INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

VARIACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER Y SEGUNDO ÓRDENES EN UNA SITUACIÓN DE GRÁFICACIÓN Y MODELACIÓN DE MOVIMIENTO

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:

Claudia Flores Estrada

Director de Tesis:

Dr. Apolo Castañeda Alonso

México, D. F., Septiembre de 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 21 del mes de septiembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Variaciones simultáneas de primer y segundo ordenes en una situación de graficación y modelación del movimiento"

Presentada por la alumna:

FLORES	ESTRADA	CLAUDIA
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	1	3

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

Dr. Gustavo Martínez Sierra

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 27 del mes septiembre del año 2007, la que suscribe Claudia Flores Estrada alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030213, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Apolo Castañeda Alonso y cede los derechos del trabajo intitulado *"Variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en una situación de graficación y modelación del movimiento"*, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección claudia.mo@gmail.com . Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Claudia Flores Estrada

Dedicatoria

Agradezco y dedico este trabajo a mis Padres: Herlinda y Ricardo; a mis hermanas: Aurora, Norma, Zoila y Judith; a mis hermanos: Daniel y Alberto, a mi hija Montserrat y a mis sobrinos: Cristian, Oscar, Rocío y Emmanuel.

A mis papás quienes son la base fundamental de lo que hoy soy por su gran apoyo incondicional.

A mi hija Montserrat quien es mi fortaleza y mi inspiración a seguir.

Por su amor, Gracias.

Agradecimientos

Gracias al Dr. Apolo Castañeda Alonso por su tiempo, paciencia, conocimientos y dedicación para la realización de la tesis.

Al Dr. Javier Lezama Andalón por su paciencia, entusiasmo y conocimiento en Verano de Investigación.

El agradecimiento en general de mis profesores en la Maestría en Matemática Educativa por brindar su conocimiento.

Al CECyT 5 “Benito Juárez García” por su apoyo en las actividades realizadas.

Al Colegio de Bachilleres Plantel 07 Iztapalapa por su apoyo brindado.

A mis amigos de la RIIEEME por su apoyo incondicional.

A mis amigos de la UAM, del IPN, de la UNAM y del Colegio de Bachilleres por su entusiasmo.

A todos ustedes, gracias.

ÍNDICE

RESUMEN

Este trabajo reporta los resultados de una investigación que tiene como propósito analizar la construcción de ideas en el conocimiento matemático que logran algunos estudiantes de bachillerato del Instituto Politécnico Nacional al realizar la graficación asociada a la resolución de un problema de una situación real de movimiento. El marco teórico es la socioepistemología y la principal referencia es la tesis de *Torres "La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología"*. En particular, se retoma la hipótesis, planteada de Castañeda dentro la didáctica del Cálculo, que dice que "la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva". En la formulación de esta hipótesis intervienen cinco elementos pero, en este trabajo, hay un énfasis en el "tratamiento simultáneo de las variaciones de una función". En términos de una situación de movimiento, este tratamiento corresponde a las variaciones en la posición y la velocidad.

Con el marco descrito, se formula la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las características de las gráficas realizadas por algunos estudiantes de bachillerato en una situación de modelación del movimiento donde aparecen de forma simultánea la posición y las variaciones de la posición y la velocidad?

Nuestra hipótesis es que, en una situación de modelación del movimiento, el tratamiento gráfico simultáneo de las variaciones de una función corresponde a la relación que guardan la función $f(x)$ y sus derivadas sucesivas $f'(x)$ y $f''(x)$ en una situación real de movimiento de una persona que recorre una cierta distancia. El análisis considera las formas básicas de graficación y los significados que le asignan algunos estudiantes a las variaciones de primer y segundo órdenes.

Los estudiantes analizan la gráfica y obtienen la función para realizar las gráficas a lápiz y papel y con uso de la tecnología. También describieron textualmente las situaciones. Se analizan las evidencias de las exploraciones realizadas por los estudiantes para dar cuenta de la naturaleza de los conocimientos que ponen en juego cuando se enfrentan a este tipo de actividades que exigen coordinar habilidades en el manejo de las gráficas para la construcción de modelos que les permitan describir las variaciones de la posición y la velocidad en una situación de movimiento.

Con este trabajo se ha contribuido a entender cómo construyen algunos estudiantes de bachillerato gráficas usando la tecnología de calculadoras con poder de graficación y sensores para modelar situaciones de movimiento.

ABSTRACT

This dissertation presents the conclusions of research performed to find out the learning achieved by Instituto Politécnico Nacional's high school students by producing a plot for a real motion problem. The work was developed by Torres “Modelling and graphing body motion situations using technological devices” is taken as background, and the socio-epistemology is taken as reference frame.

In particular, a hypothesis originally stated for Castañeda in the Didactics of Calculus is taken up again, which claims "the notion of derivative cannot be built until the idea of different derivatives orders is accomplished".
There are five elements in the hypothesis statement but, in the present work, there is an emphasis in the "simultaneous treatment of function changes" in terms of a motion situation, and in position and velocity changes.

The exploration performed with the high school students is part of this research, which intends to describe the nature of the knowledge body that students use when faced with activities that demand plot reading skills to construct models that describe changes in position and velocity in a motion situation.

Our hypothesis is that, in a model of motion situation, in which case the simultaneous treatment with the graphics of the variations in the function shows the relationship between the function f(x) and its derivatives f’(x) and f’’(x) in a real situation of movement when a person walk a particular distance. The research studies the basic ways of the graphics and their meanings, these results are analyzed by the students who denotes the variations the first and the second order in the graphic.

The students analyze the graphic and get the function to draw it with their own hands versus calculator. They describe point by point all the situations. The activities which have done to find the knowledge are analyzed by the students because they have to understand how to coordinate their graphic skills when they build models which permit them to describe the changes in position and velocity in a particular or general motion situation.

This research has improved to understand how the high school students design models of movement, in particular case when they use graphic calculators and special sensors to simulate the motion.

Glosario

Glosario

Calculadora graficadora (Torres, 2004)

La incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas la considera como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas, en la que los estudiantes pueden transitar entre las diferentes representaciones como son la simulación, la verbal, la tabular, la gráfica y la algebraica; además permite que el estudiante, desplazando el esfuerzo concrete su atención hacia los significados matemáticos.

Caracterización de una situación de aprendizaje

Es parte de los trabajos realizados por la AIM (AIM-NMS-IPN, 2002) es una herramienta que sirve para identificar si un problema o situación de aprendizaje representa una ayuda en el estudiante para que logre aprendizajes significativos. Con respecto al problema planteado es una experiencia de aprendizaje de resolución de problemas, la modalidad de trabajo es colaborativo, el lugar de realización de preferencia en el salón de clases. Como producto es considerado las estrategias, el material, el tiempo y registro de datos de los estudiantes.

Conocimiento

Es la información adquirida y por obtener en la mente del estudiante que le permitirá la acción y resolución de problemas.

Derivada sucesiva (Castañeda, 2004)

Práctica que caracteriza a las derivadas en distintos ordenes. Dato que es posible el tránsito entre ellas, cada nueva derivada refleja información de su anterior y de su posterior, por lo que se privilegia un estudio de sus características; aquellas que permiten predecir comportamiento. Se han identificado 5 rasgos distintos que caracterizan la derivada sucesiva.

1. Relativo a la multiplicidad de representaciones.
2. Relativo al tratamiento simultáneo de sus variaciones.

3. Relativo a su regularidades.
4. Relativo al problema de su dimensionalidad.
5. Relativo a la aceptación de la metafísica del diferencial.

Formas Básicas de Graficación y los significados que le asignan algunos estudiantes a las variaciones de primer y segundo òrdenes.

Como son:

a) Crecimiento constante: su trazo es lineal, su variación de primer orden es constante y su variación de segundo orden es nula.

b) Crecimiento que crece: trazo creciente cóncavo hacia arriba, su variación de primer orden es positiva y su variación de segundo orden es constante.

c) Crecimiento que decrece: su trazo es creciente cóncavo hacia abajo, su variación de primer orden es positiva y su variación de segundo orden es constante.

d) Decrecimiento constante: su trazo es lineal, su variación de primer orden es constante y su variación de segundo orden es nula.

e) Decrecimiento que crece: trazo creciente cóncavo hacia abajo, su variación de primer orden es positiva y su variación de segundo orden es constante.

f) Decrecimiento que decrece: su trazo es creciente cóncavo hacia arriba, su variación de primer orden es positiva y su variación de segundo orden es constante.

Graficación

Práctica escolar de utilidad en los curso de matemáticas del Nivel Medio Superior. Se han identificado tres usos de las graficas: construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables; cuando se gráfica por operaciones gráficas y la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico con uso de tecnología.

Interacción

Es la acción recíproca que mantienen dos o más personas con relación a objetivos comunes.

Interpretar

Es la atribución de un significado personal a los datos contenidos en la información de tablas y gráficas. La acción por la cual un estudiante tiene el significado de una gráfica de una función o de una situación.

Modelación

Es una construcción de conocimiento matemático que se realiza en un ambiente social y que Arrieta (2003) la define como un proceso de matematización en el aula como actividades que desarrollan interactivamente docentes y estudiantes en el salón e clases, utilizando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza.

Modelación-Graficación

La modelación es considerada en la escuela como una actividad que le da un sentido de aplicación a los conocimientos adquiridos en los cursos de matemáticas. Si el estudiante ha estudiado algunos aspectos de una función polinomial se espera que el estudiante los apliquen situaciones de aprendizaje con un modelo polinomial. Por otro lado, la graficación es considerada en la escuela como una habilidad que le permite al estudiante visualizar algunos de los aspectos que se presentan de cierto contenido matemático.

Paquetes Didácticos

Auxiliares para los cursos de matemáticas elaborados por la AIM-NMS-IPN los cuales contienen: libro del estudiante y libro del profesor, disco del estudiante y disco del profesor, sitios en plataforma en Internet y Talleres para profesores para el uso de los paquetes.

Red de Actividades

Es un conjunto de actividades de aprendizaje que incluye problemas, que se distinguen a su vez en problemas y problemas con guía. La Red de Actividades es considerada por el tipo de problemas que permite al estudiante tener una mejor comprensión en sus cursos de matemáticas, tomando en cuenta su conocimiento previo, incorporando Tecnologías de la información y Comunicación (TIC)

Índice de ilustraciones

Anexos

Introducción

Introducción

El presente trabajo de tesis titulado "Variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en una situación de graficación y modelación de movimiento" tiene como objetivo reportar los aprendizajes que lograron estudiantes de quinto semestre del nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional, al trabajar con un problema en una situación real de movimiento considerando las formas básicas de graficación y el uso de herramientas tecnológicas como son los dispositivos transductores y la calculadora graficadora.

Al realizar el problema de una situación real de movimiento se espera que utilicen las formas básicas de graficación por su construcción misma de las gráficas; operaciones gráficas como el comportamiento de la función, la función derivada y su primitiva; la construcción de las gráficas de la posición, velocidad y aceleración a partir de la simulación con uso de la tecnología y forma de la gráfica si es creciente, decreciente, entre otras.

Capítulo I. Antecedentes

En este capítulo se da a conocer un panorama general de uso de las gráficas en los programas de estudio del NMS. La graficación esta relacionado con los contenidos matemáticos de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Probabilidad y Estadística. En física la representación gráfica es una herramienta de las matemáticas en los fenómenos físicos. El estudio de las gráficas es por su funcionamiento y forma como una práctica institucional fundamental para la integración sistémica de conocimientos matemáticos. El estudio del uso de las funciones a través de graficación, tabulación y por modelación mediante el uso de tecnología.

Este trabajo reporta los resultados de una investigación que tiene como propósito conocer los aprendizajes que logran los estudiantes del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional al trabajar la graficación con un problema de situación real de movimiento, una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos

Capítulo II. Planteamiento del problema

Este capítulo tiene la finalidad de dar a conocer la problemática a la cual nos enfrentamos cuando se estudian la construcción de ideas en el conocimiento matemático y el uso de tecnología como los dispositivos de transducción, sensores y calculadoras con poder de graficación para el registro, el análisis y la interpretación de datos en el salón de clases. Por tal motivo se plantea la siguiente hipótesis

Se han reportado en diversas investigaciones (Leinhardt, Stein y Zaslavsky, 1990; Torres, 2004) las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción e interpretación de gráficas, sin embargo, los significados, procedimientos y argumentos que propician en los estudiantes estas actividades de construcción e interpretación de gráficas no sólo contribuyen a la comprensión del concepto de función sino que constituye una vía de construcción de ideas de variación.

De esta manera, la graficación se ha revelado en las investigaciones (véase una revisión amplia en Leinhardt et al 1990) como una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. La gráfica permite ver las características globales y locales de la función como son: las variaciones, el crecimiento, la continuidad, la concavidad, los máximos y los mínimos, etc. Se plante la hipótesis de la investigación en una situación de modelación del movimiento hay un tratamiento simultáneo de las variaciones de una función, es decir hay un manejo simultáneo de la posición y de las variaciones en la posición y la velocidad.

Para dar respuesta a la hipótesis surge la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las características de las gráficas en una situación de modelación del movimiento donde aparecen de forma simultánea la posición y las variaciones de la posición y la velocidad?

Capítulo III. Marco Teórico y Metodología

Éste capítulo la finalidad de darnos a conocer la red de actividades de graficación-modelación en la que se enfrentan los estudiantes para observar como construyen ideas en el conocimiento matemático. Es por ello que el marco teórico es la socioepistemología y la principal referencia es la tesis de Torres (2004) que nos brinda una alternativa de mirar las gráficas e incorporarlas en la construcción de ideas matemáticas que logran los estudiantes al trabajar un problema de situación real de movimiento, una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos.

En la didáctica del Cálculo "la noción de la derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de la variable sucesiva" (Castañeda, 2004). Nos menciona los cinco elementos de la noción de la derivada: Relativo a la multiplicidad de representaciones; b) Relativo al tratamiento simultáneo de sus variaciones; c) Relativo a sus regularidades; d) Relativo al problema de la dimensionalidad y e) Relativo a la aceptación de la metafísica del diferencial.
Además se describe en este capítulo la metodología que se usó para el análisis de la situación real de movimiento a través de una red de actividades de graficación-modelación.
El segundo elemento de la noción de la derivada "Relativo al tratamiento simultáneo de sus variaciones" es considerada para dar cuenta de la naturaleza de los conocimientos que los estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a actividades que exigen coordinar habilidades en el manejo para la construcción de modelos que les permitan describir la variación de la posición y la velocidad en una situación de movimiento.
Se realiza una red de cuatro actividades de graficación – modelación. Cada actividad permite al discente no sólo trabajar de forma colaborativa sino conocer y aplicar estrategias de aprendizaje.

Capítulo IV. Actividad de aprendizaje modelación-graficación

En este capítulo se presenta la situación de aprendizaje que servirá para probar las hipótesis de investigación, se pide al estudiante que analice la gráfica de una persona que sale de su casa y comienza un viaje en motocicleta y que construyan las respectivas gráficas de velocidad y aceleración.

La elección de esta situación se basa en la caracterización la cual permite identificar si un problema o actividad de aprendizaje le permite al estudiante lograr aprendizaje significativo en el conocimiento matemático. (AIM-NMS-IPN, 2004).

La resolución del problema contempla las representaciones de graficación, tabulación, algebraica correspondientes a la solución de cada pregunta. Se incluye un ejemplo del tipo de gráficas que se obtendrán con la simulación realizada con la tecnología.

Capítulo V. Puesta en escena

En este capítulo se describe la metodología que se usó en el análisis de la red de actividades graficación-modelación de los estudiantes al poner en práctica la situación de aprendizaje “Acércate más” en las horas de clase de Cálculo Integral en el salón de clases.

Para la toma de datos, partir de la pregunta de investigación formulada en el presenta trabajo se optó por la entrega presencial del día de la aplicación de la situación de aprendizaje y del trabajo robustecido como extraclase por el tiempo reducido de la clase. Se consideraron las dos secuencias, la primera se refiere a la que los estudiantes realizan y discuten sin el uso de tecnología y la segunda realiza una simulación y efectuar un contraste entre el modelo gráfico y la situación planteada.

Para analizar los registros generados por los estudiantes se utilizo las formas básicas de graficación a través de un problema real de movimiento en el que nos presentan la posición de un móvil por medio de su representación gráfica.

Capítulo VI. Análisis y discusión de resultados de información

En este capítulo se analiza si el estudiante consideró la realización de la función para la relación de la función $f'(x)$ a partir de la gráfica y comportamiento de las gráficas de velocidad y aceleración

Conclusión

Se considera el análisis de la práctica de la situación de aprendizaje de los estudiantes se generan las conclusiones de cada una de las preguntas formuladas en la `presente investigación, considerando las dos secuencias mencionadas. El contraste entre el modelo gráfico y la situación planteada permite esbozar una conclusión general sobre la hipótesis "*En una situación de modelación del movimiento hay un tratamiento simultáneo de las variaciones de una función, es decir h*ay un manejo simultáneo de la posición y de las variaciones en la posición y la velocidad ".

Capítulo I
Antecedentes

Capítulo I. Antecedentes

I.1. La problemática del análisis de las gráficas.

La graficación está relacionada con muchos contenidos matemáticos: Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Probabilidad y Estadística.

En Álgebra el estudiante maneja modelos algebraicos lineales y cuadráticos a través del uso de los lenguajes simbólico y gráfico. Para la resolución gráfica de obtiene una tabla a partir de su función y un intervalo de valores establecidos. Cen (2006) nos dice que "El uso de las gráficas en el semestre de álgebra es la distribución de puntos que se resignifica al debatir entre el funcionamiento y forma de la gráfica" que pueden ser las representaciones tabular y gráfica.

En Geometría y Trigonometría el estudiante desarrolla habilidades del pensamiento como el razonamiento, el análisis, la reflexión, comunicación y valoración mediante una actitud participativa, crítica y creativa para que relacione los conocimientos de la aritmética, el álgebra y Geometría y Trigonometría. El uso de la gráfica es a través de la función exponencial, la función logarítmica por medio de tabulación, las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) por medio del círculo trigonométrico o por medio de tablas que contiene valores específicos y la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Cen (2006) nos dice que "El uso de las gráficas en el semestre de Geometría y Trigonometría es la distribución de puntos y el comportamiento geométrico que se resignifican al debatir entre el funcionamiento y forma de la gráfica" que pueden ser las representaciones tabular y gráfica.

En Geometría Analítica el estudiante debe introducirse al estudio de los sistemas de coordenadas integrando el conocimiento de la Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría y desarrollar sus habilidades para el análisis y razonamiento. El uso y razonamiento de las gráficas es sistemas de coordenadas, la línea recta, la circunferencia, secciones cónicas, ecuaciones cartesianas de las cónicas, la ecuación general de segundo grado, trayectorias curvilíneas y ecuaciones paramétricas y coordenadas y ecuaciones polares. Cen (2006) nos dice que "El uso de las gráficas en el semestre de Geometría Analítica es la distribución de puntos y el comportamiento geométrico que se resignifica al debatir entre el funcionamiento y forma de la gráfica" que pueden ser por distribución de puntos, tabular y algebraica.

El estudio de la gráfica en Cálculo Diferencial es en funciones y límites, la derivada en sus interpretaciones, funciones algebraicas y aplicaciones, funciones exponenciales y circulares. Cen (2006) nos dice que "El uso de las gráficas en el semestre de Cálculo Diferencial es la distribución de puntos y el análisis de la curva que se resignifican al debatir entre el funcionamiento y forma de la gráfica" que pueden ser las representaciones tabular (tabla de variación), algebraica y gráfica.

En Cálculo Integral el estudiante integra los conocimientos adquiridos en las asignaturas de los semestres anteriores en el estudio de gráficas y funciones y puede desarrollar habilidades para su análisis y razonamiento en la resolución de problemas de integración. Cen (2006) nos dice que "El uso de las gráficas en el semestre de Cálculo Integral es el cálculo de áreas y volúmenes que se resignifica al debatir entre el funcionamiento y forma de la gráfica".

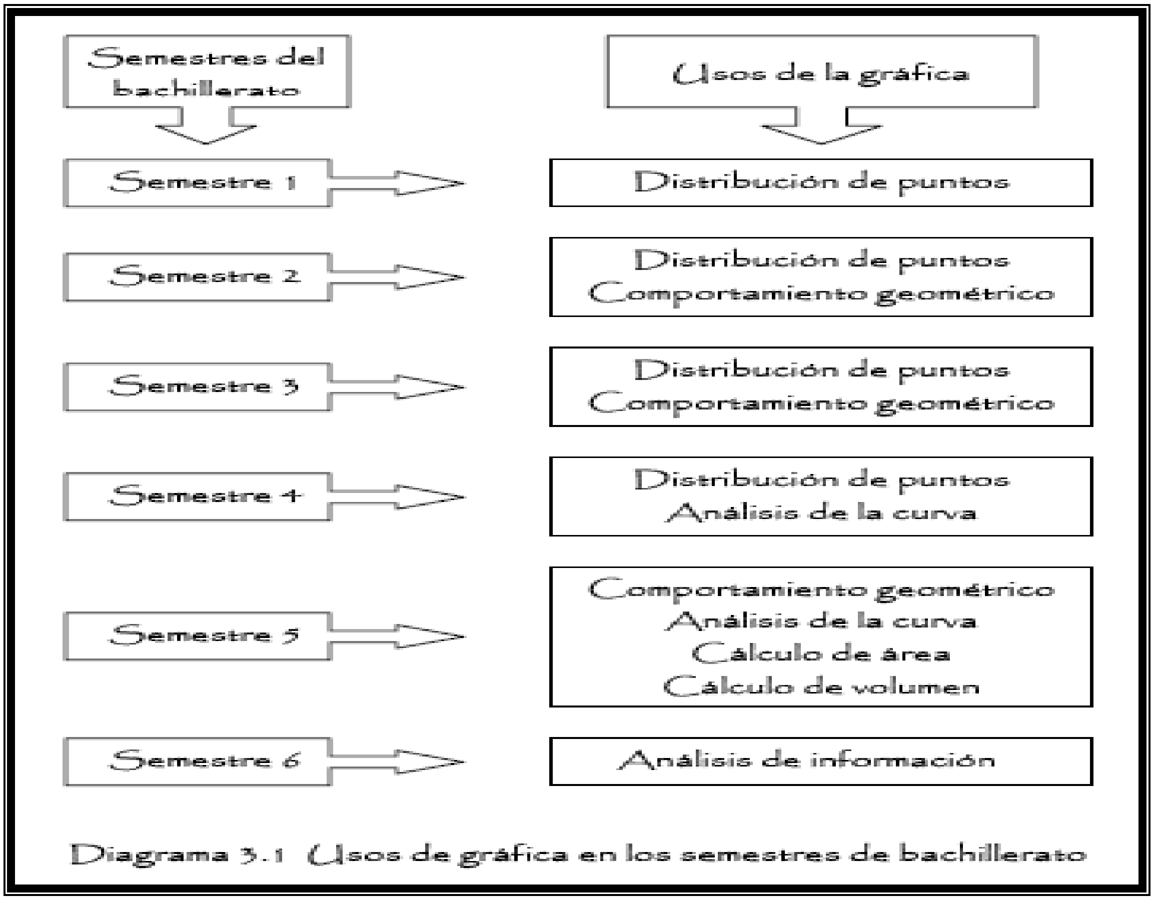
En Probabilidad y Estadística, que corresponde al último semestre del Nivel Medio Superior se estudia la toma de datos y su representación gráfica para la toma de decisiones en su análisis. Cen (2006) nos dice que "El uso de las gráficas en el semestre de Probabilidad y Estadística es el análisis de información que se resignifica al debatir entre el funcionamiento y forma de la gráfica" que pueden ser las representaciones tabular y gráfica (histograma, poligonales y la curva normal).
De ahí la importancia en la comprensión matemática la cual está asociada con la capacidad de transitar de manera fluida por varias representaciones.

El estudio de las gráficas como podemos ver es a través de su funcionamiento y forma como una práctica institucional, fundamental para la construcción del conocimiento matemático (integración sistémica de conocimientos). Las prácticas sociales son actividades que generan conocimiento matemático y habilidades, las cuales se modifican conforme al discurso matemático escolar.

Una de las dificultades que se encuentran en la enseñanza del cálculo es la comprensión de las derivadas sucesivas y en la presente investigación se aborda mediante un problema con y sin uso de tecnología. El análisis de graficación y de función en contenidos matemáticos en el aula el profesor pensaría que se forman significativamente durante la enseñanza de la función derivada primera y de la función derivada segunda, asociándolo con la concavidad positiva o concavidad negativa por lo que las actividades que se realizan en el aula implican significar la representación tabular, algebraica y mediante una representación gráfica de un cierto fenómeno de movimiento.

Testa (2004) nos menciona que en los libros de texto escolares se observa la variación de cierta recta que se “aproxima” a la recta tangente en la representación gráfica. En el análisis realizado mediante una serie de actividades los estudiantes solo se refiere analíticamente a límites y no realizan interpretaciones gráficas que permitan reforzar la idea de variación.

Los programas vigentes de matemáticas en el Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (NMS-IPN) (IPN, 1994-1996) establecen la modelación como una línea de desarrollo del currículo. Ya sea en la instrumentación didáctica o en la lista de contenidos de los programas de matemáticas aparece la graficación de funciones, ecuaciones y conjuntos de datos. Cen (2006) hizo un análisis del uso de las gráficas en estos programas y resumió sus resultados en el cuadro 1.1. El cual nos permite ver el uso de la gráfica en los seis semestres del Nivel Medio Superior.



Cuadro 1.1 Uso de gráficas en el Nivel Medio Superior del IPN. Tomado de Cen (2006)

I.2. Estudio de las gráficas y las funciones

La graficación se ha revelado en las investigaciones (Cen, 2006; Suárez, 2006; Torres, 2004) como una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos.

La graficación es interpretar el sentido y significado de las funciones y de sus propiedades desde una perspectiva cognitiva.

Las dos visiones de la graficación son:

a) La de técnica que permite bosquejar la gráfica de una función particular y

b) La de interpretar el sentido y el significado de las funciones, al nivel de propuestas de enseñanza.

Estas dos visiones están relacionadas con los niveles de desarrollo del pensamiento matemático que requieren de la visualización en distintos grados para la graficación de funciones (Cantoral y Montiel, 2001).

La investigación "usos de las gráficas en tanto su funcionamiento y forma" realizada por Cen (2006) menciona que las gráficas desde una aproximación epistemológica consiste en incorporar las prácticas institucionales en el modelo de conocimiento; la gráfica de las funciones como prácticas argumentativas (resignificación) y en contextos analíticos como ecuación y función.

La gráfica es una argumentación para las matemáticas, además, es una representación de función. Realzando la argumentación como el comportamiento tendencial de las funciones y éste permite al estudiante reconstruir significados de la parábola; la transformación de funciones; la construcción de conocimiento matemático por medio de la representación gráfica, numérica, algebraica y analítica.

Por otro lado el método de la tabulación o representación tabular nos presenta los valores de la variable independiente y de la variable dependiente. Esta representación tabular da información sobre el comportamiento de una función y permite un bosquejo de su gráfica.

I.2.1. Uso de las funciones

El uso de la función en la presente investigación se hace a través de la graficación, valores numéricos (tabulación), analítica y por modelación.

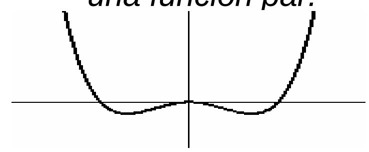
De las investigaciones realizadas sobre la función y la graficación se mencionan los siguientes aspectos que resultan relevantes para el siguiente trabajo.

En el análisis de la función se consideran las propiedades de paridad: $\left(f(x)=f(-x)\right)$, la periodicidad $\left(f(x)=f(x+k)\right)$ y la traslación de funciones $\left(y=f(x+a),\ y=f(x-a)\right)$.

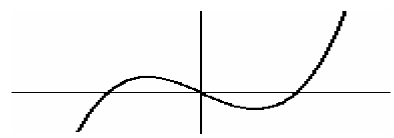
La paridad de una función consiste en es precisar si f es par, impar o bien ni par ni impar. El apoyo del gráfico permite caracterizar de forma visual y analítica la paridad de las funciones. En el cuadro 1.2 nos presentan ejemplos de la forma $f(x) = f(-x)$ para una función par y $f(x) = -f(-x)$ para una función impar.

<table>
<tr><td>Caracterización analítica de una función par:

$f(x) = f(-x)$</td><td>Ejemplo de una particular función par:

$f(x) = x^2(x^2 - 1)$</td><td>Caracterización gráfica de una función par:
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estas caracterizaciones de la paridad de una función, se utilizan para deducir y explicar resultados teóricos posteriores. Por ejemplo, si f es una función par definida sobre $[-a, a]$, entonces
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>Caracterización analítica de una función impar:

$f(x) = -f(-x)$</td><td>Ejemplo de una particular función impar:

$f(x) = x\ (x^2 - 1)$</td><td>Caracterización gráfica de una función impar:
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estas caracterizaciones de la imparidad de una función se utilizan para deducir y explicar resultados teóricos posteriores. Por ejemplo, si f es una función impar definida sobre $[-a, a]$, entonces
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$</td></tr>
</table>

Cuadro 1.2. Caracterización visual y analítica de la paridad e imparidad de funciones. Cantoral y Montiel (2001).

Definiciones de función como relación entre variable y como correspondencia entre conjuntos.

En “visualización y pensamiento matemático” Cantoral y Montiel (2001) nos mencionan la relación entre la gráfica y la función en estudios realizados en Matemática Educativa. Nos dan la definición de función como relación entre variables y función como correspondencia entre conjuntos para el entendimiento en el análisis del presente trabajo de investigación.

Función como relación entre variables

> *"Una función es una relación entre variables tal que a cada valor de la primera variable (variable dependiente) le corresponde un solo valor de la segunda variable (variable independiente). Si x representa a la variable dependiente y* y *describe a la variable independiente, esto se suele escribir como* $y = f(x)$ *con el fin de representar el hecho de que la variable y está en función, depende, de la variable* x*".*

Función como correspondencia entre conjuntos

> *"Una función* $f : A \rightarrow B$ *consiste en dos conjuntos, el dominio A y el rango B y una regla de correspondencia. Esta correspondencia es denotada por* $y = f(x)$ *o* $x \rightarrow f(x)$*. La expresión* $f(x)$*, representa el valor de* f *en* x*, o también llamada la imagen de* x *bajo* f*".*

Azcarate (1990) nos da una descripción de las representaciones de una función como la expresión de una dependencia entre variables. Estas representaciones son: la simulación, la verbal, la gráfica, la tabular y la algebraica. Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables.

I.2.2. La "graficación" como actividad escolar

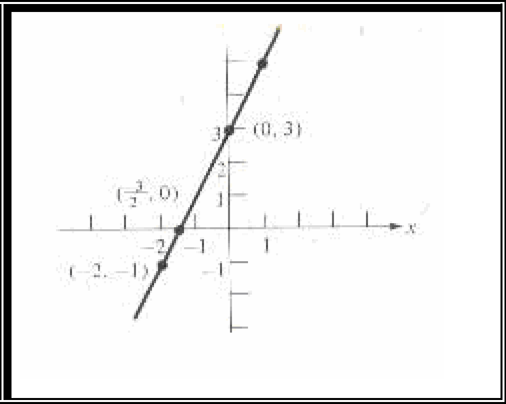
Una de las finalidades del proyecto de investigación "La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología" (Torres, 2004) es analizar la problemática a la que se enfrentan los profesores cuando son incorporados los dispositivos de transducción, sensores y calculadoras con poder de graficación, para el registro, el análisis y la interpretación de datos mediante un problema en el salón de clases con alumnos del NMS- IPN.

Tomando a la graficación como una vía de construcción de gráficas se pueden identificar distintos usos de las gráficas. En este sentido Torres (2004) propone a partir de una revisión de libros de texto y de literatura en Matemática Educativa tres usos de las gráficas:

a) La construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables. En el cuadro 1.3 tenemos un ejemplo de relación de correspondencia desarrollado en un libro de texto del curso de Álgebra.

y = 2x+3

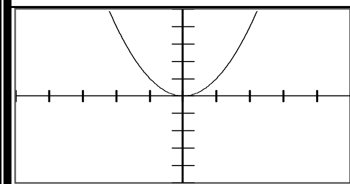
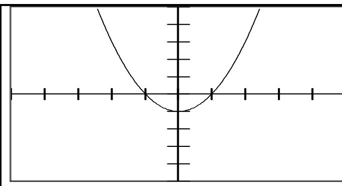
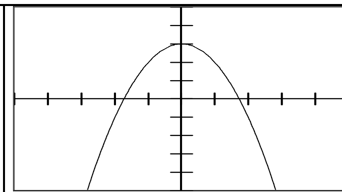
x	0	1	2	1	-1	-3/2
y	3	5	7	1	-1	0

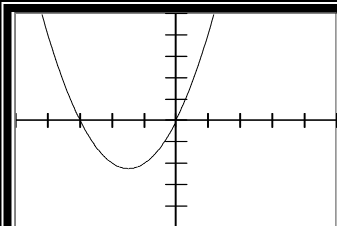
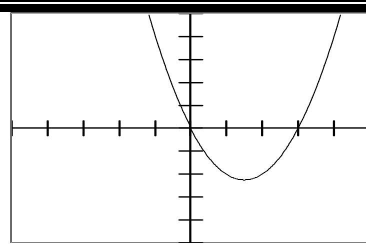
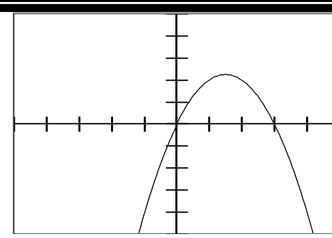


Cuadro 1.3. La relación de correspondencia. Tomado de Álgebra con aplicaciones (Phillips et al., 1999)

b) La construcción de gráficas por prototipos. En una parábola, por ejemplo, se estudian las transformaciones gráficas cuando se le suma una constante o una recta que pasa por el origen con pendiente positiva o negativa, o una recta que no pase por el origen con pendiente positiva o negativa o cuando el coeficiente de término cuadrático toma un valor mayor o menor a la unidad. (Véase el cuadro 1.4).

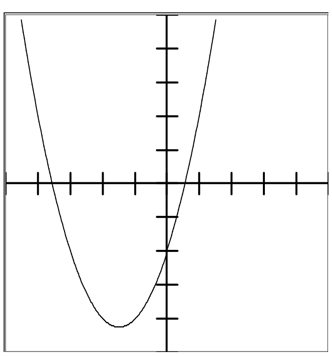
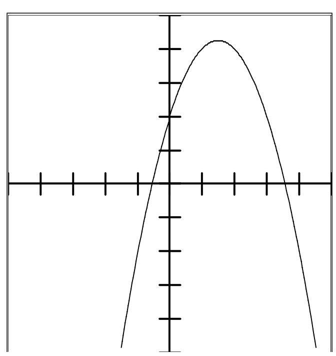
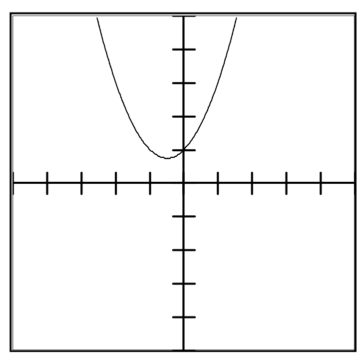
Existen gráficas que utilizan un cuadrante, dos cuadrantes, tres cuadrantes y cuatro cuadrantes, gráficas que representan una función analítica o una situación real.

Cuando se le suma una constante a $y = x^2$		
		
$y = x^2$	$y = x^2 - 1$	$y = -x^2 + 3$

$y = x^2 + 3x$ $\quad$ $y = x^2 - 3x$ $\quad$ $y = -x^2 + 3x$

Cuando se le suma una recta a $y = x^2$ *que pase por el origen y con pendiente positiva o negativa.*

$y = x^2 + 3x - 2$ $\quad$ $y = -x^2 + 3x + 2$ $\quad$ $y = x^2 + x + 1$

Cuando se le suma una recta a $y = x^2$ que no pase por el origen y tenga pendiente positiva o negativa.

Cuadro 1.4. Gráficas de la suma de la parábola. Tomado de Torres (2004)

c) La representación gráfica por medio de la simulación de un fenómeno físico. Los dispositivos transductores registran los datos y las calculadoras con poder de graficación los convierten en tablas y gráficas. Los alumnos realizan un movimiento, obtienen un registro gráfico de tal manera que al cambiar las características de su movimiento pueden identificar los cambios que se producen en la gráfica. De esta forma se analiza un fenómeno y al mismo tiempo su representación.

La investigación desarrollada por Torres (2004) ha dejado ver la importancia de estudiar el uso de las gráficas sin tecnología y poder contrastar la construcción de gráficas con tecnología al usar sensores de movimiento y calculadoras con poder de graficación, en el contexto de la resolución de un problema en donde se hace la gráfica de movimiento de una estudiante que se encuentra en su salón de clases y va por su cuaderno olvidado en la biblioteca recorriendo desde su punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo se dispone de nueve minutos pero, además, durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos. Esta situación de aprendizaje contribuye a atender la naturaleza de las construcciones que un estudiante del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional puede realizar mediante el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para modelar situaciones de movimiento.

La actividad realizada en Torres para estudiar la gráfica de un fenómeno real de movimiento es el siguiente:

Epifanía

"Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía".

> *La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos.*
>
> 1) *Construye una gráfica que describa los cambios de posición de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.*
> 2) *Todos hemos escuchado o hecho descripciones de objetos en movimiento, que incluyan expresiones como 'detenido', 'rápido', 'lento', 'más rápido', 'disminuyó su velocidad', 'más alejado', 'aceleró más', y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria.*
>
> *Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario.*
>
> *Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea negativa, positiva o nula, y describe las características de la gráfica, al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características correspondientes de la gráfica.*

Cuadro 1.5 Epifanía. Tomado de Material didáctico de la AIM (2004)

Parte de la problemática a la que el profesor se enfrenta en el aula cuando realiza una actividad de aprendizaje en el que incorpora dispositivos de transducción, sensores y calculadoras con poder de graficación, para el registro, el análisis y la interpretación de datos en la resolución de problemas se considera en la caracterización del problema.

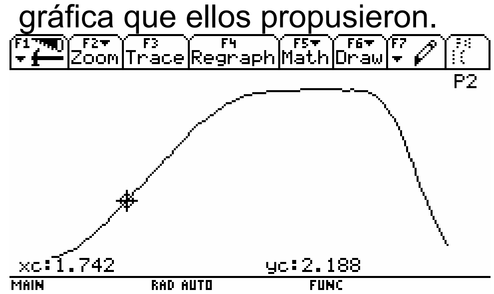
La *caracterización del problema* es parte de los trabajos realizados por la Academia Institucional de Matemáticas (AIM) (AIM-NMS-IPN, 2002) la cual permite identificar si el problema o actividad de aprendizaje tiene el potencial para lograr en el estudiante aprendizajes significativos. De la caracterización del problema *Epifanía* destaco lo siguiente:

- Es una experiencia de aprendizaje de resolución de problemas.
- La modalidad de trabajo es por equipos.
- El sitio de trabajo es el salón de clases.

- Las herramientas son calculadora con poder de graficación y sensor de movimiento (CBR).
- Los productos de la actividad son los reportes de los estudiantes.

En la investigación de Torres se registran representaciones como: descripción verbal, el modelo físico del movimiento o simulación y la gráfica (véase cuadro 1.6).

La actividad realizada por Torres (2004) incluyó dos modalidades de trabajo que son: trabajo en equipo y discusión grupal sin tecnología (secuencia I) y con tecnología (secuencia II) como vemos a continuación.

Pregunta	Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?	Monitor: “Primero empezaron a dibujar un círculo, pero después entendieron que se tenía que hacer una gráfica de distancia contra tiempo”. Monitor: “Al principio tuvieron algunos problemas para identificar la posición”.  	La gráfica que obtuvieron con el sensor no corresponde a la gráfica que ellos propusieron.  Como podemos observar en la gráfica, que resultó de su experimento nos indica que los cuatro minutos que pierde Valentina son en la biblioteca.

Cuadro 1.6. Análisis Global de la graficación – modelación de Epifanía. Tomado de Torres (2004)

Se consideran estas dos secuencias para analizar la información recopilada a través de sus evidencias y responder las siguientes preguntas ¿En qué sentido logran tener una visión global de La gráfica? ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que puede identificar? ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente? y ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

A partir de este análisis se da una visión global de las representaciones gráficas: Los equipos identifican los cambios de posición para la construcción de la gráfica, los alumnos de los últimos semestres del NMS determinan los intervalos de velocidad como rápido, detenido y más rápido en la gráfica.

En la secuencia I (sin el uso de la tecnología) de forma general se observa lo siguiente: Tanto en la representación verbal como en la graficación los estudiantes establecen diferentes tiempos y posiciones a los establecidos en el problema; en el plano cartesiano toman eje *x* como el tiempo y al eje *y* como la distancia y para la velocidad utilizan la fórmula correspondiente; identifican los ejes y determinan las variables; relacionan la representación verbal con la gráfica; identifican el tipo de velocidad (negativa, positiva o nula).

En la secuencia II (con uso de la tecnología) los estudiantes ven más claramente los cambios de velocidad en la gráfica. La velocidad positiva que va de ida y la velocidad negativa que va de regreso y cuando la velocidad es cero no hay movimiento. En la simulación establecen las variables (el tiempo en segundos y la distancia en metros). Contrastan sus gráficas a lápiz y papel con las gráficas obtenidas con el uso de tecnología como son las calculadoras con poder de graficación; Grafican la relación entre la posición y la velocidad. Relacionan la representación verbal con la representación de simulación.

Las dos secuencias nos permiten tener una visión cualitativa en el aprendizaje del estudiante en las que explora y analiza lo que sucede en la actividad al transitar en las representaciones: simulación, verbal, tabular, gráfica y algebraica antes y después de usar la tecnología. Para la visión cualitativa véase una revisión amplia en Torres (2004).

La presente investigación toma como referencia a Torres (2004) para estudiar actividades de modelación del movimiento en relación a la gráfica y a la función (posición, velocidad y aceleración) aplicada a un problema real de movimiento con uso de tecnología.

I.3. La problemática del análisis de las gráficas

En la presente investigación se analiza la puesta en práctica de una Actividad de aprendizaje (AA) en el que se consideran las formas básicas de graficación y los significados que les asignan en variaciones de primer y segundo órdenes en dos secuencias, secuencia I realización de la AA a lápiz y papel es decir sin uso de la tecnología y secuencia II con uso de las Tecnologías de la Comunicación e Información como la calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento (CBR).

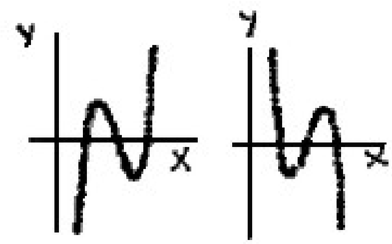
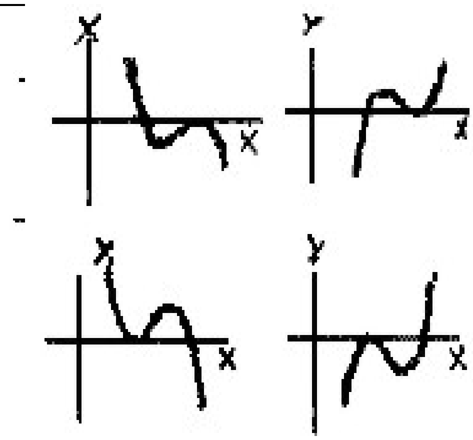
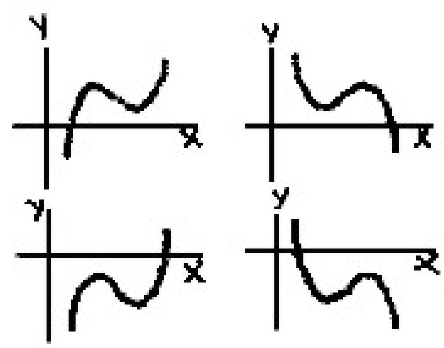
Montiel y Cantoral (2001) nos mencionan que la relación entre variable nos indica que cada valor de la variable dependiente le corresponde un valor de la variable independiente. La correspondencia entre conjuntos $f : A \to B$, consiste de dos conjuntos (el dominio A y el rango B) y una regla de correspondencia.

Una función se puede interpretar mediante una fórmula explicita, el trazo de una curva, la relación de dependencia y a partir de correspondencias arbitrarias.

En las representaciones gráficas se considera la recta, la parábola y la cúbica. La gráfica de un polinomio de primer grado recibe el nombre de recta. En una función lineal a cada valor real x se le asocia el número $ax + b$, a y b son números reales y $a \neq 0$. La gráfica de un polinomio cuadrático recibe el nombre de *parábola*. En una función cuadrática se asocia a cada real x, el número real $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

En el polinomio cuadrático si la parábola que abre hacia arriba presenta un intervalo de decrecimiento, una cota inferior y un intervalo de crecimiento; y para las parábolas que abren hacia abajo tienen un intervalo de crecimiento.

La gráfica de un polinomio cúbico tiene un comportamiento variado; puede tener intervalos donde , crece, decrece, vuelve a crecer; así, el crecimiento va desde $-\infty$ a $+\infty$.

En la tabla		***Gráficas***
3 ceros	*3 cambios* de positivo a negativo o negativo a positivo. ∴ en la gráfica hay 3 cruces con el eje x.	
2 ceros	*1 cambio de* positivo a negativo o negativo a positivo y *1 permanencia* *de signo* positivo (decreciente a creciente) o negativo (creciente a decreciente). ∴ en la gráfica hay 1 cruce y 1 toque tangencial con el eje x.	
1 cero	*1 cambio de* positivo a negativo, o de negativo a positivo. ∴ en la gráfica hay 1 cruce con el eje x.	

Cuadro 1.7 Formas gráficas que presentan las funciones cúbicas. Tomado de Cantoral y Montiel (2001)

La incorporación de la tecnología ha propiciado modificaciones de forma paulatina en las aulas. El uso de los objetos para el aprendizaje en la representación gráfica es la posibilidad de querer tanto estudiantes como profesores, adaptar los recursos didácticos de acuerdo a sus propias necesidades, inquietudes, estilos de aprendizaje y enseñanza.

Las herramientas computacionales generan nuevos ambientes (Suárez, 2006) en los cuales los objetos virtuales que aparecen en pantalla se pueden manipular, además de una mayor precisión y rapidez para hacer cálculos aritméticos y representaciones gráficas.

Capítulo II.

Planteamiento del problema

Capítulo II. Planteamiento del problema

Se han reportado en diversas investigaciones las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción e interpretación de gráficas, por ejemplo cuando un estudiante construye una gráfica y lo hace a través de la tabulación (identificando pares ordenados) tiene dificultad para darle sentido a la forma completa de la gráfica (Véase una revisión amplia en Leinhardt et al 1990). Sin embargo, el potencial de poner atención en los significados, procedimientos y argumentos que propician en los estudiantes estas actividades de construcción e interpretación de gráficas no solo contribuye a la comprensión del concepto de función sino ofrece una vía de estudio y análisis para la derivada, pues a través de la variación se puede estudiar este concepto matemático.

Con respecto a la graficación en el capítulo anterior se mencionaron las representaciones gráficas de tres funciones; la recta, la cuadrática y la cúbica, que nos sirven en la presente investigación como punto de partida para el diseño de la red de actividades de graficación- modelación (Véase cuadro 2.3). El estudio de la función a partir de la representación gráfica desde su visión es analizada por Cantoral y Montiel (2001), así mismo, explican que función puede entenderse como una correspondencia entre conjuntos, como una fórmula que contiene variables, y a la gráfica de una función como una técnica o conjunto de técnicas para la construcción.

Para Cen (2006) quién trabajó desde una aproximación socioepistemológica, la construcción de gráficas permite al estudiante actitudes de argumentación, es decir, se puede construir y explicar un conocimiento matemático mediante la graficación, así mismo, la actividad de graficación se puede incorporar en las prácticas institucionales en el modelo de conocimiento dando cuenta del conocimiento matemático y las causas reales de tal conocimiento.

Cantoral, Montiel, Cen y Torres nos hablan del estudio de función y graficación, pero en especial Torres se refiere al uso de la gráfica con tecnología como lo son la calculadora con poder de graficación y los sensores de movimiento CBR a través de una actividad trabajada con estudiantes del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional.

En las actividades de graficación se identifican distintos usos de las gráficas. Torres (2004) propone tres usos de las gráficas: la construcción de gráficas (relación de correspondencia entre dos variables); la construcción de gráficas por prototipos; y la representación gráfica por medio de la simulación de un fenómeno físico.

Torres (2004) analiza la graficación como actividad escolar en el NMS del IPN en la problemática a la que se enfrentan los profesores al ser incorporadas las TIC. Por ejemplo el profesor no quiere aprender y hacer uso de la tecnología y de querer aprenderla; y en los estudiantes a entender la naturaleza de las construcciones que se pueden realizar mediante el uso de las TIC para modelar situaciones de movimiento.

Elegí situaciones de aprendizaje que tienen que ver con la modelación gráfica del movimiento tal y como es trabajada en Torres (2004). En el siguiente cuadro se hace una descripción de este tipo de actividades.

Descripción de las actividades de graficación - modelación

Tres actividades para analizar una situación de movimiento a través de:

- **Proponer un modelo gráfico**: se pide diseñar una gráfica que describa los cambios de posición de un una persona que realiza el movimiento descrito. En el momento de realizar esta tarea se toman decisiones: las variables que intervienen, la escala de la gráfica y las distancias recorridas en distintos instantes.

- **Realizar una simulación**: se pide simular el movimiento frente al sensor para obtener la gráfica estipulada. El movimiento se adapta al alcance del sensor. A partir de múltiples realizaciones se establecen relaciones entre las características del movimiento y los diversos comportamientos gráficos obtenidos en la calculadora.

- **Efectuar un contraste entre el modelo gráfico y la situación**: se pide ajustar el modelo gráfico original dando cuenta de la situación planteada.

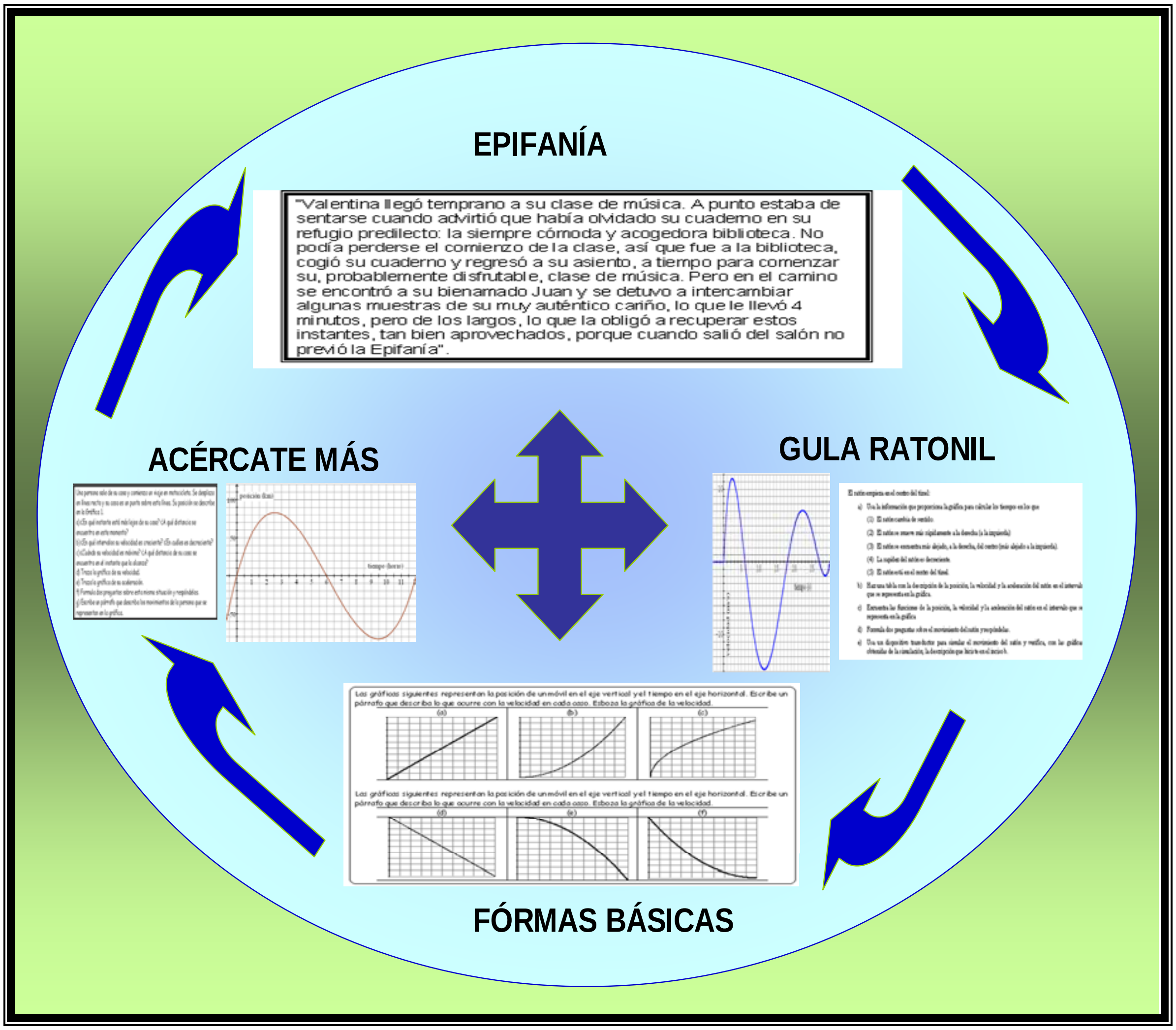
Se esperan de los estudiantes múltiples realizaciones en la simulación del movimiento en las que tomen decisiones sobre las características que se varían en la situación para la obtención de distintas gráficas.

Cuadro 2.1. Descripción de las actividades de graficación- modelación tomado de Suárez et al (2005).

II.1 Red de actividades de aprendizaje

La gráfica permite ver las características globales de la función, esto es, las variaciones, el crecimiento, la continuidad, la concavidad, los máximos y los mínimos, entre otros.

Congruente con estas necesidades el Instituto Politécnico Nacional ha publicado materiales que contienen una gran variedad de situaciones de aprendizaje con el uso de gráficas en ambientes tecnológicamente enriquecidos. Un ejemplo de estas actividades es el problema de movimiento comentado en el Libro del Profesor de Geometría Analítica (IPN, 2006, 109-119). Ésta y otras actividades forman una red (véase el Cuadro 2.2) con la que se trabajan distintos conceptos a lo largo de los seis semestres.



Cuadro 2.2. Red de actividades.

La red de actividades (cuadro 2.2) está constituida por cuatro actividades de aprendizaje (AA) que permiten un mejor entendimiento en el estudiante de quinto semestre a Nivel Medio Superior. La red de actividades de aprendizaje se da en dos casos. Caso I: Cada AA se realizan las actividades de aprendizaje a lápiz y papel (sin so de tecnología) en el Caso II las AA se realizan con uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). Como el uso de la calculadora con poder de graficación, el sensor de movimiento CBR y un softwer graficador.

Esta red de actividades se vincula desde perspectivas diferentes y se articulan de varias maneras para cumplir diversos objetivos didácticos.

La actividad de aprendizaje (AA) “Epifanía” consta de un enunciado y una serie de preguntas. Esta actividad de aprendizaje surge para tener conocimiento de este tipo de problemas y el uso de la tecnología. Nos dan un enunciado en el que mediante una serie de preguntas el estudiante construye las graficas respectivas de posición y velocidad de una persona que recorre 500 metros y en el trayecto de los 9 minutos se detiene 4 minutos. Primeramente la actividad es resuelta a lápiz y papel. En la segunda parte de la actividad se emplea el uso de la tecnología como lo son la calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento CBR. El estudiante realiza una simulación.

La AA “Gula Ratonil” consta de una serie de preguntas generadas por la representación gráfica. Esta AA surge para el conocimiento de este tipo de problemas a través de una representación gráfica. La actividad es representada mediante una gráfica de un polinomio y una serie de preguntas. Es de un ratón que avanza y retrocede en un túnel cuando se le meten y sacan desde los extremos del túnel trocitos de queso. El estudiante analiza la gráfica para obtener la función $(f'(x))$ y así poder encontrar las demás funciones de posición $(f(x))$ y aceleración $(f''(x))$. Realiza una simulación y efectúan un contraste entre el modelo gráfico y la situación.

La AA “Formas Básicas” consta de un enunciado y representación gráfica. Se les proporciona en una hoja 6 tipos de gráficas representando la posición de un móvil en el eje vertical y se les pide escribir y esbozar la velocidad. El estudiante debe considerar las características globales de la función como son: las variaciones, el crecimiento, la continuidad, la concavidad, los máximos y los mínimos, entre otros. Realiza las actividades descritas en el cuado 2.1.

La AA “Acércate más” es la que se reporta en la presente investigación y consta de una serie de preguntas generadas por la representación gráfica. En esta actividad el estudiante analizará una situación de movimiento a través de: proponer un modelo gráfico, una simulación y el contraste entre el modelo gráfico y la situación de aprendizaje.

El entendimiento de la actividad de aprendizaje y la comprensión del mismo durante la simulación del movimiento le permitirán la resolución de cada problema, poniendo en juego el conocimiento matemático estudiado y analizado de la actividad de aprendizaje anterior.

Así, la red de actividades es considerada como la red de actividades de aprendizaje de graficación- modelación que se vinculan desde perspectivas diferentes y ser articuladas de varias maneras para cumplir los objetivos didácticos del programa.

El conocimiento matemático de un estudiante reside en el conocimiento previo, en el que construye de lo que está estudiando en la matemática emitida en la enseñanza.

La hipótesis planteada dentro la didáctica del Cálculo es: “la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva” (Castañeda, 2004, 26). En la formulación de esta hipótesis intervienen cinco elementos pero, en este trabajo, hay un énfasis en el “tratamiento simultáneo de las variaciones de una función”.

La hipótesis de la investigación en una situación de modelación del movimiento hay un tratamiento simultáneo de las variaciones de una función, es decir hay un manejo simultáneo de la posición y de las variaciones en la posición y la velocidad.

La presente investigación se enfoca en la interpretación en una situación de modelación-graficación de movimiento considerándose las formas básicas de graficación, en la que los estudiantes logran una visión cualitativa de un cierto fenómeno de movimiento describiendo la variación de primer y segundo órdenes de la situación.

El uso de los sensores y las calculadoras graficadoras favorece que el alumno a través de su propio movimiento construya una variedad de significados asociados a una serie de funciones: de posición, velocidad y aceleración en los problemas de movimiento.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo observar la relación que guardan la $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ en una actividad de aprendizaje de una situación real de movimiento considerándose las formas básicas de graficación proporcionadas y el significado gráfico que le asigna el estudiante del NMS del IPN a las variaciones de primer y segundo órdenes.

En relación al objetivo se genera la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las características de las gráficas en una situación de modelación del movimiento donde aparecen de forma simultánea la posición y las variaciones de la posición y la velocidad?

El uso de las derivadas en la presente investigación es de forma logarítmica buscando determinar nuevas funciones y su análisis gráfico.

Capítulo III

Marco teórico y metodología

Capítulo III. Marco Teórico y Metodología

El propósito de este trabajo de investigación es la construcción de ideas generadas por una red de actividades de graficación- modelación de modelos gráficos de variaciones de primer y segundo ordenes. Las actividades realizadas con los estudiantes del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional quiere dar cuenta de la naturaleza de los conocimientos que los alumnos ponen en juego cuando se enfrentan a este tipo de actividades que exigen coordinar habilidades en el manejo de las gráficas para la construcción de modelos que permitan describir la variación de la posición, velocidad o aceleración en una situación de movimiento.

En la presente investigación uno de los propósitos es observar como construyen ideas en el conocimiento matemático los estudiantes del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional al trabajar una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos como la graficación con un problema de situación real de movimiento “Acércate más”.
El marco teórico es la socioepistemología y la principal referencia es la tesis de Torres (2004)

La socioepistemología es una aproximación teórica que incorpora de forma sistémica cuatro componentes: la cognitiva, la epistemología, la didáctica y la social para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

La cognitiva tiene que ver con los procesos mentales, las representaciones y procedimientos que utiliza el estudiante al apropiarse del conocimiento de las herramientas tecnológicas para dar cuenta de su aprendizaje en las diferentes representaciones como son la verbal, tabular, algebraica, gráfica y la simulación. En este sentido se pretende dar evidencias de las características de las gráficas en una situación de modelación del movimiento donde aparecen de forma simultánea la posición y las variaciones de la posición y la velocidad antes y después de usar la tecnología.

La epistemología es la que tiene que ver con el contenido matemático de enseñanza desde la perspectiva de su origen y funcionamiento; las distintas concepciones que utilizan para graficar.

La didáctica en relación al profesor especialmente en la determinación de procedimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

La social, la modelación –graficación es una actividad humana relacionada con la práctica social en la que se construyen significados matemáticos a partir de significados propios, de contexto, de historia y epistemológicos. En la investigación se analiza una actividad de aprendizaje considerándose las formas básicas de graficación en el contexto de posición, velocidad y aceleración.

La aproximación socioepistemológica asume en las prácticas sociales las acciones de un grupo social ubicado en los contextos históricos y actuales de acuerdo a las ideologías predominantes de cada momento en la que utilizan como herramienta para construir conocimiento. Del concepto a la práctica (Cantoral y Farfán, 2008). En la perspectiva epistemológica de la Matemática Educativa no solo se ven los conceptos y sus diferentes estructuraciones de forma aislada si no junto a prácticas que permiten favorecer o producir las necesidades de tales conceptos. La resignificación es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional.

III.1 Las tecnologías de la información y comunicación para la enseñanza de las matemáticas

Actualmente en el ámbito escolar el uso de las TIC tienen una vital importancia en la enseñanza – aprendizaje. El uso de la tecnología utilizado para las actividades

de situación de movimiento se requiere de los dispositivos transductores los cuales registran los datos que las calculadoras con poder de graficación los convierten en tablas y gráficas.
Las herramientas son medios que llegan a ser parte integral de nuestros recursos intelectuales y expresivos.
Frente a la calculadora, como dice Moreno Armella, “estamos ante dos posibilidades, de entenderla como herramienta de amplificación o de entenderla como herramienta de reorganización cognitiva”.

Moreno explica las diferencias entre estas dos perspectivas mediante metáforas que asocia a cada una:
Las herramientas de amplificación nos hacen pensar en una lupa. La lupa nos permite ver amplificado lo que de cualquier manera se puede ver a simple vista. No cambia la estructura del objeto.

Las herramientas de reorganización nos hacen pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que solo se puede ver gracias a la herramienta que representa el microscopio. Accedemos, así, a un nivel de realidad nuevo y con ello se puede acceder a un conocimiento nuevo.

Por ejemplo cuando un estudiante se auxilia de una calculadora para realizar ciertos cálculos, esa calculadora se puede interpretar como un auxiliar de su cognición. En este caso la calculadora es una herramienta, pues su uso complementa el pensamiento del estudiante.

Actualmente las calculadoras algebraicas cuentan con sistemas de representación numérico y gráfico, y un sistema de manipulación algebraico. Las calculadoras como herramientas de reorganización cognitiva tienen una característica que distingue a su sistema de representación de los sistemas escritos: pueden procesar las representaciones.

El uso de tecnología como los dispositivos transductores los alumnos realizan un movimiento y simultáneamente tienen un registro gráfico de tal manera que al cambiar las características de su movimiento pueden identificar los cambios que se producen en la gráfica. De esta forma se analiza un fenómeno y al mismo tiempo su representación.

El Calculador Based Ranger es un aparato utilizado para estudiar los objetos en movimiento: a través de la emisión de ondas, el CBR recoge datos de su distancia al objeto en cuestión. Al conectarse a una calculadora con poder de graficación es posible obtener graficas distancia-tiempo, velocidad-tiempo o aceleración-tiempo.

El uso de la herramienta tecnológica (Suárez, 2006) hace explícito el manejo de una sintaxis especial como las representaciones gráficas que aparecen en los graficadores mediante un cálculo algebraico.

El modelo de un fenómeno es una herramienta que nos permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno. En la modelación se presentan tres fases: formación de modelos, tratamientos dentro de los modelos y elaboración de esquemas (Arrieta, 2003)

La noción de la derivada

En la didáctica del Cálculo "la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva" (Castañeda, 2004, 26), intervienen cinco elementos pero, en particular en este trabajo, hay un énfasis en el "tratamiento simultáneo de las variaciones de una función", en términos de una situación de movimiento, las variaciones en la posición, la velocidad y la aceleración.

Los cinco elementos de la noción de la derivada son: a) Relativo a la multiplicidad de representaciones; b) Relativo al tratamiento simultáneo de sus variaciones; c)

Relativo a sus regularidades; d) Relativo al problema de la dimensionalidad y e) Relativo a la aceptación de la metafísica de la diferencial. En la presente investigación hacemos un mayor énfasis en considerar a los tres primeros elementos de la noción de la derivada por la secuencia de la red de actividades graficación- modelación.

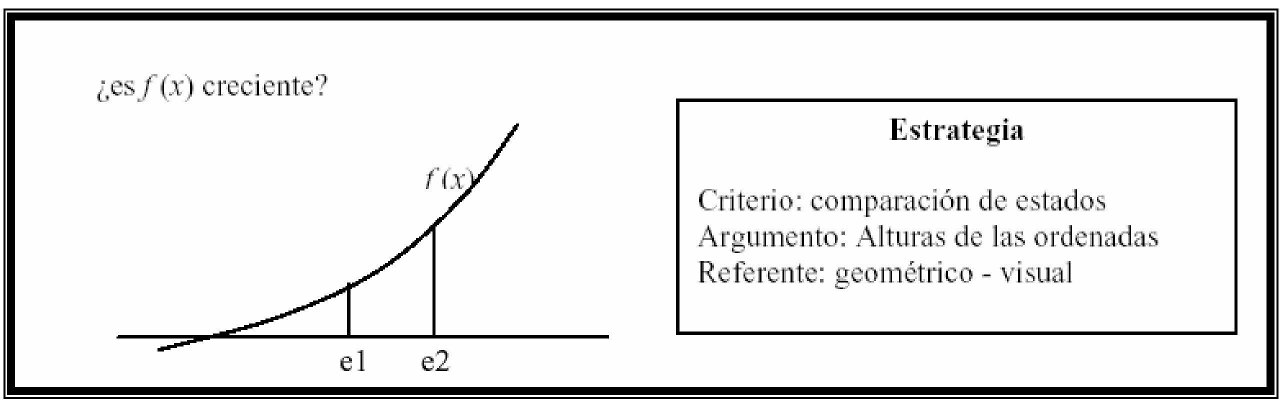
Al tomar como referencia algunos puntos señalados en Castañeda (2000) se observa la necesidad de diseñar situaciones de aprendizaje con uno o más de estos puntos.

III.2 Relativo a la multiplicidad de representaciones

La derivada es expresada en forma geométrica, algebraica y numérica.

Elemento organizador: La transferencia entre cada representación.

a) Geométrico con apoyo visual

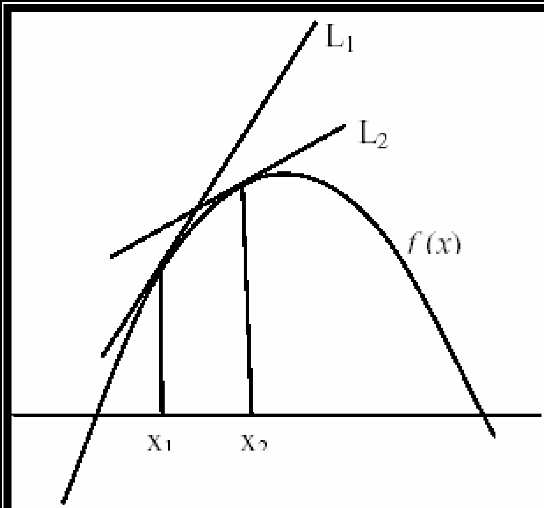


Cuadro 3.1 Geométrico – visual. Tomado de Castañeda (2004)

En el ejercicio visual se distinguen dos puntos sobre el eje x, en cada punto una ordenada y finalmente se compara su magnitud (Apolo, 2004).

b) Geométrico y analítico

¿f’ (x) es creciente?



Estrategia

Criterio: comparación grados de inclinación
Argumento: Inclinación de las rectas tangentes
Referente: geométrico - analítico

Cuadro 3.2 Geométrico – analítico. Tomado de Castañeda (2004)

Las construcciones geométricas se agregan al escenario de estudio nuevos objetos como la tangente, el grado o la inclinación. En el cuadro 3.2 se puede ver que f'(x1)>f'(x2) o bien si x1<x2, con $|x_2 - x_1| < \varepsilon$, entonces f' (x) es decreciente.

c) Algebraico

La expresión algebraica describe relaciones numéricas con literales y constates basadas en los principios o leyes matemáticas. Por ejemplo en Cantoral (1998):

> *… una forma de encontrar la derivada de una función de un punto, consiste en desarrollarse en serie de potencias en torno del punto en cuestión. Veamos mediante un ejemplo cómo es que operan estas ideas. Considere la función dada por la expresión f(x)=x^3, de la cual quiere conocer la derivada en x. Si seguimos la estrategia de Cauchy tendremos:*

$$f'(x) = \lim_{n\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{n\to 0}\frac{x^3 - 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$
$$\lim_{n\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Si se sigue la estrategia de Lagrange tendremos:

$f(x+h)=(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, así que la derivada de f es el coeficiente de h: $3x^2$.

III.3 Relativo al tratamiento simultáneo de sus variaciones

La derivada es una función que expresa la variación de otra función llamada primitiva.
Elemento organizador: Son los puntos críticos, la concavidad y el grado de concavidad.

El concepto de derivada se basa en repeticiones algorítmicas Stewart (1998) nos dice que si *f* es una función diferenciable, su derivada *f'* también es una función, así que *f`* puede tener una derivada por derecho propio. Dicha derivada se representa como (*f'*) = *f ''*. Esta nueva función *f'*, se llama segunda derivada de *f*, por serlo de la derivada de *f*.

III.4 Relativo a sus regularidades

La primera derivada es una nueva función susceptible de ser derivada a través de una regla analítica.

La argumentación sobre lo analítico existe desde la perspectiva del autor un sistema que proporciona un sentido general (Apolo, 2004). En los cuales se puede observar diferentes elementos matemáticos en un sistema en el que la variación es centro del escenario.
Cantoral (2001), describe algunos acercamientos analíticos en relación a la serie de Taylor:

"*El modelo de regularidad binomial, se caracteriza por percibir y utilizar una* *regularidad en los desarrollos binomiales. Centra su atención en los números y las magnitudes variables, aunque de éstas, no precisa su variación sino su semejanza operativa con los números… "*

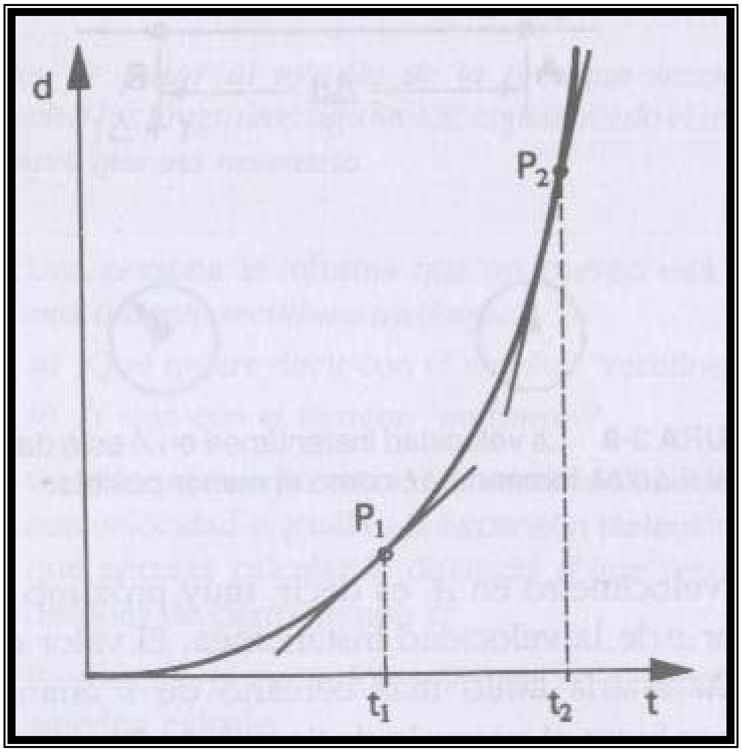
"El modelo de variable- variación, consiste en reconocer y utilizar sistemáticamente, la idea de que la parte contiene la información del todo, es decir, en tanto que se estudia la variación de unas magnitudes variables respecto de otras ya sea físicas o geométricas, se reconoce que la variación instantánea o puntual proporciona la información integral del fenómeno."

La actividad de aprendizaje "Acércate más" de estudio en la presente investigación es en interacción con el análisis y la comprensión de la definición de distancia y velocidad desde el punto de vista de la física.

III.5 La distancia como un fenómeno físico

Cuando un móvil de desplaza con velocidad constante a lo largo de una trayectoria rectilínea se dice que su movimiento es rectilíneo uniforme por lo que su velocidad es constante. En un movimiento de un móvil con velocidad constante la distancia recorrida es directamente proporcional al tiempo ($d = vt$) y su gráfica es una respectiva recta con una pendiente igual al valor de la velocidad v.

La ecuación $d = vt$ se aplica en el caso de que sea o no rectilínea siempre y cuando el valor de la velocidad permanece constante. Si la velocidad del móvil no es constante se dice que es movimiento variado. Un movimiento variado de un móvil la velocidad instantánea esta dada por $v = \Delta d / \Delta t$.



Cuadro 3.3. La inclinación de la tangente proporciona el valor de la velocidad instantánea. Tomado de Máximo y Alvarenga (1998)

Si un móvil se desplaza en cierta trayectoria son consideradas dos sentidos uno positivo (ida del móvil) y el otro negativo (regreso del móvil) al punto de partida.

La aceleración es una variación de la velocidad en un intervalo de tiempo

$$v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta d}{\Delta t}\,.$$

Metodología

La metodología se parte de una red de actividades donde, de acuerdo con la hipótesis: *En una situación de modelación del movimiento hay un tratamiento simultáneo de las variaciones de una función*, se hace un análisis a priori y un análisis a posteriori.

En el análisis a priori se detalla el propósito de cada actividad y se establecen las relaciones que se espera que el estudiante establezca. Un análisis a posteriori nos muestra las evidencias de las relaciones que el estudiante efectivamente logra establecer en las representaciones gráfico al algebraico, del algebraico al gráfico, del gráfico al analítico.

Para dar respuesta a la pregunta planteada en esta investigación se realizaron una serie de actividades en el salón de clases.

De acuerdo a la estructura de la red de actividades de modelación-graficación (véase Cuadro 2.2) fue necesario realizarlo no solo durante las horas de clase sino fuera de la misma (extraclase) por falta de espacio y tiempo, cada actividad de aprendizaje se organizó de la forma expresada en el cuadro 3.4.

Actividad	Clase	Extraclase
Epifanía	➢ Conocimiento del problema (impreso). ➢ Realización de la actividad de aprendizaje y las gráficas de posición y velocidad a lápiz y papel. ➢ Exposición de un equipo con mayor avance de la actividad de aprendizaje.	Terminación del problema a lápiz y papel.
	➢ Uso de tecnología y conocimiento del sensor de movimiento CBR y de la calculadora con poder de graficación.	Continuidad a la solución del problema incorporando el uso de tecnología.
	➢ Exposición. Efectúan un contraste entre el modelo gráfico y la situación.	
Gula Ratonil	➢ Se les proporciona el problema impreso. ➢ Resolución del problema (impreso). ➢ Realización de gráficas a partir de una representación gráfica mediante preguntas. ➢ Transitar de la representación gráfica a la algebraica. ➢ Exposición de un equipo.	Continuidad a la solución del problema.
	➢ Proposición de modelos gráficos. ➢ Simulación con uso de tecnología (sensor de movimiento CBR y calculadora con poder de graficación).	Proposición de modelos gráficos.

	➢ Efectúan un contraste entre el modelo gráfico y la situación.	
Formas Básicas	➢ Se les proporciona la actividad de aprendizaje impreso. ➢ Resolución de la actividad de aprendizaje a lápiz y papel. ➢ Realización de gráficas (variación) a partir de una representación gráfica. ➢ Exposición de un equipo.	Corrección y terminación de la actividad de aprendizaje.
	➢ Proposición de modelos gráficos. ➢ Simulación con uso de tecnología (sensor de movimiento CBR y calculadora con poder de graficación).	
	➢ Efectúan un contraste entre el modelo gráfico y la situación. Exposición de dos equipos.	
Acércate Más	➢ Resolución de la actividad de aprendizaje (impreso). ➢ Realización de gráficas a partir de una representación gráfica mediante preguntas. ➢ Exposición de dos equipos.	Terminación de la actividad de aprendizaje.
	➢ Proposición de modelos gráficos. ➢ Simulación con uso de tecnología (sensor de movimiento CBR y calculadora con poder de graficación). Los estudiantes diseñan la forma en que se van a mover ante el sensor. ➢ Los alumnos deciden el tiempo y la distancia para lograr la gráfica de su propuesta.	
	➢ Efectúan un contraste entre el modelo gráfico y la situación. ➢ Exposición de dos equipos. ➢ Los estudiantes comparten sus conocimientos matemáticos.	

Cuadro 3.4. Desarrollo de la red de actividades de graficación-modelación.

Cada actividad de aprendizaje que conforma esa red de actividades de graficación-modelación se consideran dos secuencias: secuencia I sin uso de tecnología y secuencia II con uso de tecnología, dividida en tres etapas realizadas en equipo de 3 a 5 integrantes en clase y en extractase para la compresión, realización y/o terminación de la actividad.

Primera etapa se le proporciona la actividad de aprendizaje impreso a cada equipo. Los estudiantes lo analizan y realizan la actividad de aprendizaje a lápiz y papel. Se eligen de uno a dos equipos para la exposición del problema de mayor avance en la actividad de aprendizaje.

Segunda etapa. Por el tiempo de 60 minutos se les deja como actividad extraclase para completarla considerándose lo discutido en la exposición del equipo o los equipos que expusieron.

Tercera etapa: El uso de la tecnología como la calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento CBR. Los estudiantes realizan una simulación. Simulan el movimiento frente al sensor para obtener la gráfica estipulada en cada actividad de aprendizaje. El estudiante analiza lo realizado a lápiz y papel al contrastarse con el uso de tecnología.

Dinámica de trabajo

La dinámica que se llevó acabo en la red de actividades graficación- modelación fueron considerados la descripción de actividades de graficación – modelación descritos en el cuadro 2.1 y el desarrollo de la red de actividades de graficación-modelación explicada en el cuadro 3.4 y la descripción de actividades planteadas por Suárez (2000) y Torres (2004).

En la descripción de las actividades de graficación - modelación nos describe tres actividades para analizar una situación de movimiento:

- ✓ Graficación.

El estudiante lee y resuelve el problema. Los estudiantes proponen un modelo gráfico que describa los cambios de posición de un una persona que realiza el movimiento descrito. En el momento de realizar esta tarea se toman decisiones:

las variables que intervienen, la escala de la gráfica, las distancias recorridas en distintos instantes.

- ✓ Discusión grupal

Cuando la mayoría de los equipos terminaron de hacer la solución de la situación de movimiento se les pidió a dos equipos a que pasaran al frente a explicar a sus demás compañeros sus soluciones, esta actividad resulta muy provechosa ya que los estudiantes comparten todos los conocimientos de matemáticas que pusieron en juego.

- ✓ Secuencia II. La simulación.

Se pide al estudiante simular el movimiento frente al sensor para obtener la gráfica estipulada. El movimiento se adapta al alcance del sensor por lo que tienen que hacer escalas pues ya saben que el sensor toma datos a partir de medio metro hasta 6 metros. A partir de múltiples realizaciones se establecen relaciones entre las características del movimiento y los diversos comportamientos gráficos obtenidos en la calculadora. Después pasa a realizar la simulación y modelación con la tecnología.

- ✓ Discusión grupal

Para finalizar se realiza nuevamente una discusión entre todos los equipos cuyo propósito es la de efectuar un contraste entre el modelo gráfico y la situación: se pide ajustar el modelo gráfico original y después de usar la tecnología dando cuenta de la situación planteada.

Se esperan de los estudiantes múltiples realizaciones en la simulación del movimiento en las que tomen decisiones sobre las características que se varían en la situación para la obtención de distintas gráficas.

Recopilación de datos: descripción de los registros.

Para realizar el análisis del trabajo realizado por los estudiantes se cuenta con los reportes descritos por los integrantes de cada equipo.

Los **reportes** hechos por los miembros del equipo, en los cuales se decide el trabajo por ellos, así como las decisiones planteadas para dar respuesta a la solución de la situación de aprendizaje.

Toma de datos

A partir de la pregunta de investigación formulada en este trabajo, se optó por la realización de la red de actividades graficación – simulación para el entendimiento matemático de la situación de aprendizaje “Acércate más”.

Capítulo IV

Actividad de aprendizaje de Modelación-Graficación

Capítulo I. Actividad de Aprendizaje de Modelación-Graficación

En este capítulo se presenta la Actividad de Aprendizaje que sirve para analizar el trabajo de los estudiantes. Dicho análisis, presentado en el capítulo siguiente aporta las evidencias para responder nuestra pregunta de investigación.

IV.1 Secuencia de actividades graficación - modelación

El término 'red de experiencias de aprendizaje' ha sido usado en los Paquetes Didácticos de Matemáticas del IPN (PDM)[1] para denominar a un conjunto de actividades de aprendizaje que incluyen problemas que se distinguen a su vez en problemas, problemas con guía y proyectos, lecturas, ejercicios, tareas y autoevaluaciones (IPN, 2004, 9). Para hacer la planeación del conjunto de actividades de aprendizaje para cumplir los objetivos de algunas de las unidades del programa de estudio se proponen 'Secuencias de Actividades de Aprendizaje' (IPN, 2004, 11). (SAA) Mi trabajo de tesis contribuye en la propuesta de una SAA para desarrollar la Modelación-Graficación. La Actividad de Aprendizaje central es:

- AA 'Acércate más', actividad de aprendizaje que consiste en partir de la gráfica de la posición de una persona para problematizar la presencia simultánea de tres órdenes de variación a partir de preguntas sobre la posición (la función, f(x)), la velocidad (la primera derivada, f'(x)) y la aceleración (la segunda derivada f''(x))).

Además, se incluyen otras tres AA que describimos a continuación.

- AA 'Epifanía', actividad de aprendizaje que consiste en problematizar la variación a partir de las gráficas que los estudiantes proponen a una situación de movimiento de

[1] Los PDM forman parte de un proyecto coordinado por el Centro de Tecnología Educativa del Instituto Politécnico Nacional (2001-2007) y tiene como propósito dotar al profesor y al estudiante de materiales de calidad, elaborados usando el conocimiento generado por las investigaciones y aplicado de manera sistemática, que les permitan trabajar conjuntamente para lograr los objetivos institucionales del área de matemáticas. (Véase Suárez et al 2005).

una persona que se aleja de un punto de partida hasta quinientos metros y que en el trayecto se detiene cuatro minutos. (Esta AA ha sido analizada y reportada por Torres (2004)). Esta AA sirve como antecedente a la investigación por su capacidad para desarrollar la habilidad de análisis gráfico en los estudiantes.

-AA ‘La gula ratonil’, actividad de aprendizaje que consiste en partir de la gráfica de la velocidad se pide a los estudiantes que respondan preguntas sobre la posición y la velocidad.

- AA ‘Formas básicas’, actividad de aprendizaje que consiste en lograr una relación entre las características gráficas de seis formas gráficas, tres trazos crecientes (lineal, cóncavo hacia abajo y cóncavo hacia arriba, respectivamente) y tres trazos decrecientes (lineal, cóncavo hacia abajo y cóncavo hacia arriba, respectivamente).

La red de actividades de graficación-modelación fue considerada por el tipo de actividades de aprendizaje que permite al estudiante tener una mejor compresión en las matemáticas tomando en cuenta su: conocimiento previo, la incorporación de Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), e introduciendo modalidades de trabajo innovadoras como el trabajo en equipos y la discusión grupal.

A continuación presentamos la secuencia de AA de red de actividades de graficación-modelación y el desarrollo de la solución de la AA de interés para nuestra investigación: AA ‘Acércate más’.

Actividad de Aprendizaje 1

Epifanía

En esta actividad de aprendizaje se pide a los estudiantes información sobre: a) su graficación e interpretación de la misma, considerando los cambios de posición de ida y vuelta con respecto al tiempo. Se realizan los modelos algebraicos lineales y cuadráticos a través del uso del lenguaje simbólico y gráfico.

b) Mediante el uso de calculadoras con poder de graficación y sensores de movimiento el estudiante realiza una simulación de movimiento. (Véase una revisión amplia en Torres, 2004).

Epifanía

"Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía".

La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos.

Construye una gráfica que describa los cambios de posición de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.

Todos hemos escuchado o hecho descripciones de objetos en movimiento, que incluyan expresiones como 'detenido', 'rápido', 'lento', 'más rápido', 'disminuyó su velocidad', 'más alejado', 'aceleró más', y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria.

Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario.

Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea negativa, positiva o nula, y describe las características de la gráfica, al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características correspondientes de la gráfica.

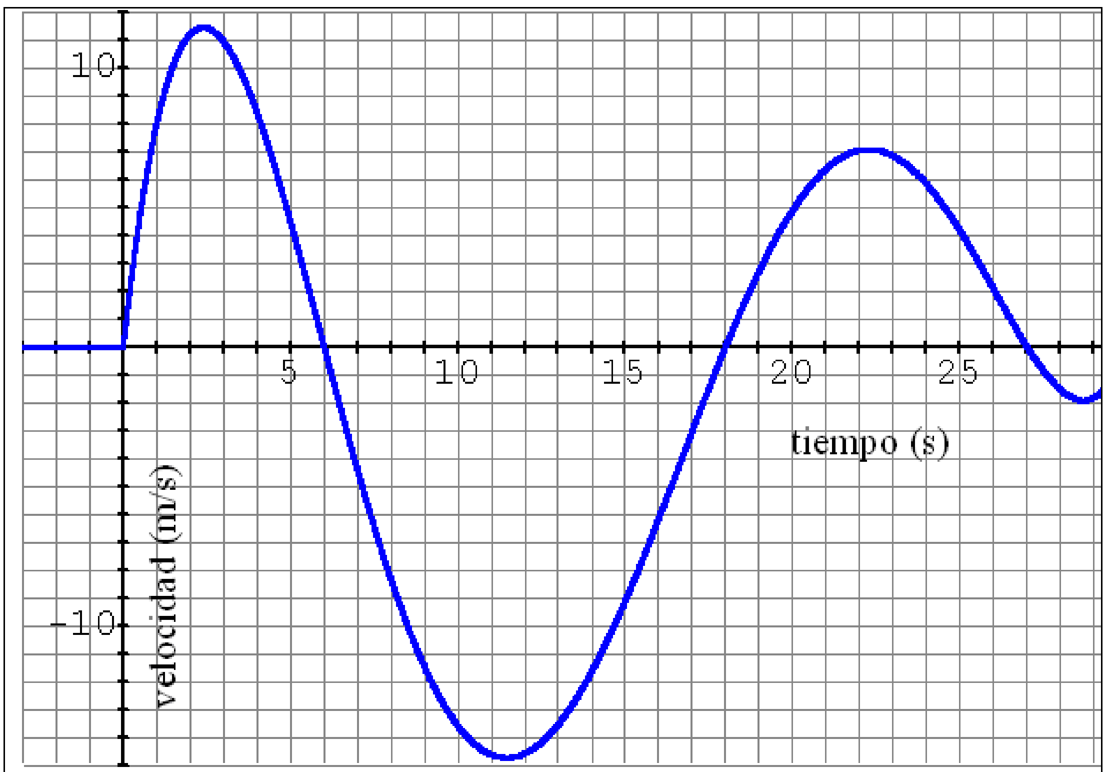
Actividad de Aprendizaje 2

La Gula Ratonil

A partir de una gráfica de velocidad *versus* tiempo (función f'(x)) se pide a los estudiantes las funciones de la posición (f(x)), la velocidad (f'(x)) y la aceleración(f''(x)) del ratón en el intervalo que se representa en la gráfica. El estudiante realiza un bosquejo del gráfico de la función y su derivada sucesiva, y su simulación de movimiento con dispositivos transductores.

La gula ratonil

Un ratón avanza y retrocede en un túnel, atraído por trocitos de queso Oaxaca que se meten y sacan alternadamente desde los extremos (derecho e izquierdo del estrecho túnel). La gráfica de la velocidad del ratón aparece en la figura, la velocidad es positiva cuando se mueve hacia el extremo derecho del túnel y negativa hacia el izquierdo.



Gráfica 1. Velocidad del ratón, en $\frac{m}{s}$*, versus tiempo, en segundos.*

El ratón empieza en el centro del túnel:

a) Usa la información que proporciona la gráfica para calcular los tiempos en los que

(1) El ratón cambia de sentido.

(2) El ratón se mueve más rápidamente a la derecha (a la izquierda)

(3) El ratón se encuentra más alejado, a la derecha, del centro (más alejado a la izquierda).

(4) La rapidez del ratón es decreciente.

(5) El ratón está en el centro del túnel.

b) Haz una tabla con la descripción de la posición, la velocidad y la aceleración del ratón en el intervalo que se representa en la gráfica.

c) Encuentra las funciones de la posición, la velocidad y la aceleración del ratón en el intervalo que se representa en la gráfica

d) Formula dos preguntas sobre el movimiento del ratón y respóndelas.

e) Usa un dispositivo transductor para simular el movimiento del ratón y verifica, con las gráficas obtenidas de la simulación, la descripción que hiciste en el inciso b.

f) Aplica el modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado).

Estas dos actividades de aprendizaje son las primeras en la secuencia de "Red de actividades graficación - modelación" en la que le permite al estudiante conocer este tipo de problemas, realizar e interpretar los gráficos, comprender el conocimiento previo y el que se va adquiriendo a través de lápiz y papel y con el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.

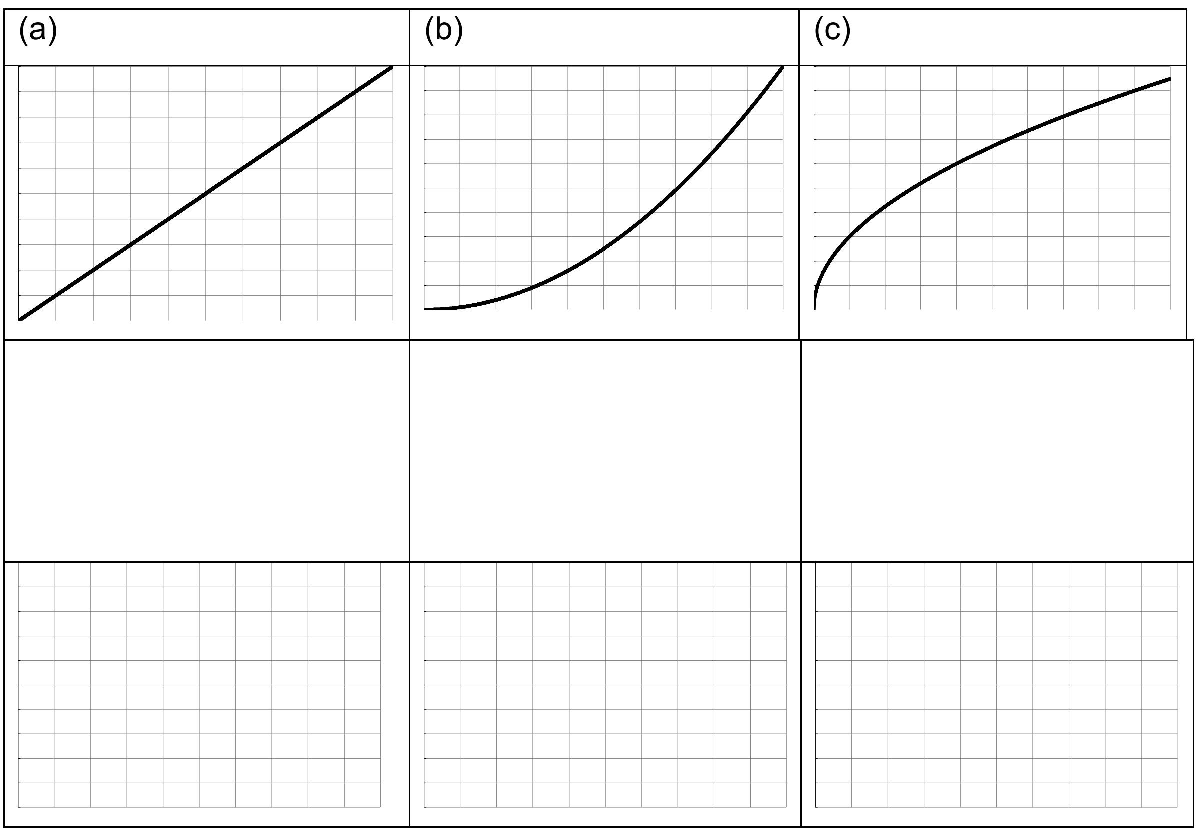
Actividad de Aprendizaje 3

Formas Básicas

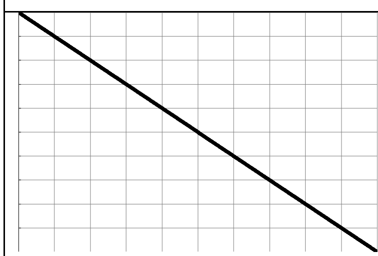
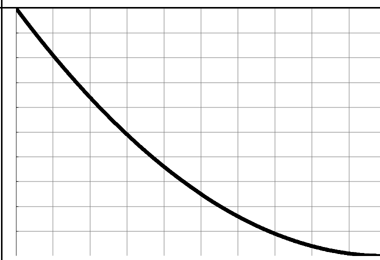
A partir del gráfico de una función f(x) se pide a los estudiantes la gráfica de la velocidad (f'(x)) de un móvil.

Formas básicas

Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.



Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.

(d)	(e)	(f)
		

IV.2 Actividad de Aprendizaje

Actividad de Aprendizaje 4.

La situación de aprendizaje que servirá para probar la hipótesis de investigación consiste en la que una persona recorre una cierta distancia en motocicleta mediante una representación gráfica.

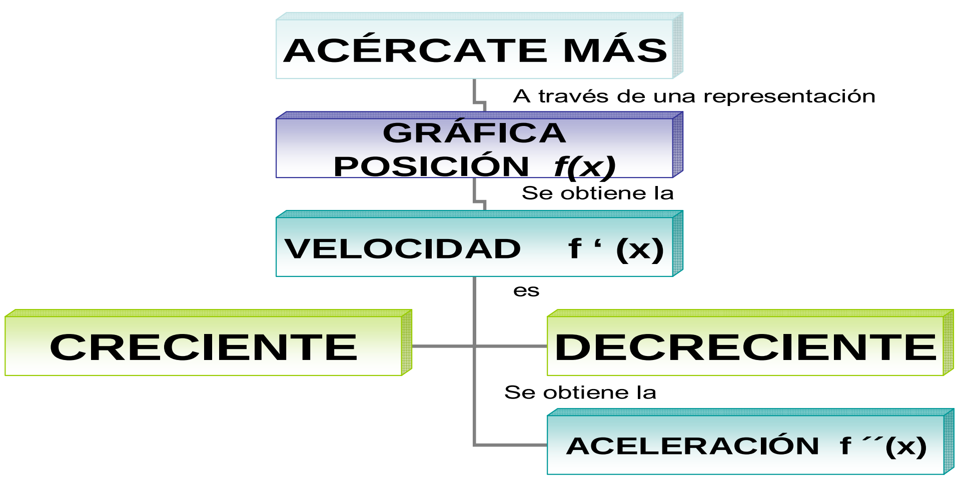
Acércate más

A partir de un gráfico de una función f(x) se brinda información mediante una serie de preguntas y se pide a los estudiantes información sobre f(x), f'(x) y f''(x).

Para analizar el desempeño de los estudiantes se ha elegido la actividad de Aprendizaje 'Acércate más' a través de una red de aprendizaje graficación- modelación considerándose las formas básicas de graficación.

La AA 'Formas básicas' de graficación es una actividad en la que nos presenta la posición de un móvil por medio de su representación gráfica y ciertas características globales y locales de una función como son: las variaciones, el crecimiento, la continuidad la concavidad, los máximos y los mínimos entre otros. (Ver anexo 1).

'Acércate mas' es una Actividad de Aprendizaje en la que una persona recorre una cierta distancia en motocicleta mediante una representación gráfica.



Acércate más

Una persona sale de su casa y comienza un viaje en motocicleta. Se desplaza en línea recta y su casa es un punto sobre esta línea. Su posición se describe en la Gráfica 1.

a) ¿En qué instante está más lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra en este momento?

b) ¿En qué intervalos su velocidad es creciente? ¿En cuáles es decreciente?

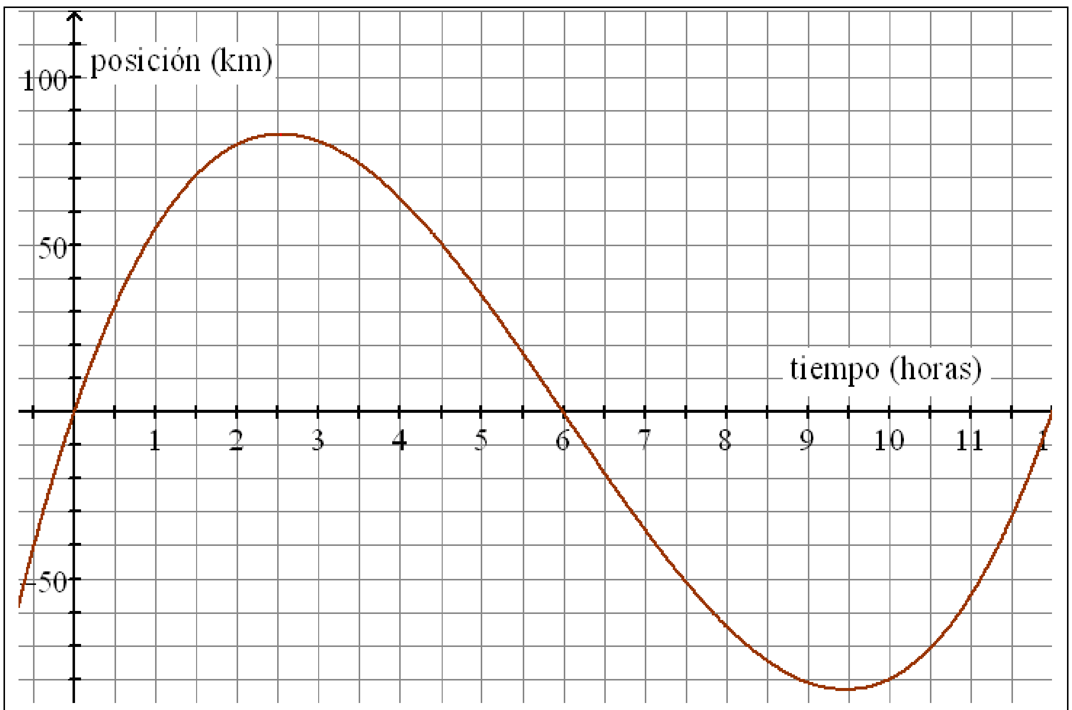
c) ¿Cuándo su velocidad es máxima? ¿A qué distancia de su casa se encuentra en el instante que la alcanza?

d) Traza la gráfica de su velocidad.

e) Traza la gráfica de su aceleración.

f) Formula dos preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.

g) Escribe un párrafo que describa los movimientos de la persona que se representan en la gráfica.



Gráfica 1

El propósito de la Actividad de Aprendizaje ‘Acércate más’ es desde una perspectiva de contenido programático de cálculo diferencial y cálculo integral y desde sus representaciones que se articulan como los son gráfica-aritmética, gráfica –algebraica, gráfica-tabular y/o algebraica-tabular, los aprendizajes que se logran en la resolución del problema y los objetivos institucionales.

Caracterización del problema

Este problema es una buena situación de aprendizaje ya que tiene el potencial para lograr en el estudiante aprendizajes significativos. Dicha caracterización es parte de los trabajos realizados por la Academia Institucional de Matemáticas (AIM) (AIM-NMS-IPN, 2002).

De la caracterización del problema planteado destaco lo siguiente:

- Es una experiencia de aprendizaje de resolución de problemas.
- La modalidad de trabajo es por equipos de 3 a 5 estudiantes.
- El sitio de trabajo es el salón de clases.
- Las herramientas son calculadora con poder de graficación y sensor de movimiento (CBR).
- El tiempo estimado para su realización es de tres horas.
- Los productos de la actividad son los reportes de los estudiantes.

La situación de aprendizaje cumple con algunas referencias curriculares, en relación a los contenidos declarativos, contenidos procedimentales y contenidos actitudinales.

Contenidos declarativos

Son aquellos *saberes* referidos a conceptos y datos. Es *saber acerca* de graficación, funciones lineales, cuadráticas y cúbicas; interpretación y relación de variables como el tiempo y la distancia. La velocidad y la aceleración, y su utilización de escalas para la representación gráfica.

Contenidos procedimentales

Es el *saber* instrumental que comprende las habilidades para resolver situaciones conflictivas, uso eficaz del lenguaje y formas de expresión matemática, estrategias que le permita al estudiante un buen desempeño matemático en el análisis y resolución de problemas reales, técnicas o métodos algorítmicos asociados a los contenidos conceptuales del curso.

Contenidos actitudinales

Implica los saberes y comportamientos afectivos y comportamiento afectivo-social. Actitud cognoscitiva en matemáticas para resolver problemas, comunicar ideas y razonar. Actitud del comportamiento en saber valorar las matemáticas en nuestra cultura, como herramienta y como lenguaje.

En la situación de aprendizaje es considerada el análisis a priori la solución de referencia de las actividades de aprendizaje y los registros de los estudiantes.

Análisis a priori

En el análisis a priori se considera la solución de referencia de las actividades. La solución de referencia es un documento que contiene una solución que se elabora considerando los conocimientos que se ponen en juego durante la resolución del problema o la realización de la actividad, de acuerdo con los Paquetes Didácticos de Matemáticas (IPN, 2006). Se consideran los diversos registros por los que el estudiante puede transitar (verbal, numérico, algebraico).

Relaciones que se espera que los estudiantes realicen.

La siguiente tabla **contiene** descripciones para la solución de referencia, donde se espera que los estudiantes establezcan alguna relación.

Relaciones / Problema	Formas básicas	Acércate más
Posición – velocidad	• Establecer ejes de coordenadas. • Determinar puntos en el eje cartesiano. • Transformación de función de posición a la de velocidad. • Función derivada y primitiva. • Variación de la variable. • Expresión algebraica a partir de la gráfica. • Valor numérico considerando la velocidad.	• Determinar puntos en el eje cartesiano. • Función de posición. • Identificar el tipo de gráfica. • Comportamiento de una función. • Transformación de funciones. • Función derivada y primitiva. • Forma de la gráfica. • Relaciones de la función ($f'(x)$) con la gráfica a partir de la gráfica o de la función algebraica $\left(f(x)\right)$ • Comportamiento de las gráficas de la posición y velocidad en relación con la simulación. • Relacionar las gráficas con la situación.
Velocidad – aceleración		• Determinar puntos en el eje cartesiano. • Transformación de funciones. • Comportamiento de una función. • Función derivada y primitiva. • Relacionar las gráficas de la posición y de la velocidad. • Identificar el tipo de movimiento. • Gráfica a partir de la simulación con tecnología.
Posición – aceleración		• Comportamiento de una función. • Función derivada y primitiva. • Variación de la variable. • Comportamiento de la gráfica de posición, velocidad y aceleración. • Relacionar las gráficas con la situación. • Gráfica a partir de la simulación con tecnología.

Cuadro 4.1.Estrategias a seguir para la resolución del problema.

IV.3 Análisis de la Actividad de Aprendizaje ‘Acércate más’

La posición del móvil se describe mediante una representación gráfica analizada para la obtención de las representaciones algebraicas y los cálculos de los valores para responder las preguntas.

Para encontrar la fórmula de la función de posición leemos los ceros de la gráfica de posición:

$x_1=0$; $x_2=6$ y $x_3=12$

Tiene tres raíces por lo que

$$f(x) = y = k(x-0)(x-6)(x-12)$$

Para cada raíz un factor de la forma ($x-x_i$) y k es una constante. Así habrá x_1, x_2,… tantos como raíces haya, en este caso, tres.

Para calcular k, se escoge un punto en la gráfica que coincida con una intersección de la cuadrícula, por ejemplo x=2, y=80.

$$f(x) = y = k(x-0)(x-6)(x-12)$$

Se sustituye $x = 2$ y $y = 80$

$$y = k(2-0)(2-6)(2-12)$$
$$80 = k(2-0)(2-6)(2-12)$$
$$80 = k80$$
$$k = 1$$

Otro punto en la gráfica que coincide con una intersección de la cuadrícula es: x=10, y=-80.

$$f(x) = y = k(x-0)(x-6)(x-12)$$

Se sustituye $x = 10$ y $y = -80$

$$-80 = k(10-0)(10-6)(10-12)$$
$$-80 = k(-80)$$
$$k = 1$$

Se obtiene con cualquiera de los dos puntos el valor de la constante $(k = 1)$ y se sustituyen el punto de coordenada (2,80) y/o $(10,-80))$.

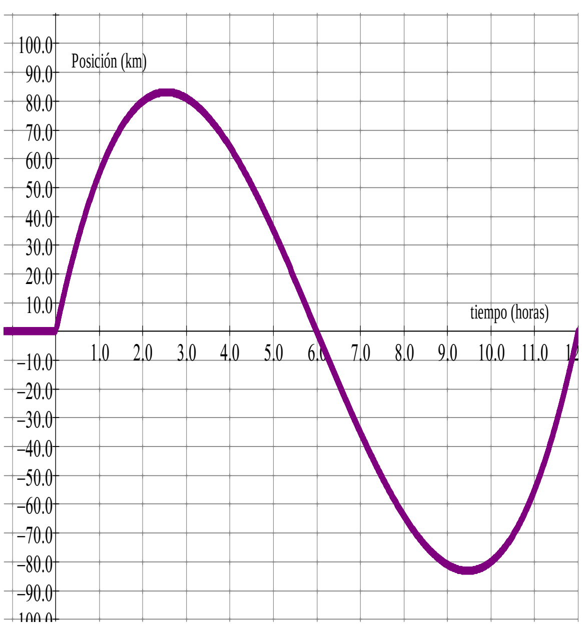
$$y = 1(x-0)(x-6)(x-12)$$
$$y = x^3 - 18x^2 + 72x$$

Al obtener la función $f(x) = y = x^3 - 18x^2 + 72x$ de la gráfica se puede abordar las preguntas de la actividad de aprendizaje.

a) ¿En qué instante está más lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra en este momento?

En la representación gráfica y en la representación tabular (Cuadro 4.2) se observa en que instante esta más lejos de su casa. La distancia máxima ocurre en dos instantes (2.53590000, 83.13843876), cuando la distancia es máxima en un sentido y (9.4640800000, - 83.13843875) cuando la distancia es máxima en el otro sentido. En esta respuesta es considerada hasta la séptima cifra después del punto para ver su máximo relativo y su mínimo relativo de la grafica posición *versus* tiempo.

La distancia en la que se encuentra en este momento es a 83.13843876 en un sentido y a -83.13843876 en el otro sentido.



Tiempo (h)	Posición (km)
2.53570000	83.13843835
2.53575000	83.13843853
2.53580000	83.13843866
2.53585000	83.13843874
2.53590000	**83.13843876**
2.53595000	83.13843874
2.53600000	83.13843866

Tiempo (h)	Posición (km)
9.4638400000	-83.13843805
9.4639000000	-83.13843834
9.4639600000	-83.13843855
9.4640200000	-83.13843869
9.4640800000	**-83.13843875**
9.4641400000	-83.13843874
9.4642000000	-83.13843866
9.4642600000	-83.13843850

Cuadro 4.2. Valores de posición del móvil.

b) ¿En qué intervalos su velocidad es creciente? ¿En cuáles es decreciente?

Ahora para saber en que intervalo es creciente y decreciente se considera la función de posición y se obtiene su primer derivada para su representación gráfica (ver cuadro 4.3).

A partir de la función de posición $y = x^3 - 18x^2 + 72x$ se obtiene su primera derivada $y' = 3x^2 - 36x + 72$. El punto crítico es 6. El intervalo de su velocidad es:

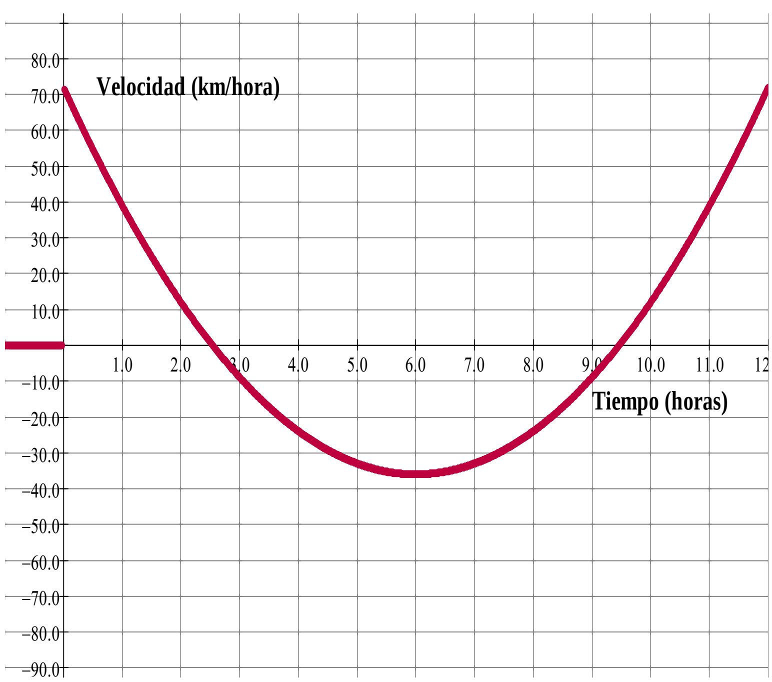
Creciente [6, ∞)

Decreciente (-∞, 6]

El tiempo es considerado por los datos de registro desde que sale de su casa con un tiempo igual a cero y comienza su viaje en motocicleta hasta un tiempo de 12 horas:

Creciente [6, 12]

Decreciente [0, 6]



Tiempo (h)	Velocidad (f'(x)) (km/h)
0.0	**72**
1.0	39
2.0	12
3.0	-9
4.0	-24
5.0	-33
6.0	**-36**
7.0	-33
8.0	-24
9.0	-9
10.0	12
11.0	39
12.0	**72**

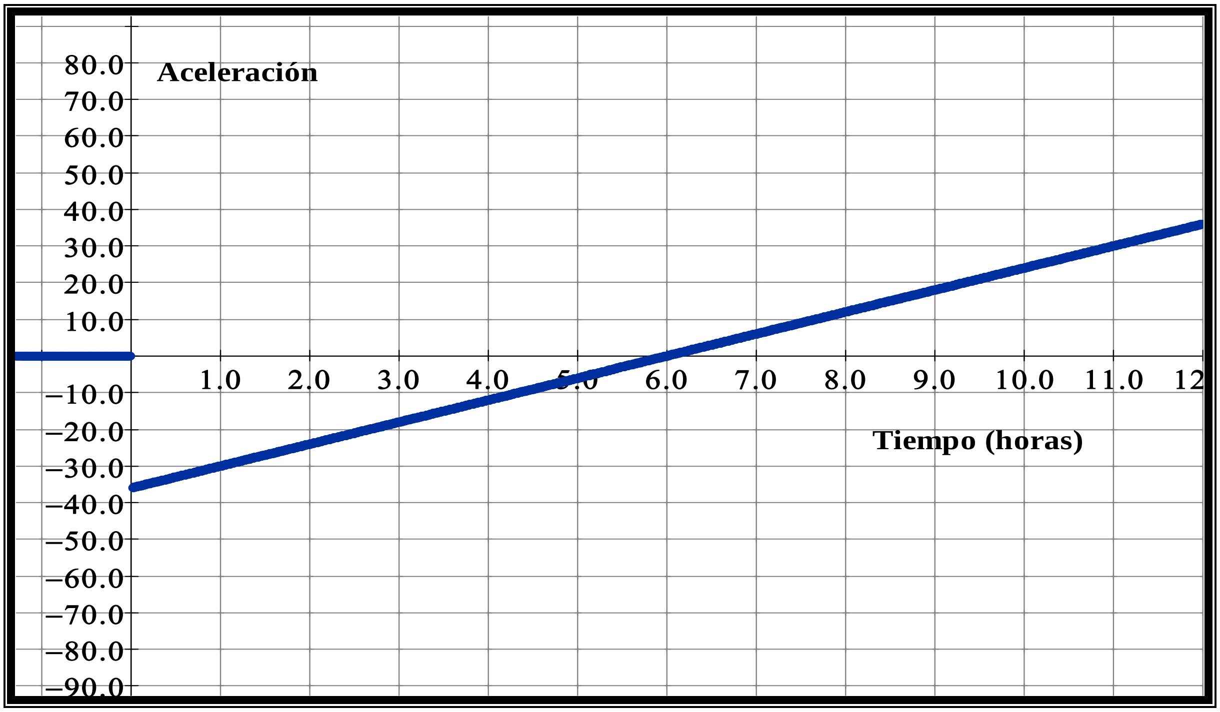
$$f'(x) = y' = 3x^2 - 36x + 72$$

Cuadro 4.3. Gráfica de la velocidad.

b) **Traza la gráfica de su aceleración**.

La gráfica de su aceleración es la segunda derivada de f(x).

Aceleración $y'' = 6x - 36$



Cuadro 4.5. Gráfica de la aceleración.

c) Formula dos preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.

¿Cómo calcularías la concavidad de una función? y ¿Cómo lo representarías?

A. Se calcularía la primera y segunda derivada de la función.

$$y = x^3 - 18x^2 + 72x$$

$$y' = 3x^2 - 36x + 72$$

$$y'' = 6x - 36$$

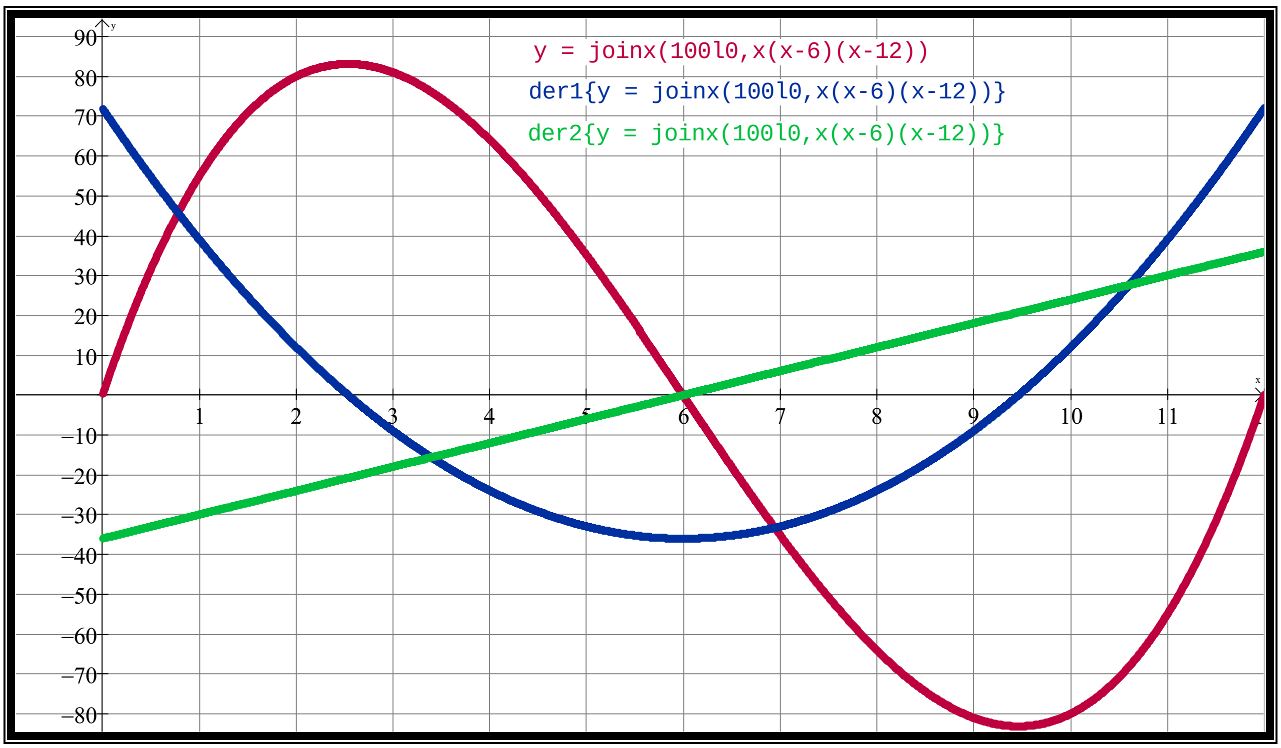
B. La segunda derivada se iguala a cero y se obtienen las raíces (puntos críticos).

$$0 = 6x - 36$$
$$6x = 36$$
$$x = 6$$

C. Si $f''(x) > 0$ la curva es cóncava hacia arriba.

D. Si $f''(x) < 0$ la curva es cóncava hacia abajo.

E. En el cuadro 4.6 en una misma gràfica estan la funciòn de posición, de velocidad y de aceleración destacando los intervalos de crecimiento, decreciemeinto y puntos crìtico.



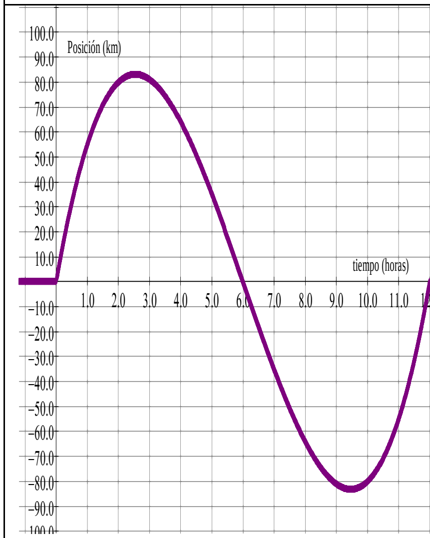
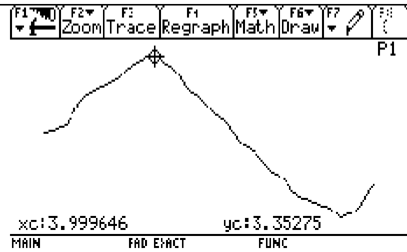
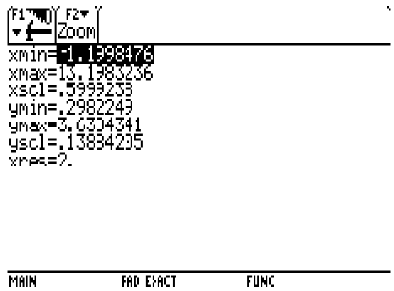
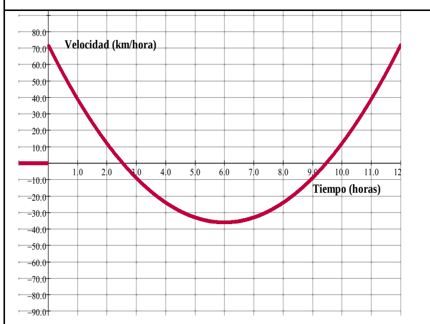
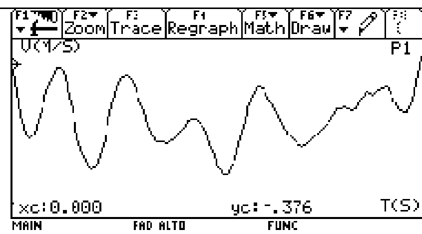
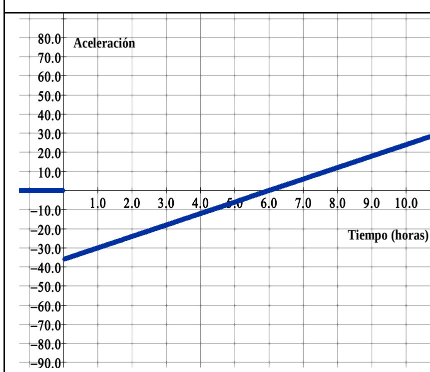
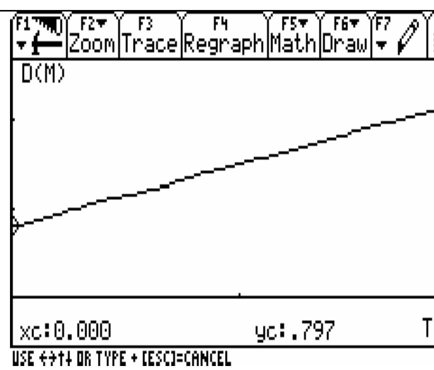
$f(x)$	$-\infty < x < -2.5$ *creciente*	*Valores críticos* *X=2,5 x=9.5*	$-2.5 < x < 9.5$ *decreciente*	$9.5 < x < \infty$ *creciente*
$f'(x)$	$+\infty < x < -36$ *decreciente*	*X=-36*	$-36 < x < \infty$ *creciente*	
	$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$	
$f''(x)$	$-\infty < x < \infty$ *creciente*			

Cuadro 4.6 Grafica de posición-velocidad-aceleración

g) Escribe un párrafo que describa los movimientos de la persona que se representan en la gráfica.

La persona sale de su casa (tiempo=0) y comienza un viaje en motocicleta y se aleja en un tiempo $6-\sqrt{12}$, su desplazamiento es en línea recta, se regresa a cierta distancia pasando por su casa. Recorriendo cierta distancia en sentido opuesto.

En el cuadro 4.7 se relaciona la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más' que a partir de la gráfica de la posición de la persona en una motocicleta problematiza la presencia simultánea de tres órdenes de variación en el que se consideran las formas básicas de graficación ver (Ver anexo 1).

Gráfica	Modelación	Relación con las formas Básicas de Graficación
		En el intervalo [0, 6] - Es cóncavo hacia abajo. - Máximo absoluto $f(2.5359)$ En la representación gráfica desde el punto de vista matemático -Creciente $(-\infty, 2.5359]$ y $[9.46408, \infty)$ - Decreciente $[2.5359, \quad 9.46408]$ En el intervalo [6, 12] - Es cóncavo hacia arriba. - Mínimo absoluto $f(9.46408)$
		En la representación gráfica -Decreciente $(-\infty, 6]$ - Creciente $[6, +\infty)$ - Es cóncavo hacia arriba. - Mínimo absoluto $f(9.46408)$
		-Crecimiento constante - Trazo lineal creciente - Aceleración constante

Cuadro 4.7 Gráfica-Modelación de la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más' en relación con algunas características globales y locales de la gráfica.

Capítulo V. Puesta en escena

Capítulo V. Puesta en escena

Para contestar nuestra pregunta de investigación se analizarán las gráficas que los estudiantes realizan en la Actividad de Aprendizaje ‘Acércate más’. El análisis considera las Formas Básicas de graficación que describimos a continuación.

Formas Básicas es una Actividad de Aprendizaje en la que se presenta una gráfica que describe la posición de un móvil en el eje vertical. El análisis de la AA ‘Formas Básicas’ de graficación se realiza desde los registros verbal, numérico y algebraico. (Ver anexo 1).

Análisis a posteriori

En el análisis a posteriori nos muestra las evidencias de las relaciones que el estudiante logra establecer en el análisis de las gráficas en la AA ‘Acércate más’.

La AA se realizó a estudiantes del CECyT “Benito Juárez García” que cursan el quinto semestre en la asignatura de Cálculo Integral del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional.

El profesor organiza las secuencias de las AA en la forma que considere más adecuada para el aprendizaje en el análisis de la gráfica. El papel del profesor durante la instrumentación de las AA consiste en la interacción con los alumnos. De tal forma que será una guía en el sentido de no realizar el trabajo de los estudiantes sino de proporcionarles la oportunidad de que el estudiante viva la experiencia de aprendizaje.

La modalidad del trabajo se realizó en equipos de 4 a 5 estudiantes consideradas tres etapas y descritas en el cuadro 2.3. El lugar de realización es en el salón de clases. Cada AA consta de dos secuencias. Secuencia I: sin uso de la tecnología y Secuencia II con uso de la tecnología.

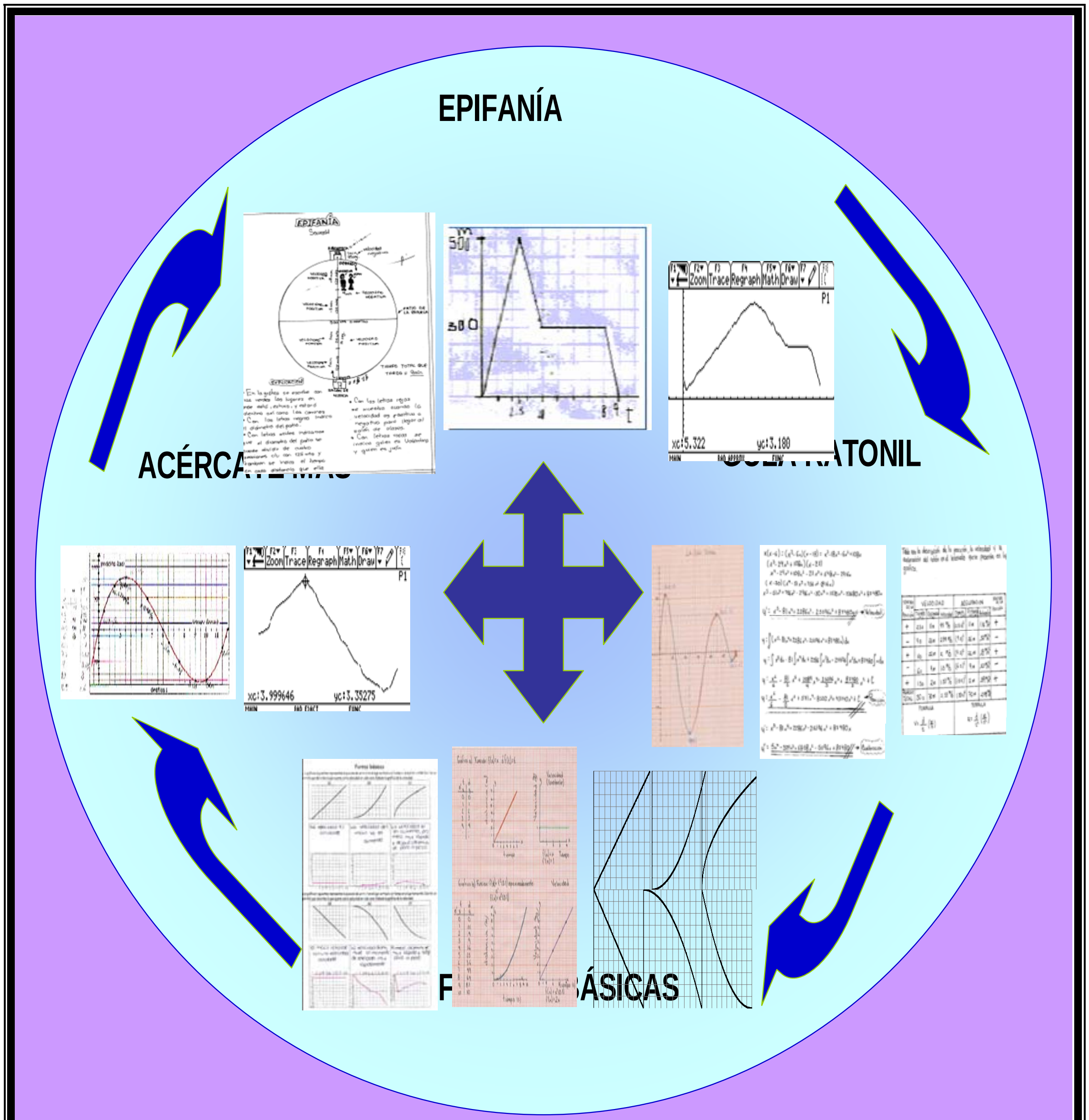
En Secuencia I se realiza la AA sin uso de la tecnología, se trabaja a lápiz y papel y en la Secuencia II la AA se realiza con uso de la tecnología como la calculadora con poder de graficación, sensor de movimiento CBR y el uso de un graficador. En el uso de las TIC los estudiantes diseñan la forma en que se van a mover ante el sensor. Los estudiantes deciden el tiempo y la distancia para lograr la gráfica de su propuesta.

La AA nos aporta los reportes registrados por los estudiantes en el análisis de las gráficas. El interés de esta investigación es contestar nuestra pregunta de investigación.

Se parte de una red de actividades de aprendizaje que forman parte de la red de situaciones de graficación y modelación del movimiento.

Las actividades están basadas en investigaciones en matemática educativa (Torres, 2004). Para realizar la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más' se consideró la secuencia del cuadro 5.1.

En el cuadro 5.1 se presentan algunos de los reportes de los equipos en la realización de la gráfica, numérico y algebraico correspondiente a cada AA que conforman la Red de actividades de graficación – modelación. Se presentan gráficas realizadas a lápiz y papel (Secuencia I) y con uso de tecnología como la calculadora con poder de graficación, el sensor de movimiento y de un graficador (Secuencia II). Con las TIC los estudiantes diseñan la forma en que se van a mover ante el sensor. Los estudiantes deciden el tiempo y la distancia para lograr la gráfica de su propuesta. Se realiza nuevamente una exposición comparando su propuesta a lápiz y papel y la realizada con tecnología (Sensor y la Calculadora Graficadora). (Ver cuadro 2.3)



Cuadro 5.1. Red de actividades de Graficación- Modelación.

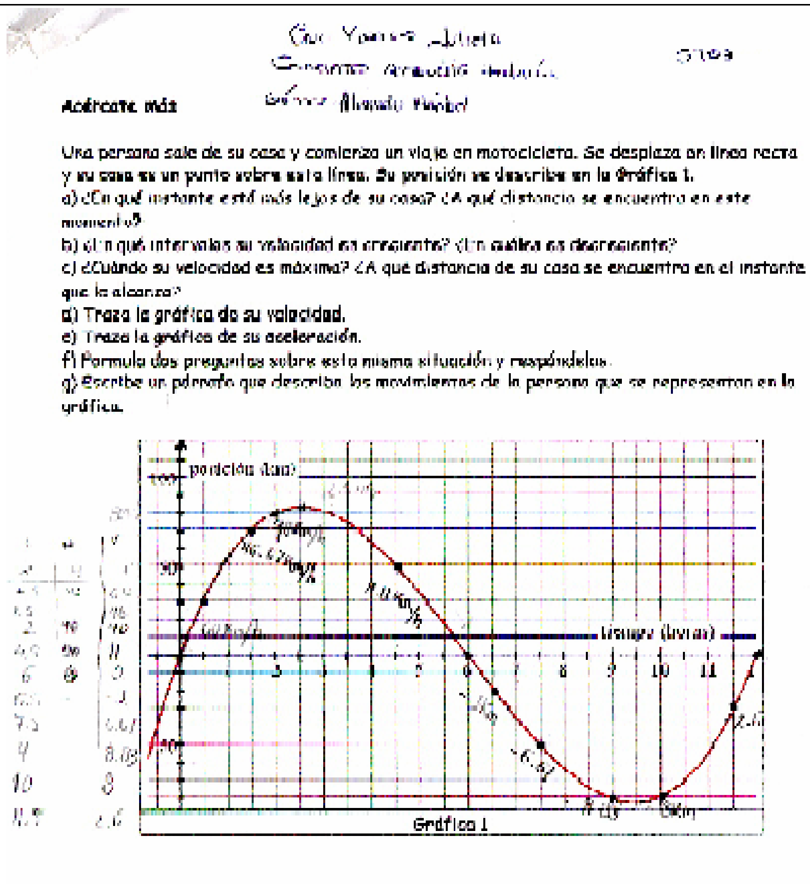
La secuencia de Red de actividades esta constituida de cuatro actividades de aprendizaje para una comprensión en el análisis de las gráficas. A continuación

se describe el orden de la secuencia de Red de actividades de Graficación-Modelación y la razón.
La primera AA es 'Epifanía' considerada por el conocimiento de estas AA y el uso de calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento (CBR).
La segunda AA 'Gula Ratonil' es aplicada por el conocimiento de este tipo de actividades representada mediante una gráfica de un polinomio y una serie de preguntas.
La tercera AA 'Formas básicas' por las características globales de la gráfica y los significados que le asignan algunos estudiantes a las variaciones de primer y segundo órdenes.
La cuarta AA 'Acércate más' en la que el estudiante considera el conocimiento adquirido de las anteriores AA en el análisis de la gráfica de una situación de movimiento.

El análisis se realiza desde los registros verbal, numérico, gráfico y algebraico razón por la cual se puede iniciar y transitar con cualquiera de las cuatro AA.

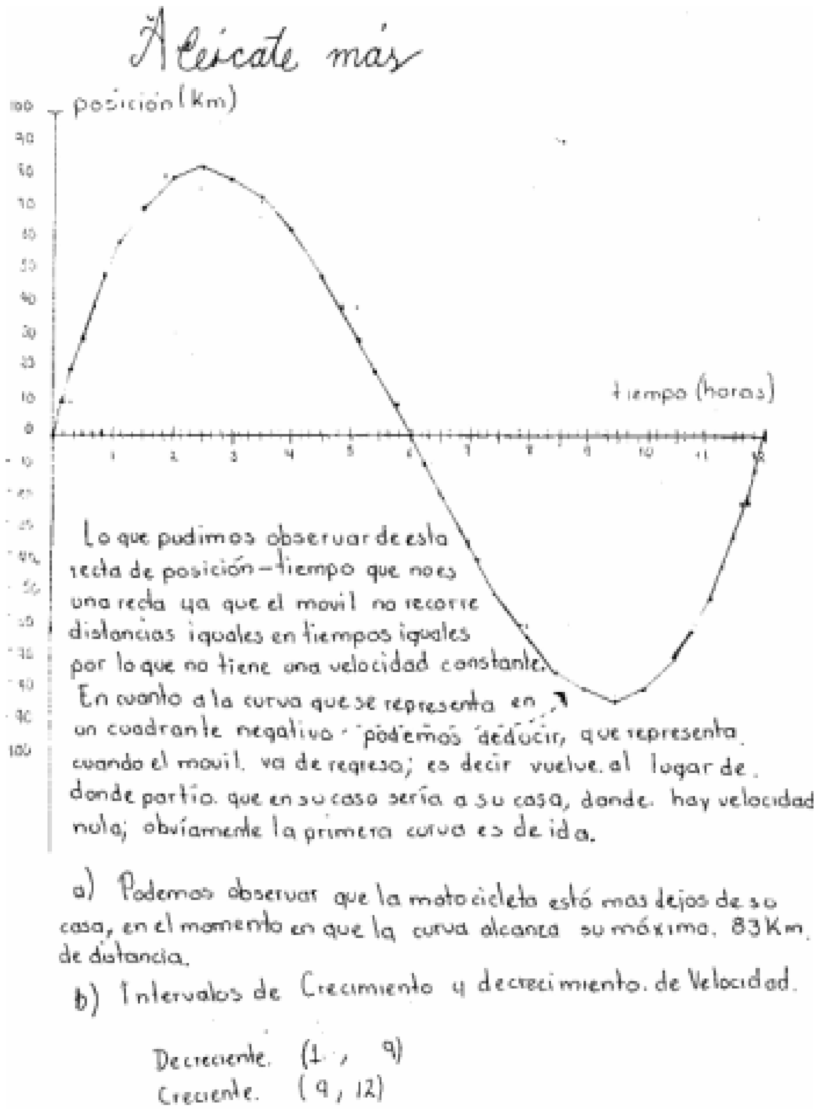
La siguiente tabla contiene las evidencias de los estudiantes. Se reportan los registros de tres equipos. Se consideran dos columnas: Ejemplo de una puesta en escena por el equipo y comentario por el profesor. Las preguntas se encuentran en forma horizontal.

EQUIPO 1. Yuliana, Paul, Areli y Lizeth

<table>
<tr><th>Ejemplo de una puesta en escena</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>

Acércate más
Una persona sale de su casa y comienza un viaje en motocicleta. Se desplaza en línea recta y su casa es un punto sobre esta línea. Su posición se describe en la Gráfica 1.
a) ¿En qué instante está más lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra en este momento?
b) ¿En qué intervalos su velocidad es creciente? ¿En cuáles es decreciente?
c) ¿Cuándo su velocidad es máxima? ¿A qué distancia de su casa se encuentra en el instante que la alcanza?
d) Traza la gráfica de su velocidad.
e) Traza la gráfica de su aceleración.
f) Formula dos preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.
g) Escribe un párrafo que describa los movimientos de la persona que se representan en la gráfica.

Gráfica V. 1.1

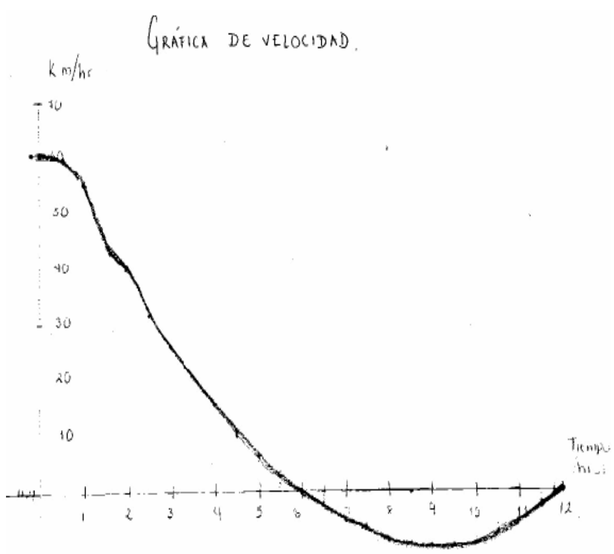
Una persona sale de su casa y comienza un viaje en motocicleta. Se desplaza en línea recta y su casa es un punto sobre esta línea.
</td><td>Como podemos observar leen el enunciado y las preguntas correspondientes relacionándolos con la gráfica.</td></tr>
</table>



Gráfica V. 1.2

"Lo que pudimos observar de esta recta de posición-tiempo que no es una recta, ya que el móvil no recorre distancias iguales en tiempos iguales por lo que no tiene una velocidad constante. En cuanto a la curva que se representa en un cuadrante negativo, podemos deducir, que representa cuando

Realizan un análisis de la gráfica deduciendo que es una curva y no una recta por la trayectoria del móvil al no recorrer distancias iguales en tiempos iguales.

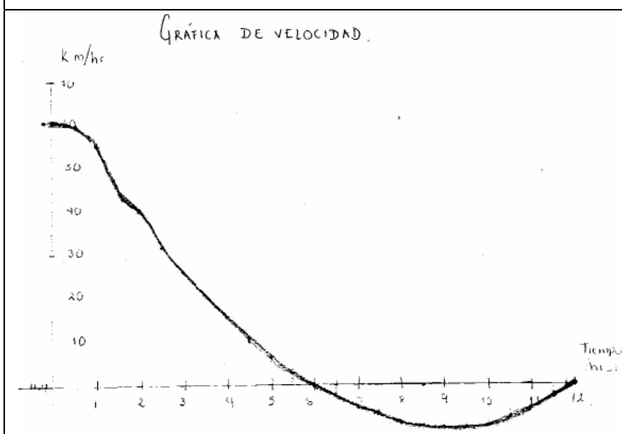
<table>
<tr><td></td><td>el móvil va de regreso; es decir vuelve al lugar de donde partió”.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Pregunta. a) ¿En qué instante está más lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra en este momento?</td></tr>
<tr><td colspan="2">“Podemos observar que la motocicleta está más lejos de su casa, en el, momento que la curva alcanza su máximo 83 km de distancia”.</td><td>Solo realizan el análisis en un solo sentido, el positivo de la trayectoria del móvil.
Observan el máximo relativo.
No hay registro en que instante está más lejos de su casa.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pregunta. b) ¿En qué intervalos su velocidad es creciente? ¿En cuáles es decreciente?</td></tr>
<tr><td colspan="2">“Intervalos de crecimiento y decrecimiento de ve la velocidad es:
Decreciente (1, 9)
Creciente (9, 12)”


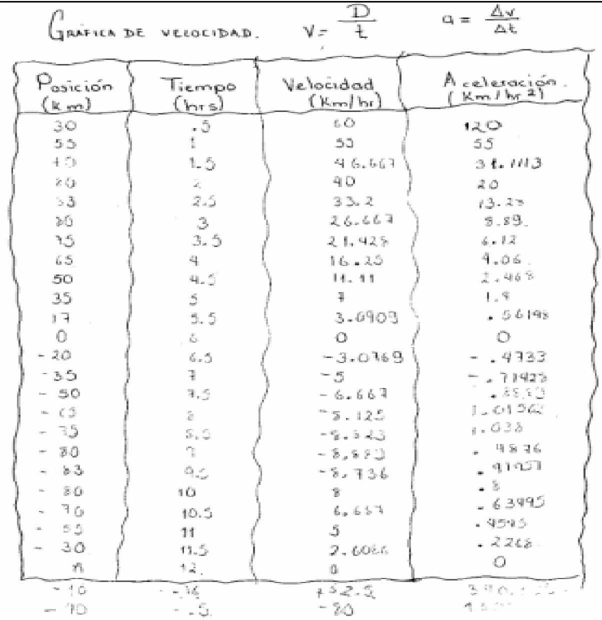
Gráfica V. 1.</td><td>Como podemos observar en su gráfica determinan los puntos en el eje cartesiano.
Los puntos que consideraron y mediante el uso de la fórmula de la distancia no logran identificar el tipo de gráfica correspondiente la de la velocidad dada su trayectoria del móvil.</td></tr>
</table>

EQUIPO 1… Continuación

Puesta en escena **Comentario**

Pregunta. c) ¿Cuándo su velocidad es máxima? ¿A qué distancia de su casa se encuentra en el instante que la alcanza?

"La velocidad es máxima cuando alcanza una velocidad de $60 \frac{km}{h} = 16.667 \frac{m}{s}$ *, estando a una distancia de 30 km de su casa".*	Se basan en la forma de su gráfica y determinan que a la distancia de 30 km se alcanza una velocidad máxima.
Pregunta. d) Traza la gráfica de su velocidad.	La forma de la grafica es el resultado de su representación tabular.
 	Los valores considerados por el equipo no corresponden a los que nos aporta la gráfica V.1.1. El equipo consideró la definición de distancia recorrida en tempos iguales por lo que les resulto ese tipo de gráficas.

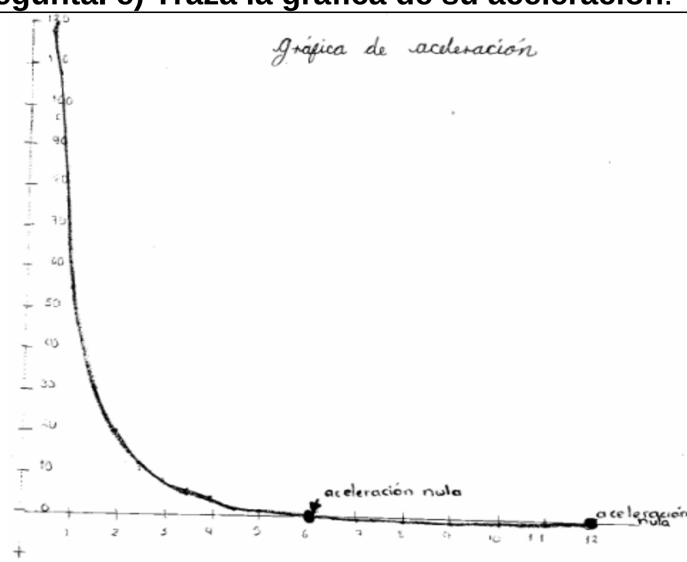


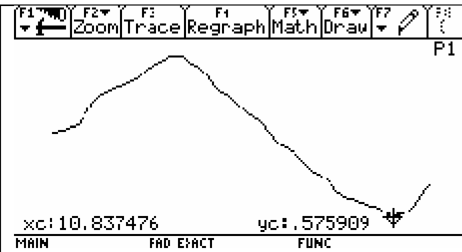
GRÁFICA DE VELOCIDAD. $V = \frac{D}{t}$ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Posición (km)	Tiempo (hrs)	Velocidad (Km/hr)	Aceleración (Km/hr²)
30	.5	60	120
55	1	55	55
40	1.5	46.667	31.1113
80	2	40	20
83	2.5	33.2	13.28
80	3	26.667	8.89
75	3.5	21.425	6.12
65	4	16.25	4.06
50	4.5	11.11	2.468
35	5	7	1.4
17	5.5	3.0909	.56198
0	6	0	0
-20	6.5	-3.0769	-.4733
-35	7	-5	-.71428
-50	7.5	-6.667	.8889
-65	8	-8.125	1.01562
-75	8.5	-8.823	1.038
-80	9	-8.889	.9876
-83	9.5	-8.736	.91957
-80	10	8	.8
-70	10.5	6.667	.63495
-55	11	5	.4545
-30	11.5	2.6086	.2268
0	12	0	0
-10	-.16	+52.5	[illegible]
-70	-.5	-80	[illegible]

Gráfica V. 1.4

EQUIPO 1… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**
Pregunta. e) Traza la gráfica de su aceleración.	
 *Gráfica V. 1.5*	La forma de la grafica de aceleración es el resultado de su representación tabular. Los valores considerados por el equipo corresponden a los que nos aporta la gráfica V.1.1. No logran identificar el tipo de grafica correspondiente a la AA.
Pregunta f) Formula dos preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.	
¿Cuándo alcanza una aceleración mayor? *"Cuando se encuentra en una posición de 30 km en 30*	Como podemos observar generan sus preguntas a partir

<table>
<tr><td>minutos, alcanzando una velocidad de 60 km/h y una aceleración de $120 km/h^2$ ".
¿Cuándo la aceleración es nula?
"La aceleración es nula cuando el móvil llega al punto donde se dirige en esta casa cuando y=0"</td><td>de su grafica de aceleración. (Véase Gráfica V.1.5)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pregunta. g) Escribe un párrafo que describa los movimientos de la persona que se representan en la gráfica.</td></tr>
<tr><td>"En cuanto a la primer gráfica podemos decir que la curva positiva de la gráfica representa la ida, tomando que cuando la velocidad es cero se encuentra el lugar de partida y la curva situada en el cuadrante negativo, representa la trayectoria de regreso, volviendo a quedar en velocidad cero (casa punto de partida)".</td><td>

La gráfica que obtuvieron con el sensor corresponde a la gráfica del problema.
Consideraron que no es constante su velocidad.</td></tr>
</table>

Cuadro 5.2 Relaciones del equipo 1.

EQUIPO 2. Marisol, Daniel, Alberto y Diana.

<table>
<tr><th>Ejemplo de una puesta en escena</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pregunta. a) ¿En qué instante está más lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra en este momento?</td></tr>
<tr><td>"En el momento en que se encuentra más lejos es en el punto $\left(\frac{5}{2},\frac{665}{8}\right)$, es decir a una distancia de $\frac{665}{8}$ que es igual a 83.125 Km. de su casa y va a una velocidad de $\frac{133}{4}\frac{km}{h}$ ".</td><td>Determinan los puntos en el eje cartesiano.
Relacionan la función $f'(x)$ con la gráfica a partir de la gráfica.
Consideran el valor máximo relativo.
Relacionan la función $f(x)$ con su variación $f'(x)$.
Transitan de la representación gráfica a la representación algebraica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pregunta. b) ¿En qué intervalos su velocidad es creciente? ¿En cuáles es decreciente?</td></tr>
</table>

“El intervalo donde la velocidad es creciente $[6{,}12]$*.* *La velocidad es decreciente en el intervalo:* $[0{,}6]$*”*	Es considerado desde que el móvil sale de su casa y realiza la trayectoria. Relacionan de la función $f'(x)$ con el análisis de valor numérico. Identifican el intervalo creciente de $f'(x)$ y el intervalo decreciente de $f'(x)$. Es considerado $f'(x)$ a partir de $f(x)$.
Pregunta. c) ¿Cuándo su velocidad es máxima? ¿A qué distancia de su casa se encuentra en el instante que la alcanza?	
“Cuando sale de su casa, es decir, al estar en su casa y comienza a avanzar lo hace con una velocidad mucho más alta que en el resto del recorrido”.	En este equipo solo determinan de forma escrita la velocidad del recorrido.

EQUIPO 2… Continuación

Puesta en escena	Comentario
Pregunta. f) Formula dos preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.	
1. ¿Cuál es la ecuación de la gráfica? $f(x) = x^3 - 18x^2 + 72x$ *“Procedimiento* *Puntos en los cuales la gráfica corta al eje de las abscisas en 0, en 6 y en 9 por lo tanto* $k[(x-0)(x-6)(x-12)] = y$ *Punto en el cual nos vamos a basar para sacar la constante k (2,80) por lo tanto sustituimos el punto*	Nota: Los estudiantes primeramente contestaron el inciso f para poder obtener la función. Como podemos observar el equipo genera sus preguntas considerando: ➢ La función de posición. ➢ Función derivada y primitiva.

(2,80) (x,y) $k[(2-0)(2-6)(2-12)]=80$ $k80=80 \quad \Rightarrow k=1$ Entonces sustituimos k (constante) para sacar la ecuación: $1[(2-0)(2-6)(2-12)]=y$ $y=x^3-3x^2+72x$ *Ecuación de la Gráfica 1"* 2. ¿Cuáles son las ecuaciones de la velocidad y la aceleración y por qué dedujeron esto? *Ecuación de la velocidad* $f'(x)=3x^2-36x+72$ *Ecuación de la aceleración:* $f''(x)=6x-36$	➢ Relación de la función $f'(x)$ *con la gráfica a partir de la gráfica y de la función algebraica* $f(x)$*.* El equipo consideró las variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en la situación de movimiento.

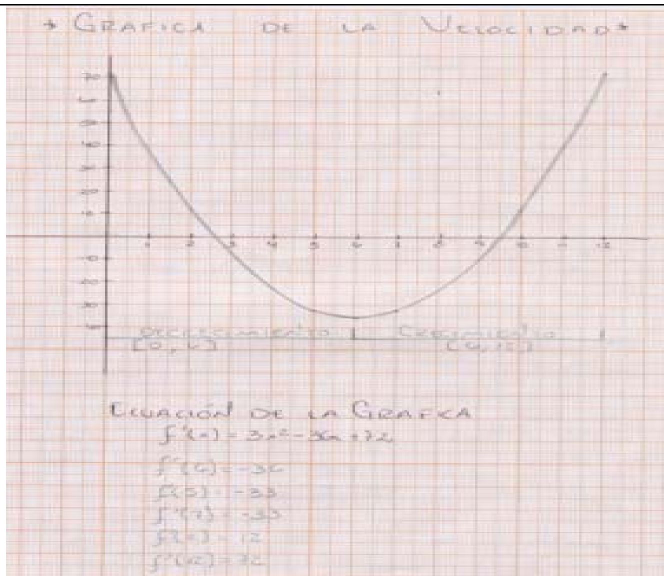
EQUIPO 2… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**
PROCEDIMIENTO (Velocidad) *"Ecuación de la velocidad* $f'(x)=3x^2-36x+72$ *Como ya habíamos deducido la ecuación de la gráfica y la cual nos muestra la posición a distancia de la persona en motocicleta, es decir* $f(x)=$ *distancia en la Gráfica V.2.1 sabemos que* $f'(x)$ *=velocidad por lo que la ecuación de la*	

Gráfica V. 2.1 la derivamos para sacar la velocidad: *Si* $f(x)=x^3-18x^2+72x$ *Su derivada es* $f'(x)=3x^2-36x+72$ *Ahora como lo muestra esta ecuación la gráfica representa una parábola que corta al eje de las ordenadas en 72 esto por el término independiente.* *Pero ya tabulando tenemos que la parábola es cóncava hacia arriba, su vértice esta en el punto (6,36) de lo que podemos deducir sus intervalos crecientes y decrecientes.* *Cuando vemos que tiene la velocidad negativa es cuando podemos dar cuenta que la persona va de regreso, es decir esta en su casa, llegó a una distancia de 83.125 Km. y regresa a su casa realizando el recorrido al lado contrario".*	

EQUIPO 2… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**
Pregunta. d) Traza la gráfica de su velocidad.	
	Como podemos observar el equipo considera la función de posición para obtener su derivada.

<table>
<tr>
<td>


Gráfica V. 2.1

Ecuación de la gráfica

$f'(x) = 3x^2 - 36x + 72$

$f'(2) = 12$

$f'(5) = -33$

$f'(6) = -36$

$f'(7) = -33$

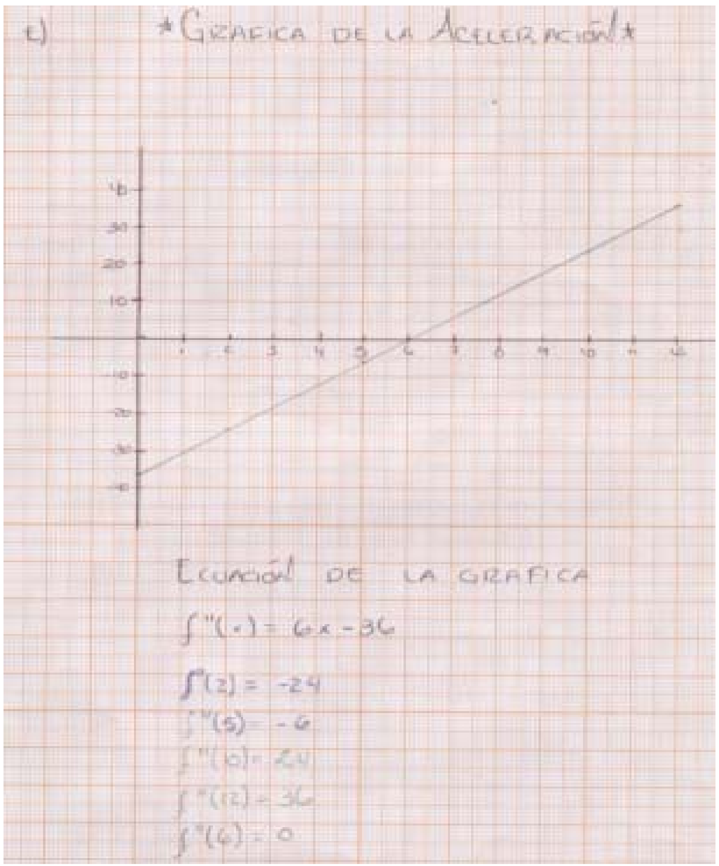
$f'(12) = 72$
</td>
<td>
El equipo consideró la expresión algebraica de $f'(x)$ para su representación gráfica.

Es cóncavo hacia arriba y tiene un valor mínimo relativo.
</td>
</tr>
</table>

EQUIPO 2… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**

Pregunta. e) Traza la gráfica de su aceleración.



Gráfica V. 2.2

Ecuación de la gráfica

$f''(x) = 6x - 36$

$f''(0) = 24$

$f''(2) = -24$

$f''(5) = -6$

$f''(6) = 0 \;\; f''(12) = 36$

Comentario:

Como podemos observar el equipo considera la primera derivada para obtener su segunda derivada.

Determina los puntos en el eje cartesiano.

Realiza la transformación de funciones.

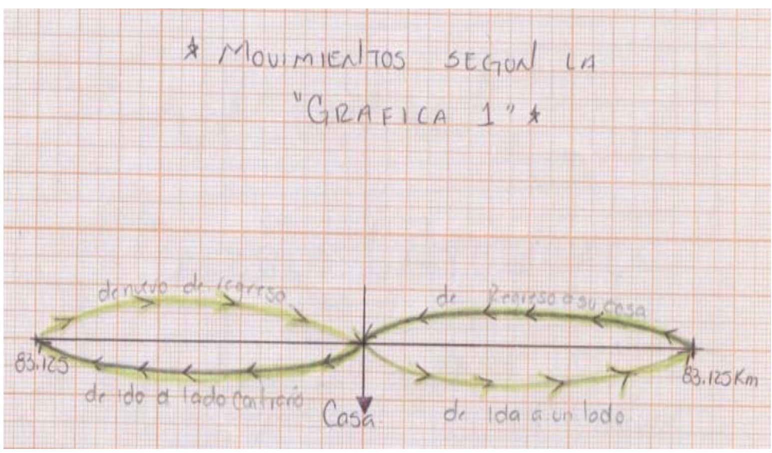
Transitan de la representación gráfica ala algebraica y la numérica.

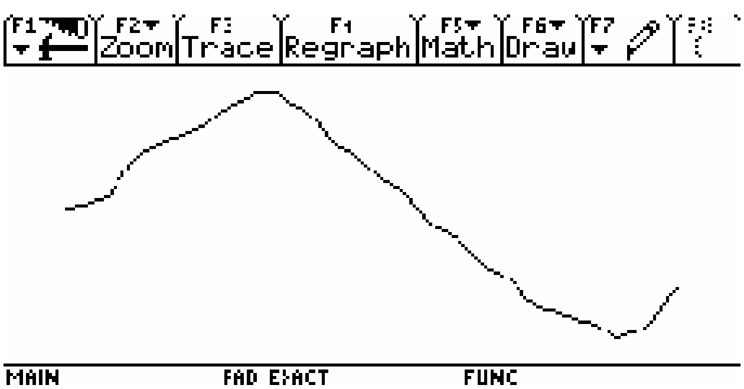
EQUIPO 2… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta. g) Escribe un párrafo que describa los movimientos de la persona que se representan en la gráfica.</td></tr>
<tr><td>

“Desde su casa a un tiempo cero (0) el motociclista se aleja hasta un tiempo de $6-\sqrt{12}\approx 2.54\ horas$ *que son aproximadamente dos horas y media, obteniendo lógicamente la posición más lejana a su casa y en seguida regresa por el mismo camino a su casa llegando en el instante en que han transcurrido 6 horas”.*





Gráfica V. 2.3

</td><td>

El equipo realiza la simulación utilizando la tecnología como la calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento CBR (Secuencia II).

Comportamiento de la gráfica con simulación y a lápiz y papel.

</td></tr>
</table>

Cuadro 5.3 Relaciones del equipo 2.

EQUIPO 3. Angelina, Erica, Damaris y Araceli

<table>
<tr><th></th><th>Ejemplo de una puesta en escena</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td></td><td>Determinación de la función
$P(t)=t^2-18t^2+72t$
$t=0 \quad t=0$
$t=6 \quad t-6=0$
$t=12 \quad t-12=0$
$t(t-6)(t-12)=0$
$t^3-12t-6t+72=0$
$t^3-18t+72=0$
La función es $t^3-18t+72=0$

Gráfica V. 3.1</td><td>Primeramente obtienen la función a partir de la gráfica.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pregunta. a) ¿En qué instante está más lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra en este momento?</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) ¿En que instante está más lejos de su casa.?
$P'(t)=3t^2-36t+72$
si $P'(t)=0$
$3t^2-36t+72=0$
$t^2-12t+24=0$
$(t-6-\sqrt{12})(t-6+\sqrt{12})=0$
$t-6-\sqrt{12}=0 \quad t-6+\sqrt{12}=0$
$t=6+\sqrt{12} \quad t=6-\sqrt{12}.$

$P''(t)=6t-36$
$P''(6+\sqrt{12})=6(6+\sqrt{12})-36$
$=\cancel{36}+6\sqrt{12}-\cancel{36}$
$=6\sqrt{12}$
Existe un mínimo relativo en $6+\sqrt{12}.$
$P''(t)=6t-36$
$P''(6-\sqrt{12})=6(6-\sqrt{12})36$
$=\cancel{36}-6\sqrt{12}-\cancel{36}$
$=-6\sqrt{12}.$
Significa que la posición maxima se tiene en $t=6-\sqrt{12}\approx 2.54$hrs
2) ¿A que distancia se encuentra este momento?
$P(6-\sqrt{12})=(6-\sqrt{12})^3-18(6-\sqrt{12})^2+72(6-\sqrt{12})$
$=216-108\sqrt{12}+216-\sqrt{1728}-18(36-12\sqrt{12}+12+432)-72\sqrt{12}$
$=432-108\sqrt{12}-\sqrt{1728}-648+216\sqrt{12}-218+432-72\sqrt{12}$
$=0+36\sqrt{12}-\sqrt{1728}+648$
$=1241.71-4$
$=83.141$ Km
Es la posición más lejana de su casa.</td><td>Analizaron algunas de las características globales de la gráfica.
El equipo determina la función a partir de la representación grafica de la trayectoria de un móvil.
Identifican la función
Consideran la función derivada y primitiva.
Relacionan la función $f'(x)$ a partir de la función algebraica $f(x)$ y su $f'(x)$.
Identifican los puntos mínimo y máximo relativo.</td></tr>
</table>

EQUIPO 3… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**
"La función es $P(t)=t^3-18t^2+72t$	
Su primera derivada es: $P'(t)=3t^2-36t+72$ *Se calculan sus raíces de la primera derivada.* $t=6+\sqrt{12}$ *y* $t=6-\sqrt{12}$ *Se calcula la segunda deriva y se sustituye* $t=6+\sqrt{12}$. *Tiene un mínimo relativo.* $P''(t)=6t-36$ $P''(6+\sqrt{12})=6\sqrt{12}$ *Para* $t=6-\sqrt{12}$ $P''(t)=6t-36$ $P''(6-\sqrt{12})=-6\sqrt{12}$ *Significa que la posición máxima se tiene en* $t=6-\sqrt{12}\approx 2.54\ horas.$ *La distancia a la que se encuentra en este momento se sustituye* $t=6-\sqrt{12}$ *en la función.* $P(t)=t^3-18t^2+72t$ $P((6-\sqrt{12}))=(6-\sqrt{12})^3-18(6-\sqrt{12})^2+72(6-\sqrt{12})$ $P((6-\sqrt{12}))=83.14\quad km$ *Es la posición más lejos de su casa".*	El equipo considera: $f'(x)>0$ entonces tiene un máximo relativo y si $f'(x)\quad 0$ tiene un mínimo relativo. Relacionan la función $f'(x)$ con la gráfica de posición $f(x)$ y de la función algebraica ($f(x)$). Transitan de la gráfica y función de posición $f(x)$ a sus variaciones de la velocidad $f'(x)$ y la aceleración $f''(x)$.

EQUIPO 3… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta. b) ¿En qué intervalos su velocidad es creciente? ¿En cuál es decreciente?</td></tr>
<tr><td>B) ¿En qué intervalos su velocidad es creciente?

Si existiera en nuestro problema la gráfica en el intervalo de $(6,+\infty)$, este sería el intervalo donde la velocidad es creciente.

C ¿En cuáles es decreciente?

La velocidad es decreciente en el intervalo:
$(0,6)$.

El intervalo donde la velocidad es creciente $(6,+\infty)$.
La velocidad es decreciente en el intervalo:
$(0,6)$</td><td>El equipo considera su Grafica de velocidad (véase grafica V.3.3) para determinar en que intervalo es creciente y en que intervalo es decreciente.
Consideran la representación gráfica a la representación algebraica $f(x)$ y su derivada $f'(x)$.</td></tr>
</table>

EQUIPO 3… Continuación

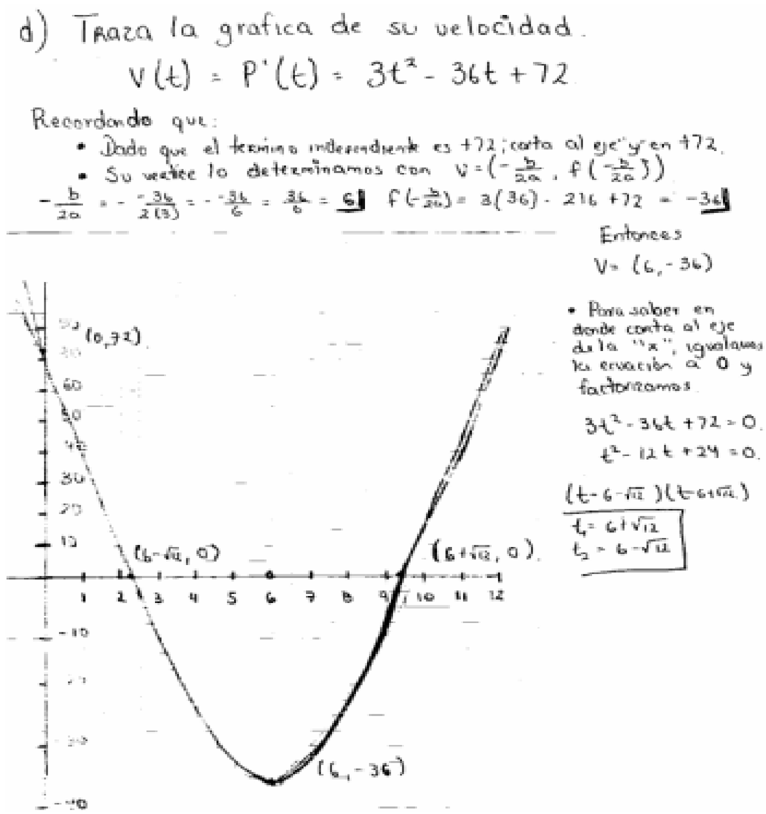
<table>
<tr><th>Puesta en escena</th><th>Discusión</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pregunta. c) ¿Cuándo su velocidad es máxima? ¿A qué distancia de su casa se encuentra en el instante que la alcanza?</td></tr>
<tr><td>c) ¿Cuando su velocidad es máxima?
$P'(t) = V(t)$
$V(t) = 3t^2 - 36t + 72$
$V'(t) = 6t - 36$
si $V'(t) = 0$
$6t - 36 = 0$
$6t = 36$
$t = 6$
$V''(t) = 6$
$V''(6) = 6 \Rightarrow$ velocidad mínima
$V(6) = 3 \times 6^2 - 36 \times 6 + 72$
$= 108 - 216 + 72$
$= -36$
No hay velocidad máxima, ya que al observar la grafica de la misma, sigue al infinito, ó a un valor indeterminado, por lo que es imposible determinar la velocidad máxima, sólo encontramos que hay una velocidad mínima, y que se podría suponer que la velocidad máxima esta en y=72, pero no es lógico, ya que el problema dante que la persona sale de su casa y comienza el viaje, así que no podría haber empezado con una velocidad de 72km/h a un tiempo 0.

$v(t) = P'(t) = 3t^2 - 36t + 72$
$v'(t) = 6t - 36$
Si $v'(t) = 0$
$v'(t) = 6t - 36 = 0 \quad \Rightarrow t = 6$
Si $v''(t) = 6$
Su velocidad mínima es $v''(6) = 6$
$v(t) = 3t^2 - 36t + 72$
$v(6) = -36$
“No hay velocidad máxima, ya que al observar la gráfica de la misma, sigue al infinito, o aún valor indeterminado, por lo que es imposible determinar la velocidad máxima, y que se podría suponer que la velocidad máxima esta en y=72, pero no es lógico ya que la persona sale de su casa y comienza el viaje, así que no podría haber empezado con una velocidad de 72km/h a un tiempo 0”.</td><td>Como se puede observar su análisis algebraico el equipo determina que su velocidad mínima es el vértice.
El equipo considera las variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en la situación de movimiento.</td></tr>
</table>

EQUIPO 3… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta. d) Traza la gráfica de su velocidad.</td></tr>
<tr><td>



Gráfica V. 3.3

$v(t) = P'(t) = 3t^2 - 36t + 72$

Corta al eje y en (0,72) yen el eje x en

$(6-\sqrt{12},0)$ *y* $(6+\sqrt{12},0)$

Su vértice (6,-36)

</td><td>

El equipo:

- Determina los puntos en el eje cartesiano.

- Cóncavo hacia arriba.

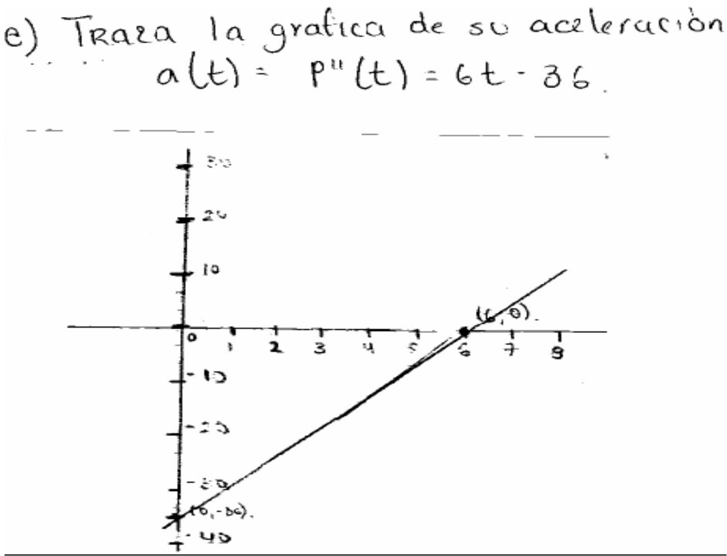
- Valor mínimo relativo.

Realizan transformación de funciones.

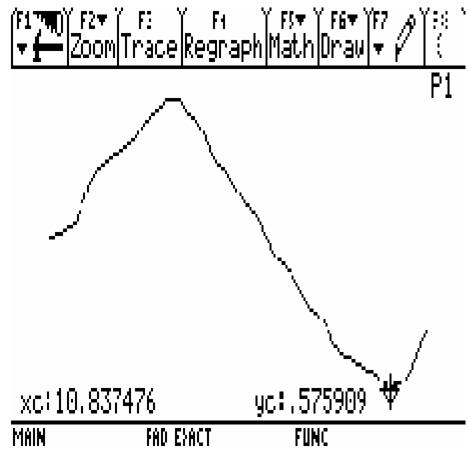
Obtienen la función deriva a partir de la función algebraica de posición.

</td></tr>
</table>

EQUIPO 3… Continuación

Puesta en escena	**Comentario**
e) Traza la gráfica de su aceleración.	
 *Gráfica V. 3.3* $a(t) = P''(t) = 6t - 36$	Como podemos observar el quipo: • Determina los puntos en el eje cartesiano. • Determinan la aceleración a partir de la segunda derivada. Consideran las variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en la situación de graficación.

f) Formula dos preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.	
1. Fundamenta porque no hay velocidad máxima. *“Porque la gráfica de la velocidad es una parábola vertical cuya concavidad esta orientada hacia arriba.* *Sin embargo se podría considerar, sin mucha lógica, que la velocidad máxima es de t=0h hasta t=6h ya que son los valores que dan un valor de posición positiva”.* 2. Observando la gráfica, explica porque se tarda más en regresar, que en ir, el motociclista. *“Dado que la gráfica representa la posición y primero crece rápido y luego disminuye despacio*	El equipo relaciónalos resultados de la velocidad máxima y trata de analizar la gráfica de posición a través de sus preguntas.

su velocidad”.	
g) Escribe un párrafo que describa los movimientos de la persona que se representan en la gráfica.	
“Desde su casa a un tiempo cero (0) el motociclista se aleja hasta un tiempo de $6-\sqrt{12}\approx 2.54\, horas$ *que son aproximadamente dos horas y media, obteniendo lógicamente la posición más lejana a su casa y en seguida regresa por el mismo camino a su casa llegando en el instante en que han transcurrido 6 horas”.*	Gráfica a partir de la simulación con tecnología. 

Cuadro 5.4 Relaciones del equipo 3

Capítulo VI

Análisis y conclusiones

–

Capítulo I. Análisis y conclusiones

En este capítulo, de acuerdo con la pregunta de investigación y tomando en cuenta los valores numéricos, las tablas, las respuestas de las preguntas y las características globales de las gráficas en la secuencia I (que es sin uso de la tecnología) y la secuencia II (con uso de la tecnología) en la actividad de aprendizaje se analizarán las gráficas.

Dada la pregunta de investigación de este proyecto:
¿Cuales son las características de las gráficas en una situación de modelación del movimiento donde aparecen de forma simultánea la posición y las variaciones de la posición y la velocidad?

Para dar respuesta de forma global a la pregunta de investigación se analizarán las preguntas de la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más'.

El estudiante analiza la gráfica de una persona que sale de su casa y comienza un viaje en motocicleta y que se desplaza en línea recta y su casa esta sobre esta línea.

Secuencia I

Pregunta a) ¿En que instante está mas lejos de su casa? ¿A qué distancia se encuentra en este momento?

Los equipos relacionan la gráfica con la situación y encuentran el instante y la distancia en la que se encuentra el móvil más lejos de su casa debido a que hacen la representación que se hace en los ejes, el tiempo en el eje horizontal y la distancia en el eje vertical. Como podemos observa en el cuadro 6.1, el equipo 1 registra solo la distancia considerando que la distancia más lejos de su casa es el valor máximo relativo en la representación gráfica.

El equipo 2 da un valor más aproximado de la distancia y el instante en el que esta más lejos de su casa, debido a que consideran el eje horizontal al tiempo y el eje vertical a la distancia y el equipo 3 determina la función para obtener su primera y segunda derivada, calculan sus raíces en la primera derivada y las sustituyen en su segunda derivada para obtener la aproximación de la distancia y el instante en el que esta más lejos de su casa. Para obtener la función de posición leyeron los ceros de la gráfica de posición y un punto sobre la curva. Calculan las raíces de la primera derivada pero solo consideran una para ver en que instante se encuentra el móvil y su posición.

Los tres equipos solo consideran un solo sentido de la trayectoria el instante y la posición en el que se encuentra más lejos de su casa el móvil.

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
“Podemos observar que la motocicleta está más lejos de su casa, en el, momento que la curva alcanza su máximo 83 km de distancia”.	*“En el momento en que se encuentra más lejos es en el punto* $\left(\frac{5}{2}, \frac{665}{8}\right)$, *es decir a una distancia de* $\frac{665}{8}$ *como unos 83.125 km de su casa y va a una velocidad de* $\frac{133}{4}\frac{km}{h}$ *„.*	*“La función es* $P(t) = t^3 - 18t^2 + 72t$ *Su primera derivada es:* $P'(t) = 3t^2 - 36t + 72$ *Se calculan sus raíces de la primera derivada.* $t = 6 + \sqrt{12}$ *y* $t = 6 - \sqrt{12}$ *Se calcula la segunda deriva y se sustituye* $t = 6 + \sqrt{12}$. $P''(t) = 6t - 36 \quad \Rightarrow \quad P''(6 + \sqrt{12}) = 6\sqrt{12}$ *Para* $t = 6 - \sqrt{12}$ $P''(t) = 6t - 36 \quad \Rightarrow \quad P''(6 - \sqrt{12}) = -6\sqrt{12}$ *Significa que la posición máxima se tiene en* $t = 6 - \sqrt{12} \approx 2.54\ horas.$ *La distancia a la que se encuentra en este momento se sustituye* $t = 6 - \sqrt{12}$ *en la función.* $P(t) = t^3 - 18t^2 + 72t$ $P((6-\sqrt{12})) = (6-\sqrt{12})^3 - 18(6-\sqrt{12})^2 + 72(6-\sqrt{12})$ *Es la posición más lejos de su casa.* $P((6-\sqrt{12})) = 83.14 \quad km$*”*

*Cuadro.6.1 Análisis y comparación de los tres equipos de la pregunta **a**) de la Actividad de Aprendizaje ‘Acércate más’.*

Pregunta b) ¿En que intervalos su velocidad es creciente? ¿En cuáles decreciente?

En el cuadro 6.2 se puede observar la relación con las formas básicas de graficación y dan valores aproximados en el intervalo donde es creciente y en el intervalo donde es decreciente representándolos en intervalos abiertos y cerrados.

El equipo 1 considera los puntos de la curva y los sustituye en $v = \frac{d}{t}$ la cual solo se aplica cuando la velocidad permanece constante. Para los intervalos de crecimiento y decrecimiento consideraron su gráfica de velocidad.

Los equipos 2 y 3 consideran sus intervalos de crecimiento y decrecimiento basada en su representación gráfica de velocidad y como punto crítico su valor mínimo de la curva.

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
“Intervalos de crecimiento y decrecimiento de ve la velocidad es: Decreciente (1, 9) Creciente (9, 12)”	*“El intervalo donde la velocidad es creciente* $[6,12]$*. La velocidad es decreciente en el intervalo:* $[0,6]$*”*	*“El intervalo donde la velocidad es creciente* $(6,+\infty)$*. La velocidad es decreciente en el intervalo:* $(0,6)$*”.*

Cuadro.6.2 Análisis y comparación de los tres equipos de la pregunta b) de la Actividad de Aprendizaje ‘Acércate más’.

Pregunta c) ¿Cuándo su velocidad es máxima? ¿A que distancia de su casa se encuentra en el instante en que la alcanza?

Los estudiantes parten de la situación para contestar la pregunta, recurriendo a al expresión verbal, análisis de la gráfica y representación algebraica (Ver cuadro 6.3).
El equipo 1 registra su velocidad máxima obtenida de su gráfica de velocidad. El equipo 2 describe la velocidad considerando la trayectoria del móvil.
El equipo 3 considera que la velocidad obtenida por su segunda derivada es mínima cuando en realidad es una velocidad máxima en el otro sentido.

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
"La velocidad es máxima cuando alcanza una velocidad de $60\frac{km}{h}=16.667$*, estando a una distancia de 30 km de su casa".*	*"Cuando sale de su casa, es decir, al estar en su casa y comienza a avanzar lo hace con una velocidad mucho más alta que en el resto del recorrido".*	$v(t)=P'(t)=3t^2-36t+72$ $v'(t)=6t-36$ *Si* $v'(t)=0$ $v'(t)=6t-36=0 \quad \Rightarrow t=6$ *Si* $v''(t)=6$ *Su velocidad mínima es* $v''(6)=6$ $v(t)=3t^2-36t+72$ $v(6)=-36$ *"No hay velocidad máxima, ya que al observar la gráfica de la misma, sigue al infinito, o aún valor indeterminado, por lo que es imposible determinar la velocidad máxima, y que se podría suponer que la velocidad máxima esta en y=72, pero no es lógico ya que la persona sale de su casa y comienza el viaje, así que no podría haber empezado con una velocidad de 72km/h a un tiempo 0".*

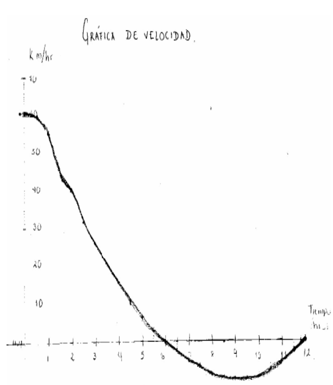
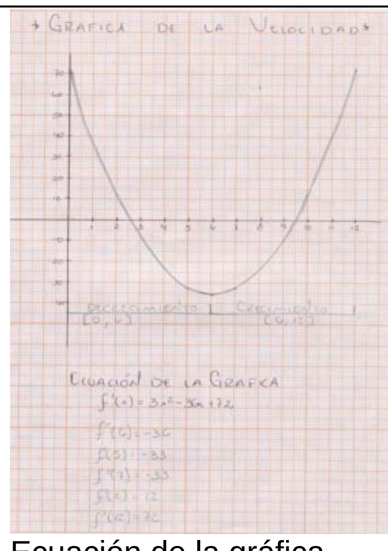
Cuadro.6.3 Análisis y comparación de los tres equipos de la pregunta c) de la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más'.

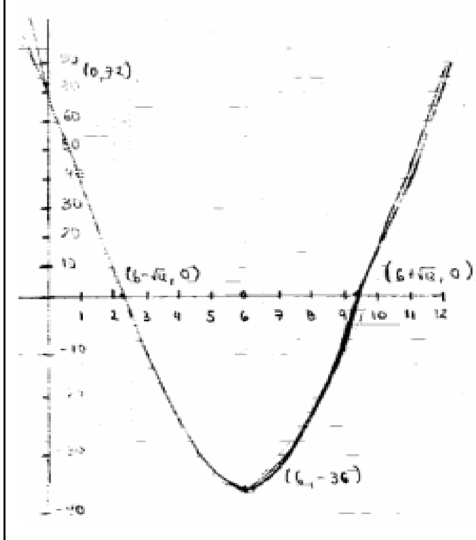
El tiempo es considerado desde que sale de su casa y comienza su viaje en motocicleta hasta que termina. Las velocidades máximas ocurren cuando comienzan (x=0) y cuando termina (x=12) en un sentido y cuando x=6 en el otro sentido. Aunque en este último matemáticamente la velocidad es un mínimo, corresponde a la velocidad máxima en el otro sentido.

Pregunta d) Traza la gráfica de su velocidad.

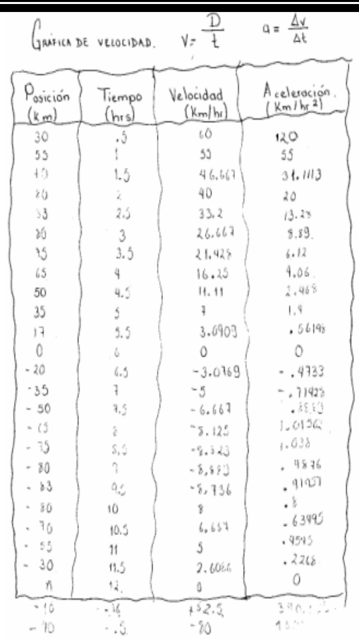
Los equipos 2 y 3 lograron hacer una gráfica correspondiente a la velocidad de la persona que sale de su casa y comienza el viaje en motocicleta, debido a que consideran el tiempo al eje horizontal y la velocidad al eje vertical. Transitan de la representación algebraica a la representación gráfica.

El equipo 1 considera el concepto de aceleración el cual siempre se relaciona con un cambio de velocidad $\left(a = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ sus valores son representados en una tabla, valores aproximados de la gráfica del problema dando una curva con otros valores a los dados por los otros dos equipos. Los estudiantes parten de una situación gráfica a la algebraica $f(x)$ y de la algebraica $f(x)$ a otra algebraica $f'(x)$ y de la algebraica $f'(x)$ a la representación gráfica.

<table>
<tr><th>Equipo 1</th><th>Equipo 2</th><th>Equipo 3</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

Ecuación de la gráfica
$f'(x) = 3x^2 - 36x + 72$
$f'(2) = 12$
$f'(5) = -33$</td>
<td>

$v(t) = P'(t) = 3t^2 - 36t + 72$
Corta al eje y en (0,72) yen el eje x en</td>
</tr>
</table>

	$f'(6) = -36$ $f'(7) = -33$ $f'(12) = 72$	$(6-\sqrt{12},0)$ *y* $(6+\sqrt{12},0)$ *Su vértice (6,-36)*

GRÁFICA DE VELOCIDAD. $V = \frac{D}{t}$ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Posición (km)	Tiempo (hrs)	Velocidad (Km/hr)	Aceleración (Km/hr²)
30	.5	60	120
55	1	55	55
70	1.5	46.667	31.1113
80	2	40	20
83	2.5	33.2	13.28
80	3	26.667	8.89.
75	3.5	21.428	6.12
65	4	16.25	4.06
50	4.5	11.11	2.468
35	5	7	1.4
17	5.5	3.0909	.56198
0	6	0	0
-20	6.5	-3.0769	-.4733
-35	7	-5	-.71428
-50	7.5	-6.667	[illegible]
-65	8	-8.125	1.01562
-75	8.5	-8.823	1.038
-80	9	-8.889	.9876
-83	9.5	-8.736	.91957
-80	10	8	.8
-70	10.5	6.667	.63995
-55	11	5	.4545
-30	11.5	2.6086	.2268
[illegible]	12	0	0
-10	-.16	+52.5	[illegible]
-70	-.5	-80	[illegible]

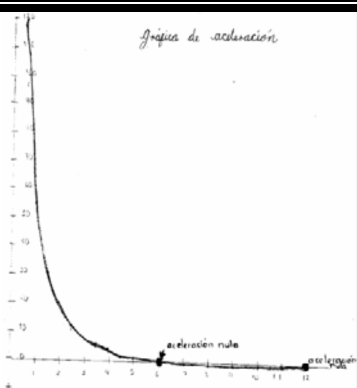
Cuadro.6.4 Análisis y comparación de los tres equipos de la pregunta d) de la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más'.

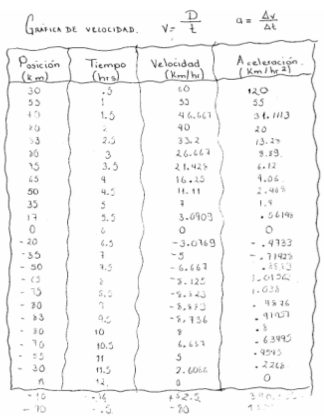
Pregunta e) Traza la gráfica de su aceleración.

El aprendizaje matemático del estudiante puede ser por intuición, el cual puede ser adquirido por su vida cotidiana y en la escuela.

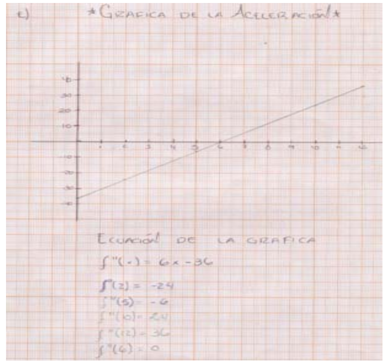
El estudiante al construir e interpretar las gráficas se relaciona por intuición y por conceptos erróneos adquiridos en su entorno en el que podemos ver la representación gráfica del Equipo 1. Los equipos 2 y 3 logran hacer una gráfica correspondiente a los cambios de aceleración. Transitan de la representación algebraica ala representación gráfica.

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3





Posición (km)	Tiempo (hrs)	Velocidad (Km/hr)	Aceleración (Km/hr²)
30	.5	60	120
55	1	55	55
70	1.5	46.667	31.1113
80	2	40	20
83	2.5	33.2	13.28
80	3	26.667	8.89
75	3.5	21.428	6.12
65	4	16.25	4.06
50	4.5	11.11	2.468
35	5	7	1.4
17	5.5	3.0909	.56198
0	6	0	0
-20	6.5	-3.0769	-.4733
-35	7	-5	-.71428
-50	7.5	-6.667	.8889
-65	8	-8.125	1.01562
-75	8.5	-8.823	1.038
-80	9	-8.889	.9876
-83	9.5	-8.736	.91957
-80	10	8	.8
-70	10.5	6.667	.63495
-55	11	5	.4545
-30	11.5	2.6086	.2268
[illegible]	12	0	0
-10	-.16	+52.5	[illegible]
-10	-.5	-20	[illegible]



Ecuación de la gráfica

$$f''(x) = 6x - 36$$

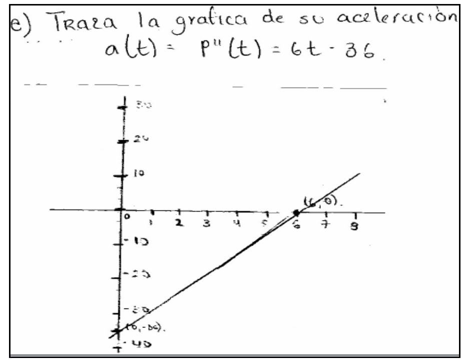
$$f''(0) = 24$$

$$f''(2) = -24$$

$$f''(5) = -6$$

$$f''(6) = 0$$

$$f''(12) = 36$$



$$a(t) = P''(t) = 6t - 36$$

Cuadro.6.5 Análisis y comparación de los tres equipos de la pregunta e) de la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más'.

Pregunta f) Formula dos preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.

Como podemos observar en el cuadro 4.6 los equipos generan sus respectivas preguntas. El Equipo 1 plantea sus preguntas a partir del valor numérico y gráfico correspondientes a la de aceleración y velocidad. Los equipos 1 y 2 sus preguntas son generadas a partir de la función de posición y sus derivadas f'(x) y f''(x), así mismo de sus respectivas graficas.

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
¿Cuándo	1. ¿Cuál es la ecuación de la gráfica?	1. Fundamenta porque no

alcanza una aceleración mayor? *Cuando se encuentra en una posición de 30 km en 30 minutos, alcanzando una velocidad de 60 km/h y una aceleración de* $120 km/h^2$. *¿Cuándo la aceleración es nula?* *La aceleración es nula cuando el móvil llega al punto donde se dirige en esta casa cuando y=0*	$f(x)=x^3-18x^2+72x$ *Procedimiento* *Puntos en los cuales la gráfica corta al eje de las abscisas en 0, en 6 y en 9 por lo tanto* $k[(x-0)(x-6)(x-12)]=y$ *Punto en el cual nos vamos a basar para sacar la constante k (2,80) por lo tanto sustituimos el punto (2,80) (x,y)* $k[(2-0)(2-6)(2-12)]=80$ $k80=80 \quad \Rightarrow k=1$ Entonces sustituimos k (constante) para sacar la ecuación: $1[(2-0)(2-6)(2-12)]=y$ $y=x^3-3x^2+72x$ *Ecuación de la "Gráfica 1"* 2. ¿Cuáles son las ecuaciones de la velocidad y la aceleración y por qué deducieron esto? *Ecuación de la velocidad* $f'(x)=3x^2-36x+72$ *Ecuación de la aceleración:* $f''(x)=6x-36$ *Procedimiento de la ecuación de la velocidad* *Como ya habíamos deducido la ecuación de la gráfica y la cual nos muestra la posición a distancia de la persona en motocicleta, es decir* $f(x)=$ *distancia en la Gráfica V.2.1 sabemos que* $f'(x)$ *es igual a la velocidad por lo que la ecuación de la Gráfica V. 2.1 la derivamos para sacar la velocidad:* *Si* $f(x)=x^3-18x^2+72x$	hay velocidad máxima. *Porque la gráfica de la velocidad es una parábola vertical cuya concavidad esta orientada hacia arriba.* *Sin embargo se podría considerar, sin mucha lógica, que la velocidad máxima es de t=0h hasta t=6h ya que son los valores que dan un valor de posición positiva.* 2. Observando la gráfica, explica porque se tarda más en regresar, que en ir, el motociclista. *Dado que la gráfica representa la posición y primero crece rápido y luego disminuye despacio su velocidad.*

	$\Rightarrow$ $f'(x)=3x^2-36x+72 \Rightarrow f''(x)=6x-36$ *Ahora como lo muestra esta ecuación la gráfica representa una parábola que corta al eje de las ordenadas en 72 esto por el término independiente… Pero ya tabulando tenemos que la parábola es cóncava hacia arriba, su vértice esta en el punto (6,36) de lo que podemos deducir sus intervalos crecientes y decreciente.*	

Cuadro.6.6 Análisis y comparación de los tres equipos de la pregunta f) de la Actividad de Aprendizaje 'Acércate más'.

Pregunta g) Escribe un párrafo que describa los cocimientos de la persona que se representa en la gráfica.

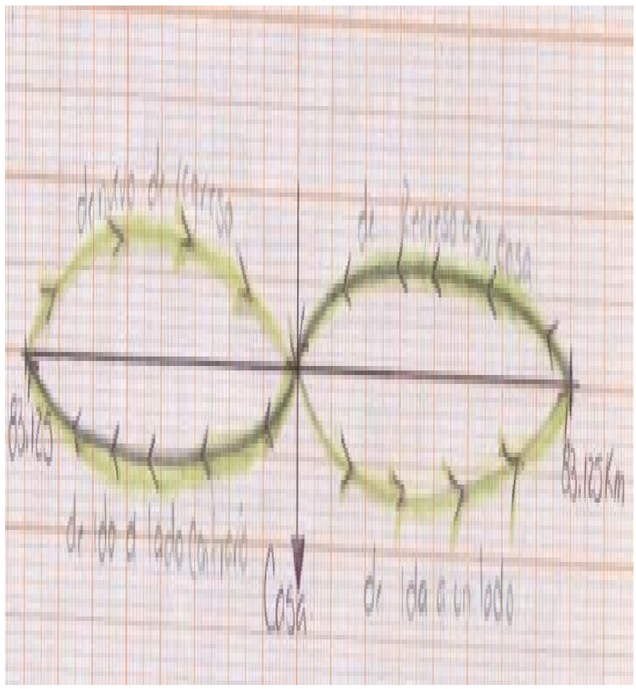
Todos los equipos lograron describir la trayectoria de la persona en la motocicleta de la gráfica de posición.

El equipo 1 describe la trayectoria de la persona que sale de su casa y comienza el viaje en bicicleta y que su casa es un punto sobre esta línea y cuando va de ida y devuelta.

El equipo 2 realiza su representación gráfica en la que consideran al tiempo y posición de la trayectoria del móvil.

El equipo 3 en su descripción de la trayectoria del móvil considera al eje horizontal al tiempo y al eje vertical la posición del móvil.

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
"En cuanto a la primer gráfica podemos decir que la curva positiva de la gráfica representa la ida, tomando que	*"En la gráfica se muestra como el móvil sale de su casa con la velocidad alta después se nota levemente como desciende su velocidad hasta llegar al punto* $\left(\frac{5}{2},\frac{665}{8}\right)$ *lo que indica que llega a una distancia máxima de 83.125 km y después regresa a su casa de nuevo.*	*"Desde su casa a un tiempo cero (0) el motociclista se aleja hasta un tiempo de* $6-\sqrt{12}\approx 2.54\ horas$ *que son aproximadamente*

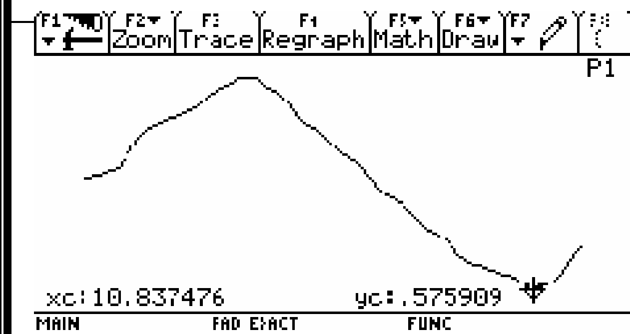
cuando la velocidad es cero se encuentra el lugar de partida y la curva situada en el cuadrante negativo, representa la trayectoria de regreso, volviendo a quedar en velocidad cero (casa punto de partida)”.	*Llegando a su casa vuelve acelerar y su velocidad es de nuevo alta también hasta llegar otra vez a una distancia de 83.125 km pero hacia el lado contrario del que recorrió anteriormente, es decir hace esto:”* 	*dos horas y media, obteniendo lógicamente la posición más lejana a su casa y en seguida regresa por el mismo camino a su casa llegando en el instante en que han transcurrido 6 horas”.*

Cuadro.6.7 Análisis y comparación de los tres equipos de la pregunta g) de la Actividad de Aprendizaje ‘Acércate más’.

Secuencia II Con uso de tecnología.

El equipo 2 efectúa su modelo gráfico de los cambios de posición de móvil. Los estudiantes tomaron la decisión la escala de la gráfica y las distancias recorridas en distintos instantes.

Con el uso de tecnología como la calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento CBR los estudiantes disimulan una gráfica que describe los cambios de posición del móvil. La simulación se adapta al alcance del sensor. Los equipos contrastan lo descrito del movimiento del móvil con el modelo gráfico y la situación

<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><td></td></tr>
<tr><td>Los estudiantes de los tres equipos lograron relacionar la representación verbal con la representación de la simulación para transitar entre las diferentes representaciones empleadas como son la verbal, la numérica, la gráfica y la simulación.</td></tr>
</table>

Con uso de tecnología los estudiantes ven más claramente la trayectoria del móvil. En la simulación establecen las variables (el tiempo en segundos y la distancia en metros). Contrastan su descripción verbal y representación gráfica a lápiz y papel con las gráficas obtenidas con el uso de tecnología como son las calculadoras con poder de graficación; grafican la relación entre la posición y la velocidad. Relacionan la representación verbal con la representación de simulación

I.1. Conclusiones

De acuerdo con la pregunta de investigación de este proyecto y tomando en cuenta las características globales de la gráfica hicieron que los estudiantes consideraran las formas Básicas de graficación y los significados que le asignaron a las variaciones de primer y segundo órdenes en la Secuencia I (sin uso de la tecnología) y en la secuencia II (con uso de la tecnología).

El aprendizaje matemático del estudiante puede ser por intuición, por su vida cotidiana, y lo adquirido en la escuela.
El estudiante al construir e interpretar las gráficas se relaciona por intuición y por conceptos erróneos adquiridos en su entorno.

Los equipos en la gráfica de posición obtienen la función de posición y su primera deriva la velocidad y la segunda deriva la aceleración. Los estudiantes relacionan la función $f(x)$ a partir de la representación gráfica y $f'(x)$ a partir de la función algebraica $f(x)$. Logran ver el comportamiento de la gráfica de posición en relación con la simulación.

En la gráfica de la aceleración los estudiantes recurren a todo lo que saben y logran lo que se les pide es decir, transitan de una representación gráfica a la representación algebraica, de la representación algebraica a otra representación algebraica y de la algebraica a la representación gráfica.

Se utilizó para evaluar la competencia de graficación, en el contexto de un curso de cálculo, de las formas básicas y su interpretación como la relación que hay entre una función y sus funciones derivadas, en representaciones verbales, algebraicas, tabulares y gráficas en el contexto de problemas de aplicación.

De esta forma se identifica la habilidad en la interpretación y construcción de gráficas de los estudiantes.

El diseño de actividades como modelación – graficación en el ámbito escolar permite la construcción de diseños de situación real de movimiento aprendizajes cognitivos en el estudiante y la resolución de Actividades de Aprendizaje surgidos en su entorno. En términos de situación de movimiento correspondientes a las variaciones de la posición y de la velocidad.

La red de actividades de aprendizaje de graficación- modelación se articula de varias maneras para cumplir diversos objetivos didácticos que permitan al estudiante el análisis y la comprensión matemática de las graficas, la simulación en la situación de modelación del movimiento donde aparecen de forma simultánea la posición y las variaciones de la posición y de la velocidad.

La tecnología en la actualidad está modificando el sistema didáctico en las que nos permite presentar Actividades de Aprendizaje para realizar la simulación de la trayectoria de un móvil.

Los equipos logran relacionar la representación verbal y gráfica del movimiento del móvil con la representación de la simulación mediante el uso de calculadora con poder de graficación y sensor de movimiento CBR.

En general podemos decir, tomando en cuenta todo lo escrito, con respecto a nuestra hipótesis es que, en una situación de modelación del movimiento, el tratamiento gráfico simultáneo de las variaciones de una función corresponde a la relación que guardan la función $f(x)$ y sus derivadas sucesivas $f'(x)$ y $f''(x)$ en una situación real de movimiento de una persona que recorre una cierta distancia que con la red de actividades graficación-modelación potencia la tecnología contribuye a entender como construyen algunos estudiantes de bachillerato gráficas usando la tecnología de calculadoras con poder de graficación y sensores para modelar situaciones de movimiento. Otra contribución es en pensar en actividades de aprendizaje que considere variación mayor al segundo orden.

Capítulo VII
Referencias

Capítulo I. Referencias

Arrieta, J. (2003). *La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México, D.F, México.

Azcárate, C., Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. México: Editorial síntesis.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., J. Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. México.: Épsilón, 42, 353-369.

Cantoral, R., y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento Matemático*. México D.F. Pretince Hall y Pearson Education.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Cordero, F. Solís M. (2001). *Las gráficas de las Funciones como una argumentación del cálculo*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gasco, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: ICE-Horsori.

Flores, C. (2005). Características de las gráficas y su relación con la modelación de situaciones de movimiento. [Resumen]. *Resúmenes de la Décimo novena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* Montevideo, Uruguay.

IPN (1994-1996). Planes y programas de estudios de Matemáticas I, II, III, IV, V y VI. Documentos internos de trabajo. Dirección de Educación Media Superior. México, D.F. Autor.

IPN (2003). *Geometría Analítica*. Libro para el estudiante. IPN. México, D. F.

IPN (2003). *Geometría Analítica*. Libro para el profesor. IPN. México, D.F.

IPN (2004). *Álgebra. Libro para el profesor*. IPN. México, D.F.

IPN (2004). *Cálculo Diferencial*. Libro para el estudiante. IPN. México, D. F.

IPN (2004). *Cálculo diferencial*. Libro para el profesor. IPN. México, D.F.

IPN (2004*). Cálculo Integral.* Libro para el profesor. IPN. México, D.F.

IPN (2006). *Geometría Analítica.* Libro del Profesor. IPN. ISBN: 970-36-0258-4.

IPN (2002). *Álgebra*. Libro para el estudiante. IPN. México, D. F.

IPN, (2004). *Cálculo Integral*. Libro para el estudiante. IPN. México, D. F.

Kilpatrick, J; Gómez, P; Rico, L (1995); *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas*. Evaluación. Historia. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Leinhardt, G., Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990) Traducción hecha por el M. en C. Hernández, R. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990). *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching.* Review of Educational Research, 60, 1, 1-64.

Moreno A., L. (2002); i*nstrumentos matemáticos computacionales; Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización; Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas.* En Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. (pp 81-98)

Phillips, E., Butts, T. y Shaughnessy, M. (1999). *Álgebra con Aplicaciones*. México: Editorial Oxford.

Romano, S.; Suárez, L.; Ortega P. (2003) *Los dispositivos de transducción para la modelación en las clases de matemáticas.* Memorias del Primer Congreso de Investigación del Nivel Medio Superior.

Ruiz, L. *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico* / Luisa Ruiz Higueras.

Suárez, L., Cordero, F., Daowz, P., Ortega, P., Ramírez, A. y Torres, J.L. (2005). *De los Paquetes Didácticos hacia un Repositorio de Objetos de Aprendizaje: Un reto educativo en matemáticas*. Uso de las gráficas, un ejemplo. RIED: revista iberoamericana de educación a distancia, ISSN 1138-2783, Vol. 8, Nº 1-2, 2005, pags. 307-334

Suárez, L.; Flores, C.; Gómez, A.; Licona, R. (2005). *Uso de las gráficas a través de actividades de modelación matemática con calculadoras y dispositivos transductores*. Resumen del taller aprobado para su presentación en el Quinto Encuentro de Tecnología Educativa del IPN. Consultado en http://www.te.ipn.mx/quintoencuentro/registro/taller_opc_ins.asp el 16 de agosto de 2006.

Testa, Y. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada del Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN.

Zill, D. (1987*). Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

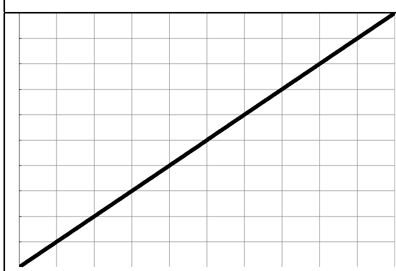
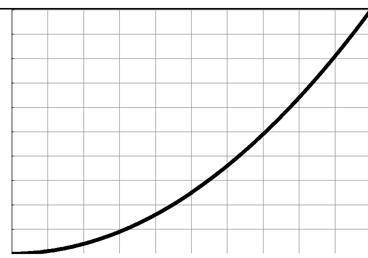
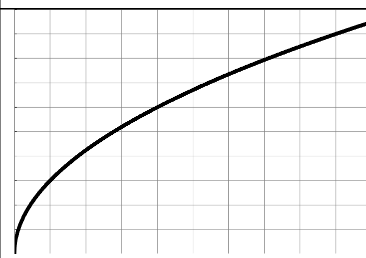
Anexos

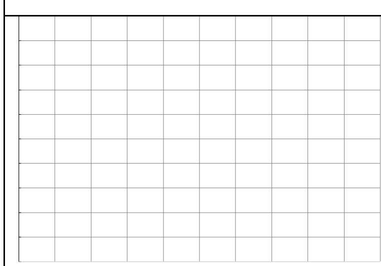
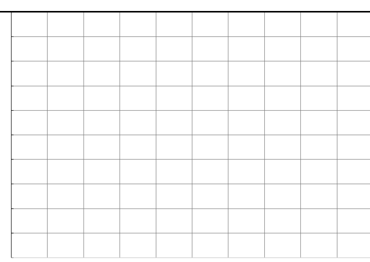
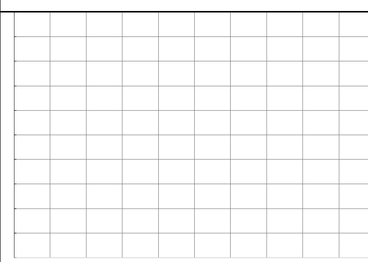
Anexos

En la presente investigación en el análisis de la gráfica el estudiante considera las formas básicas de graficación y los significados que le asignen los estudiantes a las variaciones de primer y segundo órdenes se realiza su análisis desde su aspecto verbal, aspecto geométrico, aspecto numérico y el aspecto algebraico. El orden de cada uno de estos aspectos se considera debido a su representación gráfica.

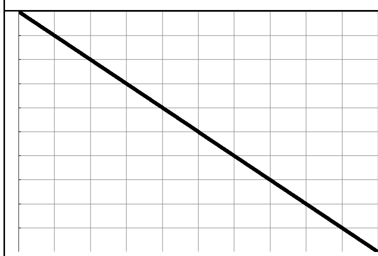
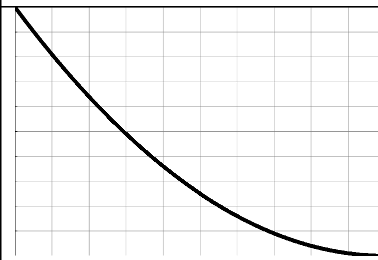
<u>Formas básicas</u>

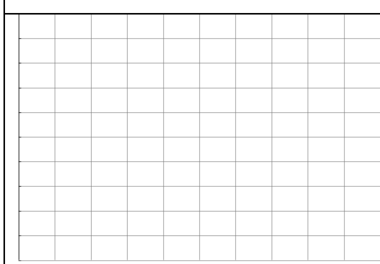
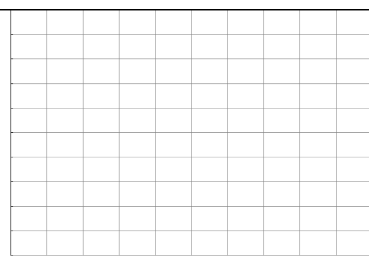
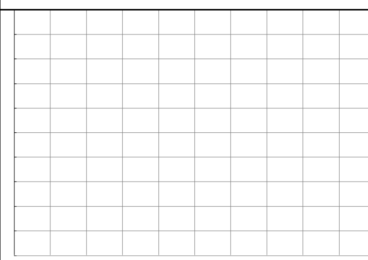
Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.

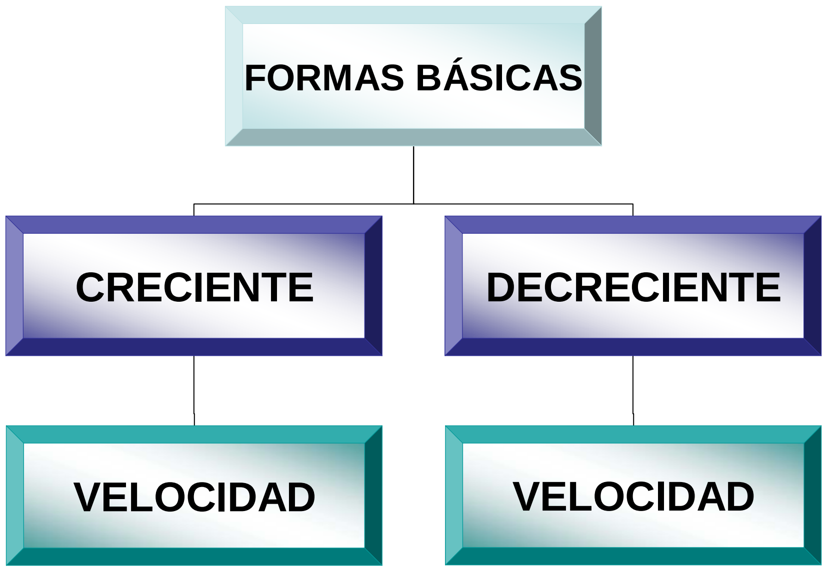
(a)	(b)	(c)
		

Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.

(d)	(e)	(f)
		

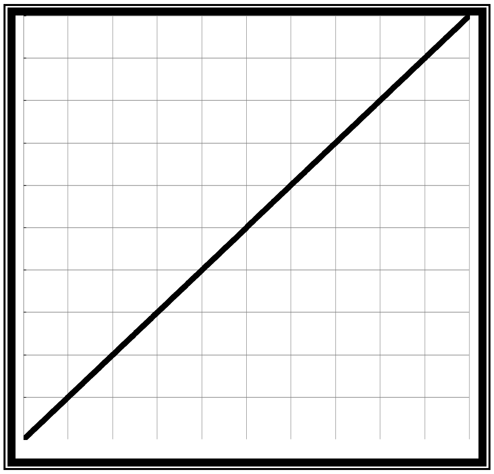


ANÁLISIS FORMAS BÁSICAS

El análisis de la situación-problema “formas básicas de graficación” se considera desde su aspecto verbal, aspecto geométrico (representación gráfica de posición y de la velocidad), aspecto numérico (situación numérica de la velocidad), el aspecto algebraico y por simulación. Para obtener la velocidad se considera la aproximación por velocidad promedio y por su característica global de la gráfica. A continuación se describe algunos de los aspectos de la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal.

En matemáticas tenemos curvas cóncavas hacia arriba y cóncavas acalla abajo, en este caso solo se consideraran las obtenidas en el análisis de las formas básicas de graficación.

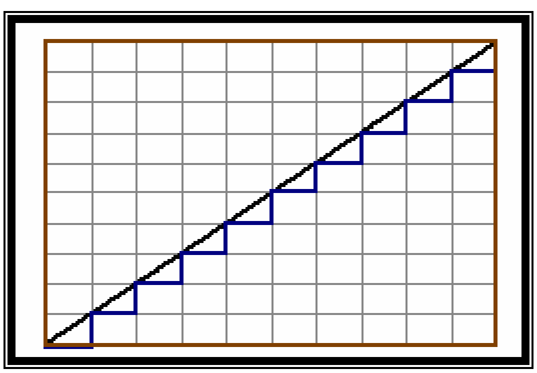
Forma básica. Tipo 1



Si observamos la gráfica es creciente.
La magnitud aumenta o crece a medida que pasa el tiempo.
En esta gráfica la posición del móvil es constante.

VERBAL MATEMÁTICA (Forma básica. Tipo 1)

Ahora analizamos la posición del móvil desde el punto de vista verbal y representamos su pendiente para ver la magnitud con forme pasa el tiempo.
La siguiente representación gráfica nos muestra que a incrementos iguales del tiempo le corresponde aumento de igual magnitud en la posición.



La razón de cambio de la posición (magnitud) respecto al tiempo es positiva (pendiente $m>0$). La gráfica de la posición x contra el tiempo t es una recta con pendiente v (velocidad constante). La pendiente nos representa la velocidad por lo que se considera la aproximación por velocidad promedio. De aquí se desprende que la velocidad es constante con una pendiente igual a cero (m=0). Ahora otra forma de resolver el problema es a partir de la forma algebraica.

ALGEBRAICA (Forma básica. Tipo 1)

Consideramos el punto del eje x a la altura de 1, cuando t=1 y su punto de origen (x=0 y t=0).

Puntos (0,0) (x_1, y_1)

(1,1) (x_2, y_2)

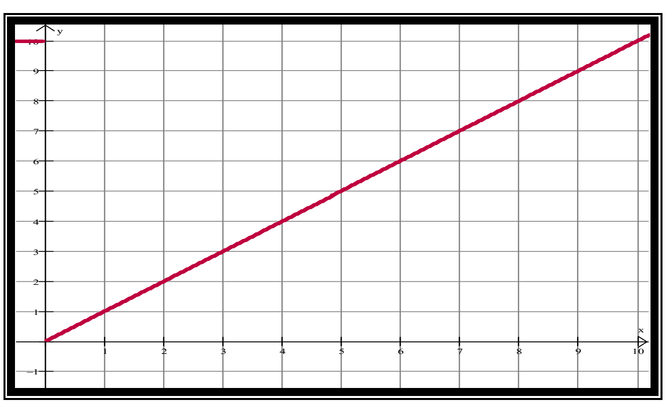
Señalamos estos puntos para realizar la aproximación por velocidad promedio y así, obtener la ecuación lineal que nos representa la velocidad del móvil.

Considerando los puntos (0,0) y (1, 1) se obtiene la pendiente (m=1).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

Se considera la ecuación lineal y se sustituyen los valores de la pendiente, x_1 y x_x.

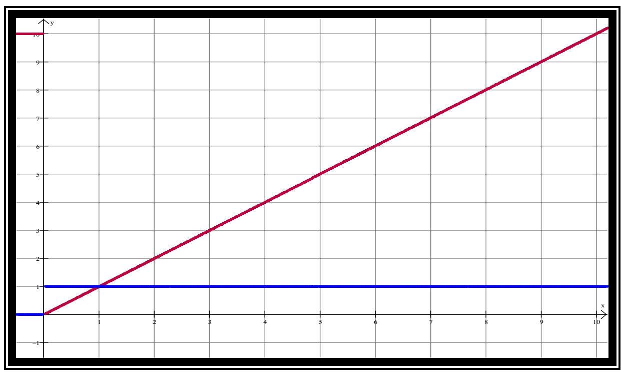
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 1(x - 0)$$
$$\therefore \quad y = x$$



Considerando la pendiente y la ecuación lineal de la forma $y = mx + b$ obtenemos la ecuación de la posición del móvil y la ecuación de la velocidad del móvil mediante su primera derivada.

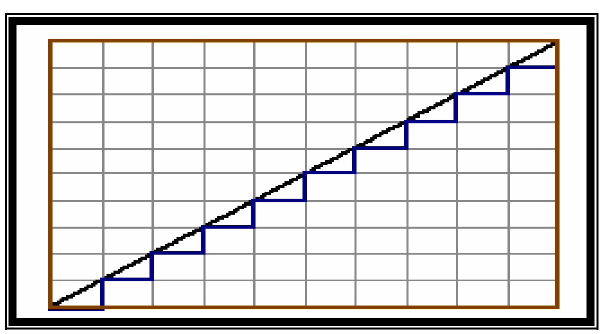
Posición $y = x$

Velocidad $y' = 1$



SITUACIÓN NUMÉRICA (Forma básica. Tipo 1)

Se considera la gráfica y se representan las pendientes mediante la fórmula de pendiente $\left(m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$ o bien en la representación gráfica.



Mediante la aproximación por velocidad promedio se tiene la siguiente tabla.

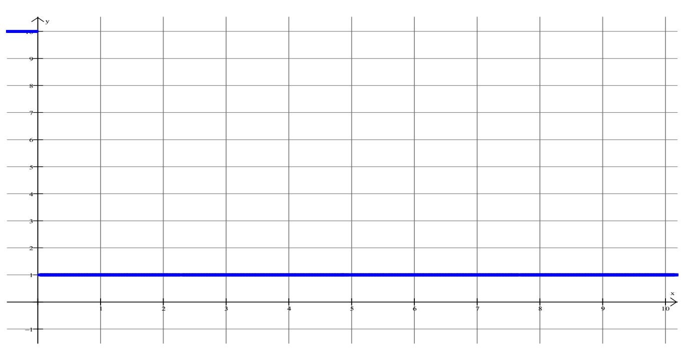
Posición	*Velocidad (pendiente)*
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1

A través de los datos de posición versus tiempo para la velocidad son obtenidos por medio de la fórmula de velocidad expresada como $v = \frac{d}{t}$. Mediante la función $y = x$ se tabula los valores. La siguiente gráfica da lugar a la velocidad constante del móvil con pendiente igual a cero.

Gráfica. Velocidad del móvil.

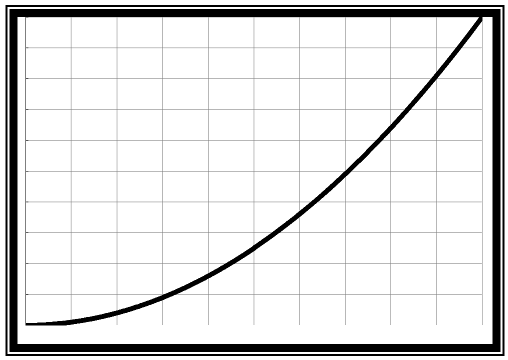
Posición $y = x$

Velocidad $= 1$



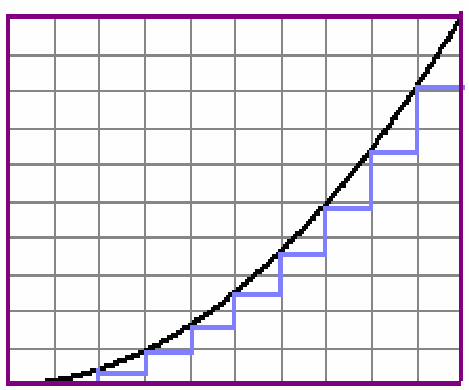
En la aproximación por velocidad promedio la pendiente de la tangente es el valor de la derivada en cada punto. En la gráfica de velocidad la pendiente de una curva es igual al valor de la derivada en cada punto (x_i, y_i).

Forma básica. Tipo 2



VERBAL MATEMÁTICA (Forma básica. Tipo 2)

Ahora analizamos la posición del móvil de la forma básica tipo 2



Gráfica creciente y cóncava hacia arriba. La magnitud crece cada vez más rápidamente

.

Los incrementos Δy son positivos y cada vez más grandes. La razón de cambio de la magnitud respecto al tiempo es positivo (m>0). La velocidad aumenta a medida que pasa el tiempo. La pendiente en cada punto nos representa la velocidad la cual se obtiene mediante la aproximación por velocidad promedio.

ALGEBRAICA (Forma básica. Tipo 2)

Los puntos obtenidos mediante la aproximación por velocidad promedio se pueden obtener la ecuación lineal que nos representa la velocidad del móvil. Tenemos (0,0) y $(1,\frac{1}{10})$.

Considerando los puntos (0,0) y $(1,\frac{1}{10})$ obtenidos se obtiene la pendiente (m=1/10).

Puntos (0,0) (x_1, y_1)

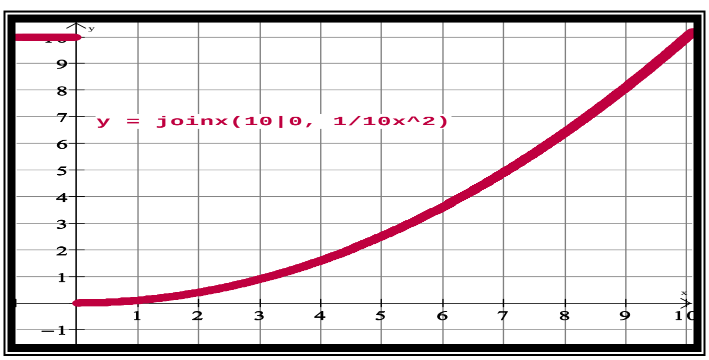
$(1,\frac{1}{10})$ $(x_{1,}y_1)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=\frac{1}{10}x$$

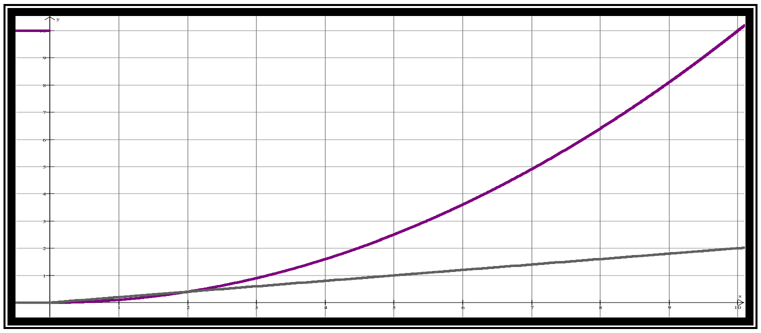
Posición $y=\frac{1}{10}x^2$



Entonces se tiene la función de posición del móvil y de la velocidad del móvil.

Posición $y=\frac{1}{10}x^2$

Gráfica de: Velocidad $y' = \frac{1}{5}x$



SITUACIÓN NUMÉRICA (Forma básica. Tipo 2)

Se considera la gráfica posición versus tiempo y por la expresión algebraica se obtiene la velocidad del móvil expresados en la siguiente tabla.

Tiempo	***Posición***	***Velocidad***
0	***0.0***	***0***
1	***0.1***	***0.2***
2	***0.4***	***0.4***
3	***0.9***	***0.6***
4	***1.6***	***0.8***
5	***2.5***	***1***
6	***3.6***	***1.2***
7	***4.9***	***1.4***
8	***6.4***	***1.6***
9	***8.1***	***1.8***
10	***10***	***2***

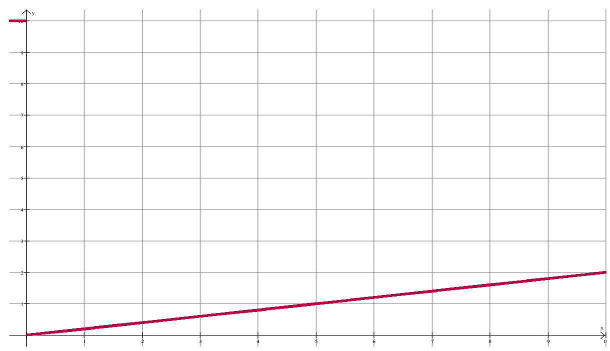
Mediante la función $y' = \frac{1}{5}x$ se tabula. La siguiente gráfica da lugar a la velocidad constante del móvil con pendiente mayor a cero.

Velocidad $y' = \frac{1}{5}x$

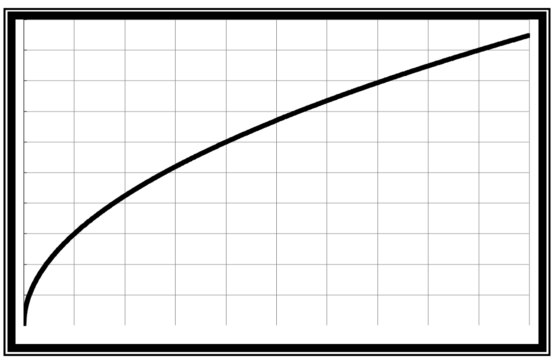
La siguiente gráfica da lugar a la velocidad cada vez más rápida.

Posición $y = \frac{1}{10}x^2$

Velocidad $y' = \frac{1}{5}x$



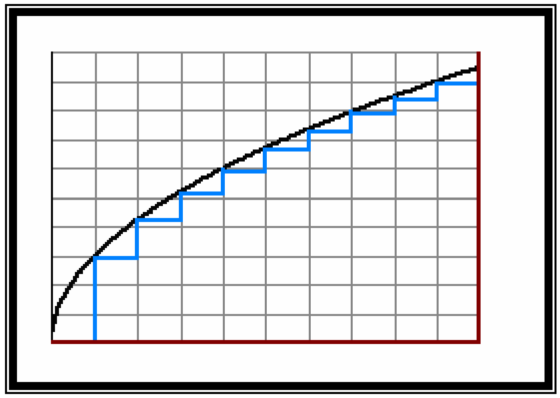
Forma básica. Tipo 3



VERBAL MATEMÁTICA (Forma básica. Tipo 3)

Ahora se analiza la posición del móvil desde el punto de vista verbal y representamos su pendiente para ver la magnitud con forme pasa el tiempo.

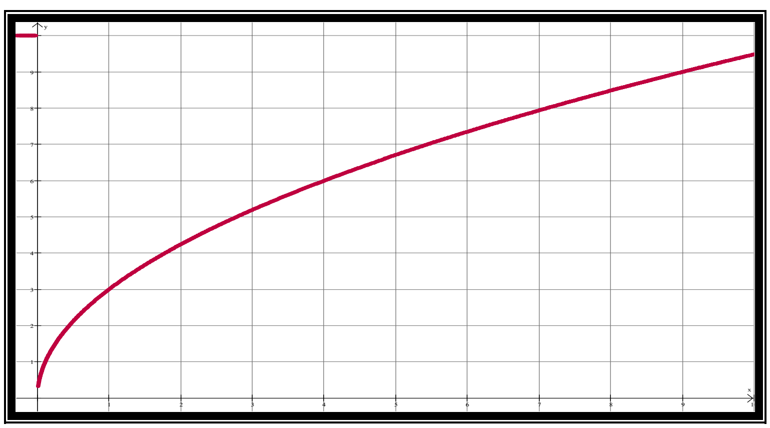
La gráfica es creciente y cóncava hacia abajo. La magnitud crece cada vez más lentamente.



Al principio es rápido y después va lentamente su crecimiento. Parte de la gráfica con una magnitud con crecimiento cada vez más lento se dice que es cóncava hacia abajo. Conforme pasa el tiempo decrece cada vez más lentamente y las pendientes (positivas) van decreciendo (pequeños).

La pendiente es la velocidad, dada su forma de la gráfica se considera que es una raíz.

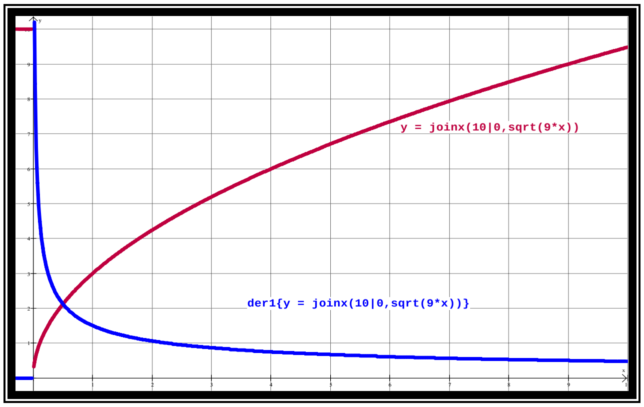
ALGEBRAICA (Forma básica. Tipo 3)



Se busca la raíz que nos permita tener es forma y así, obtener la ecuación lineal que nos representa la posición y la velocidad del móvil.

Posición $f(x) = \sqrt{9x}$

Velocidad $f'(x) = \dfrac{9}{2\sqrt{9x}}$

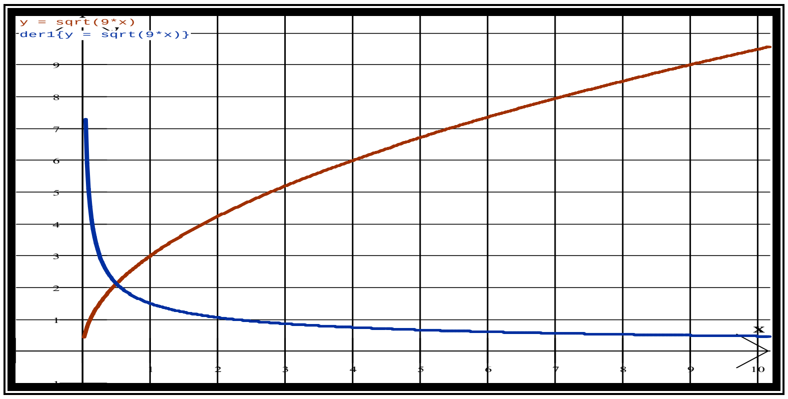


SITUACIÓN NUMÉRICA (Forma básica. Tipo 3)

Los valores son obtenidos a partir de la función.

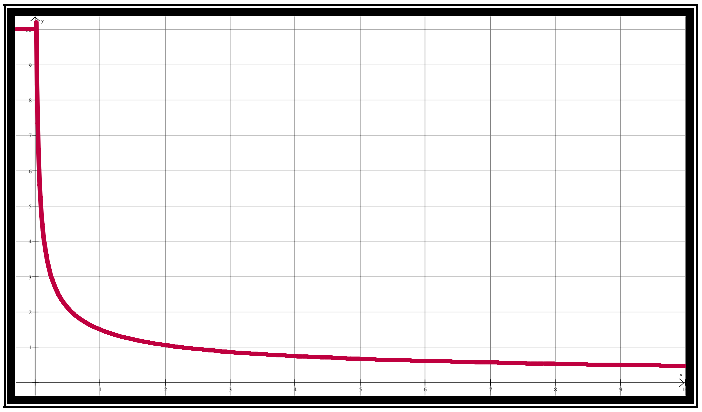
Tiempo	Posición	Velocidad
0	0.00	indefinido
1	3.00	1.50
2	4.24	1.06
3	5.19	0.86
4	6.00	0.75
5	6.71	0.67
6	7.35	0.61
7	7.94	0.56
8	8.48	0.53
9	9.00	0.50
10	9.49	0.47

Gráfica de la posición y velocidad.

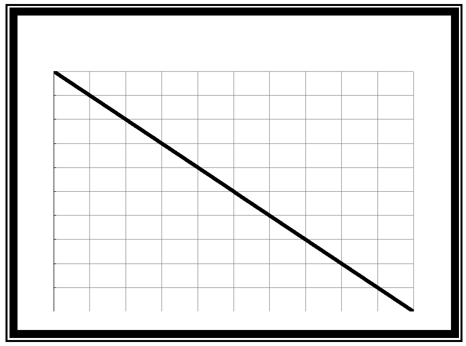


Posición $f(x) = \sqrt{9x}$

Velocidad $f'(x) = \dfrac{9}{2\sqrt{9x}}$



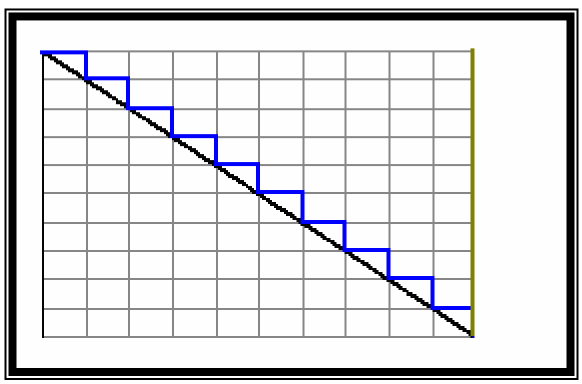
Forma básica. Tipo 4



El decrecimiento es siempre igual como era de esperarse por ser una recta.

VERBAL MATEMÁTICA (Forma básica. Tipo 4)

Se analiza la posición del móvil de la siguiente gráfica desde el punto de vista verbal y representamos su pendiente para ver la magnitud con forme pasa el tiempo.



La forma básica tipo 4 se observa que a incrementos Iguales del tiempo le corresponde aumento de igual magnitud. En este caso la razón de cambio de la magnitud respecto al tiempo es negativo (pendiente m<0). La magnitud disminuye o decrece a medida que pasa el tiempo. La gráfica de posición versus tiempo es una recta con pendiente (velocidad constante). La pendiente nos representa la velocidad por lo que se considera la aproximación por la velocidad promedio. De aquí que se desprende que la velocidad es constante con una pendiente igual a cero $(m = 0)$ con valor de y= -1.

ALGEBRAICA (Forma básica. Tipo 4)

Señalamos los siguientes puntos para realizar la aproximación por velocidad promedio y así, obtener la ecuación lineal que nos representa la velocidad del móvil.

Considerando los puntos:

(0,0) (x_1, y_1)

(1,-1) (x_2, y_2)

Mediante la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$ se obtiene la pendiente (m= -1). Se realiza con cada punto que nos muestra en la gráfica. A través de la pendiente y la ecuación lineal obtenemos la ecuación que representa la gráfica.

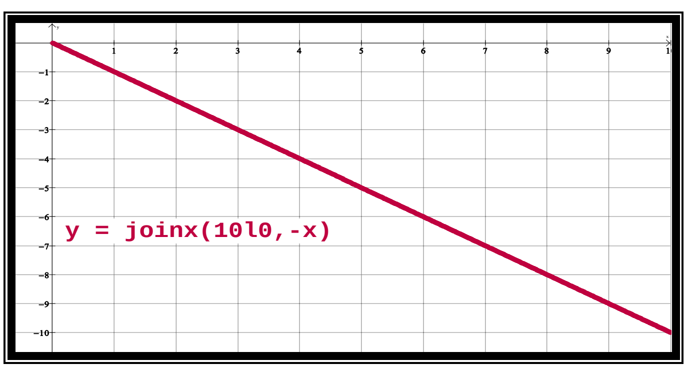
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y = -x$$

Posición $y = -x$

Velocidad $y' = -1$

La expresión algebraica corresponde.

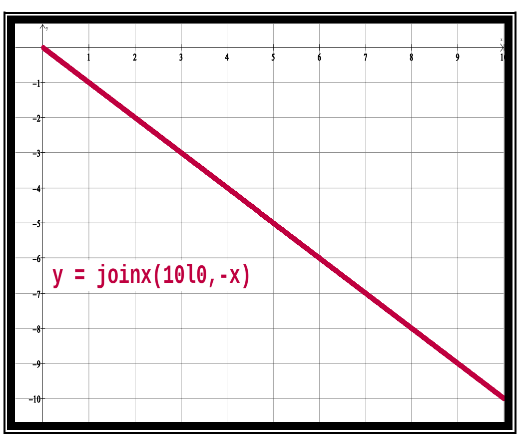
Posición $y = -x$

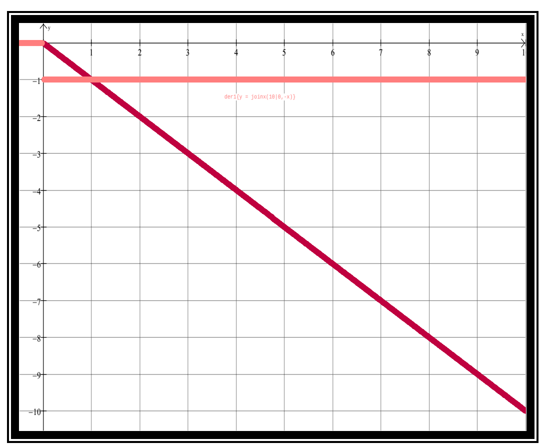


<u>*SITUACIÓN NUMÉRICA*</u> (Forma básica. Tipo 4)

Para la tabulación tenemos dos formas de obtener los valores. Primero consideramos el razonamiento verbal en la que podemos obtenerlos mediante la aproximación por velocidad promedio y se llega a la siguiente tabla. Un segundo método se tiene la expresión algebraica de la velocidad considerando la posición del móvil y se llega a la siguiente tabla.

Tiempo	***Posición***	***Velocidad***
0	0	-1
1	-1	-1
2	-2	-1
3	-3	-1
4	-4	-1
5	-5	-1
6	-6	-1
7	-7	-1
8	-8	-1
9	-9	-1
10	-10	-1





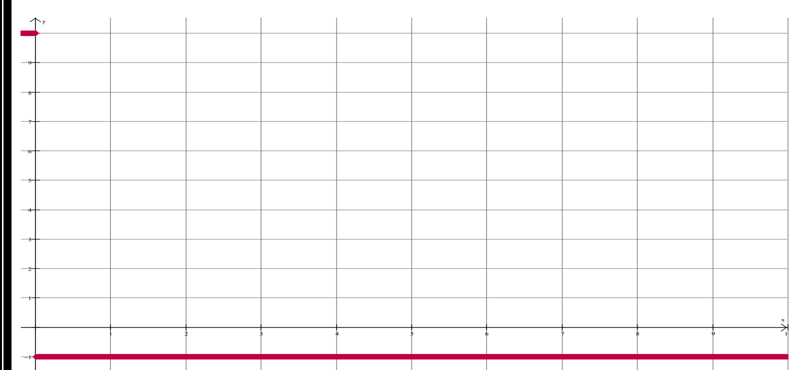
A través de los datos de posición versus tiempo para la velocidad son obtenidos por medio de la fórmula de velocidad expresada como $v = \frac{d}{t}$.

En la tabla de valores correspondientes de tiempo y posición los incrementos iguales del tiempo le corresponden disminuciones de igual magnitud.

La siguiente gráfica da lugar a la velocidad constante del móvil (de regreso) con pendiente igual a cero. Si la tangente es paralela al eje x su pendiente es igual acero y su derivada es igual acero (m=0).

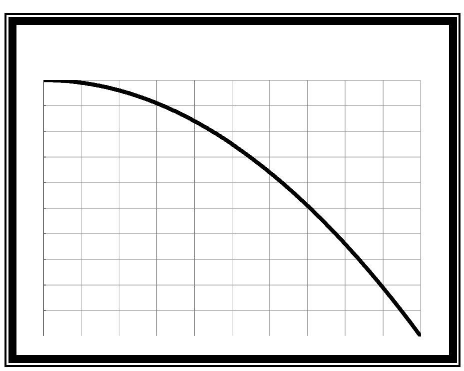
Posición $y = -x$

Velocidad $y' = -1$



La velocidad es constante del móvil.

Forma básica. Tipo 5



VERBAL MATEMÁTICA (Forma básica. Tipo 5)

La gráfica es decreciente y cóncava hacia abajo. Representamos su pendiente para ver la magnitud con forme pasa el tiempo.

Los Δy son negativos y cada vez más grandes. La razón de cambio de la magnitud respecto al tiempo es negativo (m<0).
La magnitud aumenta más rápido a medida que pasa el tiempo, así, su velocidad es más rápido con forme pasa el tiempo.

ALGEBRAICA (Forma básica. Tipo 5)

Consideramos el punto del eje x a la altura de -1, cuando $t=\frac{1}{10}$ y el punto de origen (0,0).

Puntos (0,0) (x_1, y_1)

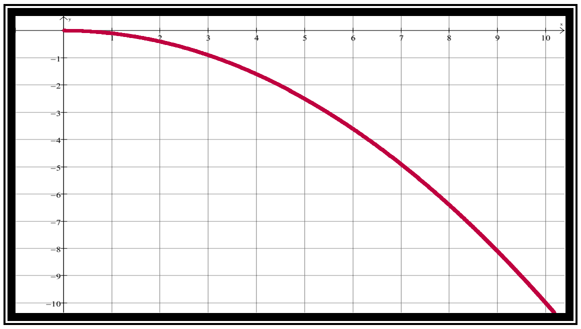
(-1, $\frac{1}{10}$) (x2, y2)

Señalamos estos puntos para realizar la aproximación por velocidad promedio y así obtener la ecuación lineal que nos presenta la velocidad del móvil.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y=-\frac{1}{10}x$$

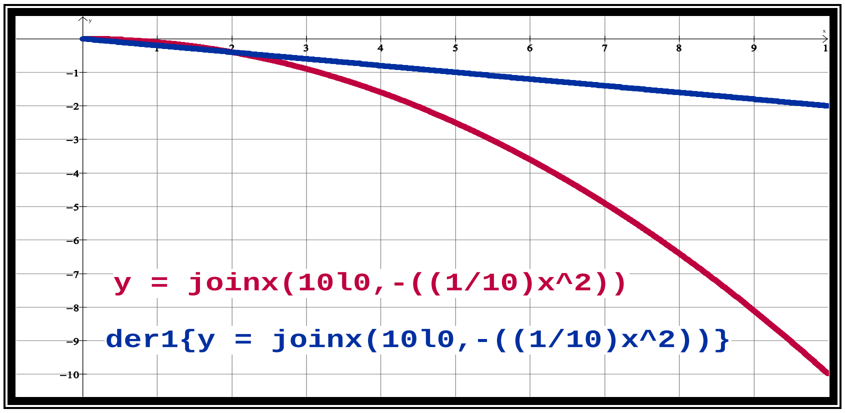
A partir de la función de la posición del móvil se obtiene la función de la velocidad mediante su derivada.

Posición $y = -\frac{1}{10}x^2$



Posición $y = -\frac{1}{10}x^2$

Velocidad $y' = -\frac{1}{5}x$



<u>*SITUACIÓN NUMÉRICA*</u> (Forma básica. Tipo 5)

Velocidad instantánea mediante la pendiente de recta tangente. La siguiente tabla nos muestra los valores de tiempo, posición y velocidad.

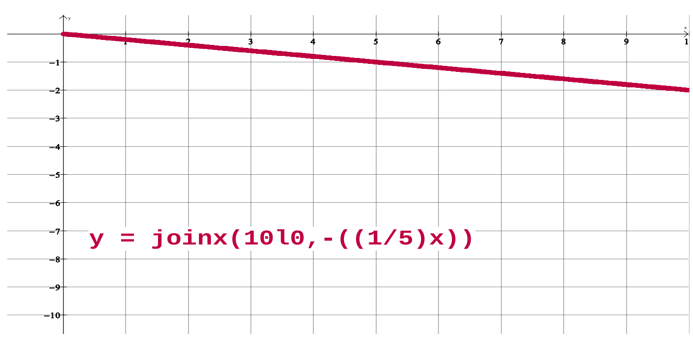
Tiempo	*Posición*	*Velocidad*
0	*0.0*	*0*
1	*-0.1*	*-0.2*
2	*-0.4*	*-0.4*
3	*-0.9*	*-0.6*
4	*-1.6*	*-0.8*
5	*-2.5*	*-1*
6	*-3.6*	*-1.2*
7	*-4.9*	*-1.4*
8	*-6.4*	*-1.6*
9	*-8.1*	*-1.8*
10	*-10*	*-2*

Velocidad $y' = -\frac{1}{5}x$

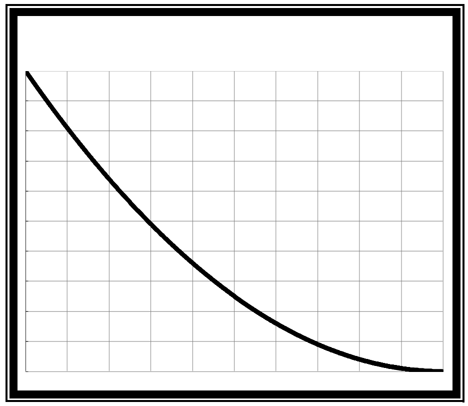
La siguiente gráfica da lugar a la velocidad cada vez más rápido del móvil con pendiente negativa (de regreso).

Posición $y = -\frac{1}{10}x^2$

Velocidad $y' = -\frac{1}{5}x$

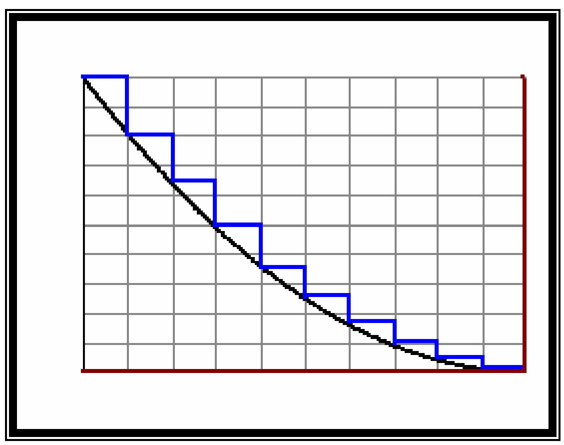


Forma básica. Tipo 6



Gráfica decreciente y cóncava hacia arriba. La magnitud de interés decrece cada vez más lentamente.

VERBAL MATEMÁTICA (Forma básica. Tipo 6)



La posición del móvil disminuye de manera no uniforme y mantiene un comportamiento como lo muestra la gráfica de Posición contra tiempo. El decrecimiento es cada vez menor. Velocidad más lenta.

Su pendiente son negativos y cada vez más pequeños (De regreso).

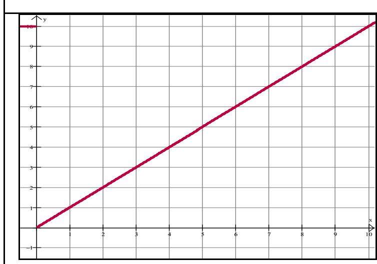
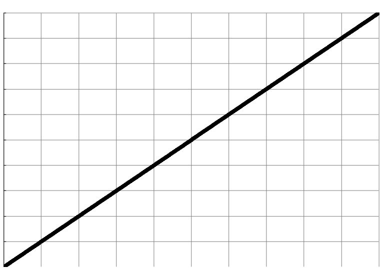
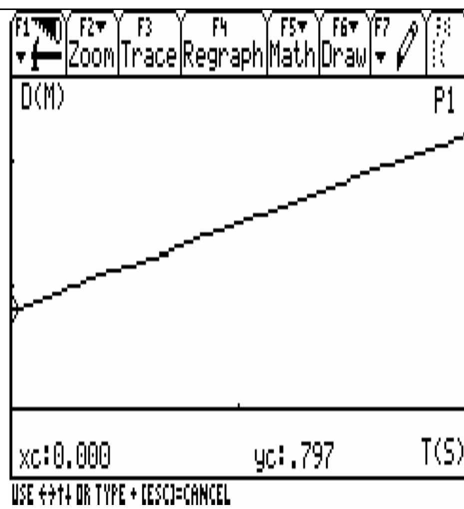
ALGEBRAICA (Forma básica. Tipo 6)

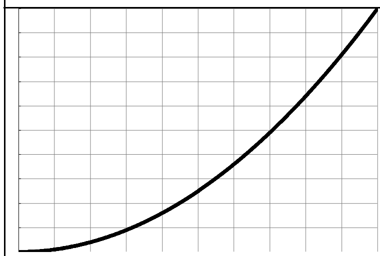
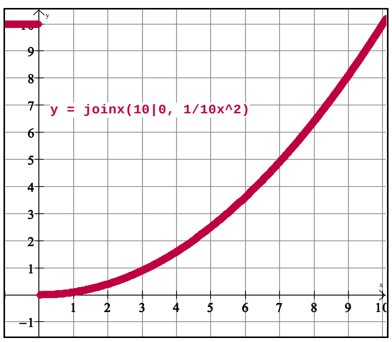
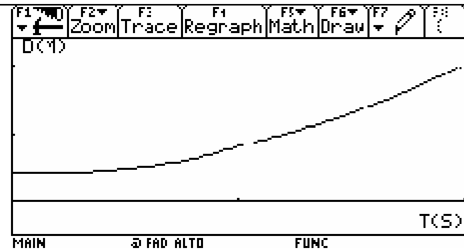
Se busca la función a este tipo de gráfica.

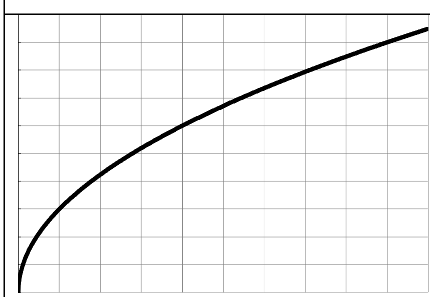
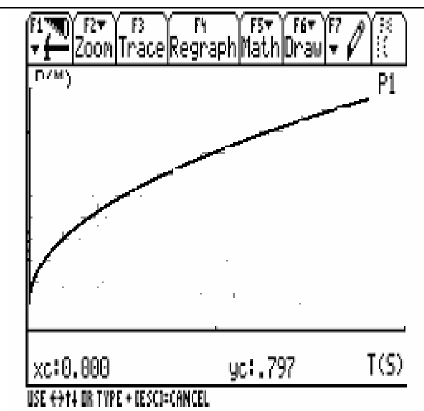
Otra forma de resolver el problema mediante el uso de una calculadora con poder de graficación. Para esto se toman los valores de velocidad y del tiempo para luego introducirlo en la calculadora y obtener sus respectivas gráficas.

La última forma que podría ser para obtener la gráfica de velocidad es mediante el uso de calculadoras con poder de graficación y sensores de movimiento. Para esto la persona simula el movimiento y al mismo tiempo se genera una gráfica.

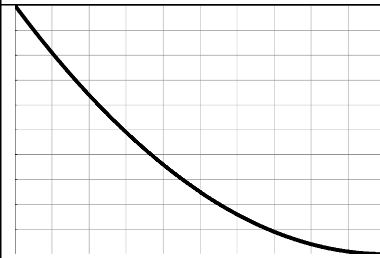
Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.

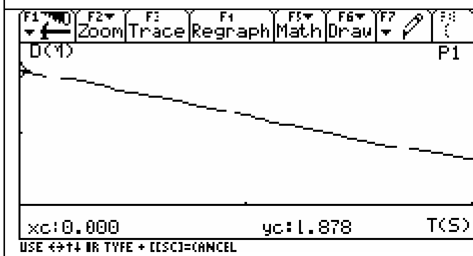
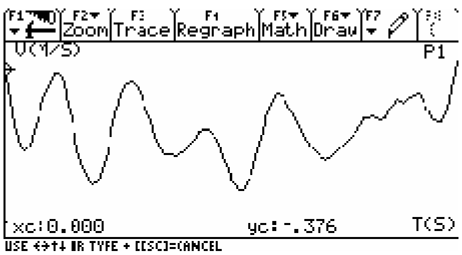
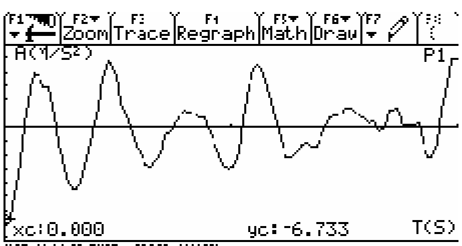
(a)		
 		Creciente constante. Trazo lineal creciente. Variación de primer orden constante $f'(x) \neq 0$ $f'(x) = k$, $f'(x) > 0$ Variación de segundo orden nula $f''(x) = 0$

(b)		
  	 	Crecimiento que crece. Cóncavo hacia arriba. Variación de primer orden positiva $f'(x) \neq k$, $f'(x) > 0$. Variación de segundo orden constante $f''(x) \neq 0$, $f''(x) = k$, $f''(x) < 0$

(c)		
	 	Crecimiento que decrece. Cóncavo hacia abajo. Variación de primer orden positiva $f'(x) \neq k$, $f'(x) > 0$ Variación de segundo orden constante $f''(x) \neq 0$, $f''(x) = k$, $f''(x) > 0$

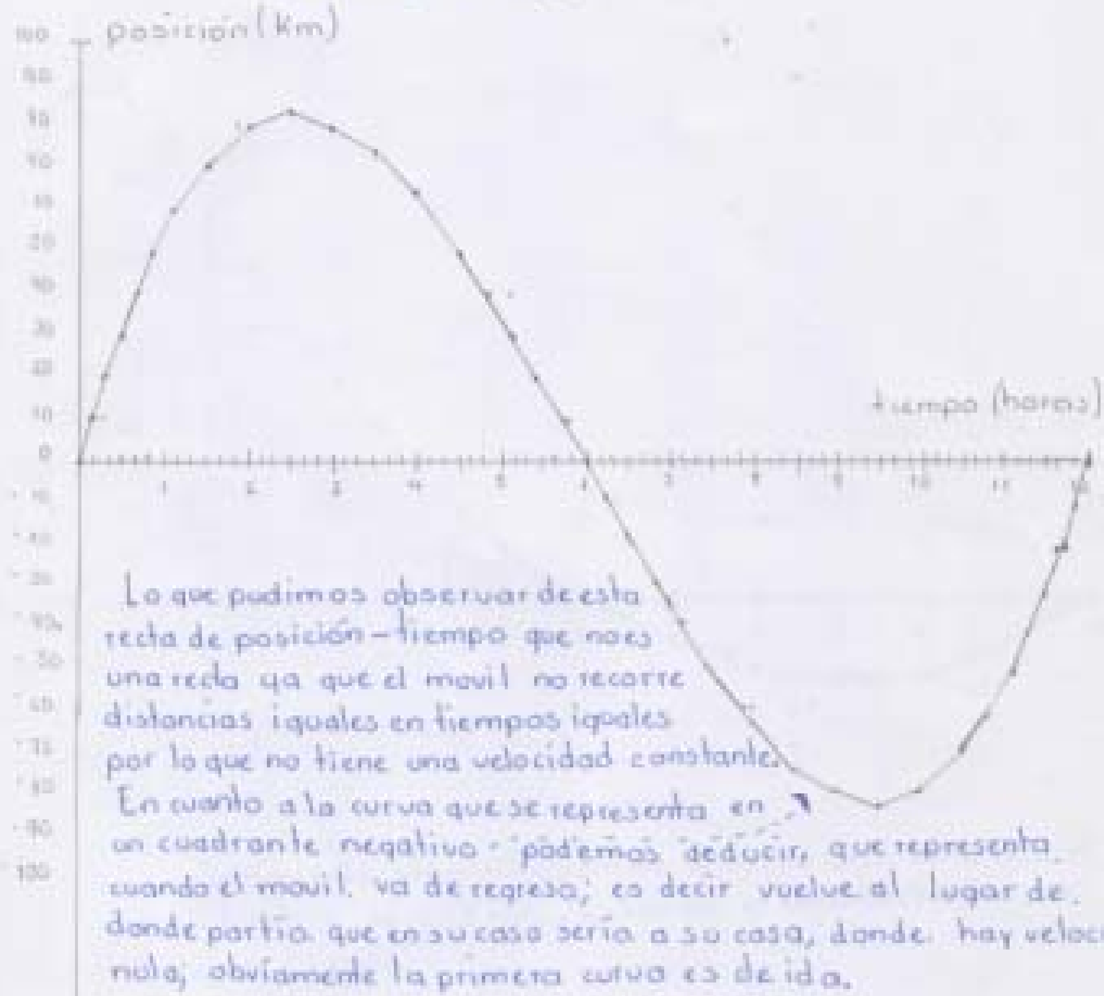
Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.

(d)	(e)	(f)
		
Disminución constante	***Disminución que disminuye cada vez más***	***Disminución que disminuye cada vez menos***

   Decreciente constante Variación de primer orden constante $f'(x) \neq 0$ $f'(x) = k$, $f'(x) < 0$ Variación de segundo orden nula $f''(x) = 0$	Decrecimiento que crece. Variación de primer orden positiva $f'(x) \neq k$, $f'(x) < 0$ Variación de segundo orden constante $f''(x) \neq 0$, $f''(x) = k$, $f''(x) > 0$	Decrecimiento que decrece. Variación de primer orden positiva $f'(x) \neq k$, $f'(x) < 0$ Variación de segundo orden constante $f''(x) \neq 0$, $f''(x) = k$, $f''(x) < 0$ Disminución constante.

Equipos.

Atrécate más



Lo que pudimos observar de esta recta de posición – tiempo que no es una recta ya que el movil no recorre distancias iguales en tiempos iguales por lo que no tiene una velocidad constante.
En cuanto a la curva que se representa en un cuadrante negativo podemos deducir, que representa cuando el movil va de regreso; es decir vuelve al lugar de donde partio que en su caso seria a su casa, donde hay velocidad nula; obviamente la primera curva es de ida.

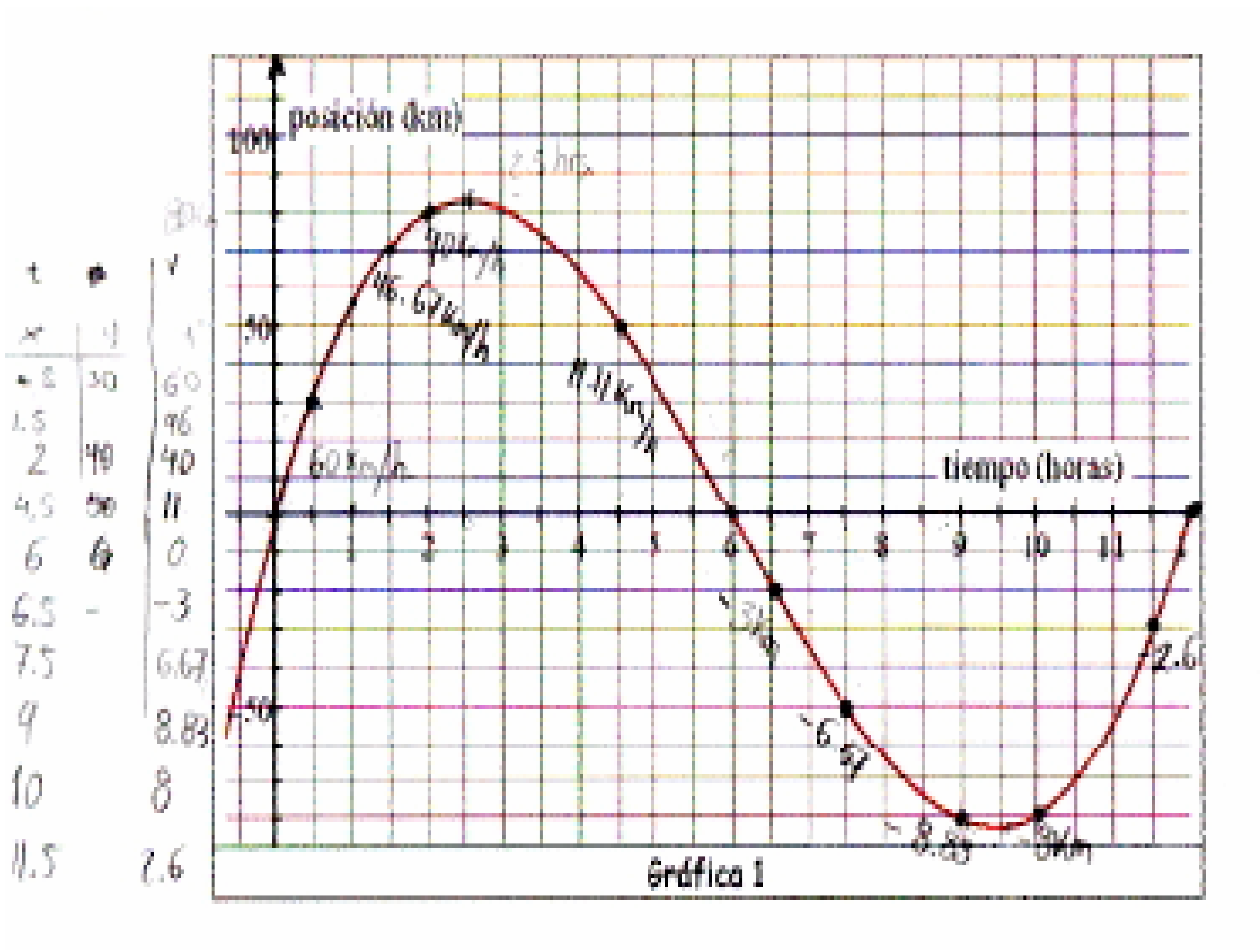
a) Podemos observar que la motocicleta está mas lejos de su casa, en el momento en que la curva alcanza su máximo. 83 Km de distancia.

b) Intervalos de Crecimiento y decrecimiento de Velocidad.

Decreciente (1, 9)
Creciente (9, 12)

GRAFICA DE VELOCIDAD. $V = \frac{D}{t}$ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Posición (Km)	Tiempo (hrs)	Velocidad (Km/hr)	Aceleración (Km/hr²)
30	.5	60	120
55	1	55	55
70	1.5	46.667	31.113
80	2	40	20
83	2.5	33.2	13.28
80	3	26.667	8.89
75	3.5	21.428	6.12
65	4	16.25	4.06
50	4.5	11.11	2.469
35	5	7	1.4
17	5.5	3.0909	.56198
0	6	0	0
-20	6.5	-3.0769	-.4733
-35	7	-5	-.71428
-50	7.5	-6.667	.8889
-65	8	-8.125	1.01562
-75	8.5	-8.823	1.038
-80	9	-8.889	.9876
-83	9.5	-8.736	.91957
-80	10	8	.8
-70	10.5	6.667	.63495
-55	11	5	.4545
-30	11.5	2.6086	.2268
0	12	0	0
-10	-16 [illegible]	+62.5	390.625
-40	-.5	+80	160


posición (km)
100
50
-50
tiempo (horas)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
60 km/h
Gráfica 1