Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Licenciatura en Física y Matemáticas

Sobre los Análogos Hiperholomorfos

de las Series de Potencias en Análisis Cuaterniónico.

Tesis presentada para optar al título de Licenciado en Física y Matemáticas.

Postulante: **Dolores Cuenca Eric Rubiel**
Director de tesis: Dr. Michael Shapiro Fishman

México D.F.
Julio 2008

Dedicatoria

A mis hermanas,
siendo más jóvenes
me han guiado por la vida.

A mis padres,
en todo momento
me dierón su apoyo
para continuar con mis sueños.

Agradezco...

...al Dr. Michael Shapiro Fishmann por el brindarme la oportunidad de estudiar este tema, siempre es un placer trabajar con alguien que ama las matemáticas.

... a los sinodales, las pláticas que tuvimos y las observaciones que me hicieron fueron fundamentales.

... a la Dra. María Elena y la Dra. Flor por todas las agradables horas de discusión y la franqueza de sus comentarios.

... dos personas que admiro por su trabajo y por su calidad humana: a la Dra. Concepción Mejia y al Dr. Pablo Lam Estrada, a quienes les debo parte importante de mi formación.

... los consejos y la orientación por parte de los doctores Xicoténcatl Merino, Valeri Kucherenko y Jorge Toro González.

... al C. Juan Manuel García Alvarado por su gran ayuda durante la elaboración de la tesis.

Índice general

Resumen

Se introduce la noción de Convergencia Fina que permite demostrar un Teorema de Cauchy-Hadamard más general que el conocido para el caso cuaterniónico y generalizar dos teoremas de Abel sobre la convergencia de Series cuaterniónicas. Es un hecho conocido la validez del Teorema de Cauchy-Hadamard, sin embargo no se sabía nada con respecto a los Teoremas de Abel. Estos resultados, y el enfoque usado, son debidos al autor de la tesis.

Siguiendo la línea del artículo [Sud79], se dan las bases para demostrar la Fórmula Integral de Cauchy en su versión homológica, y se prueba el Lema de Goursat (cuya demostración no aparece en el artículo previamente mencionado).

Se estudia la generalización del Teorema de Laurent en términos de cuaternios y en términos matriciales.

En los anexos se incluyen resultados, obtenidos durante la elaboración de la tesis, sobre la teoría de polinomios hiperholomorfos: se caracterizan los cuaternios que anulan polinomios con coeficientes cuaterniónicos en una "función de fueter ζ_1", también se caracteriza el parametro h para el cual la función $\zeta_1 + \zeta_2 h$ se anula en un plano.

Introducción

Las propiedades del producto definido en los números complejos motivaron durante años a William Rowan Hamilton (1805-1865) a buscar una operación análoga en $\mathbb{R}^3$. Lejos de desanimarse por no poder definir un producto en tal dimensión, buscó en dimensiones superiores. El 16 de octubre de 1846 [Bel48] encontró las leyes que le permitierón definir un producto entre los elementos de $\mathbb{R}^4$, que es asociativo, con unidad y tal que todo elemento no nulo tiene inverso. Sin embargo este producto no es conmutativo. Él nombró a la estructura algebraíca así obtenida el Conjunto de los Cuaternios y los considero como su mayor descubrimiento.

El Dr. Fueter en 1935 [Fue35] propuso estudiar las funciones cuaterniónicas que anulan al operador:

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3},$$

el cual es una generalización del operador de Cauchy-Riemann en una Variable Compleja. El Dr. Fueter demostró que para estas funciones, que llamaremos hiperholomorfas, existe localmente una expansión en una serie de la forma:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|v|=n} P_v a_v, \tag{1}$$

donde $\forall\ n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ y $\forall\ v$ con $|v| = n$, se tiene que $a_v \in \mathbb{H}$ y $P_v(x)$ son polinomios hiperholomorfos homogéneos de grado n, obtenidos por productos simétricos de las funciones:

$$\zeta_1(x) = x_1 - ix_0,\ \ \zeta_2(x) = x_2 - jx_0 \text{ y } \zeta_3(x) = x_3 - kx_0,$$

que forman lo que se conoce como la Base de Fueter.

Esta tesis trata sobre los análogos hiperholomorfos de series de potencias en Análisis Cuaterniónico. Para la introducción se siguió el enfoque del Dr. Michael Shapiro [KS96].

Con respecto a las regiones de convergencia de las series de la forma (1), en todas las obras clásicas sobre este tema (como [GS97] y [Mal90]) sólo se menciona que la serie converge en $\{x \in \mathbb{H} | \, |x| < \rho\}$, donde $\rho = (\overline{\lim}_{n\to\infty}(\max_{|v|=n}|a_v|)^{1/n})^{-1}$; sin embargo en ninguno de ellos se prueba el resultado. En el Cápitulo dos no sólo se prueba el anterior resultado, también se da una versión más fuerte de él, y que enunciamos a continuación:

La serie (1) converge absoluta y uniformemente por compactos en el policilindro

$$\{x \in \mathbb{H} | |x_0 + ix_i| < \rho, |x_0 + jx_j| < \rho, |x_0 + kx_k| < \rho\},$$

además este conjunto contiene propiamente a la bola de radio ρ.

En [Mal90] el Dr. Malonek estudia las series del tipo $\sum P_v a_v, a_v \in \mathbb{H}$, y demuestra que si $\sum |P_v(x)||a_v|$ converge en un cuaternio x, la serie $\sum P_v a_v$ converge en el siguiente policilindro

$$\{h \in \mathbb{H} | |h_0 + ih_1| < |x_0 + ix_1|, |h_0 + jh_2| < |x_0 + jx_2|, |h_0 + kh_3| < |x_0 + kx_3|\}.$$

En el Cápitulo dos de esta tesis se demuestra el análogo de este resultado pero ahora para series de la forma (1) con una norma distinta. Como consecuencia se generalizaron criterios para determinar cúando una serie de tipo (1) converge. Cabe mencionar que la validez de estos no se conocía. En [Mal90] el Dr. Malonek muestra el estado de la teoría en comparación con los trabajos obtenidos.

En [Sud79] el Dr. Sudbery demuestra el Teorema de Cauchy en su versión homológica basándose en el Lema de Goursat, pero no prueba el lema. En el Capítulo tercero se da una demostración de este lema y con esto queda completa la demostración. Recientemente los doctores Daniel Alpay y Michael Shapiro [ASV05] han mostrado, de una forma diferente al resultado del Dr. Fueter, que la condición de hiperholomorfía en una vecindad da lugar a la expansión en serie de Taylor, también se estudió este enfoque.

En el Capítulo cuatro se trabaja con el Teorema de Laurent en dos versiones: la usual y la matricial. La sección correspondiente a la versión usual está basada en [BDS82]. Para la expresión en términos matriciales se estudió el trabajo de los doctores Frenkel y Libine [FL07].

Para los polinomios hiperholomorfos que se escriben en términos de la función ζ_1 se encontró el tipo de "ceros" y se obtuvieron condiciones suficientes para la existencia de estos. Por otra parte, se determina los parametros h que define la dimensión de los subespacios donde se satisface $\zeta_1 + \zeta_2 h = 0$.

Capítulo 1

Los Cuaternios de Hamilton

En las dos primeras secciones de este capítulo se estudian las propiedades básicas de los cuaternios. La tercer sección es dedicada a una de las cualidades más importantes, en cuanto a aplicaciones de estos números se refiere: la relación entre los cuaternios y el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

La principal fuente fue el libro: [KS96].

La última sección contiene ejemplos desarrollados por el autor, que enfatizan las diferencias entre las geometrías de los espacios $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.

1.1. Definiciones

Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de símbolos $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ con $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 3$.

Decimos que dos elementos de $\mathbb{H}$:

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad \text{y} \quad b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

son iguales si $a_\alpha = b_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 3$.

La siguiente operación $+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, que llamaremos suma dota a $\mathbb{H}$ de una estructura de grupo abeliano:

Dados $x, y \in \mathbb{H}$ con

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ y &= b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \\ +(x, y) &\mapsto a_0 \oplus b_0 + (a_1 \oplus b_1) i + (a_2 \oplus b_2) j + (a_3 \oplus b_3) k. \end{aligned}$$

Donde $\oplus$ es la operación suma en los reales.

Denotaremos como es usual al elemento +(x,y) como x+y, y sin causar ambigüedad usaremos el mismo símbolo + para la operación de suma en los reales $\oplus$ que para los elementos de $\mathbb{H}$.

La suma definida previamente conserva todas las propiedades (conmutatividad, asociatividad, existencia de inverso y de elemento neutro) de la suma definida en los reales, por eso ($\mathbb{H}$,+) es un grupo abeliano.

Notemos que el conjunto de cuaternios de la forma $\{a+0i+0j+0k, a \in \mathbb{R}\}$ es isomorfo al grupo $(\mathbb{R}, +)$.

En el conjunto $\mathbb{H}$ podemos definir otra operación $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, a la cual llamaremos multiplicación de la siguiente manera: dados $x, y \in \mathbb{H}$ con

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ y &= b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \\ \cdot(x,y) &\mapsto (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i + \\ &\quad + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k. \end{aligned}$$

Y denotaremos a $\cdot(x, y)$ como $x \cdot y$ o xy, de la definición se sigue que la operación es distributiva con respecto a la suma. Como el producto al restringirse a $\{a + 0i + 0j + 0k, a \in \mathbb{R}\}$ coincide con el producto usual en $\mathbb{R}$, de aquí en adelante no distinguiremos entre los reales y este subconjunto.

Definimos la conjugación cuaterniónica como aquella función que al cuaternio $x \in \mathbb{H}$, $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, le asocia:

$$\bar{x} := a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k.$$

Es importante mencionar que dado $a \in \mathbb{R}$, la expresión ia, ja, ka tienen sentido, por ejemplo:

$$ia = (0 + i + 0j + 0k) \cdot (a + 0i + 0j + 0k) := (a \cdot 1)i = ai,$$

es decir, los reales conmutan con los simbolos $\{i, j, k\}$ y por lo tanto conmutan con todo elemento de $\mathbb{H}$.

En particular tenemos una estructura de vectorial 4-dimensional sobre los reales, isomorfo a $\mathbb{R}^4$, un isomorfismo esta dado por:

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3),$$

de esta manera podemos definir la norma $\| \cdot \|$ de un elemento en $\mathbb{H}$ como la norma de su vector correspondiente. Por abuso de notación no distinguiremos a un cuaternio de su vector equivalente.

Lema 1.1.1. *(Relaciones entre la norma y el producto cuaterniónico)*

- $\|xy\|^2 = Re(x\bar{y}) = Re(\bar{x}y)$,
- $x\bar{x} = \bar{x}x = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$,
- $\|xy\| = \|x\|\|y\|$.

Por estas propiedades es costumbre denotar a los elementos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1 &= e_0, \\ i &= e_1, \\ j &= e_2, \\ k &= e_3. \end{aligned}$$

Lema 1.1.2. *Con la norma de $\mathbb{R}^4$ la suma, la multiplicación y la toma de inversos son funciones continuas.*

Demostración. (No necesitamos probar la continuidad para la operación suma):

Sean x', y' fijos, entonces:

$$\begin{aligned} \|xy - x'y'\| &= \|xy + x'y' - xy' - x'y - 2x'y' + xy' + x'y\| \\ &\leq \|x - x'\|\|y - y'\| + \|x - x'\|\|y'\| + \|x'\|\|y - y'\|. \end{aligned}$$

De aquí se sigue la continuidad del producto.

Sea y fijo, si $\|x - y\| \leq \frac{\text{mín}\{\|y\|,\epsilon\|y\|^2\}}{2}$, de la desigualdad del triángulo tenemos $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \leq \frac{\|y\|}{2}$, y por lo tanto

$$\|x\|^{-1} \leq 2\|y\|^{-1}$$

entonces se cumple que

$$\|x^{-1} - y^{-1}\| = \|x\|^{-1}\|x - y\|\|y\|^{-1} \leq 2\|y\|^{-2}\epsilon\|y\|^2 \leq \epsilon$$

cuando $\|x - y\| \leq \frac{\text{mín}\{\|y\|,\epsilon\|y\|^2\}}{2}$. □

Observación 1.1.3. *Definimos el producto interno entre dos cuaternios como el producto interno de sus vectores correspondientes, y se cumple:*

$$< x, y >= \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{2}$$

pues:

$$\begin{aligned} < x, y > &= x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= Re(x\bar{y}) \\ &= \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{2}. \end{aligned}$$

Lema 1.1.4. $Q_8 := (\{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}, \cdot)$ *es un grupo no conmutativo.*

Demostración. El producto es cerrado por la forma en que está definido y la identidad es 1.

Notemos que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, de esto se sigue que todo elemento no nulo tiene inverso.

Para probar que la operación es asociativa, en principio se debe verificar para todas las combinaciones posibles. Pero $-ab = (-a)(b) = a(-b)$ significa que si $a(bc) = (ab)c$, entonces $-a(bc) = (-ab)c$ es decir podemos restringir nuestras pruebas a los elementos $\{i, j, k\}$) (1 es unidad). Se cumple que

$$(ij)k = \quad i(jk) \quad = -1 \tag{1.1}$$

y

$$ij = -ji, \; jk = -kj, \; ki = -ik, \tag{1.2}$$

es decir formalmente los "números" i, j, k tienen las mismas propiedades algebraicas y al sustituir en una igualdad a todos los elementos por una permutación cíclica se seguira cumpliendo la igualdad, es decir solo nos basta con probar los siguientes cinco casos:

- $(ij)k = i(jk)$,
- $i(ii) = (ii)i = -i$,
- $(ii)j = i(ij) = -j$,

- $(ij)i = i(ji)$,
- $(ji)i = j(ii)$ (este se sigue de los anteriores).

Los cuales se comprueban directamente de la definición. Notemos que es un grupo no conmutativo (1.2). $\square$

La estructura algebraica de $\mathbb{H}$ es mas rica que la de un espacio vectorial, porque además de una suma y el producto por escalares, tenemos definida una multiplicación entre sus elementos.

Veamos que también el producto en $\mathbb{H}$ es asociativo:

Lema 1.1.5. *La operación $\cdot$ es asociativa.*

Demostración. Sean $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, y = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, z = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k \in \mathbb{H}$.

Dado que el producto es distributivo con respecto a la suma, se cumple:

$$\begin{aligned}(xy)z &= (\sum_{0\leq\alpha,\beta\leq 3} a_\alpha e_\alpha b_\beta e_\beta)z \\ &= \sum_{0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq 3} a_\alpha b_\beta c_\gamma (e_\alpha e_\beta) e_\gamma\end{aligned}$$

Como la multiplicación en los elementos de la base $1, i, j, k$, es asociativa, $(e_n e_m)e_s = e_n(e_m e_s), \forall n, m, s \in \{0, 1, 2, 3\}$, y tenemos:

$$\begin{aligned}(xy)z &= \sum_{0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq 3} a_\alpha b_\beta c_\gamma e_\alpha (e_\beta e_\gamma) \\ &= x \sum_{0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq 3} b_\beta c_\gamma (e_\beta e_\gamma) \\ &= x(yz).\end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.1.6. $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *es un anillo de división.*

Demostración. Observemos que $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ es la identidad multiplicativa. Además si $x \neq 0$,

$$x\frac{\bar{x}}{\sum a_i^2} = 1.$$

Por lo que siempre podemos calcular el inverso de cualquier término distinto de cero. □

Pero $\mathbb{H}$ no es un campo.

Nota 1.1.7. *En general si $x, y \in \mathbb{H}, xy \neq yx$, por ejemplo $ij = -ji$.*

Definición 1.1.8. *A los elementos $h \in \mathbb{H}$ les llamaremos cuaternios, y a $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ el anillo de división cuaterniónico.*

1.2. Subconjuntos Importantes

El conjunto de los cuaternios con norma unitaria es denotado por S^3.

Sabemos que la multiplicación cuaterniónica restringida a los elementos $1, i, j, k$, forma un grupo isomorfo a

$$Q_8 =< 1, i, j, k | 1 \text{ es la identidad}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 > .$$

También hemos visto que los cuaternios contienen una copia del campo real, otro subconjunto importante de los cuaternios es el subgrupo aditivo $\mathbb{V}$ formado por aquellos cuaternios de la forma $\{0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, a la proyección de $x \in \mathbb{H}$ sobre $\mathbb{V}$ la denotaremos por x_v y diremos que es su parte vectorial, a los elementos de $\mathbb{V}$ los llamaremos cuaternios puramente vectoriales.

Denominamos como la parte real de x al termino $Re(x) := x_0 = x - x_v$, frecuentemente identificaremos a $\mathbb{V}$ con $\mathbb{R}^3$ y a los elementos de norma 1 de $\mathbb{V}$ con S^2.

El producto cuaterniónico restringido a $\mathbb{V}$ está relacionado con las operaciones usuales del Análisis Vectorial:

Dados $x_p, y_p \in \mathbb{V}$, con $x = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \;\; y = b_1 t + b_2 j + b_3 k$,

$$\begin{aligned} x_p y_p &= (-a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_2 b_3 + a_3 b_2) i + \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \\ &= - < x_p, y_p > + x_p \times y_p, \end{aligned}$$

donde $< \cdot >$ denota al producto interno y $\times$ al producto cruz.

Sean $\psi, \xi \in \mathbb{V}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi\xi &= -<\psi,\xi> + \psi \times \xi, \\ \psi \times \xi &= \frac{\psi\xi - \xi\psi}{2}, \\ <\psi,\xi> &= -\frac{\psi\xi + \xi\psi}{2}. \end{aligned}$$

Dado $\psi \in \mathbb{V}, \psi = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, con $\|\psi\| = 1, (\psi \in S^2)$,

$$\begin{aligned} \psi^2 &= a_1a_2(ij + ji) + a_1a_3(ik + ki) + a_2a_3(jk + kj) - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \\ &= -\|\psi\|^2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Observación 1.2.1. *Por cada cuaternio unitario ψ que pertenezca a $\mathbb{V}$, el subconjunto de cuaternios de la forma $a + b\psi, a, b \in \mathbb{R}$, forma un campo $\mathbb{C}_\psi$ isomorfo a los complejos.*

De esta observación se sigue que:

Lema 1.2.2.

- *Para todo cuaternio $q \in \mathbb{H}$: $\overline{q^n} = \bar{q}^n$.*
- *La ecuación $X^2 + 1 = 0$ se satisface por todo elemento de S^2, además estos son los únicos cuaternios que la satisfacen.*
- *Para todo cuaternio unitario $a \in S^3$ existen $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\psi \in S^2$, tal que $a = \cos\alpha + \psi \operatorname{sen}\alpha := e^{\psi\theta}$.*
- *El conjunto $\mathbb{R}^4$ se puede descomponer como la unión de planos que se intersecan en una línea, donde los planos están indexados por los puntos en $S^3/\sim$ con $x \sim -x$.*

Demostración. La única propiedad que no so obtiene directamente de la observación previa es la última: para cada $a \in S^2$, consideramos el plano $\mathbb{C}_a := \{x + ya | x, y \in \mathbb{R}\}$.

Dados $a, b \in S^2, C_a$ y C_b siempre se intersecan en la recta real.

Si se intersecan en otro punto, ya serian al menos tres puntos no colineales en los que se intersecan y entonces C_a y C_b son el mismo plano. Como a y $b \in S^2$, esto pasa $\Leftrightarrow a = \pm b$.

Además cada cuaternio $x \neq 0, x = r + s\psi, r, s \in \mathbb{R}, \psi \in S^2$ pertenece al plano $\mathbb{C}_\psi$. Luego se cumple la descomposición. ∎

1.3. Rotaciones

De la Observación 1.2.1 se siguen los siguientes lemas:

Lema 1.3.1. *La acción de la función* ${}_{\{\alpha\}}M : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, {}_{\{\alpha\}}M(x) := \alpha x, \alpha \in S^3$, *es una rotación.*

Demostración. Sea $\alpha \in S^3$, ${}_{\{\alpha\}}M$ es lineal pues

$${}_{\{\alpha\}}M(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = {}_{\{\alpha\}}M(x) + {}_{\{\alpha\}}M(y).$$

Sabemos que existen $\tau \in [0, 2\pi]$, $\psi \in S^2$, tales que $\alpha = e^{\psi\tau}$.

Extendemos $\{\psi\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{V}, B = \{\psi, \psi_2, \psi_3 = \psi\psi_2\}$. Todo cuaternio $x \in \mathbb{H}$ se puede escribir de la forma : $x = r_1 e^{\psi\theta_1} + r_2 e^{\psi\theta_2}\psi_2$ para ciertos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$, pues

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_1\psi + q_2\psi_2 + q_3\psi_3 \\ &= q_0 + q_1\psi + (q_2 + q_3\psi)\psi_2, \;\; q_0 + q_1\psi, \;\; q_2 + q_3\psi \in \mathbb{C}_\psi. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}M(x) &= \alpha x \\ &= e^{\psi\tau}(r_1 e^{\psi\theta_1} + r_2 e^{\psi\theta_2}\psi_2) \\ &= (r_1 e^{\psi(\theta_1+\tau)} + r_2 e^{\psi(\theta_2+\tau)}\psi_2). \end{aligned}$$

Luego la matriz asociada a ${}_{\alpha}M$ en la base $\{1\} \cup B$ es:

$$\begin{pmatrix} e^{\psi\tau} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & e^{\psi\tau} \end{pmatrix},$$

donde $e^{\psi\tau} = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\operatorname{sen}\tau \\ \operatorname{sen}\tau & \cos\tau \end{pmatrix}$, y $0_{2\times 2}$ es la matriz cero de tamaño 2×2.

Luego la matriz asociada a ${}_{\alpha}M$ es ortonormal y de determinante 1. □

Lema 1.3.2. *La función* $M_{\{\beta\}}(x) = x\beta, \beta \in S^3$, *es una rotación.*

Demostración. Del mismo modo que en el lema anterior, se demuestra que la matriz asociada a M_β en cierta base generada por β es:

$$\begin{pmatrix} e^{\psi\tau} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & e^{-\psi\tau} \end{pmatrix},$$

donde el signo es debido a que $\psi_2 e^{\psi\tau_2} = e^{-\psi\tau_2}\psi_2$. Está matriz es ortonormal y de determinante 1. □

Teorema 1.3.3. *La función* ${}_{\{\alpha\}}M_{\{\beta\}}(x) = \alpha x \beta, \alpha, \beta \in S^3$*, es una rotación.*

Si $g_\alpha = {}_{\{\alpha\}}M_{\{\alpha^{-1}\}}, \alpha = e^{\psi\theta}$ *con* $\{\psi, \psi_2, \psi_3\}$ *una base ortonormal de* $\mathbb{V}, \theta \in [0, 2\pi]$*, entonces* g_α *es la rotación que deja fijo el plano* $1 \times \psi$ *y rota el plano* $\psi_2 \times \psi_3, 2\theta$ *grados, en particular,* g_α *restringido a* $\mathbb{V}$ *es la rotación que deja fijo el eje* ψ *y rota el plano* $\psi_2 \times \psi_3, 2\theta$ *grados.*

Demostración. ${}_{\{\alpha\}}M_{\{\beta\}}$ es una composición de rotaciones, por lo cual es una rotación.

Para $x \in \mathbb{H}$, sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \tau, \tau' \in [0, 2\pi]$, tales que $x = r_1 e^{\psi\tau} + r_2 e^{\psi\tau'}\psi_2$, luego:

$$\begin{aligned} g_a(x) &= e^{\psi\theta}(r_1 e^{\psi\tau} + r_2 e^{\psi\tau'}\psi_2)e^{-\psi\theta} \\ &= r_1 e^{\psi\theta} e^{\psi\tau} e^{-\psi\theta} + r_2 e^{\psi\theta} e^{\psi\tau'} \psi_2 e^{-\psi\theta}. \end{aligned}$$

Pero $e^{\psi\tau'}\psi_2 = \psi_2 e^{-\psi\tau'}$, $\therefore$

$$\begin{aligned} g_a(x) &= r_1 e^{\psi\tau} + r_2 e^{\psi\theta} e^{\psi\tau'} e^{\psi\theta} \psi_2 \\ &= r_1 e^{\psi\tau} + r_2 e^{\psi(\tau' + 2\theta)} \psi_2. \end{aligned}$$

Su matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & e^{2\theta\psi} \end{pmatrix},$$

donde $I_{2\times 2}$ es la matriz identidad 2×2.

Es decir, si consideramos $x \in \mathbb{V}$, el cuaternio $g_a(x)$ se obtiene al dejar fijo el eje ψ y rotar el plano $\psi_2 \times \psi_3, 2\theta$ grados. □

Corolario 1.3.4. *Si* $a \in S^3$ *y* $x \in \mathbb{V}$*, entonces el cuaternio* $g_a(x) \in \mathbb{V}$*. Así la acción de* g_a *es un elemento del grupo* $O^+(3)$ *de las isometrías que preservan orientación en* $\mathbb{R}^3$ *(rotaciones).*

Demostración. Como la función dejo fija la parte real de x, entonces $\forall\ x \in \mathbb{V}$ y $\forall\ a \in S^3$, $g_a(x) \in \mathbb{V}$. □

El recíproco también se cumple, es decir, toda rotación en $\mathbb{R}^3$ se expresa como g_a, para algún $a \in S^3$:

Teorema 1.3.5. *El grupo* $\{g_a | a \in S^3\}/\sim$ *es isomorfo a* $O^+(3)$*, el grupo de rotaciones de* $\mathbb{R}^3$*, donde la relación de equivalencia* $\sim$ *está definida por* $g_a \sim g_{-a}$.

Demostración. Primero mostraremos que toda rotación se puede expresar como g_b, para cierto $b \in S^3$.

Dada $\rho \in O^+(3)$, sea R su matriz asociada. El polinomio característico de esta matriz es de tercer grado y con coeficientes reales, por lo cual tiene una raíz real λ y dos raíces complejo conjugadas $w, \bar{w}$. Esto significa que la rotación tiene un eje fijo (el eigenvector asociado a λ genera al eje). Por lo tanto existe una base ortogonal $\{\psi, \psi_2, \psi_3\}$ tal que la matriz se escribe como:

$$R = \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1x2} \\ 0_{2x1} & A \end{pmatrix}, \, A \in M_{2x2}(R).$$

Sabemos que $Det(R) = 1$, porque ρ es una rotación. El término constante del polinomio característico de la matriz R es $-1 = -Det(R) = -\lambda w \bar{w}$. Lo que nos dice que $\lambda > 0$. Como R es isométrica, $R\mathbb{R}^T = I$, de aquí se sigue que $\lambda = 1$ y $AA^T = I$, así A es una rotación de θ grados para cierto $\theta \in [0, 2\pi]$.

Asignamos a ρ, la función $g_{e^{\frac{\psi\theta}{2}}}$.

Veamos que la relación: $\rho \to g_{e^{\frac{\psi\theta}{2}}}$ es un isomorfismo de grupos.

Para ver que es un homomorfismo, consideremos las funciones g_a, g_b, con $a, b \in S^3$, y sean $\rho, \tau \in O^+(3)$, con $g_a = \rho, g_b = \tau$. Por definición se cumple que $g_{ab} = g_a \circ g_b$.

De esta propiedad se sigue que g_{ab} es la rotación obtenida al rotar primero con la acción de g_b, y después la acción de g_a, pero esa es la definición de $\rho\tau$, por lo que $g_{\pm ab} = \rho\tau$.

Demostremos que la relación es inyectiva:

Por una parte $g_{-e^{\frac{\psi\theta}{2}}} = g_{e^{(\pi+\frac{\theta}{2})\psi}}$, por ser esta última una rotación de $\theta + 2\pi$ grados, $g_{-e^{\frac{\psi\theta}{2}}} = g_{e^{\frac{\psi\theta}{2}}}$. Supongamos que existen $a, b \in S^3$ tal que $\rho = g_b = g_a$, entonces

$$axa^{-1} = g_a(x) = g_b(x) = bxb^{-1}, \forall\, x \in \mathbb{H},$$

es decir $b^{-1}ax = xb^{-1}a$, por lo que $b^{-1}a$ conmuta con todo cuaternio.

Si $b^{-1}a = c + r\psi, c \in \mathbb{R}, \psi \in S^2$, y $\{\psi, \psi_2, \psi_3\}$, base ortonormal de $\mathbb{V}$, entonces si $r \neq 0, b^{-1}a$ y ψ_2 no conmutan. Luego $b^{-1}a \in \mathbb{R}$, y por ser a y b de norma unitaria, $b^{-1}a = \pm 1$, de donde $b = \pm a$.

$\square$

Teorema 1.3.6. *Sea $g_{a,b}(x) = axb^{-1}$. El grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^4 : O^+(4)$ y $\{g_{a,b}, a, b \in S^3\}/\sim$ son isomorfos, donde $(a,\, b) \sim (-a,\, -b)$.*

Demostración. Sea ρ una rotación, consideremos $\rho' = \rho(1)^{-1}\rho$, por ser una composición de rotaciones es una rotación, además $\rho'(1) = 1$, es decir deja fijo a los reales, por lo tanto $\rho' \in O^+(3)$, por la teoría previamente vista existe $c \in S^3$ tal que $\rho'(s) = g_c(s), \forall\, s \in \mathbb{V}$. Entonces para $x \in \mathbb{H}$:

$$\rho'(x) = \rho'(Re(x)) + \rho'(x_v) = cRe(x)c^{-1} + g_c(x_v) = g_c(x).$$

Por lo tanto $\rho = \rho(1)g_c = g_{\rho(1)c,\, c}$.

Veamos bajo que condiciones se cumple que $g_{a,\, b} = g_{c,\, d}$.

Supongamos que $\rho = g_{a,\, b} = g_{c,\, d}$, ya vimos que los coeficientes se relacionan por $a = \rho(1)b, c = \rho(1)d$.

Consideramos las rotaciones

$$\rho(1)^{-1}g_{a,\, b} = g_{\rho(1)^{-1}a,\, b},$$

$$\rho(1)^{-1}g_{c,\, d} = g_{\rho(1)^{-1}c,\, d},$$

como rotaciones de $O^+(3)$, la ventaja de hacer esto es que el Teorema 1.3.5 nos da unicidad (salvo signo) de la expresión asociada a una rotación de $O^+(3)$, luego se tiene que $b = \pm d$.

De aquí se sigue que $g_{a,\, b} = g_{c,\, d} \Leftrightarrow (a,\, b) = \pm(c,\, d)$. $\square$

Por último cabe mencionar que los cuaternios se pueden identificar con un subgrupo de las matrices complejas de tamaño 2×2 vía:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ i &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ j &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ k &\rightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir

$$x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & -ix_1 - x_2 \\ -ix_1 + x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

1.4. Sobre la Geometría de $\mathbb{H}$

El tener una estructura 4-dimensional dota a los cuaternios de propiedades geométricas y topológicas que desde el punto de vista del autor son llamativas, esta sección tiene como objetivo recordarle al lector que es importante no recurrir de manera directa a propiedades geométricas que no se hayan justificado, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Dado un círculo, encontrar un plano de dimensión dos que contenga al menos un punto del interior del círculo pero que el plano no interseque la circunferencia que delímita al círculo. ¿Esto significa que podemos delimitar con el círculo un plano?

Sea $S^1 = \{a + bi,\, a^2 + b^2 = 1\} \subset \mathbb{H}$, y consideremos el plano generado por j y k : $\mathbb{C}_j := \{(a + ib)j = aj + bk, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Observación 1.4.1. *Si consideramos el segmento que une un punto con su antipodal en S^1, este segmento contiene al origen. Pero el 0 pertenece al plano $\mathbb{C}_j$ y estos dos conjuntos, S^1, C_j, son disjuntos.*

Lo que el ejemplo anterior nos dice es que por un punto pueden pasar dos planos diferentes que solo se intersequen en ese punto, en el ejemplo anterior, el plano $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}_j$ solo se intersecan en el origen.

Como respuesta a la pregunta sobre delimitar con el circulo un plano, el círculo sólo delimita a un punto del plano aún cuando este cumple las condiciones solicitadas.

De este mismo ejemplo podemos observar que si consideramos $\mathbb{R}^4$ menos un plano, el conjunto resultante es conexo, notemos que $\mathbb{R}^3 - P$ es disconexo para todo plano P, por ejemplo no existe una trayectoria en $\mathbb{R}^3(\mathbb{V})$, que comience en el punto $(0, 0, 0)$ y termine en el punto $(1, 0, 0)$, que no interseque al plano $(1/2, y, z)$, o a la 2-esfera $\{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1/2\}$.

Pero en $\mathbb{R}^4$, es fácil dar una trayectoria del punto $(0, 1, 0, 0)$ al punto $(0, 0, 0, 0)$ que no interseque ni al plano $\{(0, 1/2, y, z) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\}$, ni a la 2-esfera $\{(0, x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1/2, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Por ejemplo:

$$\gamma(t) = (t(t - 1), t, 0, 0), \;\; \varphi(t) = (sen(t\pi), sen(t\pi/2), 0, 0), \;\; t \in [0, 1].$$

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^4$ ¿Cuál es la mayor cantidad de planos que pasan por x y que solo se intersequen en x? Una respuesta parcial nos la da el siguiente teorema: por lo menos hay tantos como puntos en S^2, para demostrar esto necesitaremos del siguiente lema:

Lema 1.4.2. *La función $T : S^3 \to \mathbb{H}$ dada por $T(\psi) = g_\psi(i) = \psi i \psi^{-1}$, induce una partición de S^3 en 1-esferas.*

Demostración.

- $T(S^3) = S^2$.

  En el Teorema 1.3.4 se demostró que $g_\psi(\mathbb{V}) \subset \mathbb{V}, \forall\, \psi \in S^3$, como $\|T(\psi)\| = 1$, se cumple que $T(S^3) \subset S^2$.

  Y dado $\alpha \in S^2$, existe una rotación ρ, tal que $\rho(i) = \alpha$, entonces existe $\tau \in S^3$, tal que $\tau i \tau^{-1} = \alpha$, por lo cual dado $\alpha \in S^2$, existe τ tal que $T(\tau) = \alpha$.

- $T(\psi) = T(\tau), \Leftrightarrow \psi = \tau w$, para algún $w \in S^1 \subset \mathbb{C}$.

  Notemos que si $w \in S^1, T(\psi w) = \psi w i w^{-1} \psi^{-1} = T(\psi)$.

  Además si $T(\psi) = T(\tau)$, entonces $\psi i \psi^{-1} = \tau i \tau^{-1}$. Definimos la función $g : g_{\tau^{-1}\psi}$, sabemos que:

  $$g(i) := \tau^{-1}\psi i \psi^{-1}\tau = i,$$

  y como g es una rotación que deja fijo a 1 y a i, por los mismos argumentos que se usarón para probar el Teorema 1.3.3 se sigue que g restringido a S^3 es una rotación del plano j, k.

  Por la unicidad para las expresiones sabemos que existe $w \in \mathbb{C}$, $\|w\| = 1$ tal que $g = g_w$, y del Teorema 1.3.5 $\tau^{-1}\psi = \pm w$.

  Por lo tanto $\psi = \tau(\pm w)$.

- Si $\tau \in T^{-1}(\psi), T^{-1}(\psi)$ es la 1-esfera τS^1. Siendo $\tau \in S^3$, la multiplicación por τ es una rotación, así τS^1 es la 1-esfera en el plano $\tau\mathbb{C}$.

  Esto se sigue del inciso anterior.

- T induce una partición de S^3 en 1-esferas.

  Asignamos a cada $\alpha \in S^2$, la $1-$esfera $T^{-1}(\alpha) \in S^3$.

  También podemos inducir una relación en S^3 dada por $\alpha \sim \beta$, si $T(\alpha) = T(\beta)$, esta es una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son $1-$esferas y α esta contenida en la $1-$esfera $T^{-1}(T(\alpha))$.

$\square$

En el Lema 1.2.2 demostramos que se puede descomponer a $\mathbb{R}^4$ (como conjunto) en una unión de planos que se intersecan en una línea, tantos planos como puntos en $S^3/\{x \sim -x\}$. Ahora daremos una descomposición de $\mathbb{R}^4$ como una unión de planos que se intersecan sólo en un punto de manera análoga a la descomposición de $\mathbb{R}^2$ en rectas que se intersecan en el origen:

Teorema 1.4.3. $\mathbb{R}^4 = \bigcup_{S^2} \mathbb{R}^2/\{(0,0,0,0)_a = (0,0,0,0)_b \forall a,b \in S^2\}$ *(como conjunto).*

Demostración. En el lema anterior hemos dividido S^3 en $1-$esferas indexadas por S^2, para demostrar el teorema basta asociar a cada $[s], s \in S^3$, el único plano P_s que contiene a la $1-$esfera $T^{-1}(T(s))$.

Esta es una partición de $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ pues si P_s y P_r se intersecan en dos puntos distintos $\{x, 0\}$, ellos se intersecan en la recta $\mathbb{R}x$, por ser los planos convexos, luego se intersecan en $\frac{x}{\|x\|} \in S^3$, de aquí se sigue que

$$T^{-1}(T(\frac{x}{\|x\|})) \in P_s, \text{ y } T^{-1}(T(\frac{x}{\|x\|})) \in P_r,$$

dado que si dos planos se intersecan en 3 puntos, son el mismo plano, entonces $P_s = P_r$.

Además cada punto $x \in S^3$ está contenido en el plano $P_{\frac{x}{\|x\|}}$. □

Nota 1.4.4. *A la función T se le conoce como función de Hopf.*

El escoger la evaluación de las rotaciones en el cuaternio i, tiene como propósito simplificar los argumentos. En realidad podemos considerar que S^3 actúa en S^2 vía la función que a $(\psi, \rho) \in S^3 \times S^2$ le asigna $\psi\rho\psi^{-1}$. Asi estamos clasificando la orbita del cuaternio $i \in S^2$.

En general las orbitas seguirán siendo $1-$esferas, pero éstas formaran particiones distintas.

El Teorema de Inmersión de Whitney dice (en particular) que toda 2 variedad puede ser inmersa de manera suave en $\mathbb{R}^4$. Por lo cual es natural esperar que una banda de Möbius pueda ser inmersa en $\mathbb{R}^4$. Es interesante notar que la banda puede ser inmersa de manera que si incrementamos la longitud de sus lados, la banda no se interseque a si misma, es decir:

Observación 1.4.5. *Es posible inyectar una banda de Möbius de ancho infinito en $\mathbb{H}$.*

Sea la función

$$\begin{aligned} h &: (-1/3, 1/3) \times [0, \pi] \to \mathbb{H}, \\ h(u,\theta) &= (0, -\cos\theta \operatorname{sen}\theta, 0, -\cos^2\theta) + \frac{u}{\frac{1}{9} - u^2}(-\operatorname{sen}\theta, 0, \cos\theta, 0). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} h(u,0) &= (0,0,0,-1) + \frac{u}{\frac{1}{9} - u^2}(0,0,1,0) \\ &= (0,0,0,-1) + \frac{-u}{\frac{1}{9} - (-u)^2}(0,0,-1,0) \\ &= h(-u,\pi). \end{aligned}$$

Salvo por esos puntos, la función (continua) es inyectiva, luego la función induce un homeomorfismo entre:

$$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times [0,\pi]/\sim \ \text{ y } h((-1/3, 1/3) \times [0,\pi]),$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow h(a,b) = h(c,d)$, es decir $(a,0) \sim (-a,\pi)$ y $(a,b) \sim (a,b)$.

Como $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times [0,\pi]/\sim$ es una banda de Möbius de ancho 2/3.

Esta función es una inyección de la banda de Möbius en $\mathbb{R}^4$, con la característica de que el ancho de la banda es infinito.

Capítulo 2

Expansión en Serie

La primer sección es un repaso del Cálculo de Varias Variables, en lo concerniente a la Serie de Taylor. Es sabido que una función hiperholomorfa admite una expansión en serie que llamaremos formalmente "Serie de Taylor Cuaterniónica". Ésta expansión tiene como sumandos polinomios homogéneos formados por productos simétricos de las funciones que forman la Base de Fueter, una prueba se da por ejemplo en [Sud79].

En la segunda sección aclaramos la relación entre la serie de Taylor cuaterniónica de una función hiperholomorfa y la serie de Taylor de la función vista como una función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$.

Es de notar la manera natural en que las funciones de Fueter se asocian a una función hiperholomorfa.

Con respecto a las regiones de convergencia de las series de la forma (1), en todas las obras clásicas sobre este tema (como [GS97] y [Mal90]) sólo se menciona que la serie converge en $\{x \in \mathbb{H}|\,|x| < \rho\}$, donde $\rho = (\overline{\lim}_{n\to\infty}(\max_{|v|=n}|a_v|)^{1/n})^{-1}$; sin embargo en ninguno de ellos se prueba el resultado. En la tercer sección no sólo se prueba el anterior resultado, también se da una versión más fuerte de él, y que enunciamos a continuación:

Teorema 2.3.17:La serie (1) converge absoluta y uniformemente por compactos en el policilindro

$$\{x \in \mathbb{H}||x_0 + ix_i| < \rho, |x_0 + jx_j| < \rho, |x_0 + kx_k| < \rho\},$$

además este conjunto contiene propiamente a la bola de radio ρ.

En [Mal90] el Dr. Malonek estudia las series del tipo $\sum P_v a_v, a_v \in \mathbb{H}$, y demuestra que si $\sum |P_v(x)||a_v|$ converge en un cuaternio x, la serie $\sum P_v a_v$

converge en el siguiente policilindro

$$\{h \in \mathbb{H} | |h_0 + ih_1| < |x_0 + ix_1|, |h_0 + jh_2| < |x_0 + jx_2|, |h_0 + kh_3| < |x_0 + kx_3|\}.$$

El Lema 2.3.10 demuestra el análogo de este resultado pero ahora para series de la forma (1) con una norma distinta. Como consecuencia se generalizaron criterios para determinar cúando una serie de tipo (1) converge. Cabe mencionar que la validez de estos no se conocía. En [Mal90] el Dr. Malonek muestra el estado de la teoría en comparación con los trabajos obtenidos.

2.1. Definiciones

Los Cuaternios tienen una estructura subyacente de espacio de Banach isomorfo a $\mathbb{R}^4$, por lo cual podemos usar la teoría del Cálculo de Varias Variables.

En este capítulo estudiaremos funciones $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, que tengan todas sus parciales continuas de cualquier grado en una vecindad del origen, es decir $f \in C^\infty(v(0), \mathbb{H})$, donde $v(0)$ es alguna vecindad del origen que depende de f. Se elige el origen para simplificar la exposición, y no hay riesgo de perder generalidad pues al componer con traslaciones siempre podemos reducir el analisis al caso donde la vecindad esta en el origen.

Sea $f \in C^\infty(v(0), \mathbb{H})$, entonces la derivada de la función f en el 0, es una transformación lineal que denotamos $f^{(1)}(0)$, y es la función que a $h \in \mathbb{H}, h = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3$ le asigna:

$$(h_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial f}{\partial x_3})(0).$$

A su vez la derivada de la función f en la dirección h, es una función que al cuaternio 0 le asigna el cuaternio resultado de evaluar la transformación lineal $f^{(1)}(0)$ en h. Debido a esto tiene sentido la derivada de dicha función, que llamamos la derivada de segundo orden de f.

Notemos que para calcular la derivada de una función en la dirección h usaremos el operador:

$$h_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{2.1}$$

Notación 2.1.1. *Llamamos la derivada de segundo orden de la función f, en la dirección $h \in \mathbb{H}$, a la función:*

$$(h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3})^2 f,$$

es decir derivamos la función en la dirección h, y volvemos a derivar esta última función en la misma *dirección h. Desarrollando tenemos:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}h_0^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1}h_0h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_2}h_0h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_3}h_0h_3 +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_0}h_1h_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}h_1h_3 +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_0}h_2h_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}h_2h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}h_2h_3 +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_0}h_3h_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}h_3h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}h_3h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}h_3^2.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamamos la derivada n-ésima de la función f en la dirección h a la función:

$$(h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3})^n f \quad = \sum \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_n}}h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n},$$

con $i_j \in \{0,1,2,3\}, j \in [1,n] \subset \mathbb{N}, h = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3$, y la suma es sobre las 4^n posibles palabras de tamaño n con 4 letras.

Como las parciales son continuas, ellas conmutan, por lo que la derivada n-ésima de la función f en la dirección h se puede escribir:

$$\sum \binom{n}{n_0, n_1, n_2, n_3} \frac{\partial^n f}{\partial x_0^{n_0}\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\partial x_3^{n_3}} h_0^{n_0}h_1^{n_1}h_2^{n_2}h_3^{n_3}.$$

Esta última suma está indexada por las diferentes cuartetas

$$\{n_0, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\} | \sum_{i=0}^{3} n_i = n\}.$$

Ejemplo 2.1.2. *El coeficiente del término*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_0^{n_0} \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}(0),$$

con $n_0+n_1+n_2+n_3 = n$, *es el número de veces que esta parcial aparece en la descomposición, dependiendo del orden en que son efectuadas las derivadas parciales.*

Al variar el orden de derivación, hay $\binom{n}{n_0}$ *formas de derivar* n_0*-veces con respecto a* x_0, *después quedan* $\binom{n-n_0}{n_1}$ *formas posibles para derivar* n_1*-veces con respecto a* x_1 *y por último hay* $\binom{n-n_0-n_1}{n_2}$ *maneras de derivar* n_2 *veces con respecto a* x_2. *Luego el coeficiente será:*

$$\binom{n}{n_0}\binom{n-n_0}{n_1}\binom{n-n_0-n_1}{n_2} =$$

$$\frac{n!}{n_0!(n-n_0)!}\frac{(n-n_0)!}{n_1!(n-n_0-n_1)!}\frac{(n-n_0-n_1)!}{n_2!(n-n_0-n_1-n_2)!}$$

$$= \frac{n!}{n_0!n_1!n_2!n_3!} = \binom{n}{n_0, n_1, n_2, n_3}.$$

Ejemplo 2.1.3. *La fórmula de 2.1.1 también se puede escribir como:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}h_0^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}h_3^2 + 2\sum_{0\le a<b\le 3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_a x_b}h_a h_b.$$

Dada una función f y U vecindad del origen, la siguiente serie

$$f(0)+\sum_{\alpha=0}^{3} h_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}f(0)+\frac{1}{2!}(\sum_{\alpha=0}^{3} h_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha})^2 f(0)+\cdots+\frac{1}{n!}(\sum_{\alpha=0}^{3} h_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha})^n f(0)+\cdots$$

es llamada la serie de Taylor asociada a la función f en la vecindad U del origen, donde $h = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3, h \in U$.

Definición 2.1.4. *Sea* V *vecindad del origen. Si para todo punto* $h \in V$, *la serie de Taylor de la función* f *converge y lo hace al valor* $f(h)$, *diremos que* f *admite una expansión en serie de Tayor en la vecindad* V.

Cabe mencionar que la serie de Taylor de f no es necesariamente convergente, y de hacerlo no necesariamente converge a la función que la genera.

La serie de Taylor tiene la propiedad de unicidad en el sentido que es la mejor aproximación local a la función (ver por ejemplo: [Zor04]), es decir el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función en el punto $f(h)$ es

$$P(h) = f(0) + (h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3})f|_{(0)} + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}(h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3})^n f|_{(0)}.$$

2.2. Serie de Taylor Cuaterniónica

Definición 2.2.1. *Sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, diremos que f es hiperholomorfa en V vecindad del origen, si es real diferenciable en V y es un cero del operador D conocido como "el operador de Cauchy-Riemann-Fueter":*

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Esta definición generaliza la noción de holomorfía, pues toda funcion holomorfa en la variable $z = x_0 + ix_1$, anula a este operador.

La condición de hiperholomorfía permite que la expansión en serie de Taylor de una función f no dependa de $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, (o de $\frac{\partial f}{\partial x_n}, n = 1, 2, 3$).

Para ver esto notemos que si f es hiperholomorfa el operador (2.1) admite una expresión en la que no se involucra el término $\partial/\partial x_0$:

$$\begin{aligned} h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3} &= h_0(-i\frac{\partial}{\partial x_1} - j\frac{\partial}{\partial x_2} - k\frac{\partial}{\partial x_3}) + \\ &+ h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= (h_1 - ih_0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (h_2 - jh_0)\frac{\partial}{\partial x_2} + \\ &+(h_3 - kh_0)\frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Definición 2.2.2. *Definimos las funciones de Fueter* $\zeta_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, n \in \{1,2,3\}$ *por:*

$$\begin{aligned} \zeta_1(h) &:= h_1 - ih_0, \\ \zeta_2(h) &:= h_2 - jh_0, \\ \zeta_3(h) &:= h_3 - kh_0, \end{aligned}$$

para $h = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3$.

En este momento dejaremos fija una base, la Base de Fueter. El desarrollo que seguiremos se puede hacer con otras bases obteniendo resultados complementarios que seran explicados en las Conclusiones para mayor claridad de la exposición.

Con esta notación, la primer derivada de f en la dirección h en el origen se calcula por:

$$(\zeta_1(h)\frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta_2(h)\frac{\partial}{\partial x_2} + \zeta_3(h)\frac{\partial}{\partial x_3})f|_{(0)}.$$

Lema 2.2.3. *Sea* f *hiperholomorfa en* V *vecindad del origen, y* $x \in V$, *entonces*

$$f(x) = f(0) + \zeta_1(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \zeta_2(x)\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) + \zeta_3(x)\frac{\partial f}{\partial x_3}(0) + \alpha(x),$$

donde $\alpha(x) = o(x)$ *cuando* $x \to 0$, *es decir* $\lim_{x\to 0} \alpha(x)/x = 0$.

Demostración. Por ser f diferenciable, existe la función α y una transformación lineal T, la cual tiene la forma enunciada según las observaciones anteriores. □

El operador que genera la n-ésima derivada parcial sera:

$$\left(\zeta_1(h)\frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta_2(h)\frac{\partial}{\partial x_2} + \zeta_3(h)\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n.$$

Para simplificar la exposición necesitamos unas definiciones:

Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a cada terna $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $n_1 + n_2 + n_3 = n$, le asociamos $(n_1, n_2, n_3) = \nu$ y definimos $\|\nu\| = n$.

Consideremos el conjunto A_ν formado por todas las posibles n-ádas formadas con n_1 números uno, n_2 números dos y n_3 números tres.

Notemos que $A_{(n_1,n_2,n_3)}$ tiene $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} = \binom{n}{n_1 n_2 n_3}$ elementos.

Ejemplo 2.2.4. *Si* $n = 4$, $n_1 = 0, n_2 = 2, n_3 = 2$, *tenemos*

$$A_{(0,2,2)} = \{(2,2,3,3),(2,3,2,3),(3,2,2,3),(2,3,3,2),(3,2,3,2),(3,3,2,2)\}.$$

Definición 2.2.5. *Sean* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, *definimos:*

$$P_{\{n_1,n_2,n_3\}} := \frac{1}{n!}\sum \zeta_{i_1}\cdots\zeta_{i_n}, \quad (i_1,\ldots,i_n) \in A_{(n_1,n_2,n_3)},$$

y

$$\partial_{\{n_1,n_2,n_3\}} f = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\partial x_3^{n_3}}.$$

Si alguno de los enteros n_1, n_2, n_3, *es negativo,* $P_{\{n_1,n_2,n_3\}} := 0$.

Siguiendo con el ejemplo anterior:

$$P_{\{0,2,2\}} = \frac{1}{4!}(\zeta_2\zeta_2\zeta_3\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3\zeta_2\zeta_3 + \zeta_3\zeta_2\zeta_2\zeta_3 + \zeta_3\zeta_3\zeta_2\zeta_2 + \zeta_3\zeta_2\zeta_3\zeta_2 + \zeta_2\zeta_3\zeta_3\zeta_2).$$

Observación 2.2.6.

$$\frac{1}{n!}(h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3})^n f =$$

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h)\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\partial x_3^{n_3}} =$$

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h)\partial_{\{n_1,n_2,n_3\}} f.$$

Para ver esto procedemos por inducción, para $n = 1$ hemos visto que la representación es válida. Sea $n > 1, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}(\sum_{\alpha=0}^{3} h_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha})^n f &= \frac{1}{n!}(\zeta_1(h)\frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta_2(h)\frac{\partial}{\partial x_2} + \zeta_3(h)\frac{\partial}{\partial x_3})^n f \\ &= \frac{1}{n!}\sum \zeta_{a_1}(h)\zeta_{a_2}(h)\cdots\zeta_{a_n}(h)\frac{\partial^n f}{\partial x_{a_1}\partial x_{a_2}\cdots\partial x_{a_n}}\end{aligned}$$

Dado que las parciales conmutan, a cada terna $\{n_1, n_2, n_3, n_1 + n_2 + n_3 = n\}$ podemos asociar el coeficiente $\frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\partial x_3^{n_3}} f$, resultando el término:

$$\frac{1}{n!}\sum_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_{(n_1,n_2,n_3)}}\zeta_{a_1}(h)\zeta_{a_2}(h)\cdots\zeta_{a_n}(h)=P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h),$$

luego:

$$\frac{1}{n!}(h_0\frac{\partial}{\partial x_0}+h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+h_3\frac{\partial}{\partial x_3})^n=\sum_{n_1+n_2+n_3=n}P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h)\frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\partial x_3^{n_3}}.$$

□

Lema 2.2.7. *Sea f hiperholomorfa en v vecindad del origen. Supongamos que f admite un desarrollo en serie de Taylor, entonces la serie de f esta dada por:*

$$f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}}P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h)\partial_{\{n_1,n_2,n_3\}}f|_{\{0\}}. \tag{2.2}$$

donde $h\in v$.

Demostración. La serie de Taylor de una función es una serie de funciones donde el término n-ésimo es un polinomio homogeneo de grado n. Hemos visto que si la función es hiperholomorfa, estos polinomios son generados por productos simétricos de las funciones que forman la base de Fueter. □

En general si la función tiene derivadas parciales de todos los órdenes y es hiperholomorfa podemos estudiar la serie de Taylor que la función determina.¿Está serie converge?¿dónde?¿converge a la función f?

Posteriormente demostraremos que si f es hiperholomorfa, entonces es infinitamente diferenciable, así siempre podemos estudiar su serie de Taylor. Desarrollando el análogo al radio de convergencia obtendremos una condición para convergencia en una vecindad y por último por el Teorema de Cauchy Cuaterniónico implicará que la serie de Taylor converge a la función puntualmente.

Definición 2.2.8. *Dada f hiperholomorfa, llamamos a la función 2.2 "la expansión en serie de Taylor cuaternionica de f respecto a la base de Fueter".*

Como solo trabajaremos con esta base, cuando nos refiramos a la serie de Taylor Cuaternionica se entendera que es con respecto a esta base (ver Conclusiones). Desarrollaremos algunos términos para ver la complejidad de la expresión:

$$
\begin{aligned}
f(h) &= f(0) + \zeta_1(h)\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \zeta_2(h)\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) + \zeta_3(h)\frac{\partial f}{\partial x_3}(0) + \frac{1}{2!}\zeta_1^2(h)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) + \\
&+\frac{1}{2!}\zeta_2^2(h)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0) + \frac{1}{2!}\zeta_3^2(h)\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(0) + \frac{1}{2!}(\zeta_1\zeta_2+\zeta_2\zeta_1)(h)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0)+ \\
&+\frac{1}{2!}(\zeta_1\zeta_3+\zeta_3\zeta_1)(h)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}(0) + \frac{1}{2!}(\zeta_2\zeta_3+\zeta_3\zeta_2)(h)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}(0) + \cdots
\end{aligned}
$$

Si bien esta es una descomposición de la función en una serie, a diferencia del caso complejo, ella no está en términos de potencias de la variable cuaterniónica, más aun ¡la variable cuaterniónica x no es hiperholomorfa! pues

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} + i\frac{\partial x}{\partial x_1} + j\frac{\partial x}{\partial x_2} + k\frac{\partial x}{\partial x_3} = 1 + ii + jj + kk = -2.$$

Consideremos los términos:

$$P^*_{\{n_1,n_2,n_3\}} = \sum \zeta_{i_1}\cdots\zeta_{i_n}, \ \ (i_1,\ldots,i_n) \in A_{(n_1,n_2,n_3)}.$$

Donde $P^*_{\{n_1,n_2,n_3\}} = 0$ si $n_i < 0$ para algún $i \in \{1,2,3\}$. A P^* lo denominamos el producto simétrico formal de $\zeta_1^{n_1}$, $\zeta_2^{n_2}$, $\zeta_3^{n_3}$.

Dado que la serie de Taylor de una función hiperholomorfa contiene productos simétricos de las funciones $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, una pregunta natural es ¿Qué relaciones hay entre el producto cuaterniónico y el producto simétrico?

Observación 2.2.9.

$$
\begin{aligned}
P^*_{\{n_1,n_2,n_3\}} &= \zeta_1 P^*_{\{n_1-1,n_2,n_3\}} + \zeta_2 P^*_{\{n_1,n_2-1,n_3\}} + \zeta_3 P^*_{\{n_1,n_2,n_3-1\}} \\
&= P^*_{\{n_1-1,n_2,n_3\}}\zeta_1 + P^*_{\{n_1,n_2-1,n_3\}}\zeta_2 + P^*_{\{n_1,n_2,n_3-1\}}\zeta_3.
\end{aligned}
$$

Esto se tiene debido a que todas las posibles palabras de tamaño n con tres letras se pueden agrupar por la letra con la que inician o por la letra con la que finalizan, y tendremos la expresión de la derecha, como sólo usamos tres letras estos 3 subconjuntos contienen a todas las palabras.

Lema 2.2.10. *(Relación entre el producto simétrico y el producto usual)*
Sean $n_1, n_2, n_3 \geq 0, n_1 + n_2 + n_3 = n$, *entonces para todo* $0 \leq t \leq n$ *se cumple:*

$$P^*_{\{n_1,n_2,n_3\}} = \sum_{m_1+m_2+m_3=t} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3\}}$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre el índice n, para $n = 1$ y $t = 0, 1$, la fórmula es válida.

Supongamos válida la expresión para $n - 1$, y toda $0 \leq t \leq n - 1$.

Sea T fijo, si $T = n$ o 0, no hay nada que probar.

De la observación anterior tenemos:

$$P^*_{\{n_1,n_2,n_3\}} = P^*_{\{n_1-1,n_2,n_3\}}\zeta_1 + P^*_{\{n_1,n_2-1,n_3\}}\zeta_2 + P^*_{\{n_1,n_2,n_3-1\}}\zeta_3. \quad (2.3)$$

Por inducción tenemos que para $1 \leq T \leq n - 1$, se cumple:

$$\begin{aligned}
P^*_{\{n_1-1,n_2,n_3\}} &= \sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3\}}, \\
P^*_{\{n_1,n_2-1,n_3\}} &= \sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-m_1,n_2-1-m_2,n_3-m_3\}}, \\
P^*_{\{n_1,n_2,n_3-1\}} &= \sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-1-m_3\}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.3) y asociando obtenemos:

$$\begin{aligned}
P^*_{\{n_1,n_2,n_3\}} &= \Big(\sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3\}}\Big)\zeta_1 + \\
&\quad +\Big(\sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-m_1,n_2-1-m_2,n_3-m_3\}}\Big)\zeta_2 + \\
&\quad +\Big(\sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-1-m_3\}}\Big)\zeta_3 \\
&= \sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} \big(P^*_{\{n_1-1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3\}}\zeta_1 + \\
&\quad P^*_{\{n_1-m_1,n_2-1-m_2,n_3-m_3\}}\zeta_2 + P^*_{\{n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-1-m_3\}}\zeta_3\big) \\
&= \sum_{m_1+m_2+m_3=T} P^*_{\{m_1,m_2,m_3\}} P^*_{\{n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3\}}.
\end{aligned}$$

$\square$

De la definición del producto simétrico se sigue que ésta fórmula describe las palabras de tamaño n con m letras distintas de manera iterativa.

2.3. Radio de Convergencia

Teorema de Cauchy-Hadamard

Dado que $\mathbb{H}$ es un espacio real normado y completo (entre otras propiedades) varios teoremas generales de convergencia para series de funciones que son válidos en variable compleja son también válidos para los cuaternios. En cambio, los teoremas más específicos, a saber, aquellos referentes a series de potencias, no admiten una extensión tan directa, esto es debido a que las series que consideramos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3) \\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu a_\nu. \tag{2.4}$$

tienen como término n-ésimo a la función $\sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3) \\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu a_\nu$, mientras que el término n-ésimo para una serie de potencias en una variable compleja es de la forma $z^n a_n$, lo cual hace que sea más directa la relación entre el radio de convergencia y la convergencia de la serie.

Otra diferencia a considerar es que el término n-ésimo es una suma de funciones, y hay varios grados de precisión al mencionar la convergencia absoluta.

Definición 2.3.1. *Diremos que la serie converge de manera absoluta en algún cuaternio x, si al evaluar en ese cuaternio se satisface:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3) \\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu a_\nu(x) \| < \infty,$$

Observación 2.3.2. *El conjunto donde una serie del tipo* (2.4) *converge no necesariamente es un abierto, o un conjunto finito de puntos, por ejemplo: Sea*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_1^n n^n + 2,$$

entonces $f(ja+kb) = 2, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, *y* $f(c+di+ja+bk)$ *diverge si* $c+di \neq 0$. *La serie converge únicamente en el plano* $j \times k$.

Los siguientes dos criterios serán utiles para la exposición de este capítulo, ellos son válidos para series de funciones en general y la demostración es la misma que para el caso complejo.

Sea $E \subset \mathbb{H}$.

Lema 2.3.3. *Criterio de Abel Dirichlet: Para que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$, $a_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $b_n : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, *converja uniformemente en* E, *es suficiente que se cumpla una de las siguientes condiciones:*

- *Las sumas parciales* $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ *son uniformemente acotadas en* E *y la sucesión de funciones* $\{b_n\}$ *tiende a cero monótona y uniformemente.*
- *La serie* $\sum a_n$ *converge uniformemente en* E *y la sucesión de funciones* $\{b_n\}$ *es monótona y uniformemente acotada en* E.

Lema 2.3.4. *Criterio M de Weierstrass:*

Si dada una serie $\sum a_n$, *con* $a_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, *existe una serie convergente* $\sum M_n$ *tal que a partir de cierto* $N \in \mathbb{N}, n > N$ *implica que*

$$\sup_{x\in E} \|a_n(x)\| \leq M_n,$$

entonces la serie $\sum a_n(x)$ *converge absoluta y uniformemente en* E.

Teorema 2.3.5. *(2º Teorema de Abel) Si la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu(x)a_\nu$$

converge para $x \in \mathbb{H}$, *entonces la serie converge uniformemente en el conjunto* $\{\tau x, \tau \in [0,1]\}$.

Demostración. Sea $t \in [0,1]$, por hipotesís la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu a_\nu$ converge en x. Notemos que:

$$\sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu(tx)a_\nu = t^n \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu(x)a_\nu,$$

y la sucesión $\{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada, por el Criterio de Abel-Dirichlet $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu(tx)a_\nu$ converge uniformemente. □

Refinaremos un poco la noción de convergencia absoluta. Dada una serie del tipo (2.4) y $x \in \mathbb{H}$, las siguientes condiciones pueden o no cumplirse:

A.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu a_\nu(x) \| < \infty,$$

B.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} \|P_\nu a_\nu(x)\| < \infty,$$

C.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{\|a_\nu\|}{n!} \sum \|\zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_n}(x)\| < \infty,$$

con $(i_1, \ldots, i_n) \in A_{(n_1,n_2,n_3)}$.

La convergencia de estas series se relaciona de la siguiente forma:
Si $C \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow$ converge (2.4).

Ejemplo 2.3.6. *Las siguientes series nos muestran que en general las implicaciones no se pueden invertir:*

1. *Ejemplo donde converge la serie* (2.4) *pero no se cumple* A :

   La siguiente serie converge pero no absolutamente: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

2. *Ejemplo de una serie que satisface* A *pero que no se tiene la condición* B :

   La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\{n\zeta_1^{4n} - n\zeta_2^{4n}\}$. *Al evaluar en el número uno el n-ésimo sumando es:*

   $n(x_1 - ix_0)^{4n}(1) - n(x_2 - jx_0)^{4n}(1) = n - n = 0$, *así*

   $\sum_{n=1}^{\infty}\{n\zeta_1^{4n} - n\zeta_2^{4n}\}(1) = 0$

   mientras que

   $\sum_{n=1}^{N}\{\|n\zeta_1^{4n}\| + n\|\zeta_2^{4n}\|\}(1) = 2\sum_{n=1}^{N} n$ *la cual diverge.*

3. *Ejemplo donde la propiedad B no implica que se cumpla C : Sea*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\{2n+1,1,0\}} n^n. \tag{2.5}$$

Sabemos que $\zeta_1(1) = -i, \zeta_2(1) = -j$, *por eso al evaluarse en el número uno, la serie tiene como coeficiente n-ésimo:*

$$\frac{n^n}{n!}(\zeta_2(1)\zeta_1(1)^{2n+1} + \zeta_1(1)\zeta_2(1)\zeta_1(1)^{2n} + \cdots + \zeta_1(1)^{2n+1}\zeta_2(1)),$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{n!}(ji^{2n+1} + iji^{2n} + \cdots + i^{2n+1}j) &= \frac{(-1)^n n^n}{n!}(ji + ij + ji + \cdots + ij) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De aquí que esta serie satisfaga B, veamos que no satisface C, el término n-ésimo correspondiente es:

$$\frac{n^n}{n!}(\,\|\zeta_2(1)\zeta_1(1)^{2n+1}\| + \cdots + \|\zeta_1(1)^{2n+1}\zeta_2(1)\|\,)$$

es decir

$$\frac{2(n+1)n^n}{n!}\|\zeta_2(1)\zeta_1(1)^{2n+1}\| = \frac{2(n+1)n^n}{n!},$$

como el término n-ésimo no converge a cero ($n^n/n! \geq 1$) *la serie no puede converger.*

Recordemos que estamos estudiando series del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3) \\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu(x) a_\nu.$$

y que definimos:

$$P_{\{n_1,n_2,n_3\}} := \frac{1}{n!} \sum \zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_n}, \quad (i_1, \ldots, i_n) \in A_{(n_1,n_2,n_3)}.$$

A una serie f de este tipo, le asociamos la serie NFf (norma fina de f) definida por:

$$NFf(x) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{\|a_\nu\|}{n!} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_{(n_1,n_2,n_3)}} \|\zeta_{i_1}\cdots\zeta_{i_n}(x)\|,$$

o lo que es lo mismo

$$NFf(x) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{\|a_\nu\|}{n!} \|\zeta_1^{n_1}\zeta_2^{n_2}\zeta_3^{n_3}(x)\| \binom{n}{n_1, n_2, n_3}.$$

Definición 2.3.7. *Diremos que la serie f converge de manera fina en algún cuaternio x si:*

$$NFf(x) < \infty.$$

Como es de esperarse aquellas series que satisfacen esta condición son las mas sencillas de trabajar y varios de los teoremas de variable compleja que se refieren a series de potencia admiten una generalización a este tipo de series, para ver esto primero debemos cambiar de norma.

Norma $\|\cdot\|'$

Definimos la función $\|\cdot\|' : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\|x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3\|' := \max\{\|x_0 + ix_1\|, \|x_0 + jx_2\|, \|x_0 + kx_3\|\}.$$

Lema 2.3.8. $\|\cdot\|'$ *es una norma.*

Demostración. Dado que $\|\cdot\|$ es una norma, $\|x\|' \geq 0$ y toma el valor de $0 \Leftrightarrow x = 0$.

Además para todo λ real se cumple que $\|\lambda x\|' = |\lambda|\|x\|'$. Veamos que se satisface la desigualdad del triángulo.

Sea $n \in \{1, 2, 3\}$ tal que

$$\|x + y\|' = \|x_0 + y_0 + e_n(x_n + y_n)\|,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|x+y\|' &= \|x_0+y_0+e_n(x_n+y_n)\| \\
&\leq \|x_0+e_nx_n\|+\|y_0+e_ny_n\| \\
&\leq \max_{b=1,2,3}\{\|x_0+e_bx_b\|\}+\max_{b=1,2,3}\{\|y_0+e_by_b\|\} \\
&= \|x\|'+\|y\|'.
\end{aligned}$$

□

El Lema 2.2 nos dice que una función hiperholomorfa que admita una expansión en serie se escribe en términos de las funciones $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. La norma $\|\cdot\|'$, es mejor que la norma usual para medir la contribución de un cuaternio a la serie, sin embargo:

Ejemplo 2.3.9. *La norma $\|\cdot\|'$ toma valores distintos en cuaternios de la forma $a+b\alpha, a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in S^2$, que en cuaternios de la forma $a\alpha+b\beta, a, b \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in S^2$, dado que la multiplicación cuaternionica cambia los roles de estos elementos, $\|x\|'\|y\|'$ no necesariamente coincide con el valor de $\|xy\|'$, más aún, en general ¡Estos valores no se pueden comparar!*

$$\begin{aligned}
\|i(1+2j)\|' &= \|i+2k\|' \\
&= 2 \\
&< \|i\|'\|1+2j\|' \\
&= \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

i.e. existen cuaternios que cumplen $\|xy\|' < \|x\|'\|y\|'$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= \|1+2j\|' \\
&= \|i^{-1}(i+2k)\|' \\
&> \|i^{-1}\|'\|i+2k\|' \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Luego también existen cuaternios que cumplen $\|xy\|' > \|x\|'\|y\|'$.

Dado $r \in \mathbb{R}, r > 0$, sean $\mathbb{B}(0,r)$ y $\mathbb{B}'(0,r)$ las bolas abiertas considerando la norma usual y la norma $\|\cdot\|'$ respectivamente, para todo cuaternio x se cumple que $\|x\|' \leq \|x\|$, luego se tiene la siguiente contención propia: $\mathbb{B}(0,r) \subset \mathbb{B}'(0,r)$.

Por ejemplo el punto $(0, r, r, r)$ no pertenece a la bola usual de radio r, aunque $\|(0, r, r, r)\|' = r$.

Si nos restringimos a los cuaternios contenidos en el plano complejo, entonces la acción de la norma $\|\cdot\|'$ es la misma que de la norma compleja usual. Lo mismo sucede si nos restringimos a los planos $\mathbb{C}_j, \mathbb{C}_k$. Sin embargo el conjunto de cuaternios de la forma $aj + bk$, con $a, b \in \mathbb{R}$, que satisfacen la condición $\|aj + bk\|' \leq r$, es un cuadrado, la acción de la norma en este plano es la acción de la llamada norma del taxista, es decir $\|aj + bk\|' = \text{máx}\{|a|, |b|\}$.

Lema 2.3.10. *Si una serie de funciones del tipo* (2.4) *converge de manera fina en h entonces converge absoluta y uniformemente en*

$$\{x \in \mathbb{H} \mid \|\zeta_1(x)\| \leq \|\zeta_1(h)\|, \|\zeta_2(x)\| \leq \|\zeta_2(h)\|, \|\zeta_3(x)\| \leq \|\zeta_3(h)\|\}.$$

Demostración. Se sigue del criterio "M" de Weierstrass. □

Observación 2.3.11. *La Serie* (2.5)*:*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\{2n+1,1,0\}} n^n,$$

muestra una de las diferencias importantes entre series asociadas a funciones analíticas y series asociadas a funciones hiperholomorfas:

- *En el caso de las series complejas los polinomios z^n solo se anulan en el 0, así las propiedades de convergencia dependen únicamente de los coeficientes.*
- *Los polinomios $P_{\{2n+1,1,0\}}$ se anulan en los reales.*

De aquí que la Serie (2.5) *que converge en todo $\mathbb{R}$, no satisface el lema previo.*

Para series de la forma (2.4):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3) \\ n_1+n_2+n_3=n}} P_\nu(x) a_\nu,$$

sea $\rho = \overline{\text{lím}}_{k\to\infty} (\text{máx}_{\|\nu\|=k} \|a_\nu\|)^{\frac{1}{k}}$.

Definición 2.3.12. *Llamamos a* $\frac{1}{\rho}$ *el radio de convergencia, donde* $\frac{1}{\rho} = 0$, *si* $\rho = \infty$, *y* $\frac{1}{\rho} = \infty$, *si* $\rho = 0$.

Observación 2.3.13. *En general la siguiente cota es válida:*

$$\|P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x)\| \leq \frac{\|x\|'^n}{n!}\binom{n}{n_1, n_2, n_3}.$$

Esto es debido a que si $m = \|x\|'$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x)\| &= \|\frac{1}{n!}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_{(n_1,n_2,n_3)}} \zeta_{i_1}(x)\cdots\zeta_{i_n}(x)\| \\
&\leq \frac{1}{n!}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_{(n_1,n_2,n_3)}} \|\zeta_{i_1}(x)\cdots\zeta_{i_n}(x)\| \\
&\leq \frac{1}{n!}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_{(n_1,n_2,n_3)}} \|(\zeta_1(x))^{n_1}\|\|(\zeta_2(x))^{n_2}(x)\|\|(\zeta_3(x))^{n_3}\|.
\end{aligned}$$

Como $\forall\, i \in \{1,2,3\}$ $\|\zeta_i(x)\| \leq \|x\|'$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x)\| &\leq \frac{1}{n!}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_{(n_1,n_2,n_3)}} \|\zeta_1(x)\|^{n_1}\|\zeta_2(x)\|^{n_2}\|\zeta_3(x)\|^{n_3} \\
&\leq \frac{1}{n!}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_{(n_1,n_2,n_3)}} m^n \\
&= \frac{m^n}{n!}\binom{n}{n_1, n_2, n_3}.
\end{aligned}$$

Observación 2.3.14. *En particular tenemos:*

$$NFP_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x) \leq \frac{m^n}{n!}\binom{n}{n_1, n_2, n_3}. \tag{2.6}$$

Lema 2.3.15. *Si* $\rho = 0$, *entonces la serie de funciones* (2.4) *converge de manera fina para todo* $x \in \mathbb{H}$.

Demostración. Notemos que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$(1+1+1)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n,} \binom{n}{n_1, n_2, n_3},$$

donde la suma está indexada por todas las ternas de números mayores o iguales a cero que suman n.

Sea $x \in \mathbb{H}$, dado que la serie converge en $x = 0$, supondremos $x \neq 0$.

Sea $m = \|x\|'$, como $\overline{\lim}_{k\to\infty}(\max_{\|\nu\|=k} \|a_\nu\|)^{\frac{1}{k}} = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, k > N, (\max_{\|\nu\|=k} \|a_\nu\|)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{3m}.$$

Sea $n > N$, entonces: $\|a_\nu\| \leq \frac{1}{(3m)^n}$, donde $\|\nu\| = n$, y de la observación previa:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{\|a_\nu\|}{n!} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_\nu} \|\zeta_{i_1}\cdots\zeta_{i_n}(x)\| &\leq \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{m^n}{n!(3m)^n}\binom{n}{n_1, n_2, n_3} \\
&= \frac{1}{3^n n!}\sum_{n_1+n_2+n_3=n}\binom{n}{n_1, n_2, n_3} \\
&= \frac{3^n}{3^n n!}.
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$k = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3)\\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{\|a_\nu\|}{n!} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A_\nu} \|\zeta_{i_1}\cdots\zeta_{i_n}(x)\| < \infty$$

entonces:

$$\begin{aligned}
NFf(x) &\leq k + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n!} \\
&\leq k + e.
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $\rho = 0$, la serie converge de manera fina para todo $x \in \mathbb{H}$. $\square$

Lema 2.3.16. *Si $0 < \rho < \infty$, la Serie* (2.4) *converge de manera fina en* $\mathbb{B}'(0, \frac{1}{\rho})$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{H}$ tal que $m = \|x\|' < \frac{1}{\rho}$, y sea $\theta \in (0,1)$ tal que $m = \frac{\theta^2}{\rho}$, entonces

$$\frac{\theta}{m} = \frac{\rho}{\theta} > \rho = \overline{\lim_{k\to\infty}} (\max_{\|\nu\|=k} \|a_\nu\|)^{\frac{1}{k}}.$$

Por lo cual existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k > N_0$,

$$\|a_\nu\|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{\theta}{m},\ \|\nu\| = k.$$

Si consideramos $n > N_0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1+n_2+n_3=n} NFP_\nu(x)\,\|a_\nu\| &\leq \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{m^n}{n!}\binom{n}{n_1, n_2, n_3}\frac{\theta^n}{m^n} \\
&\leq \frac{\theta^n}{n!}\sum_{n_1+n_2+n_3=n}\binom{n}{n_1, n_2, n_3} \\
&= \frac{\theta^n}{n!}3^n.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
NFf(x) &< \sum_{n=0}^{N_0}\sum_{n_1+n_2+n_3=n} NFP_\nu(x)\|a_\nu\| + \sum_{N_0+1}^{\infty}\frac{3^n}{n!} \\
&\leq \sum_{n=0}^{N_0}\sum_{n_1+n_2+n_3=n} NFP_\nu(x)\|a_\nu\| + e^3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie converge de manera fina para todo cuaternio tal que:

$$\max\{\|x_0 + x_\alpha e_\alpha\|,\ \alpha \in \{1,2,3\}\} < \frac{1}{\rho}.$$

□

Teorema 2.3.17. *(Cauchy-Hadamard) La serie f converge de manera fina y uniforme por compactos en* $\{x \in \mathbb{H} \mid \|x\|' < \rho\}$.

Demostración. Se sigue de los lemas previos y del Lema 2.3.10. □

El siguiente teorema es útil para determinar la convergencia de una serie sin calcular explícitamente el radio de convergencia:

Teorema 2.3.18. *(Abel) Si existen $r_0, M \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall\, n > N$ y $\forall\, \nu$ con $\|\nu\| = n$*

$$\|a_\nu\| r_0^n \leq M,$$

entonces la serie converge de manera fina y uniforme por compactos en $\mathbb{B}'(0, r_0)$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{H}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $\|x\|' \leq r$, $r < r_0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\forall\, n$, se cumple que $\|a_\nu\| r_0^n \leq M$, con $\|\nu\| = n$. Entonces de (2.6)

$$\begin{aligned} NFP_\nu(x)\|a_\nu\| &\leq \binom{n}{n_1, n_2, n_3} \frac{r^n}{n!} \|a_\nu\| \\ &= \binom{n}{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{n!} \frac{r^n}{r_0^n} r_0^n \|a_\nu\| \\ &\leq \binom{n}{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{n!} (\frac{r}{r_0})^n M. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} NFf(x) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{r}{r_0})^n M \sum_{\substack{\nu=(n_1,n_2,n_3) \\ n_1+n_2+n_3=n}} \binom{n}{n_1, n_2, n_3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{r}{r_0})^n M 3^n. \end{aligned}$$

Como $\frac{r}{r_0} < 1$, la serie $\sum \frac{1}{n!} (\frac{3r}{r_o})^n$ converge, siendo una cota e^3.

Por el criterio M de Weierstrass, la serie converge de manera fina y uniformemente por compactos en $\mathbb{B}'(0, r)$. □

De la Observación 2.3.2 notemos que a diferencia del caso complejo, los conjuntos donde la serie converge no necesariamente son bolas.

Observación 2.3.19. *Consideremos la serie de la Observación 2.3.2 tiene radio de convergencia 0, pero hay cuaternios cuya norma es tan grande como se quiera, y tales que la serie converge en esos valores.*

Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_1^n a_n + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_2^n b_n + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_3^n c_n.$$

Y sean:

$\rho_1 = \overline{\lim}_{k\to\infty} \|a_k\|^{\frac{1}{k}}, \rho_2 = \overline{\lim}_{k\to\infty} \|b_k\|^{\frac{1}{k}}, \rho_3 = \overline{\lim}_{k\to\infty} \|c_k\|^{\frac{1}{k}}.$

Lo primero que notamos es que la serie converge en la bola $\{x \in \mathbb{H} | \|x\|' < \text{mín}\{\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}\}\}$.

Sin embargo esta serie converge en un dominio más grande, a saber, el conjunto:

$$\{x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 | \; \|x_0 + ix_i\| < \frac{1}{\rho_1}, \|x_0 + jx_j\| < \frac{1}{\rho_2}, \|x_0 + kx_k\| < \frac{1}{\rho_3}\}.$$

Observación 2.3.20. *La siguiente serie converge de manera absoluta únicamente en* $\{x \in \mathbb{H} | \|x\|' < 1\}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_1^{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_2^{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_3^{2^n}.$$

Pues si $h \notin \{x \in \mathbb{H} | \|x\|' < 1\}$, *entonces falla al menos una de las tres condiciones* $\|x_0 + ix_i\| < 1, \|x_0 + jx_j\| < 1, \|x_0 + kx_k\| < 1$, *supongamos que* $\|x_0 + ix_i\| \geq 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_1^{2^n}$ *diverge.*

Observación 2.3.21. *Si* $\|x\| < 1$, *entonces :*

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Sea $\|x\| < 1$, *la sucesión* $\{\|x\|^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es decreciente y de términos positivos, por lo tanto existe el* $\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|^n$.

Dado que el límite de un producto es el producto de los límites:

$\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|^n = \|x\| \text{lím}_{n\to\infty} \|x\|^{n-1}$, *de donde se sigue que* $\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|^n = 0$.

Consideremos la sucesión: $a_n = \sum_{l=0}^{n} x^l = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$, *entonces:*

$$\|\frac{1}{1-x} - \sum_{l=0}^{n} x^l\| = \|\frac{x^{n+1}}{1-x}\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$

por lo tanto, si $\|x\| < 1$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l$.

Sea la función $g(x) = (x)^{-1}\|(x)\|^{-2}, x \neq 0$, esta función es hiperholomorfa. Si $\|h\| < \|x\|$ podemos considerar

$$g(x-h) = (1 - x^{-1}h)^{-1}\|(1 - x^{-1}h)\|^{-2}x^{-1}\|x\|^{-2},$$

en la vecindad del cero $\{x, h \in \mathbb{H} \mid \|x^{-1}h\| < 1\}$.

Por la observación anterior g admite en una vecindad $\{x, h \in \mathbb{H} \mid \|x^{-1}h\| < 1\}$ un desarrollo en serie de funciones, por el Lema 2.2.7 y dado que la expansión en serie de Taylor es única, se tiene:

$$\begin{aligned}
(x-h)^{-1}\|(x-h)\|^{-2} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h) \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}\Big|_x \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h)(\partial_{\{n_1,n_2,n_3\}} f)\Big|_x \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h) Q_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x), \quad (2.7)
\end{aligned}$$

donde $Q_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}\Big|_x$.

Nota 2.3.22. *Dado que:*

$$(h_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial x_3})^n = (\frac{\partial}{\partial x_0} h_0 + \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} h_3)^n$$

La serie de Taylor de $g(x-h)$*también admite la siguiente expresión:*

$$(x-h)^{-1}\|(x-h)\|^{-2} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} Q_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x) P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(h).$$

Nota 2.3.23. *Notemos que la serie* (2.7) *converge en* $\{x, h \in \mathbb{H} \mid \|x^{-1}h\| < 1\}$, *sin embargo no converge en todo el conjunto* $\{x, h \in \mathbb{H} \| \|x^{-1}h\|' < 1\}$, *para ver esto consideremos el punto* $.9i + .9j$, *que satisface:*

$$\|.9i + .9j\|' < 1, \ \|.9i + .9j\| > 1.$$

Calcularemos la expresión de la serie $(1-q)/\|1-q\|^2$ *para los puntos* $q \in \mathbb{V}$ *que satisfacen* $\|q\| < 1$. *Como* $\bar{q} = -q$: *y dado que la serie converge uniformemente se tiene:*

$$\begin{aligned}(1-h)^{-1}\|(1-h)\|^{-2} &= (1-h)^{-2}(1+h)^{-1} \\ &= \sum nq^n \sum (-1)^s q^s.\end{aligned}$$

Como la serie $\sum nq^n$, *converge absolutamente en* $q \in \mathbb{V}, \|q\| < 1$, *por el teorema de Cauchy-Mertens:*

$$\begin{aligned}(1-h)^{-1}\|(1-h)\|^{-2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}((-1)^{n-r} r q^{r+n-r}) \\ &= \sum_n q^{2n}\sum^{2n}((-1)^r r) - q^{2n-1}\sum^{2n-1}((-1)^r r) \\ &= \sum_n q^{2n} n - q^{2n-1} n \\ &= \sum nq^{2n-1}(q-1).\end{aligned}$$

Esta expresión es válida para los puntos $q \in \mathbb{V}, \|q\| < 1$, *además:*

$$.9i + .9j = .9\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}\frac{i+j}{\sqrt{2}}} \in \mathbb{V}.$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} n(.9\sqrt{2})^{2n-1} \neq 0,$$

por lo que la serie diverge en $.9i + .9j$.

$\square$

Capítulo 3

Teorema de Cauchy

En la primera parte se introduce el lenguaje necesario de la homología singular, para entender la versión homológica del Teorema de Cauchy. Esta sección esta basada en la demostración del Teorema de Cauchy del artículo [BN96].

En [Sud79] el Dr. Sudbery demuestra el Teorema de Cauchy en su versión homológica basándose en el Lema de Goursat, pero no prueba el lema. En la Segunda Sección se da una demostración de este lema y con esto queda completa la demostración. Recientemente los doctores Daniel Alpay y Michael Shapiro [ASV05] han mostrado, de una forma diferente al resultado del Dr. Fueter, que la condición de hiperholomorfía en una vecindad da lugar a la expansión en serie de Taylor, también se estudió este enfoque.

3.1. Invariancia Homológica

Decimos que una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es rectificable si para toda partición $P = \{p_i\}$ del intervalo [0,1], se tiene que $\sum |\gamma(p_{i+1}) - \gamma(p_i)| < M < \infty$, para cierto $M > 0$. Cuando la curva es rectificable, y si f es continua se cumple que

$$\int_\gamma f = \lim_{|P|\to 0} \sum f(\tau_k)(z_k - z_{k-1})$$

donde $\tau_k = az_k + bz_{k-1}, a+b = 1, a, b \geq 0$, y la norma de la partición $P = \{p_i\}$ es $|P| := \sum |p_i - p_{i-1}|$.

Intuitivamente se pide que si inscribimos una poligonal en la traza de la curva, la longitud de la poligonal esté acotada. Llamamos longitud de γ al supremo de los valores $\sum |\gamma(p_{i+1}) - \gamma(p_i)|$, sobre todas las particiones.

Dadas las curvas $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$, formalmente definimos una cadena como un término de la forma $\sum a_i\gamma_i, a_i \in Z$, donde identificamos $-\gamma$ con la curva $\gamma * (t) = \gamma(a + b - t)$ que geométricamente tiene la misma traza que γ pero la recorre en sentido contrario.

Para interpretar el caso 4-dimensional serán útiles las siguientes definiciones:

Definición 3.1.1. *Sean $\{a_0, \ldots, a_n\} \in \mathbb{R}^n$, diremos que los puntos forman un subconjunto linealmente independiente si los vectores $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ son linealmente independientes.*

Esta condición equivale pedir que los puntos no estén contenidos en un subespacio de dimensión $n - 1$. Por ejemplo $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \in \mathbb{R}^2$ son linealmente independientes.

Definición 3.1.2. *Sea $\{a_0, \ldots, a_n\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente, definimos como el n-símplice ordenado $[a_0, \ldots, a_n]$ al conjunto:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i, \sum t_i = 1, t_i \geq 0 \ \forall i\{0, 1, \ldots, n\}\}$$

con el orden de los puntos $\{a_0, \ldots, a_n\}$ dado.

En esta definición debemos poner atención al orden, así $[0, 1] \neq [1, 0]$, pero definimos $[a_0, \ldots, a_n] = [a_{\upsilon(0)}, \ldots, a_{\upsilon(n)}]$ para toda $\upsilon \in S_n$ permutación par, y $[a_0, \ldots, a_n] = -[a_{\epsilon(0)}, \ldots, a_{\epsilon(n)}]$ para toda $\epsilon \in S_{(n)}$ permutación impar.

Ejemplos. Un 0-simplice está formado por un punto y en este caso sólo hay una orientación a considerar, un 1-símplice será una recta, un 2-simplice será un triángulo, y un 3 símplice un tetraedro.

Dado un n-símplice $[a_0, \ldots, a_n]$ llamamos caras a los $n - 1$ símplices de la forma $[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n]$ donde $\hat{a}_i$ significa que hemos omitido este punto.

Denotaremos por Δ^n al n-símplice

$$\begin{aligned} \Delta^n &= \{(t_0, \ldots, t_n) | \sum t_i = 1, t_i \geq 0\} \\ &= [e_1, \ldots, e_{n+1}] \end{aligned}$$

donde e_i es el i-ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^n$.

S^3 no contiene propiamente n-símplices, salvo por $n = 0$, pero trabajaremos con imágenes de estos n-símplices.

Definición 3.1.3. *Dado un espacio topológico X, un n-símplice singular es una función continua*

$$\sigma : \Delta^n \to X, n \in \mathbb{N}$$

Ejemplos 3.1.4. *Consideremos $X = \mathbb{C}$, y el siguiente* 1*-símplice singular:*

$$\begin{aligned} \tau(\Delta^1) &= \tau([0,1]) \\ &= (t(1,0) + (1-t)(0,1)) \, /||(t(1,0) + (1-t)(0,1)|| \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2 + (t-1)^2}}(1,0) + \frac{1-t}{\sqrt{t^2 + (t-1)^2}}(0,1); \end{aligned}$$

éste 1*-símplice está bien definido pues* $||(t(1,0) + (1-t)(0,1))|| \neq 0$ *ya que* $(1,0), (0,1)$ *son linealmente independientes.*

Pese a que nos estamos restringiendo a funciones continuas definidas en Δ^n aun tenemos demasiadas funciones a considerar, por ejemplo, a cada punto en S^3 le podemos asignar un n-símplice singular constante, pues la función que a todo el n-símplice lo asigna a un punto es continua.

En general el grupo de cadenas $C_n(X)$ se define como el grupo abeliano cuya base es el conjunto de n-símplices singulares donde identificamos al símplice $-c$ con el símplice de orientación contraria a la de c cuando esto tiene sentido. Es decir las cadenas son sumas formales de símplices con coeficientes enteros: $\sum r_i \sigma_i, r_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^n \mapsto X$.

A los elementos del grupo $C_n(X)$ los llamaremos n-cadenas.

Así los 0-símplices singulares son funciones que a un punto le asocian puntos en X, los 1-símplices singulares son curvas en X mientras que las 1-cadenas son sumas formales de curvas en X.

Notemos que la suma $+$ no es la suma puntual en funciones $\oplus$ pues esta última no es cerrada en nuestro grupo, como muestra consideremos los 0-símplices:

$$\begin{aligned} \sigma_{01}(\Delta^0) &= 1 \in S^0, \\ \sigma_{02}(\Delta^0) &= -1 \in S^0, \\ \sigma_{01} \oplus \sigma_{02}(\Delta^0) &= \sigma_{01}(\Delta^0) \oplus \sigma_{02}(\Delta^0) \\ &= 0 \notin S^0. \end{aligned}$$

Un n-símplice está formado por caras (que son $(n-1)$-símplices), esto nos permite relacionar las n-cadenas (definidas en n-símplices) con las $n-1$

cadenas (definidas en $(n-1)$- símplices) restringiendo nuestras funciones es decir:

Si tengo el n-símplice singular $\sigma_{01} : [a_0, \ldots, a_n] \mapsto S^3$, al restringirlo a una cara:

$$\sigma_{01}|_{[a_0,\ldots,a_{n-1}]} : [a_0, \ldots, a_{n-1}] \mapsto S^3$$

obtendremos un $(n-1)$-símplice singular.

Debemos aclarar que estamos identificando a la cara $[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{n-1}]$ con Δ^{n-1}.

Ejemplo 3.1.5. *Consideremos al* 1*-símplice singular:*

$$\begin{aligned} \tau : \Delta^1 = [0,1] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \frac{(1,0)t + (1-t)(0,1)}{\sqrt{t^2 + (1-t)^2}}; \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \tau|_{[0]} &= (0,1), \\ \tau|_{[1]} &= (1,0), \end{aligned}$$

por lo que $\tau|_{[0]}$ *y* $\tau|_{[1]}$ *son* 0*-símplices.*

Definición 3.1.6. *Definimos el n-ésimo homomorfismo frontera:*

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(S^3) &\rightarrow C_{n-1}(S^3), \\ \sigma &\mapsto \sum (-1)^i \sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n]}, \\ \partial_0(\{a\}) = 0, \end{aligned}$$

Donde $[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n]$ *significa que omitimos al i-ésimo vector* a_i*, y* a *es una cero cadena.*

La razón del signo es que las imágenes de las caras del n-símplice preserven la orientación de las caras del n-símplice, por ejemplo en el caso del intervalo $[a,b]$ se tiene $\partial[a,b] := b - a$.

Luego si tomamos la n-cadena $c = \sum n_i \sigma_i$, entonces $\partial_n c$ será la $(n-1)$-cadena $c = \sum n_i \partial_n \sigma_i$. A partir de este momento denotaremos por ∂ a ∂_n, debido a que están definidos en diferentes grupos no hay riesgo de confusión.

Ejemplo 3.1.7. *Sea $X = S^1$, si consideramos la 1-cadena τ dada por*

$$\begin{aligned} \tau(\Delta^1) &= \frac{t}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}}(1,0) + \frac{1-t}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}}(0,1), \\ \partial\tau &= \tau|_{[0]} - \tau|_{[1]}. \end{aligned}$$

Sea ahora la curva $\gamma(t) = e^{i2t\pi t}$ cuya imagen en una copia de S^1, entonces

$$\begin{aligned} \partial\gamma &= \gamma|_{[0]} - \gamma|_{[1]} \\ &= e^0 - e^{i2t\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$e^0 - e^{i2t\pi} = 0$ ya que como elementos del grupo $C_1(X)$, las funciones constantes $\gamma|_{[0]}, \gamma|_{[1]}$ son el mismo elemento, a saber, la función que al 0-símplice le asigna el valor $(1,0)$.

El subconjunto de los n-símplices singulares que pertenecen al kernel de ∂ es un subgrupo de $C_n(X)$, cuyos elementos serán llamados n-ciclos.

En el ejemplo anterior γ es un 1-ciclo.

También hemos visto que si σ es un $n+1$-símplice singular, $\partial\sigma$ es un n-símplice singular, el subgrupo formado por aquellos n-símplices singulares que son imágenes bajo ∂ de $(n+1)$-símplices singulares es llamado la imagen de ∂_n y sus elementos son llamados n-fronteras. Una 0-frontera es por ejemplo la 0-cadena $\partial\tau$ del Ejemplo 3.1.5 dada por

$$\begin{aligned} \partial\tau &= \tau|_{[1]} - \tau|_{[0]} \\ &= (0,1) - (1,0). \end{aligned}$$

Notemos que si c es una 1-cadena $\partial^2 c = \partial\partial(c) = 0$ pues $\partial_0(b) = 0 \, \forall \, b$ 0-cadena. Esta propiedad se cumple para las demas cadenas:

Teorema 3.1.8. *$\partial^2 = 0$, es decir toda frontera es un ciclo.*

Demostración. Sea σ un n-símplice. podemos suponer $n > 1$, entonces

$$\partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n]}$$

y $\partial(\sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n]}) = \sum_{j<i}(-1)^j \sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n]} + \sum_{j>i}(-1)^{j-1}\sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_n]}$.
Luego

$$\begin{aligned}
\partial\partial(\sigma) &= \sum_i \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_n]} + \sum_i \sum_{j>i} (-1)^{i+j-1} \sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_n]} \\
&= \sum_i \sum_{j<i} ((-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}) \sigma|_{[a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_n]} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

En este momento tenemos una secuencia de grupos con homomorfismos definidos entre ellos:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_3(X) \xrightarrow{\partial} C_2(X) \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\partial} 0 \qquad (3.1)$$

que satisfacen $\partial^2 = 0$.

Como las fronteras son un subgrupo de los ciclos definimos:

Definición 3.1.9. *$H_n(X)$ denotara al n-esimo grupo de homología dado por*

$$H_n(X) = ker\partial_n / Im\partial_{n+1}.$$

Notemos que $H_0(X) = C_0(X)/Im\partial_1$.

Dada una 1-cadena rectificable $C = \sum a_i\gamma_i$, definimos

$$\int_C f := \sum a_i \int_{\gamma_i} f.$$

Lema 3.1.10. *Sea γ curva cerrada rectificable con $\gamma^* \in \mathbb{B}(z_0, r), \mathbb{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_0| < r\}$.$\gamma$ es homológicamente equivalente a una curva γ' formada por una cantidad finita de segmentos paralelos a los ejes coordenados.*

Demostración. Sea r la distancia entre la traza de γ y $\mathbb{B}(z_0, r)^c$. Sea $\{U_j\}$ cubierta finita por conjuntos abiertos de la traza de γ, donde los abiertos están contenidos en $\mathbb{B}(z_0, r)$ y tienen radio menor que $r/3$. Elegimos puntos $z_i = (x_i, y_i) \in U_i \cap U_{i+1} \cap \gamma^*$, y definimos

$$\gamma_j'(t) := \begin{cases} (x_i + t(x_{i+1} - x_i), y_i), & t \in [0, 1], \\ (x_{i+1}, y_i + (t-1)(y_{i+1} - y_i)), & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Así el camino buscado está dado por $\gamma' = \sum_j \gamma_j'$. □

Notemos que el camino encontrado se obtiene a partir de la cubierta.

Lema 3.1.11. *Sea f analítica en $\mathbb{B}(z_0, r)$, entonces*

$$\int_\beta f = 0,$$

para toda curva β cerrada rectificable con $\beta^* \in \mathbb{B}(z_0, r)$.

Demostración. Del lema previo existe γ', formada por una cantidad finita de segmentos paralelos a los ejes coordenados. Como γ es homóloga a cero, γ' también lo es, por eso se puede descomponer como la suma de las fronteras de rectángulos (2-cadenas), por el Teorema de Cauchy-Goursat la integral sobre γ' es nula.

Por otra parte dado ϵ, podemos encontrar una cubierta U suficientemente fina, tal que al estar contenida la traza de γ' en U, entonces la integral sobre γ y sobre γ' distan en menos que ϵ, por lo cual $\int_\gamma f = 0$. $\square$

El teorema de Cauchy tiene su expresión mas general en terminos de la teoría de homología:

Teorema 3.1.12. *Sea G un subconjunto abierto del plano complejo, f una función analítica en $\mathbb{C}$, si β es una 1-cadena en G homóloga a cero,*

$$\beta = \partial(n_1\alpha_1 + \cdots + n_k\alpha_k),\ \partial\alpha_i \text{ rectificable } \forall i,$$

entonces $\int_\beta f = 0$.

Demostración. Dada β, homológicamente cero, sin perdida de generalidad podemos suponer que es la frontera de un símplice singular, es decir existe $\gamma : I^2 \to G$, con $\beta = \partial\gamma$.

Sea δ la distancia entre G^c y $\gamma(I^2)$, notemos que por ser I^2 compacto existe un $x_0 \in I^2$ tal que $\delta = d(\gamma^*, g^c) > 0$. En el lema siguiente se prueba que existe una partición de $I^2, \{(a_i, b_i)\}_{\{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq m\}}$, y una cubierta $\{U_r\}$ finita por bolas abiertas de $\gamma(I^2)$ tal que para cada i, j existe k con

$$\gamma([a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]) \subset U_k \subset G.$$

Definimos:

$$S([a_i, a_{i+1}]\times[b_j]) = \begin{cases} \{(tf(a_i) + (1-t)f(a_{i+1}), b_j), t \in [0,1]\} & \text{si } j \neq 0, m, \\ \gamma([a_i, a_{i+1}] \times [b_j]) & \text{si } j = 0, m. \end{cases}$$

por simplicidad denotaremos $S_{(i,j)} = S([a_i, a_{i+1}] \times [b_j])$, y sea

$$T(a_i \times [b_j, b_{j+1}]) = \begin{cases} \{(a_i, tf(b_j) + (1-t)f(b_{j+1})), t \in [0,1]\} & \text{si } i \neq 0, n, \\ \gamma([a_i] \times [b_j, b_{j+1}]) & \text{si } i = 0, n. \end{cases}$$

Denotaremos $T(a_i \times [b_j, b_{j+1}]) = T_{(i,j)}$.

Para cada rectángulo $r_{(i,j)} = [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ consideramos la función

$$\Gamma[r_{(i,j)}] = T_{(i,j)} + S_{(i,j+1)} - T_{(i+1,j)} - S_{(i,j)}.$$

Como γ es rectificable, el camino $\Gamma[r_{(i,j)}]$ lo és.

Además $\sum_{i,j} \Gamma[r_{(i,j)}] = \partial\gamma = \beta$.

Por la forma en que elegimos la partición cada $\Gamma[r_{(i,j)}]$ está contenido en una bola contenida en G.

Por el teorema anterior $\int_{\Gamma[r_{i,j}]} f dz = 0$, luego

$$\int_\beta f dz = \sum \int_{\Gamma[r_{i,j}]} f dz = 0.$$

$\square$

Lema 3.1.13. *(Número de Lebesgue) Si X es un espacio métrico compacto, y $\{U\}$ es una cubierta abierta, entonces existe δ tal que todo subconjunto de diámetro menor esta contenido en algún elemento de la cubierta.*

Demostración. Al ser compacto X, existe una subcubierta finita $\{U_i\}_{\{1 \leq i \leq n\}}$. Sea la función $f(x) = \frac{1}{n} \sum d(x, X - U_i)$.

$f(x) > 0$, pues si $x \in U_i$, existe una bola abierta B de radio r, para cierto r, con $x \in B \subset U_i$, luego $d(x, X - U_i) \geq r$ y $f(x) \geq \frac{r}{n}$.

Como f es continua existe $\delta = min\{f(x), x \in X\}$. Si un conjunto A tiene diámetro menor a δ, elegimos un punto $x \in A$, y luego $A \subset B(x, \delta)$. Sea j tal que $d(x, X - U_j)$ sea máxima.

Entonces $\delta \leq f(x) \leq d(x, X - U_j)$. Así $A \subset B(x, \delta) \subset U_j$. $\square$

Lema 3.1.14. *Sea G abierto, $\gamma : I^2 \mapsto G$ función continua. Existe una partición $\{(a_i, b_j)\}$ y una cubierta $\{U_r\}$ de γ^* tal que $\gamma([a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]) \subset U_k \subset G$.*

Demostración. Sea $\delta = d(\gamma^*, g^c)$, para cada $x \in I^2$, la bola $\mathbb{B}(\gamma(x), \frac{\delta}{2})$ está contenida en G. Sea $U_x = \gamma^{-1}(\mathbb{B}(\gamma(x), \frac{\delta}{2}))$. Entonces $I \subset \{U_x\}_{x \in I^2}$.

Por el Lema del número de Lebesgue, existe $\epsilon > 0$, tal que todo conjunto M de radio menor que ϵ esta contenido en algún U_x. Sea $m > \sqrt{2}/\epsilon$, entonces dividimos I^2 en m^2 rectangulos de lado $\frac{1}{m}$. Esta partición tiene diametro menor a ϵ. □

3.2. Caso Cuaterniónico

Observación 3.2.1. *Sea C una 4-celda, entonces:*

$$\int_{\partial C} \sigma_3 = 0.$$

$$\int_{\partial C} \zeta_1 \sigma_3 = 0.$$

La segunda identidad es válida pues $\sigma_3 = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\zeta_3$, luego

$$\int_{\partial C} \zeta_1 \sigma_3 = \int_{\partial C} 1/2 d(\zeta_1^2 d\zeta_2 \wedge d\zeta_3) = 0.$$

Lema 3.2.2. *(Lema de Goursat) Si f es hiperholomorfa en el abierto U, entonces*

$$\int_{\partial C} f \sigma_3 = 0,$$

para todo C 4-símplice, $C \in U$.

Demostración. Orientamos C. Supongamos que $\int_{\partial C} f\sigma_3 \neq 0$, entonces al unir entre si los puntos medios de las aristas de C, obtenemos una partición de C en 16 4-símplices, sea C_1 un subsímplice tal que $|\int_{\partial C_1} f\sigma_3| \geq |\frac{\int_{\partial C} f\sigma_3}{16}|$.

Siempre podemos elegir un subsímplice con esta característica pues de lo contrario todos los subsímplices cumplirian que $|\int_{\partial C_i} f\sigma_3| < |\frac{\int_{\partial C} f\sigma_3}{16}|$ de donde $|\int_{\partial C} f\sigma_3| \leq \sum |\int_{\partial C_i} f\sigma_3| < |\int_{\partial C} f\sigma_3|$ lo cual es absurdo.

A su vez formamos nuevos subsímplices de C_1 y seleccionamos uno que cumpla $|\int_{\partial C_2} f\sigma_3| \geq |\frac{\int_{\partial C_1} f\sigma_3}{16}| \geq |\frac{\int_{\partial C} f\sigma_3}{16^2}|$. De esta forma elegimos C_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que para cada n, el diámetro del símplice C_{n+1} es la mitad del de C_n y es igual al diámetro de C entre 2^{n+1}.

Dado que cada C_i es compacto, $C_{i+1} \subset C_i$, y el diámetro de C_n tiende a 0 cuando n tiende a ∞, existe un único $x_0 \in \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Fijamos $\epsilon > 0$.

Como f es hiperholomorfa en C, por el Lema 2.2.3 existe una vecindad V de x_0 tal que :

$$f(x) = f(x_0) + \zeta_1 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} + \zeta_3 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_3} + \alpha(x - x_0),$$

$$|\alpha(x - x_0)| < \epsilon |x - x_0|. \text{ cuando } x \to x_0.$$

Sea $U \in V$ tal que $|\beta(x)| < |x|\epsilon, \forall x \in U$.

Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \in U$.

Luego por el lema anterior:

$$\begin{aligned}
|\int_{\partial C_n} f(x)\sigma_3| &= |\int_{\partial C_n} f(x) - f(x_0) - \zeta_1 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} - \zeta_2 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} - \zeta_3 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_3} \sigma_3| \\
&= |\int_{\partial C_n} \alpha(x - x_0)\sigma_3| \\
&\leq \epsilon \int_{\partial C_n} |x - x_0||\sigma_3| \\
&= \epsilon \text{ diámetro } (C_n) \int_{\partial C_n} |\sigma_3| \\
&\leq \epsilon \text{ diámetro } (C_n) \text{ vol}(\partial C_n) \\
&\leq \epsilon \text{ diámetro } (C)/2^n \text{ vol}(\partial C)/8^n.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$|\frac{\int_{\partial C} f\sigma_3}{16^n}| \leq |\int_{\partial C_n} f(x)\sigma_3| \leq \epsilon \text{diámetro}(C)\text{vol}(\partial C)/16^n;$$

es decir, para todo $\epsilon > 0$

$$|\int_{\partial C} f\sigma_3| \leq \epsilon \text{ diámetro}(C)\text{vol}(\partial C).$$

Al ser ϵ arbitrario y diámetro(C) vol(∂C) constantes tenemos que

$$|\int_{\partial C} f\sigma_3| = 0.$$

□

Corolario 3.2.3. *Si f es hiperholomorfa en cada punto del paralepipedo C, y $x_0 \in C^\circ$, entonces*

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial C} \frac{(x-x_0)^{-1}}{|x-x_0|^2} \sigma_3 f(x).$$

Demostración. Sean f, g funciones, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} d(g\sigma_3 f) &= dg \wedge \sigma_3 f - g\sigma_3 \wedge df \\ &= (\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} e_i f + g \sum e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) dtdxdydz. \end{aligned}$$

Sea $g(x) = \frac{(x-x_0)^{-1}}{|x-x_0|^2}$, para $x \neq x_0$ esta función es diferenciable y satisface: $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i = 0$.

Como f es hiperholomorfa se tiene que

$$\begin{aligned} d(g\sigma_3 f) &= (\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} e_i f + g \sum e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) dtdxdydz \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \neq x_0$.

Como f es continua existe $\epsilon > 0$ que tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo x en una vecindad V de x_0, además por el teorema de Stokes, si D es un paralepípedo tal que $x_0 \notin \bar{D} \subset C$, entonces

$$\int_{\partial D} \frac{(x-x_0)^{-1}}{|x-x_0|^2} \sigma_3 f(x) = 0,$$

así para $\epsilon > 0$, existe un paralepípedo $C_\epsilon \subset B(x_o)_\epsilon$, con $x_0 \in C_\epsilon^\circ \subset C$, tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon / \left\{ \left| \int_{\partial C} \frac{(x-x_0)^{-1}}{|x-x_0|^2} \sigma_3 \right| + 1 \right\}$$

$\forall x \in C_\epsilon$ y

$$\left| \int_{\partial C} \frac{(x-x_0)^{-1}}{|x-x_0|^2} \sigma_3 f(x) - \int_{\partial C_\epsilon} \frac{(x-x_0)^{-1}}{|x-x_0|^2} \sigma_3 f(x_0) \right| < \epsilon.$$

A su vez al ser $g(x)\sigma_3$ continuamente diferenciable, cambiamos de coordenadas y la integral $\int_{\partial C_\epsilon} \frac{(x-x_0)^{-1}}{|x-x_0|^2} \sigma_3$ se puede calcular sobre una 3-esfera usando que

$$\sigma_3 = \frac{x - x_0}{|x - x_0|} dS.$$

Obtenemos el valor de la integral:

$$\int_{S^3} \frac{dS}{|x - x_0|^3} = 2\pi^2.$$

Como ϵ es arbitrario se concluye que

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial C} \frac{(x - x_0)^{-1}}{|x - x_0|^2} \sigma_3 f(x).$$

□

Dado $x \in \partial C$, la función

$$h(x_0) = \frac{(x - x_0)^{-1}}{|x - x_0|^2} f(x) : C^\circ \to \mathbb{H},$$

es una función real analítica, de aquí tenemos (ver [Her63], pag. 7.) que la función f es real analítica, es decir, si f es hiperholomorfa en un abierto U, f es real analítica en U.

En la sección anterior se demostró que si una función es hiperholomorfa y admite una representación en serie de Taylor esta serie se escribe en términos de las funciones ζ_1, ζ_2 y ζ_3. Ahora veamos que si f es hiperholomorfa en una vecindad, entonces f siempre se puede representar en una vecindad por la serie de Taylor.

Corolario 3.2.4. *Sea $f : A \to \mathbb{H}$, f hiperholomorfa en A, vecindad del cero, entonces las funciones $h_k : A \to \mathbb{H}$ dadas por:*

$$h_k(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx) dt, k = 1, 2, 3.$$

son hiperholomorfas y en la vecindad se cumple que:
$f(x) = f(0) + \sum \zeta_i(x) h_i(x)$.

Demostración. Sea la función $F : [0, 1] \to A$, dada por $F(t) = f(tx)$, por la regla de la cadena (aplicada a las funciones componentes) tenemos que:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial f(tx)}{\partial x_k} x_k \\ &= \frac{\partial f(tx)}{\partial x_0} x_0 + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f(tx)}{\partial x_k} x_k. \end{aligned}$$

Como f es hiperholomorfa se cumple: $\sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial f(tx)}{\partial x_k} = -\frac{\partial f(tx)}{\partial x_0}$, luego

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\sum_{k=1}^{3} e_i \frac{\partial f(tx)}{\partial x_k} x_0 + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f(tx)}{\partial x_k} x_k \\ &= \sum_{1}^{3} \zeta_i(x) \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Por otra parte, al integrar F' tenemos:

$$\int_0^1 F'(t)dt = \sum_{1}^{3} \zeta_i(x) \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$$

y al ser f real diferenciable:

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(t)'dt &= F(1) - F(0) \\ &= f(x) - f(0). \end{aligned}$$

Es decir $f(x) = f(0) + \sum_1^3 \zeta_i(x) \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$.

Por ser f real diferenciable:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} h_k(x) &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(tx)}{\partial x_k} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} \, tdt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir las funciones h_k son hiperholomorfas. $\square$

Corolario 3.2.5. *Si f es hiperholomorfa en V vecindad del cero, entonces f admite una expansión en serie de Taylor*

Demostración. Del teorema anterior tenemos que las funciones h_k son reales analíticas en la misma vecindad que lo es f, por lo que
$h_k(x) = h_k(0) + \sum_j \zeta_j(x) \int_0^1 \frac{\partial h_k(tx)}{\partial x_j} dt$.
Sea $h_{k,j}(x) := \int_0^1 \frac{\partial h_j(tx)}{\partial x_k} dt$.
Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(tx)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f(tx)}{\partial x_k \partial x_j} t.$$

Por ser f real analítica, existen las parciales y son continuas, luego se cumple que

$$\begin{aligned} h_{k,j}(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(t\tau x) dt d\tau \\ &= \int_{I^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j x_k} f(t\tau x) t dt d\tau. \end{aligned}$$

y tenemos: $h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.
Así

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sum_i \zeta_i(x) h_i(0) + \sum_{i,j} \zeta_i(x)\zeta_j(x) h_{i,j}(x), \\ &= f(0) + \sum_i \zeta_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \sum_{i,j} (\zeta_i(x)\zeta_j(x)) h_{i,j}(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} h_{j,k}(0) &= \int_{I^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j x_k} f(0) t dt d\tau \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j x_k} f(0) \int_{I^2} t dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j x_k} f(0). \end{aligned}$$

En general se define:

$$\begin{aligned}
h_{i_1,\ldots,i_n}(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} h_{i_2,\ldots,i_n}(t_1 x) dt_1 \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \int_{I^{n-1}} \frac{\partial^{n-1} f(t_2\cdots t_n(t_1 x))}{\partial x_{i_2}\cdots \partial x_{i_n}} t_3 t_4^2 \cdots t_n^{n-2} dt_2\cdots dt_n dt_1 \\
&= \int_{I^n} \frac{\partial^n f(t_1\cdots t_n x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}} (t_2\cdots t_n^{n-1}) dt_1\cdots dt_n,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
h_{i_1,\ldots,i_n}(0) &= \frac{\partial^n f(0)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}} \int_{I^n} (t_2\cdots t_n^{n-1}) dt_1\cdots dt_n \\
&= \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(0)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}.
\end{aligned}$$

por el corolario anterior cada $h_{i_1,\ldots,i_n}$ es hiperholomorfo en la vecindad V.

Luego

$$h_{i_1,\ldots,i_n}(x) = h_{i_1,\ldots,i_n}(0) + \sum_j \zeta_j(x) \int_0^1 \frac{\partial h_{i_1,\ldots,i_n}(tx)}{\partial x_j} dt$$

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(0)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}} + \sum_j \zeta_j(x) \int_0^1 \frac{\partial h_{i_1,\ldots,i_n}(tx)}{\partial x_j} dt.$$

Al sustituir en (3.2) se tiene

$$f(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|v|=n} P_v(x_0) a_v, \tag{3.3}$$

Dado que f es real analítica, en una vecindad del origen existe una serie de potencias real que converge absoluta y uniformemente por compactos a la función, digamos

$$f = \sum \alpha_{a,b,c,d} x_0^a x_1^b x_2^c x_3^d, \alpha \in \mathbb{H}, \tag{3.4}$$

en esa vecindad, la función también admite la expansión en serie (3.3) que acabamos de encontrar, en el Lema 2.2.7 vimos que esta és la expansión en serie de Taylor Cuaterniónica, y por unicidad se sigue que (3.4) y (3.3) son la misma serie, es decir si desarrollamos los términos de (3.3) obtendremos los coeficientes de (3.4).

Como (3.4) converge absoluta y uniformemente por compactos, (3.3) también converge absolutamtente y uniformente. □

Para dimensiones superiores hay diversas nociones de la propiedad de rectificabilidad, cada una sustentada por una teoría distinta que busca preservar cierta propiedad de las curvas rectificables.

Inicialmente se creyó que bastaba aproximar por triangulaciones, de manera que los vértices de los triángulos pertenezcan a la superficie y la distancia entre la superficie y la superficie formada por triángulos tienda a cero, sin embargo no necesariamente el área de la superficie triangulada tenderá al área de la superficie inicial.

H. A. Schwartz dió un ejemplo conocido como “La bota de Schwartz” de como aproximar la superficie de un cilindro por poliedros, de forma que el área de los poliedros tienda a cualquier número positivo o infinito, ver por ejemplo [Lor99], y [Ram04].

En [Sud79] al tener el Lema de Goursat, se demuestra que si f es hiperholomorfa en un abierto U y C es una 3-cadena rectificable homóloga (en la homología singular) a cero, entonces $\int_C \sigma_3 f = 0$. La demostración es en esencia las pruebas 3.1.11 y 3.1.12 adaptadas al caso cuaternionico.

Capítulo 4

Teorema de Laurent

Estudiamos el Teorema de Laurent en dos versiones: la usual y la matricial. La sección correspondiente a la versión usual está basada en [BDS82]. Para la expresión en términos matriciales se estudió el trabajo de los doctores Frenkel y Libine [FL07].

4.1. Base de Fueter

Todo polinomio hiperholomorfo admite una representación en términos de las funciones $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, esto es debido a que todo polinomio ya está escrito en su serie de Taylor, esto se puede interpretar como "los productos simétricos de grado n de las funciones $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, forman una base para los polinomios homogeneos de grado n".

En general sabemos que si f es hiperholomorfa en un abierto, la función admite una expansión en serie donde se involucran productos simétricos de las funciones $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. En el caso de las funciones hiperholomorfas en anillos se tiene una descomposición análoga donde aparecen términos homogéneos de grado negativo.

Supongamos que la función f es hiperholomorfa en el anillo

$$R_{\{r_1,r_2\}} = \{r_1 \leq \|x\| \leq r_2\},$$

sea $x \in R_{\{r_1,r_2\}}$ y sean ρ_1, ρ_2 tales que $r_1 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2 < r_2$, entonces por el teorema de Cauchy:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D(\rho_2)} \frac{(q-x)^{-1}}{\|q-x\|^2}\sigma_3 f(q) - \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D(\rho_1)} \frac{(q-x)^{-1}}{\|q-x\|^2}\sigma_3 f(q).$$

Para ver esto supongamos que $Re(x) \neq 0$, consideremos el casquete superior: $CS = R_{\{r_1,r_2\}} \cap \{x_0 \geq 0\}$ y el casquete inferior $CI = R_{\{r_1,r_2\}} \cap \{x_0 \leq 0\}$.

La unión de las fronteras de estos dos casquetes nos da $\partial D(\rho_2) - \partial D(\rho_1)$, donde $D(\rho_1)$ es la bola de radio ρ_1 orientada positivamente, de aquí se sigue que

$$\int_{\partial CS \cup CI} \frac{(q-x)^{-1}}{|q-x|^2}\sigma_3 f = \int_{\partial D(\rho_2)} \frac{(q-x)^{-1}}{\|q-x\|^2}\sigma_3 f(q) - \int_{\partial D(\rho_1)} \frac{(q-x)^{-1}}{\|q-x\|^2}\sigma_3 f(q).$$

Esto es independiente de los casquetes que elijamos, es decir si $Re(x) = 0$ se sustituyen los casquetes por aquellos formados por $< h, x >= 0$ para $h \in \mathbb{H}$.

Analicemos $\int_{\partial D(\rho_2)} \frac{(q-x)^{-1}}{\|q-x\|^2}\sigma_3 f(q)$.

Para todo $q \in \partial D(\rho_2)$, $\|x\| \leq \|q\|$, es válida la expansión 2.7:

$$\int_{\partial D(\rho_2)} \sum_{n\geq 0} \sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x) Q_{\{n_1,n_2,n_3\}}(q)\sigma_3 f(q).$$

Observación 4.1.1. *Sea la función continua $f : S^3 \mapsto \mathbb{H}$, y $g_i : C \mapsto \mathbb{H}$, donde C es abierto contenido en $\mathbb{H} - \{0\}$. Si la serie $\sum g_i$ converge absoluta y uniformemente por compactos en C, entonces la serie $\sum g_i \sigma_3 f(\frac{x}{\|x\|}) : C \mapsto H$ converge uniformemente por compactos.*

Esto se sigue de que $\|g_i(x)\sigma_3 f(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M\|g_i\|\ \forall\, x \in C$, para cierta $M > \sup_C \|f(\frac{x}{\|x\|})\| vol(C)$, la existencia del supremo esta garantizada pues f es continua y S^3 es compacto.

Sabemos que la serie (2.7) converge absouta y uniformemente por compactos. Como f es continua y $\partial D(\rho_2)$ es un conjunto compacto, de la observación anterior se sigue que al tener convergencia uniforme, $\int_{\partial D(\rho_2)} \frac{(q-x)^{-1}}{\|q-x\|^2}\sigma_3 f(q)$ será igual a

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x)\int_{\partial D(\rho_2)} Q_{\{n_1,n_2,n_3\}}(q)\sigma_3 f(q).$$

En el caso de $\int_{\partial D(\rho_2)} \frac{(q-x)^{-1}}{\|q-x\|^2}\sigma_3 f(q)$, se tiene que $\|q\| \leq \|x\|$, así que de la Nota 2.3.22 esta integral será igual a:

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} Q_{\{n_1,n_2,n_3\}}(x)\int_{\partial D(\rho_2)} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(q)\sigma_3 f(q).$$

De nuevo por el teorema de Cauchy estas expansiones no dependen de ρ_1 ni de ρ_2.

Hemos demostrado que:

Teorema 4.1.2. *(Laurent) Sea f hiperholomorfa en el anillo $R_{\{r_1,r_2\}}$, entonces:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n\geq 0}\sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} P_{\{n_1+n_2+n_3\}}(x)a_{\{n_1+n_2+n_3\}} + \\ &+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n\geq 0}\sum_{\{n_1+n_2+n_3=n\}} Q_{\{n_1+n_2+n_3\}}(x)b_{\{n_1+n_2+n_3\}}, \end{aligned}$$

donde
$a_{\{n_1+n_2+n_3\}} = \int_{\partial D(\rho_2)} Q_{\{n_1,n_2,n_3\}}(q)\sigma_3 f(q)$,
$b_{\{n_1+n_2+n_3\}} = \int_{\partial D(\rho_2)} P_{\{n_1,n_2,n_3\}}(q)\sigma_3 f(q)$,
y la serie converge absoluta y uniformemente por compactos.

4.2. Segunda Expansión

Recordemos la identificación 1.3:

$$x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & -ix_1 - x_2 \\ -ix_1 + x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}.$$

La razón de esta identificación es que:

Lema 4.2.1. *El isomorfismo:*

$$\mathbb{H} \approx \{\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{C}\}$$

es un isomorfismo de algebras, con esta identificación se tiene que dado $x \approx M$, $x \in \mathbb{H}$, $M \in M_2(\mathbb{C})$, *entonces*

$$\begin{array}{rcl} \bar{x} & \approx & \overline{M}^T, \\ S^3 & \approx & SU(2). \end{array}$$

Con respecto a las operaciones usuales se tiene la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{rcl} |x|^2 & \approx & \det M, \\ 2Re(x) & \approx & Tr(M), \\ \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} & \approx & 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{2,2}} & -\frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \\ -\frac{\partial}{\partial x_{1,2}} & \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Sea S el anillo de matrices complejas de tamaño 2×1 y sea S' su dual, el anillo de matrices de tamaño 1×2 con coeficientes complejos. Los cuaternios vistos como matrices actuan en S y en S' via la multiplicación de matrices:

$$\begin{array}{rcl} S \times \mathbb{H} & \to & S, \\ (s, x) & \mapsto & xs, \\ S' \times \mathbb{H} & \to & S', \\ (s', x) & \mapsto & s'x. \end{array}$$

Los cuaternios, S y S' tienen en común la subestructura de espacio vectorial cuatrodimensional real, así las propiedades puramente analíticas de los cuaternios se preservan para estos espacios, en particular podemos identificar bases de polinomios con valores en $\mathbb{H}$ con aquellos que toman valores en S.

Sea $P^n[S']$ el espacio de polinomios homogeneos de grado n en S', el grupo $SU(2)$ actua en $P^n[S']$, si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces la acción esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} xP(s_1, s_2) & \mapsto & P((s_1, s_2)x) \\ & = & P(as_1 + cs_2, bs_1 + ds_2). \end{array}$$

Para ver que es una acción basta observar que $x(yP) = (xy)P$, pero esto se sigue de la definición. Además si $P \in P^n[S']$, $x \in SU(2)$ entonces $xP \in P^n[S']$ pues la acción de $\mathbb{H}$ en $S, (z, z_2) \mapsto (az + z_2c, bz + dz_2)$ es homogenea.

Sean $P_m(z_1, z_2) := z_1^{n-m} z_2^{n+m}$, $|m| \leq n$. Estos polinomios forman una base para los polinomios homogeneos de grado n definidos en S'.

xP_m se puede escribir en términos de la base:

$$xP_m = \sum c^n_{m,r}(x) P_r.$$

Donde $c^n_{m,r}$ es un polinomio en las entradas de $x \in SU(2)$, de aquí se sigue que la función

$$\begin{array}{rcl} \pi : SU(2) \times P^n[S'] & \to & P^n[S'], \\ (x, P) & \mapsto & xP, \end{array}$$

es una función continua, en este caso se acostumbra decir que π es una representación del grupo $SU(2)$ en $P^n[S']$.

Lema 4.2.2. *Si $\{P_m\}$ es la base de los polinomio homogéneos de grado n, $P^n[S']$, y $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$, se tiene*

$$c^n_{m,r}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (za + c)^{n-m} (zb + d)^{n+m} z^{r-n} \frac{dz}{z}.$$

Demostración. Notemos que las funciones P_m pueden considerarse como funciones con valores complejos al restringirlas al subespacio de $\{(z, 1) | z \in \mathbb{C}\} \subset S'$.

Así

$$\begin{array}{rcl} xP_m(z, 1) & = & (za + c)^{n-m} (zb + d)^{n+m} \\ & = & \displaystyle\sum_{r=-n}^{n} c^n_{m,r}(x) z^{n-r}. \end{array}$$

Luego el polinomio $xP_m(z, 1) z^{t-n}/z$ tiene como singularidad el coeficiente $c^n_{m,t}(x)$. $\square$

Del lema anterior se sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c^n_{m,r}}{\partial x_{11}} &= (n-m)c^n_{m+\frac{1}{2},r+\frac{1}{2}},\\
\frac{\partial c^n_{m,r}}{\partial x_{12}} &= (n+m)c^n_{m+\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}},\\
\frac{\partial c^n_{m,r}}{\partial x_{21}} &= (n-m)c^n_{m-\frac{1}{2},r+\frac{1}{2}},\\
\frac{\partial c^n_{m,r}}{\partial x_{22}} &= (n+m)c^n_{m-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Lema 4.2.3. *Las siguientes funciones son hiperholomorfas y homogeneas de grado $2n, n \in \{0, \frac{1}{2}, 1, ...\}$:*

$$\begin{pmatrix} (n-m+\frac{1}{2})c^n_{r,m+\frac{1}{2}} \\ (n+m+\frac{1}{2})c^n_{r,m-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$0 \leq m \leq r \leq n.$

Demostración. Se sigue de las identidades enunciadas. □

Estas funciones nos permitiran obtener otra expresión para el $\frac{x^{-1}}{|x|^2}$ tal como lo hicimos en términos de productos simétricos de las funciones $\zeta_i, i = 1, 2, 3.$

Proposición 4.2.4. *En la región $\{|y| < |x|, x, y \in \mathbb{H}^*\}$ la siguiente serie converge absolutamente*

$$\frac{1}{|x|^2}\sum_{n,m,r} c^n_{r,m}(x^{-1})c^n_{m,r}(y)$$

y converge a $\frac{1}{|x-y|^2}$, mientras que en la región $\{|x| < |y|, x, y \in \mathbb{H}^*\}$ $\frac{1}{|x-y|^2}$, se representa por la siguiente serie absolutamente convergente:

$$\frac{1}{|x|^2}\sum_{n,m,r} c^n_{r,m}(x)c^n_{m,r}(y^{-1})$$

Demostración. Consideremos la siguiente suma:

$$\sum_{n,m,r} c^n_{r,m}(x^{-1})c^n_{m,r}(y),$$

fijando l, r, estamos multiplicando el renglón r de la matriz de coeficientes $M(x^{-1})$ por la columna r de la matriz de coeficientes $M(y)$, y sabemos que $M(x^{-1})M(y) = M(x^{-1}y)$, así:

$$\begin{aligned}\sum_{m,r} c^n_{r,m}(x^{-1})c^n_{m,r}(y) &= \sum_r c^n_{r,r}(x^{-1}y) \\ &= Tr(\tau_n(x^{-1}y)).\end{aligned}$$

Como $(x^{-1}y) \in \mathbb{H}^*$, $x^{-1}y$ es diagonalizable, luego

$$\begin{aligned}Tr(\tau_n(x^{-1}y)) &= Tr(\tau\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}) \\ &= Tr(\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & & \\ & \lambda_1^{n-1}\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2^n\end{pmatrix}) \\ &= \frac{\lambda_1^{2n+1} - \lambda_2^{2n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.\end{aligned}$$

Esto es válido si $|y| < |x|$, sumando sobre n tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n,m,r} c^n_{r,m}(x^{-1})c^n_{m,r}(y) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\sum \lambda_1^{2n+1} - \lambda_2^{2n+1} \\ &= \frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \\ &= \det(\frac{1}{1 - x^{-1}y}) \\ &= |\frac{x}{x-y}|^2.\end{aligned}$$

□

Aplicando el operador $\sum e_i^3 \frac{\partial}{\partial x_i}$ a ambos lados tenemos:

Corolario 4.2.5. *En la región* $\{|y| < |x|, x, y \in \mathbb{H}^*\}$ *se tiene la igualdad*

$$\frac{(x-y)^{-1}}{|x-y|^2} = \sum \begin{pmatrix}(n-m+\frac{1}{2})c^n_{r,m+\frac{1}{2}}(y) \\ (n+m+\frac{1}{2})c^n_{r,m-\frac{1}{2}}(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^{n+\frac{1}{2}}_{r,m-\frac{1}{2}}(x^{-1})/|x|^2 & c^{n+\frac{1}{2}}_{r,m+\frac{1}{2}}(x^{-1})/|x|^2\end{pmatrix}$$

donde la serie converge absolutamente, además en la región $\{|x| < |y|, x, y \in \mathbb{H}^*\}$ *tenemos:*

$$\frac{(x-y)^{-1}}{|x-y|^2} = -\sum \begin{pmatrix} (n-r+\frac{1}{2})c^n_{r-\frac{1}{2},m}(y^{-1})\|y\|^{-2} \\ (n+r+\frac{1}{2})c^n_{r+\frac{1}{2},m}(y^{-1})\|y\|^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{n-\frac{1}{2}}_{r+\frac{1}{2},m}(x) & c^{n-\frac{1}{2}}_{r-\frac{1}{2},m}(x). \end{pmatrix}$$

De aquí se sigue la expresión en serie de Laurent en términos matriciales de la función f, la serie converge absolutamente (por las mismas razones que en el caso de la base de Fueter).

Corolario 4.2.6. *Si* f *es hiperholomorfa en la cáscara* $R_{\{\rho,\rho_2\}}$ *se tiene la igualdad*

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2\pi^2}\sum \begin{pmatrix} (n-m+\frac{1}{2})c^n_{r,m+\frac{1}{2}}(y) \\ (n+m+\frac{1}{2})c^n_{r,m-\frac{1}{2}}(y) \end{pmatrix} a^n_{r,m} + \\ &+\sum \begin{pmatrix} (n-r+\frac{1}{2})c^n_{r-\frac{1}{2},m}(y^{-1})\|y\|^{-2} \\ (n+r+\frac{1}{2})c^n_{r+\frac{1}{2},m}(y^{-1})\|y\|^{-2} \end{pmatrix} b^n_{r,m} \end{aligned}$$

Donde las matrices $a^n_{r,m}, b^n_{r,m}$ *están dadas por:*

$$a^n_{r,m} = \int_{\partial B(\rho_2)} \begin{pmatrix} c^{n+\frac{1}{2}}_{r,m-\frac{1}{2}}(x^{-1})/|x|^2 & c^{n+\frac{1}{2}}_{r,m+\frac{1}{2}}(X^{-1})/|x|^2 \end{pmatrix} \sigma_3 f(x),$$

$$b^n_{r,m} = \int_{\partial B(\rho_2)} \begin{pmatrix} c^{n-\frac{1}{2}}_{r+\frac{1}{2},m}(x) & c^{n-\frac{1}{2}}_{r-\frac{1}{2},m}(X) \end{pmatrix} \sigma_3 f(x),$$

la serie converge absolutamente[1].

[1]Por abuso de notación denotamos como $\sigma_3 f(x)$ a las matrices correspondientes bajo el isomorfismo del Lema 4.2.1.

Apéndice A

Nota sobre la restricción a $\mathbb{R}^3$

La base de los cuaternios esta formada por dos tipos distintos de números, $\{1\}$ y $\{i, j, k\}$, es por tal diferencia que en ocasiones parece que ciertos subconjuntos estan dotados de propiedades "mejores" que otros, así por ejemplo al trabajar por primera vez en"$\mathbb{V}$," el espacio formado por cuaternios puramente vectoriales, es siempre un placer observar como las fórmulas que en el análisis vectorial se obtienen de manera un poco forzada, aparecen de manera natural y muestran propiedades difícilmente obtenibles por otros métodos.

Sin embargo si identificamos a $\mathbb{R}^3$ con algún otro subconjunto de $\mathbb{H}$, por ejemplo $\{h \in \mathbb{H} \,|\, h_k = 0\} := \mathbb{R} \times i\mathbb{R} \times j\mathbb{R}$, es de esperarse que se encuentren fórmulas locales análogas a aquellas que aparecen al trabajar con $\mathbb{V}$ pues la estructura analítica es la misma.

En el Ejemplo definimos las siguientes formas diferenciales:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= dt + idx + jdy + kdz, \\
\sigma_2 &= \sigma_1 \wedge \sigma_1 \\
&= idy \wedge dz + jdz \wedge dx + kdx \wedge dy, \\
d\zeta_1 &= dx - idt, \\
d\zeta_2 &= dy - jdt, \\
d\zeta_3 &= dz - kdt. \\
\sigma_3 &= d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\zeta_3 \\
&= dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Las formas $d\zeta_1, d\zeta_2, d\zeta_3$, anticonmutan, su acción es casi la de la variable compleja salvo por una rotación pues $idz = d\zeta_1$.

Dado que

$$d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 = dx \wedge dy - idt \wedge dy + jdt \wedge dx,$$

si consideramos un cubo C en $\mathbb{R}^3$ identificado con $\mathbb{R} \times i\mathbb{R} \times j\mathbb{R}$, el valor de $\int_C d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 = \zeta_1\zeta_2 - \zeta_2\zeta_1$ es un cuaternio con tres coordenadas, en cada una el escalar representa el área de la proyección del cubo sobre las otras dos coordenadas. La norma de este cuaternio es el cuadrado del volumen del cubo.

$\sigma_3 = dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy$, tiene propiedades análogas pero en $\mathbb{R}^4$ pues si tomamos un hipercubo C, $\int_C \sigma_3$ es un cuaternio cuya j-ésima coordenada representa el volumen de la proyección del cubo en las tres coordenadas restantes.

Observación A.0.7. *Sea $f \in C^1$, y recordemos que*

$$Df = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

se cumplen las siguientes identidades:

- $d(\sigma_2 f) = \frac{1}{2}\left(\sigma_3(2\frac{\partial f}{\partial x_0} - Df) + (\sigma_3 - 2dxdydz)Df\right)$,
- $d(d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 f) = \frac{1}{2}\left(\sigma_3 k^{-1}(2\frac{k\partial f}{\partial x_3} - Df) + (\sigma_3 - 2kdtdxdy)Df\right)$,
- $d(d\zeta_2 \wedge d\zeta_3 f) = \frac{1}{2}\left(\sigma_3 i^{-1}(2\frac{i\partial f}{\partial x_1} - Df) + (\sigma_3 - 2idtdydz)Df\right)$,
- $d(d\zeta_3 \wedge d\zeta_1 f) = \frac{1}{2}\left(\sigma_3 j^{-1}(2\frac{j\partial f}{\partial x_2} - Df) + (\sigma_3 - 2jdtdzdx)Df\right)$.

Definición A.0.8. *Diremos que $f \in C^1$ es hiperderivable si existe $l \in \mathbb{H}$ tal que*

$$d(\sigma_2 f) = \sigma_3 l.$$

Lema A.0.9. *$f \in C^1$, es hiperderivable $\Leftrightarrow Df = 0 \Leftrightarrow$ existe $l_{s,t} \in \mathbb{H}$ tal que*

$$d(d\zeta_s \wedge d\zeta_t f) = \sigma_3 l_{s,t},$$

para $1 \leq s, t \leq 3, s \neq t$.

Demostración. Se sigue de la observación A.0.7. □

Apéndice B

Nota sobre los Polinomios Hiperholomorfos

Los polinomios hiperholomorfos forman un grupo con la adición, pero como es de esperar no forman un anillo con el producto usual, más aun si f es hiperholomorfo $af, a \in \mathbb{H}$ no necesariamente lo es, por ejemplo:

$$\begin{aligned} D(j\zeta_1) &= (\frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1})(j(x_1 - ix_0)) \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Además por ser funciones de dos variables reales, encontrar soluciones a sistemas de primer orden se vuelve complicado. Así tenemos ecuaciones lineales que no tienen solución ($\zeta_1 = j$).

Veamos el caso de la función $f_h = \zeta_1 + \zeta_2 h$.

$f_h(\lambda e_3) = 0\, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, así que el espacio solución tiene al menos dimensión uno.

Teorema B.0.10. *La función f_h se anula en un espacio vectorial de dimensión 1 o 2. El conjunto de parametros h tal que f_h se anula en un plano es una banda de Möbius cuya banda tiene longitud infinita.*

Demostración. La ecuación $f_h = 0$ es equivalente al sistema:

$$\begin{pmatrix} h_2 & 1 & h_0 & 0 \\ -(1+h_3) & 0 & h_1 & 0 \\ -h_0 & 0 & h_2 & 0 \\ h_1 & 0 & h_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango ≥ 2 pues no es posible que los demás vectores sean múltiplos del primero y támpoco pueden ser todos nulos.

Analizando la matriz obtenida al quitar el primer renglón y la última columna, se obtiene que el conjunto de parámetros está determinado por el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} h_0h_3 + h_1h_2 &= 0, \\ h_1^2 + h_3^2 + h_3 &= 0, \\ h_0h_1 - h_2(1+h_3) &= 0. \end{aligned}$$

El conjunto que es caracterizado es la imagen de la siguiente función (continua):

$$\begin{aligned} C : (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^4 \\ (u,\theta) \mapsto (0, -\cos\theta\sin\theta, 0, -\cos^2\theta) \quad + \quad \frac{u}{\frac{1}{9}-u^2}(-\sin\theta, 0, \cos\theta, 0). \end{aligned}$$

Como vimos en el Capítulo 1, este es un homeomorfismo entre la banda de Möbius y la imagen de la función, a saber el conjunto de cuaternios h tales que f_h se anula en un plano. $\square$

El tener una banda de Möbius como lugar geométrico asociado a una ecuación de primer orden es una muestra de lo interesante que se ha vuelto la situación.

Sea $f = \sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i h_i, h_i \in \mathbb{H} \,\forall\, i \in 0,n$ definimos

$$f_1 = \sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i c_i, c_i \in \mathbb{C} \,\forall\, i \in \{0,n\}$$

y

$$f_2 = \sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i d_i, d_i \in \mathbb{C} \,\forall\, i \in \{0,n\},$$

tales que

$$f = f_1 + f_2 j.$$

Teorema B.0.11. *Si* $f_1, f_2 \neq 0$, f *tiene raíces en el plano complejo si y sólo si* $(f_1, f_2) \neq 1$. *Para cada raíz compleja* w, f *se anula en el plano* $w + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$, *la unión de estos planos contiene a todos los cuaternios donde* f *se anula.*

Si $f_2 = 0$ *(o viceversa)* $f = f_1$ *se anula en* n *planos no necesariamente distintos.*

Demostración. Dado que sólo consideramos polinomios en la función ζ_1, si el polinomio se anula en w también lo hara en $w + \mathbb{R}e_3 + \mathbb{R}e_2$. Así a cada raíz le asociamos un plano.

Si el polinomio se anula en algún cuaternio, $h \in \mathbb{H}$, entonces se anula en $h+\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_2$. A este plano le asociamos $h_{\mathbb{C}}$, la proyección de h sobre el plano complejo, y $f_1(h_{\mathbb{C}}) + f_2(h_{\mathbb{C}})j = f(h_{\mathbb{C}}) = 0$.

Así $h_{\mathbb{C}}$ será raíz de f_1 y de f_2, pues de lo contrario:

$$j = -f_1(h_{\mathbb{C}})/f_2(h_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{C}.$$

lo cual es absurdo. □

Corolario B.0.12. *Si* $f = \sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i a_i, a_i \in \mathbb{H}, a_n \neq 0$, *entonces* f *tiene* n *planos solución (no necesariamente distintos) si y sólo si* $a_i, a_j \neq 0$ *implica que* $a_i a_j^{-1} \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i a_i, a_i \in \mathbb{H}, a_n \neq 0$. Si $f = a_n\zeta_1^n$, el resultado es inmediato. Supongamos que hay más de un coeficiente no nulo.

$\Rightarrow$)Si se tiene la condición: $a_i, a_j \neq 0$ implica que $a_i a_j^{-1} \in \mathbb{C}$, elegimos el primer coeficiente no nulo: $a_t \neq 0$, con $a_j = 0, j < t$.

Luego para cada $a_r \neq 0, r > t$, existe $c_r \in \mathbb{C}$ tal que $a_r = c_r a_t$. Así $f = \sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i a_i = (\sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i c_t) a_t$.

$\sum_{i=0}^{n} \zeta_1^i c_t)$ tiene n raices complejas por ser un polinomio de grado n con coeficientes complejos, entonces f se anula en n planos.

$\Leftarrow$)Cada plano solución se asocia con una raíz tanto de f_1 como de f_2, luego si estos polinomios tienen las mismas n raíces:$\{z_1, \ldots, z_n\}$, entonces

$$f = p(z)(a + bj), a, b \in \mathbb{C}$$

donde $p(z) = \prod_i (z - z_i)$, luego se tiene el resultado. □

Para el caso con más de una función involucrada se conocen pocos criterios.

Lema B.0.13. *Para todo* n, m, $P_{\{n,m,0\}}(x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_i \times \mathbb{R}_j$.

Demostración. Se demuestra usando inducción y la Observación 2.2.9. $\square$

Cabe mencionar que es posible formar un anillo de polinomios hiperholomorfos, con el siguiente producto:

$$(P_{\{a,b,c\}}h, P_{\{a_2,b_2,c_2\}}h_2) \mapsto P_{\{a+a_2,b+b_2,c+c_2\}}hh_2,$$

(extendemos el producto por linealidad.)

Sin embargo no es claro como introducir una noción de divisibilidad que preserve ceros, es decir:

Existen f, g tales que $f(x) = 0 = g(x)$, pero $fg(x) \neq 0$, a saber

$$f = P_{\{1,0,0\}} - 1, g = P_{\{0,1,0\}} - 1.$$

y existen r, s tales que $r(x) \neq 0, s(x) \neq 0$ pero $rs(x) = 0$. a saber

$$r = P_{\{1,0,0\}}, s = P_{\{0,1,0\}}.$$

En el anillo formal de polinomios hiperholomorfos no hay divisores de cero, pero los cuaternios con el producto simétrico si admiten divisores de cero, por eso las propiedades usuales de divisibilidad en general ya no son invariantes bajo la evaluación cuando se trabaja con polinomios generados por más de una función ζ de Fueter.

Conclusiones

Usando la expansión en Serie de Taylor y la condición de hiperholomorfia obtuvimos la base de Fueter y condiciones sobre la región de convergencia que mejoran los criterios conocidos.

Otras bases pueden ser obtenidas por el mismo método:

Al momento de elegir una representación local de f donde no se involucre el término $\frac{\partial}{\partial x_0}$ los coeficientes obtenidos caracterizan una región de convergencia dada por polidiscos de la forma

$\{|x_0 + ix_1| < \alpha,\ |x_0 + jx_2| < \alpha\,, |x_0 + kx_3| < \alpha\}$.

Si ahora elegimos una representación donde no se involucre $\frac{\partial}{\partial x_1}$, usando la condición de hiperholomorfía:$-i\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3} &= h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + ih_1(-i\frac{\partial}{\partial x_1}) + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= h_0\frac{\partial}{\partial x_0} + ih_1(\frac{\partial f}{\partial x_0} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3}) \\
&\quad +h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_3\frac{\partial}{\partial x_3},
\end{aligned}$$

De donde

$$h_0\frac{\partial}{\partial x_0}+h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+h_3\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_0}(h_0+ih_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_2+kh_1)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_3-jh_1).$$

Aprobechando que tenemos esta base, tendremos que la serie converge de manera fina en un polidisco de la forma

$$\{|x_0 + ix_1| < \alpha_2\,, |kx_1 + x_2| < \alpha_2\,, |-jx_1 + x_3| < \alpha_2\},$$

donde α_2 dependerá de los coeficientes de la expansión en serie de Taylor, mismos que dependen de la base elegida.

Obtendremos otras dos bases y otros dos “radios”α_3, α_4 del mismo modo al evitar que el término $\frac{\partial}{\partial x_2}$ o el término $\frac{\partial}{\partial x_3}$ aparezcan respectivamente. Así tenemos en total cuatro polidiscos, que son conjuntos distintos (y puede que alguno este contenido propiamente en otro), donde la serie converge de manera absoluta y por compactos.

Como preguntas abiertas quedan:

1.- ¿Los radios $\alpha, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 son el mismo?

2.-¿La unión de los polidiscos es el dominio más grande donde la serie converge de manera absoluta y uniforme por compactos?

Requerimos que sean dominios pues por ejemplo la serie $\sum \zeta_1^n n^n$ tiene radio de convergencia 0 pero existen cuaternios con norma tan grande como se quiera donde la serie converge.

3.-¿Se puede asegurar que en la frontera de la unión de los polidiscos existe puntos *singulares*?, con esto quiero decir tales que no exista una vecindad de estos puntos donde la función admita una expansión en serie de Taylor.

De las descomposiciones de $\mathbb{R}^4$ dadas en el primer Capítulo, surge el problema inverso: si en cada copia de R^2 se introduce la estructura de campo, ¿hay alguna manera de recuperar el producto en los cuaternios?

Bibliografía

[ASV05] D. Alpay, Shapiro, and D. Volok. Rational Hyperholomorphic Functions in $\mathbb{R}^4$. *Journal of Functional Analysis*, 221:122–149, 2005.

[BDS82] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen. *Clifford Analysis*. Pitman Advanced Publishing Program, 1st edition, 1982.

[Bel48] Eric Temple Bell. *Grandes Matemáticos*. Losada, 1948.

[BN96] Akrur Behera and Sribatsa Nanda. A Proof of Cauchy's Theorem. *Indian J. pure appl. Math.*, 27(11):1107–1110, November 1996. http://hdl.handle.net/2080/221.

[FL07] Igor Frenkel and Matvei Libine. Quaternionic Analysis, Representation Theory and Physics. `http://arxiv.org/abs/0711.2699v2`, 2007.

[Fue35] R Fueter. Die funktionentheorie der differentialgleichungen $\delta u = 0$ und $\delta\delta u = 0$ mit vier reellen variablen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 7(1):307–330, 1935.

[GS97] K. Gürlebeck and W. Sprössig. *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. John Wiley and Sons, 1997.

[Her63] M. Hervé. *Several Complex Variables*. Oxford University Press, 1963.

[KS96] V. V. Kravchenko and M. V. Shapiro. *Integral Representations for Spatial Models of Mathematical Physics*, volume 351 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Addison Wesley Longman, 1996.

[Lor99] Harriet Lord. An Application of Abstract Nonsense to Surface Area. www.csupomona.edu/~jis/1999/lord.pdf, 1999.

[Mal90] H. Malonek. Power Series Representation for Monogenic Functions in $\mathbb{R}^{m+1}$ Based on a Permutational Product. *Complex Variables*, 15:181–191, 1990.

[Ram04] Tom Ramsey. An 1890 Example From H. A. Schwartz of How Not To Define Surface Area. www.math.hawaii.edu/~ramsey/SchwartzExample.pdf, 2004.

[Sud79] A. Sudbery. Quaternionic Analysis. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85:199–225, 1979.

[Zor04] V. Zorich. *Mathematical Analysis I,II.* Springer-Verlag, Germany, 2004.