la matemática. En un ejercicio de una epistemología crítica, se propone analizar la naturaleza del conocimiento matemático, los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen a la formación del pensamiento matemático y los métodos por los que se difunde y comparten ideas matemáticas.

En este sentido Cordero, (2001), enfatiza en su modelo teórico la importancia de reconocer una epistemología modelizada por la actividad humana, en ella se asumen elementos que son propias de dicha actividad y no del saber mismo (que aunque es fundamental, no puede ser el único) tales como los significados propios, los contextos, las intenciones, las cuales se van configurando a través de la dinámica de los grupos sociales, se someten a negociaciones y se reconstruyen continuamente. Este sustento ha motivado la hipótesis de hacer un rediseño del discurso matemático escolar basándose en la actividad humana como fuente de dicha reorganización.

Estos hallazgos posibilitan además, el diseño de situaciones en las que el conocimiento se presenta en referencia a las prácticas, situaciones o contextos que le definieron. Pues se asume desde esta perspectiva, que la enseñanza de la matemática escolar debe integrar ámbitos de significación distintos al analítico (favorecido en el sistema escolar) que posibilite la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, con lo que se pueden construir puentes entre distintos contextos reforzando significados.

Esta perspectiva incorpora como variables de investigación los elementos sociales y culturales que intervienen en la definición de un discurso matemático escolar (Cantoral, 1998), caracterizado éste por de la matemática que alberga y por los mecanismos de difusión; por los que se comparten las ideas matemáticas atendiendo a escenarios y en referencia a prácticas que le dan sentido.

Es así que los objetos de estudio que, hasta hace poco se habían mantenido transparentes en las investigaciones, son ahora explícitos y permiten formular explicaciones de la vida social de un saber. No obstante, en este proceso se induce el riesgo de caer en una «ilusión de transparencia» que sociólogos como Bourdieu, (2000) han advertido; es fácil emitir opiniones y ofrecer recomendaciones. Todas las preguntas que giran en torno a lo «social» tienen una connotación, hasta cierto punto simple, por lo que casi cualquier persona puede ser sociólogo o psicólogo social.

c. Una perspectiva de investigación que incorpora el análisis del contexto

Una de las hipótesis de la perspectiva socioepistemológica, asume que el desarrollo de las ideas no se produce únicamente al interior de las personas, sino cumple con otro proceso; el social, manifestado a través de prácticas sociales, procedimientos y habilidades.

En este sentido, citamos una pregunta que se formula en Cantoral & Farfán, (1997), en donde se resalta la importancia del contexto en la creación matemática.

¿Porqué Newton escribió por primera vez su binomio como $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ y no, como $(a+b)^n$*, si son matemáticas equivalentes*?

Cantoral y Farfán, (1997) argumentan que se trata de diferencias que responden a un programa de investigación que usa la predicción como argumento matemático.

…las expresiones

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}\frac{m-2n}{3n}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + etc.$$

y

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

> *…aunque equivalentes matemáticamente, sostenemos que son conceptualmente distintas.*
>
> *Una lectura ingenua de la cuestión nos haría creer que se trata sólo de asunto de notación propia de la época. Pero en nuestra opinión, ello no es así. Se trata de una verdadera concepción alternativa del binomio, que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase. De hecho, sostenemos que ella obedece a un programa emergente en aquella época, un programa alternativo en el campo de la ciencia, con el que se busca modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático.*

(Cantoral & Farfán, 1997)

En una primera aproximación, se puede creer que es suficiente conocer la obra matemática para explicar su naturaleza, sin embargo es claro que como cualquier otra obra humana, el conocimiento se construye como respuesta a una serie de necesidades, a sus intereses que se validan en su entorno.

Ésta investigación entonces, se desarrolla en esta perspectiva *socioepistemológica* y busca determinar la naturaleza sociocultural de los objetos matemáticos, escenarios donde se significan e inclusive los usos de un saber en determinados contextos, de modo que la información obtenida aporte datos que permita entender su naturaleza social y pueda proporcionar respuesta a preguntas relativas al flujo del conocimiento a través de la historia, incluso en el presente.

Elementos teóricos para la investigación; la Transposición Didáctica

La matemática se ha construido ajena a los sistemas de enseñanza, cumpliendo con intereses y expectativas específicas. Su introducción en los sistemas de enseñanza obliga a un conjunto de *transformaciones adaptativas* (Chevallard, 1985) en donde se le agregan otras nociones al discurso; las paramatemáticas y protomatemáticas.

Durante el proceso de Transposición Didáctica participan los llamados *elementos para la transposición*, los cuales moldean ésta actividad (Chervallard, 1985). Uno de ellos es la *desincretización*; que explica el proceso por el que, un saber que está ligado a la cultura de cierta época a través de sus explicaciones o en el uso de ciertos símbolos o instrumentos con los que se asocia, le son desprovistos. El resultado de este proceso muestra un saber que parece no pertenecer a ningún momento en la historia de la humanidad, es atemporal y acultural, puesto que no contiene elementos que pudieran concederle una raíz.

La *despersonalización*, explica la forma en que un saber se le desasocia de las problemáticas originales y situaciones que le daban sentido y razón (o quizá, necesidad) de ser. El resultado de este proceso es un saber transpuesto no muestra su génesis epistemológica y la naturaleza de éste queda reducida a definiciones, lemas y teoremas que sólo presentan un saber finamente construido, sin permitir recrear los conflictos, conjeturas e interpretaciones originales que le dieron los primeros significados.

Chevallard, explica que la *textualización* (entendido como el ejercicio de crear libros de texto) es una forma de despersonalización; los libros de texto desproveen de problemáticas y situaciones asociadas con el saber original. Por ejemplo, citemos en forma genérica dos tipos de *libros de texto* a propósito del trabajo de investigación sobre obras de difusión del cálculo;

1. *Para quienes se interesaron por difundir las ideas del cálculo.* Los libros de texto antiguos de cálculo, intentaban esclarecer las ideas del misterioso y oscuro cálculo a través de un tratamiento más homogéneo y con un simbolismo unificado con respecto a los tratados originales que resultaban ser complicados para cualquier persona.

2. *Para quienes organizan cursos de matemáticas.* Los libros de texto contemporáneos presentan con pulcritud y rigor, ejemplos, definiciones, teoremas, una extensa lista de problemas de aplicación y ejercicios.

Esta primera caracterización de libros de texto, exhiben dos formas distintas de la textualización, aunque es preciso reconocer que se trata de dos niveles distintos de la difusión del saber.

Los libros de texto posibilitan además el control social de los aprendizajes, dado que tienen un reconocimiento social y cultural importante, los libros funcionan como una autoridad moral con un estatus de *verdad* en cuanto al contenido que tratan y a la forma de cómo plantean problemas o aplican conceptos

Otro de los elementos que participan en la Transposición Didáctica es el relativo a la *programabilidad* de la adquisición del saber. El conocimiento es recortado de su tamaño original con el fin de adaptarlo más o menos prolíficamente, a un tiempo escolar, haciéndolo también coherente con su nueva estructura en los tiempos estimados.

La transposición didáctica se convierte en una buena guía para organizar tiempos y contenidos, además de ser una *herramienta que permite recapacitar*; tomar conciencia de la naturaleza del saber y de su significado primero, así como de los significados que adquirió en el momento de su introducción al sistema escolar. Como argumento de *distancia*, al distinguir la disparidad entre el saber erudito respecto al saber escolar a través de reconocer los enfoques y significados. Como *recurso legitimador*; el saber que lo aparece con el título de «escolar» posee por si mismo validez, dada la raíz epistemológica de la cual procede. Al respecto Chevallard explica que es frecuente que el profesor se enfrente a sus estudiantes en muchas situaciones de clase diciendo «pueden creerme» ante la ausencia de argumentos para legitimar el saber.

La Transposición Didáctica ejerce una vigilancia epistemológica sobre el conocimiento escolar; *entre más se conoce la naturaleza de las cosas, tantas más posibilidades se tienen de utilizarla eficazmente* (Chevallard, 1985), al reconocer la identidad del conocimiento, su fin y los significados que la didáctica ha olvidado, recuperar explicaciones también olvidadas, dotar de significados a los conceptos, repersonalizar el saber, *resignificar* nociones, además de que la investigación epistemológica puede recuperar elementos para la preparación didáctica del saber. Esto no representa una Transposición Didáctica Inversa, como desarrollaremos en esta tesis.

Por ejemplo, cuando el saber *envejece*, y se percibe que se ha vuelto obsoleto y quizá en esté en desacuerdo con la sociedad, se requiere llevar a cabo un proceso de reinstauración del saber escolar a través un análisis del saber sabio, así se logra nuevamente una compatibilidad entre el sistema de enseñanza y su entorno. O bien, cuando el saber parece estático y los estudiantes ya no lo asimilan con la frescura que otras generaciones lo hicieran.

Un estudio científico del proceso de Transposición Didáctica sustentado en un estudio epistemológico, evita caer en una visión simplista de borrar y suprimir contenidos para subsanar las fallas al sistema educativo.

El punto de vista de algunas investigaciones en cálculo

Se ha reportado en varias investigaciones (algunas de ellas son; Cantoral, 2000; Valero, 2000; Muñoz, 2000) que el estudio de la derivada se ha visto favorecido por un tratamiento algorítmico, fomentado una técnica, que si bien es necesaria, no es suficiente para enfrentarse exitosamente a situaciones matemáticas.

Al igual otros investigadores como Dreyfus, (1990) han documentado esta situación, explicando que en general los estudiantes que llegan al universitario teniendo un buen dominio algebraico, pero no tienen desarrollas algunas habilidades tales como las aproximaciones numéricas, interpretación de estados, graficación de funciones.

Dreyfus reconoce que existe un privilegio del contexto algorítmico lo que provoca que los estudiantes no puedan usar el conocimiento en distintas y variadas situaciones:

1. Los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo (encontrar limites, diferenciación, etcétera) en un nivel puramente algorítmico.

2. La visualización es poco común.

Artigue, (1995) comenta que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de la derivada, se encuentran en serias dificultades cuando se les cuestiona sobre conceptos y métodos. Reporta además que la enseñanza tiende a centrarse a una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, evaluándose aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto a su vez es considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa.

Así mismo Cordero, (1992) explica que este efecto se vive también en el estudio de otros temas del cálculo; *…el profesor y el estudiante aprenden a decir lo que es la integral*, sin embargo, *difícilmente alcanzar a ver una metodología que les permita estudiar el fenómeno de variación continua.*

En relación al estudio de la derivada Valero, (2000) reporta que es común que la derivada sea presentada como un *algoritmo de cuatro pasos* o en el mejor de los casos, -como ella lo explica- como la relación de la tangente con la curva.

Las investigaciones muestran que se ha asumido el estudio de la derivada como el dominio de *técnicas iterativas* sobre expresiones algebraicas, reduciendo su conceptualización a un *proceso* más que como objeto.

Sobre los efectos en el sistema didáctico

La hipótesis sobre la que se desarrolla el trabajo, sostiene que una definición nos acerca a una proximidad del concepto, pero evidentemente, no nos puede expresar la totalidad de su significado. Es bien sabido que los conceptos matemáticos se expresan a través de múltiples acercamientos; numéricos, geométricos, algebraicos, analíticos, que en conjunto ofrecen un robusto acercamiento y que permiten conocer sus diferentes aristas.

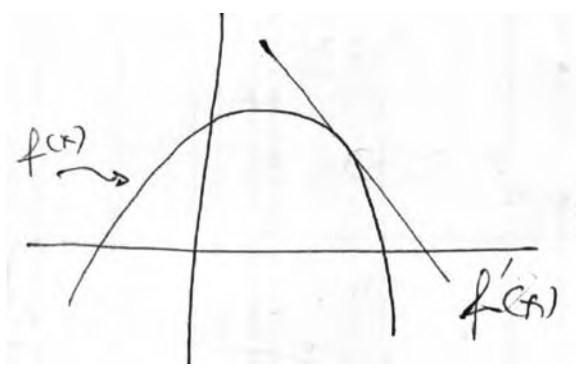
No obstante, como ya han apuntado las investigaciones citadas, el estudio del cálculo y de la matemática en general puede fácilmente reducirse a la repetición de teoremas y al dominio de procedimientos, que son indispensables pero no suficientes.

Este dato reportado en las investigaciones se confrontó a través de una breve consulta con un grupo de profesores de matemáticas de nivel medio superior (bachillerato técnico) en situación escolar, preguntándoles *¿qué es la derivada?*, este cuestionamiento fue realizado dentro de un contexto de estudio del cálculo; el grupo de profesores asistía a una reunión de trabajo para analizar la estructura didáctica de varios libros de cálculo.

Los resultados obtenidos[1] en una encuesta aplicada a 50 profesores, fueron los siguientes;

- Es la pendiente de la recta tangente ………………..………….. 38
- Es una nueva función que se obtiene al aplicar la regla de los cuatro pasos …... 8
- Es una función que expresa cómo cambia otra función ..…….. 3
- Es la recta tangente a un punto[2] ………………...…………….. 1

De esta última respuesta se agrega el dibujo que expresó el profesor



Se puede observar que la interpretación de *derivada* está asociada con la recta tangente a un punto. De hecho la recta no podría ser la derivada de la curva, de serlo así, tendría su raíz en el lugar en el que la curva alcanza el máximo.

[1] El cuestionario fue de respuesta libre. Las respuestas se organizaron en cuatro categorías, dadas las similitudes de las respuestas encontradas.
[2] Esta respuesta fue redactada por el entrevistador en relación al dibujo que realizó el profesor.

La noción de fenómeno didáctico

Una posible explicación a esta última respuesta, es considerar que el profesor no ha tenido la suficiente información de la derivada por lo que ha cometido un *error* al expresar su representación gráfica. No obstante argumentaremos otro punto de vista.

En opinión de Bachelard, (1981) la noción de *obstáculo* es un principio fundamental que determina el progreso de la ciencia, en cierto sentido se conoce en contra de un conocimiento anterior, es decir, negando o destruyendo los conocimientos mal hechos y formulando nuevas explicaciones. Este proceso dialéctico sirve de filtro para refinar la obra científica, de modo que se acepta que el conocimiento no es perpetuo, se trata de un *ente* vivo en continuo cambio.

Esta tesis epistemológica trae consigo una nueva concepción del *error*, el cual se asume como un conocimiento «mal ubicado» o «inadaptado» que acontece en una situación dada.
Aceptar al *obstáculo* como elemento sustancial que promueve el conocimiento, define una práctica didáctica la cual debe suponer que los estudiantes pueden lograr un aprendizaje al enfrentar obstáculos y generar estrategias exitosas. Tal y como lo ha definido la Teoría de Situaciones Didácticas;

a. Aprender un conocimiento matemático «c» corresponde siempre con un cambio de estrategia: todo conocimiento surge asociado a una nueva estrategia capaz de resolver un problema que la estrategia de base se había mostrado incapaz de resolver.

b. La estabilidad de la estrategia ganadora es siempre relativa respecto al cambio de los valores que pueden tomar las variables didácticas.

(Bosh M., et, al., 1997)

Desde una postura tradicional, si la producción del estudiante no corresponde con los resultados que el profesor espera, se pude asumir que se trata tácitamente de un *error*, no obstante al observar con mayor detalle y buscar una explicación más amplia que nos de cuenta de la naturaleza de ese fenómeno, es posible encontrar evidencia de un conocimiento fuera de contexto. Lejos de calificar una tarea escolar como correcta o «errónea», asumimos en nuestra perspectiva la búsqueda de elementos que den cuenta de estos hechos a través de preguntas tales como; ¿qué mecanismos operan en el fenómeno?, ¿qué otros elementos matemáticos intervienen?, y sobre todo ¿bajo que concepciones están operando estos fenómenos?

La investigación en Matemática Educativa ha adoptado estas preguntas tratando de explicitar las concepciones que tienen los estudiantes en relación al conocimiento matemático escolar, cuestionando la transparencia del conocimiento matemático escolar.

En respuestas consideradas como erróneas, es posible distinguir varios niveles de concepción matemática, por ejemplo, se solicita a un estudiante: *desarrollar la expresión* $(a+b)^2$, la respuesta a^2+b^2 puede distinguirse de quien ante la misma pregunta escribe que el resultado es $2a+2b$ o quien afirma que a^2b^2.

Las investigaciones al respecto (Martínez, 2000) han mostrado que algunas de las respuestas «matemáticamente erróneas» más reiteradas por los estudiantes no ocurren por descuido y que en general aparecen en forma constante en varios niveles y en varios lugares.

El fenómeno didáctico y el sistema de creencias

En un primer acercamiento se acepta que la noción de *creencia* representa lo opuesto a *saber*, por ejemplo ante la frase «creo que el círculo tiene un ángulo interior de 360°» se da a entender que no se sabe o no se está seguro (**creencia como conjetura sin certeza**). (Villoro, 1982).

En otra situación, la creencia trata de refutar, existe un juicio que permite dudar de un aparente saber. Ante la pregunta «si una función cumple con la condición $f(a)>0$ entonces también cumple con la condición $f''(a)>0$» se responde «no creo que sea correcta la afirmación dado que existen funciones, en donde los valores para «*a*» siendo positivos no necesariamente siguen siendo positivos en su segunda derivada». En este caso la suposición demuestra algo verdadero pero sin estar seguro de ello, ni contar con pruebas suficientes. (**creencia como conjetura con certeza**)

Otro uso de *creencia*, viene de «no aceptar un hecho», veamos.

Consideremos la ecuación: $3+\sqrt{x}=x-9$

Al recurrir a la técnica habitual de eliminar la raíz cuadrada

$$\sqrt{x}=x-9-3$$
$$\sqrt{x}=x-12$$
$$x=(x-12)^2=x^2-24x+144$$

Esto conduce la ecuación de segundo grado:

$$x^2-25x+144=0$$

Al resolver esta ecuación, se encontrarán dos soluciones distintas: $x_1=16$ y $x_2=9$

«no puedo creer que el 9 no satisfaga la ecuación inicial, ¿Qué pasa? » comentan los estudiantes.(**creencia como incredulidad**)

Al considerar la «creencia» en su sentido más general se aceptar *un enunciado por verdadero,* o bien *tener un hecho por existente.* Esto nos permite afirmar (Villoro, 1982) que «**saber implica necesariamente creer**». Si alguien sabe *p* también cree que *p*. Sin embargo no es contradictorio decir alguien cree que *p*, pero no sabe que *p*, es decir ***todo saber implica creencia, pero no toda creencia implica saber.***

Al trasponer esta idea a la didáctica, equivale a decir, que una primera condición para que un estudiante sepa un conocimiento *c*, es que el estudiante crea en *c*.

Un punto de vista sobre la *derivada*

El programa de investigación de Pensamiento y Leguaje Variacional, ha sustentado y nutrido de reflexiones a las preguntas del papel y la naturaleza cálculo en el aula (Cantoral & Farfán, 1998), las cuales hasta ahora se han cristalizado en investigaciones que han asumido alguna parte de toda la problemática de la didáctica del cálculo. En particular, la investigación desarrollada por González, (1998) ha dejado ver la importancia de estudiar el concepto de derivada a través de un acercamiento que enfatiza el tratamiento de cada una de sus órdenes, atendiendo a sus propiedades y favoreciendo estrategias de análisis para lograr el tránsito entre una y otra, de manera que la derivada se entienda como la coordinación de las derivadas que le suceden.

Este argumento emana de las reflexiones epistemológicas de Bos, (1974), donde muestra el intrincado proceso por el cual se establece y construye la derivada como objeto matemático. Sin embargo, es dentro del programa de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral et al, 2000; Cantoral, 1997a; Cantoral, 1987, Cantoral y Farfán, 1998; Farfán, 1993; Farfán, 1997; Pulido, 1997) cuando se formula la tesis orientada a la didáctica del cálculo la cual sostiene que *la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva.*

Esta formulación se construye a partir de cinco elementos que caracterizan la derivada como *derivada sucesiva*

1. Relativo a la multiplicidad de representaciones

La derivada puede expresarse en varios escenarios; el geométrico, el algebraico, el numérico, por citar algunos. El elemento organizador es la *transferencia* entre cada representación, pues para cada representación existe un equivalente (al menos matemático) en otro contexto.

2. Relativo al tratamiento simultáneo de sus variaciones

La derivada es una función que expresa la variación de otra función llamada primitiva. La segunda derivada es otra nueva función que expresa información de la función primitiva y la primer derivada.

El elemento organizador en la representación simultánea de variaciones, son los *puntos críticos*, la concavidad, el grado de concavidad.

3. Relativo a sus regularidades

La derivada de una función se obtiene siguiendo una regla analítica. Así la primer derivada es una nueva función susceptible de ser derivada.

El elemento organizador es el *proceso iterativo*, más no un *proceso algorítmico.*

4. Relativo al problema de la dimensionalidad

En el proceso de obtención de derivada no se establece *grado último*. De hecho el abandono de la dimensionalidad precedió a la sistematización del cálculo. En el caso de los fenómenos físicos que se estudian a través del cálculo, el límite de la dimensión la establece el mismo fenómeno.

El elemento organizador es la *adimensionalidad* de la derivada.

5. Relativo a la aceptación de la metafísica del diferencial

El diferencial se formuló a partir de una aritmética del infinitamente pequeño. Muchas de las objeciones que tenía el cálculo en un principio, fueron a causa de un uso a conveniencia las cantidades y magnitudes infinitamente pequeñas; podían simplemente desaparecer.

Estos cinco acercamientos, construyen en conjunto, una definición de *derivada* sustentada en la idea de *derivada sucesiva.* Esto significa que la *derivada* se construye a través de la síntesis que resulta del estudio de cada orden de derivada, donde se han identificado características y relaciones entre cada orden, así como la información que proporcionan al coordinar toda esa información.

Problemáticas asociadas al estudio del punto de inflexión

El argumento de *tránsito* entre las derivadas, se convierte en una práctica indispensable para el estudio del concepto de *derivada*, sin embargo, y tal como lo ha advertido González, R., (1998) el estudio de la derivada en los sistemas didácticos se ha visto favorecida por la algoritmia, relevando los acercamientos numérico y gráfico a un segundo plano.

Esto reduce la posibilidad de coordinación entre los distintos órdenes de derivadas, inhibiendo; sus características cuando se exploran otros escenarios de significación y las habilidades de predicción de comportamientos y formas gráficas.

El trabajo de Valero, (2000) ha reforzado la descripción de este síntoma, demostrando que dentro de los escenarios escolares, el estudio de la *derivada* es reducida a un *algoritmo de cuatro pasos* o bien asociada como la pendiente de la tangente en un punto de la curva.

La información que provee el trabajo de Valero, es fundamental para analizar las dificultades en el *tránsito* entre las derivadas. En su primera parte ofrece una amplia argumentación de las derivadas sucesivas, la cual se complementa con un diseño de Situación Didáctica para el aprendizaje de la noción de derivada.

Una breve exploración

El interés por reproducir la experiencia, es para observar las respuestas que ofrecen los entrevistados, ante preguntas que involucran derivadas sucesivas o simultáneas. El documento diseñado por Valero, es una Situación Didáctica para el estudio de la noción de derivada la cual está validada por las fases de una Ingeniería Didáctica.

Para los fines de la exploración, las preguntas son expuestas en situación escolar a varios grupos de profesores de matemáticas de nivel medio superior y superior.

El grupo elegido para reproducir la experiencia estuvo compuesto por 25 profesores de matemáticas de nivel medio superior, los cuales asistían a reuniones de trabajo para analizar distintos aspectos de la práctica docente. Se dispuso el aula para trabajo individual y se pidió explicar sus argumentos. Para esta actividad se acordaron 2 horas, aunque algunos profesores terminaron su actividad antes de terminar la hora de inicio.

Para el análisis que se presenta a continuación, se eligieron sólo las preguntas que hacían referencia al tránsito entre derivadas, las cuales se detallan a continuación;

Problema 1.2

- Del siguiente grupo de gráficas de diferentes $f(x)$, elige las que cumplan con la condición $f''(x)$

Problema 1.3, inciso 4

- ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto B? (identificar en una gráfica el signo de un punto para su segunda derivada)

Problema 1.5

- Confirmar o refutar; «si una función cumple con la condición $f'(a) > 0$ entonces también cumple con la condición $f''(a) > 0$»

Problema 1.7

- Dibuja parte de una gráfica que cumpla con la condición $f''(a) > 0$ para toda x en el intervalo (a, b)

Problema 1.9, inciso d y f

- Dado un grupo de curvas, determinar
  - *d) ¿Cuál es el signo de* f''_2 *antes y después de* b*?*
  - *f) ¿Cuál es el signo de* f''_3 *antes y después de* c*?*

Problema 1.10, incisos e y f

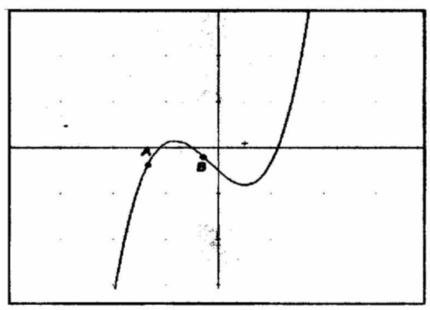
  - *e) La segunda derivada de una cierta función alrededor de un punto de inflexión es positiva*
  - *f) La segunda derivada de una cierta función alrededor de un máximo es negativo.*

El objetivo de la exploración fue conocer, aspectos relacionados con las concepciones, las explicaciones, las formulaciones, creencias, supuestos de las derivadas.

¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto B?

Problema I.3

A continuación se presenta la gráfica de una cierta función y en ella se marcan dos puntos. Contesta las preguntas ubicadas a la derecha de la gráfica



1. ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto A?
2. ¿Cuál es el signo de la primera derivada en el punto B?
3. ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto A?
4. ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en el punto B?

Sugerencia: Si es necesario que hagas un bosquejo de la derivada de la función dada, lo puedes hacer.

Una respuesta emitida fue la siguiente;

> *Parecería tratarse de un punto de inflexión. Si así fuera, la derivada segunda en ese punto valdría cero.*

Comentario

Cabe señalar que existen funciones que tienen un punto de inflexión y su segunda derivada no es cero, podemos observar que la respuesta está basada en un universo de funciones, excluyendo algunos casos «atípicos»

Para la misma pregunta, otros entrevistados respondieron:

> *Ni positivo, ni negativo. En el punto de inflexión B, la segunda derivada tiene valor cero.*

> *Ni positivo, ni negativo. En el punto de inflexión B, la segunda derivada es nula, la tangente es horizontal (B no está ni en la depresión, y ni en la montaña, está en el borde). (Gráfico)*

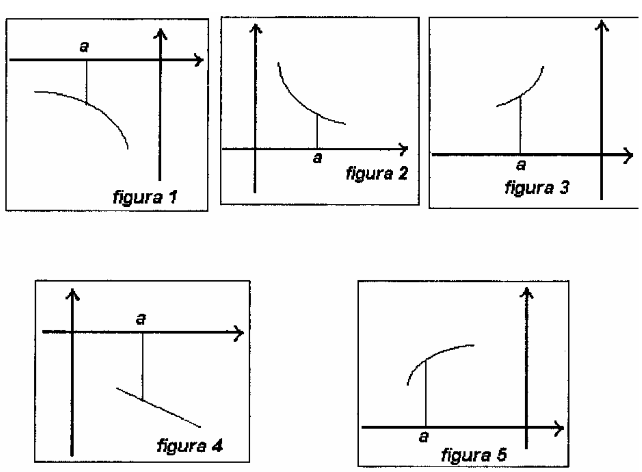
> *Es positiva …* (no abunda en su respuesta)

Esta última respuesta exhibe cierto tipo de dificultad, sin embargo el entrevistado no abunda en sus explicaciones.

Del siguiente grupo de graficas de diferentes $f(x)$ elige la o las que cumplen con la condición $f''(a) > 0$. Explica tu respuesta.

La respuesta emitida fue;

> *… las graficas que cumplen con la condición son las 3 y 5 debido a que la pendiente en ese punto es una recta creciente*



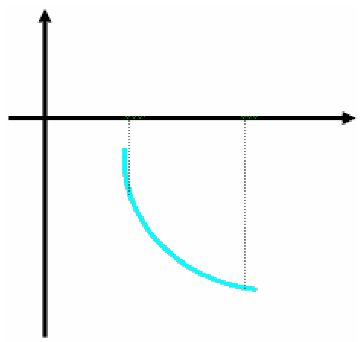
Comentario

Como observamos, existe una confusión entre pendiente positiva y segunda derivada positiva.

Un reconocimiento de la concavidad con segunda derivada

Esta expresión fue escrita por un entrevistado al margen de las preguntas.

> *Esta parte de gráfica es cóncava hacia arriba… se tendría [entonces] que su segunda derivada en ese intervalo es positiva.*



Comentario
Se asume un criterio para determinar el signo de la segunda derivada.

Un referente de Concavidad
La respuesta que ofreció un entrevistado

> *Si una función decrece hasta llegar a cero, y luego la función es creciente; tendremos una concavidad hacia arriba.*

El argumento *hasta llegar a cero*, es confuso, pues se refiere a un caso particular de una función que tiene raíz y que por lo tanto llega a ser *cero.*

Sobre los puntos de inflexión

Algunas de las respuestas que se ofrecieron fueron;

> *…sabemos que los puntos de inflexión se obtienen a partir de la segunda derivada, si el valor de la x de los puntos de inflexión se sustituyen en la tercera derivada, y si f'''(x)<0 la curva es cóncava hacia arriba; y si f'''(x) >0 la curva es cóncava hacia abajo…*

Comentario

Se observa un argumento para determinar un punto de inflexión que involucra las terceras derivadas

La segunda derivada de una función alrededor de un punto de inflexión es positiva, la respuesta emitida fue:

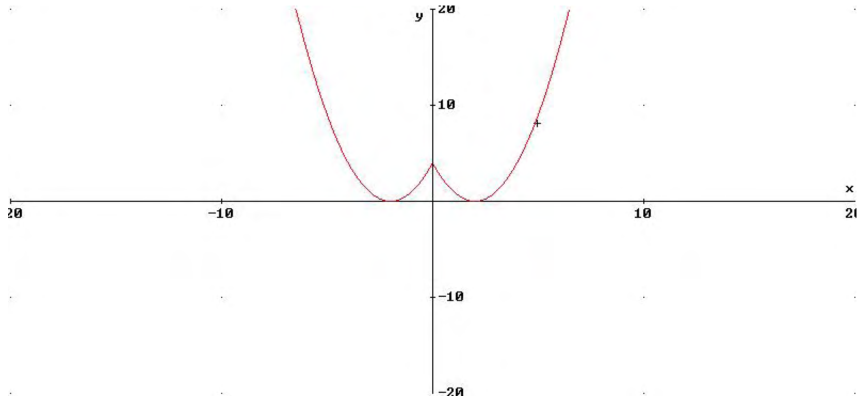
> *Esto es cierto ya que la segunda derivada será negativa si la concavidad de la curva es hacia abajo, y en un máximo la concavidad de la curva es hacia abajo.*

Comentario

La argumentación es confusa. Utiliza un criterio conocido para determinar el signo de la segunda derivada, no obstante no puede explicar para los intervalos en los que ocurre un cambio de concavidad.

Para pregunta, ***la segunda derivada de una función alrededor de un máximo es negativa***

Un contraejemplo lo constituye la función $f(x) = x^2 - 4|x| + 4$



El máximo relativo en $x = 0$ y la derivada segunda alrededor de él es positiva en ambos lados, si bien en el punto no existe.

Observaciones en relación a preguntas de campo realizadas a profesores de matemáticas

Si $f'(x) > 0$, entonces $f''(x) > 0$

Cierto ya que si es creciente $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ y si es decreciente $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$.

Algunos de sus razonamientos que se expresaron fueron los siguientes:

> *Si es verdadera porque si la primer derivada es positiva, entonces como ésta es positiva, la segunda debe ser también positiva.*

R: Verdadero. Por ejemplo si $f(x)=x^2$, entonces $f'(x)=2x$ y $f''(x)=2$ y entonces se cumple (se muestra un caso en el que se cumple, pero no explora contraejemplos)

Para la pregunta **si** $f''(x)=0$***, entonces*** $f(x)$ ***tiene un punto de inflexión en x***

Dos entrevistados confirmaron positivamente el enunciado;

Si se confirma porque la segunda derivada es cero

Si, porque para encontrar el punto de inflexión, se debe igual a cero la segunda derivada y después resolver para encontrar la x.

A manera de conclusión

En esta exploración se han documentado varias dificultades para expresar información entre la primitiva, la derivada, la segunda derivada. Consideramos que no se trata de falta de información entre los entrevistados, son más bien dificultades generadas por la ausencia de un reconocimiento de las características en las curvas de distinto orden.

Existe en el medio escolar un distanciamiento entre la didáctica tradicional –que busca, con fines bien justificados, el dominio algorítmico de la derivada– y las actividades tendentes a favorecer el estudio de la derivada valiéndose del lenguaje gráfico como recurso, e incluso es común hallar en los libros de texto de cálculo un tratamiento de la derivada que favorece y enfatiza las reglas de derivación, haciendo que su significado se constriña por ejemplo, a una regla o bien a un cociente.

Nuestra perspectiva sostiene que una definición sólo nos aproxima parcialmente a al concepto, y evidentemente no nos puede expresar toda la información necesaria para construir *puentes* de comunicación entre los distintos ámbitos de representación y los distintos grados de derivada. Se asume entonces que el estudio de la derivada necesita de un acercamiento conceptualmente múltiple así como de la coordinación entre los distintos órdenes de derivadas para así propiciar el aprendizaje.

Capítulo II

En donde se explican los propósitos
de la investigación

Propósitos de la Investigación

Este síntoma que documentamos proviene, en cierta medida, de la abundante práctica algorítmica que tiene el estudio el estudio del cálculo en los escenarios escolares; que puede hacer transparentes los conceptos, configurando modelos del «estudio de la matemática» basado en memorización y repetición de un conjunto de leyes y reglas operatorias.

En el caso del punto de inflexión, observamos que existe un tratamiento escolar limitado, en muchos casos, a su definición como un punto en una curva que responde a cierta condición las segundas derivadas. Este *uso escolar*, sostenemos, favorece la formulación de teoremas factuales entre los estudiantes e incluso entre algunos profesores; como por ejemplo asegurar que «*si* $f''(a) = 0$ *entonces* $f(x)$ *tiene un punto de inflexión en a*».

En una primera aproximación, el problema parecería resolverse con sólo advertir que la condición de $f''(a) = 0$ *no* garantiza que *a* sea un punto de inflexión en la función primitiva. Sin embargo esta afirmación es recurrente aún cuando la mayoría de los libros de cálculo señalan esta situación; … *para que «a» sea punto de inflexión de una función f, es necesario que f'' tenga signos diferentes a la izquierda y a la derecha de «a»*. (Spivak, M., 1992).

En muchos casos esta advertencia pasa desapercibida, a consecuencia de prácticas escolares que atienden al proceso de derivación más que a la inflexión misma. Éste es un problema -de tratamiento didáctico- en el que se ha asumido cierta transparencia; por un lado, un discurso escolar predominantemente algebraico con escasas situaciones contextuales de análisis y estudio y por otro lado una visión del concepto de la derivada basada en repeticiones algorítmicas; … s*i f es una función diferenciable, su derivada f' también es una función, así que f' puede tener una derivada por derecho propio. Dicha derivada se representa como (f')'= f''. Esta nueva función f', se llama segunda derivada de f, por serlo de la derivada de f.* (Stwart, 1998).

Los resultados de la investigación epistemológica permiten, entre otras cosas, dotar de múltiples significados los conceptos matemáticos para formulaciones didácticas robustas en cuanto al tratamiento de las ideas (Chevallard, 1991). Esto se logra a través del análisis de la naturaleza conceptual de las ideas matemáticas en el que se identifican distintas caracterizaciones –en los distintos momentos de su evolución- así como las condiciones sociales y culturales que permitieron su origen (Cantoral, 2000).

Este referente expuesto, así como las problemáticas detalladas anteriormente, apuntan a formular una investigación que analice el punto de inflexión, desde las prácticas asociadas con su estudio (en diferentes situaciones contextuales), los elementos conceptuales que le caracterizan en múltiples escenarios, los métodos para su estudio, los aportes que ofrece la didáctica de antaño.

La metodología de investigación que responde ampliamente a esta búsqueda es la llamada *Sociepistemología*, a través de la cual se ha manifestado la posibilidad de rediseñar aspectos específicos de la matemática escolar del nivel superior (Cantoral, 1990; Cordero, 1994; Farfán, 1993; Farfán, 1997a) a través de la construcción y experimentación de actividades de clase, que estén mejor adaptadas a una situación escolar y permitan la incorporación de diversas prácticas que conformen un acercamiento amplio al estudio de la matemática.

Así pues, el propósito de la investigación es la búsqueda de elementos conceptuales del punto de inflexión y las segundas derivadas a través de una investigación socioepistemológica con el fin de recuperar y agregar significados, involucrar nuevas estrategias de estudio y en general redimensionar su conceptualización.

Elementos Socioepistemológicos para la investigación

Los resultados presentados en (Castañeda, 2000; Castañeda, 2002) en relación a las caracterizaciones de las ideas del cálculo en dos obras específicas (Agnesi, 1741; L'Hospital, 1696), expresan que existen variables del contexto social que intervienen en los procesos de formulación de un discurso didáctico; por ejemplo, la formulación de un discurso del cálculo basado en el estudio de aspectos de la geometría; tal y como lo expresa Cambray, (1998) en una cita de Fontenelle, secretario de la Academia de Ciencias de París …e*l señor L'Hospital decidió comunicar sin reserva los secretos ocultos de la nueva geometría, y lo hizo en el famoso libro Analyse des infiniment petits, que publicó en 1696.*

La formulación de este nuevo discurso escolar responde a la necesidad de socializar el conocimiento, es decir, a una *intencionalidad* a través de formas explícitas e implícitas de lenguaje escrito para compartir ideas matemáticas al colectivo. Por esta razón, la investigación no sólo atiende al contenido matemático que se *transpone*[1], sino que además analiza las formas y procedimientos por los que éste conocimiento se comparte.

Este ejercicio de análisis del *discurso* (Van Dijk, 1998), con doble componente, permite el reconocimiento de varios niveles; los procedimientos de difusión, los procedimientos de comunicación, las características del receptor, la intencionalidad del emisor, incluso algunos que son implícitos como la ideología que se desea transmitir.

El argumento socioepistemológico junto con estas componentes de análisis, pueden explicar la *naturaleza de un discurso* y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento (en este caso; el matemático escolar ó de difusión) a partir de una intencionalidad didáctica (Castañeda, 2002; Castañeda, 2000), así como aquellos aspectos de socialización de las ideas, como parte de un proceso por el que se de la ampliación del cuerpo teórico de la matemática.

[1] en el sentido de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985)

Estas reflexiones existen dentro de un paradigma de investigación, sensible a reconocer, que las variables sociales juegan un papel importante en la construcción de un conocimiento (Cantoral y Farfán, 1998). Responde además, preguntas relativas de la vida de un conocimiento matemático; aspectos de su origen, su naturaleza matemática, su evolución entre otros. Identifica otros aspectos –propios de la actividad humana– que participan en la construcción del conocimiento, tales como las prácticas socialmente compartidas y cosmogonías (Cantoral, 1998).

En este sentido algunos trabajos de investigación ya han reflejado tesis socioepistemológicas contundentes. Martínez, (2003) en su trabajo de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales, enfatiza la necesidad de responder cuáles fueron los mecanismos que permitieron la construcción y aceptación social de la noción de exponente no natural, estudio que busca explicaciones de carácter eminentemente social respecto al conocimiento. En Cordero, (2001) se fundamenta la necesidad del estudio de elementos teóricos que ayuden a la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos de los diferentes niveles escolares a través de formular una epistemología que explique la construcción del conocimiento usando como argumento la actividad humana.

Estos trabajos apuntan hacia la incorporación explicaciones metamatemáticas, como lo han expresado Cantoral y Farfán, (1998); Martínez, (2000); Castañeda, (2000); Cordero, (2001); Ferrari, (2001), aproximaciones socioculturales robustas, que atienda a las tres componentes ya conocidas; la epistemología y los planos cognitivo y didáctico, agregándose una dimensión sociocultural que modifica parcialmente las otras componentes; así observamos que el estudio epistemológico incorpora explicaciones sociales referentes a la construcción del conocimiento, el estudio cognitivo considera los procesos del pensamiento como base de las explicaciones de las funciones mentales, la didáctica en una estrecha relación con el escenario sociocultural y las prácticas humanas asociadas a la construcción del conocimiento y finalmente, la sociocultural, que eventualmente participa como integradora de las otras modificando sus preguntas.

A nivel didáctico, esta perspectiva asume la visión de que la enseñanza de la matemática escolar debe integrar ámbitos de significación que posibilite la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales. (Cantoral, R., y Farfán, R.M., 1998)

Objetivos de la investigación de la componente epistemológica

La componente epistemológica de la investigación tiene por objetivo explicar la naturaleza conceptual del punto de inflexión en tres rutas; la primera al considerar documentación histórica escrita como una fuente de información, que aporta explicaciones sobre la construcción de un discurso para *fines didácticos*; a partir del análisis de las *formas* de difusión de las ideas matemáticas (apoyado en las argumentaciones teóricas del análisis de *contexto* [Van Dijk, 1998], en el que se explican los procedimientos de comunicación, caracterísiticas del receptor, habilidades por los que se define y construye el discurso). Este estudio nos conduce a rescatar momentos en la historia de las matemáticas, reconocer prácticas asociadas con el conocimiento, es decir, sus usos, así como establecer caracterizaciones.

La segunda; revisando al punto de inflexión desde la matemática misma, el lugar que ocupa como cuerpo de conocimiento así como sus variadas caracterizaciones, entendida ésta práctica como la búsqueda de fundamento al problema.

La tercera, analizando la perspectiva que ofrecen los libros de texto contemporáneos en relación al punto de inflexión, con el objetivo de conocer el estatus epistemológico que tiene el saber dentro el escenario didáctico.

Elementos de la componente epistemológica para la investigación

La epistemología se propone revisar la ciencia para definir su origen, determinar los criterios para su validez, revisar su consistencia lógica, predecir sucesos, entre otras acciones (Albert, 1998). Sin embargo es posible llevar esta práctica hasta niveles más específicos, y al menos, para los matemáticos educativos (Sierpinska & Lerman, 1996) puede proveer de explicaciones detalladas de los procesos por los que se desarrolla una idea matemática; observando en ello las condiciones y contextos de descubrimientos pasados, los estancamientos, los momentos en los que se agregan significados ampliándose campos de estudio o los puntos en la historia en los que se descartan ideas asociadas a los conceptos en cuestión.

Esta primera descripción de la componente epistemológica define un estudio centrado en el conocimiento mismo, asumiéndolo como un *ente* que nace, se desarrolla y se transforma. Sin embargo el objetivo de la investigación exige además, asumir como variable de observación la componente sociocultural; entendida ésta como la parte que ofrece explicaciones de aquellas circunstancias sociales o culturales que posibilitan el nacimiento de las ideas.

A manera de ejemplo citemos uno de los episodios muy conocidos en la historia de las matemáticas; el surgimiento del cálculo infinitesimal; ¿Qué determinó que el cálculo se desarrollara en cierto momento de la historia?, ¿Por qué no se produjo tiempo después?, ¿Qué determinó su aparición?. La respuesta a estas cuestiones pueden hacerse en dos direcciones posibles; primero considerar que previo a los desarrollos de Newton y Leibniz, existieron trabajos en esa línea (el caso de Fermat puede ser un referente inmediato) lo que posibilitó una formulación precisa a las ideas variacionales. (Argumento explicativo *vertical en el tiempo*).

La otra es una respuesta aún más fina; si bien las obras de Newton y Leibniz pueden considerarse como equivalentes, las diferencias entre ellas denotan un acercamiento a la matemática desde ámbitos distintos, se trata de dos escuelas del pensamiento ajenas y que por lo tanto generaron construcciones matemáticas distintas; mientras que para Newton una curva es generada por punto de movimiento, para Leibniz la curva está dada y es sobre ella que se identifican los puntos (Castañeda, 2000). (Explicación *horizontal en la época*).

Al admitir este doble escenario, las explicaciones deben dar cuenta de los factores que moldean y pernean la construcción del conocimiento; desde una epistemología sensible a reconocer la naturaleza del conocimiento, los procedimientos de comunicación hacia los colectivos, así como los mecanismos por los que una cultura ejerce influencia en la formulación de ese conocimiento.

Esta visión incluyente a la que la que se ha llamado socioepistemología (Cantoral, 2001) da cuenta de estas expliaciones al reconocer que existen variables del tipo social y cultural en los procesos de validación de las ideas (negociación de significados)[2] así como en los procesos de comunicación y difusión.

De este modo, el planteamiento del trabajo dibuja una ruta evolutiva observando tres etapas; cómo surge un conocimiento, cómo se valida, cómo se difunde, posicionando en este trayecto al individuo productor (o individuos productores) de conocimiento, como *entes* en un escenario cultural y en situaciones sociales específicas, no tendría sentido hablar de un individuo acultural y exógeno de una realidad (erudito in vitro), puesto que hemos admitido que la obra matemática es un proceso colectivo y depende de innumerables individuos y factores sociales.

[2] Usado por (Martínez, 2003) al referirse como un objetivo en el plano de la transmisión y difusión de conocimiento.

Sin embargo existe un pleno reconocimiento a la individualidad como capacidad creadora, de ahí que nuestra aproximación al aprendizaje reconozca dos procesos; el primero que acontece individualmente y otro momento en el que se sociabilizan las ideas.

Elementos de una epistemología del conocimiento

Las explicaciones de Piaget en relación al aprendizaje, ponen de manifiesto la existencia de estadios en el desarrollo del pensamiento, cada uno de estos estadios inicia con un proceso de reorganización de las adquisiciones hechas en estadios anteriores, según él, debido a la evidencia de que las construcciones más avanzadas conservan vínculos parciales con sus formas más primitivas (Piaget y García, 1989)

Este proceso al que puede llamarse de acomodación y reacomodación, permite un avance evolutivo de las ideas en las personas equiparable al sufrido por la humanidad en el desarrollo de las ciencias. Puede observarse una explicación del avance de la ciencia en estos términos en la obra Gastón Bachelard titulada *La formación del espíritu científico* publicada en 1938 (de notable influencia en trabajos posteriores) en la cual escribe:

> *… Cuando buscamos las condiciones sicológicas del progreso de la ciencia, llegamos a la convicción de que es en términos de obstáculos que debiera ponerse el problema del conocimiento científico… es en el mismo acto de conocer, íntimamente que aparecen por una especie de necesidad funcional, los retrocesos y los problemas… El conocimiento nunca es inmediato y pleno. Las revelaciones de la naturaleza son siempre recurrentes. La realidad nunca es «lo que podríamos creer» pero es siempre aquello que debiéramos pensar… encontramos la verdad en un verdadero arrepentimiento intelectual. En efecto, conocemos contra un conocimiento anterior, destruyendo los*

conocimientos mal hechos, sobrepasando aquello que en el espíritu mismo, constituye un obstáculo a la inteligencia…

En una epistemología del individuo, las condiciones del «progreso científico» pueden traducirse en el aprendizaje mismo, sin embargo los mecanismos para generar ese aprendizaje no necesariamente deben obligar al individuo a transitar y recapitular la historia del concepto, porque en ocasiones el escenario histórico-epistemológico involucra a elementos matemáticos más complejos que el propio concepto que se quiere estudiar. Así lo reporta Farfán, R. M., (1997) en su trabajo que aborda el surgimiento del concepto de la convergencia en procesos de la conducción del calor.

No obstante, un elemento importante de reconocer en la construcción de un conocimiento es la existencia de un obstáculo el cual representa un mediador para lograr la adaptación. Transpolando esto al plano escolar, asumimos que el conocimiento existe pero éste sólo puede tener sentido para un sujeto, cuando se muestra como un solución óptima para un sistema de restricciones (Brousseau, 1986). Dicho en otras palabras, un concepto no se desarrollará si el sujeto cognoscente no tiene necesidad de ese concepto.

Esta idea de actividad adaptativa al medio, la recupera Brousseau para desarrollar la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual plantea una metodología para el diseño de situaciones para el aprendizaje de un concepto. Cada situación debe estar guiada, entre otros ámbitos de análisis, por un «estudio epistemológico», que permita reconocer los significados del concepto en la estructura de la teoría actual, las condiciones históricas de la emergencia del concepto (problemas que llevaron a una superación de esos obstáculos), estudio de la psicogénesis del concepto. (Brousseau, 1981).

De esta manera, una Situación Didáctica permite repetir en el estudiante muchas concepciones olvidadas del pasado, pero en una enseñanza tal y como aparece en la estructura matemática actual (Sierpinska & Lerman, 1996).

Una mirada socioepistemológica en la epistemología de lo individual

Tras admitir anteriormente que el desarrollo de la ciencia acontece en un escenario social, es pertinente observar, que tal avance ocurre al seno de una cultura. En este sentido, (Lizcano, 1993) en su obra titulada *Imaginario Colectivo y creación matemática*, comenta respecto a la naturaleza del significado de «negatividad» en un escenario socio-cultural (fuera del contexto matemático) y cómo influye éste significado para el desarrollo de la matemática en la antigua China y Grecia;

> *En el extremo oriente, sí encontramos desde épocas bien tempranas formas de «número negativos» bien semejantes a la que a Occidente tanto esfuerzo le llevaría ir construyendo. Formas de negatividad que no surgen propiamente de los campos antes acotados* (refiriéndose a distinciones de género en Grecia) *ni tampoco se derivan de un cierto concepto previo de número. Surgen directamente en un campo: el de unos nombres/números/palillos opuestos que se destruyen mutuamente cuando se está tratando de crear un vacío en un espacio de representación.*
>
> (Lizcano, 1993; Pág. 19)

Agrega más adelante, tratando de distinguir la naturaleza conceptual de lo «negativo» en dos escenarios socioculturales distantes geográficamente y en el tiempo;

> *Fuertemente arraigado en el imaginario simbólico Chino, unos criterios pre-lógicos y pre-conceptuales de «oposición» y de «equivalencia» parecen cumplir aquí el papel de organización de la experiencia que en Grecia desempeñan los principios «de no contradicción», «de identidad» «de abstracción». El hallazgo de nuevos modos de negatividad formal nos lleva así a examinar las condiciones de*

posibilidad de ciertas construcciones teóricas, los rasgos diferenciales e una episteme que, como en China, funda su racionalidad en complejos simbólicos y esquemas pre-conceptuales bien distintos a los nuestros.

(Lizcano, 1993; pág. 20)

Es importante apuntar, que al situarnos en un escenario sociocultural contemporáneo, el término «negatividad» se aleja de las concepciones descritas en Lizcano, al igual si lo hiciéramos al preguntarnos sus significados asociados en otros momentos y espacios culturales.

En Cantoral, (2001) se puede observar una descripción más precisa la influencia de las actividades humanas de socialización en el desarrollo de la matemática en el marco de un escenario socio-cultural específico;

Es un hecho conocido que no todas las culturas desarrollaron la noción del cero. Particularmente el cero fue inventado en aquellos escenarios socio-culturales en los que el imaginario colectivo y el tratamiento que este hacía de las representaciones de ausencia – como muerte por ejemplo -, el vacío - como complementariedad del espacio infinito-, o la transición de estado contiguos y continuos permitió la elaboración teórica del cero como representación dinámica particular.

(Cantoral, 2001; pág. 67)

Al situarnos en un escenario sociocultural en el que los códigos de ausencia o vacío no están incorporados a la cosmogonía cultural, podremos encontrar dificultades para asimilar ciertos elementos de las conceptualizaciones originadas en otros momentos y contextos. Esta es una observación que aporta la perspectiva socioepistemológica en relación a la construcción del conocimiento, la cual sitúa al individuo como parte de un sistema cultural que comparte costumbres, creencias y tradiciones.

Estrategias en la investigación epistemológica; revisión de libros de Texto [3]

Propósitos en la revisión bibliográfica

A través de un estudio socioepistemológico al discurso matemático escolar, se busca determinar el tratamiento que hace el autor de libro de texto a las ideas del cálculo, a fin de establecer su naturaleza epistemológica e identificar los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas.

Este estudio busca también determinar la perspectiva y las concepciones de la matemática que transmite a fin de identificar sus efectos en el aprendizaje. Cabe advertir que aún siendo libros «de cálculo diferencial», el tratamiento de las ideas puede tener un sentido distinto[4], entre otras cosas, por el enfoque que domina el libro o bien al énfasis en el uso de ciertos instrumentos o ciertas tecnologías.

[3] Distinguimos un «análisis **didáctico** a las obras de texto» de un «análisis **epistemológico** a las obras de texto», por las preguntas que guían cada estudio. Para el primer caso, nos planteamos en escenario escolar, el tratamiento de la matemática para un fin específico que es el aprendizaje, en este caso podemos observar en las obras de texto, estrategias de comunicación, ejemplos para introducir el tema, dibujos o metáforas para el tratamiento didáctico de la matemática. En el análisis epistemológico las preguntas se orientan a definir la naturaleza del conocimiento tomando como referencia su marco epistémico, lo que el autor está entendiendo por cierto concepto matemático, el uso que se le otorga al conocimiento mismo y los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas en relación a su propia concepción del contenido matemático.

[4] Cambio de referente epistemológico.

Caracterización de las formas de *comunicación* de ideas matemáticas; Marco Teórico para el análisis de libros

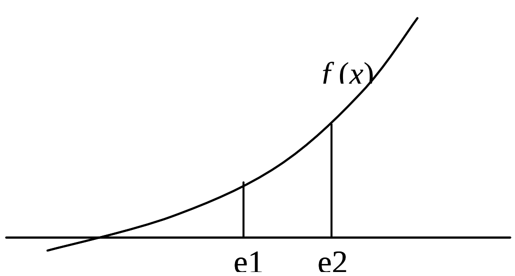
a. Argumentaciones sobre lo geométrico con apoyo visual

Tal y como lo demuestra el trabajo histórico – epistemológico de (Youschkevitech, 1976), la clasificación de las formas gráficas constituye un aspecto importante en el estudio de las funciones. Al respecto uno de los trabajos más trascendentes es el de Descartes, a quien además se le debe el relacionar a una curva algebraica plana con una ecuación. Descartes propuso una clasificación atendiendo a la naturaleza de las gráficas; mecánicas para aquellas cuya forma estaba asociada al movimiento de instrumentos o máquinas y geométricas para aquellas cuyo trazo correspondía a la habilidad humana.

El interés por organizar las curvas se formuló a partir de reconocer que en ellas existe un cúmulo de información el cual ofrece, no sólo un acercamiento a la naturaleza de los fenómenos sino además la posibilidad de determinar comportamientos, alcances, incluso formular predicciones y determinar patrones. Estas habilidades propias de un pensamiento funcional se convierten en herramientas fundamentales para entender los procesos de variación y cambio.

Por ejemplo, determinar si un fenómeno se comporta en forma creciente o decreciente, requiere por parte del lector ciertas habilidades de lectura y el uso de algunos criterios tales como la comparación, identificación de formas, estimaciones y cálculos, por citar algunas.

¿es $f(x)$ creciente?



Estrategia

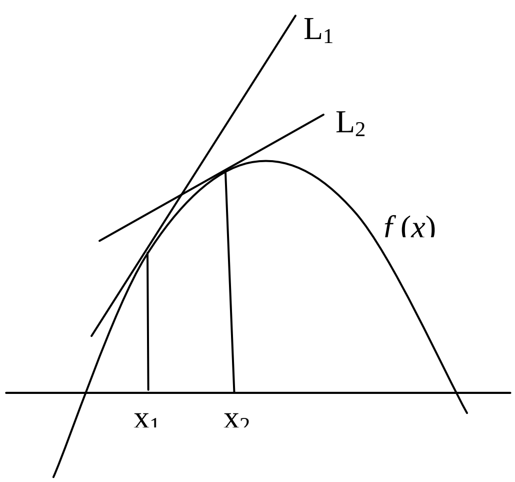
Criterio: comparación de estados
Argumento: Alturas de las ordenadas
Referente: geométrico - visual

El ejercicio visual conduce a distinguir dos puntos sobre el eje *x*, en cada punto una ordenada y finalmente comparar su magnitud. Al usar el criterio de comparación sobre las alturas de las ordenadas viene una conclusión del tipo; e1 < e2, con |e2 – e1|< ε, entonces *f* (*x*) es creciente. Todas estas operaciones se integran a una habilidad que tras una breve incursión visual determina si *f* (*x*) es creciente o decreciente.

b. Argumentaciones sobre lo geométrico - analítico

A medida que se profundiza en el estudio del cálculo, las construcciones geométricas que parecían más o menos simples, se vuelven complejas debido a que se agregan al escenario de estudio nuevos objetos (tales como la idea de tangente, grado, inclinación) los cuales se construyen a partir de objetos que pueden ser abstraídos de una simple incursión.

Veamos por ejemplo una estrategia usada para responder a la siguiente pregunta; ¿ *f* ’(x) es creciente?



Estrategia

Criterio: comparación grados de inclinación
Argumento: Inclinación de las rectas tangentes
Referente: geométrico - analítico

En un primer momento se identifican y toman como referencia los puntos x_1 y x_2 sobre le eje *x*, se trazan las ordenadas correspondientes, se determina la recta tangente a cada punto sobre la curva. Entonces es posible determinar cómo es *f* ’ (*x*); L_1 tiene un ángulo mayor que L_2, por lo tanto $f'(x_1) > f'(x_2)$, concluyendo algo como: si $x_1 < x_2$, con $| x_2 - x_1 < \varepsilon$, entonces $f'(x)$ es decreciente.

Observemos que para responder al planteamiento inicial se exige una abstracción sobre los trazos geométricos, ya que éstos por si solos son ahora insuficientes para responder.

c. Argumentaciones sobre lo algebraico

El rasgo más representativo de este escenario es el uso de la manipulación simbólica para expresar situaciones matemáticas.

En relación a este escenario (Douady, 1995), advierte que el desarrollo algebraico sobre un concepto matemático obliga justamente, al olvido del contexto donde se generó. De tal forma que las expresiones algebraicas, tal y como las conocemos, se presentan como una síntesis refinada de las discusiones matemáticas.

Otro de los riesgos, que advierte Douady, es una tendencia natural dentro de los sistemas escolares a reducir el tratamiento algebraico de los conceptos matemáticos a una colección de reglas y procedimientos, provocado fundamentalmente por un manejo de los algoritmos encaminado únicamente a desarrollar y fortalecer habilidades operatorias.

El escenario algebraico describe relaciones numéricas con literales y constantes bajo principios o leyes matemáticas. Veamos por ejemplo en Cantoral, (1998);

> *… una forma de encontrar la derivada de una función de un punto, consiste en desarrollarse en serie de potencias entorno del punto en cuestión. Veamos mediante un ejemplo cómo es que operan estas ideas. Considere la función dada por la expresión $f(x)=x^3$, de la cual quiere*

conocer la derivada en x., Si seguimos la estrategia de Cauchy tendremos:

$$f'(x) = \lim_{n\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{n\to 0} \frac{x^3 - 3x^3h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$
$$\lim_{n\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Si seguimos en cambio la estrategia de Lagrange, tendremos:

$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, así que la derivada de f es el coeficiente de h es decir, $3x^2$

d. Argumentaciones sobre lo Analítico

El escenario analítico tiende a confundirse con el algebraico a consecuencia de una frontera que es muy poco perceptible. Sin pretender una definición; una aproximación analítica involucra funciones mentales avanzadas (como la variación, la predicción) para la determinación de leyes que rigen el comportamiento de un sistema.

Cantoral, (2001), describe algunos acercamientos analíticos en relación a la serie de Taylor, en ellos es posible observar diversos elementos matemáticos que conforman un sistema en el que la *variación* está en el centro del escenario.

El modelo de regularidad binomial, se caracteriza por percibir y utilizar una regularidad en los desarrollos binomiales. Centra su atención en los números y las magnitudes variables, aunque de éstas, no precisa su variación sino su semejanza operativa con los

> *números… Entre los resultados característicos se cuentan, Triángulo de Pascal, Binomio de Newton, y fórmula de interpolación de Newton-Gregory. La serie aparece en todos ellos aún cuando no se le reconozca como patrón organizador.*
>
> *El modelo de variable-variación, consiste en reconocer y utilizar sistemáticamente, la idea de que la parte contiene la información del todo, es decir, en tanto que se estudia la variación de unas magnitudes variables respecto de otras ya sea físicas o geométricas, se reconoce que la variación instantánea o puntual proporciona la información integral del fenómeno.*

Otro ejemplo que clarifica una formulación analítica es expresada por el modelo de la *aproximación polinomial*.

> *…resulta muy cercano, a nuestra práctica sobre la Serie de Taylor y se caracteriza por reducir el cálculo de la función, al cálculo de polinomios. Para ello se construye una sucesión de éstos que converja a la función determinada y que hereden el comportamiento puntual de la función, para lo que también se estima el margen de error.*

Se puede observar que no basta reducir el problema a replantear el cálculo de una función al cálculo de polinomios, pues evidentemente no se trata de un ejercicio algorítmico. Existe, desde la perspectiva del autor, un sistema que proporciona un sentido general.

Capítulo III

En donde se analiza el contenido matemático
en los libros de texto contemporáneos

El tratamiento del tema en el discurso matemático escolar

Análisis epistemológico de la matemática del punto de inflexión en Granville

Planos de análisis

a. Notas previas

Este libro es uno de los más utilizados en las escuelas de ingeniería, data de principios del siglo pasado y se ha mantenido hasta la fecha como una obra de consulta por estudiantes y profesores por lo que representa un caso de especial interés para nuestro estudio.

El estudio del punto de inflexión se ubica en el capítulo VI después de máximos y mínimos y previo a las aplicaciones de movimiento rectilíneo. Observamos que es precisamente el título del capítulo lo que define la naturaleza del punto de inflexión; se busca tener un escenario que permita practicar el uso de la derivación como método algorítmico –como se observa en el índice del libro- definiendo las derivadas sucesivas, los métodos para máximos y mínimos, estudio del punto de inflexión.

b. ubicación

Capítulo VI después de haber visto máximos y mínimos y previo a las aplicaciones de movimiento rectilíneo.

Sus capítulos de estudio en el tema de Cálculo Diferencial son:

Capítulo I, Resumen de fórmulas.

Capítulo I I, Variables, funciones y límites.

Capítulo I I I, Derivación.

Capítulo IV, Reglas para derivar funciones algebraicas

Capítulo V, Aplicaciones de la derivada.

Capítulo VI, Derivadas sucesivas de una función. Aplicaciones

- Definición de las derivadas sucesivas
- Obtención de las derivadas sucesivas en funciones implícitas
- Sentido de la concavidad de una curva
- Segundo método para determinar máximos y mínimos
- **Puntos de inflexión**
- Método para construcción de curvas dadas por su ecuación
- Aceleración en el movimiento rectilíneo

Capítulo VII, Derivación de funciones trascendentes. Aplicaciones.

Capítulo VIII, Aplicaciones a las ecuaciones paramétricas y polares y al cálculo de las raíces de una ecuación.

c. Antecedentes al tema

Los antecedentes directos al estudio de las derivadas y del punto de inflexión son el concepto de función y el de derivadas sucesivas, principalmente por la naturaleza que el autor les asigna. En el caso de la función, Granville concibe que exista una relación entre variables, aunque para hacer referencia a la gráfica de una función basa su explicación en la idea dinámica de que un punto se desplaza sobre el plano. Esto demuestra que existe una concepción dinámica de las curvas a lo cual, los puntos en una curva tienen un especial interés.

d. Perspectiva de las Derivadas Sucesivas

El tratamiento a las derivadas sucesivas es a través de considerar la segunda derivada como derivada de la primera, favoreciendo la idea de que la derivada es un proceso algorítmico que busca determinar nuevas funciones.

> *... la derivada de una función de x es también una función de x. Puede ocurrir que esta nueva función sea también derivable; en este caso la derivada de la primera derivada se llama la segunda derivada de la función primitiva. Análogamente, la derivada de la segunda derivada se llama la tercera derivada y así, sucesivamente, hasta la enésima derivada.* (Pág. 89)

Esto demuestra que no hay una caracterización a los distintos órdenes de derivadas, porque se asume que la derivada de una función es una nueva función cuyo proceso se repite indefinidamente, así la noción de segunda, tercera, cuarta… derivadas, no existe como tal, pues son al final primeras derivadas de cierta función.

e. Criterios para determinar inflexiones en curvas

Hemos recogido algunas definiciones que aparecen en la obra de forma implícita o explícita

1. Argumento Geométrico

Se trata de una definición que se sustenta en argumentaciones geométricas, no tiene mayor problematización que una necesidad externa de ubicar el punto de inflexión en una curva.

(1) "Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos"

(Granville, 1986; pág. 96)

Esta explicación se fundamenta en los criterios para determinar concavidades a partir de la posición de la recta tangente los cuales han sido discutidos en páginas anteriores de la obra.

55. Sentido de la concavidad de una curva. Si el punto P(x, y) describe una curva, la pendiente de la tangente en P varía. Cuando la tangente queda debajo de a curva (fig. 37), el arco es cóncavo hacia arriba; si la tangente queda arriba de la curva (fig. 38), el arco es cóncavo hacia abajo."

(Granville, 1986; pág. 92)

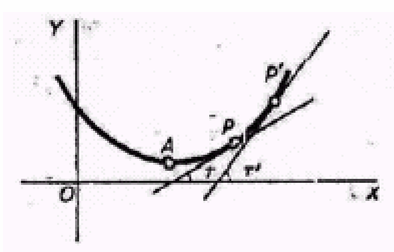


Fig. 37

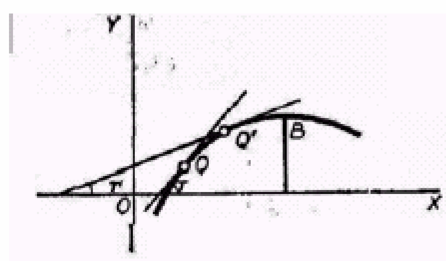


Fig. 38

El argumento expuesto anteriormente complementa a la definición (1) al escribir;

En a figura 40, B es un punto de inflexión

(Granville, 1986; pág. 96)

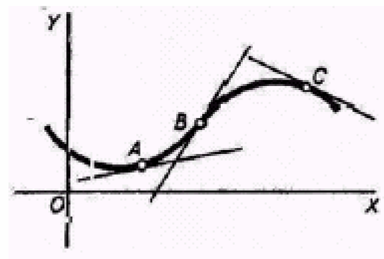


Fig. 40

2. Argumento Analítico

(2) ... la segunda derivada cambiará de signo en ese punto, y si es continua debe anularse ... luego se verifica la siguiente igualdad:

En puntos de inflexión, $f''(x) = 0$

(Granville, 1986; pág. 96)

3. Argumento Algebraico (al que llama regla)

En lo que sigue, Granville explica su método (al que llama "regla") para encontrar el punto de inflexión para el caso anterior.

Resolviendo la ecuación que resulta de (2), se obtiene las abscisas de los puntos de inflexión

Primer paso. Se halla $f''(x)$

Segundo paso. Se iguala a cero f ''(x), se iguala la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.

Tercer paso: Se calcula f ''(x), primero para valores de, x menores, después un poco mayores, que cada una de las raíces obtenidas en el segundo paso. Si f ''(x) cambia de signo, tenemos un punto de inflexión.

(Granville, 1986; pág. 96)

4. Argumento Geométrico - Analítico

Usando el argumento (1) relativo a la posición de la recta tangente respecto a la curva, el autor describe otra definición de punto de inflexión.

(3) "El lector debe observar que cerca de un punto donde la curva es cóncava hacia arriba (como en A) (fig. 40) la curva está arriba de la tangente, y en un punto donde la curva es cóncava hacia abajo (como en C) la curva está debajo de la tangente. El punto de inflexión (como en B), es evidente que la tangente atraviesa la curva. (Pág. 96)

f. Problemas propuestos

Los problemas que propone Granville, están orientados a practicar los métodos algorítmicos de derivación, observemos por ejemplo el siguiente;

Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de la siguiente curva: $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$

(Grnaville, 1986; pág. 97)

g. notas finales

En una primera parte el punto de inflexión se asocia con la posición de las tangentes sobre la curva, por lo que el cálculo del punto de inflexión se relaciona a la búsqueda del cambio de la posición de la recta tangente respecto a la curva, asumiendo que existe un punto en donde la recta tangente no está ni por debajo ni por encima de la curva (modelo explicativo). Por otro lado está el énfasis algorítmico al estudio de las derivadas en donde se puede observar que toda la discusión del punto de inflexión se encamina a aprenderse una regla para ubicarlo (modelo operatorio). La conexión entre los dos modelos es mínima; en la primera parte se trata de justificar su naturaleza, en la segunda se olvida la justificación y se recurre a la algoritmia.

Análisis epistemológico de la matemática del punto de inflexión en Stewart J.

Planos de análisis

a. Notas previas

Esta obra de texto ha ganado espacios importantes en el ámbito escolar, una de sus principales características es el renovado tratamiento de la matemática a través del uso de la tecnología, el cual es posible observar a lo largo de los capítulos y en la zona de ejercicios donde explícitamente hay actividades para realizarse con la calculadora graficadora o con programas de cómputo. Este enfoque proporciona un acercamiento numérico y gráfico al estudio del cálculo, lo que permite tener más escenarios de significación.

b. ubicación

El estudio del punto de inflexión se encuentra en el *Capítulo 4*, en el que se estudian los teoremas de valor medio y el trazado de curvas, justamente antes del trazado de curva y graficación y un poco después del estudio de máximos y mínimos y criterios de la primer derivada.

Ubicación del tema

Capítulo 0: Repaso y preámbulo

Capítulo 1: Límites y tasas de cambio

Capítulo 2: Derivadas

Capítulo 3: Funciones Inversas

Capítulo 4: Teorema del valor medio y trazado de curvas

- Valores máximos y mínimos
- Teorema del valor medio
- Funciones monótonas y la prueba de la primera derivada
- **Concavidad y puntos de inflexión**
- Trazado de curvas
- Graficación mediante cálculo diferencial y con calculadoras
- Problemas aplicados a máximos y mínimos
- Aplicaciones a la economía
- Antiderivadas

Capítulo 5: Integrales

Capítulo 6. Aplicaciones de la integración

c. **Antecedentes al tema**

El capítulo en donde se encuentra el estudio del punto de inflexión se combinan distintos argumentos; teoremas, criterios sustentados en la información que aportan las derivadas, trazado de curvas y uso de la tecnología. Esta perspectiva intenta organiza el estudio del cálculo, integrando en un capítulo con varios acercamientos que buscan ofrecer una visión ampliada, no obstante se observa que las temáticas permanecen distantes.

Uno de de los antecedentes más relevantes al estudio de la derivada y del punto de inflexión, es el tema de derivadas de orden superior vistas nuevamente como un proceso iterativo de derivar, obtenidas una vez que se ha derivado una función primitiva.

d. Perspectiva de las Derivadas Sucesivas

Vistas como un proceso iterativo de derivar, obtenidas una vez que se ha derivado una función primitiva.

(I) Si ƒ es una función diferenciable, su derivada ƒ' también es una función, así que ƒ' puede tener una derivada por derecho propio. Dicha derivada se representa como (ƒ')'= ƒ''. Esta nueva función ƒ', se llama segunda derivada de ƒ, por serlo de la derivada de ƒ, esto es,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

De igual forma, la tercera derivada, f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$

(Stewart, J., 1998; pág. 164)

e. Criterios para determinar inflexiones en curvas

1. Argumento Geométrico (sin apoyo visual)

Una de las definiciones más importantes, es la que explica la naturaleza misma del punto de inflexión, reconociéndolo como un lugar característico sobre la curva, la cual distingue aquellas curvas «cóncavas hacia arriba» y «cóncavas hacia abajo».

Un punto P de una curva se llama punto de inflexión si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa

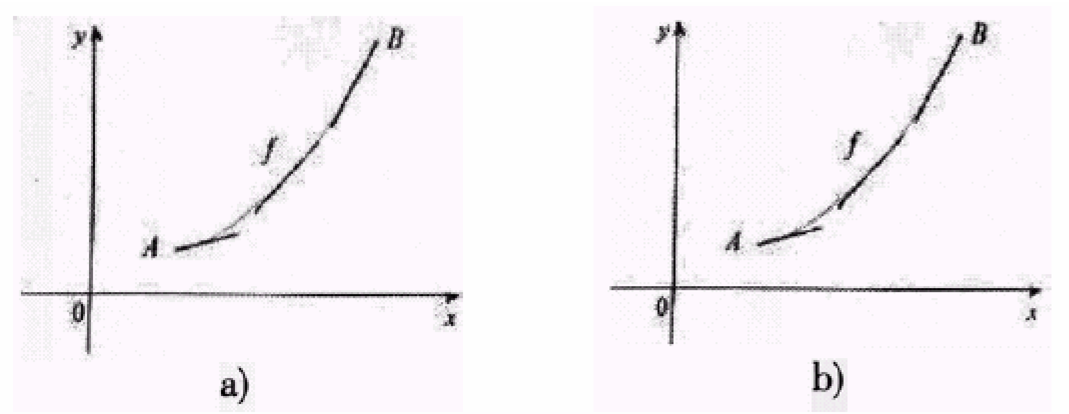
(Stewart, J., 1998; pág. 275)

2. Argumento Geométrico – Analítico

Esta definición distingue la posición de las tangentes sobre la curva y caracteriza al punto de inflexión en un ejercicio de comparación, entre la forma de la curva –cóncava o convexa- y las tangentes generadas en la curva.

... en diversos puntos de la figura 2 se han trazado tangentes a esas curvas ... en a), la curva queda arriba de las tangentes, y se dice que f es cóncava hacia arriba en [a, b], en b), la curva está debajo de las tangentes, y se dice que es cóncava hacia abajo en [a, b]

(Stwart, J., 1998; pp. 273-274)



3. Argumento Geométrica – Visual

Otra definición, también geométrica, identifica al punto de inflexión como el lugar donde las rectas tangentes cambian de lugar en la curva. (En referencia al argumento descrito anteriormente)

> *... si la curva tiene una tangente en un punto de inflexión, la curva cruza la tangente allí…*

(Stewart, J., 1998; pág. 275)

4. Argumento Geométrico – Analítico

Otra definición se basa en determinar los intervalos de concavidad en la curva, a través del criterio que presentó previamente, e identificar el punto donde suceden estos cambios de concavidad.

> «*PRUEBA DE CONCAVIDAD*» *Si ƒ tiene segunda derivada en un intervalo I*
>
> *a) si ƒ‘(x)>0 para toda x en I, entonces la gráfica de ƒ es cóncava hacia arriba en I*

b) Si $f'(x)<0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I

(Stewart, J. 1998; pág. 274)

... de acuerdo con la prueba de concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambie de signo.

(Stewart, J., 1998; pág. 275)

f. Problemas propuestos

Los problemas están orientados a practicar los métodos algorítmicos de derivación, aunque, cabe señalar, que aparece el trazado de curvas como actividad adicional.

Determina dónde es cóncava hacia arriba la curva $y = x3 - 3x + 1$ y dónde es cóncava hacia abajo. Sitúa los puntos de inflexión y traza la curva.

(Stewart, J., 1998; pág. 275)

g. Notas finales

La idea de punto de inflexión, emerge como resultado del análisis realizado a las curvas geométricas en cuanto a su forma, aunque toda esta argumentación se reduce finalmente en el uso de estrategias algorítmicas para identificar el lugar de inflexión sobre la curva.

Breves conclusiones

El análisis realizado a los libros de texto nos ha permitido documentar un limitado tratamiento del punto de inflexión. A pesar de que los autores han elaborado un discurso que integra varios acercamientos, el algorítmico prevalece y es el que se fortalece en los ejercicios propuestos.

El punto de inflexión adquiere sentido e importancia hasta después de estudiar el tema de las derivadas sucesivas, específicamente cuando se presenta *a escena* el método de derivación. Una vez que se puede obtener la derivada, la derivada de la deriva, es entonces cuando se da paso a explicar «la principal aplicación de las segundas derivadas».

El punto de inflexión aparece como *legitimador* del estudio de las segundas derivadas, porque «*... ya sabemos para que se estudian…*»[1]. Este punto de vista, que se encuentra presente en muchos estudiantes en diferentes lugares e instituciones, refleja una concepción del cálculo como herramienta, provocada en cierta medida, por la visión algorítmica que se tiene de los conceptos del cálculo.

En nuestra opinión, se deben propiciar condiciones para un estudio de la matemática del cálculo, no se reduzca a la memorización de procedimientos algorítmicos, que se favorezca la exploración en otros ámbitos y permita la generación de espacios de significación de las ideas.

[1] Explicación que aporta una estudiante de primer año de licenciatura en una carrera que no incorpora cursos de matemáticas en su tira curricular. Entrevista realizada en el verano de 1999.

Caracterizaciones del punto de inflexión en las obras didácticas

Antecedentes

El modelo teórico que explica la funcionalidad del sistema didáctico está representado por un triángulo en cuyos vértices se ubican en interrelación mutua y constantes, el profesor, los estudiantes, el saber. Este último, caracterizado principalmente por el «discurso matemático escolar», es decir, *aquello que se pone en juego* en el proceso de aprendizaje.

En una primera aproximación, el discurso matemático es una elaboración por la que se comparten las ideas matemáticas hacia una comunidad, se refuerzan paradigmas y se transmiten ideologías (Van Dijk, 1998). El método de comunicación puede ser verbal aunque la *escrita* goza de la garantía de permanencia.

En el contexto del salón de clase, el libro de texto juega un papel importante para la comunicación de un discurso matemático, pues entre otras cosas, tiene la función de validar «lo que el profesor dice».

Sin embargo, nos enfrentamos a reconocer en él una *génesis ficticia* (Brousseau, 1987) a consecuencia de que la matemática se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, por lo que su introducción al sistema de enseñanza obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2000), en este proceso las ideas matemáticas son presentadas en forma comprimida y refinada, privadas de sus significados primarios los cuales le son arrancados y aislados, de manera que aquellos contextos y situaciones que les dieron origen, sentido, motivo, son olvidadas.

La forma de legitimar su origen en el salón de clase es creando una *génesis ficticia*, que le proporcione una identidad para que sean estudiados. Al respecto, el programa socioepistemológico de investigación, considera importante problematizar el discurso matemático escolar y proponer, a través de la investigación, la incorporación de situaciones didácticamente robusta para favorecer aprendizajes.

El análisis de aquello que se erige como discurso escolar plasmado en los libros de texto, permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas escolares.

De este modo, la forma de enunciar una definición o un teorema depende del paradigma que se quiere reproducir, de la disciplina de aplicación del saber matemático, del uso de ciertos métodos de estudio de la matemática.

Acercamiento a las caracterizaciones del punto de inflexión

Granville, Cálculo diferencial e integral.

Referente: *Geométrico – Visual* Argumento: *Cambio de concavidad* Criterio: *Cambio de forma*	*Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos*

Referente: *Geométrico – Analítico* Argumento: *Posición de la tangente sobre la curva* Criterio: *Lugar en donde la tangente cruza la curva*	*(3) El lector debe observar que cerca de un punto donde la curva es cóncava hacia arriba la curva está arriba de la tangente, y en un punto donde la curva es cóncava hacia abajo (como en C) la curva está debajo de la tangente. El punto de inflexión (como en B), es evidente que la tangente atraviesa la curva.*
Referente: *Analítico* Argumento: *Cambio de signo de la segunda derivada* Criterio: *Si cambia de positivo a negativo y viceversa*	***... la segunda derivada cambiará de signo en ese punto****, y si es continua debe anularse ... luego se verifica la siguiente igualdad:* *En puntos de inflexión, f''(x) = 0*
Referente: *Analítico - Algebraico* Argumento: *Valor de la segunda derivada* Criterio: *Si es igual a cero*	*... la segunda derivada cambiará de signo en ese punto, y si es continua debe anularse ... luego se verifica la siguiente igualdad:* ***En puntos de inflexión, f''(x) = 0***

Referente: *Algebraico* Argumento: *Regla de los cuatro pasos* Criterio: *condición de la segunda derivada*	*Primer paso. Se halla f’’(x)* *Segundo paso. Se iguala a cero f’’(x), se iguala la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.* *Tercer paso: Se calcula f’’(x), primero para valores de, x menores, después un poco mayores, que cada una de las raíces obtenidas en el segundo paso. Si f’’(x) cambia de signo, tenemos un punto de inflexión.*

Stewart. Cálculo, Trascendentes Tempranas

Referente: *Geométrico – Visual* Argumento: *Cambio de concavidad* Criterio: *Cambio de forma*	*Un punto P de una curva se llama punto de inflexión si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.*
Referente: *Geométrico – Analítico* Argumento: *Posición de la tangente sobre la curva* Criterio: *Lugar en donde la tangente cruza la curva*	*En diversos puntos* de una curva *en [a,b], se han trazado tangentes a esas curvas, la curva que queda arriba de las tangentes, se dice que es cóncava hacia arriba en [a,b], la curva que está debajo de las tangentes se dice que es cóncava hacia abajo en [a,b].*
Referente: *Analítico* Argumento: *Cambio de signo de la segunda derivada* Criterio: *Si cambia de positivo a negativo y viceversa*	*…de acuerdo con la prueba de la concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada* ***cambie*** *de signo.* *PRUEBA DE CONCAVIDAD; Si f tiene segunda derivada en un intervalo I* *a) si f'(x)>0 para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I* *b) Si f'(x)<0 para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I*

Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas.
Cálculo diferencial.

Referente: *Analítico - Geométrico* Argumento:*Característica de la primer derivada* Criterio: *Creciente o bien decreciente , pero no alternadas.*	*Para que* $f(x_0)$ *sea la abscisa de un punto de inflexión de la gráfica f, la función será «antes» y «después» de* x_0 *creciente o bien decreciente, pero no alternadas.*
Referente: *Analítico* Argumento: *Condición de la segunda derivada* Criterio: *Cambio de signo*	*Si existe un intervalo abierto I que contenga a* x_0*, con f''(*x_0*)=0, diremos que* *f(*x_0*) es un punto de inflexión horizontal en f, si* 1. *para toda* $x \in I$ *, con x<* x_0*; se tiene que f''(x)>0, y* 2. *para toda* $x \in I$ *, con x>* x_0*; se tiene que f''(x)<0* *o bien* 1. *para toda* $x \in I$ *, con x<* x_0*; se tiene que f''(x)<0, y* 2. *para toda* $x \in I$ *, con x>* x_0*; se tiene que f''(x)>0* *Lo anterior se puede resumir de la siguiente manera:* *f(*x_0*) es un punto de inflexión de la función, si para cuales quiera* $x_1, x_2 \in I$ *, con* $x_1 < x_0 < x_2$*, se tiene f''(*x_1*) f''(*x_2*) < 0* *Así mismo diremos que* *f es cóncava hacia arriba en x, si f''(x)>0* *f es cóncava hacia abajo en x, si f''(x)<0*

Benítez. Cálculo Diferencial, para Ciencias Básicas e Ingeniería.

Referente: *Físico* Argumento: *Concavidad* Criterio: *Cambio de concavidad*	*Las gráficas de muchas funciones se flexionan (se doblan). La flexión de una curva se conoce como concavidad la cual puede ser hacia arriba o hacia abajo.*

Notas finales

En este análisis ha observado que los libros de texto muestran múltiples caracterizaciones de los conceptos, sin embargo, no todos ellos son explícitos ni son de la atención del autor. Obsérvese por ejemplo el caso del libro de Granville, la definición «importante» del punto de inflexión recae en el método algorítmico.

Evidentemente un *buen discurso didáctico* no tendría como objetivo exhibir el mayor número de caracterizaciones en un libro de texto, se requiere de un discurso que atienda las diferencias, que cada contexto de representación expresa así como favorecer el tránsito esas caracterizaciones a través de situaciones, prácticas, usos que hagan visible al objeto estudiado.

Este análisis ha evidenciado también, la existencia de un tratamiento equivalente del punto de inflexión en las obras de Granville y de Steward, aún cuando éste último es de reciente publicación e incorpora –así lo dice explícitamente en su introducción- el uso de la tecnología para ofrecer un discurso renovado. Este dato demuestra que las principales ideas en un discurso didáctico permanecen inalteradas y aunque se renuevan adjetivos, la idea original continúa igual.

Capítulo IV

En donde se analiza la matemática
del punto de inflexión

Estrategias en la investigación epistemológica; revisión de la matemática del problema

Propósitos en la revisión matemática del problema

Hemos detallado y documentado en capítulos anteriores un reducido tratamiento del punto de inflexión en los escenarios escolares; limitándose en muchos casos a la exploración de reglas algorítmicas de las segundas derivadas o a inspecciones visuales para caracterizar las curvas.

Este análisis previo, también reporta que el punto de inflexión adquiere importancia en el *discurso matemático escolar* hasta después de estudiarse las derivadas sucesivas, no hay una *justificación* a priori de para qué estudiarse. De hecho, son las prácticas asociadas con la derivación, la que da sentido a su estudio.

Con el objetivo de reconocer al punto de inflexión como parte de un cuerpo teórico, se ha analizado el artículo de Taylor titulado «Derivatives in Calculus» publicado en la revista *American Mathematical Montly*. Este documento aparece como respuesta al diagnóstico escolar presentado en los años 40, en el que se reporta que el estudio del cálculo en el nivel medio superior está ausente de un referente *formal*. Taylor revisa la matemática del problema y sugiere una estrategia de estudio basada en un cuerpo axiomático ordenado.

Principal hipótesis en Taylor

Al integrar una amplia discusión matemática se puede proveer de fundamentos para mejorar el tratamiento escolar del cálculo. Creemos desde la postura socioepistemológica que esto es necesario, pero no suficiente.

Análisis matemático del punto de inflexión

a. Definición 3.11: Concavidad

Sea *f* una función continua en el intervalo [*a*, *b*] y derivable en el intervalo abierto (*a*, *b*). Si la curva $y = f(x)$, a través de (*a*, *b*) queda completamente sobre su tangente en cada punto de ese intervalo (excepto el punto de contacto), decimos que la curva es cóncava hacia arriba en el intervalo abierto (*a*, *b*). El requisito analítico que se debe cumplir es la siguiente desigualdad, cuando $x_1 \neq x_2$.

$$(3.12) \qquad f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\, f'(x_2) > 0$$

Aspectos relevantes

1. La condición inicial: que f sea derivable.
2. La posición que guarda la tangente respecto a la curva; «por debajo de ella…»
3. La condición analítica: si $x_1 \neq x_2$, $\rightarrow$ $f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\, f'(x_2) > 0$

Sea $f(x)$ continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). Por el teorema de valor medio para derivadas, existe un γ en (x_1, x_2), tal que

$$f'(\gamma) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

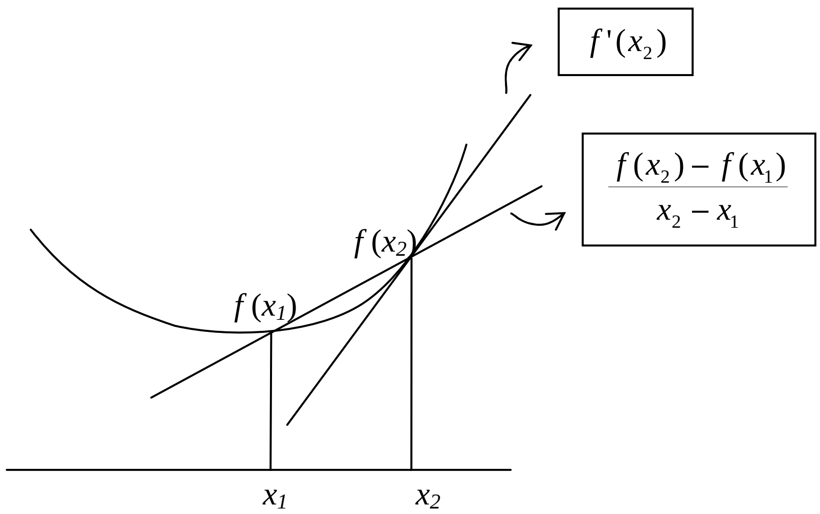
Por lo que alguna tangente es paralela a la recta que une $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$

De este planteamiento tenemos tres casos posibles;

$$si \;\; f'(\gamma) = f'(x_2)$$

$$si \;\; f'(\gamma) < f'(x_2)$$

$$si \;\; f'(\gamma) > f'(x_2)$$



$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < f'(x_2)$	Supongamos que
$f(x_2)-f(x_1) < f'(x_2)(x_2-x_1)$	
$f(x_1)-f(x_2) > -\left[f'(x_2)(x_2-x_1)\right]$	
$f(x_1)-f(x_2) > f'(x_2)(x_1-x_2)$	
$f(x_1)-f(x_2)-f'(x_2)(x_1-x_2) > 0$	Criterio: comparación Si sucede que $f'(\gamma) < f'(x_2)$, la gráfica es cóncava hacia arriba

b. Teorema 3.21: Concavidad

La curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo abierto (a, b) si, y solo si, la derivada f' existe en cada punto y además es [una función] creciente en el intervalo (a, b)

> Un teorema bicondicional;
>
> *que f' exista en (a, b) y que además sea creciente en ese mismo intervalo*

Se presentan dos casos en este teorema.

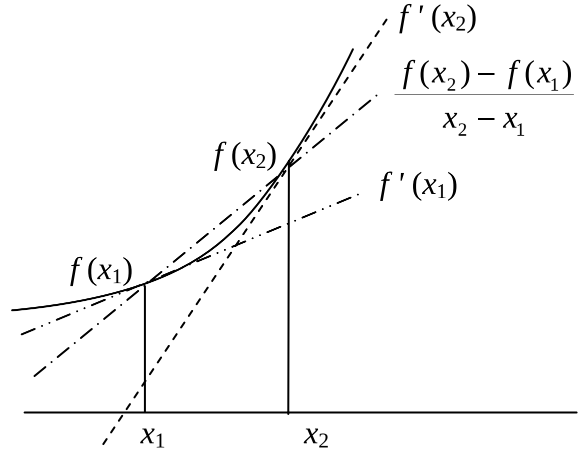
1. Supongamos una curva f la cual es cóncava hacia arriba con $x_1 < x_2$ en un intervalo abierto (a, b).

Al ser cóncava hacia arriba, entonces cumple con la condición (3.12)

(deducción de 3.12)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2)$$

Sea f una curva, tal que cumple con la condición de $x_1 < x_2$



Entonces, como se cumple que:

$$f'(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2)$$

f' es creciente.

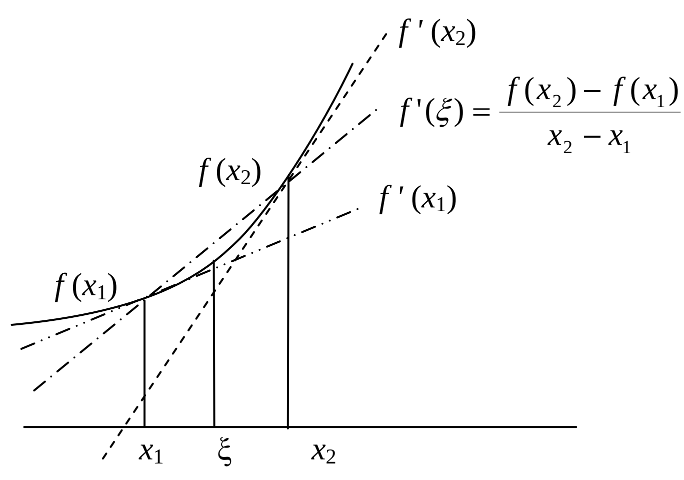
2. Supongamos ahora que f' es creciente y además $x_1 \neq x_2$. Demostramos que la función es cóncava hacia arriba.

Sea una curva f, que cumple con $x_1 \neq x_2$, en donde existe ξ que está entre x_1 y x_2

Por el teorema de valor medio para derivadas es posible que

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Con la característica de que la función es continua en el intervalo [*a*, *b*] y es derivable en el intervalo abierto (*a*, *b*)



Al plantear la diferencia	
$f'(\xi)$ y $f'(x_2)$	
$f'(\xi) - f'(x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_2)$	Suma de ambos miembros de $f'(x_2)$
$f'(\xi) - f'(x_2) + f'(x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	
$f'(\xi) - f'(x_2) + f'(x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	
$\left[f'(\xi) - f'(x_2) + f'(x_2)\right](x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$	Multiplicando la expresión por $x_2 - x_1$
$\left[f'(\xi) - f'(x_2)\right](x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) - f'(x_2)(x_2 - x_1)$	Restando a la expresión $f'(x_2)(x_2 - x_1)$
$\left[f'(\xi) - f'(x_2)\right](x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) - f'(x_2)(x_1 - x_2)$	Multiplicando por -1
$f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)f'(x_2) = (x_1 - x_2)\left[f'(\xi) - f'(x_2)\right]$	Reordenando
Como f' es creciente, $f'(\xi) - f'(x_2)$ tiene el mismo signo que $x_1 - x_2$. Por lo tanto (siguiendo 3.12) la curva es cóncava hacia arriba.	

c. Segundo Teorema de Concavidad (3.3)

3.3 Suponga que $f\,'$ existe y es continua en el intervalo abierto (a, b) y que puede tener segunda derivada finita o infinita en cada punto del intervalo (a, b). Entonces la curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo **si y sólo si** $f\,''(x) \geq 0$ y la desigualdad no cambia en ningún sub-intervalo.

Uso de la segunda derivada para determinar concavidad bajo un bicondicional. a. Que se cumpla la desigualdad $f\,''(x) \geq 0$ en el intervalo (a, b)

Modelo que exhibe las condiciones que debe de tener $f\,'$ para cumplir con $f\,''(x) \geq 0$

Teorema 2.21 Sea f derivable y continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, con derivada finita o infinita en cada punto del intervalo abierto (a, b). Suponga además que en el intervalo (a, b), se tiene $f\,'(x) \geq 0$, y que $f\,'(x)$ no se anula en ningún sub-intervalo. Entonces f es creciente en $[a, b]$		Si $f\,'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ es creciente $\Downarrow$
		Dado que $f\,'$ se asume como una nueva función, entonces es susceptible de ser derivable, por lo que es posible aplicar el anterior teorema; **Si $f\,''(x) \geq 0 \Rightarrow f\,'$ es creciente**

Teorema 3.21: Concavidad La curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo abierto (a, b) si, y solo si, la derivada f' existe en cada punto y además es [una función] creciente en el intervalo (a, b)		f es cóncava hacia arriba $\Leftrightarrow f\,'$ existe y es creciente

$\Downarrow$

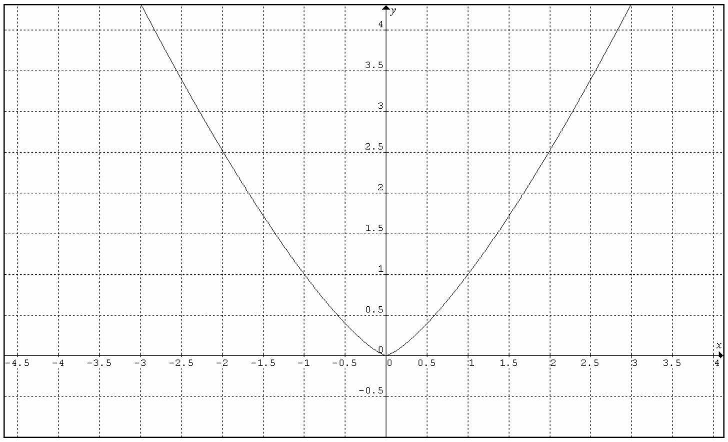
Si $f\,'$ es creciente en el intervalo abierto (a, b)…	… (por el teorema 3.21) la curva es cóncava hacia arriba.

$\Downarrow$

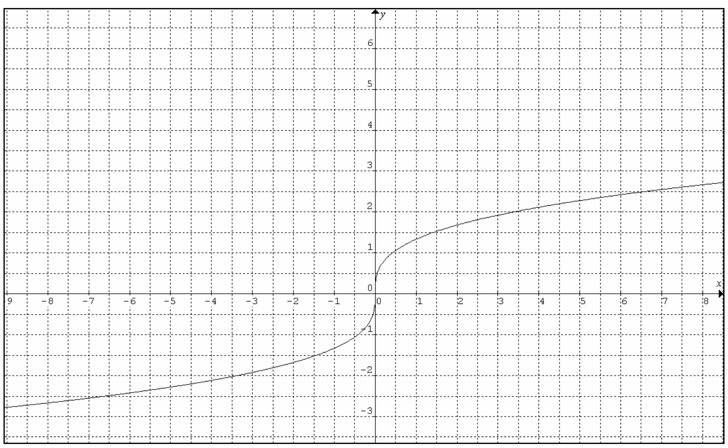
consecuentemente si f' es creciente en (a, b) tenemos que $f\,''(x) \geq 0$

Esto no fue posible establecerlo desde el teorema 2.21 dado que no es bicondicional

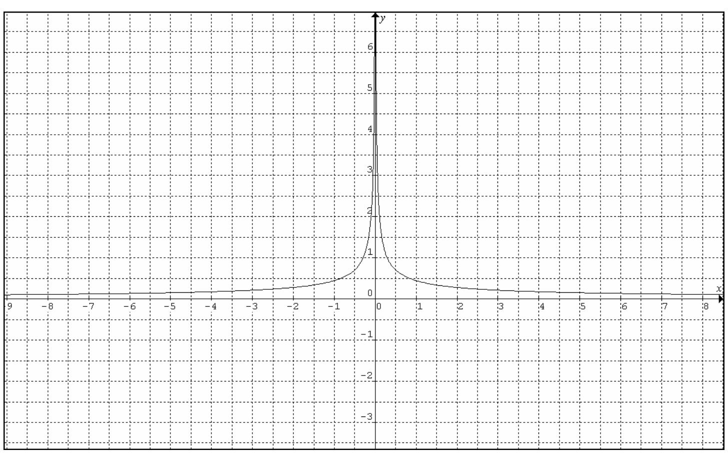
El teorema 3.3 puede probar que la curva $y = x^{\frac{4}{3}}$ es cóncava hacia arriba, aún cuando su segunda derivada en $x = 0$ no esté definido.



$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$



$f'(x) = x^{\frac{4}{3}}$



$f''(x) = x^{\frac{4}{3}}$

> 3.3 Suponga que $f\,'$ existe y es continua en el intervalo abierto (a, b) y que puede tener segunda derivada finita o infinita en cada punto del intervalo (a, b). Entonces la curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo **si y sólo si** $f\,''(x) \geq 0$ y la desigualdad no cambia en ningún sub-intervalo.

Se puede observar que la curva $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ tiene concavidad hacia arriba y $f\,''(0)$ no está definida. Si embargo el teorema advierte que f puede tener segunda derivada *finita* o *infinita*.

Al igual este teorema aplica a la curva $f(x) = x^4$, cuando nos encontramos ante $f''(0) = 0$

d. Punto de Inflexión; una definición basada en la definición de concavidad

> Definición 3.4
>
> Si la curva $y = f(x)$ es continua en una vecindad cercana en $x = a$, si f es cóncava hacia arriba por un extremo de a y cóncava hacia abajo en el otro extremo, y si f tiene derivada finita o infinita en $x = a$, entonces la curva tiene un punto de inflexión en $x = a$.

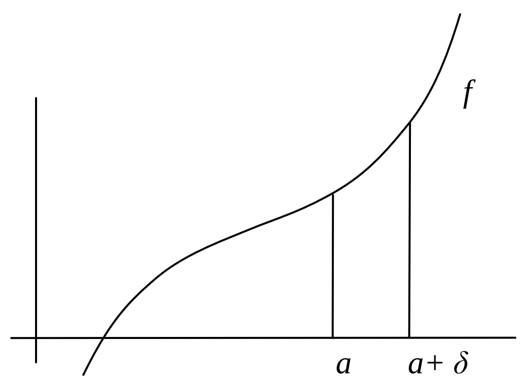
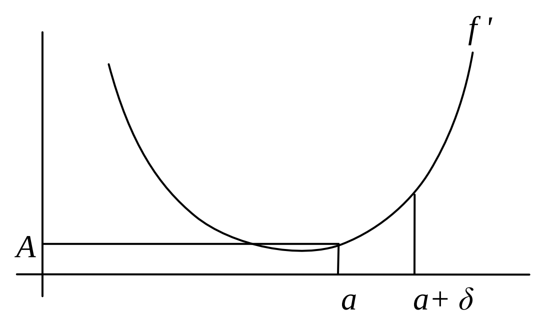
Un elemento fundamental que se agrega en esta definición son los límites *laterales*. Por ejemplo, si $f(x) \to A$ cuando $x \to p$ con valores mayores que p, decimos que A es el límite por la derecha de f en p, e indicamos esto poniendo

$$\lim_{x \to p+} f(x) = A$$

Antes de iniciar con una prueba del punto de inflexión, observaremos algo muy interesante acerca de las derivadas.

[delta]

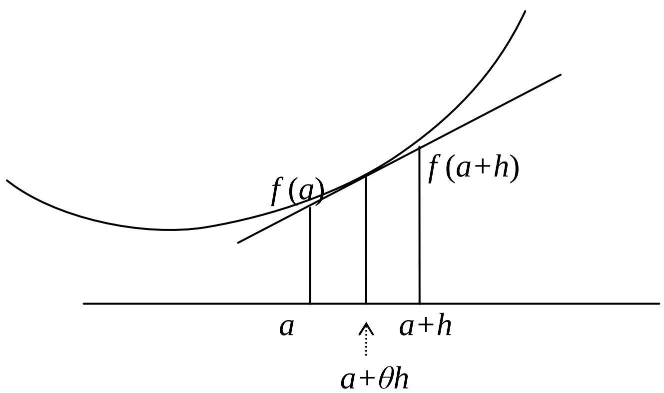
> 3.5 Sea f continua en el intervalo $[a, a+\delta]$, donde $\delta>0$, y la derivada $f\,'$ existe en $(a, a+\delta)$. Supóngase que $f\,'(x)$ se aproxima a un límite finito o infinito A cuando $x \rightarrow a$ por la derecha. Entonces f tiene una finita o infinita derivada por la derecha en $x = a$ a consecuencia de $f\,'(a)=A$

	
	$f\,'(x)$ se aproxima a un límite finito o infinito A cuando $x \rightarrow a$ por la derecha
Entonces f tiene una finita o infinita derivada por la derecha en $x=a$ a consecuencia de $f\,'(a)$=A	

Un teorema similar se tiene en límites por la izquierda.

Una prueba de este teorema es consecuencia directa del teorema de valor medio;

- teniendo $0 < h < \delta$
- h está en cualquier punto de la vecindad (a, $a+\delta$)
- Si $0 < \theta < 1$, entonces θh está muy cercano a «a»



$$f'(a+\theta h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$$

$$f'(a+\theta h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e. Teorema del punto de inflexión – segunda derivada cero

3.61 Sea f' definida en una vecindad cercana a $x = a$, si f' tiene derivada finita o infinita en $x = a$, y si la curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$. Entonces $f''(a) = 0$

Resumen de ideas

a. Definición 3.11: Concavidad

La concavidad de una curva se define respecto a la posición que guarda la curva misma en comparación con una secante a una tangente, infinitamente próximas.

b. Teorema 3.21: Concavidad

Se define la concavidad de una función a través de la bicondicional *si y sólo si*; la derivada existe y además es creciente. Se presenta la demostración, primero suponiendo que f es cóncava hacia arriba, después en segunda instancia, con el caso en el que f' es creciente.

c. Teorema de Concavidad 3.3

Se define la concavidad a través de la segunda derivada usando la bicondicional *si y sólo si*. Uso de la segunda derivada para determinar concavidad (si y sólo si)

d. Punto de Inflexión; una definición a partir de la concavidad

Se define el punto de inflexión a partir de la concavidad de la curva (previamente analizada) apoyándose en los límites laterales de un punto sobre la curva (por la izquierda y por la derecha)

e. Teorema del punto de inflexión – segunda derivada cero

Una vez definida la naturaleza de punto de inflexión, se describe su identidad en la curva a través de los limites laterales, definido por el teorema 3.5, en donde se establece que f' es creciente si $x < a$, y se acerca a un valor finito o infinito del límite cuando $x \to a$. Este límite puede ser finito, e igual a $f'(a)$

Este argumento garantiza la continuidad en la curva, por lo que se establece que si f' tiene un máximo relativo [o mínimo] en $x = a$, se logra por consiguiente $f''(a) = 0$

Notas finales

Esta revisión nos ha revelado una definición axiomática del punto inflexión a través de la idea de concavidad. Como se observa, las segundas derivadas no ofrecen el sustento del concepto, su participación en este constructo *axiomático* es como argumento que determina la existencia de concavidad en una curva y para establecer una de las condiciones para la inflexión.

Se reconoce además, que el punto de inflexión tiene *identidad propia* dentro del cuerpo teórico de la matemática por lo que –asumimos-, los libros de texto no han aportado escenarios propicios para su estudio como temática independiente.

Así mismo, las recomendaciones que aporta Taylor en relación al estudio del cálculo, parece, han pasado desapercibidas por los autores de libros de texto; aún cuando el artículo se publicó en una de las más prestigiadas revistas científicas. Ideas como *derivada finita o infinita*, o la definición del punto de inflexión a través de *límites laterales*, no están presentes en el discurso matemático escolar.

Anexos; diagramas de estudio de los teoremas anteriores

Diagrama del estudio de la definición 3.21

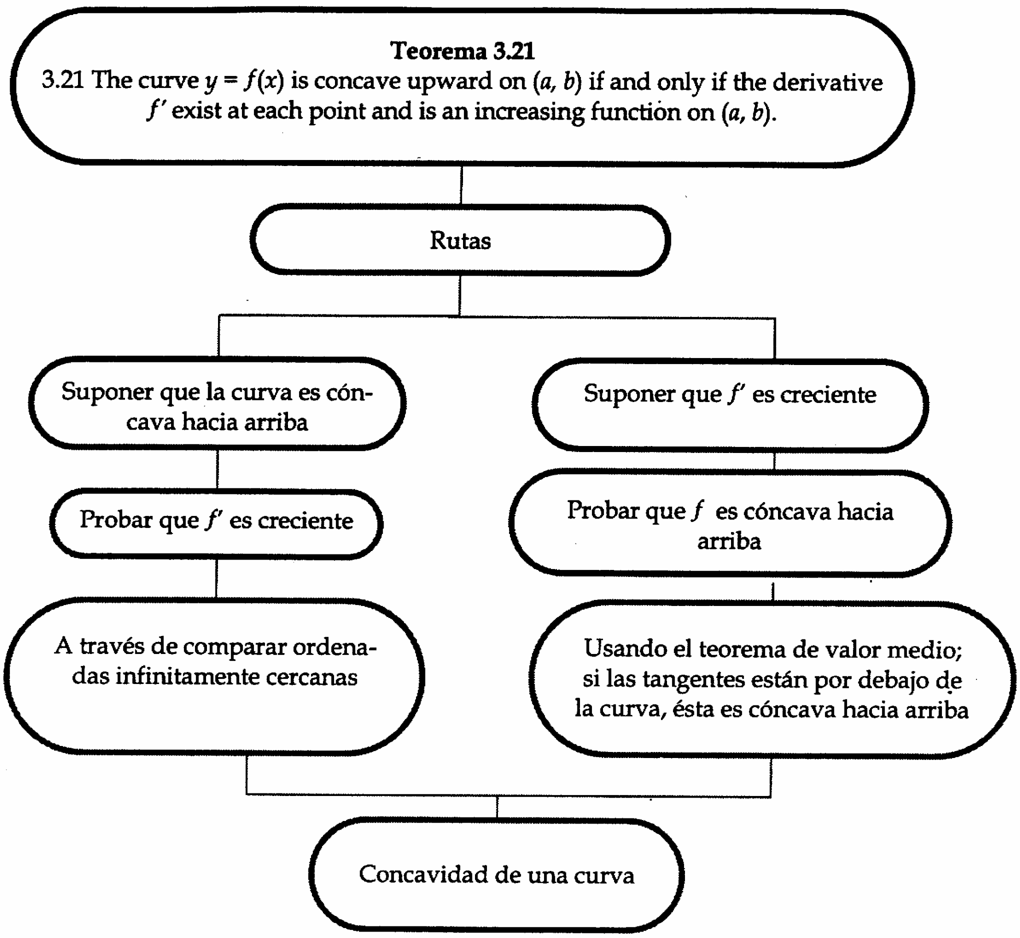
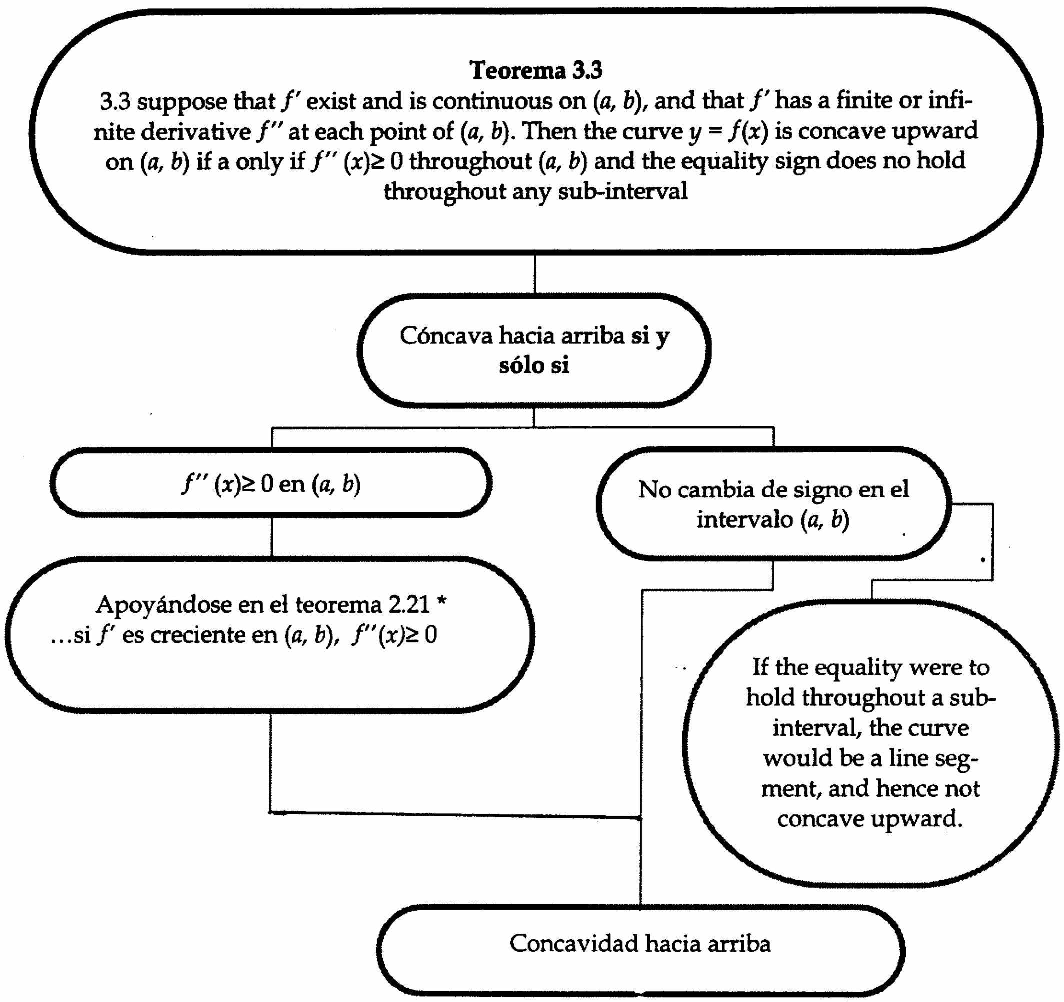


Diagrama 1

Diagrama del estudio de la definición 3.3



* Teorema 2.21
2.21. Suppose that f is defined and continuous on $[a, b]$, and that it possesses a finite or infinite derivative at each point of (a, b). Furthermore, suppose that in (a, b), $f'(x) \geq 0$, and that $f'(x)$ does not vanish identically over any subinterval. Then f is increasing on $[a, b]$

Diagrama 2

Diagrama del estudio matemático del punto de inflexión

De la definición de concavidad a la idea de punto de inflexión

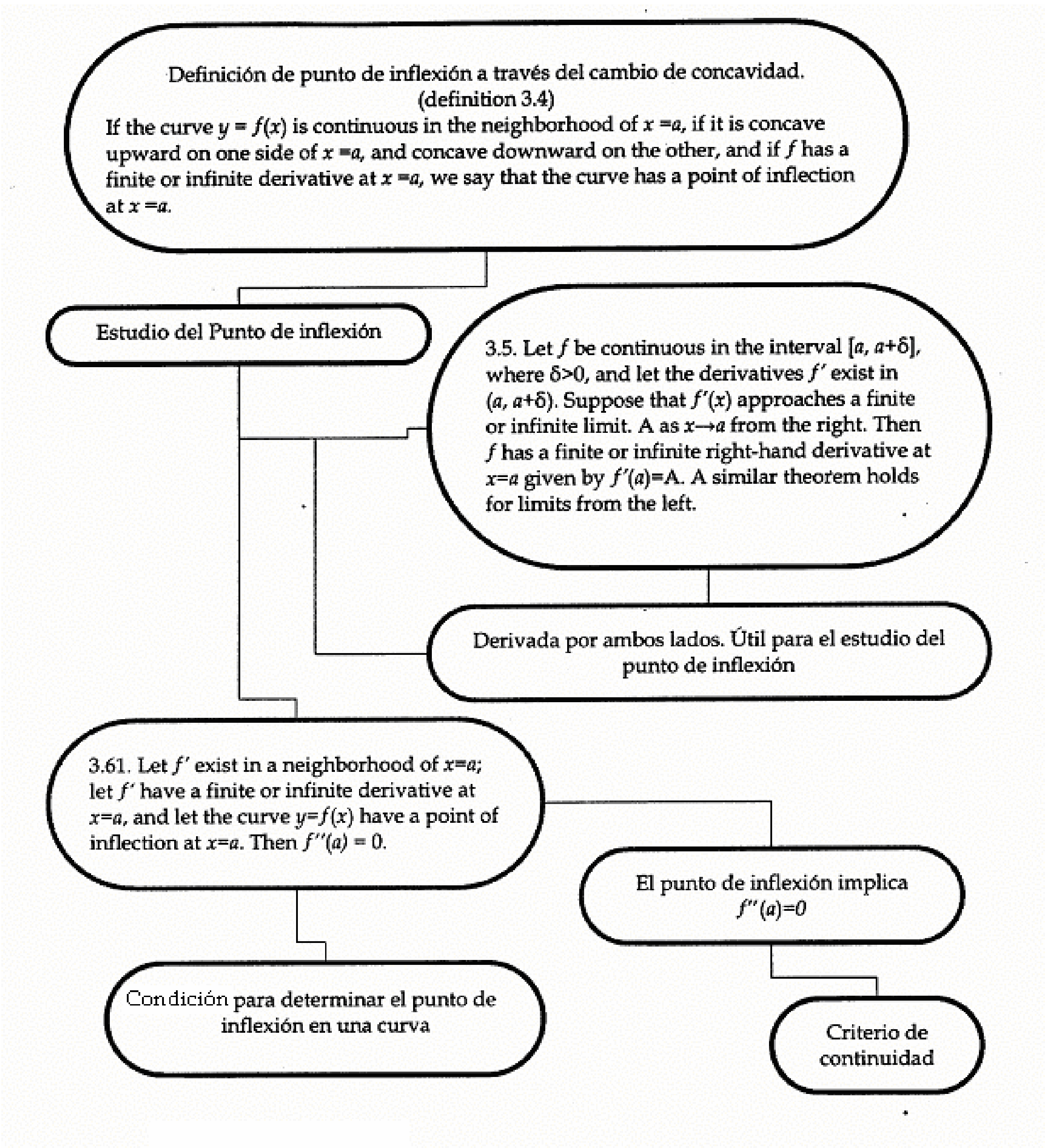


Diagrama 3

Capítulo V

En donde se plantea un análisis de la sociogénesis del tratamiento didáctico del punto de inflexión

Estrategias en la investigación epistemológica; revisión de la sociogénesis del tratamiento didáctico del punto de inflexión

El contexto socio-cultural de la época: El ambiente académico del siglo XVII

Durante el siglo XVII las universidades europeas mantenían un programa muy cercano a la enseñanza medieval, con el estudio de los trabajos clásicos griegos, aprendiendo y enseñando de la misma forma como hacía mucho tiempo antes. La Universidad de Cambridge, en donde Newton estudió, tenía un programa compuesto por cuatro disciplinas fundamentales; filosofía, política, ética y física, estudiando a los griegos y latinos: Sócrates, Platón, Plinio y muy especialmente a Aristóteles y su filosofía que en cierta forma era quien regía las formas de interpretar la realidad y los fenómenos.

Bajo el argumento de que la plenitud de la cultura se había alcanzado en el periodo de la antigua Grecia, los trabajos realizados en el medioevo y aún después de éste trataban de hacer referencia constante a las ideas antiguas asumiendo así un culto a las teorías y filosofías griegas, impidiendo en cierto grado, una producción autónoma y original del conocimiento bajo nuevos paradigmas de producción científica menos cualitativas.

Es así, que el papel de un científico en el viejo paradigma de *hacer ciencia*, podría resumirse en interpretar el pensamiento del maestro en un espíritu contemplativo y abstraer de sus ideas la forma de explicar los fenómenos que acontecen en la naturaleza. Esta postura vino a contrastar al finalizar la edad media con una sociedad en evolución, que ante descubrimientos geográficos y la necesidad de una tecnología armamentista exigió un papel más activo de las universidades para contribuir a resolver problemas cotidianos. La sociedad de la época ejerció presión para que la ciencia contribuyera a desarrollos teóricos y prácticos, dejando atrás la actitud contemplativa y pasiva que se tuvo durante toda la edad media. Los trabajos de Copérnico, Kepler, Descartes, Galileo, Pascal demostraron que los fenómenos de la naturaleza acontecían de acuerdo con leyes matemáticas abandonando explicaciones referentes a las *cualidades de los cuerpos.*

Las universidades adoptaron cada vez más una actitud de apertura, impulsada por aquellos profesores y científicos que exploraron nuevos campos en la interpretación de la naturaleza, por citar, el caso de Francis Bacon (1561 - 1626), considerado el fundador del método experimental y de la ciencia nueva. Bacon formuló nuevos paradigmas para la ciencia, introduciendo ideas como el concepto de *progreso de la ciencia*, el cual asume que una vista al pasado es eventualmente positiva, pero no es garantía absoluta de verdad; *la ciencia debe buscarse en la claridad de la naturaleza, no en las tinieblas de la antigüedad.* Basado en este nuevo esquema une las propiedades de la experimentación y la racionalización señalando así un nuevo camino para la ciencia moderna, el cual se basa además en asumir que el conocimiento es un instrumento para el dominio de la naturaleza.

Galileo también contribuyó a este nuevo enfoque de la ciencia moderna, escribió sobre la importancia que tenían las descripciones matemáticas sobre cualquier otra, incluso sobre la mecánica que en la antigüedad y la Edad Media habían dominado. Es posible que a partir de estas reflexiones Newton haya colocado la descripción matemática y la deducción en el centro de todas sus exposiciones y predicciones científicas. Descartes (1596 - 1650), por su parte, formuló una teoría que ofrecía una explicación de los fenómenos de la naturaleza, consideró para ello a las matemáticas como modelo de rigor estableciendo un ideal de interpretación. La geometría y la mecánica son ante los ojos de Descartes el medio indispensable para acercase a la naturaleza de una forma racional.

Fue a través de estas contribuciones que se alcanzó un importante salto de entre la fe a la razón, de este modo el escolasticismo caracterizado por apreciaciones silogísticas del conocimiento y muy apegado a las concepciones teológicas (místico-cualitativo) es sustituido eventualmente por una nueva organización filosófica en la construcción de conocimiento atendiendo ahora a las variables experimentales y cuantitativos. De la toda esta revolución científica nació el *empirismo* y el *racionalismo* como nuevos argumentos filosóficos para hacer ciencia; el primero de ellos se basó en intentar concebir a Dios a través del orden de la naturaleza, por ello su método de estudio se dirigió hacia el mundo de las cosas, para conocerlas, explorarlas, desarrollándose así el acercamiento filosófico conocido como *naturalismo*. El racionalismo por su parte buscaba explicaciones matemáticas, por lo que ésta fue considerada como órgano vital en todos los análisis.

El papel de las Academias Científicas

El abandono del viejo paradigma vino a ser aún más decisivo cuando se polarizaron grupos y se constituyeron publicaciones científicas. En el siglo XVII varios países europeos centraron su atención en constituir Academias dedicadas a coordinar las producciones científicas en cada región y lograr presencia como grupo. La primera organización de este tipo fue creada en Roma por el célebre Galileo Galilei en 1603, llamada *Accademia dei Lincei.* En Florencia se fundó la *Accademia del Cimento* en 1657, en Inglaterra la *Royal Society of London for the Promotion of Natural Knowledge (1635)*, la *Académie Royale des Sciences (1666)* en Francia, *Societas Ereunetica (1622)* y la revista especializada la *Acta Eruditorum* ambas en Alemania, siguieron las sociedades de Berlín, Viena, San Petersburgo (Rusia) y Dresde.

Los grupos científicos permitieron crear un ambiente propicio para avanzar en el desarrollo de ideas, gracias a estas comunidades fue posible que los científicos se sometieran a comprobaciones y se realizaran consensos sobre ideas con mayor agilidad, a la vez que se tenía un panorama del estado del conocimiento. Era pues un momento propicio para lograr una mayor proyección e intercambio de ideas entre regiones y países. El problema que acosaba a la vieja Europa con respecto a la falta de comunicación eventualmente fue reducido al desarrollarse entre grupos académicos redes de correspondencia acompañadas después de publicaciones regulares junto con verdaderos tratados y discusiones. En Inglaterra al seno de la *Royal Society of London*, se funda el periódico científico más importante de la época el *Philosophical Transactions of The Royal Society*, en Francia aparece el *Journal des Savants*, y posteriormente en Dresde por obra de Leibniz, el *Acta Eruditorum.*

Los principios del cálculo infinitesimal; Newton

Entre noviembre de 1665 y mayo de 1666, Newton trabajó en constituir su cálculo infinitesimal. Después de abandonar Londres por la peste que azotó la ciudad, se trasladó a Woolsthorpe, ciudad natal, para concentrarse en problemas de óptica, gravedad y estudios matemáticos; muchas de sus inquietudes estaban en responder situaciones donde aparecían dos variables ligadas a la velocidad, variaciones de distancia, variaciones de tiempo y a cuestiones de física y astronomía, fue precisamente ese dominio de los instrumentos matemáticos, lo que le permitió hacer profundas descripciones del universo.

Sus trabajos en relación al cálculo no los publicó inmediatamente, sólo mostró a Barrow en 1669 su obra titulada *De analysi per aequantionis numera terminorum infinitas.* Su presentación oficial, con modificaciones, la hizo en 1687 en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* La estructura que presenta esta obra póstuma, esta hecha al clásico estilo griego, comenzando con definiciones y axiomas para después probar lemas y teoremas.

Su acercamiento a la física organizó sus ideas matemáticas; concebir una línea como un punto en movimiento, un área como movimiento de una curva, un sólido como movimiento de un plano, constituyendo la variable «tiempo» como central y privilegiada al describir las magnitudes que fluyen. De hecho concibió a la matemática como herramienta para expresar las leyes de la naturaleza, otorgándole un sitio especial en su obra, tal como lo exhibe en la introducción de su *Principia Mathematica* *... en este tratado he cultivado las matemáticas en la medida en que están relacionadas con la filosofía [ciencia], [...] y en consecuencia, ofrezco este trabajo como los principios matemáticos de la filosofía, puesto que todo el peso de la filosofía parece consistir en esto: a partir de los fenómenos de los movimientos,* *investigar las fuerzas de la naturaleza, y luego, a partir de estas fuerzas, investigar los demás fenómenos...* (Newton, I., 1687)

Sus contribuciones a la ciencia fueron posibles gracias a su confianza en la descripción matemática de los fenómenos físicos, como él escribió, *sólo pretendo dar una noción matemática de esas fuerzas,* [refiriéndose a la gravitación], *sin considerar las causas y fundamentos físicos*, estas explicaciones fueron una forma decisiva de mostrar al mundo que la naturaleza obedecía a un plan matemático. Los matemáticos de siglos posteriores prosiguieron con este plan. Al respecto Kline, (1985) explica que … *la Mecánica Analítica de Lagrange de 1788, se puede considerar como el primer ejemplo del enfoque matemático de Newton*, al referirse que en su obra no había utilizado diagramas geométricos.

En relación al cálculo, Newton escribió tres tratados 1669, 1671 y 1676, este último titulado «cuadratura de curvas» presentaba una explicación muy elaborada de lo que son las fluxiones ... *con toda la aproximación que se desee, como los incrementos de las fluentes [las variables] generados en tiempos iguales y tan pequeños como sea posible, y, hablando con precisión, las fluxiones están en el origen de los nacientes incrementos.* Esta explicación, a la vista de los historiadores en términos de lógicos, era tan burda como en los dos primeros trabajos.

En *Los principios matemáticos de la filosofía natural* de 1686, Newton escribía, *Las razones últimas, en las cuales las cantidades desaparecen, no son estrictamente hablando, razones de cantidades últimas, sino límites a los que las razones de esas cantidades, decrecientes sin límite, se aproximan, y que, aunque puedan estar más cerca que cualquier diferencia dada, no pueden ser sobrepasadas ni alcanzadas antes que las cantidades hayan disminuido indefinidamente.* Como realmente estas explicaciones no eran demasiado claras y satisfactorias recurrió al significado físico, en su *Principia* escribió al respecto; *Quizá pueda objetarse que no existen razones últimas de cantidades evanescentes porque la razón, antes de que las cantidades hayan desaparecido, no es última; y cuando han desaparecido, no es nada. Pero, con el mismo razonamiento, se podrían mantener también* *que no existe una velocidad última de un cuerpo que llega a un cierto lugar, cuando su movimiento se termina: ya que la velocidad, antes de que el cuerpo llegue a su última posición, no es su velocidad última; cuando el cuerpo ha llegado no tiene velocidad alguna. Pero la respuesta es fácil; por velocidad última se entiende la velocidad con la que el cuerpo se mueve que llegue a su última posición y el movimiento cese, ni después, sino en el mismo instante en que llega; esto es, la velocidad con la que el cuerpo llega a su última posición, y con la que el movimiento cesa. Y, de manera análoga, por razón última de cantidades evanescentes se debe entender la razón de las cantidades no antes de que desaparezcan, ni después, sino con las que desaparecen.*

Newton dedicó poco tiempo a la argumentación lógica del cálculo, los modelos físicos le hacían mostrar verdaderas sus conjeturas y a través de ellos hallaba una forma de explicar y aceptar sus conceptos.

Los trabajos de Leibniz

Por su parte, la obra de Leibniz no trató con el estudio de la naturaleza ni aportó leyes de ellas, sino su trabajo lo fundamentó básicamente en la matemática. Su impacto fue tal que al referir Kline, (1985) esta influencia dice: los matemáticos de años venideros trabajaron sobre sus ideas. El cálculo leibniziano estuvo fuertemente influenciado por cuatro fundamentos; en primer término el paradigma filosófico en el que se hallaba inmerso Leibniz, tal y como lo concibió, una *characteristica generalis*, un intento por crear un lenguaje simbólico general, que le permitiera describir todos los procesos que pudiera generar en sus argumentaciones y razonamientos. La preocupación por un simbolismo guió a Leibniz en toda su vida a traducir a fórmulas, métodos y proposiciones y es este mismo enfoque el que utilizó cuando enfrentó el estudio de la geometría, interesándose más por los métodos y cálculos para tratar problemas geométrico - infinitesimales.

En segundo término, los trabajos sobre geometría que habían tratado algunos matemáticos como Descartes, Fermat y Pascal. Leibniz trascendió su estudio al mirar a las curvas a través de sus propiedades, centró sus reflexiones en las propias líneas curvas y rectas, encontrando en ellas relaciones a través de ecuaciones algebraicas entre cantidades; variables y geométricas. En su trabajo distingue sobre estos dos tipos de cantidades a las que hace referencia; una cantidad geométrica representa una magnitud, no referida a los reales pero que posee dimensión, dice que así por ejemplo una ordenada tiene dimensión lineal, un segmento de superficie tiene dimensión de un área. Y sobre la cantidad variable caracteriza propiedades que posee; *crecimiento por mínimos*, o *crecimiento insigne,* así la cantidad variable a la vista de Leibniz es considerada como una secuencia de valores infinitamente próximos que crece continuamente. Sobre esta idea fundamenta el concepto de diferencial, como una nueva variable que se obtiene de tomar la diferencia, en términos infinitesimales, entre dos valores sucesivos, empleando para ello la notación *y* para la variable, *dy* para el diferencial.

La tercera, fue la extrapolación que hizo de sus estudios numéricos referentes a las series al campo de la geometría. Aprecia que dada una sucesión numérica, es posible definir una sucesión de diferencias y sucesión de sumas, distinguiendo así que estas son «inversas». *Así, al considerar a una variable y (de valores finitos) como una sucesión infinita de valores infinitamente próximos, las operaciones d (diferencia) y* $\int(suma)$ *aplicadas a esta variable, generan nuevas variables: dy,* $\int y$*, cuyos valores son, respectivamente, magnitudes infinitamente pequeñas e infinitamente grandes en relación con y. Además, estas operaciones pueden aplicarse reiteradamente consiguiendo así, ddy, dddy,* $\iint y$ *etc.* (Pulido, 1997).

Finalmente, la posibilidad de aplicar el triángulo infinitamente pequeño, formado entre la diferencia de dos ordenadas consecutivas y el incremento infinitesimal de la abscisa, a todas las curvas. Leibniz lo conoció de los trabajos de Pascal, aunque Barrow conocía también este triángulo pero no se sabe si Leibniz lo estudió en forma autónoma.

Respecto a los paradigmas de validez de la época, el cálculo presentado por Leibniz causó críticas y objeciones de corte epistemológico por referirse a los infinitesimales como cantidades que no corresponden a las cantidades existentes, el propio Leibniz prefirió no apelar a la existencia de los infinitesimales, simplemente dice que al igual que otras ideas son extensiones de razonamientos que logran a través de suponer el caso límite. Aun con las dificultades conceptuales de los infinitesimales, Leibniz identificó distintos órdenes de ellos, así la eliminación de un diferencial respecto a otro de grado mayor podía hacerse.

Los trabajos que continuaron a la obra de Newton y Leibniz

Durante el siglo XVII Newton y Leibniz trabajaron de forma independiente en la formulación del «nuevo cálculo», una de las más potentes herramientas para la matemátización de la naturaleza; para entender el cambio y los procesos de variación. No obstante su sistematización para incorporarse al cuerpo axiomático de la matemática tardó alrededor de 180 años.

En esta historicidad del cálculo se han identificado importantes etapas en el tratamiento del conocimiento matemático. Uno de estas, corresponde a la claros intentos exitosos de comunicación y socialización de las ideas matemáticas (Castañeda, 2000; Castañeda, 2002). Concretamente nos referimos al impacto que tuvieron las obras de L'Hospital y Agnesi al mundo académico del siglo XVII y XVIII. Poco después de haberse publicado los primeros trabajos de Leibniz en 1684 y 1686, y Newton en 1687 referentes al *nuevo cálculo*, el ambiente erudito de la época giraba en torno de preguntas referentes a la naturaleza de los fundamentos, sobre todo respecto a los infinitesimales, lo que hacía complicado hablar fluidamente del tema.

L'Hospital, quien mantuvo cierta relación y cercanía con Bernoulli, escribió en 1696 su libro *Analyse des infiniment petits,* un tratado de cálculo diferencial que representa el primer libro editado específicamente para fines de divulgación[1]. Por otro lado, el trabajo María C. de Agnesi, matemática italiana quien escribió en 1748 *Institutioni Analitiche,* un libro que incluía un tratado de cálculo diferencial. Estos documentos respondieron a la exigencia de la época por hacer didáctico un saber hasta entonces de un ámbito erudito, aún con todas las dificultades de fundamento que se tenían.

Con estos elementos primeros elementos, cabe hacer una distinción entre las obras eruditas (Newton y Leibniz) y las obras de carácter didáctico (Agnesi – L'Hospital); reconocemos sus diferencias a partir de identificar su *naturaleza epistemológica*; la intencionalidad que guardan y a su inevitable cambio de referente (desde donde son escritas). En este sentido, el objetivo de esta exploración se traduce en analizar la naturaleza epistemológica de los conceptos matemáticos y reconstruir los escenarios de su tratamiento didáctico tomando los trabajos de L'Hospital y de Agnesi como fuentes primarias de información en la categoría de obras (didácticas) de difusión, a la par se buscan rescatar aquellas ideas que eventualmente aparecen en estos libros antiguos, pero que ya no están vigentes, con la finalidad de establecer los rasgos de su evolución de estas idea en los escenarios didácticos.

Cabe señalar que las nociones matemáticas que se encuentran en los libros de texto, están albergadas en una *epistemología* específica, el cual proviene del contexto en el que se encuentra la obra; física, mecánica, óptica, etc. Este hecho nos previene para acotar las inferencias que se puedan hacer en la revisión de los materiales antiguos, y considerar para el estudio no sólo un análisis histórico crítico, sino también de la incorporación de un análisis socioepistemológico, que permita un estudio de los principios fenomenológicos que caracterizaron a los trabajos de la época; los referentes a L'Hospital y Agnesi.

Así es posible distinguir la naturaleza de las explicaciones que ofrece cada autor y reconocer en ellas atributos, sentidos, enfoques, el grado de originalidad para tratar las

[1] En términos de ser un libro de ideas asequibles, es decir, un libro con una presentación didáctica del saber.

ideas, lo que permitiría en conjunto tener un mapa del tratamiento del cálculo ante una intencionalidad clara de difusión. Distinguimos que el saber pasa por distintas epatas durante el proceso de construcción, en un primer momento las ideas matemáticas se hallan al seno de un contexto o escenario específico lo que permite el uso de ese saber en forma explícita y para resolver problemas concretos, por ejemplo, en la antigüedad las relaciones funcionales estuvieron determinadas por situaciones concretas y específicas como tablas astronómicas y de logaritmos (Youschkevitech, 1976). Dada la naturaleza funcional de las ideas, las nociones matemáticas tienen una disponibilidad específica de aplicación para explicar o interpretar situaciones. En estudios históricos del calculo (Cambray, 1993; Youschkevitech, 1976) se describen sucesos que conducen a identificar etapas del desarrollo conceptual del cálculo donde las nociones matemáticas son usadas en forma específica para resolver o tratar algún problema matemático. En el caso del cálculo, las raíces conceptuales provienen de problemas relacionados con el estudio de curvas geométricas. De entre ellos; Descartes quien estudió un método para el trazado de la subnormal, Fermat quien estudió un método para el trazado de las tangentes y el cálculo de máximos y mínimos, Roberval y su método de las tangentes, Wallis con su aritmética del infinito.

Estos antecedentes a la *formulación* del cálculo, permitieron un escenario apropiado para que Newton y Leibniz trabajaran y contribuyeran con sus respectivos tratados sobre un nuevo saber. El esfuerzo por precisar las propiedades del cálculo y por alcanzar una atemporalidad en sus definiciones y teoremas fue su gran logro. Tal y como Grattan-Guines lo escribe ... *Newton y Leibniz llevaron a cabo una generalización de suma importancia,* (en Cambray, 1993).

El origen de los libros de difusión de cálculo; las obras inmediatas a los trabajos de Newton y Leibniz

Leibniz, escribió sobre el nuevo cálculo haciendo precisiones teóricas importantes en el *Acta Eruditorum* con un orden sistemático, sin embargo dada la brevedad de los escritos y la oscuridad que mostraban no causó mucho impacto entre los matemáticos de la época, más bien, como lo explica Bos, (1980), era casi sorprendente que matemático alguno pudiera entenderlos. Los hermanos Bernoulli (Jakob y Johann) fueron quienes se acercaron más a estos materiales, primero dominando la simbología, tratando de entenderlos e incluso abriendo una correspondencia con el propio Leibniz. Bos escribe al respecto ... *para la gente con menos capacidad matemática que los Bernoulli hubiera sido difícil, de hecho, aprender el cálculo de estos dos artículos. Lo que se necesita era un buen libro de texto que explicase el cálculo...*

Esta dificultad reportada, hizo «necesaria» la obra de L'Hospital, quien con su texto *vino a demostrar al mundo culto que el nuevo cálculo era algo con lo que había que contar*. (Bos, 1980). El trabajo de L'Hospital constituye la primer obra de difusión del cálculo, muestra el potencial que tiene este nuevo saber, explica a través de problemas resueltos los procedimientos analíticos para utilizarlo, un tanto como *herramienta*, a la par que incluye teoremas cuyo objetivo es el de generalizar las propiedades que mostró en los ejemplos.

Agnesi por su parte, presenta al mundo académico un trabajo en la misma línea, integra la visión newtoniana referida al movimiento y la leibniziana con el interés de reconocer una sola teoría para el cálculo y no dos visiones.

Reconocemos estas dos etapas creadoras; la indiscutible labor de Newton y Leibniz y por otro lado el trabajo de Agnesi y L’Hospital cuyo interés por difundir las ideas del cálculo los llevó a escribir una matemática desde una perspectiva didáctica. Esta diferencia se advierte al revisar la forma en que tratan el contenido matemático, en la distancia *conceptual* entre los originales y las obras para su difusión. Pues cabe advertir que un ejercicio de formulación de *discurso* está condicionado por variables que participan en la transposición del conocimiento; al especificar el contenido de la obra se corre el riesgo de que la *selección* no incorpore ciertas ideas. Este es un proceso que está normado por el interés *académico* de la época dado que el autor escribe para cierto público, en el tal caso los grupos sociales, paradigmas de conocimiento e incluso filosofías vigentes sirve de fuentes reguladoras para presentar unas u otras ideas.

Las obras de difusión a las que nos hemos referido mantienen cierta cercanía, por una lado; el libro de L'Hospital escrito en Francia a finales del siglo XVII, y en contraparte, el libro de Maria de Agnesi, editado a mediados del siglo XVIII en Italia y considerado por la Academia de Ciencias de París como una obra superior a cuantos anteriormente se habían escrito.

Con una notable influencia de Leibniz, Jacob y Johann Bernoulli, L'Hospital es reconocido por escribir el primer libro de texto de cálculo diferencial en el cual aparecen consideraciones teóricas reconocidas como ideas propias[2]. Agnesi, además de concentrar su atención al estudio de libros religiosos se adentró en la revisión de libros matemáticos de su tiempo, escribiendo comentarios a un material del mismo L'Hospital titulado *Traite analytique des seccion coniques*. Estudió con ayuda de Ramiro Rampinelli, un monje profesor de Roma, la obra de Reyneau[3]; *Analiza démontrée,* un texto de cálculo publicado en 1708 de donde aprendió cálculo y fue el mismo Rampinelli quien animó a Agnesi a que escribiera un libro de calculo diferencial. El resultado fue un texto para la instrucción en cuya introducción señala explícitamente la intención de ser un libro con ideas claras y accesibles ... *doto de claridad apropiada y simplicidad... que los beneficios con ese orden natural que proporciona, quizás el de mejor instrucción y agrandar más la luz.*

[2] Comentarios ampliados en http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

[3] Reyneau, estuvo allegado a debates del cálculo organizados por Rolle en París, fue cuando escribió su libro *Analize démontrée* publicado en 1708. Reyneau obtuvo una copia de lecciones que Bernoulli preparó para L'Hospital.

El libro de cálculo de L'Hospital; una obra que busca clarificar el cálculo

El escenario que L'Hospital describe en el prefacio de su obra, muestra el nuevo paradigma del pensamiento que él mismo y los académicos de su época afrontan; en principio una crítica sobre el conocimiento griego casi perpetuo durante toda la edad media, con acercamientos muy cercanos a la superstición y el respeto de alguna divinidad, dice él; *todos los trabajos de varios siglos han conducido a llenar el mundo de comentarios respetuosos y de traducciones repetidas de originales a menudo demasiado detestables* (Cambray, 1998). Pero dice L'Hospital acerca de Descartes; *la valentía para abandonar a los antiguos*, sus trabajos (sobre análisis y geometría) contribuyeron en encontrar la solución a una cantidad enorme de problemas *entonces fue que se abrieron los ojos y se corrió el riesgo de pensar.*

Aunque Descartes no trató a las curvas geométricas mas que principalmente para tratar el asunto de sus raíces (además del método de tangentes que desarrolló), a él se le atribuyó el abrir una nueva ruta en el estudio de las curvas que después Pascal trabajó con mayor detalle cuando estudió las curvas en sí mismas. También Fermat trabajó con curvas, encontró un método sobre el trazado de tangentes. Barrow, en un acercamiento infinitesimal argumenta sobre la construcción de la tangente a través de comparación de dos triángulos, uno formado por la diferencia de dos ordenadas infinitamente cercanas y otro con la ordenada común y la subtangente.

De esta referencia, explica L'Hospital que Leibniz construyó su cálculo y lo extendió hacia una amplio campo de problemas obteniéndose así nuevos descubrimientos, en lo que refiere a las tangentes, curvas y rectas, problemas de máximos y mínimos, puntos de inflexión. El cálculo a la vista de todos es un nuevo instrumento para resolver problemas de las áreas de conocimiento que había sido desarrolladas optimizando tiempo[1] en su solución y como un recurso importante en el estudio y desarrollo de otras nuevas.

Presentados al mundo erudito de la época, en octubre de 1684 y en junio de 1686, el *Acta Eruditorum* publicó dos artículos de Leibniz sobre su «nuevo cálculo», *además de contener errores de imprenta, estos escritos eran oscuros,* los hermanos Bernoulli, fueron quienes se acercaron a estos artículos para analizarlos en un afán de comprender las enigmáticas reglas del cálculo diferencial (Cambray, 1998). En esta época L'Hospital, interesado por las virtudes del naciente cálculo infinitesimal, se acercó a los hermanos Bernoulli para sistematizar esas ideas organizándolas en un libro que contenía específicamente detalles de la naturaleza de esas ideas, es decir, una obra con fines de esclarecer lo aún no evidente.

Guillaume – François - Antonie de L'Hospital, Marqués de Sainte-Meme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ordes, nació en París en 1661, desde muy temprano mostró talento para la matemática. Publicó alrededor de veinticinco notas sobre problemas específicos, *con las cuales contribuyó a la evolución del cálculo infinitesimal cuando éste aún estaba en proceso de formación* (Cambray, 1998), en una de esas notas aparece la solución al problema de la braquistócrona, propuesto por J. Bernoulli mismo que fue resuelto por Newton, Leibniz, Jacques y el mismo Jean Bernoulli.

L'Hospital mantuvo contacto con Jean Bernoulli y fue de él que conoció el nuevo cálculo, dice Bernoulli *le sorprendió tan repentinamente* [a L'Hospital] *que a partir de ese momento se llegó a encantar con el nuevo análisis de lo infinitamente pequeño y se emocionó con el deseo de aprenderlo de mí* (Cambray, 1998).

En 1696, apenas doce años después que los artículos de Leibniz aparecieran en *Acta Eruditorum*, L'Hospital publica de forma anónima el libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, (Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas), en la segunda edición de la obra en 1715 aparece el nombre

[1] así lo cita Rodrigo Cambray cuando L'Hospital conoce el cálculo de Jean Bernoulli (Cambray, 1998, pág. 4)

del autor con una nota que reconoce la participación de Bernoulli: *Por los demás reconozco estar en deuda con los trabajos luminarios de los señores Bernoulli, sobre todo con los del joven quien actualmente es profesor en Groningen. Me he servido sin cumplidos de sus descubrimientos y los del señor Leibniz. Es por ello que considero que ellos reivindiquen todo lo que gusten; yo me conformo con lo que tengan a bien dejarme.*

En tanto Bernoulli en 1742 publicó en sus obras completas una nota que afrimaba que... *omitía sus lecciones sobre cálculo diferencial, dado que su contenido sobre el cálculo diferencial, dado que su contenido estaba ya al alcance de cualquiera en el Analyse de L'Hospital.* (Cambray, 1998)

La evidente participación e influencia de los Bernoulli, especialmente de Jean, sobre el Marqués de L'Hospital hace difícil delimitar a quién corresponden ciertas ideas, no obstante, la importancia de la obra radica en el intento por organizar una estructura sobre el cálculo infinitesimal. El libro tiene una presentación muy cercana, desde el punto de vista estructural, a la obra de Euclides; inicia con dos definiciones y dos axiomas, contiene ejemplos, todos ellos resueltos, intentando ser más o menos claro y evidente cuando se hace referencia a cantidades infinitamente pequeñas. Quizá esta fue la parte más complicada en el desarrollo de cálculo, el mismo Leibniz evitó referirse a tales cantidades en sus exposiciones. Sin embargo a raíz de la aparición del libro de L'Hospital grupos científicos como la *Académie des Sciences* en Francia (a partir de 1700) centraron sus discusiones sobre la validez de las suposiciones que parecían de orden metafísico. Fontenelle, secretario de la *Académie des Sciences* ante la aceptación que gozaba el texto de L'Hospital trato de enfrentar a la oposición haciendo notar dos ideas importantes; el carácter esclarecedor de la obra ante las cuestiones del infinito, y la postura de L'Hospital como redactor del libro: *El señor L'Hospital decidió comunicar sin reserva los secretos ocultos de la nueva geometría, y lo hizo en el famoso libro Analyse des infiniment petits, que publicó en 1696. En él fueron revelados todos los secretos del infinito geométrico y del infinito del infinito; en una palabra, de todos estos diferentes órdenes de infinitos que se levantan los unos por encima* *de los otro, y forman un edificio más asombroso y más audaz que la mente humana jamás se haya atrevido a imaginar.*

Dice Cambray con respecto a la obra de L'Hospital; *y a partir de él se continuaron las investigaciones* en relación al cálculo infinitesimal. Como cualquier libro que intenta difundir ideas, L'Hospital hace una presentación de los métodos del cálculo desarrollados para tantos problemas particulares, problemas previos al desarrollo del cálculo (desde algunos planteamientos de Descartes, como el caso de las tangentes) y problemas que resultan de este nuevo acercamiento. Aunque no hace una presentación completa de varios tipos de problemas, dice L'Hospital; *yo [..] hago solamente algunos ejemplos seleccionados*, su interés no era el repetir el discurso erudito de Leibniz, sino movilizar al lector a través del planteamiento, en un primer momento, de ejemplos que ilustraran las ideas del nuevo cálculo, después, como Agnesi lo muestra, con problemas de aplicación a situaciones específicas de la geometría euclidiana, esta característica distingue las obras eruditas de las de difusión, una obra erudita no se escribe con la intención explícita de ser didáctica, sino con el interés de dar a conocer un saber, los ejemplos y los problemas en los libros de difusión intentan por su parte, clarificar la naturaleza de ese saber, mostrando las cualidades y virtudes para enfrentar determinadas problemáticas.

Uno de los argumentos del nuevo cálculo, es aceptar la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas y no sólo eso, además poder compararlas en ordenes de magnitud y poder hablar del infinito de los infinitamente pequeños. Es de suponer que para la época estas ideas causaran impacto pues se requería pensar sobre supuestos o actos metafísicos de fe, sin embargo, detrás de todo esto existe el argumento analítico de suponer que un hecho complejo puede ser descompuestos en fenómenos simples para su estudio y ese es una de las explicaciones que L'Hospital hace en el prefacio de su obra con respecto a las líneas curvas; *Sólo un análisis de la naturaleza podría conducirnos hasta los verdaderos principios de las líneas curvas. Pues las curvas, al ser poligonales de una infinidad de lados, y al diferir entre ellas sólo por la diferencia de los ángulos que estos lados infinitamente pequeños forman entre sí, al análisis de los infinitamente pequeños* *únicamente corresponde determinar la posición de los lados para determinar la curvatura que ellos forman...* (en Cambray, 1998).

Estudio epistemológico a la obra de L'Hospital y Agnesi

Con la intención de dotar de significados múltiples a la segunda derivada, nos preguntamos también por las nociones que se le asocian, así es posible ubicar al punto de inflexión en un sitio importante y relevante en el estudio de la segunda derivada. Al respecto nuestra búsqueda de referentes del tipo sociepistemológico nos conduce a revisar los momentos en los que aconteció la construcción de la obra matemática, en aquellos momentos en que se problematizaron situaciones, se fundamentaban propiedades geométricas y se estudiaron las segundas variaciones, en suma, todos aquellos *significados primarios*, entendidos como las reflexiones que son la parte fundamental en la construcción del conocimiento. En esta etapa la investigación integra las aportaciones de los trabajos clásicos de cálculo; específicamente las obras del Marques de L'Hospital y de María de Agnesi, trabajos que para la historia de las matemáticas han pasado desapercibidos, o en mejor de los casos citados como curiosidades.

Un aspecto importante que hay que resaltar en las obras que hemos citado, es la que se refiere al tratamiento de los conceptos, la preocupación de Agnesi y L'Hospital por no restringir los conceptos a una definición formal, parte del intento por acercar las nociones a situaciones ya conocidas, tales como la representación de curvas geométrica, conocimientos previos, como las nociones procedentes del mundo sensible; por ejemplo los conceptos de concavidad y convexidad.

Estas dos versiones exhiben la vida de un saber dispuesto para la difusión sus eventuales transformaciones y nuevas caracterizaciones, de hecho la atención a estas obras se debe a su aparición con mayor número de ejemplares en el escenario social y académico, recordemos que la obra de Agnesi fue reconocida por la *Académie des Sciences* de París como un trabajo de importancia y trascendencia, título que merecía atención para cualquiera que deseaba incursionar al estudio del cálculo.

Con el propósito analizar la influencia que ejercieron estos trabajos para las nuevas generaciones de matemáticas y matemáticos, analizamos enseguida las caracterizaciones y el tratamiento que hicieron Agnesi y L'Hospital a las ideas infinitesimales, con el fin de trazar una ruta en la evolución de los conceptos; cómo el saber erudito devino en un saber para la difusión y después cómo ese saber permitió una evolución conceptual hacia teorías analíticas del cálculo propias de un ámbito erudito.

Capítulo VI

En donde se realiza el análisis
epistemológico a la obra
Analyse des infiniment petits del
Marqués de L'Hospital, publicada en 1696

Análisis epistemológico de *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de Antonie de L'Hospital, obra publicada en 1696

Estructura y organización

La publicación *Analyse des Infiniment Petits pour l'intelligence des Lignes Courbes*, por el Marqués de de l'Hospital en 1696, representa el inicio de un nuevo formato de publicación impresa al que se le podemos llamar como *obra de difusión del saber*. Un rasgo característico que distingue estos trabajos es la organización de las ideas siguiendo un avance gradual en la presentación de su contenido; desde las simples hasta las más complejas.

Pero la característica más representativa de estas publicaciones es el agregado de secciones dedicadas a promover la «interacción» del lector con la obra, simulando una interlocución de un maestro con su alumno (*modo didáctico*), a través de ejercicios resueltos o propuestos, problemáticas asociadas al tema de estudio, etcétera. Estos apartados representan el claro esfuerzo del autor por ofrecer a un lector novato, el «acompañamiento» para el estudio del cálculo, guiándolo a través de explicaciones de cómo utilizar la nueva herramienta matemática.

Otras formas de interacción menos frecuentes en estas primeras obras, pero también con el objetivo de guiar en el estudio, son los problemarios, los ejemplos resueltos y comentados, las sugerencias para analizar problemas, forman parte de esta comunicación entre quien quiere aprender y el que, a través del libro, enseña.

En este primer libro *para difusión* se distingue un discurso del «cálculo como herramienta» para la resolución de problemas de la geometría (en los capítulos I, II, III, IV, V, VI, VII,

VIII) cuya presentación sigue un orden lógico[1] de contenidos, de tal forma que el lector, no necesariamente experto, pueda introducirse gradualmente al estudio del cálculo.

L'Hospital organizó su libro en capítulos de tal forma que las ideas aparecieran presentadas de una forma progresiva.

- *I.* *Donde se dan las reglas del cálculo de las diferencias*
- *II.* *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las tangentes de todos los tipos de líneas curvas.*
- *III.* *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas De Maximis & minimis*
- *IV.* *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno.*
- *V.* *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las evolutas*
- *VI.* *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las causticas por reflexión*
- *VII.* *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las causticas por refracción*
- *VIII.* *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las líneas curvas que tocan una infinidad de líneas de posición dada rectas o curvas.*
- IX. Solución de algunos problemas que dependen de los métodos anteriores
- *X.* *Nueva manera de servirse del cálculo de las diferencias en las curvas geométricas, donde se deduce el método de los Sres. Descartes y Hudde.*

[1] Una presentación gradual del contenido siguiendo un orden que guarda consistencia; de lo que se expone respecto a sus fundamentos.

Estudio al capítulo primero; *Donde se dan las reglas del cálculo de las diferencias*

El tratado inicia haciendo una distinción entre cantidad *variable* y cantidad *constante,* al reconocer de ellas su naturaleza variacional. De hecho se sirve de estas dos definiciones para explicar lo que él llama «diferencia» (*Definición II*).

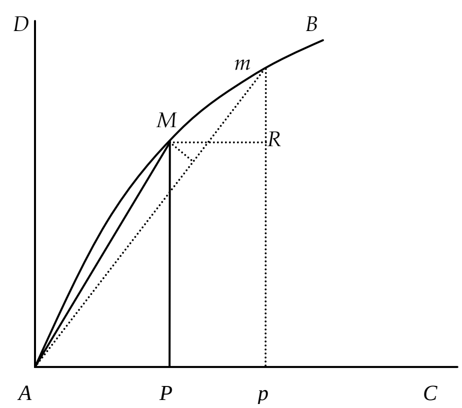
> *La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente es llamada la diferencia.*
>
> (L'Hospital, 1696)

La definición de *diferencia* la va a usar a lo largo de su obra para referirse a cantidades que no son reales -coloquialmente dicho-, pero que existen y son usadas para describir comportamientos gráficos. Sin embargo la definición no aporta mayores elementos para elaborar una idea más precisa de *diferencial*, a consencuencia –asumimos- de pocos elementos para explicar un concepto *metafísico.*

La idea de cantidad *variable* es directamente asociada con aspectos gráficos, reconociendo así que las abscisas y ordenadas de una curva también presentan comportamientos *variacionales*. Estas, atendiendo a la definición de variable, fluyen continuamente en una relación funcional. En (Cantoral, 1983) respecto a la naturaleza del cálculo de Leibniz, explica que ... [él] *usó para un contexto discreto, la suma y diferencias de números como operaciones inversas, las extrapoló al contexto continuo... de esta forma.. al contemplar la sucesión infinita de valores de una variable, digamos la variable x, la diferencia entre dos valores sucesivos era precisamente dx.* De este paradigma se pueden distinguir las argumentaciones geométricas de Leibniz y de L'Hospital en cuanto a la naturaleza de las cantidades infinitamente pequeñas; Leibniz en relación a estados y L'Hospital a través de la variación *continua.*

El modelo de *diferencia infinitesimal* que enuncia L'Hosipital, la argumenta en el plano geométrico acompañada de una amplia descripción verbal. Este es un estilo que mantiene el autor durante toda su obra.

> *...Sea por ejemplo una línea curva cualquiera AMB, que tiene por eje o diámetro a la línea AC y por una de sus ordenadas a la recta PM; sea pm otra ordenada infinitamente cercana a la primera. Dado lo anterior, si se trazan MR paralela a AC y las cuerdas AM y Am, y luego se describe el pequeño arco de círculo MS con centro en A, y de radio AM,*
>
> *Pp=dx será la diferencia de AP=x;*
> *Rm=dy la de PM=y;*
> *Sm=dz la de Am=z; y*
> *Mm=du la del arco AM=u.*



(L'Hospital, 1696)

En el *Corolario* explica que la diferencia de una cantidad nula es cero. Así mismo deja en claro dos cuestiones de notación; diciendo primero que el símbolo *d* será para denotar la diferencia de una cantidad variable por una sola letra (dice por ejemplo la *y*), además las variables se han de representar con las últimas letras del alfabeto y las constantes con las primeras.

En lo que sigue, formula dos postulados sobre los cuales edifica las bases para el estudio del cálculo diferencial, el primero de estos postulados enuncia, que es posible tomar indistintamente una por la otra a dos cantidades las cuales no difieran entre sí por una cantidad infinitamente pequeña. Y el segundo postulado indica que, una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña o bien como una poligonal con un número infinito de lados. L'Hospital los enuncia de esta forma:

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par éxemple qu'on puisse prendre Ap pour AP, pm pour PM, l'espace Apm pour l'espace APM, le petit espace MPpm pour le petit rectangle MP pR, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS, l'angle pAm pour l'angle PAM, &c

II. DEMANDE OU SUPOSITION.

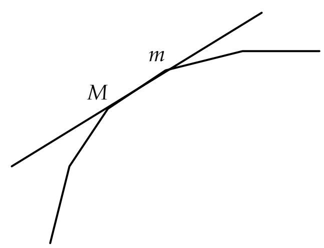
On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) comme un polygône d'un nombre infini de côtes, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande para exemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en forte que le petit triangle m SM puisse être censé réctiligne....

(L'Hospital, 1696, section I, pp. 2 y 3)

Este Segundo postulado, referido a la naturaleza de las curvas, expresa el papel constructivo que desempeñó la intuición geométrica dentro de la obra de L'Hospital, de hecho, este argumento permite «mostrar», a través de un modelo geométrico, una posible interpretación de lo que significa *una cantidad infinitamente pequeña*, además de explicar la forma en cómo se relaciona un punto en la curva respecto a su tangente.

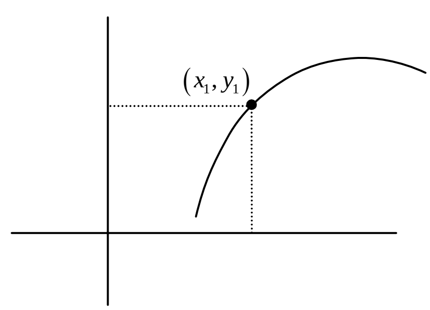
Definición

> *Si se prolonga uno de los pequeños lados Mn de la poligonal que compone a una línea curva, este pequeño lado, así prolongado, será llamado la «tangente» de la curva en el punto M o m.*



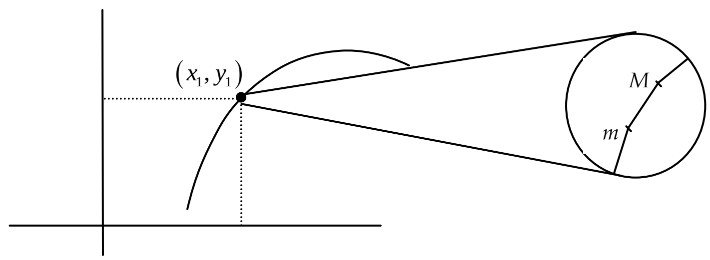
(L'Hospital, 1696)

De esta forma, un punto (x, y) [2] no correspondería a un lugar en el plano, sino a un segmento infinitamente pequeño. Valiéndonos del *Postulado I*, los lugares geométricos de los extremos de este segmento infinitesimal serían considerados indistintamente como el mismo. Por ejemplo, consideremos el caso de una función f (x), cuyo punto (x_1, y_1) se exhibe en la siguiente gráfica.

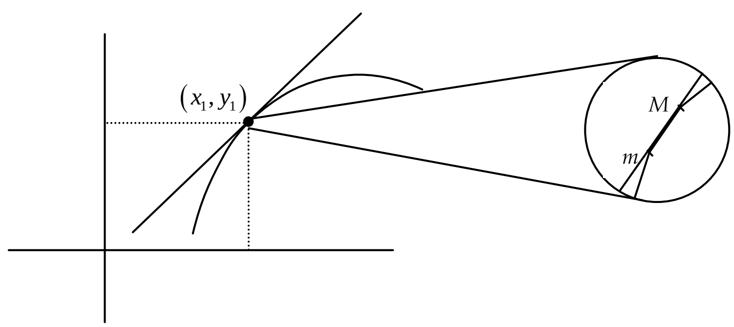


[2] En nuestra notación moderna.

Este punto, dada la naturaleza poligonal de la curva y bajo los argumentos presentados de L'Hospital, es posible representarlo también como un segmento $\overline{Mm}$ con una dimensión infinitamente pequeña.



Esta explicación muestra a la recta tangente de una forma natural; dado que una curva está compuesta por un número infinito de lados, basta entonces con prolongar el segmento infinitesimal en ambas direcciones para que se obtenga la recta tangente.



Se deduce de este argumento que una curva y su recta tangente son indistinguibles en una vecindad infinitesimal, pues ambas tienen la misma naturaleza poligonal.

La forma en la que L'Hospital concibe una curva, sin importar su grado, tiene una estrecha relación con aquellas estrategias que se desarrollaron desde la edad media, para el estudio de los fenómenos complejos o que presentaban cierto grado de dificultad. Usando el método analítico, para inspeccionar las partes, es posible reducir la dificultad a través de simplificar el problema hasta sus primeras manifestaciones. Algunos trabajos como la *regla de Merton*, muestra cómo resolvieron ingeniosamente algunas problemáticas referentes al movimiento usando este tipo de estrategias.

> *Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme, durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total s es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniformemente igual al promedio de su velocidad inicial* v_0 *y su velocidad final es* v_f *(es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo.*
>
> (Cantoral, 1997)

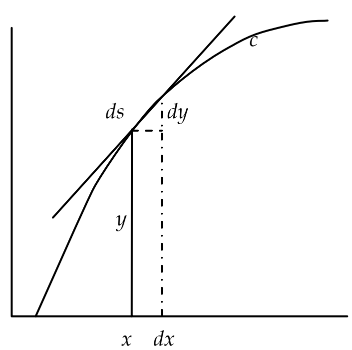
Esta noción de *analiticidad*, en el sentido que lo hemos descrito, aparece aludiendo a la concepción que tiene el propio autor en relación a las curvas, pero también cuando explica la naturaleza de las cantidades ... *puesto que toda cantidad... es la suma de un número finito de cantidades infinitamente pequeñas* (L'Hospital, 1696).

La perspectiva que ofrece L'Hospital a la naturaleza de las curvas, exhibe además, su posición referente a la noción de *función*. Algunos matemáticos, Fermat, Descartes, Oresme, ya habían estado trabajando con el concepto de *función* en forma específica, pero no muy clara. Leibniz, que llegó a los conceptos básicos del cálculo a través de desarrollos geométricos, basó algunos de sus descripciones infinitesimales en curvas asociadas a una función. De hecho, dice (Youschkevitech, 1976) Leibniz utilizó por primera vez en sus manuscritos de 1673 la palabra *función* como ...*la relación entre su aplicada (ordenada) y la abscisa*.. [la cual] ... *queda representada por alguna ecuación que conocemos*... (Youschkevitech, 1976). Más adelante, comenta el autor, el vocablo de *función* adquiere nuevo significado... *como término general para los distintos segmentos que se relacionan con una curva dada.*

El concepto de *función* la enuncia de forma más precisa en unos artículos que publicó en 1692 y 1694 en el *Acta Eruditorum*, algunos años antes de la publicación de L'Hospital, *función* se le *...denomina a cualesquiera partes de líneas rectas, es decir, segmentos obtenidos mediante la construcción de líneas rectas infinitas correspondientes a un punto fijo y a los puntos de una curva dada*, en este mismo sentido Jacob Bernoulli utilizó este término en un trabajo que presento al *Acta Eruditorum.*

Sin embargo, Leibniz, en sus argumentaciones sobre las *cantidades infinitamente pequeñas*, muestra una construcción geométrica sin aludir a las características de la curva ni a su naturaleza. Su explicación la basa en el uso de un *triángulo característico*, que ya otros matemáticos habían utilizado.

> *Si c es una curva asociada a una ecuación con variables x, y, entonces ds (diferencial de curva) se relaciona con dx y dy formado el llamado triángulo característico; véase la figura siguiente:*



(Pulido, R., 1997)

La recta tangente aparece entonces como resultado de la razón entre las diferencias *dy* y *dx.*

Después de presentar sus dos postulados, L'Hospital se plantea un primer *problema* sobre la estimación de la diferencia de varias cantidades que se suman o restan. Explica, que si en una suma cada cantidad varía, entonces la suma de la diferencia de cada una de ellas corresponde a la diferencia de la suma completa. De este problema formula *reglas* para encontrar las diferencias de una suma o resta, las cuales las expone a través de un procedimiento general.

Regla I

Para la adición o sustracción de cantidades

> *Se tomará la diferencia de cada término de la cantidad propuesta y, conservando los mismos signos, se compondrá otra cantidad que será la diferencia buscada.*

(L'Hospital, 1696)

Para el caso del producto plantea otro *problema* y explica su solución en forma similar al del caso de la suma, ahora aplicando una variante de su *postulado II*.

> *... la diferencia de xy es ydx + xdy. Pues y se vuelve y + dy cuando x se vuelve x + dx... por lo tanto, xy se vuelve entonces xy + ydx + xdy + dxdy, que es el producto de x + dx por y + dy ... su diferencia será ydx + xdy + dxdy, es decir ydx + xdy, dado que dxdy es una cantidad infinitamente pequeña con relación a los otros términos.*

(L'Hospital, 1696)

Explica además, la diferencia para un cociente de cantidades variables y de cantidades constantes, así también como para las potencias perfectas: si $x^2 = xx$ varía, tendremos $xdx + xdx$, es decir $2xdx$, si el exponente es un número negativo, entonces se utiliza el criterio de cociente.

Sea por ejemplo $\frac{x}{y}$. Partiendo de que $\frac{x}{y} = z$ es posible despejar teniendo $x = yz$. Aplicando las propiedades de la diferencia de un producto se tiene: $dx = ydz + zdy$. despejando a *dz*, se tiene $dz = \frac{dx - zdy}{y}$, sustituyendo a z por su valor inicial; $dz = \frac{dx - \frac{x}{y}dy}{y}$ a lo que finalmente se tiene; $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Estudio al capítulo segundo; donde se estudian el método para el cálculo de la tangente

Su *sección II* titulada: *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las tangentes de todos los tipos de líneas curvas*, evoca la concepción del cálculo en esa época; desde Oresme (siglo XIV) las funciones[3] estaban siendo expresadas por medio de una descripción verbal o por medio de una gráfica, en los comienzos del siglo XVII, el nuevo acercamiento *cuantitativo* a las leyes de la naturaleza hizo que las relaciones funcionales entre valores numéricos, referidos a fenómenos físicos, se fueran vigorizando más. La astronomía, la mecánica, la física y otras áreas de estudio requirió que las funciones no sólo se verbalizaran, sino que como explica (Youschkevitech, 1976) la investigación teórica y la representación de funciones por medio de fórmulas y ecuaciones, adquirió prominencia.

Descartes en su tratado *La gèometrie* de 1637, explicaba que su objetivo era reducir la solución de todos los problemas y ecuaciones algebraicas, a ciertos procedimientos. Esta nueva forma de tratar a las funciones devino en un desarrollo acelerado, principalmente en lo que se refiere a algunos conceptos matemáticos como la función logarítmica, así como

[3] En un acercamiento primitivo, sin ejes, ni una expresión analítica que se le asociara.

una clara interpretación de fenómenos físicos a través de la geometría. Así lo demuestra el propio Newton, en sus estudios del movimiento en relación al tiempo. *El estudio de la relación entre el movimiento curvilíneo y las fuerzas que afectan al movimiento habían pasado a ser el problema principal de la ciencia* (Youschkevitech, 1976).

El cálculo se enfrenta a los viejos problemas geométricos (de curvas expresadas en relación funcional) y este nuevo método agiliza su estudio optimizando tiempo y reduciendo esfuerzo. L'Hospital expresa la introducción de su obra este punto de vista, planteando el *cálculo* como una herramienta matemática; una nueva forma de resolver problemas clásicos, como el de hallar la recta tangente a un punto, hallar máximos y mínimos o encontrar el punto de inflexión.

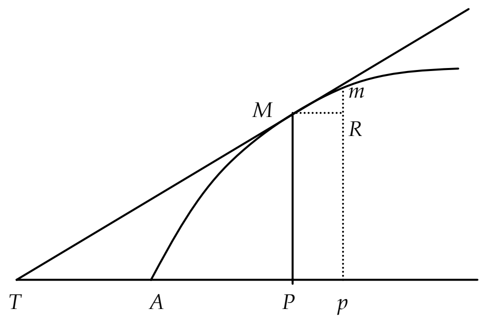
Se puede observar esta concepción *funcional* del cálculo cuando L'Hospital enuncia a los títulos de su trabajo «*Uso del cálculo de las diferencias para…* ».

La *sección II* inicia, mostrando una representación geométrica de su segundo postulado. Seguido de esto, plantea en su *Proposición I* un primer problema referido al cálculo de la recta tangente a un punto.

Proposición I

Problema

> *Sea AM una línea curva tal que la relación de la abscisa Ap con la ordenada PM esté expresada por una ecuación cualquiera, se requiere trazar la tangente MT por el punto M dado sobre esta curva.*



y al denominar AP como «x», y a PM como «y», y Pp=MR=dx y Rm=dy, los triángulos semejantes mRM y MPT darán:

$$\frac{mR}{RM}=\frac{MP}{PT}\,ó\,\frac{dy}{dx}=\frac{y}{PT}$$

(L'Hospital, 1696)

despejando esta expresión se obtiene el valor de la subtangente $PT=\frac{ydx}{dy}$, el cual servirá para trazar la tangente *MT*. De esta forma, el problema de hallar la tangente a un punto, se reduce a encontrar el valor de la subtangente. En el *ejemplo I*, L'Hospital explica la forma de aplicar las propiedades de las diferencias para la obtención de la subtangente, la cual nos ayudará a trazar la tangente.

Ejemplo 1

Si se requiere que ax=y² exprese la relación de AP a PM, la curva AM será una parábola que tendrá por parámetro a la recta dada «a», y al tomar las diferencias de una y otra parte se tendrá;

(L'Hospital, 1696)

[calculado diferencias en ambos miembros de la expresión]

$$ax=y^2$$

$$adx=2ydy$$

$$dx = \frac{2ydy}{a}$$

utilizando la relación para hallar la subtangente, $PT = \dfrac{ydx}{dy}$

se sustituye el valor hallado para *dx*

$$PT = \frac{y\left[\dfrac{2ydy}{a}\right]}{dy}$$

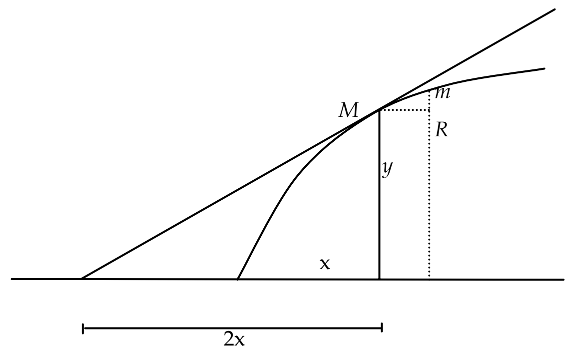
$$PT = \frac{2y^2}{a}$$

al sustituir al y^2 *por ax* (tomado de la primera expresión)

$$\frac{2y^2}{a} = PT$$

$$2x = PT$$

Al tener el valor de la subtangente, se localiza el punto *T*, y finalmente se traza la recta tangente.



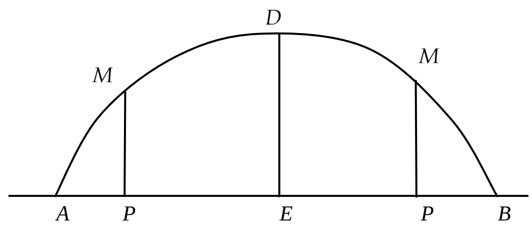
Estudio al capítulo tercero; donde se estudia el método para el cálculo de máximos y mínimos

La *sección III,* del libro de L'Hospital titulada *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas de máximos y mínimos,* revela un interés geométrico por hallar las ordenadas que cumplan con esta propiedad, podemos distinguir de sus argumentaciones al menos tres aproximaciones distintas, que nos muestra el significado que se le asociaba a la noción de máximo o mínimo de una curva.

La primera está basada en la *noción de tamaño,* centra su propiedad en discriminar de entre un conjunto de ordenadas, la que cumplan con la característica de ser la más grande o más pequeña de todas ellas. En su primer definición L'Hospital explica:

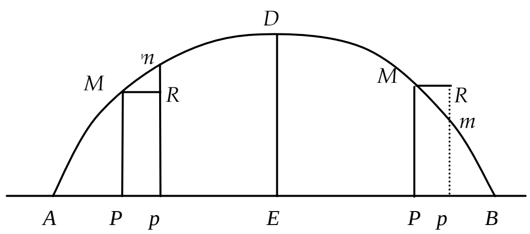
Sea MDM una línea curva cuyas ordenadas PM, ED y PM sean paralelas entre sí, tal que al incrementarse continuamente la abscisa AP, la ordenada PM crece también hasta cierto punto E después del cual disminuye... Supuesto eso: la línea ED será denominada la mayor o la menor ordenada.

(L'Hospital, 1696)



En esta primera aproximación el problema del cálculo de máximos o mínimos se centra en estimar la ordenada más grande o más pequeña, la cual necesariamente se basa en un acto visual.

La segunda argumentación se fundamenta en atención al signo de las diferencias infinitamente pequeñas.



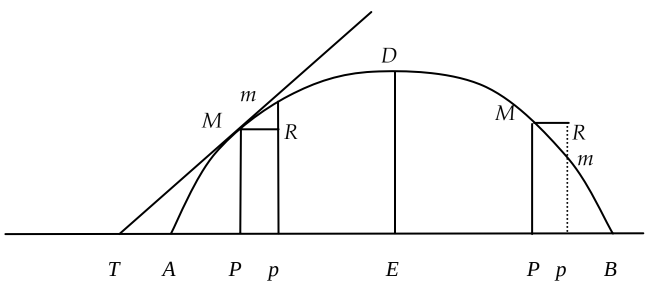
Si al crecer AP, PM también crece es evidente que su diferencia Rm será positiva con relación a la de AP, y que por lo contrario, cuando PM disminuya al crecer la abscisa AP, su diferencia será negativa.

(L'Hospital, 1696)

Concluye afirmando entonces que una diferencia no puede convertirse de positiva a negativa si no se hace pasar por cero, o por infinito, de esta manera, el máximo es caracterizado como un punto, tal que las diferencias cambian de signo.

La tercer caracterización se basa en observar la posición relativa que guarda la subtangente y la tangente a medida que vayamos considerando distintos puntos en la curva. El máximo se alcanza en el momento en que la tangente se *vuelve horizontal* y paralela a la subtangente, y análogamente para el mínimo.

Explica L'Hospital en su texto, supóngase una tangente en el punto M, y su respectiva subtangente *PT*.



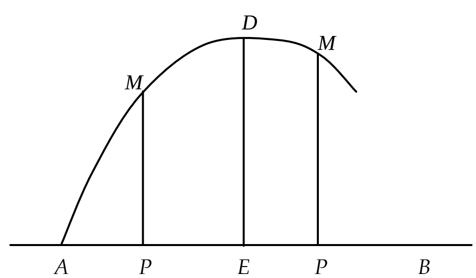
La subtangente *PT* crece [hacia la izquierda] a medida que *M* y *P* se acercan a los puntos *D* y *E*, es claro que cuando se construya la tangente en el punto *D*, la subtangente se vuelve infinita, de esta forma, cuando AP rebasa a AE, la subtangente PT se vuelve negativa de positiva que era, o al contrario.

Estos tres acercamientos, inscritos implícitamente en la obra, intentan clarificar y caracterizar los *máximos y mínimos*, el primero y el tercero, desde una perspectiva geométrica y el segundo de ellos atendiendo a las propiedades de los infinitesimales, en un esfuerzo didáctico de proveer de múltiples significados a estos conceptos desde distintos escenarios.

En su *Ejemplo I*, L'Hospital plantea una expresión algebraica que se asocia a una curva y explica el procedimiento basándose en las propiedades de los diferencias infinitesimales para halla el máximo de un curva.

Ejemplo 1

> *... Supposons que $x^3 + y^3 = axy$ (AP= x, PM=* y *y AB = a), exprime la nature de la courbe MDM..*



(L'Hospital, 1696)

al tomar las diferencias, tenemos

$$3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$$
$$3y^2dy - axdy = aydx - 3x^2dx$$
$$dy(3y^2 - ax) = aydx - 3x^2dx$$
$$dy = \frac{aydx - 3x^2dx}{3y^2 - ax} = 0$$

para que la diferencia *dy=0*, es suficiente que el numerador sea igual a cero

$$aydx - 3x^2dx = 0$$
$$dx(ay - 3x^2)$$
$$ay = 3x^2$$
$$y = \frac{3x^2}{a}$$

al sustituir en la ecuación inicial, se halla el valor para AE

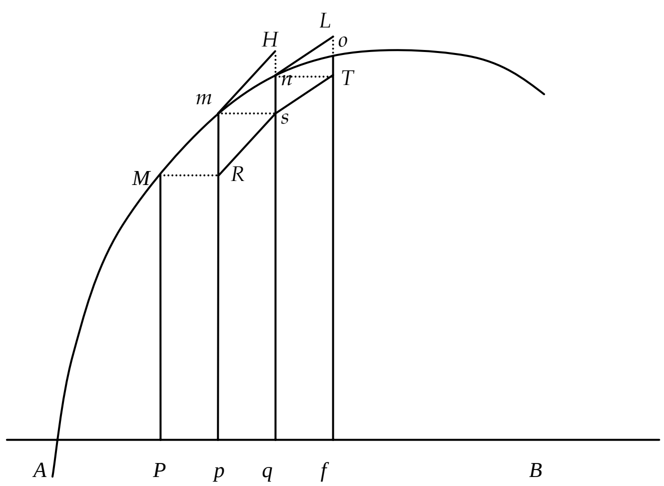
$$x^3 + \left[\frac{3x^2}{a}\right]^3 = ax\left(\frac{3x^2}{a}\right) = ax\left[\frac{3x^2}{a}\right]$$
$$x^3 + \frac{9x^6}{a^3} = \frac{a3x^3}{a}$$
$$x^3 + \frac{9x^6}{a^3} = 3x^3$$
$$\frac{9x^6}{a^3} = 2x^3$$
$$9x^6 = 2x^3a^3$$
$$9x^3 = 2a^3$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{9}}$$

obtenemos el lugar donde la ordenada análoga a *MP*, será mayor que todas.

Estudio al capítulo cuarto; donde se estudia el método para el cálculo de puntos de inflexión

En el capítulo IV, titulado *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno,* L'Hospital explica el uso de *las segundas diferencias,* para hallar los puntos de inflexión en una curva. Llama *diferencia de diferencia* o *segunda diferencia* a la porción infinitamente pequeña en la que aumenta o disminuye continuamente *la diferencia* de una cantidad variable, siguiendo con esta lógica, se hace posible hallar las diferencias de orden superior.

Para mostrar a las segundas y terceras diferencias, L'Hospital, hace una representación geométrica, la cual es capaz de exhibir las primeras diferencias y a las de orden mayor.



COROLLAIRE I

62. Si l'on nomme chacune des coupées AP, Ap, Aq, Af, x ; chacune des appliquées PM, pm, qn, fo, y ; & chacune des portions courbes AM, Am, An, Ao, u ; il est clair que dx exprimera les différences Pp, pq, qf des coupées ; dy les différences Rm, Sn, To des appliques ; & du les différences Mm, mm, no des postions de la courbe AMD. Or afin de

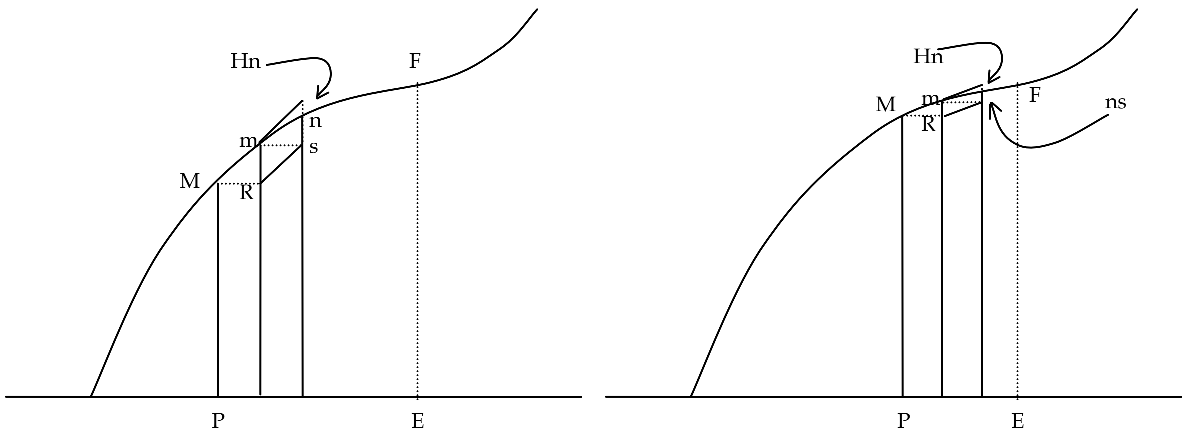
> *prende, par éxemple, la différence seconde Hn de la variable PM, il faut imaginer sur l'axe deux petites parties Pp, pq, & sur la courbe deux autres Mm,mn pour avoir les deux différences Rm, Sn ; & partant si l'on suppose que les petites parties Pp, pq soient égales entr'elles, il est clair que dx sera constante par rapport à dy & à du, puisque Pp qui devient pq demeure la même pendant que Rm qui devient Sn,& Mm qui devient mn, varient. On pourroit supposer que les petites parties de la courbe Mm, mn seroient égales entr'elles, & alors du seroit constante par rapport à dx & à dy ; & enfin si l'on supposoit que Rm &Sn fussent égales, dy seroit constante par rapport à dx & à du, & sa différence Hn (ddy) seroit nulle.*

(L'Hospital, 1696)

La diferencia entre las ordenadas *PM* y *pm* es *Rm* lo que representa la primer diferencia *Hn,* es la diferencia de la «diferencia *Rm*» o bien *la segunda diferencia de PM,* pues al suponer que *dx* es constante *Pp* se vuelve *pq*, la diferencia de *Rm* es *Sn*, y por lo tanto *Hn* es la diferencia de la diferencia. En forma sucesiva se pueden representar las diferencias de orden superior a dos siguiendo la misma estrategia.

Al distinguir distintos órdenes de diferencias, L'Hospital utiliza argumentos para establecer comparación entre ellos, tal como describe los distintos órdenes de infinitésimos en el *Capítulo I,* en relación a las diferencias sucesivas, hace una observación importante; que el criterio para distinguir entre una diferencia y otra, está en caracterizar su naturaleza, por ejemplo *Rm* es infinitamente pequeño con relación a *PM* e infinitamente grande en relación a *Hn.* Así también para las abscisas; *Pf* es infinitamente pequeña con relación a *AP*.

Este corolario finaliza con una propiedad analítica que caracteriza el punto de inflexión. L'Hospital explica que si los segmentos *Rm* y *Sn* fueran iguales, entonces su diferencia, $Hn=d^2y$, sería nula. En la curva se observa que a medida que se obtienen *segundas* *diferencias* ordenadas cada vez más cercanas al punto de inflexión, éstas van tendiendo a cero.



Una segunda caracterización del punto de inflexión, se sustenta en un argumento puramente geométrico haciendo referencia a las propiedades de la forma de las curvas, dice;

> …*cuando una línea curva... es en parte cóncava y en parte convexa... el punto F [*referido un punto especial en la curva] ... que *separa a la parte cóncava de la convexa, y que por consiguiente es el fin de una y el comienzo de la otra, es llamado punto de inflexión.*
>
> (L'Hospital, 1696)

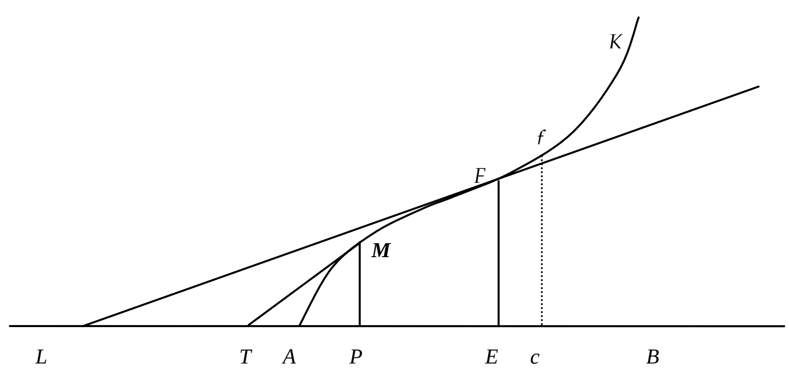
De esta forma, el punto de inflexión aparece en escena después de una inspección visual sobre la curva, al identificar concavidades, de la misma forma que para estimar el máximo o mínimo se necesita de distinguir tamaños. Estas argumentaciones muestran que L'Hospital rescató elementos provenientes de la geometría para sustentar sus definiciones.

Varios matemáticos que antecedieron a L'Hospital, habían estudiado profundamente la naturaleza de las curvas, Oresme, hizo una clasificación atendiendo a su forma, Descartes, propuso otra clasificación atendiendo a su forma y a los medios para construirlas, así distinguió las curvas *mecánicas* de las *geométricas*. Esta intento por caracterizarlas fue una preocupación constante, el propio Newton en 1670 en su obra *Enumeratio linearum tertii ordinis,* aludió a una clasificación de curvas.

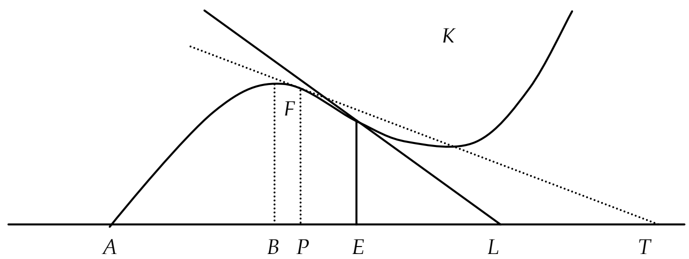
Este escenario planteaba un interés, no sólo por la clasificación de las curvas, sino el estudio de las propias curvas. El trabajo de L'Hospital está contenido en este paradigma matemático, él se interesó en mostrar las virtudes del cálculo para el estudio de las curvas, así lo hace notar en los títulos de las secciones de su obra, como también en el planteamiento de los problemas. Por ejemplo, en la *proposición II* aparece el planteamiento de un *problema general*, al que se refiere la sección completa, éste enuncia; *dada la naturaleza de la línea AFK, determinar el punto de inflexión o de retorno F*.

Una tercer argumentación se basa en las propiedades geométricas respecto al tamaño de la subtangente, también se puede ver en Cantoral, (2000).

En su modelo explica, que cuando *AP* crezca continuamente, *AT* lo hará también, hasta que *P* llegue a caer en *E*, después del cual, *AT* irá disminuyendo. Esto supone que el punto *L* es un punto «extremo» o *máximo* en el momento en que *P* cae sobre *E*.

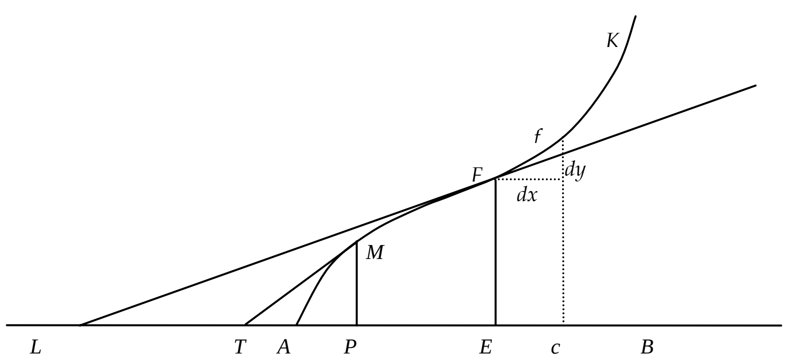


Así, el punto de inflexión se calcula a través de observar la variación de la subtangente en relación con la tangente e identificar dónde éste logra la magnitud *extrema o máxima* sobre el eje. Considerando el caso[4] donde el punto de inflexión se encuentra entre un máximo y un mínimo relativos.



Cuando *AP* crece continuamente, entonces *AT* decrece, hasta que *T* cae en *L*, después del cual, *AT* volverá a crecer. Esto supone que el punto *L* es un punto «extremo» o *mínimo* en el momento en que *P* cae sobre *E*. Este modelo para calcular el punto de inflexión, se basa en el uso de concepto adicional; la *subtangente*, no obstante, resulta claro observar su relación con la tangente lo que permite desarrollar argumentos para suponer posiciones a lo largo de la curva y caraterizar desde argumentaciones geométricas las propiedades de un punto de inflexión.

Después de esta explicación, el tránsito al terreno algebraico, resulta más natural; al denominar *AE=x* y a *EF=y*, ordenada y abscisa respectivamente



[4] Este ejemplo no aparece en el libro de L'Hospital.

se deduce que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + AL}$$
$$\frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x + AL}$$
$$\frac{ydx}{dy} = x + AL$$
$$AL = \frac{ydx}{dy} - x$$

AL que representa la diferencia de la subtangente es la parte variacional, del cual, para calcular el punto de inflexión, habrá que determinar dónde esa *variación es cero.*

$$AL = d\left(\frac{ydx}{dy} - x\right) = 0$$
$$AL = \frac{dy \cdot d\left[ydx\right] - ydx \cdot d\left[dy\right]}{\left(dy\right)^2} - dx = 0$$
$$AL = \frac{dy \cdot dxdy - ydx \cdot d^2 y}{dy^2} - dx = 0$$
$$AL = \frac{dy^2 dx - ydx \cdot d^2 y}{dy^2} - dx = 0$$
$$AL = \frac{-ydx \cdot d^2 y}{dy^2} - dx = 0$$

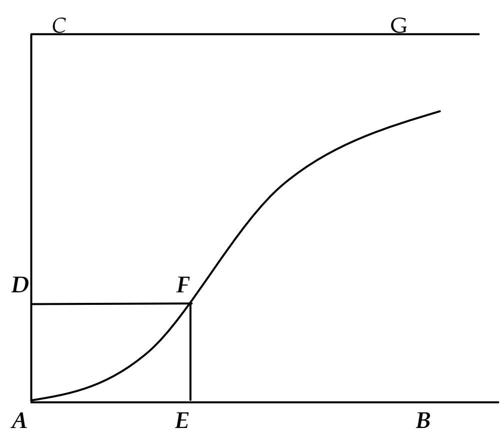
Al ser dividida por *dx*, diferencia de *AE*

$$AL = -\frac{ydxd^2 y}{dy^2} \cdot \frac{1}{dx} = 0$$
$$AL = -\frac{yd^2 y}{dy^2} = 0$$

En el *ejemplo I*, expone el caso donde se calcula el punto de inflexión en una curva.

Ejemplo I

Soit une ligne courbe AFK qui ait puor diametre la ligne AB, & qui soit telle que la relation de la coupée AE (x) à l'appliquée EF (y), soit exprimée par l'équation axx = xxy + aay. Il s'agit de trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF rencontre la courbe AFK au point d'infléxion F.



(L'Hospital, 1696)

El problema platea determinar el valor de la abscisa *AE*, tal que su ordenada *EF* intersecte a la curva *AFK* en el punto de inflexión *F*.

Dada la ecuación de la curva $y = \frac{ax^2}{x^2 + a^2}$

Al tomar la diferencia tenemos $dy = \dfrac{2a^3xdx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$

Al tomar la segunda diferencia suponiendo *dx* constante, e igualando a cero, se tiene

$$ddy = \frac{\left(x^2+a^2\right)\cdot d\left(a^3 2xdx\right) - a^3 2xdx\cdot d\left(x^2+a^2\right)^2}{\left(x^2+a^2\right)^4}$$

$$ddy = \frac{\left(x^2+a^2\right)^2\cdot a^3 2dx^2 - a^3 8x^2dx^2\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^4} = 0$$

$$\frac{a^3 2dx^2}{\left(x^2+a^2\right)^2} - \frac{a^3 8x^2dx^2}{\left(x^2+a^2\right)^2} = 0$$

$$x^2+a^2\left(a^3 2dx^2\right) = a^3 8x^2dx^2$$

$$x^2+a^2 = \frac{a^3 8x^2dx^2}{a^3 2dx^2}$$

$$x^2+a^2 = 4x^2$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot a$$

como *x* es *AE*, se procede a encontrar *EF*, sustituyendo el valor de *x* en la ecuación original.

$$y = \frac{ax^2}{x^2 + a^2}$$

$$y = \frac{ax^2}{\frac{1}{3}a^2 + a^2}$$

$$y = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{3}{4a^2}$$

$$y = \frac{1}{4}a$$

Nota final

L'Hospital estableció en un programa de estudio del cálculo basado en el análisis de las curvas a través de argumentos infinitesimales.

La organización del contenido sigue un orden «creciente» de complejidad; al inicio se describen los fundamentos del cálculo, se enuncian las *reglas del cálculo de las diferencias* y en los capítulos siguientes se trata *el uso del cálculo* para varias situaciones de la geometría.

L'Hospital elabora un discurso para promover la «interacción» del lector con la obra, simulando una interlocución de un maestro con su alumno (*modo didáctico*), a través de ejercicios resueltos o propuestos, problemáticas asociadas al tema de estudio.

Observamos además, que los conceptos matemáticos son expuestos a través de múltiples acercamientos, con la intención de generar un discurso accesible para todas aquellas personas que se interesaron por el estudio del nuevo cálculo. Este es un elemento que caracteriza la nueva corriente de textos creados expresamente para la difusión.

Capítulo VII

En donde se realiza el análisis
epistemológico a la obra
Institutioni Analiche de
María de Agnesi, publicado en 1748

Análisis epistemológico de *Institutioni Analitiche* de María Cayetana de Agnesi, publicada en 1748

Estructura y organización

En 1718 nació María Cayetana Agnesi, una ilustre matemática Italiana de gran talento. Desde pequeña mostró habilidades para el estudio de las lenguas y las ciencias, su primer publicación fue *Propositiones philosophiae;* un compendio de tesis filosóficas y controversias que escribió, producto de debates que sostenía con sus amigos. Más adelante incursionó en el campo de las matemáticas escribiendo *Comentario sul tratado delle sezioni coniche di Hópital*, pero su mayor contribución a esta disciplina la hace con su obra de 1748 *Institutioni Analitiche;* un tratado de cálculo integral y diferencial. La calidad del trabajo fue reconocida por la *Académie Royale des Sciences* de París, quien declaró al libro como el mejor y más grande tratado de cálculo superior a cualquier otro escrito anteriormente, varias academias y sabios de la época elogiaron ampliamente su trabajo, traduciendo la obra al francés y al inglés. (School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. (2003, enero 20). [documento www]).

La obra de Agnesi, surge justo cuando se inicia la consolidación del cálculo, 6 años después Ade que Bernoulli escribiera su tratado de cálculo integral.

La organización del contenido matemático sigue una presentación lógica-evolutiva de las nociones del cálculo. Sus capítulos en el tomo del *cálculo diferencial* son:

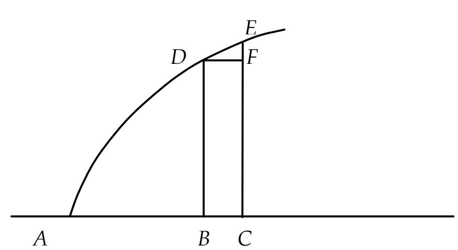
Capítulo I De la idea de diferencial de diverso orden y del cálculo del mismo
Capítulo II Del método de las tangentes
Capítulo III Del método de máximos y mínimos
Capítulo IV De curvas contrarias y de regreso
Capítulo V De la evoluta y del rayo oscilador

Estudio al capítulo primero; *De la idea de diferencial de diverso orden y del cálculo del mismo.*

En este capítulo se exponen los conceptos básicos para el estudio del cálculo a través de una perspectiva *unificadora* a las dos visiones del cálculo; la newtoniana que sustenta una naturaleza *dinámica* de las fluxiones y la leibniziana, que usa un simbolismo específico. Esta perspectiva conciliadora en el discurso de Agnesi, se percibe en las concepciones que asigna a las ideas matemáticas; las curvas por ejemplo, son el resultado del movimiento de un punto sobre un plano.

> *S'intenta la recta ABC, generata dal moto del punto A, prodotta del punto A, sopra cui insista, facendo un qualunque angolo...*
>
> (Agnesi, 1748, pág. 432)

Si consideramos que la recta *ABC* es generada por el movimiento del punto *A*, suponemos que existe un desplazamiento del punto *B* en *C* en un determinado instante, por lo que la ordenada *BD* se transforma en *CE*, de esta forma que se genera la diferencia infinitamente pequeña *EF*.

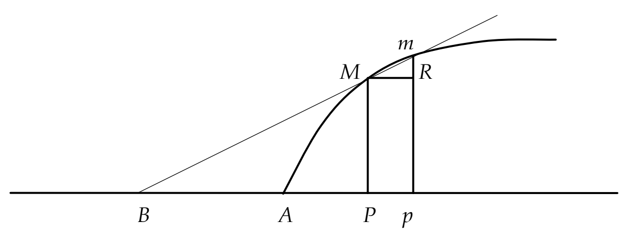


Define a continuación a las *cantidades constantes*, como aquellas que permanecen invariables, como por ejemplo los parámetros. Para representarlas, utiliza las primeras letras del alfabeto.

Utilizando este mismo acercamiento dinámico, explica la naturaleza de las cantidades infinitamente pequeñas; dada la abscisa *AP*, al dejarla fluir por un instante produce una porción infinitesimal *Pp*, el cual es llamado diferencia o fluxión de *AP*.

Esta explicación se asemeja a las argumentaciones de Newton para fundamentar su cálculo; *...respecto a los momentos dice que son principios nacientes de cantidades finitas. Estos momentos son magnitudes infinitesimales y corresponden a nuestras diferenciales actuales*. [En (Cantoral, 1983)].

> *Sia la curva Am, il di cui asse o diametro AP; e si prenda nella AP prodotta una porzione infinitesima Pp, sarà essa la differenza, o sia la flussione dell'assissa AP, e si potranno considerare per eguali la due AP, Ap, non essedovi proporzione tra la quantità finita AP, e la porzione infinitesima Pp.*



(Agnesi, 1748, pág. 433)

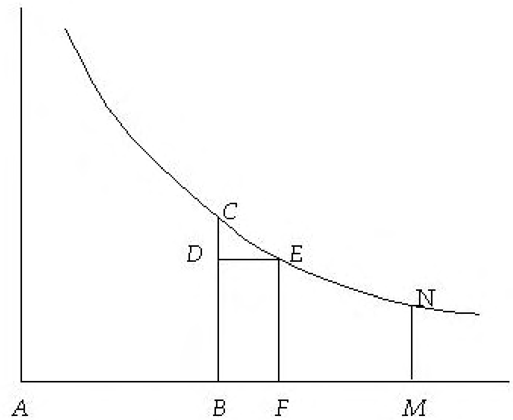
Para determinar una diferencia infinitesimal, Agnesi emplea una representación gráfica usando la ya conocida relación establecida entre dos triángulos, uno de dimensiones finitas y otro de dimensiones infinitesimales. Dice que una vez determinada la variación de *P*, es decir el punto *p*, es posible trazar las paralelas *PM* y *pm*, si se traza la cuerda *mM* se determina el punto *B*, por otro lado, si se traza la recta *MR* paralela a *AP*, se observan dos triángulos, el *BPM* y el *MRm* cuya relación está dada por *BP*:*PM*:: *MR*:*Rm*. En esta relación geométrica la cuerda *Mm* no se distingue del arco infinitesimal y pueden tomarse indistintamente un por el otro.

De lo anterior, Agnesi establece una distinción importante entre la naturaleza de las cantidades, por una parte explica que los segmentos *BP*, *PM* son cantidades finitas, *MR* infinitesimal y por consiguiente, concluye, que *Rm* es también una cantidad infinitesimal la cual es además la diferencia de la ordenada *PM*.

Agnesi emplea el simbolismo de Leibniz al denominar las diferencias infinitesimales con letra *d*. Así, en referencia a su gráfica anterior tenemos que $AP = x$ y su diferencia será *Pp* o $MR = dx$, análogamente para la ordenada $PM = y$ quien su diferencia será $Rm = dy$. Siguiendo con esta lógica, Agnesi explica que la segunda diferencia se representa escribiendo dos veces la letra *d*, la tercer diferencia con tres letras *d*, etc. así la diferencia de *dx*, se expresa como *ddx*, y la tercer diferencia de *y* se expresa como *dddy*.

Advierte después, el caso en el que la curva decrece y entonces sus diferencias son negativas, reconoce que existe una variación negativa -que afirma- no es producto de una inventiva.

> *Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl' Antichi de' Poligoni inscritti, e circoscritti, si può chiaramente vedere dal solo idearsi, che l'ordinata MN, si vada continovamente accostando all BC, finchè conesaa coincida; ora egli è chiaron, che prima, che queste due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, coiè minore di quallunque quantitá data; in tale posizione sieno BC, FE, adunque BF, CD saranno quantitá minori di qualunque data, e però inassegnabili, o sia differenze, o flussioni.*
>
> (Agnesi, 1748, pág. 434)



De este modo asigna *AB* = *x*, *BF* = *dx*, *BC* = *y*, y será *DC* = -*dy* la diferencia negativa de *y*.

Sobre la naturaleza de las diferencias de orden superior, Agnesi explica con especial cuidado cómo se deben entender las diferencias; la primera respecto a la segunda, la segunda respecto a la tercera, pero además, qué relación que guardan entre ellas.

> *In quella guisa che le differenze prime non ânno proporzione assegnabile alle quantità finite, cosi le differenze seconde, o flussioni del secondo ordine non ânno proporzione assegnabile alle differenze prime, e sono di esse infinitamente minori per modo, che due quantità infinitesime del primo ordine, ma che differiscono tra loro d'una differenza econda, possono assumersi per eguali. Lo stesso si dica delle differenze terze rispetto alle seconde, e cosi di mano in mano.*

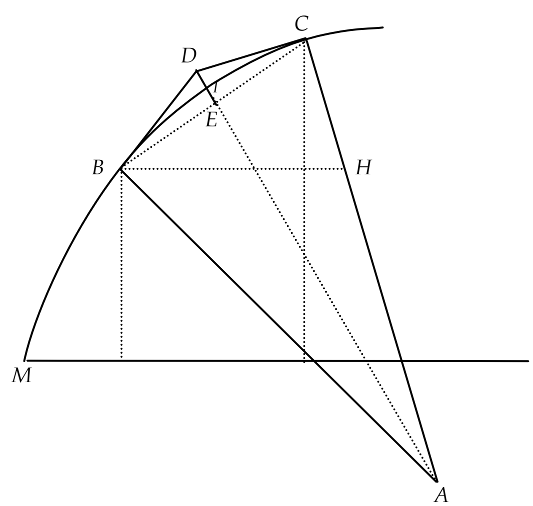
(Agnesi, 1748, pág. 438)

Así como se sabe que dos cantidades son iguales si difieren por una cantidad infinitesimal, dos diferencias de primer orden se consideran iguales si éstas difieren por una cantidad infinitesimal de segundo orden. En esta explicación subyacen dos argumentos que L'Hospital utilizó, el primero de ellos en su primer postulado, explicando que una cantidad infinitamente pequeña se puede despreciar respecto de otra y el segundo en su construcción geométrica donde exhibe las diferencias de orden mayor, diciendo que dada por ejemplo, una diferencia de segundo orden, ésta es infinitamente mayor que una de tercer orden pero infinitamente menor que una de primer orden.

En su primer teorema, Agnesi sustenta una construcción geométrica en donde explica, por una parte, la naturaleza de las curvas y por otra las diferencias de orden superior a uno.

TEOREMA I

> *6. Sia una qualunque curva MBC, ed una porzione di essa BC infinitesima del primo orde. Da punti B, C si conducano perpendicolri alla curva le rette BA, CA. Dico: che le rette BA, CA si portranno ssumere per eguali.*



(Agnesi, 1748, pág. 438)

El teorema anterior argumenta las propiedades geométricas de una construcción geométrica, dada la curva *MBC*, se determina una porción de arco infinitamente pequeña *BC*, al trazar una secante por esos puntos, por las propiedades de los infinitesimales, es posible tomar indistintamente al arco infinitesimal y la secante. En los puntos *B* y *C* respectivamente, se trazan tangentes y sobre ellas rectas perpendiculares, al prolongarlas el cruce determina el punto al que llamamos *A*.

El *Corolario I* explica que entonces el triángulo *BAC* es isósceles y por consecuencia los ángulos ABC, ACB son iguales así mismo los ángulos *ACD* y *DBC* y por consecuencia las dos tangentes *BD, CD* permanecen iguales.

En el *Corolario II*, Agnesi explica que al trazar la recta *DA* se divide en dos partes iguales al triángulo *ABC* en los triángulos *ADB* y *ADC* y a su vez se parten los ángulos *BAC* y *BDC* respectivamente en dos. De tal forma que los triángulos *AEB* y *AEC* son semejantes, de lo que se concluye finalmente, que *AD* será normal a *BC* y su cruce será el punto *E*.

El *Corolario III* alude a las medidas angulares de los triángulos; si *DAC* y *EDC* son semejantes, entonces por proporción el ángulo *DCE* será igual al ángulo *DAC* y la suma de ángulos *DCE* y *DBE* será igual al ángulo *BAC*.

De lo anterior, el *Corolario IV*, expresa una propiedad muy importante respecto a la naturaleza de las curvas basado en el estudio de las propiedades geométricas; el arco *BC* de cualquier curva tendrá las mismas propiedades del arco del circulo descrito con centro en *A* y de radio *AB* ó *AC*. Así como los antiguos determinaron polígonos circunscritos e inscritos para aproximar el diámetro de una circunferencia, Agnesi utiliza esta propiedad para explicar la naturaleza infinitesimal de las curvas.

Con relación a las propiedades que enuncian estos corolarios, Agnesi hace una importante caracterización a las diferencias segundas y terceras. Explica que siendo semejantes los dos triángulos *AEB*, *BED* es posible determinar la relación *AE*:*EB* :: *EB*:*ED*, de la que distingue que *AE* es de dimensiones finitas, *EB infinitesima del primo grado* y *ED* será la infinitesimal de segundo orden, cuyo valor se obtiene de la relación anterior.

$$AE, EB :: EB, ED$$

$$\frac{EB}{AE} = \frac{ED}{EB}$$

$$ED = \frac{(EB)^2}{AE}$$

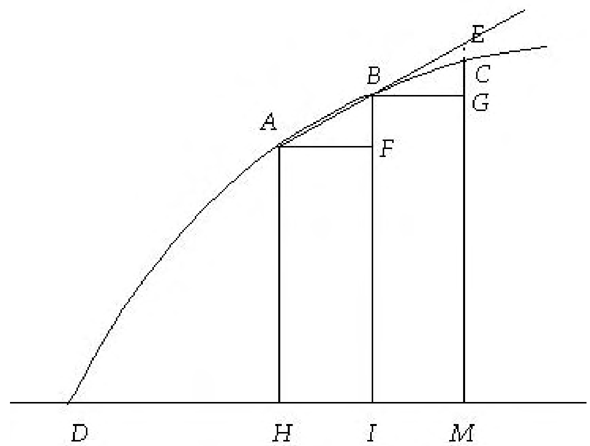
El *Teorema II*, enuncia otro argumento geométrico para explicar la naturaleza de las diferencias de orden superior.

TEOREMA II

7. Sia una qualunque curva DAE, nel di cui asse prese due porzioni infinitsime del primo ordeine, ed aguali HI, IM, si conducano le ordinate parallele HA, IB, ME, le quali taglieranno nella data curva gl'archetti AB, BE parimente infinitesimi del primo ordine. Si conduce la corda ABC, la quale concorranel punto C con l'ordinata ME prodotta, se ocurre. Dico: che l'intercetta CE tra la curva, e la corda AB prodotta sarà infinitesima del secondo ordine.

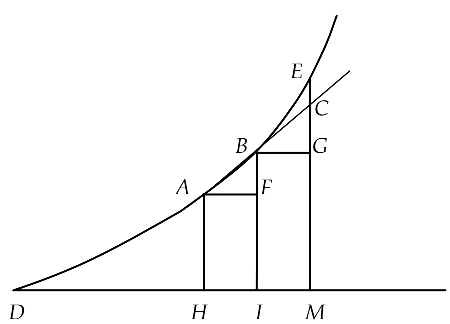
Chimate per tanto le DH = x, HA = y, HI=IM=dx, sará FB=GC=dy, ed EC=-ddy, prefiggendo il segno negativo, perchè per essa cala, e nono cresce la dy, e così all'opposto averà il segno positivo, se per essa cresca la dy, cioè se la curva sia convessa in quel punto all'asse DM.

(Agnesi, 1748, pp. 441-442)



Dada una curva cualquiera *DAE*, al tomar dos porciones infinitesimales de primer orden *HI*, *IM*, trazamos las ordenadas paralelas *HA*, *IM*, *ME*, al trazar una cuerda *ABC*, que no coincida con C, se determina la ordenada *ME*. Dicho esto, la distancia *CE*, que es la diferencia entre la cuerda y el arco, representa un infinitésimo de segundo orden.

Distingue las segundas diferencias negativas de las positivas a partir de asociarlas a las formas de las curvas, de esta forma, la construcción anterior exhibe una curva cóncava que determina segundas diferencias negativas, $DH = x$, $HA = y$, $HI = IM = dx$, llamando $FB = GC = dy$ y $EC = -ddy$. Para el caso de las segundas diferencias positivas, muestra la siguiente construcción geométrica.



EC que se encuentra por debajo de la curva determina una diferencia positiva por lo que se concluye que $EC = ddy$.

El *Teorema III*, alude a una nueva caracterización geométrica de las derivadas de orden superior. Dada una curva, Agnesi determina propiedades infinitesimales sobre ella y describe en forma cuidadosa el método para hallar las diferencias a través del uso de trazos puramente geométricos. Los corolarios que se desprenden de este teorema describen propiedades particulares que relacionan a las diferencias con segmentos geométricos.

Para concluir este apartado, Agnesi hace un estudio de las curvas en los casos en los que *no hay una variación continua* de las variables; por ejemplo supone que x no fluye constantemente y que por lo tanto las diferencias infinitesimales no son iguales, este análisis lo hace también para y y para s (la variable asociada al arco de la curva).

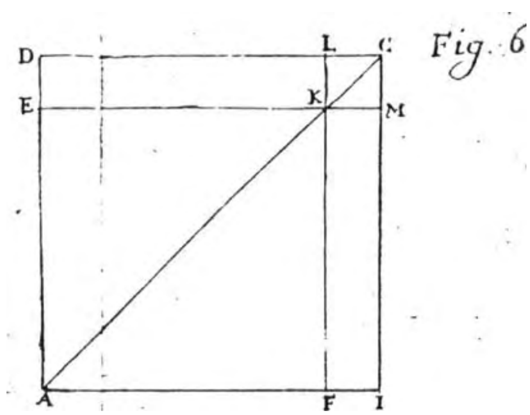
Los siguientes teoremas, hasta el VII, enuncian propiedades geométricas que se asocian a las diferencias infinitesimales. Esta característica es importante de resaltar; el interés de Agnesi, de presentar el cálculo geométricamente proviene de un intento por elaborar un programa que fuese accesible didácticamente y que se apoyara en conocimientos de un dominio generalizado, de hecho como lo hemos presentado, Agnesi alude constantemente a modelos gráficos para referirse a ideas del cálculo antes que mostrar propiedades analíticas, porque dice que; *el acercamiento geométrico resulta simple y elegante*, de esta forma el lector se enfrenta a las ideas complejas cuando se han estudiado al menos dos caracterizaciones distintas de los conceptos del cálculo.

Después de esta amplia argumentación geométrica, Agnesi establece las reglas de la diferenciación infinitesimal en un acercamiento, como ella lo llama *formal*; atendiendo a las propiedades analíticas de los infinitesimales. En primer lugar el caso de la diferencia de una suma; por ejemplo para $a + x + z + y - u$, la diferencia de *x es dx*, de z es dz, pero de la a, que es constante su diferencia será nula. Desprende de sus reflexiones una regla general.

Da ciò si ricava la regola generale, che per differenziare qualunque complesso[1] *di quantità analitiche di una dimensione, basterà prende le differenze di ciascheduna variable coi loro segni, ed il complesso disqueste differenze sarà la differenza della quantità proposta. La differenza adunque di* $b - s - z$ *sarà* $-ds - dz$*; la differenza di* $aa - 4bz + by$ *sarà* $-4bdz - ds + bdy$.

(Agnesi, 1748, pág. 458)

Para el caso de un producto por ejemplo xy, explica que x deviene en $x+dx$, la y en $y+dy$, así el producto de $x+dx$ y $y+dy$ será $xy + ydx + xdy + dxdy$, pero dado que $dxdy$ es una cantidad infinitamente pequeña respecto a las demás, es posible despreciarla. Esta explicación se agrega a la argumentación geométrica que hizó en la primera parte de su obra al explicar la naturaleza de las cantidades infinitesimales; ésta considera un rectángulo de dimensiones finitas cuyos lados los llama x y y, al hacerlos fluir por un instante se obtienen $y + dy$ y $x + dx$ respectivamente, así el área obtenida es $xy + ydx + xdy + dxdy$, al considerar que este último término es infinitamente pequeño con el resto de los sumandos, es posible despreciarlo, de tal forma que el área total se expresa como $xy + ydx + xdy$.



(Tomado de *Agnesi, 1748*, anexo de ilustraciones, *TOM. II, Lib. II, Fig. 6*)

[1] Para Agnesi, una cantidad *complessa* es aquella que se expresa como una suma de varios términos, por ejemplo $y+dy$

De esta forma, concluye Agnesi con la expresión de una forma general para obtener las diferencias de un producto.

> *Quindi nasce la regola, che per, differenziare un prodotto di più quantità moltiplicate assieme, si dovrà prende la somma de prodotti della differenza di ciascuna di tali quantità nel prodotto dell'altre. La differenza adunque di bxzt sarà bxzdt +bxtdz + btzdx + xzt X o, perchè la differeza della costante b è nulla, cioè la differenza di bxzt sarà bxzdt + bxtdz + btzdx. La differenza di* $\overline{a+x}$ X $\overline{b-y}$ *sarà* dx X $\overline{b-y}-dy$ X $\overline{a+x}$*, cioè* $bdx-ydx-ady-xdy$.

Considera también el caso de la diferencia de una fracción, suponga $\frac{x}{y}=z$, despejando, se tiene $\frac{x}{y}=z$, $x=zy$. La diferencia de esta expresión es $dx=zdy+ydz$, así $dz=\frac{dx-zdy}{y}$. Como se tiene que $z=\frac{x}{y}$, se sustituyen los valores, de tal forma que se tiene $dz=\frac{dx}{y}-\frac{xdy}{yy}=\frac{ydx-xdy}{yy}$, y finalmente $\frac{x}{y}=\frac{-xdy+ydz}{yy}$.

Suponiendo el caso en el que se tiene una constante, la diferencia de $\frac{a}{x}$ será $\frac{a}{x}=\frac{adx}{xx}$. Si el exponente es negativo, por ejemplo ax^{-2}, que es $\frac{a}{xx}$, el diferencial por la regla de la fracción será $-\frac{2axdx}{x^4}$ esto es $-\frac{2adx}{x^3}$.

Agnesi concluye la explicación de la diferencia de un cociente con una regla analítica, de forma verbal.

E la regola sarà, che il differenziale d'una frazione sarà un'altra frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore nel numeratore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore della proposta frazione; ed il denominatore si il quadrato del denominatore della stessa proposta frazione da differenziarsi.

(Agnesi, 1748, pág. 460)

Para el caso de x^{-3} explica que su diferencia será $-\frac{3xxdx}{x^6}$ esto es $-\frac{3dx}{x^4}$; y generalizando se tiene $\frac{ax^{-m}}{b}$, que es $\frac{a}{bx^m}$, se obtiene $-\frac{max^{m-1}dx}{bx^{2m}}$, esto es $-\frac{max^{-m-1}dx}{b}$.

Propone un caso general de una potencia, suponga $x^{m/n} = z$, elevando a la potencia *n*, se tiene $x^m = z^n$, diferenciando[2] $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$ de donde $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$, siendo $x^m = z^n$, $z^{n-1} = x^{m-\frac{m}{n}}$ al sustituir los valores se tendrá $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{m-\frac{m}{n}}}$, esto es $dz = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$. Para la expresión $x^{\frac{3}{2}}$ la diferencial será $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}dx$, esto es $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$ o bien $\frac{3}{2}dx\sqrt{x}$

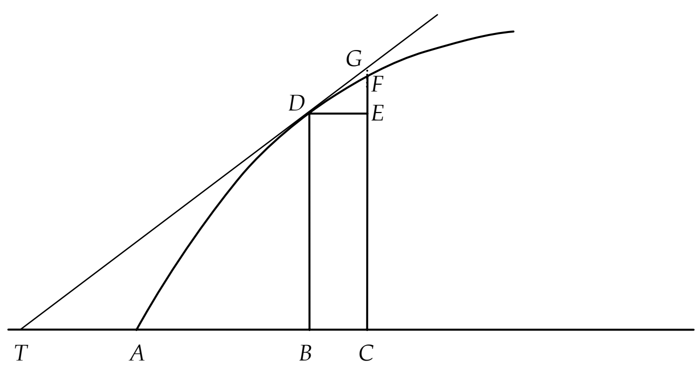
También se explica la diferencia de una expresión respecto a *x* y respecto a *y*; si se propone diferenciar la fórmula $ydx - xdy$ y no se asume constante fluxión alguna, la diferencia será $dxdy + yddx - dxdy - xddy$, esto es $yddx - xddy$. Si se asume constante la fluxión dx, será la diferencia $-dxdy - dxdy - xddy$, esto es $-xddy$, si la constante es la fluxión dy será $yddx$. Si $\frac{ydx}{dy}$, la diferencia será $\frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$; tomando constante dx, será $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2}$ tomando constante a dy, será $\frac{dydx + yddx}{dy}$ (Agnesi, 1748, pág.467).

[2] Agnesi llama diferenciación a la práctica de encontrar la diferencia.

Agnesi concluye enunciando una propiedad sobre las diferencias sucesivas, explica que siguiendo una misma regla [de derivación], es posible hallar las primeras diferencias de una cantidad finita, las diferencias de una cantidad infinitesimal de segundo orden, las diferencias de una cantidad infinitesimal de tercer orden y así en forma sucesiva. Asume que no es un proceso iterativo, dado que la diferencia siguiente se obtiene a partir de una nueva cantidad, es decir, que tiene otra naturaleza.

Estudio al capítulo segundo; donde se estudia el método para el cálculo de la tangente

El *capítulo II* titulado *Del método de las tangentes* trata sobre el estudio de la construcción de una recta tangente a un punto sobre la curva, a partir de hallar previamente la recta subtangente. Este método, tiene mucha semejanza con la desarrollada por L'Hospital. Su explicación se basa en un dibujo geométrico.



Sea la curva *ADF* y además una tangente *TDG* en un punto cualquiera sobre la curva. Se asume que la ordenada *BD* es perpendicular a *AB* en el punto *B*, además que la ordenada *CF* está infinitamente próximo a la ordenada *BD*. Al prolongar *CF*, su intersección con la tangente determina el punto *G*, determinamos que *GF* será infinitamente pequeño respecto a *EF* por consiguiente se pueden considerar indistintamente a *EF* y *EG*, al igual que *DF* y *DG*. De esta forma se distinguen; $AB = x$, $BD = y$, y por el argumento anterior

$EF = EG = dy$, y también a $DF = DG = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Así se determina los triángulos semejantes *GED*, *DBT* los cuales conducen a la siguiente relación *GE* : *ED* :: *DB* : *BT*, en «términos analíticos» como dice Agnesi, se tiene *dy : dx* :: *y : BT*, por consiguiente $BT = \frac{ydx}{dy}$, lo que determina la formula general de la subtangente para cualquier curva.

Aclara, en una amplia nota al finalizar la explicación de su método, que el uso de éste, no favorece la visualización las diferencias de orden segundo, argumentado que cuando se está calculado la subtangente el arco de curva se consideran indistintamente con el segmento tangente a un punto de la curva; se asume que *EF* = *EG* y que el arco *DF* y el segmento tangente *DG* se pueden tomar indistintamente dado que difieren por una cantidad infinitesimal *FG*. Considerando que la construcción geométrica nos permite identificar visualmente variaciones segunda, el método para trazar tangentes inhibe y no deja mostrar las cantidades infinitesimales por las que difieren los segmentos que se involucran en la figura.

El segmento *FG*, que representaría la segunda diferencia de *BD*, se despreciada al aplicar uno de los criterios sobre los órdenes de infinitesimales que Agnesi enunció al inicio de su obra; la segunda diferencia es infinitamente pequeña respecto a la primera por lo que es posible despreciarla.

31. Dal potersi assumere EF = EG, e DF = DG, ne viene, che si può considerare il punto G, come se cada in F, cioè, che la tangente DG, l'arco DF, e la sua corda si confondano assieme, vale a dire, che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli. Questo discorso però procede solo, quando noi ci fermiamo nelle prime differenze; ma se si drovranno computare le seconde, non si considerà il punto G col punto F essendo appunto GF una seconda differenza. Quindi perchè nel metodo delle tangenti non s'introducono

> *differenziali secondi, sarassi giustamente il supposto, che essa tangente si confonda con l'archetto, e sua corda.*
>
> (Agnesi, 1748, pág. 472)

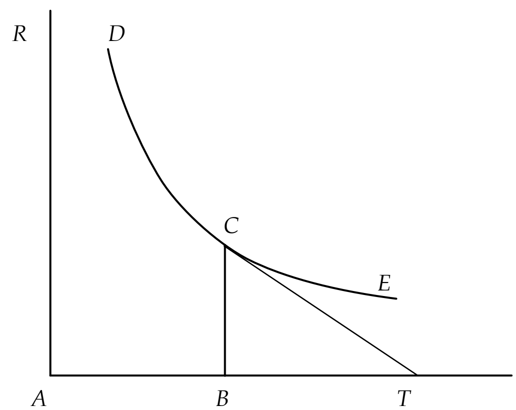
En esta explicación aparece de forma notable la concepción de Agnesi respecto a la naturaleza de las curvas. Al considerar que es posible tomar indistintamente *DG* y *DF*, Agnesi asume que la curva tiene, a través de un acercamiento infinitesimal, forma poligonal de lados infinitamente pequeños. Esta explicación la usa L'Hospital, aunque en él, fue más explícito en sus argumentaciones.

A partir de esta argumentación, expresa que el triángulo *GDE*, permite determinar la tangente a través de otra relación, análoga a la que en principio enunció; por similitud de triángulos *GED*, *DBT*, se determina la siguiente relación *GE:GD*::*DB:DT*, esto es $dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y : DT$, despejando se tiene $DT = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, que es la fórmula general de la tangente.

Después muestra algunos ejemplos referidos al cálculo de la subtangente, el primero de ellos, es el mismo que exhibe L'Hospital; dada la curva *ADF*, se tiene $ax = yy$ la ecuación de la parábola. Diferenciando se tiene $adx = 2ydy$ y despejando se tiene $dx = \frac{2ydy}{a}$. Sustituyendo por el valor dx de la fórmula general de la subtangente $BT = \frac{ydx}{dy}$, obtenemos $\frac{2yy}{a}$, al sustituir el valor e la ecuación de la curva $ax = yy$, se obtiene $2x$. De esta forma se determina el valor de la subtangente de la parábola, este es el doble de la abscisa, es decir *AT*=*AB*. Así al tomar la recta del punto *T* al punto *D* la recta *TD*, esta será tangente de la curva del punto *D*.

El *ejemplo III* expone un problema donde se pide determinar la subtangente, para este caso, Agnesi explica que el valor de la subtangente será negativa.

Dada la curva *DCE* se tiene la ecuación $xy = aa$, encontrar la subtangente.



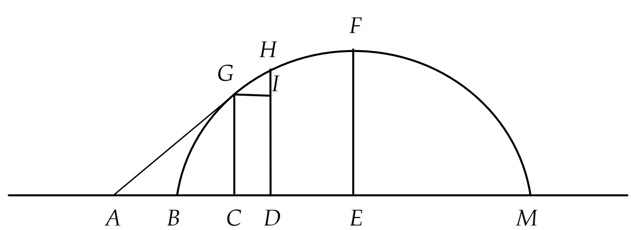
Diferenciando se tiene $xdy + ydx = 0$, y $dx = -\frac{xdy}{y}$, sustituyendo en la fórmula $\frac{ydx}{dy}$, el valor de la subtangente será $= -x$. Tomando así por consiguiente *BT*=*BA*, al determinar el punto *C* se traza la recta *TC*, quien es la tangente de la curva en el punto *C*.

Estudio del capítulo tercero; donde se estudia el método para el cálculo de máximos y mínimos

Este capítulo inicia caracterizando la idea de máximo y mínimo a través de la naturaleza dinámica de la curva; el máximo se alcanza cuando en una sucesión de ordenadas se alcanza la mayor y para el mínimo, la menor.

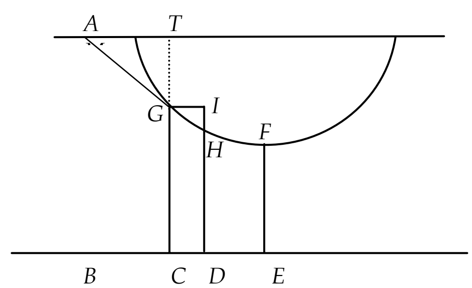
> *72. Se in una curva qualunque, le di cui ordinate sieno parallele, crescendo la assisse BC continovamente, cresca altresì l'ordinata CG sino ad un certo punto E dopo di cui vada calando, o non vi sia più ordinata di sorta alcuna; o pure al contrario crescendo l'assissa, l'ordinata CG vada continivamente calando sino ad un certo punto E, dopo di cui, o cresca, o più non vi sia; l'ordinata EF si chiama la Massima, o la Minima.*

(Agnesi, 1748, pág. 527)



En una curva cualquiera GHF, sea *EF* la máxima de las ordenadas, tomamos una abscisa cualquiera *BC* y se determina su respectiva ordenada *CG*, el punto *G* va a determinar la tangente *GA.* Determinamos también *DH* infinitamente cercana a *CG*, llamamos $BC = x$, $CG = y$, así mismo determinamos *GI* paralela a *BC*, de tal forma que $dx = GI = CD$, $dy = IH$. En relación a esta argumentación, Agnesi enuncia una segunda caracterización al punto máximo o mínimo basándose en la propiedad de guarda la subtangente respecto a la curva; es claro que al aproximarse *CG* a *EF*, la subtangente *AC* será siempre la mayor y cuando *CG* cae en *EF*, la tangente será paralela a *BC* y por consecuencia la subtangente será infinita. Una tercer caracterización la determina en relación a las propiedades infinitesimales; siendo semejantes los triángulos *ACG* y *GHI*, podemos determinar la relación $AC{:}CG :: GI{:}\ IH$. Al dejar fluir las ordenadas, el triángulo *GHI* se acercará hacia el punto, en este caso, máximo, *CG* permanecerá finita pero *GI* e *IH* serán regiones infinitesimales de lo que la diferencia *dy*, será nula respecto a *dx*, es decir, se tendrá $dy = 0$ en el punto máximo o mínimo.

Para estas argumentaciones, la autora utilizó dos tipos de curvas; la primera de ellas convexa, donde se determina un máximo y la otra de ellas cóncava para el punto mínimo.



En lo que sigue, se retoman las argumentaciones anteriores ahora considerando otros tipos de curvas. Para los siguientes casos la subtangente no se determina como la máximo sino como la mínima y siguiendo con las propiedades infinitesimales el triángulo *GIH* ya no va a determinar $dy = 0$, *sino* $dy = \infty$.

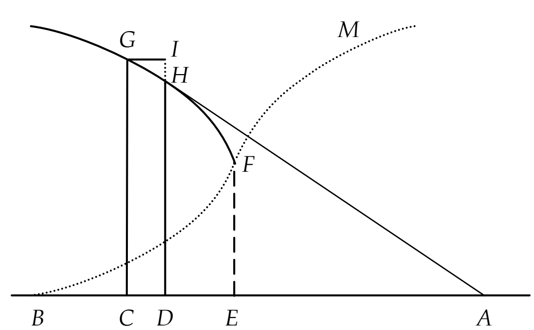


Fig. 51

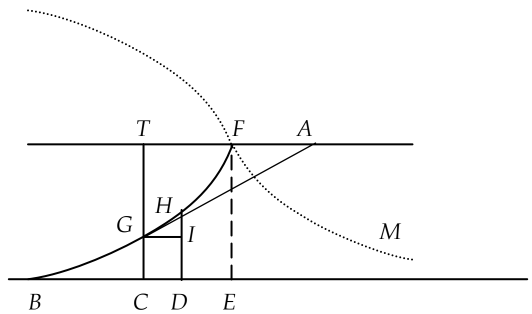


Fig. 52

Sia la curva GHF, (Fig. 51, e 52) EF la minima delle ordinate (Fig. 51), o la massima (Fig. 52); presa pure una qualunque assisa BC, e condotta l'orsinata CG, la tangente GA, DH infinitamente próxima a CG, e GI paralella a BC, e chiamate BC = x, CG = y, sarà GI = CD = dx, IH = dy. Per i triangoli simili ACG, GIH, (Fig. 52) sarà AT, TG :: GI, IH. Accostandosi adunque l'ordinata CG sempre paralella a se stessa massima, o minima ordinata, la sottotangente AC, o AT si sarà sempre minore per modo, che quando CG cada sorpa la EF, la tangente si sarà normale a BC, e per conseguenza nulla la sottotangente. In questo caso adunque averà AC a CG, o AT a TG la regione del nulla alla quantitá finita, e però essendo ella stessa, ragione GI ad IH, sarà dx nulla rispetto alla dy, cioè dy = ∞ nel punto della massima, o minima ordinata. Adunque la formola generale per le massime, e minime ordinate sarà dy = 0 o pure dy = ∞.

(Agnesi, 1748, pp. 528-529)

De la conclusión final, se desprende una cuarta caracterización a la idea de máximo o mínimo, fundamentada en un principio analítico expresada como regla; el lugar donde $dy = 0$ o bien $dy = \infty$ se determina un máximo o mínimo, por consiguiente dada la ecuación de la curva, para determinar un máximo o un mínimo se deberá diferenciar bajo el supuesto de que dy = 0 o $dy = \infty$, de esta forma se obtendrá el valor de la abscisa x, al punto en el que corresponde la máxima o mínima ordenada. Concluye diciendo que si la y no determina, tras la primer diferencia, alguno de los casos anteriores, entonces la curva propuesta no tiene máximo o mínimo.

En estas argumentaciones se observa cierta cercanía conceptual con las desarrolladas por L'Hospital, aunque Agnesi incorpora a sus aplicaciones variados casos geométricos en los que las reglas se amplían y las caracterizaciones aumentan. Veamos a continuación algunos de los ejemplos resueltos que propone en su libro.

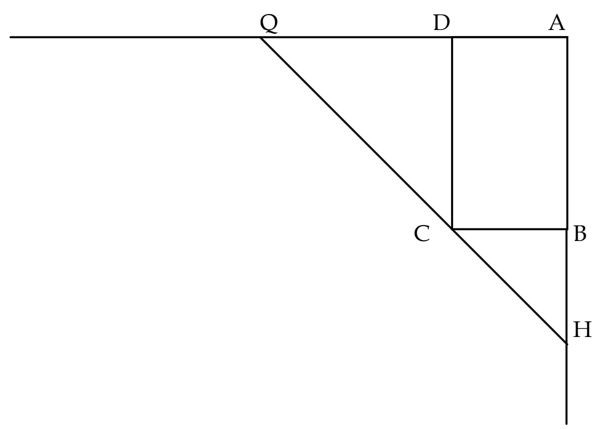
ESEMPIO I

> *75. Sia la curva dell'equazione* $2ax - xx = yy$*, e si voglia sapere, a quale punto dell' asse dell'assisse x corrisponda la massima ordinata y, e cosa ella sia.*
>
> (Agnesi, 1748, pág. 530)

Dada la ecuación $2ax - xx = yy$, su diferencia será $2adx - 2xdx = 2ydy$, esto es $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$, haciendo la suposición de $dy = 0$, se tiene $a - x = 0$, donde $x = a$, por consiguiente la máxima ordenada corresponde a la abscisa igual al punto a, sustituyendo el valor en lugar de x en la ecuación se tiene $2aa - aa = yy$, esto es $y = \pm a$ por consiguiente la máxima ordenada se tiene cuando se tiene $+a$ y $-a$. Sin embargo este razonamiento no parece del todo coherente. No obstante se tiene el supuesto de que el máximo o mínimo de una curva, puede esta determinado por $dy = 0$ o por $dy = \infty$. Considerando lo anterior, se hace la suposición de que $dy = \infty$, para cumplir la condición se tiene entonces que el denominar de la fracción es cero. Siendo $y = 0$, sustituyendo el valor de este en lugar de y en la ecuación se tendrá $x = 0$ y $x = 2a$, es decir $x = 0$ será la mínima, y $x = 2a$ la máxima o en términos de la propia Agnesi, cuando sea $x = 0$ y $x = 2a$ siendo infinita la dy respecto a la dx, la subtangente será nula, esto es la tangente paralela a la ordenada y.

Una variante interesante, respecto a la obra de L'Hospital, es la presentación de *problemas* resueltos, donde se exhiben situaciones que se resuelven al aplicar las ideas estudiadas. El *problema I*, relacionado con la optimización, pide hallar la magnitud mínima en una construcción geométrica.

Dado el rectángulo $ADCB$, se requiere la recta mínima QH que pase por el punto C, del ángulo QAH.



Sea $AB = a$, $BC = b$, $BH = x$, de lo que se obtiene $CH = \sqrt{bb + xx}$, por triángulos semejantes HBC, HAQ, se determina la relación $\frac{HB}{HC} : \frac{HA}{HQ}$, esto es $x : \sqrt{bb+xx} :: x + a : HQ$, despejando obtenemos que $HQ = \frac{x+a}{x}\sqrt{bb+xx}$.

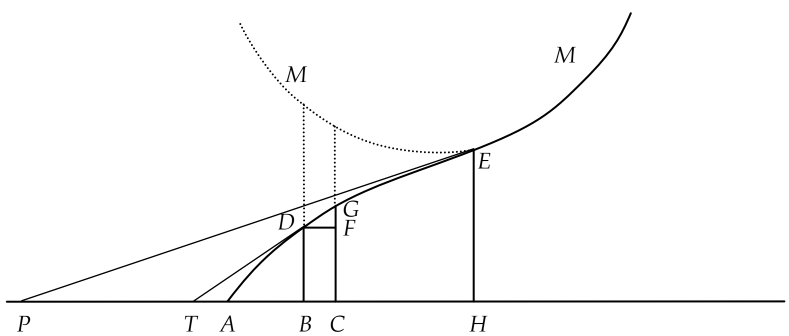
Previo a la presentación de este problema, se han analizado aspectos de optimización en una situación similar. Para este caso explica que HQ puede considerarse como la ordenada de una curva, por lo que es posible $HQ = y$. Al sustituir de la ecuación anterior se tiene que

$y=\frac{x+a}{x}\sqrt{bb+xx}$. Diferenciando obtenemos $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-abb}{xx\sqrt{bb+xx}}$. Para que sea cero la expresión $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-abb}{xx\sqrt{bb+xx}}$, es suficiente que x^3-abb, por lo que al considerar la suposición de $dy=0$, obtendremos $x=\sqrt[3]{abb}$ y por lo tanto $BH=\sqrt[3]{abb}$, la cual determina la magnitud del segmento para que HCQ sea la recta mínima. Por el contrario, al considerar el supuesto que $dy=\infty$ obtendremos que $x=\sqrt{-bb}$ determina una cantidad imaginaria el cual no nos dará el mínimo.

Estudio del capítulo cuarto; donde se estudia el método para el cálculo de puntos de inflexión

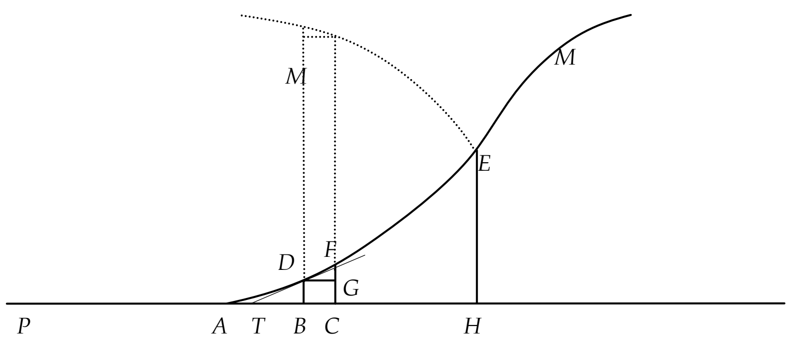
El *capítulo IV* trata el estudio de las curvas con *curvatura contraria y de regreso*, las llama así, atendiendo a sus características; *contrarias* debido un cambio en su crecimiento.

Su explicación inicia caracterizando el punto de inflexión a través de las propiedades infinitesimales, para ello, Agnesi hace referencia a una gráfica en donde exhibe un punto de inflexión, describe además las partes involucradas en la construcción geométrica y la forma en la que se relacionan.



Consideremos una abscisa cualquiera $AB = x$, y su correspondiente ordenada $BD = y$, determinamos además una ordenad CF paralela e infinitamente próxima a BD, asumimos que $dx = BC$ fluye en forma constante. Al crecer la abscisa $AB = x$, la diferencia GF de la ordenada BD, es decir dy, siempre será menor hasta que la ordenada sea HE la correspondiente al punto contrario, después de éste la dy será cada vez mayor. De esto modo se determina un punto especial en donde las diferencias vienen decreciendo y después del cual empiezan a crecer, por consiguiente, explica Agnesi, en el punto de flexión contraria la dy será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$, será la fórmula para determinar los puntos contrarios o de flexión contraria.

Agnesi presenta esta caracterización estudiada, pero ahora en referencia a otra curva, la cual por su naturaleza exhibe las propiedades anteriores en forma inversa; Sea una curva *ADEM*, en ella las diferencias crecen hasta el punto *E*, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual las diferencias decrecen, por lo que el punto *dy* representa un máximo, para lo cual se sigue usando la fórmula $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$.

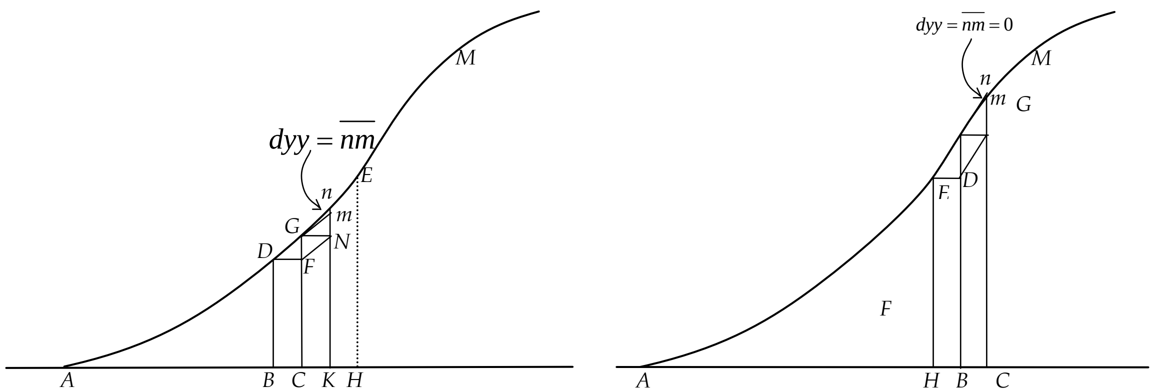


Otra caracterización al punto de inflexión está referida a una propiedad de las segundas diferencias. Explica que cuando una curva es primero cóncava, entonces la segunda diferencia será negativa hasta el punto de flexión contrario, si por el contrario la curva primero es convexa, entonces las segundas diferencias serán positivas hasta antes del punto de inflexión.

> *Lo stesso s'inferisca ancora dal considerare, che nelle curva prima concave all'asse la diferenza seconda dell'ordinata y, cioè la ddy è negativa sino al punto E di regresso, o di flesso contrario, di poi si sa positiva; e nelle curve prima convesse essa diferenza seconda è positiva sino al punto E, di poi si sa negativa: ma una quantità qualunque non può da neagtiva farsi positiva, o da positiva farsi neagtiva, se non passando per lo zero, o per lìnfinito, adunque nel punto E di regresso, o di flesso contrario deve essere ddy = 0, o pure ddy = ∞*

(Agnesi, 1748, pág. 555)

Esta argumentación permite concluir con una tercer caracterización al punto de flexión contraria, ésta se determina cuando su segunda diferencia cambia de positiva a negativo o de negativa a positiva, en términos modernos, cuando dada una *f* (*x*) su *f* ’(*x*) determina una raíz, exceptuando casos como el de la función $y = x^4$, se tiene en *f* (*x*) un punto de inflexión. Apoyándonos en la construcción de Agnesi para visualizar las diferencias de orden superior, observamos que al tomar ordenadas cada vez más cercanas al punto de inflexión sus diferencias segundas son casi cero.

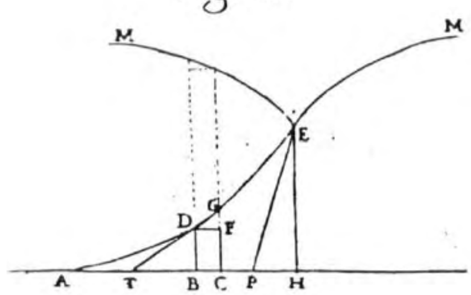


Otra caracterización al punto de inflexión, se sustentada en las propiedades geométricas cuando se está reconociendo su forma, dice que cuando la curva es primero convexa y después cóncava el punto que determina el cambio representa en punto de flexión contraria. La quinta caracterización que Agnesi ofrece, se refiere al uso de la subtangente como recurso en el cálculo del punto de inflexión. Explica que dada una curva *AEM*, primero cóncava y después convexa, se determina en el punto *D* la recta *DT* y en el punto *E* la recta *EP*.

Cuando la abscisa *AB* crezca continuamente y *B* caiga en *H*, entonces *AT* (la subtangente) habrá crecido e interceptará a la tangente que se determina en el punto de inflexión a lo cual *AT* dejará de crecer y pasando el punto irá decreciendo. Así en el punto *E* se determina la magnitud máxima de *AP*, de lo cual se tiene la siguiente relación $AP = \frac{ydx}{dy} - x$, al diferenciar y tomar dx constante tenemos $\frac{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx}{dy^2}$, al igualarlo a cero o a infinito y dividiendo por $-ydx$ y multiplicando por $-dy^2$, obtendremos $ddy = 0$ o bien $dyy = \infty$.

Se la curva (Fig. 65.) sia prima convessa all'asse, l 'intercetta AT sarà $= -\frac{ydx}{dy}$ *e la differenza* $\frac{dxdy^2 - dxdy^2 + ydxddy}{dy^2}$, *o sia* $\frac{ydxddy}{dy^2}$, *e però dividendo per ydx, e moltiplicando per dy², si avrá nè più nè meno* $ddy = 0$ *o pure* $dyy = \infty$.

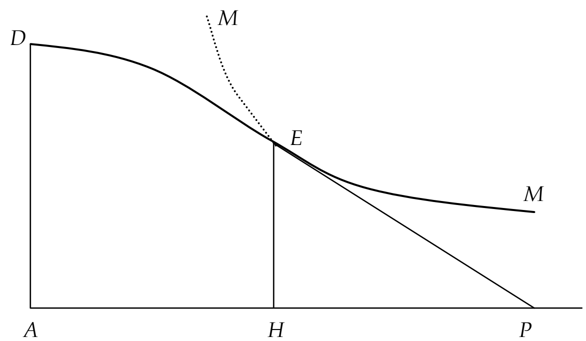
Fig. 65.



(Agnesi, 1748, pág.556) y Figura de Tom. II, Lib. II, T XII)

(Tomado de Agnesi, 1748, anexo de ilustraciones, *TOM. II, Lib. II, T XII*)

Aborda el caso en el que la subtangente está en sentido contrario a lo que ella llama subtangente negativa. Dada la curva *DEM* y siendo *A* el origen de la abscisa *x* y *E* el punto de flexión contraria *AP = AH + HP* será la que intercepte a la tangente.



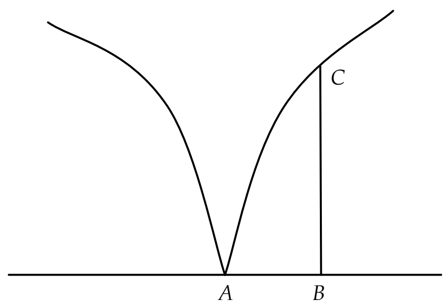
En este caso, la subtangente *HP* será negativa por lo que $AP = x + \frac{ydx}{dy}$.

Enseguida, Agnesi presenta algunos ejemplos resueltos, sin incluir el apartado de problemas que lo había hecho en el capítulo anterior. El primer ejemplo se refiere al caso de una cúbica con ecuación $y = a + \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$.

Siguiendo el método analítico que uso para calcular máximos y mínimos, que consiste en diferenciar dos veces la ecuación se tiene $dy = -\frac{2aadx + 2axdx}{3(a^3 - 2aax + axx)^{\frac{2}{3}}}$ suponiendo dx constante obtenemos $ddy = -\frac{2adx^2}{9(a^3 - 2aax + axx)^{\frac{2}{3}}}$.

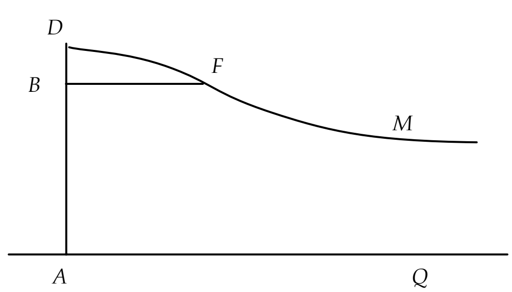
Ahora, usando el supuesto de $ddy = 0$ se obtiene $-2adx^2 = 0$, si embargo el resultado obtenido no nos sirve, pues no se ha logrado conseguir un valor para la abscisa. Usando ahora el supuesto de $ddy = \infty$ se tiene $9(a^3 - 2aax + axx)^{\frac{2}{3}} = 0$, esto es $aa - 2ax + xx = 0$, de esto se obtiene $x = a$, sustituyendo en lugar de x el valor en la ecuación propuesta, se obtiene $y = a$.

Usando nuevamente el argumento *ddy* = ∞, Agnesi plantea en el mismo problema, el cálculo de un punto de regreso[3].



Tomemos la abscisa *AB* = *x* del vértice *A* y *BC* la ordenada correspondiente. Dada la ecuación de la curva $3yy = 3x\sqrt[3]{aax}$, al diferenciar tenemos $dy = \dfrac{2axdx}{3x\sqrt[3]{aax}}$, diferenciando de nueva cuenta, tomando *dx* constante se tiene, $dyy = -\dfrac{2adx^2}{9x\sqrt[3]{aax}}$. La suposición de que *ddy* = *0* no nos sirve, pero usando *ddy* = ∞. obtenemos $9x\sqrt[3]{aax} = 0$, y por consecuencia *x* = 0, el cual al sustituirlo en la ecuación determinamos que el lugar donde se tiene un punto de regreso es *y* = 0.

En el *ejemplo II*, Agnesi plantea un problema en el que se utiliza el argumento $ddy = 0$. La curva *DFM* tiene por ecuación $y = a\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}$, en ella reconocemos que $AB = x$, $BF = y$, $AD = a$.



[3] Una curva que cambia de concavidad en un punto dado.

Al diferenciar la ecuación tenemos $dy = -\frac{aadx}{2x\sqrt{ax - xx}}$, diferenciando de nuevo suponiendo dx constante se tiene $ddy = \frac{3a^3dx^2 - 4aaxdx^2}{4x\cdot(ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$.

Al suponer $ddy = 0$ obtenemos $ddy = 3a^2 - 4aax = 0$, esto es $x = \frac{3a}{4}$, sustituyendo en la ecuación original de la curva, se determina que el punto de inflexión se determina en el punto $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

La suposición de que $dyy = \infty$ no funciona en este caso, debido a que $4x\cdot(ax - xx)^{\frac{3}{2}} = 0$ esto es $x = 0$ y $x = a$, el primer valor sustituido en la ecuación hace $y = \infty$, el segundo $y = 0$ pero ni el primer valor ni el segundo determinan un punto de flexión contraria.

Notas finales

Este estudio de la obra de Agnesi nos ha provisto de una visión del tratamiento de las ideas matemáticas del cálculo cuando éste aún se hallaba en un proceso de conformación, pero más aún, nos ha servido de enlace para trazar una línea evolutiva en nuestro estudio de *la presentación didáctica de las ideas matemáticas del cálculo*, que la iniciamos con la obra de L'Hospital.

Agnesi, como lo hemos visto, hace un tratamiento más refinado a los conceptos del cálculo, se percibe al observar que hace varias caracterizaciones a las ideas y presenta ejemplos más elaborados en los que hace mención de situaciones donde se obtienen resultados negativos, así como la inclusión de problemas de aplicación en el capítulo de máximos y mínimos.

Aunque este tratamiento resulta más completo, varios de los ejemplos y argumentaciones son idénticos a los que presenta L'Hospital, no obstante, reconocemos que Agnesi se sirvió de esas ideas para extenderlas, como en el caso del punto de inflexión; L'Hospital reconoció implícitamente que la subtangente en el punto de inflexión podría ser la de mayor magnitud, Agnesi no sólo lo reconoció sino que mostró ejemplos en los que el argumento se mantenía de manera inversa; curvas en donde el punto de inflexión determina la subtangente menor.

En lo que se refiere a los *ejemplos resueltos*, Agnesi retoma las explicaciones que ha dado previamente y las reelabora para ofrecer un «repaso» a través de un ejercicio comentado. Esta es una evidencia importante para la caracterización de las obras didácticas, pues se trata de una forma de movilizar al lector, orientándolo de cómo proceder en la resolución de problemas.

Capítulo VIII

En donde se construye una caracterización de los conceptos del cálculo y se formula una primera actividad didáctica

Caracterización de los conceptos del cálculo

Aspectos iniciales

En un esfuerzo por ofrecer claridad en las ideas del cálculo para difundir un nuevo saber, los tratados de L'Hospital y Agnesi constituyen la génesis de los libros de difusión del cálculo. Estas obras exhiben un tratamiento a los objetos matemáticos a partir un soporte conceptual que incluye múltiples explicaciones, ejemplos y problemas fortaleciendo las explicaciones verbales. De esta forma un lector, no necesariamente experto en la materia, podría adentrarse sin dificultad a la matemática del cálculo.

La múltiple caracterización que hemos citado, *sui generis* en las obras eruditas, ubica a los autores en nuevo plano en cuanto al tratamiento del conocimiento matemático, existe un tono «didáctico» en la comunicación de los conocimientos, por ejemplo, al no restringir los conceptos a una definición formal (a través de un cuerpo axiomático), además de incluir en las explicaciones referentes ya conocidos, tales como la representación de curvas geométricas y los referentes geométricos.

No obstante, aunque se trata de obras con una misma *intencionalidad*, es posible observar diferencias en el tratamiento de su información; consideremos que L'Hospital vivió un periodo de conformación del cálculo aún más difícil, medio siglo después, con la propia obra de L'Hospital de por medio, el cálculo había se había difundido, tomado ya un sitio relevante en el escenario matemático. La obra de Agnesi por su parte, distingue una variante; integra a su discurso la visión dinámica de la escuela newtoniana, la cual se aprecia al observar sus concepciones de las curvas cuando explica y argumenta su naturaleza y describe sus características.

Estas dos versiones exhiben la vida de un saber dispuesto para la difusión, muestran sus eventuales transformaciones y nuevas caracterizaciones.

Con el propósito de definir los mecanismos de *comunicación*[1] de las ideas matemáticas en los obras de L'Hospital y Agnesi, analizamos enseguida las caracterizaciones y el tratamiento de Agnesi y L'Hospital a las ideas infinitesimales. Se buscará observar la naturaleza de las argumentaciones, el ámbito de significación (contextual) y la extensión de los significados. Entresacamos para ello esto algunas partes de *Analyse des Infiniment Petits pour l'intelligence des Lignes Courbes (1696)* del Marqués de L'Hospital y de *Institutione Analiche (1748)* de María de Agnesi.

Hemos referido las ideas de L'Hospital en el recuadro de la izquierda y las de Agnesi en el recuadro derecho.

[1] Se entiende, en una primera aproximación, como el o los procedimientos por los que se «expresan las ideas» y se reproducen «ideologías» o «formas de pensar». La comunicación se logra a través de un lenguaje que comparten un grupo de personas, de acuerdo con la información de que pueden disponer, con su nivel de tecnología. (Villoro, 1982). En el caso de la comunicación escrita, se utiliza un conjunto de símbolos cuya codificación se comparte.

Discusiones sobre ideas principales

Presentación y organización de las ideas

Ambos siguen un orden semejante en la presentación de sus contenidos, los índices de sus obras muestran los mismos temas los primeros cuatro capítulos, aunque en la obra de Agnesi aparece un estudio más detallado de las diferencias de orden mayor.

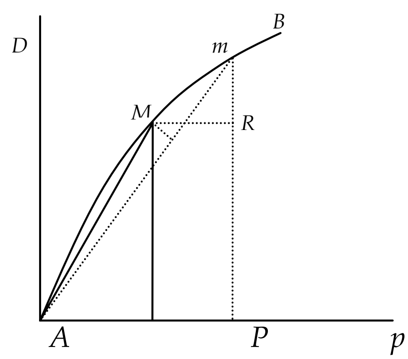
I. Donde se dan las reglas del cálculo de las diferencias
II. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las tangentes de todos los tipos de líneas curvas.
III. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas De Maximis & minimis
IV. Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno.

I. De la idea de diferencial de diverso orden y del cálculo del mismo.
II. Del método de las tangentes
III. Del método de máximos y mínimos
IV. De curvas contrarias y de regreso

Naturaleza dinámica de las curvas

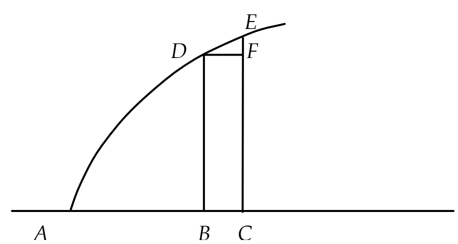
Agnesi incorpora un pensamiento dinámico en sus argumentaciones referentes a las curvas, L'Hospital por su parte explica que es "la variación continua" la que genera diferencias infinitesimales.

...Soit par exemple une ligne courbe quelconque AMB, qui ait pour axe ou diámetre le liogne AC, & pour une de ses apliques la drote PM; & soit une autre apliquée pm infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene MR parallele à Ac ; les cordes AM, Am ; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS : Pp sera la différence de AP, Rm celle de PM, Sm celle de AM, & Mm celle de l'arc AM.



Pág. 2

S'intenta la recta ABC, generata dal moto del punto A, prodotta del punto A, sopra cui insista, facendo un qualunque angolo, e si tiri la corda mM prodotta in B, e la retta MR paralella ad AP; pochiè sono simili i due triangoli BPM, MRm, sará BP, PM::MR, Rm, ma le due quantità BP, PM sono finite, ed MR è infinitesima, aduqnue sarà pure infinitesima la Rm.



Pág.433

Definición de constante y variable

Ambos definen en principio las cantidades variables y las cantidades constantes

On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les applquées & les coupées font des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

Pág. 1

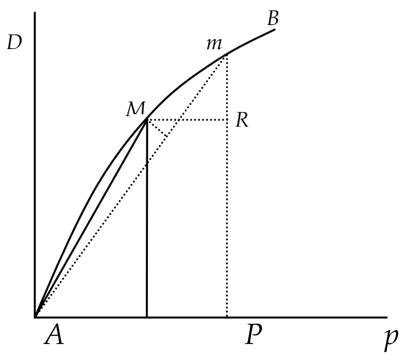
Quantità constanti sono aquelle, che nè crescono, nè calano, ma si concepiscono per determinate, ed invariabili, como i Parametri, gl' Assi, o Diametri ec.

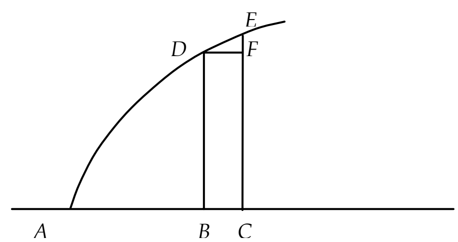
Le costanti si denominano colle prime lettere dell'Alfabeto, e le variabili colle ultime in quella guisa che si è fatto ell'Algebra Cartesiana rispetto alle quantità note, ed incognite.

Pág. 432

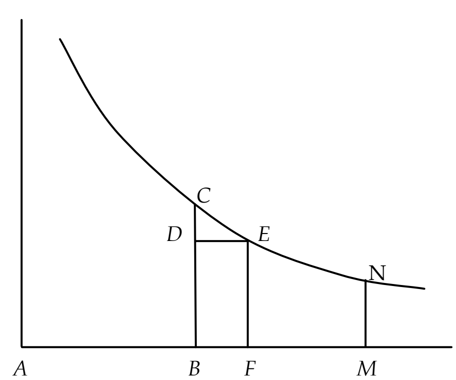
Diferencia infinitesimal

Ambos se apoyan en el uso de una figura geométrica sobre la cual realizan sus argumentaciones, L'Hospital plantea dos ordenadas infinitamente cercanas, de las cuales su diferencia corresponde a *dy*, Agnesi por su parte supone una ordenada y al hacerla fluir determinación la otra, las cuales se separan por un porción infinitesimal *dx,* finalmente distingue la magnitud por la que difieren las ordenadas y determina así el valor *dy*. Agnesi distingue el caso en el que se tienen diferencias contrarias a las que llama negativas.





Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl' Antichi de' Poligoni inscritti, e circoscritti, si può chiaramente vedere dal solo idearsi, che l'ordinata MN, si vada continovamente accostando all BC, finchè conesaa coincida; ora egli è chiaron, che prima, che queste due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, coiè minore di quallunque quantitá data; in tale posizione sieno BC, FE,
adunque BF, CD saranno quantitá minori di qualunque data, e però inassegnabili, o sia differenze, o flussioni.



Pág. 434

Naturaleza de las diferencias de orden superior

Agnesi explica que dos cantidades son iguales si difieren por una cantidad infinitesimal, dos diferencias de primer orden se consideran iguales si éstas difieren por una cantidad infinitesimal de segundo orden. L'Hospital escribe estas ideas como un postulado fundamental en su obra, explicando que es posible tomar indistintamente dos cantidades una por la otra las cuales no difieran entre sí por una cantidad infinitamente pequeña.

II. DEMANDE OU SUPOSITION.

On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) comme un polygône d'un nombre infini de côtes, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande para exemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en forte que le petit triangle m SM puisse être censé réctiligne....

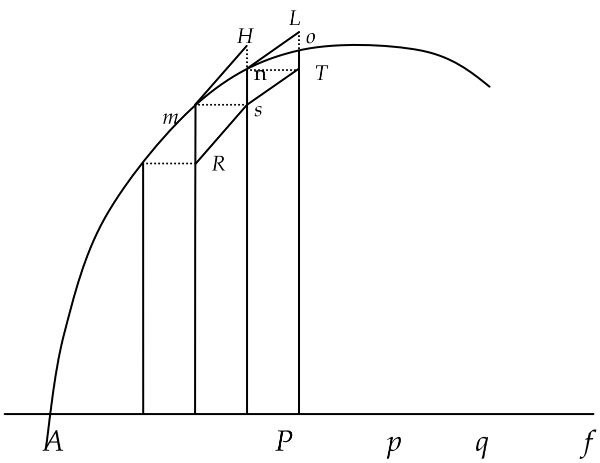
Pp. 2 y 3

In quella guisa che le differenze prime non ânno proporzione assegnabile alle quantità finite, cosi le differenze seconde, o flussioni del secondo ordine non ânno proporzione assegnabile alle differenze prime, e sono di esse infinitamente minori per modo, che due quantità infinitesime del primo ordine, ma che differiscono tra loro d'una differenza econda, possono assumersi per eguali. Lo stesso si dica delle differenze terze rispetto alle seconde, e cosi di mano in mano.

Pág. 438

Caracterización a las segundas diferencias

Agnesi presenta tres caracterizaciones a las segundas diferencias, la primera se basa en relaciones geométricas y la segunda en una construcción muy cercana a la que presentó L'Hospital.



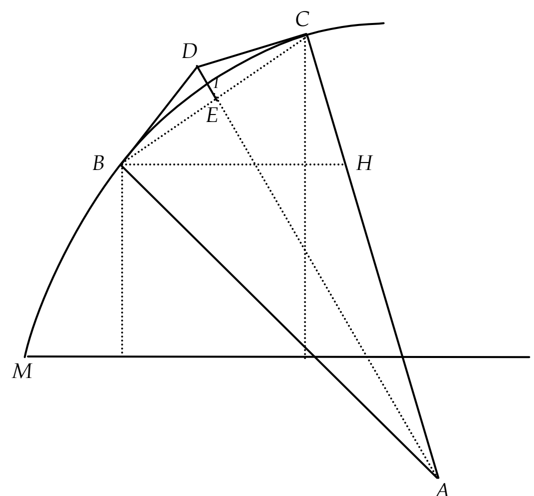
COROLLAIRE I

62. Si l'on nomme chacune des coupées AP, Ap, Aq, Af, x ; chacune des appliquées PM, pm, qn, fo, y ; & chacune des portions courbes AM, Am, An, Ao, u ; il est clair que dx exprimera les différences Pp, pq, qf des coupées ; dy les différences Rm, Sn, To des appliques ; & du les différences Mm, mm, no des postions de la courbe AMD. Or afin de prende, par éxemple, la différence seconde Hn de la variable PM, il faut imaginer sur l'axe deux petites parties Pp, pq, & sur la courbe deux autres Mm,mn pour avoir les deux différences Rm, Sn ; & partant si l'on suppose que les petites parties Pp, pq soient égales entr'elles, il est clair que dx sera constante par rapport à dy & à du, puisque Pp qui devient pq demeure la même pendant que Rm qui devient Sn,& Mm qui devient mn, varient. On pourroit supposer que les petites parties de la courbe Mm, mn seroient égales entr'elles, & alors du seroit constante par rapport à dx & à dy ; & enfin si l'on supposoit que Rm &Sn fussent égales, dy seroit constante par rapport à dx & à du, & sa différence Hn (ddy) seroit nulle.

Pág. 56

TEOREMA I

6. Sia una qualunque curva MBC, ed una porzione di essa BC infinitesima del primo orde. Da punti B, C si conducano perpendicolri alla curva le rette BA, CA. Dico: che le rette BA, CA si portranno ssumere per eguali.



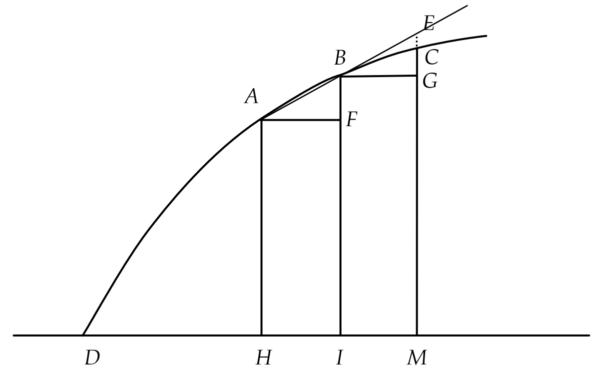
Explica que siendo semejantes los dos triángulos AEB, BED es posible determinar la relación AE, EB :: EB, ED, de la que distingue que AE es de dimensiones finitas, EB *infinitesima del primo grado* y ED será la infinitesimal de segundo orden, cuyo valor se obtiene de la relación anterior.

$$AE, EB :: EB, ED$$

$$\frac{EB}{AE} : \frac{ED}{EB}$$

$$ED = \frac{(ED)^2}{AE}$$

Pág. 438



TEOREMA II

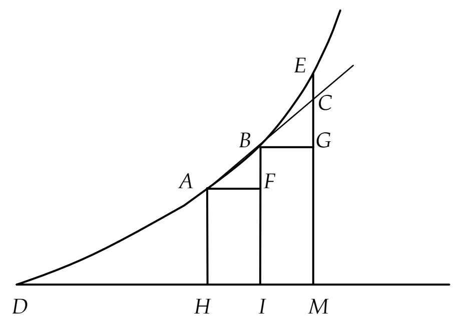
7. Sia una qualunque curva DAE, nel di cui asse prese due porzioni infinitsime del primo ordeine, ed aguali HI, IM, si conducano le ordinate parallele HA, IB, ME, le quali taglieranno nella data curva gl'archetti AB, BE parimente infinitesimi del primo ordine. Si conduce la corda ABC, la quale concorranel punto C con l'ordinata ME prodotta, se ocurre. Dico: che l'intercetta CE tra la curva, e la corda AB prodotta sarà infinitesima del secondo ordine.

Chimate per tanto le DH = x, HA = y, HI=IM=dx, sará FB=GC=dy, ed EC=-ddy, prefiggendo il segno negativo, perchè per essa cala, e nono cresce la dy, e così all'opposto averà il segno positivo, se per essa cresca la dy, cioè se la curva sia convessa in quel punto all'asse DM.

Pp. 441 – 442

Esta caracterización que realiza Agnesi para las segundas diferencias, no exige más trazos, sólo suponer la prolongación de la tangente en el triángulo infinitesimal formado entre dos ordenadas infinitamente cercanas y observar la distancia que guarda dicha tangente con una tercer ordenada. Al parecer Agnesi intentó simplificar el método propuesto por L'Hospital.

Además de estas dos construcciones geométricas que hemos presentado, Agnesi concibió también el caso en el que se tiene una curva con concavidad inversa determinando así segundas diferencias positivas.

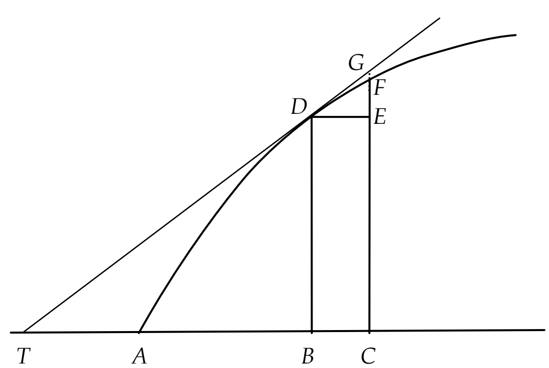


Como *EC* que se encuentra por debajo de la curva determina una diferencia positiva por lo que Agnesi concluye que *EC* = *ddy*.

La última caracterización de las segundas diferencias, se basa en una construcción geométrica que utilizó para explicar el método para el cálculo de la tangente. Muy semejante a la primera, Agnesi considera la prolongación de la tangente y sin necesidad de trazar una tercer ordenada concluye que la distancia entre la tangente y la ordenada corresponde a una diferencia de segundo orden.

31. Dal potersi assumere EF = EG, e DF = DG, ne viene, che si può considerare il punto G, come se cada in F, cioè, che la tangente DG, l'arco DF, e la sua corda si confondano assieme, vale a dire, che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli. Questo discorso però procede solo, quando noi ci fermiamo nelle prime differenze; ma se si drovranno computare le seconde, non si considerà il punto G col punto F essendo appunto GF una seconda differenza. Quindi perchè nel metodo delle tangenti non s'introducono differenziali secondi, sarassi giustamente il supposto, che essa tangente si confonda con l'archetto, e sua corda

pág. 472



Reglas para obtener diferencias infinitesimales

Ambos presentan en la primer sección de sus respectivas obras, las reglas para obtener las diferencias a fórmulas analíticas, iniciando por la suma y resta, el producto y el cociente. Agnesi, quien llama a este procedimiento *formal*, incluye en su explicación a la diferencia de un producto una figura geométrica donde expresa las relaciones analíticas.

Regle I
Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.

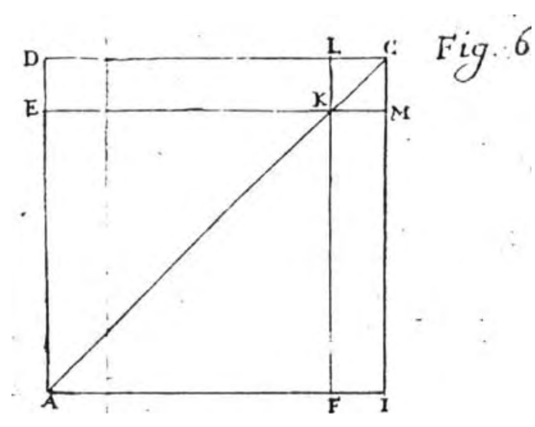
On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée..

(pág. 4)

Da ciò si ricava la regola generale, che per differenziare qualunque complesso di quantità analitiche di una dimensione, basterà prende le differenze di ciascheduna variabile coi loro segni, ed il complesso disqueste differenze sarà la differenza della quantità proposta. La differenza adunque di $b - s - z$ *sarà* $-ds - dz$; *la differenza di* $aa - 4bz + by$ *sarà* $-4bdz - ds + bdy$.

Pág. 458

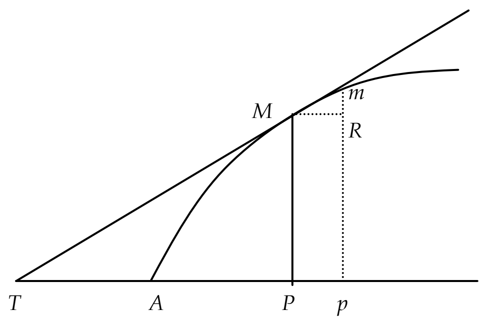
En un rectángulo de dimensiones finitas cuyos lados los llama x y y, al hacerlos fluir por un instante se obtienen $y + dy$ y $x + dx$ respectivamente, así el área obtenida es $xy + ydx + xdy + dxdy$, al considerar que este último término es infinitamente pequeño con el resto de los sumandos, es posible despreciarlo, de tal forma que el área total se expresa como $xy + ydx + xdy$.



(Tomado de *Agnesi, 1748*, anexo de ilustraciones, *TOM. II, Lib. II, Fig. 6*)

Método de las tangentes

En su argumentación ambos emplean una figura geométrica, muy semejante, y describen en relación a ella su método que consiste básicamente en una proporción entre un triángulo finito y otro de naturaleza infinitesimal. Una vez determinada la subtangente, se puede trazar la tangente.

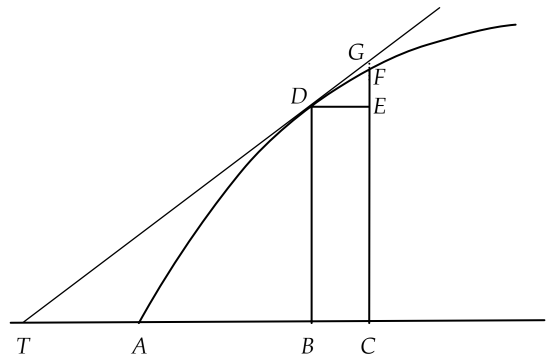


Proposition I
Problême

9. Soit una ligne courbe AM telle que la relation de la coupée AP à l'appliquée PM, soit exprime par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné M sur cette courbe mener la tangente MT.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui recontre le diametre au point T, soit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x ;MP, y ; (donc Pp ou MR = dx, & Rm = dy.) les triangles semblables mRM / MPT donneront mR (dy). RM (dx ::MP)(y). PT = $\frac{ydx}{dy}$.

(pág. 11)



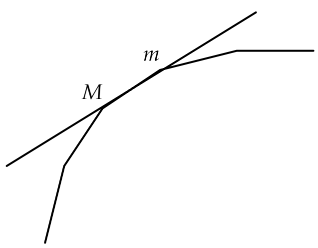
Dada la curva *ADF* y una tangente *TDG* en un punto cualquiera sobre la curva. Con la ordenada *BD* perpendicular a *AB* en el punto *B*, además que la ordenada *CF* está infinitamente próxima a la ordenada *BD*. Si prolongamos *CF*, su intersección con la tangente determina el punto *G*, decimos que *GF* será infinitamente pequeño respecto a *EF* por consiguiente se pueden considerar indistintamente a *EF* y *EG*, al igual que *DF* y *DG*. De esta forma tenemos que; $AB = x$, $BD = y$, y por el argumento anterior $EF = EG = dy$, y también a $DF = DG = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Así se determinan los triángulos semejantes *GED*, *DBT* obteniendo la relación *GE* : *ED* :: *DB* : *BT*. Finalmente se tiene *dy* , *dx* :: *y*, *BT*, por consiguiente $BT = \frac{ydx}{dy}$, lo que determina la formula general de la subtangente para cualquier curva.

Naturaleza infinitesimal de las curvas

Agnesi retoma implícitamente las argumentaciones de L'Hospital al considerar en sus argumentos que las curvas tienen una naturaleza poligonal, formadas por de lados infinitamente pequeños. Asume que es posible tomar, bajo este argumento, indistintamente al arco infinitesimal y a la secante que pasa por los dos puntos en los extremos del arco. En L'Hospital el argumento aparece como medio para mostrar a la tangente a un curva de una forma más natural, dado un lado infinitamente pequeño, la prolongación de esos lados en sentidos opuestos genera la tangente en un punto.

Demande ou supposition

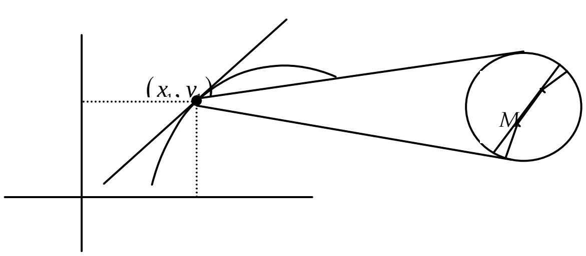
On demande qu'une ligne courbe puisse éter considérée comme l'assemblage d'une infinite de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbe de la ligne. On demande par éxemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle msM puisse être censé réctiligne.



(pág. 3)

31. Dal potersi assumere EF = EG, e DF = DG, ne viene, che si può considerare il punto G, come se cada in F, cioè, che la tangente DG, l'arco DF, e la sua corda si confondano assieme, vale a dire, che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli.

Entonces al prolongar el segmento infinitesimal en ambas direcciones se obtiene la recta tangente.



Cálculo de la tangente

Ambos enuncian como primer ejemplo el cálculo de la tangente de la curva *ax* = *y²*. Agnesi incluye un ejemplo donde se determina una subtangente contraria.

Exemple I

Si l'on veut que ax=yy exprime la relation de AP à PM; la courbe AM sera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, adx = 2ydy, & dx = $\frac{2ydy}{a}$ *&* $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right)=\frac{2yy}{a}=2x$ *enmettant pour "yy" sa valeur ax.*

(pág. 12)

Utilizando la relación $PT=\frac{ydx}{dy}$

Sustituimos el valor hallado para *dx*

$$PT=\frac{y\left[\frac{2ydy}{a}\right]}{dy}$$

$$PT=\frac{2y^2}{a}$$

al sustituir al *y² por ax* (tomado de la primera expresión)

$$\frac{2y^2}{a}=PT$$

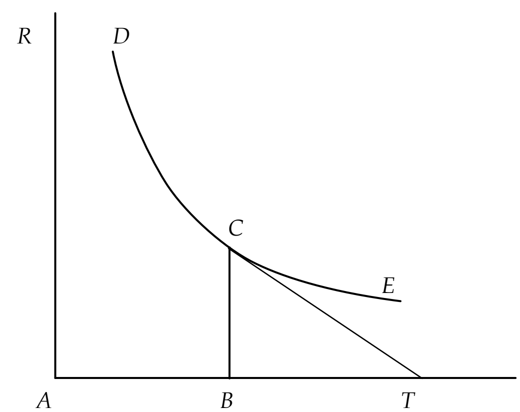
$$2x=PT$$

PT es la subtangente

Diferenciando se tiene $adx=2ydy$ *, despejando* $dx=\frac{2ydy}{a}$*. Sustituyendo por el valor dx de la fórmula general de la subtangente* $BT=\frac{ydx}{dy}$*, obtenemos* $\frac{2yy}{a}$*, al sustituir el valor e la ecuación de la curva* $ax=yy$ *, se obtiene* $2x$.

Donde *BT* es la subtangente.

El caso de la subtangente negativa explica que, dada la curva *DCE* se tiene la ecuación $xy=aa$, encontrar la subtangente.



Al diferenciar se tiene $xdy+ydx=0$, y $dx=-\frac{xdy}{y}$, sustituyendo en la fórmula $\frac{ydx}{dy}$, el valor de la subtangente será $=-x$.

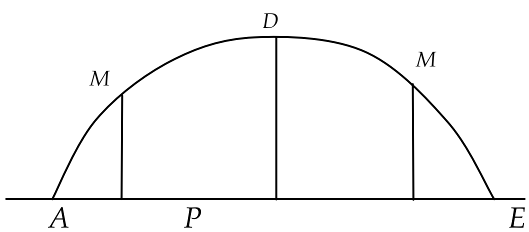
Caracterizaciones a las ideas de Máximo y Mínimo

Agnesi desarrolla más caracterizaciones al incorporar nuevos acercamientos, tales como el dinámico o al considerar otros casos de curvas en las que las propiedades se invierten.

Noción de Tamaño

Soit une ligne courbe MDM dont les appliquées PM, ED, PM soient paralleles entr'elles; & qui soit telle que la coupée AP croissant continüellement, l'apliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminuë ; ou au contraire qu'elle diminuë jusqu'à un certain point E, après lequel elle croisse. Cela posé, La ligne ED sera nommée la plus grande, ou la moindre appliquée.

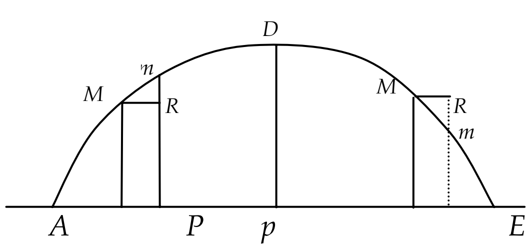
(pág. 41)



Signo de las diferencias infinitesimales

Lorsque AP croissant, PM croît aussi; il est évident que sa difference Rm sera positive par rapport à celle de AP; & qu'au contraire lorsque PM diminuë, la coupée AP croissant toûjours, sa différence sera négative.

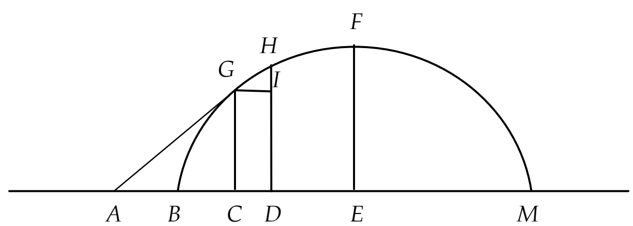
(pág. 41-42)



Naturaleza Dinámica de las curvas

Explica que el máximo en una curva se alcanza cuando en una sucesión de ordenadas se alcanza la mayor y para el mínimo, la menor.

La subtangente de magnitud infinita



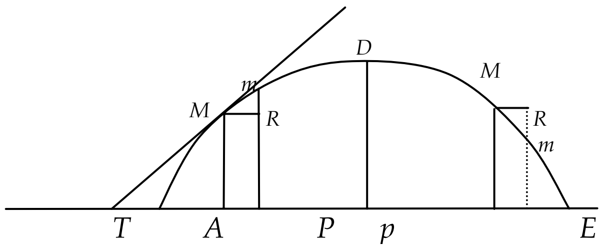
es claro que al aproximarse *CG* a *EF*, la subtangente *AC* será siempre la mayor y cuando *CG* cae en *EF*, la tangente será paralela a *BC* y por consecuencia la subtangente será infinita

Propiedades infinitesimales

Siendo semejantes los triángulos ACG y GHI, podemos determinar la relación AC,CG::GI,IH. Al dejar fluir las ordenadas, el triángulo GHI se acercará hacia el punto, en este caso, máximo, CG permanecerá finita pero GI e IH serán regiones infinitesimales por lo que la diferencia dy, será nula respecto a dx, es decir, se tendrá $dy = 0$ en el punto máximo o mínimo.

Subtangente de magnitud infinita

El máximo se alcanza en el momento en que la tangente se *vuelve horizontal* y paralela a la subtangente, y análogamente para el mínimo.



La subtangente *PT* crece [hacia la izquierda] a medida que *M* y *P* se acercan a los puntos *D* y *E*, es claro que cuando se construya la tangente en el punto *D*, la subtangente se vuelve infinita, de esta forma, cuando AP rebasa a AE, la subtangente PT se vuelve negativa de positiva que era, o al contrario.

Propiedad analítica

El principio analítico expresada como regla; el lugar donde $dy = 0$ o bien $dy = \infty$ se determina un máximo o mínimo, por consiguiente dada la ecuación de la curva, para determinar un máximo o un mínimo se deberá diferenciar bajo el supuesto de que $dy = 0$ o $dy = \infty$, de esta forma se obtendrá el valor de la abscisa *x*, al punto en el que corresponde la máxima o mínima ordenada.

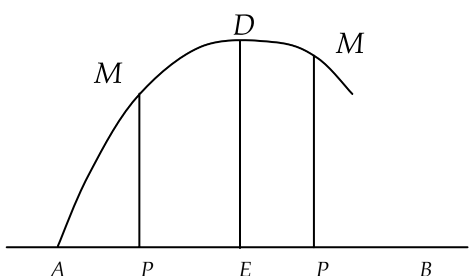
Cálculo del Máximo y Mínimo

Para resolver los problemas siguen una misma estrategia, obtener primeras diferencias por medios analíticos, igualarlas a cero, resolver la ecuación planteada y hallar la raíz, la cual corresponde a la ordenada donde se sitúa el punto máximo o mínimo.

Ejemplo 1

... Supposons que $x^3 + y^3 = axy$ (AP= x, PM= y *y AB = a), exprime la nature de la courbe MDM..*

Pág. 42



al tomar las diferencias, tenemos

$$dy = \frac{aydx - 3x^2dx}{3y^2 - ax} = 0$$

para que la diferencia *dy=0*, es suficiente que el numerador sea igual a cero

$$aydx - 3x^2dx = 0$$

$$y = \frac{3x^2}{a}$$

al sustituir en la ecuación inicial, se halla el valor para AE

$$x = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{9}}$$

ESEMPIO I

75. Sia la curva dell'equazione $2ax - xx = yy$, e si voglia sapere, a quale punto dell' asse dell'assisse x corrisponda la massima ordinata y, e cosa ella sia.

Pág. 530

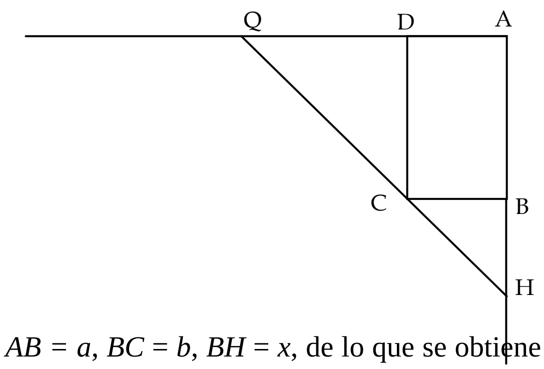
Se hace la suposición de que $dy = \infty$, se tiene entonces que el denominar de la fracción es cero. Siendo $y = 0$, sustituyendo el valor de este en lugar de y en la ecuación se tendrá $x = 0$ y $x = 2a$, es decir $x = 0$ será la mínima, y $x = 2a$ la máxima.

Problemas de optimización

Agnesi incluye un apartado sobre problemas de aplicación en los que se aplican los argumentos analíticos para resolverlos.

Dado el rectángulo $ADCB$, se requiere la recta mínima QH que pase por el punto C, del ángulo QAH.

L'Hospital no presenta ningún porblema de aplicación referente a la optimización.

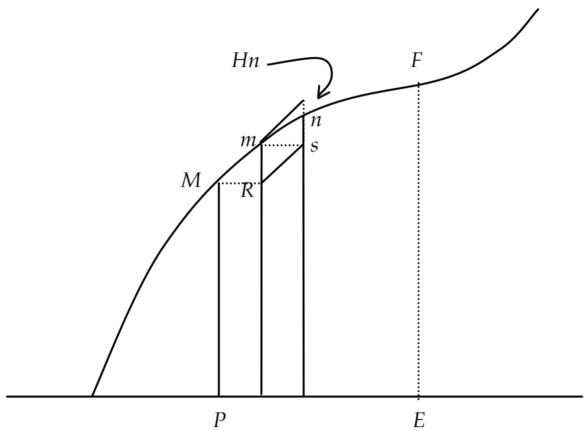


Si $AB = a$, $BC = b$, $BH = x$, de lo que se obtiene $CH = \sqrt{bb + xx}$, por triángulos semejantes determinamos $\frac{HB}{HC} : \frac{HA}{HQ}$, despejando tenemos que $HQ = \frac{x+a}{x}\sqrt{bb+xx}$.

Caracterización del punto de inflexión

Las caracterizaciones que hacen Agnesi y L'Hospital son de dos tipos, las geométricas, que usan argumentos geométricos como magnitud, y las analíticas que atienden a las propiedades infinitesimales que exhiben. Agnesi realiza más caracterizaciones al punto de inflexión aunque algunas de las que incluye tienen mucha cercanía con las que mostró L'Hospital en su obra.

Propiedad infinitesimal



Si los segmentos *Rm* y *Sn* fueran iguales, entonces su diferencia, $Hn=d^2y$, sería nula. En la curva se observa que a medida que se obtienen *segundas diferencias* a ordenadas cada vez más cercanas al punto de inflexión, éstas van tendiendo a cero.

Respecto a su forma

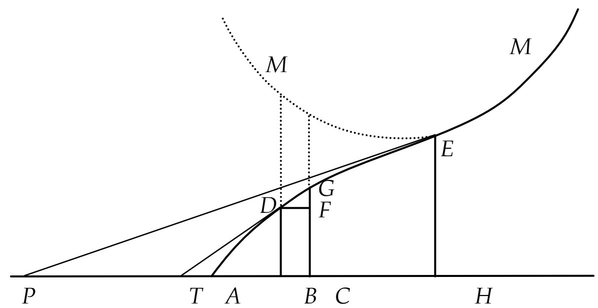
Definition II

Lors qu'une ligne courbe AFK est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B; le point F qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par-conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appellé point d'infléxion.

(pág. 59)

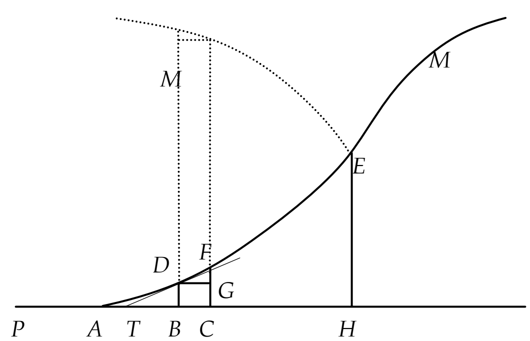
Propiedad infinitesimal

Caso A mínimas diferencias



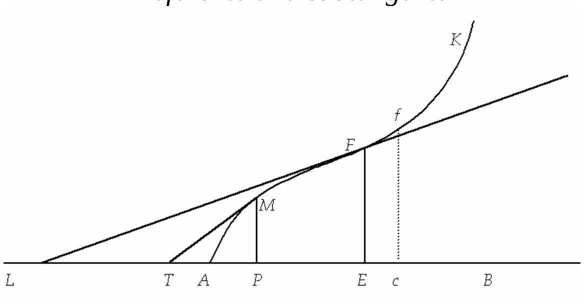
El punto de inflexión determina un lugar en donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a creceren este punto la *dy* será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$.

Caso B máximas diferencias



Las diferencias crecen hasta el punto E, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual decrecen, por lo que el punto *dy* determina un máximo.

Referente a la subtangente



En su modelo explica, que cuando *AP* crezca continuamente, *AT* lo hará también, hasta que *P* llegue a caer en *E,* después del cual, *AT* irá disminuyendo. Esto supone que el punto *L* es un punto “extremo” o *máximo* de la subtangente en el momento en que *P* caé sobre *E.*

Signo de las segundas diferencias

Cuando la curva es primero cóncava, entonces la segunda diferencia será negativa hasta el punto de flexión contrario, si por el contrario la curva primero es convexa, entonces las segundas diferencias serán positivas hasta antes del punto de inflexión.

Lo stesso s'inferisca ancora dal considerare, che nelle curva prima concave all'asse la diferenza seconda dell'ordinata y, cioè la ddy è negativa sino al punto E di regresso, o di flesso contrario, di poi si sa positiva; e nelle curve prima convesse essa diferenza seconda è positiva sino al punto E, di poi si sa negativa: ma una quantità qualunque non può da neagtiva farsi positiva, o da positiva farsi neagtiva, se non passando per lo zero, o per lìnfinito, adunque nel punto E di regresso, o di flesso contrario deve essere ddy = 0, o pure ddy = ∞

Pág. 555

Cambio de signo en la segunda diferencia

El punto de inflexión se determina cuando su segunda diferencia cambia de positiva a negativo o de negativa a positiva

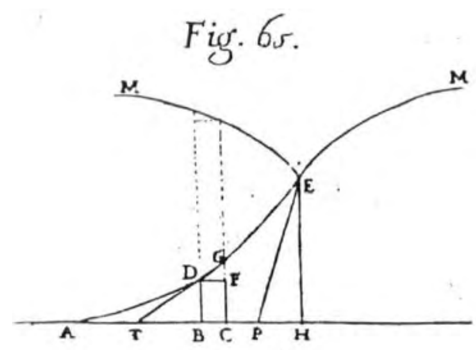
Respecto a su forma

Cuando una curva es primero convexa y después cóncava el punto que determina el cambio representa en punto de flexión contraria.

Referente a la subtangente

Dada una curva *AEM,* primero cóncava y después convexa, se determina en el punto *D* la recta *DT* y en el punto *E* la recta *EP*. Cuando la abscisa *AB* crezca continuamente y *B* caiga en *H*, entonces *AT* (la subtangente) habrá crecido y determina un punto de inflexión, a lo cual

AT dejará de crecer y pasando el punto irá decreciendo, determinando así la relación $AP = \frac{ydx}{dy} - x$, al diferenciar y tomar dx constante tenemos $\frac{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx}{dy^2}$, al igualarlo a cero o a infinito y dividiendo por $-ydx$ y multiplicando por $-dy^2$, obtendremos $ddy = 0$ o bien $dyy = \infty$.



(Agnesi, 1748, Figura de Tom. II, Lib. II, T XII)

Cálculo del punto de inflexión

Los ejemplos que plantean son semejantes, expresiones analíticas que se asocian a curvas y que se resuelven empleando un Método muy parecido; se obtienen las segundas diferencias y después se iguala a cero o infinito para encontrar el lugar del punto de inflexión.

Ejemplo I

Soit une ligne courbe AFK qui ait puor diametre la ligne AB, & qui soit telle que la relation de la coupée AE (x) à l'appliquée EF (y), soit exprimée par l'équation axx = xxy + aay. Il s'agit de trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF rencontre la courbe AFK au point d'infléxion F.

Pág. 63

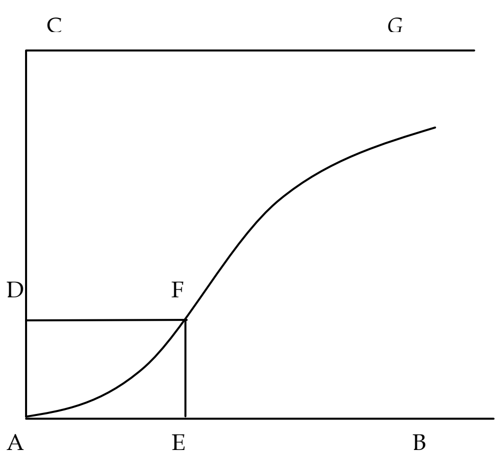
Ejemplo I

Dada la cúbica con ecuación:

$y = a + \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$.

Al diferenciar dos veces la ecuación suponiendo dx constante obtenemos:

$$ddy = -\frac{2adx^2}{9(a^3 - 2aax + axx)^{\frac{2}{3}}} .$$



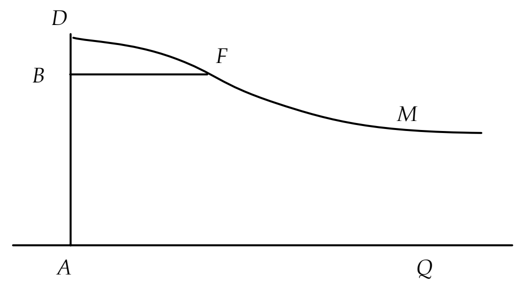
Dada la ecuación de la curva $y = \dfrac{ax^2}{x^2 + a^2}$

Al tomar la diferencia tenemos $dy = \dfrac{2a^3xdx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$

Usando el supuesto de $ddy = \infty$ se tiene $9(a^3 - 2aax + axx)^{\frac{2}{3}} = 0$, esto es $aa - 2ax + xx = 0$, de esto se obtiene $x = a$, sustituyendo en lugar de x el valor en la ecuación propuesta, se obtiene $y = a$.

Usando ahora el argumento de *ddy = 0*

La curva *DFM* tiene por ecuación $y = a\sqrt{\dfrac{a - x}{x}}$, reconocemos que $AB = x$, $BF = y$, $AD = a$.



Al tomar la segunda diferencia suponiendo dx constante, e igualando a cero, se tiene

$$ddy = \frac{\left(x^2+a^2\right)\cdot d\left(a^3 2xdx\right) - a^3 2xdx\cdot d\left(x^2+a^2\right)^2}{\left(x^2+a^2\right)^4}$$

Obtenemos finalmente $x = \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot a$

Al diferenciar tenemos $dy = -\frac{aadx}{2x\sqrt{ax-xx}}$, diferenciando de nuevo suponiendo dx constante; $ddy = \frac{3a^3dx^2 - 4aaxdx^2}{4x\cdot\left(ax-xx\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Suponiendo $ddy = 0$ obtenemos $ddy = 3a^2 - 4aax = 0$, esto es $x = \frac{3a}{4}$.

Un ejercicio de diseño

El análisis socioepistemológico aportó elementos para construir un mapa de *caracterizaciones* de ideas matemáticas en las obras de L'Hospital y Agnesi. En éste concentrado se pueden observar las distintas aproximaciones a los conceptos, los diferentes argumentos y las varias formas de comunicación de las ideas. Este ejercicio, también ha permitido conocer el uso –que se hacía del conocimiento- , las situaciones que le daban sentido (en este caso uno de ellos es el escenario geométrico), los problemas relacionados con su estudio; en suma, conocer una versión del punto de inflexión a partir de las prácticas que originalmente le dieron sentido al seno de una obra didáctica.

Estas evidencias han permitido identificar un modelo del estudio del cálculo; basado en la incorporación de argumentos geométricos para ampliar los significados de las abstractas ideas infinitesimales.

Los elementos descritos anteriormente se han utilizado para crear una secuencia didáctica para el estudio del punto de inflexión. La intención de esta propuesta es que los estudiantes se aproximen al estudio de este concepto a partir de las distintas situaciones que le caracterizan, es decir, de los escenarios y las prácticas que le dotan de sentido.

La *primera secuencia* se construyó a partir de la caracterización *geométrica-analítica* (L'Hospital) en la que la variación de la ordenada determina un cambio de magnitud en la subtangente. La magnitud máxima de la subtangente determina un *punto de inflexión.*

La segunda se construyó a partir de las caracterizaciones infinitesimales.

- *Propiedad infinitesimal. Caso A, mínimas diferencias*

  El punto de inflexión determina un lugar en donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a creceren este punto la dy será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$.

- *Propiedad infinitesimal. Caso B, máximas diferencias*

  Las diferencias crecen hasta cierto punto E, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual decrecen, por lo que el punto dy determina un máximo.

Estas secuencias se complementaron con otras dos secuencias introductorias. La primera de estas se construyó a partir del planteamiento de una situación real; en la que se registra el llenado de recipientes con líquidos y se grafica la altura del líquido contra el tiempo. Esta secuencia contiene diferentes casos, primero con recipientes regulares; cilíndricos, cónicos, después con otros recipientes de formas combinadas.

La segunda secuencia se desarrolló a partir de la descripción de una situación cotidiana, en la que una estudiante camina de su casa a la escuela. Al graficar la rapidez con la que camina se obtienen distintas formas gráficas, algunas de ellas describen concavidades y puntos de inflexión.

Sobre el diseño de situaciones

La psicología genética de Piaget aporta un punto de vista en relación al *aprendizaje*. Explica que este fenómeno ocurre cuando el *saber* se logra interiorizar en la estructura mental de la persona como fruto de una adaptación.

Desde esta perspectiva se puede resumir que;

1) el aprendizaje se apoya en la acción

2) La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación. (Elementos básicos de la metáfora del aprendizaje de de Piaget)

3) Los aprendizajes previos de los alumnos deben ser tenidos en cuenta para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos: se conoce en contra de los conocimientos anteriores. (Elementos de la perspectiva epistemológica de Bachellard en relación al progreso de la ciencia [analizado en el *capítulo II*])

4) Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición del conocimiento. (idea básica de la psicología social genética) (Ruiz, 2000).

El aprendizaje se expresa entonces, como el resultado de una acción adaptativa al medio, en el que el individuo se enfrenta a situaciones (en forma de preguntas, ejercicios, teoremas) que han sido diseñadas para generar conflictos con los conocimientos previos. Estas dificultades y/o desequilibrios sirven como *catalizadores* en el proceso de aprendizaje, no deben ser exhaustivos ni tampoco ligeros, pues la intención es que el estudiante logre finalmente apropiarse de una estrategia “ganadora” o “exitosa”.

La situación debe garantizar escenarios para que los estudiantes conduzcan sus reflexiones hacia formulaciones y validaciones (Alanis, 1996). Así mismo el conocimiento que el alumno construya tiene que ser la herramienta más adecuada para resolver el problema propuesto, de acuerdo al nivel de conocimientos del alumno. (Martínez, 2003)

La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas, (Ferrari, 2001) con una elección acertada de los problemas que le propone.

Caracterización de las ideas matemáticas en relación al objetivo del diseño

El diseño incorpora dos caracterizaciones del punto de inflexión, la primera de ellas corresponde al caso en el que la variación de la ordenada determina un cambio de magnitud en la subtangente. La magnitud máxima de la subtangente determina un *punto de inflexión*.

La otra de ellas, es un diseño creado a partir de la caracterización *infinitesimal* que ofrece L’Hospital. El comportamiento de la diferencias en un curva (mínimas o máximas diferencias) determinan un punto de inflexión.

Estas caracterizaciones, definen una especificidad en el diseño de la situación para el estudio del punto de inflexión.

- El caso en el que el punto de inflexión es determinado por la variación de la subtangente. Una práctica que se favorece en el diseño es la “manipulación” de los elementos geométricos para establecer regularidades. Al variar la magnitud de la abscisa, el sistema geométrico que se ha definido en la curva se modifica y sus cambios son susceptibles a ser cuantificados.

- El diseño presenta un caso en el que la magnitud máxima de la subtangente determina el punto de inflexión. No obstante, existen otros casos de curvas en las que el punto de inflexión se caracteriza cuando se determina la magnitud mínima de la subtangente. Esta es una variable de diseño, que posibilita extender esta propiedad para establecer la relación: *forma gráfica-magnitud de la subtangente-punto de inflexión.*

- La variación de la abscisa determina nuevas magnitudes de la subtangente. Esta relación puede expresarse a través de una relación funcional en la que la idea de "máximo" o "mínimo" aportan elementos para la caracterización del punto de inflexión.

- El diseño creado a partir de la caracterización *infinitesimal* se basa en la representación geométrica de magnitudes infinitesimales, en un intento por "mostrar" el comportamiento de estas cantidades sobre la curva. Este ejercicio favorece la "aceptación" de la naturaleza de los infinitamente pequeños, basado en la concepción de curva que ofrece L'Hospital.

- En curvas contiguas, primero cóncavas hacia abajo y después cóncavas hacia arriba, las diferencias vienen de un rápido decrecimiento, pasando por una región en las que las diferencias se manifiestan con menor intensidad, para después crecer rápidamente. La región en la que las diferencias se mantienen "estables" corresponde a un intervalo sobre el dominio que contiene el punto de inflexión. De hecho la mínima diferencia sobre la curva se determina en el punto de inflexión.

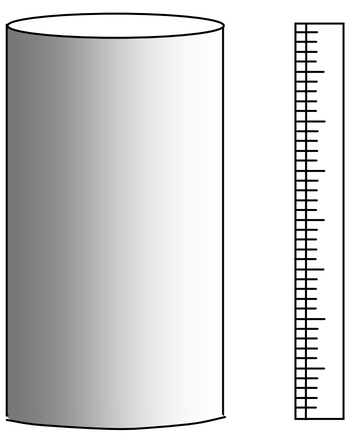
- En otra familia de curvas contiguas (primero cóncavas hacia arriba y después cóncavas hacia abajo) el comportamiento es inverso; en una vecindad que contiene al punto de inflexión se determinan la variación "más rápida" de las diferencias. Esta es una variable de diseño, que posibilita extender esta propiedad para establecer la relación: *forma gráfica-variación de las diferencias-punto de inflexión.*

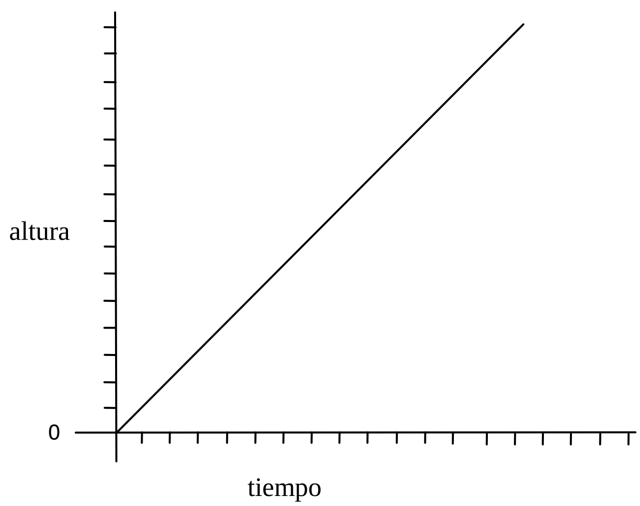
1 Examinando el llenado de recipientes

Actividad 1: tubos de ensaye

En una experiencia en el laboratorio de química se han llenado algunos recipientes con un cierto líquido. En primer lugar un tubo de ensaye, de forma cilíndrica.

Al verter el líquido de forma constante, la *altura* de este en el recipiente va en aumento. Este fenómeno es registrado en una gráfica en donde tenemos en un eje el tiempo, y en el otro la *altura.*

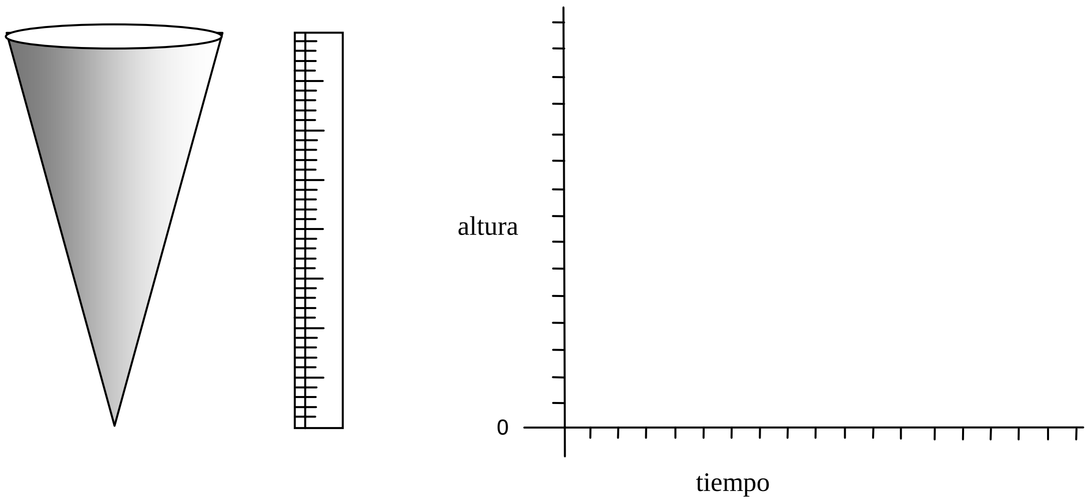




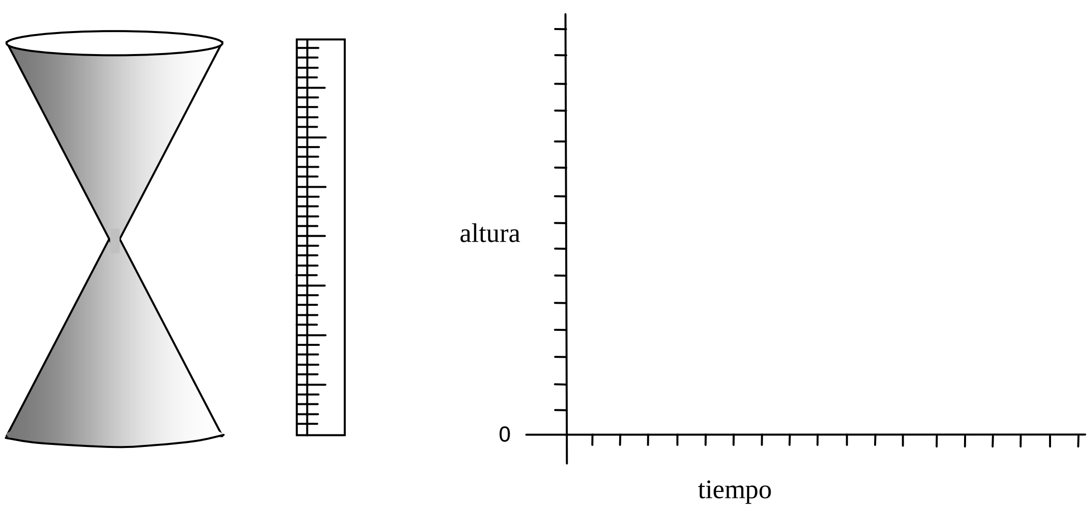
El resultado en la gráfica es una recta, pues por cada unidad de tiempo se deposita la misma cantidad de agua, generándose una altura proporcional.

Secuencia 1: otros recipientes

a. A continuación aparece otro recipiente de laboratorio al que también se le va a verter el mismo líquido. Bosqueja una gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo.

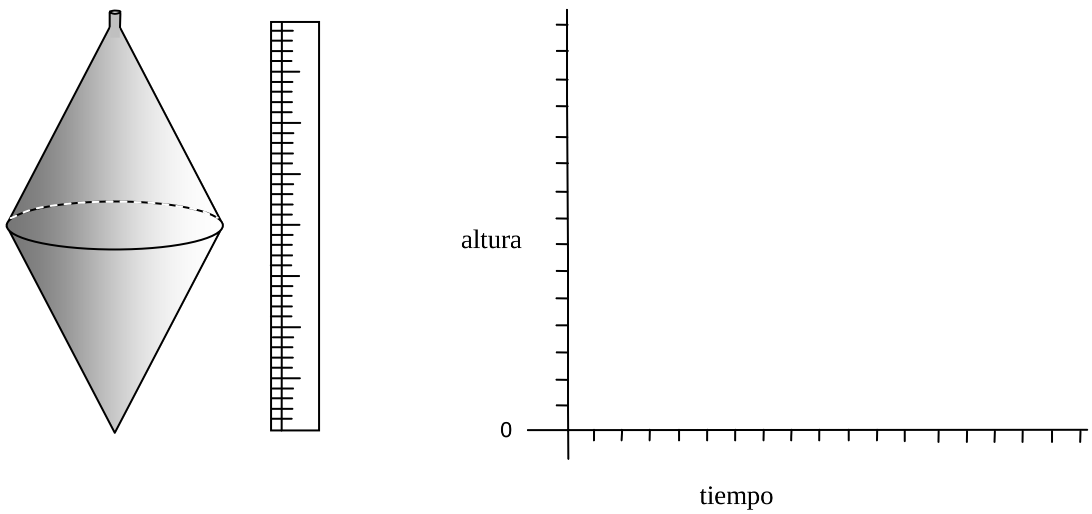


b. El siguiente recipiente es de fabricación especial. Bosque la gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo.

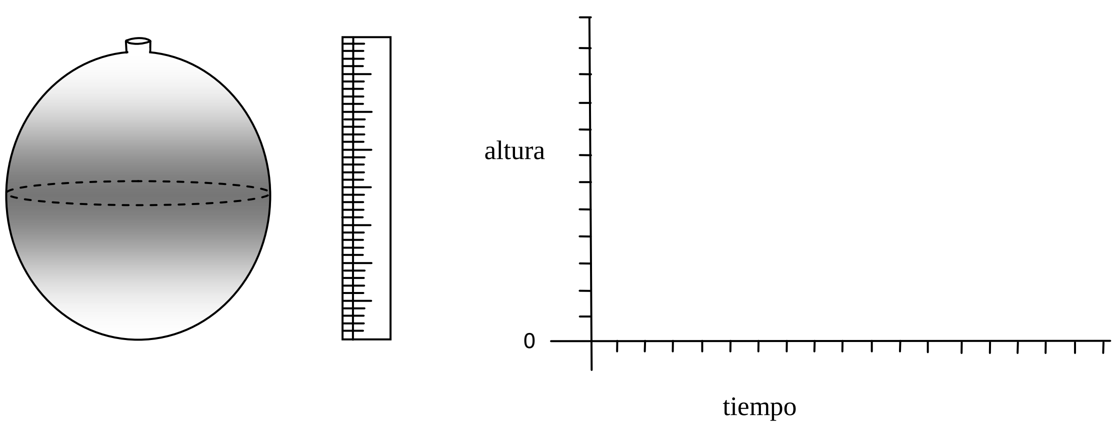


Secuencia 2: nuevas exploraciones

c. Bosqueja una gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo, cuando es llenado el siguiente recipiente con cierto líquido.



d. Bosqueja una gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo, cuando es llenado el siguiente recipiente con cierto líquido.



Discusión; velocidad de llenado

a. En el recipiente del inciso "*a*" ¿con qué velocidad alcanza nueva *altura*? (considerada tres inspecciones distintas; al iniciar su llenado, al llevar la mitad del recipiente y al alcanzar la altura máxima, esto es justo en la boquilla)

a1

a2

a3

b. En el recipiente del inciso "*b*" ¿con qué velocidad alcanza nueva *altura*? (considerada tres inspecciones distintas; al iniciar su llenado, al llevar la mitad del recipiente y al alcanzar la altura máxima, esto es justo en la boquilla)

b1

b2

b3

c. Qué rasgo o rasgos comunes pueden observarse en las gráficas de los incisos *c* y *d*.

c1

d. ¿Cuál es el efecto en la gráfica cuando el líquido que se vierte en los recipientes se acerca a la altura media?

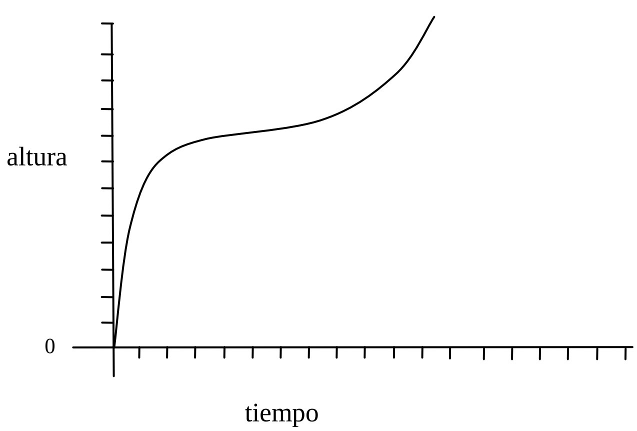
d1

e. ¿Cuál es el efecto en la gráfica cuando el líquido que se vierte en los recipientes alcanza la altura media?

e1

Secuencia 3: planteamiento de un escenario

a. Se ha vertido agua a un contenedor, generándose una gráfica de altura contra tiempo como la que se muestra a continuación. Utilizando esta información, dibuja un bosquejo de la forma del contenedor.

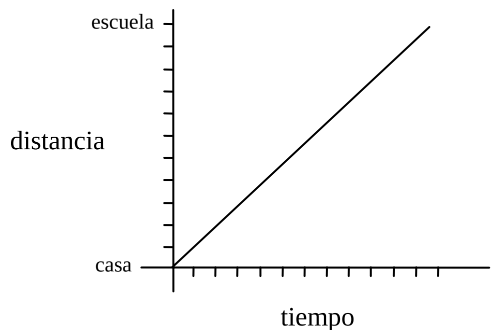


2 Caminando hacia la escuela

Actividad 1: un largo camino

Anahí es una estudiante de segundo grado de secundaria. Al salir de casa para dirigirse a la escuela, camina a *paso constante*, lo que le permite ir avanzando una misma distancia en un tiempos iguales.

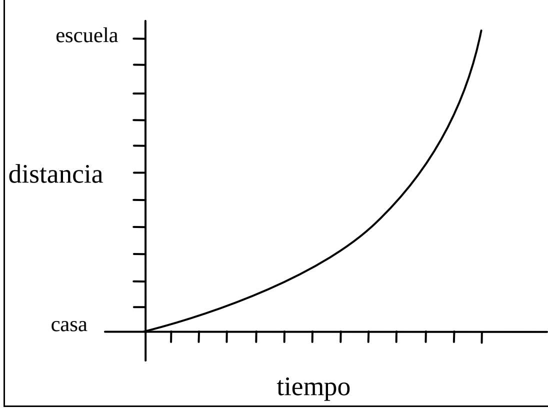
Esta gráfica describe su recorrido, desde su casa hasta la escuela.



Secuencia 1: modelo

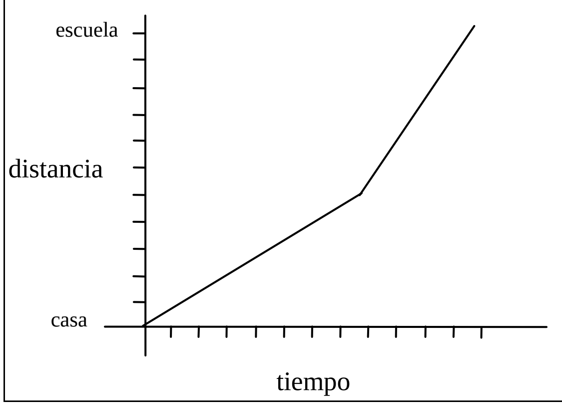
a. En la siguiente gráfica se describe el recorrido que hizo Anahí en otra ocasión. Argumenta cómo fue su avance, ¿qué sucedió?, ¿por qué se generó una curva con esas características? (El tiempo empleado en su recorrido es el mismo)

a1



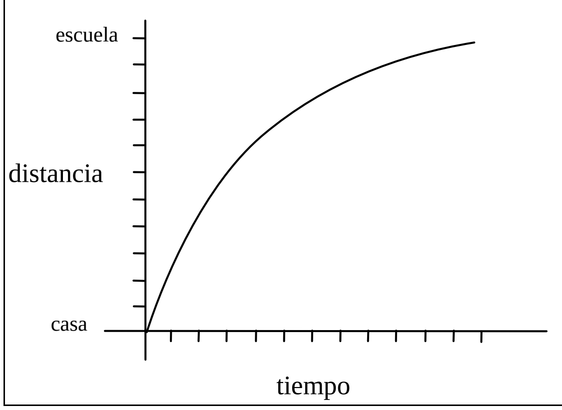
b. La curva que aparece enseguida describe el recorrido que realizó Anahí en otra ocasión. Compara con las respuestas del inciso anterior y explica; cómo fue su avance, ¿qué diferencia notas con la gráfica del inciso anterior?

b1

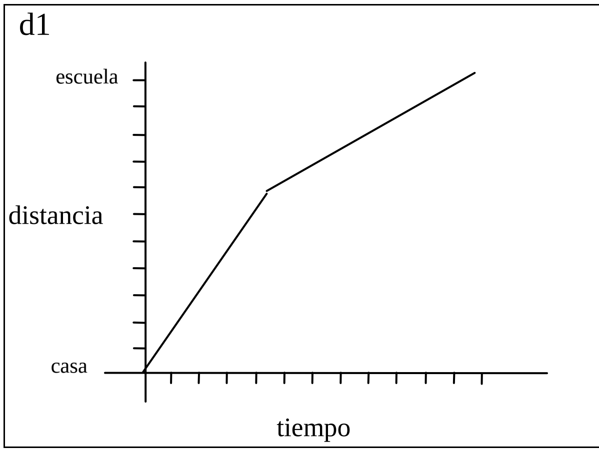


c. Esta es otra gráfica en el recorrido de Anahí desde su casa hasta la escuela. Argumenta cómo fue su avance, ¿qué sucedió?, ¿por qué se generó una curva con esas características? (El tiempo empleado en su recorrido el mismo)

c1



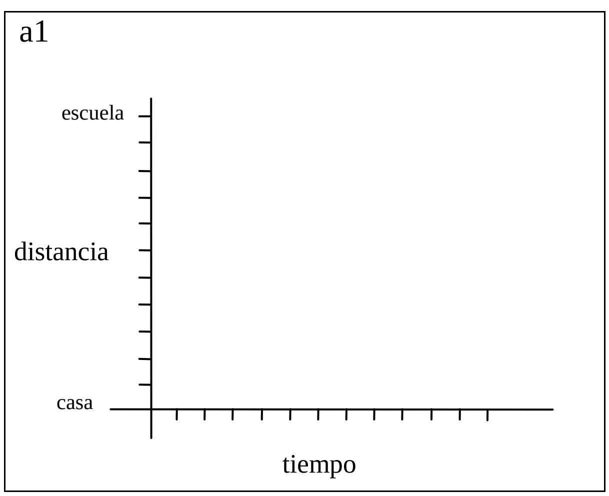
d. En la curva que aparece enseguida se describe el recorrido que realizó Anahí en otra ocasión. Compara con las respuestas del inciso anterior y explica; cómo fue su avance, ¿qué diferencia notas con la gráfica del inciso anterior?



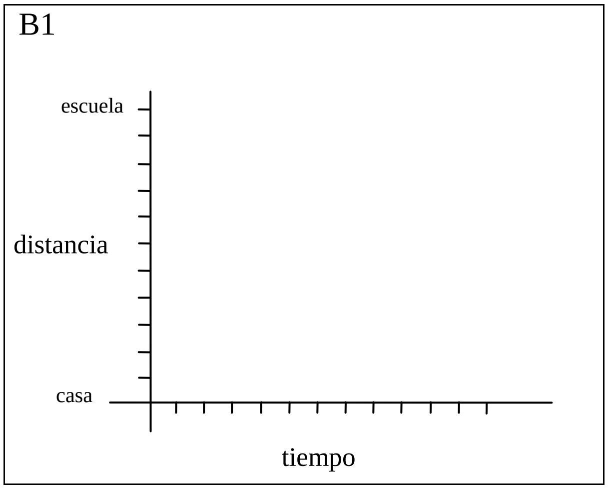
Secuencia 2: verbalizaciones

Para cada caso, dibuja una curva que exprese la situación que plantea Anahí.

a. Al salir de casa empezaban a caer algunas gotitas de agua, por lo que mi avance fue muy rápido, sin embargo a medida que caminaba hacia la escuela me di cuenta que la lluvia dejaba de amenazar por lo que poco a poco disminuí mi velocidad”

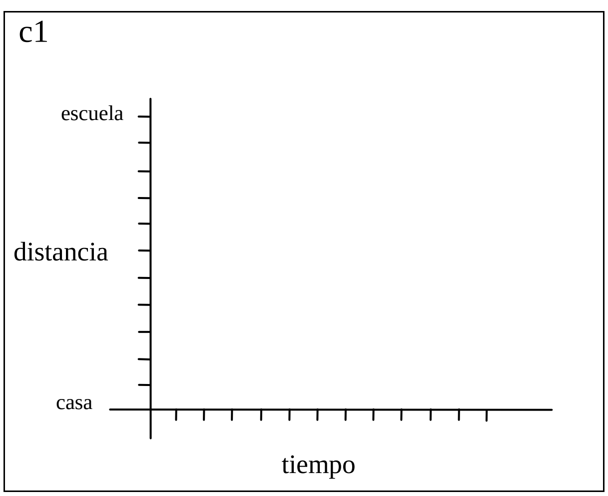


b. “Hoy salí de casa caminando tranquilamente hacia la escuela, sin embargo me acordé que tenía que entregar un libro a la biblioteca además de comprar algunos lápices de color, por lo que empecé a aumentar el paso para llegar antes de la hora de la clase.”



c. La escuela donde estudio se encuentra a 800 metros de mi casa, se llega a través de una calle arbolada con una ligera y casi imperceptible inclinación. Hoy decidí ir montada en bicicleta a la escuela, y como la calle casi siempre está vacía no hay peligro alguno.

Al salir de casa, monté la bicicleta y aproveché la pendiente para impulsarme y no pedalear. Al principio iba despacio, pero a medida que avanzaba la velocidad se incrementa. Ya se que al llegar a un viejo roble, que está en el punto intermedio entre mi casa y la escuela, tengo que empezar a frenar para reducir mi velocidad. Así llegué a la puerta de la escuela sin haber pedaleado.



Discusión; algunas preguntas por contestar

f. ¿Qué diferencia percibes en las gráficas, cuando Anahí camina a paso constante y cuando al caminar va aumentando gradualmente su velocidad?

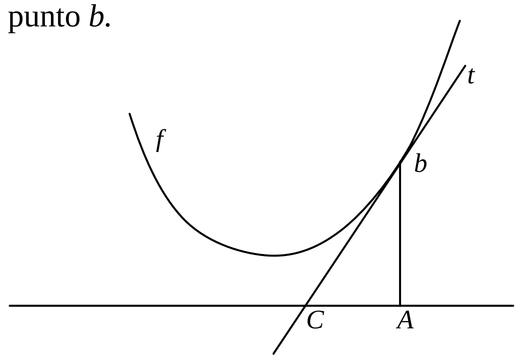
g. Cuando Anahí camina, primero aumentando gradualmente su velocidad y después disminuyendo gradualmente su velocidad, ¿qué tipo de gráfica se genera? (dibuja la gráfica)

h. ¿Es posible identificar el punto donde después de ir incrementando gradualmente su velocidad, empieza a disminuir gradualmente su velocidad?, ¿qué punto es?, ¿cómo lo llamarías?

3 Una revisión geométrica

Definición 1 : Subtangente

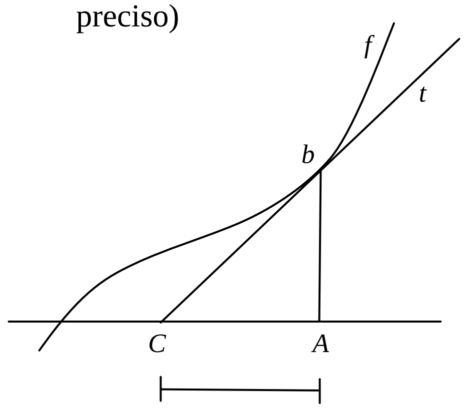
En la siguiente gráfica se puede observar un trozo de curva al cual le hemos llamado *f*. Se observa además que hemos trazado una tangente *t* a la curva *f*, generándose así el punto *b*.



Llamemos *subtangente* en *A*, al segmento *CA*.
(Nótese que sólo hemos ubicado la curva, en referencia al eje *x*)

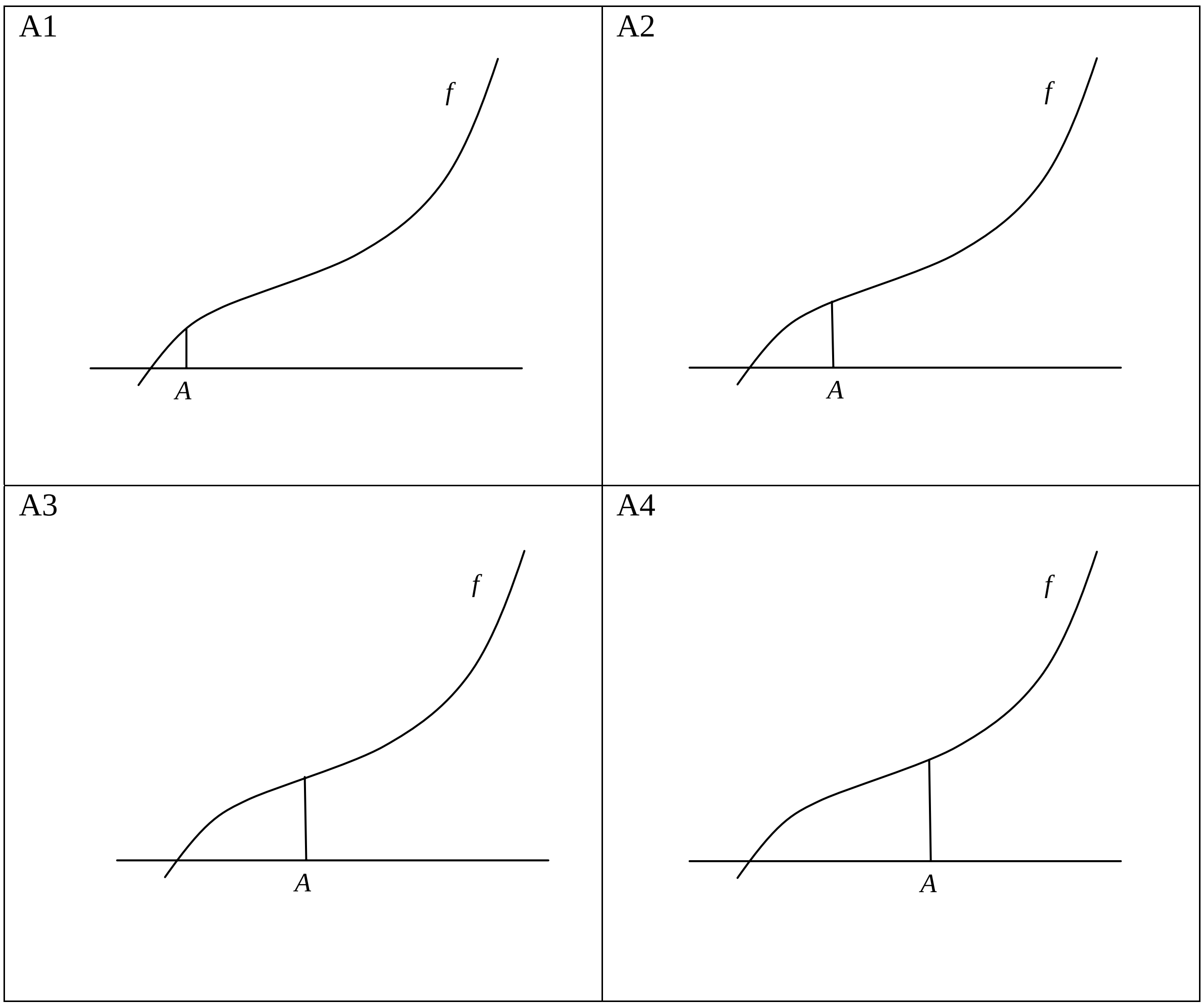
Actividad 1 cálculo de subtangentes

Dada una curva a la que hemos llamado *f*, se ha trazado su *subtangente* al punto *A*. indicamos para este caso su magnitud (por el momento no importa un valor preciso)



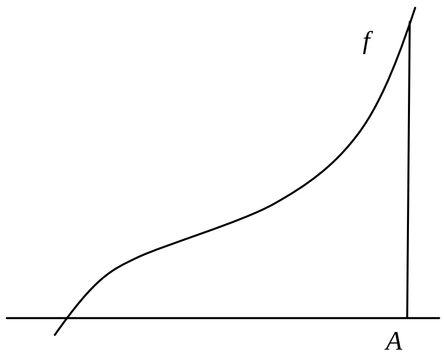
A continuación aparecen dos secuencias con cuatro gráficas cada una. Traza las subtangentes para cada caso indicando la magnitud obtenida.

Secuencia 1: trazado de subtangentes

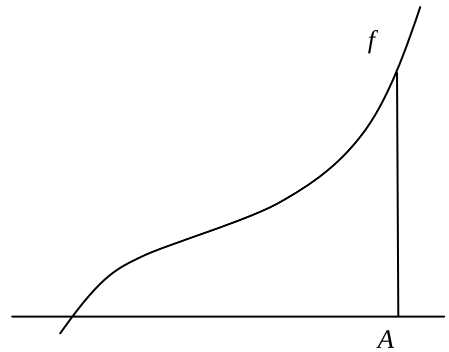


Secuencia 2: trazado de subtangentes

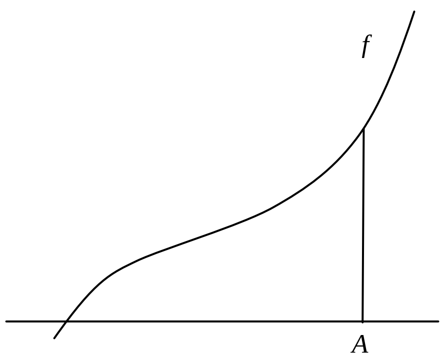
B1



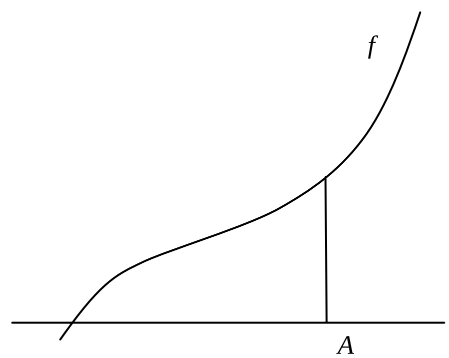
B2



B3



B4



Discusión; algunas preguntas por contestar

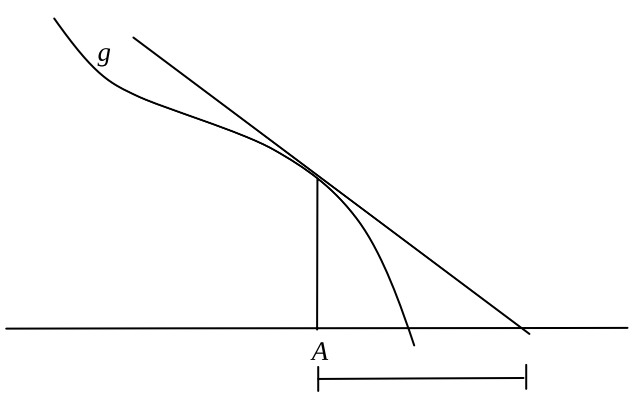
i. Explica cómo es el comportamiento de la subtangente en la secuencia 1

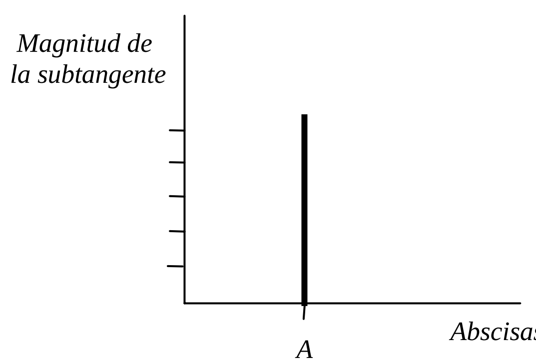
j. Explica cómo es el comportamiento de la subtangente en la secuencia 2

k. Considerando que por cada punto *x* que se elija, es posible determinar una subtangente, explica cuál es el comportamiento que tienen las subtangentes en la curva *f*.

Actividad 2; cálculo de subtangentes, otros casos

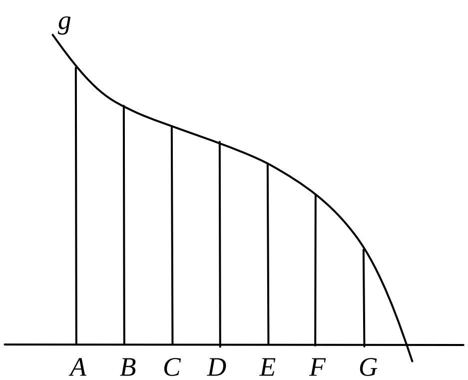
Consideremos ahora la curva *g*, en la cual se ha trazado su *subtangente* al punto *A*. Indicamos en la gráfica de la derecha la magnitud de la subtangente para el punto *A*.

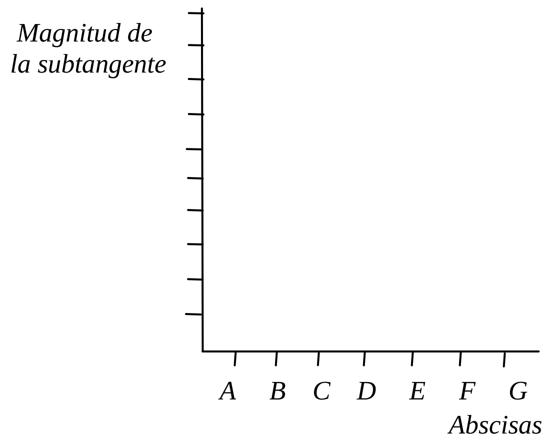




Secuencia 1: trazado de subtangentes (otra curva)

Para cada punto sugerido (abscisa) en la gráfica de la izquierda, determine su subtangente e indique la magnitud de cada subtangente en la gráfica que para el punto *A*.





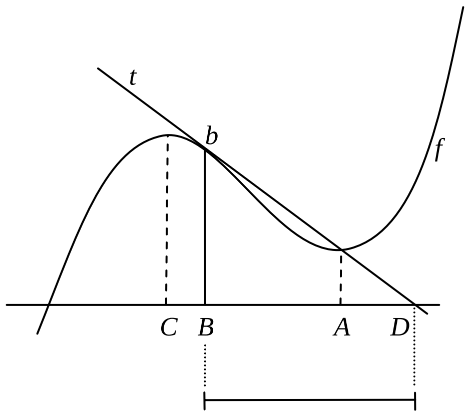
Discusión; algunas preguntas por contestar

a. Cuál es el comportamiento de las subtangentes en la curva *g*

b. Después de haber trabajado las secuencias 1, 2 y 3, ¿Qué información proveé la variación de las subtangentes en relación a las curvas planteadas?

Actividad 3; Revisión de gráficas

Llamamos *f* a la curva que aparece a continuación.



En la gráfica, también se muestra la recta tangente *t*, la cual determina la subtangente *BD*.

Secuencia 1

En relación a la información presentada en la gráfica anterior, contesta las siguientes preguntas

a. A través de una exploración visual a la gráfica anterior, ¿qué magnitud tiene la subtangente en la abscisa *C?*

b. A través de una exploración visual a la gráfica anterior, ¿Qué magnitud tiene la subtangente en la abscisa *A*?

c. ¿Qué comportamiento variacional tienen las subtangentes que se determinan entre las abscisas *C* y *A?*

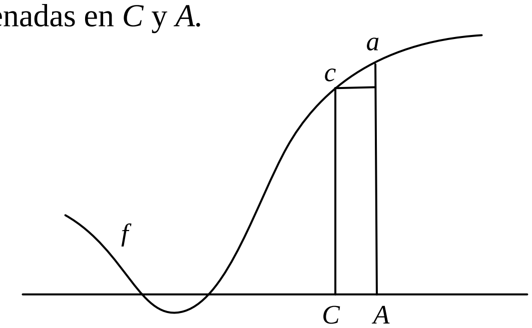
d. Juzgue el siguiente enunciado, argumentando su validez a partir de las reflexiones anteriores. (se pueden proponer contraejemplos)

“ En esta serie de gráficas existe un punto donde se cumple que la subtangente es la mayor o menor magnitud de entre todas las subtangentes posibles”

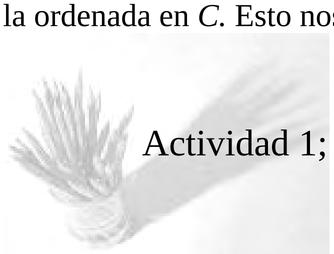
4 Algunas exploraciones infinitesimales

Definición 1 : Diferencia

En la siguiente gráfica se observa una curva a la que le hemos llamado *f*. En ella se encuentran representadas las ordenadas en *C* y *A*.

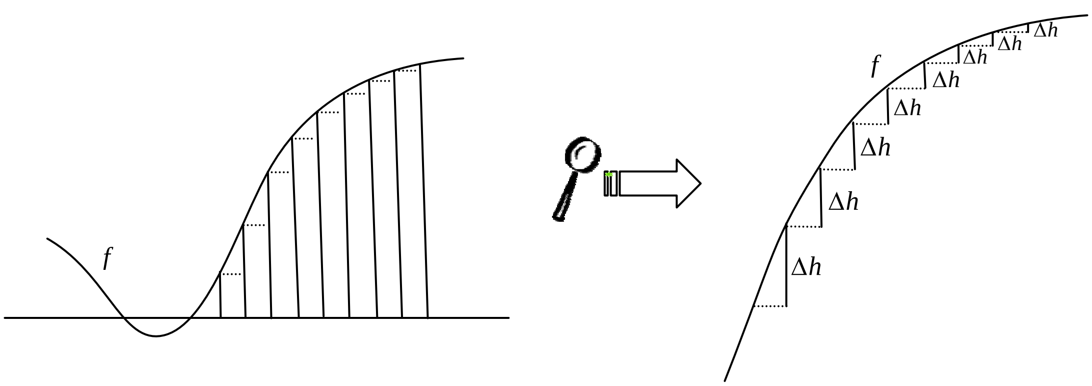


Por la forma de la curva observamos, que la ordenada en *A* tiene una magnitud mayor que la ordenada en *C*. Esto nos permite distinguir una diferencia a la que llamaremos Δh.



Actividad 1; Determinación de diferencias

En una curva a la que hemos llamado *f*, trazamos las ordenadas de la curva a espacios iguales y distinguimos cómo van cambiando las Δh.



Observamos que para este caso las Δh decrecen.

Secuencia 1: definición de curvas

a. Traza una curva cuyo comportamiento de las diferencias Δh sean creciente.

b. Traza una curva cuyo comportamiento de las diferencias Δh sean decreciente.

a1	b1

c. Traza una gráfica cuyo comportamiento de las diferencias Δh se mantenga constante.

c1

d. Construye cuatro curvas en las que se combine un comportamiento creciente con un decreciente de las diferencias Δh.

d1	d2
d3	d4

e. ¿Existen más casos que cumplan la condición anterior? (argumente ampliamente)

Discusión; algunas preguntas por contestar

l. Describa el comportamiento de las Δh en las curvas propuestas en el inciso “d”

d1

d2

d3

d4

m. Juzgue el siguiente enunciado, argumentando su validez a partir de las reflexiones anteriores. (se pueden proponer contraejemplos)

“En esta serie de gráficas existe un punto que distingue un comportamiento creciente de las diferencias Δh de uno decreciente o viceversa”

Capítulo IX

En donde se formulan las conclusiones y
se argumenta sobre la Transposición Didáctica
Inversa

Conclusiones generales

a. Reflexiones de la investigación histórico-epistemológica

En el análisis realizado a las obras *didácticas de antaño*, se destaca el carácter geométrico de su discurso el cual prevalece en la presentación de sus definiciones y en las argumentaciones alrededor de los conceptos. Esta perspectiva geométrica aparece reflejada en los títulos y subtítulos que asignan a los capítulos; evocando el uso del cálculo como herramienta para resolver ciertas problemáticas ya conocidas. El pensamiento geométrico actúa como *escenario* para la significación de ideas en la versión didáctica del cálculo.

La presentación de los contenidos no es aleatoria, tanto Agnesi como L'Hospital exponen las ideas matemáticas atendiendo a una secuencia lógica, producto de un interés explícito de *organizar* y presentar las ideas de *forma didáctica*; desde las más simples hasta las más complejas. Un rasgo notable en este tipo de obras, es la inclusión de ejemplos comentados, y en el caso de la obra de Agnesi algunos problemas resueltos, cuyo objetivo es *movilizar* al lector para *usar* las ideas matemáticas estudiadas y aplicarlas en situaciones concretas. Esta *intencionalidad* caracteriza a una nueva línea de publicaciones, en el que se destaca un *discurso* con tono didáctico y un esfuerzo por organizar el saber.

Quienes en esa época se acercaron a estudiar el *nuevo* cálculo, se encontraron con obras que gozaban de autonomía (no era necesario leer varios artículos para «entender» una idea), con una exposición múltiple de las ideas, con comentarios y advertencias. Este esfuerzo documental fue reconocido por la Academia de Ciencias de París, al destacar el valor *didáctico de estas obras* y manifestar su importancia y relevancia como fuentes de estudio. Este dato demuestra el prestigio que alcanzaron estas obras durante el siglo XVIII, pues en palabras de Kline, (1985) vinieron a aclarar las ideas del –hasta entonces- oscuro cálculo. Estos trabajos sirvieron de referencia inmediata para quienes quisieron acercarse al estudio del cálculo en un nivel inicial. En este sentido, Bos, (1974) reconoce las propiedades didácticas de la obra de L'Hospital; explica que la notas de Leibniz eran oscuras y poco claras, pero este nuevo trabajo vino a dar luz a las nuevas ideas. Por su parte la obra de Agnesi, que no necesitó de mayores referencias que las que la Academia de Ciencias le otorgara, gozó de reconocimiento y de amplia aceptación, por lo que su lectura fue indispensable para quien quisiera acercarse a *hacer teoría erudita.*

Otra de los rasgos característicos, es la masiva reproducción de ejemplares (en comparación con publicación de ejemplares de la obra erudita), la restringida edición de las obras eruditas reducía enormemente la posibilidad de que las personas del mundo no académico se acercaran a la producción de los intelectuales.

Los trabajos de L'Hospital y Agnesi tuvieron la virtud de llegar a más personas, (en términos modernos lo llamaríamos hacer popular el saber) no en el sentido comercial, sino en el de desprender de la elite erudita, el conocimiento y hacerlo accesible a más personas en lugares lejanos y con intenciones diversas.

b. Una crítica a la naturaleza de los infinitesimales

Berkeley en 1710 publicó su tratado sobre *los principios de conocimiento humano*,[1] pronunciando una aguda crítica sobre los fundamentos del cálculo, ...o*tros matemáticos afirman que los infinitésimos de orden inferior al primero no son nada en absoluto, juzgando con mucha razón que es cosa absurda suponer exista una cantidad positiva o parte de la extensión que, aún multiplicada por infinito, pueda ser menor que cualquier cantidad, por pequeña que sea* (Berkeley, 1980). Los matemáticos a los que estaba haciendo referencia eran, como se explica en Kline, (1985), Leibniz y sus seguidores quienes se les acusaba de discernir sobre procedimientos poco claros y sin precisión racional. En el periodo subsiguiente, la atención de los matemáticos se orientó en analizar

[1] El título original de la obra es: *A treatise concerning the principles of human knowledge, wherein the chief causes of error and difficulty in the sciences, with the grounds of skepticism, atheism, and irreligion, are inquired into.*

la naturaleza de las ideas y fundamentarlas de manera que el nuevo cálculo se mostrara como un cuerpo conceptual lógicamente estructurado.

A mediados del siglo XVIII, Euler reconoce esta problemática y centra sus esfuerzos en dotar de rigor al cálculo, minimizando en primera instancia las explicaciones geométricas (ampliamente utilizada por L'Hospital y Agnesi) usando en su lugar un discurso predominantemente analítico. En su célebre *Introduction a L'analyse infinitésimale* de 1797 refleja este interés; la obra estructurada en capítulos inicia con el estudio de las *funciones en general* y el primer tema de estudio lo llama: *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur*. No es casualidad que Leonard Euler iniciara con el mismo tema que las obras de L'Hospital y Agnesi.

Kline, (1985) afirma que, ... *Euler* [contribuyó] *con su aproximación formalista...el cálculo fue liberado de la geometría y lo basó en la aritmética y el álgebra. Este avance preparó, al menos, el camino para la justificación definitiva del cálculo sobre la base de los números.* Por supuesto, esta referencia no declara que el uso de la geometría haya sido un error cometido en el desarrollo conceptual del cálculo, se trató más bien de un argumento para descifrar su naturaleza epistemológica.

El uso generalizado del cálculo geométrico aunado con la falta de fundamentación que filósofos como Berkeley reclamaron, exigió a la elite erudita una «respuesta» de carácter organizativo, lo cual se ve cristalizado en los intentos de varios matemáticos por desarrollar una teoría básica del cálculo.

Pero se reconoce que es a partir de los trabajos de L'Hospital y Agnesi, que nuevos matemáticos buscaron «fundamentar» el cálculo (entre ellos Euler), como exigencia de un sector académico preocupado por sistematizar un conocimiento que ya había sido difundido en esa época a partir de los trabajos de L'Hospital y Agnesi. No por considerarlos pobres conceptualmente hablando (pues la misma Academia de Ciencias manifestó su aprobación y beneplácito) sino porque su tratamiento había provocado reacciones importantes considerando que la obra de Euclídes era el modelo de hacer y publicar matemáticas durante mucho. Las nuevas ideas infinitesimales se agregaron al discurso geométrico lo que implicó redefinir varias nociones como la de proximidad, distancia entre dos puntos, incluso se formularon definiciones que parecían contradictorias con el cuerpo axiomático de la geometría; como la que expone L'Hospital en relación a la naturaleza de una línea curva.

c. Sobre las caracterizaciones del punto de inflexión

En la revisión de la sociogénesis del tratamiento didáctico del punto de inflexión, se destaca la existencia de un discurso *didáctico* sustentado en un acercamiento múltiple a los conceptos estudiados, de tal forma que, para un mismo concepto se tienen al menos tres caracterizaciones distintas.

El análisis realizado a estas múltiples caracterizaciones del punto de inflexión, demostró que el discurso matemático ser articula a partir del estudio de las regularidades del concepto. Cuando se describe una región en la curva en donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a crecer, entonces se determina la existencia de un punto en donde la dy será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$

En este caso, el punto de inflexión se determina al identificar el comportamiento de la variación en las diferencias de una curva contigua con concavidades encontradas.

Cabe destacar que la caracterización del *punto de inflexión* a través de la variación de la subtangente, fue una idea que germinó en el discurso de L'Hospital y Agnesi, pero perdió vigencia con el paso del tiempo. Actualmente este acercamiento está ausente de los libros de texto.

Un primer acercamiento a la idea de Transposición Didáctica Inversa

La Transposición Didáctica es un modelo teórico que describe el proceso por el que una idea es llevada de un sitio a otro. Este tránsito de saberes se caracteriza por ser un evento ineludible que implica necesariamente, la modificación del saber (de referencia) para su nueva presentación en una versión «que quiere ser didáctica». En este proceso el concepto se despoja del su origen epistemológico y se incrusta en un nuevo ámbito, agregándose otras nociones denominadas como las protomatemáticas y paramatemáticas

La Transposición Didáctica posiciona al conocimiento matemático en el centro del proceso, todo gira en torno a un conocimiento que se transpone, de hecho la *noosfera* se mantiene atenta al *conocimiento* que se transpone.

Sin embargo, desde la perspectiva socioepistemológica, asumimos que existen elementos de carácter *metamatemático* que se transponen junto con los conceptos *matemáticos*, elementos que –siendo no explícitos- intervienen como organizadores en el discurso matemático.

Esta explicación se distingue del argumento que menciona Chevallard en libro *Estudiar Matemáticas*, pues él hace mención de una extensión de la Transposición Didáctica caracterizada en una *tercer etapa* que se desarrolla en el proceso didáctico mismo, que puede originar transformaciones en la obra matemática en cuestión. No obstante, la explicación que ofrecemos a partir de este estudio, manifiesta que los objetos de transposición no necesariamente tienen que ser matemáticos.

La denominación de «Transposición Didáctica Inversa», no es una *tercera etapa de la Transposición*; es un argumento que explica el proceso por el que la obra matemática, que se genera en un ámbito «no erudito», regresa como fuente de ampliación de la obra realizada en el «ámbito erudito». Esto implica más que un tránsito inverso de un ámbito al otro (en el sentido de la Transposición Didáctica). Pone especial atención en describir las condiciones que posibilitan este «regreso» y explica además los procedimientos por lo que ocurre.

En el caso de nuestra investigación, se acepta que las obras de L'Hospital y Agnesi se configuraron a partir de una Transposición de las ideas matemáticas del cálculo de Leibniz y Newton. En un segundo momento, estas obras de carácter didáctico sirven como punto de partida para formular nuevos trabajos (entre ellos algunos de carácter organizador); ofreciendo explicaciones matemáticas pero además proporcionando una visión del cálculo (visible en posteriores trabajos como el de Euler) en cuanto a su presentación y organización:

1. Variados ámbitos de significación

El discurso matemático en las obras de L'Hospital y Agnesi incluye una aproximación múltiple a los conceptos. Se pueden observar caracterizaciones geométricas, analíticas, algebraicas, y combinación de ellas que posibilitan un estudio de los conceptos, atendiendo a las regularidades y características que se muestran.

Observemos las múltiples caracterizaciones del punto de inflexión.

En (L'Hospital, 1696)

- *Propiedad infinitesimal*

> Argumenta una situación en las que el comportamiento de las diferencias determina una *segunda diferencia nula* en una zona próxima al punto de inflexión

- *Respecto a su forma*

Argumenta una situación geométrica en donde la curva cambia de concavidad. El punto donde ocurre el cambio se denomina *punto de inflexión.*

- *Referente al comportamiento de la subtangente*

Argumenta una situación geométrica en la que se construye una subtangente a una ordenada. La variación de la ordenada determina un cambio de magnitud en la subtangente. La magnitud máxima de la subtangente determina un *punto de inflexión.*

- *Propiedad infinitesimal. Caso A, mínimas diferencias*

El punto de inflexión determina un lugar en donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a creceren este punto la dy será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$.

- *Propiedad infinitesimal. Caso B, máximas diferencias*

Las diferencias crecen hasta cierto punto E, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual decrecen, por lo que el punto dy determina un máximo.

- *Signo de las segundas diferencias*

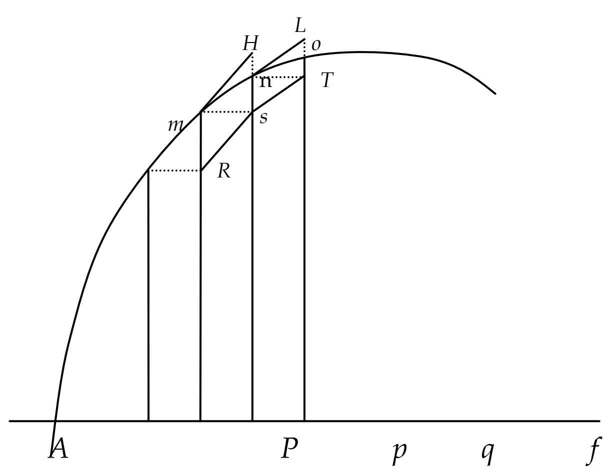
Cuando la curva es primero cóncava, entonces la segunda diferencia será negativa hasta el punto de flexión contrario, si por el contrario la curva primero es convexa, entonces las segundas diferencias serán positivas hasta antes del punto de inflexión.

- *Cambio de Signo en la segunda diferencia*

  El punto de inflexión se determina cuando su segunda diferencia cambia de positiva a negativo o de negativa a positiva

2. Variaciones de diferente naturaleza

Se incluyen situaciones gráficas y analíticas en donde se estudian las variaciones de distintos órdenes en forma simultánea.



La diferencia entre las ordenadas *PM* y *pm* es *Rm* lo que representa la primer diferencia *Hn,* es la diferencia de la «diferencia *Rm*» o bien *la segunda diferencia de PM,* pues al suponer que *dx* es constante *Pp* se vuelve *pq*, la diferencia de *Rm* es *Sn*, y por lo tanto *Hn* es la diferencia de la diferencia. En forma sucesiva se pueden representar las diferencias de orden superior a dos siguiendo la misma estrategia.

Al distinguir distintos órdenes de diferencias, L'Hospital utiliza argumentos para establecer comparación entre ellos, tal como describe los distintos órdenes de infinitésimos en el *Capítulo I*, en relación a las diferencias sucesivas, hace una observación importante; que el criterio para distinguir entre una diferencia y otra, está en caracterizar su naturaleza, por ejemplo *Rm* es infinitamente pequeño con relación a *PM* e infinitamente grande en relación a *Hn.* Así también para las abscisas; *Pf* es infinitamente pequeña con relación a *AP*.

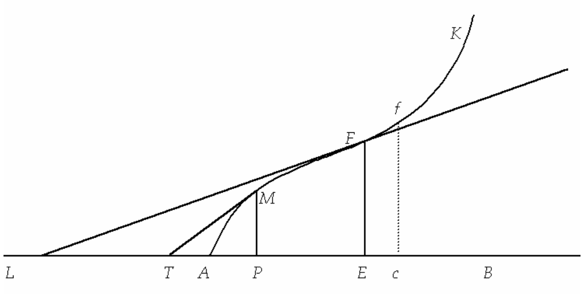
3. Estudio de un concepto a partir de sus regularidades

La múltiple aproximación a los conceptos se complementa con un estudio de las regularidades que guarda; desde cada ámbito de significación y atendiendo a sus características.

En el estudio del punto de inflexión, la *formulación de sus regularidades* atiende a las características del ámbito desde se enuncia y a las propiedades que guarda en relación a las diferencias (de distintos órdenes). Por ejemplo, la caracterización *referente a la subtangente*.

Estrategia de comunicación: Regularidad en el comportamiento de la subtangente cerca del punto de inflexión

Criterio: magnitud máxima
Argumento: variación de la subtangente
Referente: geométrico - analítico



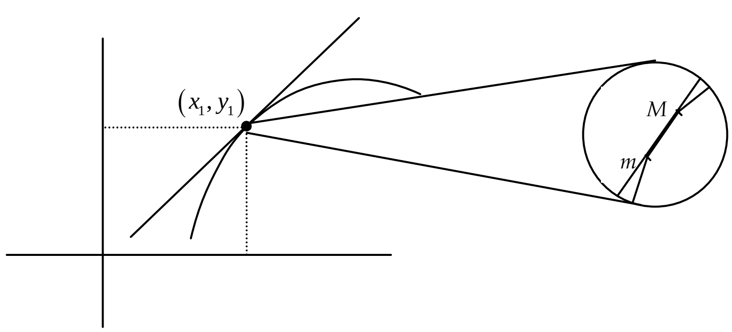
Variación de las ordenadas:
En su modelo explica, que cuando *AP* crezca continuamente. *AT* lo hará también, hasta que *P* llegue a caer en *E*, después del cual, *AT* irá disminuyendo.

Magnitud máxima / Variación de la subtangente.
Esto supone que el punto *L* es un punto «extremo» o *máximo* de la subtangente en el momento en que *P* cae sobre *E*.

4. Un primer ejercicio para el abandono de la dimensionalidad

Con la intención de generar un tratamiento *didáctico* de la matemática, L'Hospital desarrolla una interpretación de las curvas bajo el argumento infinitesimal, sin importar su grado, se puede hacer un «hacer un acercamiento» que permita observar su naturaleza.

La curva está compuesta por un número infinito de lados, todos de tamaño infinitesimal entonces la recta tangente es la prolongación del segmento infinitesimal.



Esta estrategia tiene una estrecha relación con aquellas que se desarrollaron desde la edad media para el estudio de los fenómenos complejos. Usando el método analítico, para inspeccionar las partes, es posible reducir la dificultad a través de simplificar el problema hasta sus primeras manifestaciones. Algunos trabajos como la *regla de Merton,* muestra cómo resolvieron ingeniosamente algunas problemáticas referentes al movimiento.

Así mismo, las definiciones en las obras de L'Hospital y Agnesi no se restringían por su grado. El modelo geométrico que propone L'Hospital permite definir con argumentos visuales las segundas diferencias, no se negaba la posibilidad de transitar hacia la tercera diferencia, lo cual presuponía que las derivadas podían avanzar en número de orden; primeras, segundas, y así sucesivamente.

Bibliografía

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana* ... Tomo I, Publicac. In Milano : nella Regia Ducal Corte, 1748

Albert, A. (1998). Introducción a la epistemología. En Farfán (Coord. Edit), *Antologías, número II* (pp. 1-28). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Albert, A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico.* Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Artigue, M. (1998). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2 (3), 241-286.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Santafé de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (1981). *La formación del espíritu científic*o (9a, edición). México: Siglo XXI Editores.

Benítez, R. (1997), *Cálculo Diferencial, para Ciencias Básicas e Ingeniería*, Ed. Trillas. México

Berkeley, G. (1980). *Principios del conocimiento humano.* Buenos Aires, Argentina: Aguilar, Argentina.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Arch. His. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Bosh M., Chevallard, Y., & Gascón J., (1997). *Estudiar matemáticas; el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* Hosori Editorial: Barcelona.

Bordeau, P. et. Al (2000) *El oficio de sociólogo.* Siglo XXI Editores, México

Brousseau, G. (1983). Les obtacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* Thomson: México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Cantoral, R., *et al* (2000). *Desarrollo del pensamiento matemátic*o. México: Trillas.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a, *Relme-13, Santo Domingo, República Dominicana* (volumen 13, pp. 54-62). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1998). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a, *Relme-12, Santafé de Bogotá, Colombia.* (volumen 12, tomo I, pp. 41-48). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1998). Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: el caso de la matemática escolar. En Cordero, F. (Coord. Edit), *Antologías, número III* (pp. 105- 127). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1997a). *Pensamiento y lenguaje variacional*. México: Cinvestav-IPN (cuadernos del Seminario de Investigación del área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1997b). Matemática educativa. En Farfán, R. (Coord. Edit), *Antologías, Número I* (pp. 81-98). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesi*s 11 (1), 55-101.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3 (3), 265-292.

Cambray, R. y Cantoral, R. (1990). *Lecciones de cálculo antiguo*. México: Cinvestav-IPN (sección de Matemática Educativa).

Cambray, R. (1998). L'Hospital y el primer libro de texto de cálculo diferencial. En *L'Hospital, Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas. México: UNAM*

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(2), 27-44

Castañeda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 12/1, 73-112.*

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Cordero, F. (2001).La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 4(2), 103-128

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar).* Tesis Doctoral, Cinvestav –IPN, México.

Descartes, R. (1997). *La geometrí*a (traducción de García, R.). México: Limusa-IPN (colección Textos Politécnicos).

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso*. Tesis de doctorado, Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile, Chile.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking, en Hownson A. & Kahane J. (Eds.). *Mathematics and Cognition. A research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education* (113-134). Cambridge: Cambridge University Press.

Douady, (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en educación matemática.* (pp. 61-96). Una Empresa Docente. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Euler, L. (1835). *Introduction a l'analyse infinitesimale.* Paris, France: Cliez Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

Farfán, R. (1998). Perspectivas y métodos de investigación en matemática educativa. En Farfán (Coord. Edit), *Antologías, Número II* (pp. 55-119). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Farfán, R. (1997a). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1997b). Ingeniería didáctica. En Farfán (Coord. Edit) *Antologías, Número I* (pp. 63-69). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería: estudio de casos.* Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. (2001). *Estudio socioepistemológico de la función logaritmo.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos: 1630-1910. Una Introducción histórica*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Granville, W. (1986). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Limusa, décima impresión. México.

González, R. (1988). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre*. Madrid, España: Siglo XXI Editores.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes* (primera reimpresión ,1988). Paris, France, ACL-Editions.

L'Hospital, A. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* (estudio introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez). México.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Gedisa Editorial, España.

Martínez, G. (2000). *Explicación sistémica de los fenómenos didácticos, el caso de los exponentes no naturales.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a la convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(1), 45-78

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis de Doctorado, Matemática Educativa, Cicata-IPN, México.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3(2), 131-170

Newton, I. (1687). *Philosophicae naturales principia matemática*. (Trad. Rada García) Edit. Alianza (1987). España.

Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, (1984). *Cálculo diferencial*, Sección de Matemática Edicativa , C.I.E.A. del IPN, México.

Protagonistas de la civilización, *Newton* (1983). Madrid, España: Debate, SA.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escola*r. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Ruiz, L. (2000). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. *Material de apoyo, del curso: Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje, impartido en RELME XIV*. Panamá.

Sierpinska, A. (1984). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, 5-67.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemolgies of mathematics and of mathematics education. En : A. J. Bishop et. Al (eds.), *Internacional Hanndbool of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Struik, D. (1998). *Historia concisa de las matemática*s (traducción de Lezama, 3a edición). México: Instituto Politécnico Nacional.

Stewart J. (1998). *Cálculo*. México: Thomson.

Spivak, M. (1992). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Segunda Edición, México: Editorial Reverté.

School_of_Mathematics_and_Statistics - University_of_St_Andrews,_Scotland. (2003, Enero 20). *Biographies* [Documento WWW]. URL: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

Taylor, J.(1942). Derivatives in calculus. *American Mathematical Monthly* 49, 631-641

Timasheff, A.S. (1955). *La teoría sociológica.* México: Siglo XXI.

Valero S. (2000). *La derivada como organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de Maestría, Universidad Virtual del ITESM, México.

Van Dijk, T. (1998). *Ideología*. España: Gedisa Editorial.

Villoro, L. (1982). *Creer, saber, conocer.* México: Siglo XXI Editores.

Youschkevitech, A. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16, 37-85