Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Unidad Legaria

La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural

Tesis que para obtener el grado de Doctorado en Matemática Educativa.

Presenta

Juan Alberto Acosta Hernández

Directores: **Dr. Carlos Rondero Guerrero**
Dr. Javier Lezama Andalón

México, D.F. a 18 de marzo de 2011

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 10:00 horas del día 13 del mes de enero de 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural"

Presentada por el(la) alumno(a):

Acosta	Hernández	Juan Alberto
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	6	0	5	4	1

aspirante de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Carlos Rondero Guerrero

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Gustavo Martínez Sierra

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dra. Anna Tarasenko

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 14 del mes de enero del año 2011, el que suscribe Juan Alberto Acosta Hernández alumno del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A060541, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de los profesores-investigadores: Dr. Carlos Rondero Guerrero y Dr. Francisco Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado: *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural*, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección electrónica: acostah@uaeh.edu.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Juan Alberto Acosta Hernández

Agradecimientos

A los doctores, Carlos Rondero Guerrero y Javier Lezama Andalón por la acertada dirección de esta tesis.

A mis amigos, Dra. Ana Tarasenko, Dr. Olekdandr Karelin e Ing. Germán Reséndiz por sus valiosas aportaciones académicas y anímicas.

A los doctores, Gustavo Martínez Sierra y Apolo Castañeda Alonso miembros de la Comisión revisora por sus valiosas aportaciones.

A los Directivos, Académicos y Administrativos del ICBI de la UAEH, que me hicieron el favor de apoyar para realizar los estudios de doctorado, el proyecto de investigación, y el manuscrito final.

A la familia que formamos mi esposa Martha, y mis hijas Laura Marcela y Martha Teresa, por su amor y apoyo incondicional en todo lo que hemos realizado.

A mis padres Tere y Chucho; mis hermanas, a Tere, y a Liliana y Alejandra, y a sus familias.

A toda mi familia extensa.

A mis amigos.

A los que se adelantaron.

¡Pero sobretodo al gran Arquitecto del Universo, que me ha permitido existir!

ÍNDICE

Secuenciación	Contenido		Página
	Índice	……..	**1**
	Resumen	……..	**4**
	Abstract	……..	**5**
	Glosario de términos	……..	**6**
	Introducción	……..	**9**
	Capítulo I		
	Las perspectivas y los propósitos		
1.1	**Objetivos y preguntas de investigación**	……...	**17**
1.2	**Alcances de la investigación**	……...	**19**
	Capítulo II		
	Aspectos teórico metodológicos		
2.1	**Acerca de lo teórico**	……...	**22**
2.1.1	**La transposición didáctica**	……...	**23**
2.1.2	**El obstáculo epistemológico**	……...	**24**
2.1.3	**La teoría de campos conceptuales**	……...	**27**
2.1.4	**Teoría Vigotskiana**	……...	**30**
2.1.4.1	**Los procesos psicológicos, elementales y superiores**	……...	**33**
2.1.4.2	**La zona de desarrollo próximo y el andamiaje**	……...	**34**
2.1.4.3	**Pensamiento y lenguaje**	……...	**34**
2.1.5	**El pensamiento social**	……...	**35**
2.2	**Del pensamiento matemático al pensamiento lineal**	……...	**40**
2.3	**Lo metodológico**	……...	**42**
	Capítulo III		
	El estado del arte		
3.1	**Del estado del arte**	……	**47**
3.2	**Algunas investigaciones en matemática educativa que hacen referencia a la linealidad y a la proporcionalidad**	……	**48**
3.3	**El uso cotidiano de la proporcionalidad en personas de escolaridad limitada**	……	**55**
3.4	**La linealidad en la física escolar**	……	**61**

3.5	**El concepto de proporción vista a través de la evolución de los libros de texto dirigidos a la enseñanza**	**……**	**67**
3.6	**El Álgebra Lineal y la linealidad**	**……**	**70**
3.6.1	**La génesis de la dependencia e independencia lineal**	**……**	**70**
3.6.2	**El nacimiento de la teoría de determinantes**	**……**	**74**
3.6.3	**El concepto de rango**	**……**	**74**
3.6.4	**El desarrollo posterior**	**……**	**76**
3.7	**Reflexiones alrededor del estado del arte**	**……**	**77**

Capítulo IV
La linealidad en la didáctica

4.1	**La linealidad en los libros de texto**	**…….**	**80**
4.2	**En los libros de texto de matemáticas**	**…….....**	**83**
4.3	**En los libros de texto de administración y economía**	**…….**	**107**
4.4	**En la química escolar**	**…….**	**109**
4.5	**Reflexiones didácticas**	**…….**	**112**

Capítulo V
Lo histórico epistemológico de la linealidad

5.1	**Escenarios históricos y la evolución epistemológica de la noción de la linealidad**	**……**	**119**
5.2	**Primer escenario histórico**	**……**	**119**
5.3	**Segundo escenario histórico**	**……**	**120**
5.4	**Tercer escenario histórico**	**……**	**125**
5.5	**Cuarto escenario histórico**	**……**	**127**
5.6	**Reflexiones de lo histórico epistemológico**	**……**	**129**

Capítulo VI
La linealidad y lo sociocultural

6.1	**Aspectos socioculturales y la enseñanza de la linealidad**	**……..**	**132**
6.2	**La "internalización" de la linealidad**	**…….**	**133**
6.3	**La linealidad como pensamiento social**	**……..**	**136**
6.4	**Perspectiva de este trabajo y la Socioepistemología**	**……..**	**138**
6.5	**El Recapitulacionismo y la linealidad**	**…..……**	**139**
6.6	**Una visión Etnomatemática de la linealidad**	**……..**	**144**
6.7	**Reflexiones de lo sociocultural acerca de la linealidad**	**…….....**	**147**

Capítulo VII
Experimentación

7.1	**Consideraciones de una entrevista colectiva**	**…….**	**149**
7.2	**Primera parte de la entrevista colectiva**	**…….**	**150**
7.3	**Segunda parte de la entrevista colectiva**	**…….**	**157**
7.4	**Cuestionario a profesores**	**…….**	**171**
7.4.1	**Análisis de respuestas**	**…….**	**172**
7.4.2	**Reflexiones acerca del pensamiento proporcional y de la linealidad**	**…….**	**183**
7.5	**Estrategias empleadas en la solución de un problema de trigonometría**	**…….**	**184**
7.5.1	**Resultados**	**…….**	**185**
7.5.2	**Reflexiones**	**…….**	**189**
7.5.3	**Conclusiones**	**…….**	**190**
7.6	**Reflexiones de la experimentación**	**…….**	**191**

Reflexiones y Conclusiones …… 198

Anexos

Anexo 1 …… 213
Anexo 2 …… 227
Anexo 3 …… 242

Bibliografía ……..…. 253
Cibergrafía …….. 262
Videografía …….. 266

RESUMEN

Esta investigación comprende un estudio sistémico de la noción de *linealidad*, en el cual se han involucrado los ejes de desarrollo temático de carácter cognitivo, histórico-epistemológico, sociocultural y didáctico.

En esta investigación se sostiene que la noción de *linealidad* es un concepto articulador de la matemática escolar desde la educación básica hasta la educación superior, debido a su estadio metamatemático.

Algunas de las principales aportaciones son:

El identificar la *ratio mutabilitas constant* –razón de cambio constante-, como una idea germinal que emerge a partir de los significados de la noción de *linealidad* desde civilizaciones antiguas, hasta la aparición del Álgebra lineal en el siglo XIX.
Además existe una *articulación conceptual* entre el razonamiento multiplicativo, el razonamiento proporcional y los significados de la noción de *linealidad*.
A partir del análisis de libros de texto, se examinó el estatus didáctico de: conceptos, definiciones y usos vinculados a las nociones de *proporcionalidad* y *linealidad*, en base a las *nociones protomatemáticas, paramatemáticas, matemáticas y metamatemáticas.*
Se han identificado evidencias acerca del vínculo conceptual entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad, donde se muestra su filiación epistemológica. Por otra parte, se manifiesta que la evolución histórica de la *linealidad*, tiene un cierto paralelismo, funcional y no estructural, con los procesos cognitivos de los estudiantes, en aspectos precientíficos.

El trabajo ha permitido una resignificación de la noción de *linealidad*, con el propósito de construir un discurso didáctico congruente y articulado, en la matemática escolar.

ABSTRACT

This investigation includes a systemic study of the *linearity* notion, in which the axes of thematic development of mental character have become jumbled, historical-epistemologic, sociocultural and didactic.

In this investigation it is maintained that the *linearity* notion is a articulator concept of the mathematical student from the basic education to the education superior, due to his metamathematic stage.

Some of the main contributions are:

Identifying the *ratio mutabilitas constant* - reason of constant change, like a germinal idea that it emerges from the meaning of the linearity notion from old civilizations, until the appearance of linear Algebra in century XIX.

In addition a *conceptual joint* between the multiplicative reasoning, the proportional reasoning and the meaning of the linearity notion exists.

From the text book analysis, status was examined didactic of: concepts, tie definitions and uses to the proportionality slight knowledge and linearity, on the basis of *protomathematics, paramathematics, mathematics and metamathematic* the slight knowledge.

Evidences have been identified about the conceptual bond between the notion of proportionality and the notion of linearity, where is its epistemologic connection.

On the other hand, the historical evolution of the linearity is pronounced that, has a certain parallelism, functional and nonstructural, with the mental processes of the students, in prescientific aspects.

The work has allowed a remeaning of the *linearity* notion, in order to construct a congruent and articulated didactic speech, in the mathematical student.

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Aprender: implica adquirir nuevas habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación.

Contrato didáctico: es un conjunto de reglas, con frecuencia no enunciadas explícitamente, que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas.

Constructo: es un ente institucional o artefacto social, construido por participantes en una cultura o sociedad en particular, donde acuerdan seguir ciertas reglas convencionales.

Enfoque sistémico: trata de entender la operatividad de una organización, o para el caso de este trabajo, de un concepto, desde una perspectiva integradora, en donde lo importante son las filiaciones entre los significados. El enfoque sistémico no concibe la posibilidad de explicar una noción si no es precisamente en su relación con el todo.

Entender: Comprender; captar el sentido de algo.

Fenomenología: Es una concepción de la filosofía que estudia el vínculo que hay entre los sucesos (fenómenos) y el medio en que se hace presente en la realidad.

Filiación epistemológica: Es el conjunto de relaciones de carácter conceptual entre las nociones y sus significados.

Incongruencia conceptual: Es la ruptura epistemológica de algunos significados de objetos matemáticos vinculados a las nociones, lo cual se manifiesta en la didáctica.

Linealidad: Es la propiedad de algunos constructos que cumplen que $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$

Noción: Saber que da origen a definiciones, teoremas y teorías, la cual es susceptible de ser enseñada y aprendida en ambiente escolar.

Noción de linealidad: Es una noción donde subyace la idea germinal de *ratio mutabilitas constant*, de la cual se desprenden definiciones, teoremas y teorías; y su acervo conceptual recae en la definición de transformación lineal.

Noción protomatemática: Es aquella cuyas propiedades son utilizadas en lo cotidiano para resolver ciertos problemas, pero de tal forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

Noción paramatemática: Es aquella que se utiliza conscientemente como instrumento para describir otros objetos matemáticos, pero no se le considera como objeto de estudio en sí mismo, y por lo tanto no es sujeto de evaluación directa.

Noción matemática: Es objeto de conocimiento construido, susceptible de ser enseñado y utilizado en aplicaciones prácticas en la escuela, además de servir como instrumento para el estudio de otros objetos matemáticos.

Noción metamatemática: Es un ente matemático que trasciende y articula a gran parte de la matemática, e incluso a otras disciplinas.

Obstáculo epistemológico: Es una dificultad inherente al conocimiento, de tal manera que lo que sabe previamente un individuo, no le permite una correcta apropiación de un saber nuevo y objetivo.

Percepción: es un proceso nervioso superior que permite al organismo, a través de los sentidos, recibir, elaborar e interpretar la información proveniente de su entorno.

Proporcionalidad: Es una relación entre magnitudes medibles, siendo una de las nociones matemáticas más conocidas por la población. La proporcionalidad directa es un caso particular de las variaciones lineales.

Ratio mutabilitas constant: Denominación latinizada de la idea germinal identificada a partir de esta investigación, cuyo significado es *razón de cambio constante*.

Rescate epistemológico: Es la recuperación de significados que subyacen al conocimiento, lo cual se realiza en diferentes momentos de la evolución del mismo.

Saber: Es el conocimiento organizado para ser enseñable.

Significado: Sentido o concepto que representa una cosa, una palabra, un signo, etc.

Transposición didáctica: Es la teoría a través de la cual se analiza el proceso por el que un saber erudito se transpone en un saber enseñable y enseñado.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación forma parte de la escuela mexicana de matemática educativa, y busca tener un acercamiento real y congruente con el problema de aprendizaje de la matemática a través del sistema educativo mexicano, en particular de la noción de *linealidad*. La óptica de este estudio de tal noción[1] y de sus significados, es de naturaleza sistémica, donde se toman en cuenta las dimensiones sociocultural, epistemológica, cognitiva y didáctica. Los sucesos histórico-epistemológicos, sociales y culturales, son primordiales para este trabajo, ya que ellos han dado significación a la *linealidad* en ámbitos de la didáctica. Por lo que es tarea continua la cimentación de la fenomenología propia al concepto de *linealidad*, implicando aquellos elementos ya rescatados, los cuales determinan a la noción de linealidad en su génesis cognitiva, epistemológica, y didáctica.

En la Introducción, se presentan algunos aspectos generales acerca de los significados de la noción de linealidad, en cuanto a su existencia en medios escolares y no escolares. Además se describe de forma breve el contenido de cada capítulo del trabajo de investigación alrededor de los significados de la noción de *linealidad,* considerando las dimensiones, cognitiva, epistemológica, didáctica y sociocultural.

En el capítulo I se incluye la descripción del problema, los propósitos del mismo, las preguntas de investigación así como los alcances del trabajo. Además se menciona de forma resumida como van evolucionando dichos significados de la matemática elemental a la matemática avanzada, considerando también a su antecedente conceptual la proporcionalidad.

Por lo que respecta al capítulo II, referente a aspectos teórico metodológicos, se han tomado en cuenta las eventualidades epistemológicas, socioculturales actuales y antiguas, que han mediado para que los significados de la noción de *linealidad*, como saberes eruditos, se hayan convertido en un objeto de enseñanza. Se tiene como premisa el proponer a los saberes científicos en términos de obstáculos y de considerar como una constante en el proceso el fenómeno de la transposición didáctica (Bachelard, 2004). También en relación a

[1] En este trabajo *la noción* se interpreta como *un saber susceptible de ser enseñado y aprendido en ambiente escolar.* (Chevallard, 1997).

lo cognitivo, la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990) (TCC) encuadra el entendimiento de las filiaciones y rupturas de los significados supeditados a la noción de linealidad.

En otro sentido la teoría de Vigotsky (1977), faculta la dimensión sociocultural ligada a la noción de *linealidad*, por medio del fenómeno psíquico de "internalización" del sujeto. También, en esta misma dimensión, la observancia del estatus como *sujeto social* del estudiante en el ámbito sociocultural de un curso de matemáticas en un salón de clases (Guimelli, 2004), se considera por medio de los modos de pensamiento llamados *sesgos cognitivos*, ligados a la noción de *linealidad*, evidenciados en los resultados de la parte experimental.

Al realizar este rescate epistemológico, del análisis cognitivo - didáctico y de la perspectiva sociocultural, permite sostener que atrás de los significados de la noción de *linealidad*, manifestados por medio sus estatus didácticos, como noción: *paramatemática*, *protomatemática*, *matemática y metamatemática*, se ubica una *idea germinal*, (Cantoral, 2001) de la *linealidad*. Esto debido al rol que tiene en la construcción de conocimiento asociado a la misma noción, y su colocación como un movilizador tanto de procesos, como de significados, los cuales se edifican de forma progresiva, alcanzándose su total significado epistémico. Se propone a partir de este trabajo de investigación que la *idea germinal* que surge desde los significados de la noción de *linealidad* desde culturas ancestrales, hasta la madurez conceptual alcanzada a mediados del siglo XIX es: *ratio mutabilitas constant* –razón de cambio constante-.

En el aspecto metodológico se tomaron en cuenta algunos elementos de Arellano (2005) a manera de organización científica, para llevar a cabo el estudio sistémico de la noción de *linealidad*, y de *factótum* de control del quehacer de esta labor de investigación de índole social. Por lo que respecta a la experimentación en relación al estudio cognitivo en un sentido de observación y comprobación del *contrato didáctico*[2], se emplean elementos de la Ingeniería didáctica (Artigue, 1995) en su papel de metodología de investigación cualitativa de la cognición en seres humanos en la matemática escolar.

[2] "El conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro" ((Brousseau; 1980; cit. por Sarrazy; 1996; 86); cit. Por Ávila, 2001)

En el capítulo III referente al Estado del Arte se aborda el análisis de, artículos de investigación, libros de historia de la matemática y textos escolares, lo cual permite realizar el rescate epistemológico de la noción de *linealidad* y de su antecedente conceptual la noción de proporcionalidad, con base en un rastreo de la evolución de sus significados, a través diferentes momentos, históricos, socioculturales, y de aspectos cognitivos. Los documentos que se estudian exhiben una gran heterogeneidad de perspectivas, que conducen a diversas conclusiones, que permiten vislumbrar que es posible mejorar el aprendizaje de la noción de *linealidad*, desde la matemática elemental, tomando en cuenta sus distintos significados, los cuales deben surgir en determinados momentos didácticos, para su mejor aprendizaje en la escuela.

La *linealidad* en la didáctica, se aborda en el capítulo IV, donde se estudia el estatus didáctico de: términos, nociones, definiciones y usos asociados a la proporcionalidad y a la *linealidad*, en libros de texto de matemáticas, administración y economía, y química. Se resalta el rol didáctico que juegan las nociones y se hace un rescate de sus significados, caracterizándolos en nociones *protomatemáticas, paramatemáticas, matemáticas y metamatemáticas.* En este apartado también se hace una pequeña reflexión sobre las ecuaciones de la recta que aparecen en la matemática escolar y su asociación con la noción de *linealidad.*

En el capítulo V se identifican cuatro escenarios históricos, en los cuales se muestran ciertas rupturas epistemológicas de las nociones de *linealidad* y proporcionalidad, ello implica una gran desarticulación entre sus significados. Considerando esto se identifican elementos de un paralelismo entre los hechos didácticos en la escuela contemporánea y la evolución de los conceptos, sobretodo del Álgebra lineal, con la casi desaparición explícita de la proporcionalidad en la matemática superior.

En el Capítulo VI se abordan de manera somera ciertas teorías que aportan elementos aclaratorios acerca de la influencia que ha tenido lo *sociocultural* en el fundamento de las ideas vinculadas a los significados de la noción de *linealidad*, su importancia en la forma en que un humano lo aprende y las condiciones didácticas que lo circunscribe.

Se plasman dos aspectos básicos en la construcción del saber matemático vinculados a la dimensión *sociocultural*, en cuanto a los significados de la *linealidad*:

1. Sobre su origen a partir de las necesidades sociales modernas o ancestrales, en esta perspectiva se incorporan elementos teóricos de: la *Socioepistemología*, el *Recapitulacionismo* y de la *Etnomatemática*;
2. Acerca de la trascendencia de lo social en el desarrollo del aprendizaje, en donde se adhieren componentes ideológicos de las perspectivas *Vigotskiana* y del *Pensamiento social*.

Los resultados de los hechos experimentales se presentan en el Capítulo VII, y muestran algunos "tintes" del *contrato didáctico* que afloran a través de las personas que participaron en dichos eventos. Además se reconocen algunos significados de la *noción de linealidad* asociados a los conocimientos y habilidades que exponen los profesores de los niveles, medio superior y superior, y por los alumnos participantes de bachillerato y licenciatura.

En la enseñanza institucionalizada, la diversidad de significados que tiene la noción de linealidad, hacen que no se perciba en su estatus metamatemático. Está involucrada en prácticamente todas las etapas escolares y su concepción en cada nivel educativo, es vista de manera aislada y sin conexión una de la otra, esto es, no hay articulación de la noción, a través de sus significados, en el ámbito escolar de un estudiante, ya que el discurso escolar no lo propicia, ni tampoco el medio socio-cultural le demanda tal congruencia de saberes.
Esta investigación no puede considerarse terminada, por el contrario sólo es parte del cimiento de un gran edificio, ya que el carácter metamatemático, paramatemático, protomatemática y matemático de la linealidad, en si mismo, tiene infinidad de recovecos que son susceptibles de ser escudriñados, por lo que ello invita a continuar de este trabajo.
Las cavilaciones, deducciones y consecuencias se plasman en el apartado Reflexiones y Conclusiones de esta tesis.

A continuación se presenta un esquema que sintetiza los elementos del capitulado asociados con las preguntas planteadas en esta investigación**:**

Capítulos	Lo que se discute	Preguntas asociadas
Introducción	Aspectos generales acerca de los significados de la noción de linealidad. Descripción breve del contenido de cada capítulo.	¿De qué se trata la investigación? ¿Cuál es la estructura general del trabajo?
Capítulo I *Las perspectivas y los propósitos*	Propósitos, preguntas de investigación y los alcances del trabajo.	¿Cuál ha sido la evolución conceptual de la proporcionalidad, como antecedente epistemológico de la noción de *linealidad*?
Capítulo II *Aspectos teórico metodológicos*	Se consideran elementos teóricos de la Transposición Didáctica; Teorías de: Campos Conceptual, Vigotsky; y la observancia del estatus del estudiante como *sujeto social.* En lo metodológico se tomaron en cuenta elementos de Arellano, considerando a la linealidad y a la proporcionalidad como constructos sociales. El empleo de la Ingeniería Didáctica permite identificar, a través de la experimentación, elementos acerca de cómo se piensa la linealidad, derivados del contrato didáctico al que han estado sujetos los entrevistados.	¿Qué elementos teórico metodológicos se emplean para abordar el estudio sistémico de la noción de linealidad?
Capítulo III *El estado del arte*	Análisis de: artículos de investigación, libros con elementos históricos de la matemática y textos escolares, para hacer un rescate epistemológico, didáctico y cognitivo, de la noción de *linealidad* y de su antecedente conceptual la noción de proporcionalidad.	¿Cuáles son los significados que tiene la noción a partir del análisis epistemológico de la misma?
Capítulo IV *La linealidad en la didáctica*	Se estudia el estatus didáctico (*protomatemático, paramatemático, matemático y metamatemático*) de las nociones de *proporcionalidad* y *linealidad*, y sus usos asociados, en libros de texto de matemáticas, administración y economía, y química.	¿Cuál es el estatus didáctico que tienen las nociones de proporcionalidad y linealidad?
Capítulo V *Lo histórico epistemológico de la linealidad*	Se identifican cuatro escenarios históricos, en los que se muestran ciertas rupturas epistemológicas de las nociones de *linealidad* y *proporcionalidad.*	¿Cuál ha sido la evolución de la noción de linealidad en diferentes momentos históricos?
Capítulo VI *La linealidad y lo sociocultural*	Como un análisis preliminar se consideran aspectos de ciertas teorías que aportan elementos aclaratorios de la influencia que ha tenido lo *sociocultural* sobre la *linealidad.* Se dan evidencias acerca de su origen a partir de las necesidades sociales ancestrales o modernas, así como de la trascendencia de lo social en el desarrollo	¿En qué circunstancias socioculturales aparece y se usa la noción de linealidad?

	de su aprendizaje.	
Capítulo VII *Experimentación*	Se muestran algunos aspectos del *contrato didáctico* que aparecen en la experimentación. Se reconocen significados de la *noción de linealidad* asociados a los conocimientos y habilidades que exponen los participantes.	¿Cómo la noción de linealidad transita de la matemática elemental a la matemática avanzada, en lo cognitivo y epistemológico?
Reflexiones y conclusiones	Se expresan diferentes reflexiones, aportaciones y perspectivas sobre la investigación realizada, en lo didáctico cognitivo, epistemológico y sociocultural.	¿Qué elementos se pueden considerar para estructurar propuestas didácticas basados en el rescate epistemológico, y el análisis cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad?

CAPÍTULO I

LAS PERSPECTIVAS
Y
LOS PROPÓSITOS

1.1 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo se lleva a cabo un estudio de la noción de *linealidad* con una visión sistémica, investigando en la historia, las ideas en ciertos periodos de su evolución, esto es, se realiza un análisis y un rescate epistemológico, de su estatus académico y de sus significados. Además de dar cuenta de como las personas perciben la *linealidad* en situación escolar y la influencia que ha tenido el pensamiento cotidiano en su concepción.

Con base en el principio aristotélico de que *el ser humano es un ser social por naturaleza*, es común que las personas trasladen términos creados en un contexto y utilizarlos en algún otro, conservando ciertos elementos de su significado original. No resulta extraño que en medios didácticos escolares la *linealidad* esté vinculada a experiencias cotidianas a cualquier hecho continuo que se comporta como una línea recta. El discurso escolar, tanto en los libros de texto en que se apoya la enseñanza como las explicaciones que brinda un docente en la escuela, a menudo parte de experiencias comunes para explicar un fenómeno lineal. Así podemos encontrar explicaciones de la física, en mecánica por ejemplo, del movimiento rectilíneo de un automóvil, uniformemente acelerado o con velocidad constante. Esto es si el movimiento sucede bajo lapsos de tiempo iguales en distancias iguales, habrá un comportamiento lineal; o el incremento de la temperatura de un líquido sucede en los mismos lapsos de tiempo constantes, por lo que su representación en un sistema tiempo – temperatura, es una recta. Ya en ambiente escolar en particular en el Cálculo, al afirmar que la recta tangente a una curva, en un punto dado es la mejor aproximación lineal a una curva.

Con lo anterior se sostiene que el modelo lineal, a través de sus diferentes significados, es el método que se emplea en primer término para resolver problemas, cotidianos, no tan cotidianos, técnicos y científicos.

Al avanzar en el estudio de la *noción de linealidad* y de su antecedente epistemológico, la noción de proporcionalidad, han apareciendo algunos aspectos relevantes de ambas, lo que ha permitiendo dar evidencias de sus importancias, en la construcción del conocimiento matemático, no sólo en la enseñanza de la matemática, sino de otras ciencias. La *proporcionalidad* es una relación entre magnitudes medibles. Es uno de los escasos

conceptos matemáticos ampliamente difundido en la población. Esto se debe a que es en buena medida intuitiva y de uso muy común. La proporcionalidad directa es un caso particular de las variaciones lineales. El factor constante de proporcionalidad puede utilizarse para expresar la relación entre cantidades. Además el concepto de proporcionalidad es equivalente al de semejanza cuando se comparan dos triángulos semejantes.

Se plantean algunas preguntas, a partir de las cuales se ha motivado esta investigación, las que ciertamente se intenta aportar algunos elementos de respuesta. Han surgido preguntas acerca de la evolución de las nociones de proporcionalidad directa y linealidad, al ir dando respuesta a distintas necesidades humanas a través de la evolución social. Ya en el aspecto de enseñanza las interrogantes son en el sentido de, cómo la noción de linealidad transita de la matemática elemental a la matemática avanzada, en las dimensiones, cognitiva, epistemológica, didáctica y sociocultural (Fig. 3), esto es ¿Cuál ha sido la evolución de la noción de *linealidad*? ¿Cuál ha sido la evolución de la noción de linealidad en diferentes momentos históricos? ¿Cuáles son los significados que tiene la noción a partir del análisis epistemológico de la misma? ¿Cómo la noción de linealidad transita de la matemática elemental a la matemática avanzada, en lo cognitivo y epistemológico? ¿En que circunstancias socioculturales aparece y se usa la noción de linealidad? ¿Cuál es el estatus didáctico que tienen las nociones de proporcionalidad y linealidad? ¿Qué elementos se pueden considerar para estructurar propuestas didácticas basados en el rescate epistemológico, y el análisis cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad?

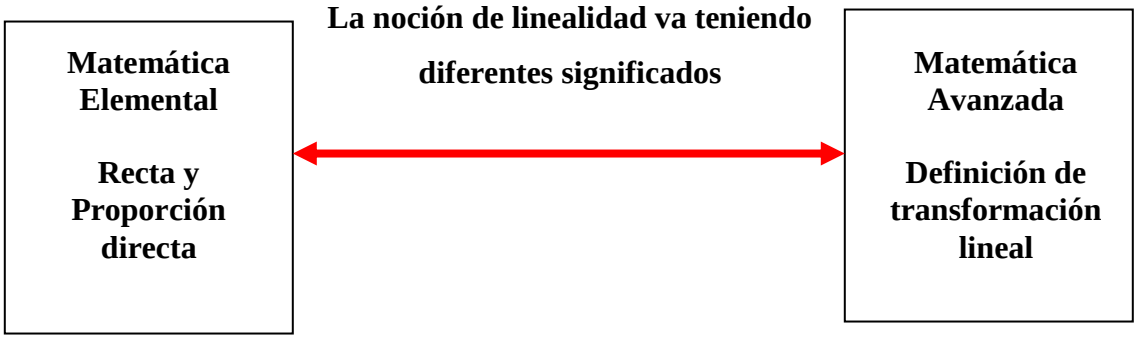


Fig. 3

También por supuesto sin perder de vista, el papel que juegan las filiaciones epistemológicas, en las formas de cómo aprenden las personas; y de cómo el término es usado en el estudio de un tema o concepto matemático. Además de la manera en que está estructurado el aprendizaje matemático de acuerdo a niveles y si esta estructura puede atender esa diferenciación (Adda, 1998), lo cual es referente obligado, sin pretender ser exhaustivo para el caso en cuestión, pero si proponer elementos que conlleven a precisar aspectos a considerar en propuestas didácticas escolares acerca de la linealidad.

1.2 ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

Por otro lado la intención primordial de esta investigación en educación matemática, como lo dice William (2003), es intentar aportar elementos que enriquezcan el proceso educativo, en cuanto a la noción de linealidad, lo que acontecerá sólo si los hallazgos de investigación los adquieren los profesores y se incorpora en la práctica. Para realizar esta investigación consideramos la virtud intelectual citada por William (2003), aludiendo a la "Ética Nicomaquea" de Aristóteles la *phronesis*, la cual está relacionada con la habilidad para deliberar acerca de lo que es recto y provechoso, y donde se inmiscuye a la intuición como un elemento esencial de una práctica sabia, apropiada para este paradigma social emergente. A diferencia de la *episteme* que alude al conocimiento sobre verdades universales eternas, no importando la experiencia individual, equivalente a la clase de conocimiento que se desarrolla en las ciencias físicas o la matemática (*qué saber y porqué saber*), lo que es antagónico al enfoque de la posibilidad de generar conocimiento matemático bajo circunstancias por la interacción sociocultural de los individuos.

Por tanto este estudio acerca de la noción de linealidad, ha aspirado ser una labor de investigación en matemática educativa, en el sentido de la *phronesis*, esto es *pensar cómo y por qué debemos actuar para cambiar las cosas*. Con la que, con tal perspectiva, se han obtenido resultados cualitativos, y una modesta contribución teórica a nuestra disciplina. Se estaría en la posibilidad de sugerir la inclusión de ciertos elementos que podrían impactar, tanto en propuestas didácticas, como en programas de formación docente, al igual también,

que se permita la interacción entre profesores de matemáticas e investigadores del fenómeno educativo de la matemática (Boero & Szendrei, 1998). En especial ha sido posible identificar ciertos elementos *epistemológicos, cognitivos, didácticos y socioculturales,* que con un *enfoque holístico*, sería posible impactar el aprendizaje en tanto la edificación de la noción de linealidad en la escuela.

Por otra parte, se ha inferido, a partir del rescate epistemológico, del análisis cognitivo - didáctico y el enfoque sociocultural, una noción, que al adjudicar por el rol que juega en la construcción de conocimiento, se ubica como una "concepción básica" o *idea germinal*, concepto acuñado por Cantoral (2001), desde el cual, tanto procesos como significados se construyen poco a poco y logran así, su total significado epistémico.

Esta noción, aunque ubicada desde civilizaciones antiguas, en sus diferentes manifestaciones y alcanza su madurez conceptual hacia la segunda parte del siglo XIX permea las nociones de linealidad y proporcionalidad: *ratio mutabilitas constant*.

Esta tesis propone que la *linealidad* a través de sus significados, y su antecedente la proporcionalidad, son nociones que han evolucionado en la historia, primero a partir de necesidades cotidianas de la época y culturas, hasta formar desde el siglo XIX, un cuerpo de conocimientos estructurados en teorías formales. Se considera que la evolución de estas ideas puede aportar elementos que repercutan hacia la instalación didáctica de la noción de linealidad en diferentes momentos en que los estudia una persona en su trayectoria escolar.

La didáctica de la matemática, no ha incorporado los elementos de enlace entre nociones de linealidad, que se presentan entre temas de matemáticas, y mucho menos entre cursos. En este sentido es de remarcarse, por ejemplo el hecho de que no se explicitan las articulaciones conceptuales ni las ideas comunes entre el álgebra superior y el álgebra lineal. En la construcción de los significados de la linealidad, como conocimiento de iniciación científica se deberían tomar en cuenta los saberes especializados antiguos. Se pretende a partir de esos significados de la noción de linealidad, aportar elementos que den cuenta del estatus didáctico, así como de las rupturas y filiaciones epistemológicas, así como de sus implicaciones cognitivas, didácticas y socioculturales, en ambientes escolares.

CAPÍTULO II

ASPECTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS

2.1 ACERCA DE LO TEÓRICO

En la naturaleza del enfoque que se plantea en este trabajo, el estudio de la noción de *linealidad* y sus significados, se consideran las dimensiones sociocultural, epistemológica, cognitiva, y didáctica. Se toman en cuenta los aspectos sociales, culturales y epistemológicos, actuales y de antaño, que han dado origen a los distintos significados de la *linealidad,* manifiestos en la didáctica. Esto es, se necesita reconstruir la fenomenología intrínseca del concepto de *linealidad,* ello implica aquellos elementos que caracterizan a la noción de *linealidad* en su génesis epistemológica, cognitiva y su implicación didáctica.

Es característico para la perspectiva de esta investigación considerar los significados que han intervenido, para que la *linealidad,* como un saber erudito, se haya convertido en un objeto de enseñanza. La educación formal es un proceso en el cual ciertos contenidos que involucran a la *linealidad,* son transformados para su enseñanza (Chevallard, 1997). Para ello, el profesor juega un papel de transmisor y reproductor de los contenidos curriculares, y en su tarea se gestan resultados nuevos, que nunca son exactamente equivalentes a los contenidos dispuestos con anterioridad.

Además de considerar el fenómeno de la transposición didáctica, el trabajo atiene la necesidad que hay de plantear el conocimiento científico en términos de obstáculos (Bachelard, 2004), esto es, mecanismos de la psiquis de la persona que lo llevaría a privilegiar el camino menos arduo, como un escollo al pensamiento para seguir pensando.

Para esta investigación la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990) (TCC) es un marco de carácter cognitivo que permite comprender las filiaciones y rupturas entre los conocimientos, referidos a los significados asociados a la noción de linealidad. La TCC se construyó en su inicio para dar cuenta de procesos de conceptualización paulatina de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio y del álgebra.

La teoría de Vigotsky (1977), da uno de los sustentos a la dimensión sociocultural a través del fenómeno psíquico de "internalización" del sujeto, cuyo proceso de autoformación se constituye a partir de la apropiación gradual y progresiva de una gran diversidad de operaciones de carácter socio–psicológico, conformado a partir de las interrelaciones sociales. Otro de los sustentos de la parte sociocultural es considerar al estudiante de un curso de matemáticas en un aula como un sujeto social, Guimelli (2004), con modalidades

de pensamiento llamados “sesgos cognitivos”, los que se definen como *distorsiones, aberraciones, y otros errores de juicio que al parecer caracterizan el funcionamiento cognitivo del sujeto social.*

A partir del rescate epistemológico, del análisis cognitivo - didáctico y el enfoque sociocultural, una noción, que al adjudicar por el rol que juega en la construcción de conocimiento, se ubica como un movilizador o *idea germinal*, concepto acuñado por Cantoral (2001), desde el cual, tanto procesos como significados se construyen poco a poco y logran así, su total significado epistémico.

2.1.1 LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

La *transposición didáctica* es el proceso por el cual ciertos contenidos seleccionados como aquellos que se deben enseñar en un tiempo y lugar dados, son transformados en contenidos enseñables. Para que ello sea posible debe operar un doble proceso de descontextualización y recontextualización, que transforma el contenido inicial en un contenido con propósitos pedagógicos. Chevallard (1997) dice: *La transposición didáctica es la transformación del saber científico o saber erudito en un saber posible de ser enseñado.* La pedagogización de contenidos iniciales, provenientes del campo cultural de una sociedad en sentido amplio, es un proceso complejo que sin lugar a dudas deber ser revisado constantemente para mantener alto el nivel de actualización de la educación.

En el proceso de traducción de los contenidos podemos identificar algunas operaciones frecuentes. La simplificación, modificación y reducción de la complejidad del saber original; y la moralización del contenido. Generalmente en la transposición didáctica se dan por sentados saberes anteriores y necesarios para poder moverse en el marco del contenido a enseñar. Hay determinadas actitudes y predisposiciones necesarias para, por ejemplo, desarrollar un pensamiento lógico-matemático que no están incluidas en el proceso de transposición. El mecanismo de transposición deja a la luz cuáles son los saberes aptos para enseñar y aquellos que no pueden ser llevados a la escuela. La transposición didáctica ha supuesto en los últimos años un proceso de clarificación renovadora, al considerar el saber que se enseña en la escuela procedente de una modificación cualitativa del saber académico, el cual llega a desnaturalizarse con el fin de que sea comprendido por el alumno. Chevallard (1997) mediante esta teoría, fecunda y creativa, presenta la formulación

original y sistemática del concepto de transposición, que supone un debate en torno a la didáctica general y sienta una base sólida para el desarrollo de las didácticas específicas, situando estas últimas en el marco de los estudios cognitivos.

En forma más específica, considerando que el saber a enseñar es distinto cualitativamente, al saber erudito, en virtud de fenómenos de transposición didáctica, las nociones de proporcionalidad y linealidad tienen un funcionamiento didáctico acorde a los significados que adquieren según los niveles escolares en que se pongan en escena. Esto es, el análisis y rescate epistemológico de estos saberes y sus significados, ha llevado a su caracterización en nociones protomatemáticas, paramatemáticas, matemáticas y metamatemáticas. Las nociones protomatemáticas son aquellas cuyas propiedades son empleadas en lo cotidiano para resolver ciertos problemas, pero de tal manera que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos. Un acercamiento de esto es considerar el papel desarticulado que juega la proporcionalidad directa cuando, por ejemplo el objeto matemático de estudio es la recta en el plano cartesiano en un curso de Geometría Analítica. Se reflexiona desde esta investigación, que la proporcionalidad directa debiera considerarse como una noción paramatemática, en virtud de conceptualizarla, desde el rescate epistemológico evidenciado en este trabajo, como un instrumento que debe permitir abordar a la linealidad a partir del estudio de la recta en bachillerato. Las nociones matemáticas de linealidad y proporcionalidad directa, son objetos de conocimiento construidos, con posibilidad de ser aprendidos y emplearse en usos prácticos. El carácter de noción matemática de la linealidad y proporcionalidad es peculiaridad intrínseca del grado escolar en que se aborda, y paramatemática en otros momentos del currículum, cuando ellas son útiles como instrumento epistemológico didáctico. Por lo que respecta a las nociones de linealidad y proporcionalidad, como nociones metamatemáticas, se les considera como tal, desde la perspectiva amplia de que brindan elementos de información y conocimiento acerca del funcionamiento en general del aprendizaje de las matemáticas, esto es, dichas nociones funcionan como organizadoras de nociones protomatemáticas, paramatemáticas y matemáticas (Chevallard, 1997).

2..1.2 EL OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO

Este trabajo también se fundamenta en la convicción de que *hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos* como sostiene Bachelard (2004). El obstáculo se presenta como *una traba al pensamiento para seguir pensando*. Los obstáculos son mecanismos de la psiquis de la persona que lo llevaría a privilegiar el camino menos arduo, la apariencia por encima de la abstracción y la construcción de conceptos, que es en lo que consiste la tarea propiamente científica. Si bien el obstáculo es primordial en su aparición *expresa una trama de errores que son resistentes a la superación*.

Como característica de los obstáculos se menciona que son *confusos y poliformos*, es decir, que aparecen en múltiples formas y trabando la ruptura con el sentido común. Los obstáculos no se eliminan de una vez y para siempre, sino que son *recurrentes* y nunca se eliminan por completo. Pueden surgir tanto en un primer momento, de constitución del conocimiento como en una etapa de finalización.

En el trabajo académico se va dando un proceso de adaptación científica entre la teoría y la práctica. No se trata de considerar obstáculos externos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, sino que es en el acto mismo de conocer donde aparecen los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde el pensamiento se estanca o retrocede. Es necesario considerar que el conocimiento de lo real jamás es inmediato y pleno, por el contrario es intrincado. Para Bachelard (2004), se *conoce* a pesar de los conocimientos anteriores, es decir, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando obstáculos. No obstante, es imposible desentenderse por completo de los conocimientos usuales, y sólo una *vigilancia epistemológica constante* podrá controlarlo. La vigilancia para superar obstáculos no cesará nunca. Para llevar a cabo una tarea realmente científica hay que aceptar desde el comienzo la posibilidad de un cambio brusco con respecto de los conocimientos anteriores, lo cual implica que los resultados puedan contradecir los conocimientos que la persona recibió en el pasado. Y esta tarea no se realiza de una vez y para siempre. *Los obstáculos* a la cultura científica se presentan por *pares opuestos* (bipolaridad). Esto quiere decir que tratando de no caer en un obstáculo se caen en el extremo opuesto.

La *observación básica* es siempre el primer obstáculo al conocimiento científico. Esta observación se presenta como un derroche de imágenes: es pintoresca, concreta, atractiva, fácil (etc.); pareciera que sólo describiéndola se puede conocer o comprender. Sin embargo, el *espíritu científico* debe formarse en contra de lo que llama la atención por el colorido y la variedad. El verdadero espíritu científico no busca la variedad sino la "variación", ya que la variedad arrastra al científico de un objeto a otro, en cambio la variación enfoca un fenómeno en particular y lo analiza, tratando de objetivar todas las variables. Por lo tanto la ciencia se hace "en contra" de la observación y la teoría es una construcción racional que no deriva de los datos.

Para Bachelard *nunca hay observación pura*, siempre está orientada por el punto de vista teórico del investigador. *La opinión*, basada en el sentido común, también es un obstáculo y, por lo tanto, ningún conocimiento científico puede partir de ella. Debe ser eliminada por completo. En toda actividad científica siempre es la razón la que ubica los hechos en determinado lugar. La razón es la que pone en marcha la investigación. Es desde ella que surgen las preguntas y la necesidad de hallar respuesta.

Otro de los obstáculos muy frecuentes es el *verbal*, es decir, la falsa explicación lograda a partir de una palabra explicativa donde en lugar de ver cómo se relaciona un concepto particular con otros en una síntesis racional se trata de desarrollar el pensamiento analizado en un concepto. El obstáculo verbal nos conduce a otro muy difícil de superar: *el substancialista.*

La idea de substancia es tan clara, simple, poco discutida, que normalmente no se cuestiona; que los objetos tengan una sustancia se acepta rápidamente.

Otro obstáculo es el *animista* (que se mueve), tan frecuente en las Ciencias Físico-Naturales. La palabra vida es mágica y se la relaciona inmediatamente con el movimiento. La idea de substancia y vida, concebida de manera ingenua, ha conducido a innumerables valoraciones erróneas. El *cuantitivismo* en tanto se le otorga a la cuantificación un valor en sí mismo. Sin embargo, sostiene Bachelard, *"es tan inútil medir lo que no es necesario como no medir aquello que hace falta"*.

Sólo una constante vigilancia permite al científico controlar los obstáculos y hace posible la ruptura con el conocimiento común. Implica un trabajo permanente del investigador y es más posible de efectivizar si el control no es sólo llevado a cabo por el investigador sino

también por sus pares. La vigilancia se impone por la familiaridad que el investigador tiene con lo que estudia. El investigador como sujeto social es parte también de lo que estudia; y los prejuicios y prenociones sobre los hechos sociales son tan frecuentes que el mismo deberá tener la firme decisión de romper con esos prejuicios, y de tomar la distancia necesaria con el sentido común para poder construir hechos científicos. El hecho social, por el sólo hecho de ser inmediato, no es transparente no es evidente ni simple si no hay una elaboración teórica construida en contra de las primeras opiniones. No habrá conocimiento científico sino simplemente conocimiento vulgar disfrazado.

Bergson citado por Bachelard (2004) dice que *Nuestro espíritu tiene una tendencia irresistible a considerar más claras las ideas que le son útiles más frecuentemente.*

2.1.3 LA TEORÍA DE CAMPOS CONCEPTUALES

En este trabajo, también se considera a la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990) como un marco que permite comprender las filiaciones y rupturas entre los conocimientos, referidos a los significados asociados a la noción de linealidad, en estudiantes, entendiendo *conocimientos* tanto los saber-hacer como los saberes expresados. Aunque la teoría de campos conceptuales por su carácter cognitivo, no es privativa de las matemáticas, ha sido edificada en principio para dar cuenta de procesos de conceptualización paulatina de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio y del álgebra.

Según Vergnaud (1990) un concepto, entendido como un conjunto de invariantes utilizables en la acción, no puede reducirse a su definición si el interés está en su aprendizaje. En particular la definición de linealidad, léase *transformación lineal*, en México se aborda en los primeros semestres de licenciaturas en ciencias e ingenierías, sin embargo en el currículo de niveles educativos anteriores, estudian a la proporción directa, recta, función lineal, entre otros saberes vinculados con algún significado de la linealidad.

Por medio de las situaciones (tareas no situación didáctica) y de los problemas es como el estudiante le va dando sentido a los significados de la linealidad, al estudiar los conceptos de línea recta y función lineal, en el nivel medio superior. Este proceder práctico es fundamental para la psicología y la didáctica, sin que se tenga que prejuzgar la naturaleza de los problemas a los cuales un concepto aporta una respuesta. La operacionalidad de un

concepto debe ser experimentada a través de situaciones variadas, donde es necesario analizar una gran variedad de conductas y de esquemas para comprender en qué consiste, desde el punto de vista cognitivo algún concepto, como en este caso la linealidad. Por ejemplo el concepto de proporción (igualdad de dos razones) no se comprende sino a través de una diversidad de problemas prácticos y teóricos. Las competencias matemáticas que se involucran en los significados de la noción de linealidad que forman la parte pragmática, son soportadas por esquemas[3] organizadores de la conducta (*recuento, de resolución de problemas, algoritmos, procedimientos heurísticos*; ver a Vergnaud (1990)) y a las expresiones *concepto-en-acto* y *teorema-en-acto* (o *invariantes operatorios*) se les designa como conocimientos contenidos en los esquemas, y que el funcionamiento cognitivo de una persona o de un grupo de personas reposa sobre el repertorio de esquemas disponibles, anteriormente formados, de cada uno de los sujetos considerados individualmente. Por tanto el reconocimiento de invariantes es clave en la generalización del esquema.

Un campo conceptual es un conjunto de situaciones, así por ejemplo el campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, fracción razón, número racional, múltiplo y divisor, etc. Entre los teoremas que dan su función a estos conceptos, es necesario mencionar:

- las propiedades de isomorfismo de la función lineal

$f(n\,x)=n\,f(x)$

$f(n_1x_1+n_2x_2)=n_1f(x_1)+n_2f(x_2)$

y su generalización a las relaciones no enteras.

Las propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas $f(x) = a\,x$, $x = 1/a\ f(x)$

Y algunas propiedades específicas de la bilinealidad, $f(n_1x_1, n_2x_2)=n_1\,n_2f(x_1, x_2)$

[3] Organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. Concepto fundamental de la psicología cognitiva y de la didáctica.

La idea de la historia es una idea esencial para el propósito de los la Teoría de Campos conceptuales, aunque no historia de las matemáticas, sino la historia del aprendizaje de las matemáticas, la cual es individual. Por lo que se pueden identificar grandes regularidades de un estudiante a otro, en la forma de abordar y tratar una misma situación, en las concepciones primitivas que se forman de los objetos, de sus propiedades y de sus relaciones, y en las etapas por las cuales pasan. Estas etapas no son totalmente ordenadas; no obedecen a un calendario estrecho; las regularidades se refieren a las distribuciones de procedimientos y no están unívocamente determinadas. Pero el conjunto forma sin embargo un todo coherente para un campo conceptual dado; se pueden especialmente identificar las principales filiaciones y las principales rupturas, lo que constituye la justificación principal de la teoría de los campos conceptuales.

Vergnaud (1990), afirma que el sentido de los conceptos matemáticos no está en las situaciones, ni en las palabras, ni en los símbolos matemáticos; sin embargo se dice que para algunos individuos, puede tener o no tener sentido, o varios sentidos, un enunciado matemático. A lo que el referido autor aclara que el *sentido* son los *esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante*[4] *lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto.* Para el caso que ocupa este trabajo, el sentido de la noción de linealidad, en los diferentes niveles educativos, para un sujeto individual, es el conjunto de esquemas que puede poner en juego para abordar las situaciones a las cuales el sujeto llega a estar enfrentado, y que implica la idea de linealidad; es también el conjunto de esquemas que puede involucrar para operar sobre símbolos, numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representa la linealidad. En

[4] En lingüística, se denomina **significante** a la imagen acústica o secuencia de fonemas que, junto a un significado, conforman el signo lingüístico. El significado es el concepto o idea que se asocia al signo en todo tipo de comunicación, como es el contenido mental. Éste depende de cada persona, ya que cada una le asigna un valor mental al significado, pero por convención este significado debe ser igual para realizar una comunicación óptima. http://es.wikipedia.org/wiki/Significante

particular en didáctica se emplea en distintos momentos el significante linealidad, sin embargo los significados son diversos, de acuerdo al nivel educativo al que pertenezca el estudiante. Esto es, *lo lineal* para un estudiante que ya ha cursado Álgebra lineal, le podría dar sentido en base a la definición de linealidad:

$$F(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

sin embargo para un estudiante de bachillerato *lo lineal*, lo podría asociar a la línea recta:

$$y = m x + b$$

Esto es el significante *lineal*, tiene asociadas dos significados diferentes, repercutiendo en la didáctica, ya el significado que el estudiante le da a *lo lineal* en bachillerato, se convierte en un obstáculo epistemológico para entender la definición de transformación lineal.

La presentación tradicional u ortodoxa de la noción de linealidad en los libros escolares de matemáticas ha supuesto que la lógica formal lleva a que el estudiante se apropie del concepto, como se plantea en el Álgebra lineal, pero los significados que el estudiante ya le ha dado por procesos retóricos, heurísticos y psicológicos anteriores, obstaculizan el entendimiento de la definición misma, dándole variantes en el significado a la noción misma.

2.1.4 T E O R Í A V Y G O T S K IA N A

Uno de los enfoques de lo sociocultural del presente trabajo lo aporta la teoría de Vygotski (1977). Es de especial interés, para entender el desarrollo de las funciones psicológicas superiores, el fenómeno de "internalización" del sujeto, cuyo proceso de autoformación se constituye a partir de la apropiación gradual y progresiva de una gran diversidad de operaciones de carácter socio–psicológico, conformado a partir de las interrelaciones sociales. En esta dinámica de operaciones, la cultura se va apropiando del mismo sujeto. Este permanente proceso de internalización cultural, científica, tecnológica, valorativa, etc., revoluciona y reorganiza continuamente la actividad psicológica de los sujetos sociales; la internalización que se manifiesta en un progresivo control, regulación y dominio de sí mismo, conducta que se evidencia en el ámbito sociocultural.

Este origen social y cultural de la conducta individual y colectiva del sujeto es sólo un ejemplo de la importancia que el fenómeno de internalización de normas, valores, etc., representa para la preservación, desarrollo y evolución de la sociedad y al cual Vygotski define como la *Ley de la doble formación* o *Ley genética general del desarrollo cultural*. Esta ley consiste en que

> *...en el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: a nivel social, y más tarde, a nivel individual. Primero (entre) personas (ínterpsicológica) y, después, en el (interior) del niño (intrapsicológica). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones psicológicas se originan como relaciones entre seres humanos.*

En este proceso de internalización, no hay que olvidar el papel fundamental que desempeñan los "*instrumentos de mediación*", que son creados y proporcionados por el medio sociocultural. El más importante de ellos, desde la perspectiva Vigotskiana, es el lenguaje (oral, escrito y el pensamiento).

Por internalización se entiende al proceso que implica la transformación de fenómenos sociales en fenómenos psicológicos, a través del uso de herramientas y signos. Esta serie de transformaciones psíquicas se sintetizan de la siguiente forma:

- Una operación que inicialmente representa una actividad externa, se construye y comienza a suceder interiormente.
- Un proceso interpersonal queda transformado en otro de carácter intrapersonal.
- La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal, es el resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos.

Vygotski considera que la internalización hace referencia a un proceso de autoconstrucción y reconstrucción psíquica, a una serie de transformaciones progresivas internas, originadas en operaciones o actividades de orden externo, mediadas por signos y herramientas socialmente construidas.

El desarrollo de este fenómeno de internalización se presenta en una primera etapa cuando el sujeto, a partir de su nacimiento, interactúa con sus congéneres en un medio familiar y escolar sociocultural específico. Experiencias que paulatinamente se va transformando en procesos mentales.

La originalidad de este planteamiento, fundamentado en una concepción integral del individuo y de las complejas relaciones sociales, supera los esquemas parciales presentados por el conductismo y la Gestalt, al formular Vygotski, la existencia de una vinculación inherente entre el plano interpsicológico (social) y el plano intrapsicológico (individual), su relación con los procesos de interiorización y el dominio de los instrumentos de mediación.

Esta doble relación enfatiza la importancia del medio sociocultural y de los instrumentos de mediación para la autoformación y evolución de los procesos psicológicos superiores como son el pensamiento, la capacidad de análisis–síntesis, la argumentación, la reflexión o la abstracción, entre otros.

La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal, es el resultado de una larga serie de sucesos evolutivos y de apropiación de la cultura que, paulatinamente, van orientando la conducta individual y comunitaria que se manifiesta en acciones en el medio sociocultural circundante.

Este proceso es representativo de la proyección teórica dialéctica Vigotskiana. En tanto que es dialéctica se inicia en la sociedad y retorna a ella, pero en un nivel superior. Al respecto Vygotski afirma: *"...la internalización de las actividades socialmente originadas e históricamente desarrolladas es el rasgo distintivo de la psicología humana. La base del salto de la psicología animal a la humana".* Es posible inferir que el fenómeno de internalización, es un proceso totalmente distinto a la reproducción o copia psíquica de la realidad externa.

En síntesis, en el marco de la teoría Vigotskiana los procesos de interiorización son creadores de la personalidad, de la conciencia individual y social. Son procesos fundamentales para el desarrollo de los procesos psicológicos superiores en el que participan los instrumentos de mediación, especialmente el lenguaje.

La internalización es el precursor de nuevas funciones interpsicológicas. Es la génesis de la *zona de desarrollo próximo.*

Por lo tanto, no es una simple copia o reflejo interno de la realidad externa, no es un mecanismo de recepción de experiencias del sujeto en su relación con la naturaleza y la sociedad, no es una transformación mecánica de *algo* externo en interno.

El proceso psíquico de internalización, implica que una experiencia social (el lenguaje social cotidiano del niño de preescolar o escolarizado), paulatinamente se va transformando en lenguaje de usos intelectuales (el socio-lenguaje cotidiano del niño, se va transformando en pensamientos), teniendo como etapa intermedia el *lenguaje egocéntrico*. En la medida de este perfeccionamiento, el sujeto va desarrollando su autonomía o independencia con los objetos reales, concretos que comienzan a manifestarse mentalmente en su aspecto abstracto.

En esta última fase de la internalización, al referirnos al ejemplo del lenguaje y del pensamiento, el niño tiene la posibilidad de hacer generalizaciones de una palabra o concepto, cuando lo logra, el lenguaje se ha sido interiorizado debido a que ahora su función ha sido modificada.

2.1.4 .1 LOS PROCESOS PSICOLÓGICOS, ELEMENTALES Y SUPERIORES

Los *procesos psicológicos elementales (PPE)* son comunes al hombre y a otros animales superiores, siendo ejemplos los ejemplos de ellos la memoria y la atención. Por otra parte, los *Procesos Psicológicos Superiores (PPS)*, que se caracterizan por ser particularmente humanos, se desarrollan en los niños a partir de la incorporación de la cultura. Desde este punto de vista, las interacciones sociales y las formas de mediación semiótica son la unidad de análisis de base sobre la cual se explican los procesos de subjetivación individual. Consecuentemente, diferentes experiencias culturales, pueden producir diversos procesos de desarrollo.

Los *Procesos Psicológicos Superiores (PPS)*, se subdividen en rudimentarios y avanzados. Los primeros se desarrollan por el hecho de participar en una cultura, especialmente a través de la lengua oral, los segundos requieren de la instrucción, lo cual supone un marco institucional particular: la escuela. La lengua escrita y los conceptos científicos son ejemplos de PPS avanzados.

2.1.4.2 LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO Y EL ANDAMIAJE

La *zona de desarrollo próximo* (ZDP) se refiere al espacio, brecha o diferencia entre las habilidades que ya posee el/la niño/a y lo que puede llegar a aprender a través de la guía o apoyo que le puede proporcionar un adulto o un par más competente.

El concepto de la ZDP se basa en la relación entre habilidades actuales del niño y su potencial. Un primer nivel, el desempeño actual del niño, consiste en trabajar y resolver tareas o problemas sin la ayuda de otro, con el nombre de *nivel de desarrollo real.* Es este nivel basal lo que comúnmente es evaluado en las escuelas. El *nivel de desarrollo potencial* es el nivel de competencia que un niño puede alcanzar cuando es guiado y apoyado por otra persona. La diferencia o brecha entre esos dos niveles de competencia es lo que se llama ZDP. La idea de que un adulto significativo (o un par -como un compañero de clase-) medie entre la tarea y el niño es lo que se llama *andamiaje*.

2.1.4.3 PENSAMIENTO Y LENGUAJE

Otra contribución de la obra de Vigotsky es la interrelación entre el desarrollo del lenguaje y el pensamiento. Reconoce la explícita y profunda interconexión entre el lenguaje oral (habla) y el desarrollo de los conceptos mentales. Él dice que pensamiento y palabra están totalmente ligados, y que no es correcto tomarlos como dos elementos totalmente aislados, como lo hacen teóricos y lingüistas que sólo buscan equivalentes exactos entre los dos elementos. Si bien pensamiento y lenguaje tienen raíces genéticas diferentes, en un determinado momento del desarrollo (hacia los dos años) ambas líneas se entrecruzan para conformar una nueva forma de comportamiento: el pensamiento verbal y el lenguaje racional. *"En la filogenia del pensamiento y el lenguaje son claramente discernibles una fase preintelectual en el desarrollo del habla y una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento",* sostiene Vygotski. *"El pensamiento verbal no es una forma innata, natural de la conducta pero está determinado por un proceso histórico-cultural y tiene propiedades específicas y leyes que no pueden ser halladas en las formas naturales del pensamiento y la palabra".*

En la ZDP es necesario pensar en el proceso enseñanza-aprendizaje teniendo en cuenta ir de la señalización a la significación de los contenidos referidos a la asignatura que imparte el profesor.

2.1.5 E L P E N S A M I E N T O S O C I A L

Otro enfoque en relación estrecha con los hechos socioculturales es el relacionado con el pensamiento social vinculado a las nociones de linealidad y proporcionalidad. Algunos de los significados que tiene la noción de linealidad están vinculados con el pensamiento social que se le asigna, y no por ello es una forma deficiente del pensamiento formal lineal[5], asociado con la demostración matemática. Rouquette (1994) (citado en Guimelli, 2004) en particular alude al sujeto ó*ptimo* que emplea la lógica formal, relativa a la demostración matemática, que no depende de los mismos sujetos, ni de las circunstancias que la producen, en contraposición al sujeto *social* quien actúa y piensa interactuando, propiciando que todo cambie.

Un estudiante de cualquier nivel educativo, que toma clases de matemáticas en un aula es un sujeto social que está influido por un discurso matemático, manifiesto a través del texto y del profesor, quien presenta características de sujeto *óptimo.* En relación con lo anterior, Guimelli (2004) identifica los llamados "sesgos cognitivos", como una modalidad de pensamiento, que afectan al sujeto social en el medio áulico, los que se definen como *distorsiones, aberraciones, y otros errores de juicio que al parecer caracterizan el funcionamiento cognitivo del sujeto social.* Uno de los sesgos el *sesgo de la representatividad,* determinado por Kahneman y Tversky en 1973 (citado en Guimelli, 2004) consiste en la tendencia a no advertir, o al contrario, a sobrevaluar la importancia de cierta información para sacar sus conclusiones[6]. En este experimento el sujeto ingenuo

5 El Pensamiento Lineal se basa en estereotipos, usando información pasada, es valido y correcto en cada etapa. Cada etapa exige justificaciones que implican su correspondiente prueba. http://html.rincondelvago.com/pensamiento_tipos.html

[6] Tal es el caso en que en una muestra hay dos grupos en los cuales algunos de los miembros son acusados de un delito. Sin embargo la frecuencia de los comportamientos delictivos es presentada de manera idéntica en los dos grupos, pero la gravedad de los delitos es más relevante en uno de los grupos que en el otro, resultando que los sujetos sobreestiman la frecuencia de los delitos en el grupo donde fueron presentados como mas graves.

prefiere hacer inferencias desde un razonamiento que lo lleva a reunir eventos estadísticamente independientes pero socialmente aceptables. ¿Qué tanto los eventos sociales ligados a la linealidad influyen en los aspectos meramente matemáticos de la noción? Por ejemplo, en la didáctica no es fácil explicar a un niño que un edificio que es diez veces más alto que otro, al mismo tiempo es cientos de veces más pesado. Lo que es equivalente a decir que hay 10 decímetros en un metro, que en un metro cuadrado hay 100 decímetros cuadrados y en un metro cúbico hay 1000 decímetro cúbicos. Esto puede en ocasiones no entenderlo, debido a un pensamiento ingenuo dado por un "sesgo cognitivo", donde no logra romper la ilusión de la linealidad (De Bock et. al., 2007). En lugar de razonar de forma sistémica, los individuos se inclinan a emplear atajos para llegar a soluciones a la vez rápidas y satisfactorias en el plano social.

El *sesgo egocéntrico* o *sesgo de complacencia* consiste en la tendencia ampliamente generalizada que tienen los sujetos sociales de vincular las causas de sus logros con sus propias disposiciones personales, y relacionar las causas de sus fracasos con la situación o las circunstancias del entorno, esto es que el sujeto trata de proteger la estima de sí mismo, y por otra trata de preservar su imagen pública. Cuando el sujeto tiene éxito refuerzan las atribuciones disposicionales y justifican las emociones positivas. En situación de fracaso, se trata de minimizar la responsabilidad individual y consecuentemente proceder imputaciones de causalidad situacional. En una u otra circunstancia, el sujeto utiliza esta estrategia cognitiva *porque está bajo la mirada del otro.* La función esencial de esta estrategia es por tanto evidente: es fundamentalmente *social.*

En el ámbito de las relaciones intergrupos, se observa regularmente que los individuos favorecen a los grupos a los cuales pertenecen (endogrupos) relativamente a los grupos a los cuales no pertenecen (exogrupos). A esta tendencia se le ha dado por llamarle como *sesgo de favoritismo intragrupo* o *efecto de la oveja negra*. Aunque el favoritismo se ejerce únicamente en el caso en que la persona evaluada pone en práctica conductas socialmente aceptables.

El sesgo de la *confirmación de hipótesis*, consiste en que, una vez que plantean una hipótesis acerca de las causas de un suceso, se empecina pronto en buscar y seleccionar una información que venga a confirmar la hipótesis inicial, la mayoría de las veces descuidando las otras informaciones disponibles, aunque algunas de ellas sean tan relevantes, que por si mismas deberían imponerse a su percepción. En ocasiones el sujeto prefiere poner en práctica un razonamiento que le permita confirmar su hipótesis en lugar de un razonamiento que le pudiera dar la posibilidad de invalidarla, situación que lo conduce a eliminar algunas causas posibles proporcionando a su juicio una mayor validez.

Se observa en el entorno que particularmente en individuos que a pesar de contar con un alto nivel de formación científica: ingenieros, matemáticos, médicos, etc. muestran ciertos estilos de pensamiento no científico, como por ejemplo creencias en lo paranormal. Lo que se explica porque el proceso que lleva de una forma de pensamiento a otra se da de manera natural, bajo las situaciones en las que se encuentran los sujetos y de las necesidades que ellas provocan. Cuando el estado del *contexto social* cambia, se modifican los retos individuales, razonando cada caso de acuerdo al grado de implicación que tenga en la situación. Por ejemplo en la acción educativa proclamada por un pedagogo frente a sus compañeros académicos en su ámbito profesional, sea susceptible de ser sensiblemente distinto de aquello que argumenta en relación a su propio hijo en una reunión familiar. De manera similar una charla acerca de una enfermedad no tiene la misma trascendencia si alguno de los miembros la padece. El sujeto caracterizado por un alto grado de implicación se enfoca en el caso particular, en el que el razonamiento científico no convence, apartándose hacia otros modos de conocimiento y otros estilos de razonamiento que supone más apropiados, y que otorga respuestas prontas, y dignas de crédito, ya que surgen del propio grupo. Lo que importa en este caso para el sujeto no es la validez de sus discernimientos, sino su legitimidad social. Esto es la voluntad determinada de predecir el caso particular tiene una consecuencia muy importante: el razonamiento científico no puede aportar una respuesta satisfactoria y se torna entonces inconveniente. Se interpreta que la ciencia no se interesa en el caso particular, pero si en el general, tratando al sujeto del mismo modo.

Aquí surge la paradoja que está permanentemente influyendo en el aprendizaje de la matemática, en el sentido de que hay un saber científico susceptible de ser enseñado con características generales, sin embargo los profesores y estudiantes, limitados por los tiempos didáctico como cognitivo, son *sujetos sociales* únicos con peculiaridades singulares, y que ponen en juego distintos estilos de pensamiento, junto con algunos sesgos cognitivos, como los aquí expuestos.

Es difícil admitir que las diferentes maneras de pensar aludidas son verdaderamente "sesgados". Por supuesto, se podrá considerar que son deficientes si se establecen comparaciones con el tipo de razonamiento científico, y si se les evalúa a partir de criterios que, precisamente, son específicos a la evaluación de ese modo de razonamiento. Pero es claro que los acontecimientos se construyen y se elaboran en situación y de forma progresiva, por medio de actividades cognitivas, cuya finalidad es, por esencia, social.

Los conocimientos adquieren sentido *en relación a la mirada del otro* y no en relación a los conceptos científicos elaborados por expertos ni en relación a una organización del pensamiento externa al sujeto. De hecho, los modos de razonamiento que utiliza el sujeto en el transcurso de sus interacciones cotidianas no lo conducen a inferencias *equivocadas*, pero si a inferencias *diferentes*, caracterizadas por una validez propia, de origen social, además es por este mismo motivo que son diferentes.

En cuanto al aprendizaje de la matemática, en el caso específico de la noción de linealidad, como un hecho social, reinterpretando a Durkheim (citado en Guimelli, 2004), quien insiste en que las actitudes individuales son determinadas por la colectividad, como una producción sociocognitiva. Intenta mostrar la importancia de las creencias colectivas para la vida de las sociedades, acuñando el término *representaciones colectivas.* Estas están en oposición según Durkheim a las representaciones individuales, las cuales se caracterizan por ser sensibles a los cambios y pueden modificarse aun por ligeras variaciones que interfieran en el entorno físico o social del sujeto. Siendo que las *representaciones colectivas* resultan de una fuerza impersonal, anónima y difusa que emanan de la sociedad misma, compartidas por individuos de una misma sociedad. Por lo que cada sociedad

orienta los pensamientos y las conductas de los individuos en un sentido específico propio. De lo anterior surgen preguntas como ¿Las representaciones semióticas acerca de la noción de linealidad y proporcionalidad son representaciones individuales? ¿Puede haber representaciones semióticas colectivas? Estas interrogantes, no necesariamente se responderán en este trabajo, pero sería conveniente considerarlas en futuras investigaciones. En el sentido de los hechos sociales, desde temprana edad, en el desarrollo intelectual del niño son de suma importancia las interacciones asimétricas, esto es *las interacciones con los adultos portadores de todos los mensajes de la cultura*. En dicha interacción los signos juegan un papel preponderante, esto es los Sistemas semióticos, que desde el punto de vista genético, tienen un papel de comunicación, además de que en un segundo momento se empleen como instrumentos de organización y control individual. *Ello significa simplemente que algunas categorías de funciones mentales superiores (atención voluntaria, memoria lógica, pensamiento verbal y conceptual, emociones complejas, etc.) no podrían surgir y constituirse en el proceso de desarrollo sin la contribución constructora de las interacciones sociales (Ivic, 1994)*

La matemática y la matemática escolar son productos culturales, y representan factores de prolongación de las capacidades humanas, las cuales han sido desarrollados a través de otros productos culturales como: la lengua, la lengua escrita y hablada, los sistemas de conceptos científicos, las técnicas que ayudan a la memoria o al pensamiento, los instrumentos que fortalecen la percepción humana, derivados, por supuesto de las necesidades socio - humanas (Ivic, 1994).

Por otra parte Lévy-Bruhl (en Guimelli, 2004) afirma que tanto primitivos como civilizados, en última instancia razonan de la misma manera, aunque ambos inician de teorías distintas para explicar la realidad. Además resalta el gran peso que tienen los factores sociales así como su importancia en las construcciones mentales individuales, afirmando que el funcionamiento cognitivo del ser humano, en general, se sujeta a lineamientos dictados por el grupo al cual pertenece. Lévi-Strauss (en Guimelli, 2004) sostiene que el pensamiento primitivo es llevado por una lógica semejante a la nuestra, aunque se desarrolla de forma distinta, de acuerdo al contexto social, y de conformidad con las obligaciones que asume a cada quien.

En un ámbito civilizado, el liderazgo académico que ejerce un profesor en el aula es fundamental y será más extenso y probable en cuanto *responda a una demanda ignorada* (Le Bon, G 1895, en Guimelli, 2004). Lo que implica que dicha *demanda ignorada* es resultado del pensamiento del estudiante alrededor del planteamiento y resolución de un problema de su interés. *A costa de escuchar y re-escuchar en contextos diferentes las mismas ideas-fuerza o los mismos eslóganes, cada cual termina apropiándose de ellos para sí-mismos.* Este fenómeno social se aprecia a través del papel que juega el profesor Escalante en la película "Con ganas de triunfar", donde su liderazgo académico propicia que sus estudiantes, latinos marginados de un barrio de la ciudad de Los Ángeles, California, aprueben el Examen Nacional de Cálculo Avanzado, donde la repetición de ejercicios matemáticos, y la convicción de la importancia de aprenderlos son elementos del pensamiento social en el ambiente escolar del salón de clases **(**Warner Bros. (1988). [Video]).

2.2 DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AL PENSAMIENTO LINEAL

En el problema del aprendizaje de la matemática, en particular de la *linealidad* y de su antecedente conceptual, la proporcionalidad directa, hay inmersas variables, entre ellas, las asociadas al estudiante, al profesor, al discurso matemático escolar y al ámbito sociocultural. Como son algunas de ellas: tipo de aprendizaje –visual, auditivo, etc.-, discurso lógico matemático o heurístico, aunque no es propósito del presente trabajo estudiarlas.

Es necesario reconstruir la fenomenología intrínseca del concepto de linealidad, con el objeto de conocer aquellos significados que caracterizan a la noción de *linealidad* en su génesis desde una perspectiva sistémica.

Se considera que la noción de *linealidad* toma distintos significados, por los dominios matemáticos por los que transita en el currículo escolar. Estos significados también están presentes en el discurso del medio ambiente escolar, además de los que aporta el mismo discurso matemático escolar (Cantoral & Farfán (2004b)). Los estudiantes basan muchas de sus proposiciones en circunstancias de tipo cultural, no siempre compartidas por todos los

que participan en el proceso escolar y que, además, son considerados por estos estudiantes como una parte de cierta educación.

Tanto el entorno sociocultural, como el mismo discurso escolar favorecen la aparición de resignificaciones de la noción de linealidad en los individuos, lo cual estas pueden estar alejadas de la definición matemática escolar. Los hechos socioculturales han constituido un punto fuerte a considerar, lo que ha permitido interpretar, enmarcar y analizar los argumentos de los estudiantes. Esto bajo el considerando de que el que estudia la noción de *linealidad*, está en un proceso de apropiación gradual y progresiva de una variedad de operaciones socio-sicológicas, dadas por interrelaciones en un ambiente escolar, y además de que es un sujeto social con modalidades de pensamiento precisados como *errores de juicio, distorsiones o aberraciones*.

Para entender las filiaciones y rupturas entre conocimientos vinculados a los significados de la noción de linealidad la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990) da cuenta de procesos de conceptualización paulatina de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio y del álgebra. Esto es, el conjunto de esquemas que un estudiante puede poner en juego para abordar las situaciones a que llega a estar enfrentado, y que implica la idea de linealidad; o en conexión al conjunto de esquemas que puede involucrar para operar sobre símbolos, numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representa la *linealidad*.

En particular participan dentro y fuera del salón de clases, la observación de los elementos que han influido en la transformación de la *linealidad*, como un saber erudito en un objeto de enseñanza, y del obstáculo que representan algunos de sus significados articulados con otros significados del concepto de linealidad, son consideraciones robustas dentro de esta investigación.

Con la ratificación, si bien no exhaustiva, de algunos indicios acerca de la evolución de los significados de la noción de linealidad en la historia, o sea el aspecto *filogenético*, junto con la toma de información cualitativa en su rasgo *ontogenético*, de estudiantes de distintos niveles escolares, se da cuenta de hechos didácticos (Margolinas, 1998), que permiten caracterizar al fenómeno didáctico asociado con la noción del interés de este trabajo.

A partir del análisis cognitivo – didáctico, del rescate epistemológico, y del enfoque sociocultural, la *ratio mutabilitas constant*., que por el rol que juega en la construcción de

los significados de la noción de *linealidad*, se ubica como una *idea germinal* (Cantoral, 2001), desde el cual, tanto procesos, conceptos y teorías se construyen paulatinamente y alcanzan así, su total significado epistémico.

2.3 L O M E T O D O L Ö G I C O

Como una forma de organizar la actividad científica, en este caso referida al análisis sistémico de la noción de linealidad y de su antecedente conceptual, la proporcionalidad directa, se consideran elementos metodológicos de Arellano (2005), como factor de control de este trabajo considerado como una investigación de carácter social. Este esquema de organización parte de lo simple a lo complejo y se compone de:

- El problema de investigación
- El estado del arte
- La definición de conceptos (consideraciones teóricas)
- Los procesos cualitativos
- Los procesos cuantitativos
- Las estrategias de análisis
- El discurso científico
- La bibliografía

El problema de investigación se ha explicitado en la Introducción al hacer un esbozo somero sobre la aparición de la *linealidad* en distintos ámbitos; de las preguntas acerca de la evolución de la noción de linealidad en diferentes momentos históricos, de los significados desde el análisis epistemológico, del transito de la matemática elemental a la matemática avanzada, en lo cognitivo y epistemológico, de las circunstancias socioculturales en que aparece y se usa la noción bajo estudio, además del estatus didáctico que tienen las nociones de proporcionalidad y *linealidad*, y de los elementos a considerar para proponer didácticas realistas para la escuela.

Para tener un referente, no exhaustivo de la aparición de las nociones en cuestión, en distintas escenarios, se considera en el Estado del Arte el estudio de artículos y libros, que

junto con el análisis de textos, han permitido llevar a cabo un rescate epistemológico de la *linealidad* y proporcionalidad, en base a un seguimiento de la evolución de sus significados en diferentes momentos históricos, así como a la misma dimensión sociocultural, de lo cual sólo se incorporan algunos aspectos de la Socioepistemología y de la Etnomatemática, como son el enfoque sistémico y la caracterización de algunas de las actividades sociales (juegos infantiles, intercambios en mercados, cobro de impuestos, etc.).

La definición de conceptos se propuso en el Marco Teórico del trabajo, con el propósito de caracterizar a la noción de *linealidad* en su génesis epistemológica, cognitiva y su implicación didáctica. Se toman en cuenta elementos que han intervenido en la conversión de la noción bajo análisis, de un saber erudito en un objeto de enseñanza. Además del fenómeno de la transposición didáctica (apartado 2.1.1 de este capítulo), también es de considerarse el hecho de propiciar el desarrollo del pensamiento científico en el escenario escolar, como lo señala Bachelard (2004) (apartado 2.1.2 de este capítulo), buscando que el estudiante se aleje del pensamiento ingenuo.

En esta distinción de referentes teóricos, para comprender las filiaciones y rupturas entre los significados asociados a la noción de linealidad, se toma en cuenta la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990) (apartado 2.1.3 de este capítulo) como marco de carácter cognitivo que da cuenta de procesos de conceptualización paulatina de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio y del álgebra. Uno de los sustentos de la dimensión sociocultural es a través del fenómeno de "internalización" del sujeto, conformado a partir de las interrelaciones sociales (apartado 2.1.4 de este capítulo). El otro enfoque resalta los "sesgos cognitivos", que presenta un estudiante de un curso de matemáticas como un sujeto social, en ciertas modalidades de pensamiento: *distorsiones, aberraciones, y otros errores de juicio* (Guimelli, 2004) (apartado 2.1.5 de este capítulo). Finalmente en esta parte del sustento teórico "va haciendo brecha" para que desde el rescate epistemológico, del análisis cognitivo - didáctico y el enfoque sociocultural, de la noción de linealidad, se le adjudique el rol de movilizador o *idea germinal*, concepto acuñado por Cantoral (2001) (apartado 2.2 de este capítulo), desde el cual, tanto procesos como significados se construyen poco a poco y logran así, su total significado epistémico.

Dentro de los procesos cualitativos se ubican el análisis que sobre la linealidad se hace en lo: didáctico, manifiesto en lo que plasman los libros de texto contemporáneos de

matemáticas, física, química contemplados para la enseñanza, además de las formas semióticas que se muestran; epistemológico, desde libros de historia de la matemática y textos antiguos donde aparecen; sociocultural, al mirar el enfoque socioepistemológico y etnomatemático.

Otro aspecto de los procesos cualitativos y de las estrategias de análisis, es lo referente al análisis cognitivo desde una perspectiva experimental y del mismo *contrato didáctico*[7]. En esta etapa se emplean elementos de la Ingeniería didáctica (Artigue, 1995) por ser un método de investigación cualitativa de aspectos de la cognición humana, la cual distingue en primer lugar un bosquejo experimental basado en las realizaciones didácticas en el aula, esto es la concepción, realización, observación y análisis de secuencia de enseñanza; considerando el registro de estudio de casos y cuya validación es en esencia interna, fundamentado en el cotejar entre el análisis a priori y a posteriori. Citando a Artigue (1995) menciona que las etapas de la ingeniería son:

> *Continuamos en este apartado con la descripción de la metodología de ingeniería didáctica, por medio de una distinción temporal de su proceso experimental. Delimitaremos en este proceso cuatro fases: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación.*

A partir de lo cual se llevaron a cabo dos entrevistas clínicas colectivas secuenciadas, esto es la segunda se efectuó inmediatamente de la primera (apartado 7.2 y 7.3 de esta tesis). Participaron cuatro estudiantes de licenciatura y dos entrevistadores. Esta actividad se enmarca dentro del Análisis Preliminar de la metodología de la Ingeniería Didáctica. Las entrevistas se efectuaron de forma colectiva, con la intención de incorporar a un mayor número de estudiantes al debate de ideas, a través de las argumentaciones puestas en escena en el ámbito de discusión grupal. Bajo estas características se pretendió darle a esta

[7] "El conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro" ((Brousseau; 1980; cit. por Sarrazy; 1996; 86); cit. Por Ávila, 2001)

entrevista una ambientación sociocultural, donde en principio los participantes contribuyen a la construcción del conocimiento dentro del ámbito del *contrato didáctico* en que están inmersos, para el caso que nos ocupa el de las nociones de que se ocupa este documento.

Para caracterizar aspectos del *contrato didáctico* en relación a aspectos cualitativos de la proporcionalidad, se aplicó un cuestionario con trece tareas a tres profesores, dos de nivel medio superior y uno de superior, y a un estudiante de licenciatura. Las diez primeras, se tomaron del instrumento diseñado y aplicado por Ruiz y Valdemoros (Ruiz, E y Valdemoros, M., 2006) a estudiantes de educación elemental. Las tareas onceava y doceava se fundamentaron en preguntas que elaboró De Bock y colaboradores (De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998)), para distinguir entre un problema de variación directamente proporcional y otro de variación inversamente proporcional. Por lo que respecta al planteamiento de la última tarea, tiene el propósito de mirar los elementos que los encuestados incorporan en la modelación, desde un problema escolar común (apartado 7.4 de esta tesis).

Por otra parte también se analizaron las estrategias que tienen los estudiantes de nivel medio superior y algunos de nivel medio, a través de las respuestas exitosas (resultado esperado) de un problema de trigonometría planteado en el concurso de la Olimpiada Estatal de Matemáticas 2009 en el Estado de Hidalgo, donde participaron alrededor de 1100 jóvenes, de los cuales alrededor del 80 % corresponde a nivel medio superior y el 20 % a estudiantes del nivel medio básico (secundaria). Ello para reportar cuando el estudiante hace uso de las razones y proporciones, como elemento de las nociones de linealidad y proporcionalidad (apartado 7.5 de esta tesis).

Al final en lo denominado como discurso científico, se presentan los resultados a través del capitulado de la tesis, presentando las conclusiones, donde se muestran los hallazgos de la investigación social y la prospectiva en la disciplina de la matemática educativa.

CAPÍTULO III

EL ESTADO DEL ARTE

3.1 DEL ESTADO DEL ARTE

En este capítulo, se han examinado trabajos con distintos enfoques, profundizando en algunos de ellos. Si bien la investigación pretende abordar la noción de linealidad, se ha encontrado un fuerte vínculo conceptual con la noción de proporcionalidad directa. Hay evidencias conceptuales de la liga, entre la proporción directa y la función lineal, de la forma $y = mx$ con $x, y \in R$.

Respecto a los autores consultados se presentan aspectos vinculados a las nociones de proporcionalidad y linealidad, sus documentos muestran un abanico de enfoques: sobre el hecho de que la enseñanza temprana de la razón y la proporción deben partir de niveles cualitativos empleando dibujos y expresiones que faciliten el desarrollo de patrones de percepción, en apoyo a los correspondientes procesos de cuantificación que en consecuencia active el pensamiento proporcional; acerca del razonamiento multiplicativo que se necesita para abordar el razonamiento proporcional; del predominio del modelo lineal en estudiantes de secundaria en escenarios geométricos; acerca de la proporcionalidad y las relaciones funcionales vista a través de la progresión aritmética; de los usos cotidianos en problemas donde se involucran fracciones, decimales y la proporcionalidad por parte de personas de poca escolaridad; un reporte donde se estudia el movimiento rectilíneo uniforme y el uniformemente variado, teniendo como referente matemático a la variación directamente proporcional y por ende a la noción de linealidad; reporte del cambio metodológico en la enseñanza de la proporcionalidad vista a través de los libros de texto de los siglos XVIII XIX y XX; y sobre la génesis del Álgebra Lineal basada en la teoría de espacios vectoriales. Este última referencia muestra la aparente desvinculación epistemológico histórica entre las nociones de proporcionalidad y linealidad, por lo que su aprendizaje desde este punto de vista, ha llevado a problemas didácticos y cognitivos, probablemente debido a la manera en como se ha colocado inicialmente la noción, desde la matemática elemental, en virtud de los distintos significados que ha ido teniendo, transformándose esta misma en un obstáculo epistemológico, de lo cual se está pretendiendo reportar por medio de esta investigación.

3.2 ALGUNAS INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICA EDUCATIVA QUE HACEN REFERENCIA A LINEALIDAD Y PROPORCIONALIDAD

Si bien el tema de estudio de esta investigación es la *linealidad*, es menester escudriñar en artículos de investigación que se refieren a la proporción directa. Streefland (1984a, pp.327-348) citada por Ruiz y Valdemoros (2006), enfatiza que la enseñanza temprana de la razón y la proporción deben partir de niveles cualitativos en los que exista un reconocimiento de las mismas; además que se deben usar recursos didácticos (figuras, dibujos y expresiones) para facilitar el desarrollo de patrones de percepción, en apoyo a los correspondientes procesos de cuantificación. Streefland (1984a, pp.327-348) dice:

> *...que el pensamiento cualitativo evoluciona cuando hay un avance en el pensamiento y el niño puede incorporar más elementos para un análisis que le permita considerar distintos factores conjuntamente*.

Además Hart (1988, pp. 198-219) (citada en Ruiz y Valdemoros, 2006) da ciertas evidencias de que, a pesar de que algunos estudiantes no resuelven problemas donde se involucra la proporción, los individuos presentan un cierto control de lo que se ve como correcto y reconoce que este aspecto está involucrado en el pensamiento cualitativo, ya que atañe a lo perceptual, y que lo mas avanzado del pensamiento proporcional se da en el sujeto una vez que ha construido determinados conceptos.

Por lo que respecta a las proporciones cuantitativas, Freudenthal (1983) citado por Ruiz y Valdemoros (2006), define a las razones internas, como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud (distancia con distancia, tiempo con tiempo, precio con precio, etc.) y las razones externas como vínculos entre valores de diferentes magnitudes (tiempo con distancia, o litros de leche con precio, etc.) ●

Singh (2000) señala que el razonamiento multiplicativo se necesita para abordar el razonamiento proporcional, por ejemplo

> *Si hay 6 grupos de 4 bloques cada uno ¿Cuántos bloques hay en total? Muchos niños cuentan: 1 grupo es 4, 2 grupos es 8, 3 es 12…* (Traducción libre de Singh, 2000)

Aunque las situaciones multiplicativas en razonamiento proporcional necesitan de un esquema apropiado de unidades antes que se implante el esquema de solución, esto es

> *8 tasa de harina se necesitan para hacer 14 donas ¿Cuántas donas se pueden hacer con 12 tasas de de harina? No ayuda a resolver el problema concibiendo como unidad 1 tasa o 1 dona. Pero pensando en 4 tasas por 7 donas como una unidad es mucho más eficiente.* (Traducción libre de Singh, 2000)

La investigación de Singh (2000) arroja que los estudiantes piensan en el método de unidades hasta que se de una buena coordinación de los esquemas de unificación (composición de unidades, unidades de razón, poner en unidades (unitizing), interacción de unidades de cociente). El problema de la enseñanza del razonamiento multiplicativo está compuesto por las maneras en que enseñamos las proporciones en la escuela. Se necesita investigar como los esquemas de unidades compuestas de la estructura multiplicativa de los niños, puede desarrollarse a través del pensamiento proporcional. Por lo que es relevante encontrar maneras para ayudar a los estudiantes en el razonamiento proporcional •

En otra investigación (De Bock, et. al., 1998) se afirma que *el tema más importante en educación matemática elemental es las relaciones, lineales o directamente proporcionales.* Se ha dado una gran importancia a las relaciones lineales, debido a que subyacen como modelo básico de gran cantidad de problemas en matemáticas puras y aplicadas. Pero por su trascendencia, los estudiantes crecen con la idea que estos modelos tienen una aplicabilidad universal y adquieren la propensión a considerar cualquier relación numérica como si fuera lineal. Se reportan dos estudios, el primero investiga el predominio de la

linealidad en estudiantes de entre 12 y 13 años de edad, trabajando con problemas escritos que involucran longitud y área de figuras planas con formas distintas. Para responder a la pregunta de que tan útiles son, los dibujos, ya sea que los haya realizado ellos o los tomados de otra parte, para romper la tendencia de sobregeneralizar la aplicabilidad del razonamiento lineal para esta clase de problemas, evaluados bajo varias condiciones. El segundo estudio básicamente es la réplica del anterior, sólo que con estudiantes de entre 15 y 16 años de edad. Se preguntaron problemas del tipo:

> *Enunciado de proporcionalidad:*
>
> *El granjero Gus necesita aproximadamente 4 días para cavar una zanja alrededor de un terreno de pastura cuadrado de 100 m. de lado. ¿Cuantos días necesitaríamos para cavar la zanja alrededor del terreno si el lado es de 300 m.? (Respuesta: 12 días)* (Traducción libre de De Bock, et. al. (1998))

> *Enunciado de No proporcionalidad:*
>
> *El granjero Carl necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de lado 200 m. ¿Cuántas horas necesitaría para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado? (Respuesta: 72 horas)* (Traducción libre de De Bock, et. al. (1998))

Los resultados arrojan una fuerte presencia del modelo lineal en las respuestas de los estudiantes a los problemas de aplicación involucrando longitud y área de figuras planas, presentados en contextos escolares. La estadía de la linealidad es mucho mayor en los estudiantes 12 a 13 años, que los de 15 a 16 años. Algunas de las razones que arguyen los autores (De Bock, et. al., 1998) acerca de los resultados es que:

- *Las respuestas decepcionantemente débiles a los problemas de no linealidad son debidas a que subestimaron el nivel de dificultad de la*

prueba, bajo la expectativa de que eran problemas rutinarios. Posiblemente si se hubiera advertido de que no eran problemas estándar, posiblemente se habrían esforzado más.

- *La carencia de autenticidad del problema, esto es que los cuestionamientos de la prueba se presentaron de la forma tradicional que se usa en la escuela, y además los problemas fueron elaborados en ambientes socioculturales que no son atractivos a chicos de entre 12 y 16 años de edad. Hay evidencia de que si los problemas se dan en ambientes de mayor autenticidad para los jóvenes, el desempeño aumenta en problemas no lineales ((Streefland, (1984) y Treffers, (1987), citados en De Bock, et. al., 1998)*
- *La ausencia de puntos de referencia útiles para medir longitudes y áreas en los dibujos, podría haber influido en los resultados. Posiblemente si se hubiera usado papel milimétrico o cuadriculado en lugar de hojas lisas, posiblemente se habría aumentado la atención de los estudiantes, incrementándose el efecto del dibujo.*
- *Los estudiantes que participaron en el segundo estudio (15 a 16 años) provienen de una escuela que emplea un curriculum tradicional, donde se fomentan los problemas con el modelo lineal y donde no reciben las suficientes oportunidades para desarrollar aspectos necesarios de la matemática que les permitan aproximarse y resolver problemas no triviales de manera consciente y significativa* (Traducción libre de De Bock, et. al. (1998))•

En relación a un estudio bajo el marco de La Teoría Antropológica de lo Didáctico (ATD, por sus siglas en inglés), García, et. al. (2005) presentan algunos resultados preliminares sobre la proporcionalidad y las relaciones funcionales en educación secundaria en España. Primero hacen una revisión de la investigación en educación matemática sobre

"modelización y aplicaciones", reformulando el problema bajo el esquema de la ATD. Presentan el alcance de las relaciones proporcionales y funcionales en la educación secundaria española de acuerdo a un análisis de los estándares ofíciales y de los libros de texto. Además sugieren un posible proceso didáctico basado en una secuencia de praxeologías[8] matemáticas de complejidad creciente. Afirman que esta clase de proceso permitirá una mayor enseñanza racional de "las relaciones funcionales", iniciándose desde su propio raciocinio: el estudio de la variabilidad.

En esta investigación, los autores retoman los modelos epistemológicos en cuanto a la relación proporcional propuesto por Bosch (1994) y Bolea (2002) (Citados en García, et. al., 2005). Proponen un Modelo Epistemológico de Referencia (MER), considerando las restricciones oficiales de la Educación Secundaria Obligatoria, donde deciden discretizar las magnitudes, originadas de un conjunto de cantidades de la primera magnitud, en progresión aritmética (de diferencia $k \in M$) y preguntando la clase de variaciones de las cantidades de la segunda magnitud.

Por otra parte definen lo que ellos llaman la *condición de equidad:*

> *… imponiendo que las cantidades correspondientes de la magnitud M' también estén en progresión aritmética (de diferencia k' ε M'). Y, por extensión, la condición de diferencias constates (SIC) de orden n imponiendo que las diferencias de orden n de la sucesión de imágenes sean constantes.*

---

[8] La praxeología es la ciencia que estudia la estructura lógica de la acción humana (praxis). El término fue acuñado en 1890 por Alfred Espinas en la *Revue Philosophique*, pero se usa comúnmente en relación con la obra del economista austríaco Ludwing von Mises y sus seguidores de la Escuela de Viena, también denominada *Escuela psicológica de economía*.

La praxeología centra su atención en el individuo, en el impulso de quien efectivamente e indudablemente actúa (individualismo metodológico), sacando de este estudio unos axiomas o principios elementales, sólidos e inmutables, con los cuales entender y analizar el proceso del accionar humano. http://es.wikipedia.org/wiki/Praxeolog%C3%ADa

De esta forma, la relación de proporcionalidad directa queda reformulada como un caso particular de la condición de equidad, cuando, además, las razones geométricas entre cantidades de M son iguales a las razones geométricas entre cantidades de M son iguales a las razones geométricas de la cantidades (SIC) correspondientes de M'. A este tipo de variación lo hemos denominado condición de linealidad, puesto que, en tal caso, para todo par de cantidades correspondientes (a, a'), se verifica que a la cantidad k·a le corresponde la cantidad k·a' $(\forall k \in \Re)$. *También hemos caracterizado la relación de proporcionalidad inversa según el tipo de variación, denominándola condición de "linealidad inversa".*

Reconstruidas las praxeologías "modelización discursiva" y "modelización proporcional" de los sistemas lineales y "lineales inversos", la ampliación de los tipos de variación muestra la insuficiencia de la teoría "clásica" de las razones y de las proporciones (homogéneas) para modelizar de manera conjunta e integrada los diferentes sistemas que surgen, lo que conduce a la necesidad de considerar un marco tecnológico-teórico más amplio: las funciones reales de variable real (ver los detalles en García, 2005).

En el análisis que efectúan García, et. al. (2005), emplean el currículo vigente en la Comunidad Autónoma de Andalucía, donde a la matemática escolar la agrupa en cinco áreas: *"Números y medidas", "Álgebra", "Geometría", "Funciones y su representación gráfica"* y *"Tratamiento de la información estadística y del azar".* En el apartado de *"Números y medidas"*

..., se localizan componentes praxeológicos de la modelización 'proporcional' de los sistemas lineales y "lineales inversos" (relación de proporcionalidad directa e inversa), que se construyen durante el primer

ciclo, para avanzar durante el tercer y cuarto curso hacia los porcentajes y la resolución de problemas "clásicos" de aritmética mercantil (repartos proporcionales, interés simple, etc.). Es posible que estos elementos praxeológicos se entremezclen con algunos de la modelización 'ecuacional'…

En el área de "Funciones y su representación gráfica", tras el primer ciclo dedicado a la "lectura e interpretación" de gráficas, durante el tercer y cuarto curso se avanza en la caracterización de dependencias entre dos variables y en su representación mediante ostensivos tabulares, gráficos (ejes cartesianos) y expresiones algebraicas. En el último curso de la ESO, los sistemas lineales y "lineales inversos" convivirán con sistemas caracterizados por otros tipos de variación, pero la actividad.

García, et. al. (2005) bajo la (ATD) presenta resultados preliminares acerca de la proporcionalidad y las relaciones funcionales en educación secundaria en España. Plantean un Modelo Epistemológico de Referencia (MER), tomando en cuenta las restricciones oficiales de la Educación Secundaria Obligatoria, discretizan magnitudes, obtenidas de un conjunto de cantidades de la primera magnitud, en progresión aritmética (de diferencia $k \in M$), donde hay una variación constante y preguntando la clase de variaciones de las cantidades de la segunda magnitud.

Los trabajos revisados en este apartado muestran que a edad temprana del ser humano, aparecen significados de la *linealidad* mediante el uso de la proporcionalidad cuantitativa. También se manifiesta que el pensamiento proporcional tiene antecedentes en procesos cualitativos. Además el modelo *lineal* es el más ampliamente usado por estudiantes de nivel medio básico, aunque ellos no logran diferenciar algunos problemas no lineales de los lineales. Por otra parte alumnos del mismo nivel distinguen que en proceso lineales aparece una tasa de variación constante, lo que en este trabajo se ha caracterizado como idea germinal: *ratio mutabilitas constant*.

3.3 EL USO COTIDIANO DE LA PROPORCIONALIDAD EN PERSONAS DE ESCOLARIDAD LIMITADA

En relación a las concepciones que, a partir de los usos cotidianos, han edificado personas de escasa o nula escolaridad a partir de su experiencia en problemas donde se involucran fracciones, los decimales y la proporcionalidad, Ávila et. al. (1995) reporta la presencia de un saber edificado a través del empleo cotidiano en problemas alrededor de los números racionales, donde este saber "pragmático" tiene su origen en hechos de pesar y medir, conceptualizando las fracciones asociadas a *los medios, los cuartos y los medios cuartos*. Con respecto a la proporcionalidad directa, afirman que

> *Por otra parte, nuestros datos muestran que las personas han construido estrategias para resolver problemas donde la proporcionalidad directa está implicada. Estos problemas, comúnmente conocidos como de regla de tres, generan respuestas matemáticas por parte de todos los sujetos con quienes trabajamos. … En todos los casos, las estrategias de resolución son diferentes a las escolarizadas. … imponen una revisión profunda al curriculum de matemáticas.*

La investigación (Ávila, et. al. (1995)) se llevó a cabo con 36 personas con ocupación diversa: amas de casa, costureras, albañiles, campesinos. El total de individuos se subdividió en grupos, el primero con 17 miembros, sin escolaridad o que estaban en proceso de alfabetización; el segundo colectivo formado por 6 individuos, quienes recién habían concluido un curso de alfabetización en el Instituto Nacional para la Educación para los adultos (INEA); y los otros 13, quienes en su infancia que habían cursado hasta tercero, cuarto y quinto de primaria constituyeron el tercer grupo. Con relación a la proporción directa

- *ninguno de los tres grupos había estado expuesto, escolarmente, al manejo de la proporcionalidad.*

La recolección de datos se realizó mediante entrevistas individuales basadas en la técnica del interrogatorio crítico.

A 18 sujetos se les aplicó, mediante la misma técnica, una segunda entrevista orientada a indagar acerca de: ...

- *la capacidad para resolver situaciones donde la proporcionalidad directa está implicada.*

El análisis de los datos combinó dos estrategias:

- *Un análisis cualitativo puesto que el interés básico era identificar las concepciones y habilidades vinculadas al campo de los racionales.*
- *Un análisis cuantitativo que, sustentado en la prueba de la ji cuadrada, permitió hacer afirmaciones más fundamentadas en relación con el impacto que la escolaridad tiene sobre las destrezas, habilidades y conocimientos de las personas en el ámbito de los racionales.*

En particular en relación al manejo de la proporcionalidad directa, se le considera relevante por los usuarios de la educación básica de adultos, como lo refiere De Lella (1988) (Citado en Ávila, et. al. (1995)), siendo

Tal conocimiento, en efecto, es indispensable para una interacción adecuada con el entorno laboral y comercial. Sus aplicaciones son innumerables y están presentes en todos los sectores de la actividad humana (Dupuis y Pluvinage, 1981; Soto y Rouche, 1995). Asimismo, y de acuerdo con diversos investigadores (cfr. Por ejemplo Lesh, Post y Behr, 1988) la proporcionalidad es la culminación de la matemática elemental y la piedra angular de toda la matemática que vendrá después. …

En un estudio realizado en Chile (Soto y Rouche, op. cit.) se evidencia un buen dominio de la proporcionalidad entre los campesinos, así como la

utilización de procedimientos de resolución bastante alejados de los que habitualmente se utilizan en la escuela (Soto y Rouche, 1994).

Nosotros exploramos el manejo de la proporcionalidad a través del planteamiento de problemas en los cuales los entrevistados tenían que aplicar sus concepciones y habilidades al respecto; tales problemas son como los siguientes:

1. *Si por 3 kilos de frijol se pagan N $9, ¿cuánto se tendrá que pagar por 8 kilos?*
2. *Si por 4 tacos se cobran N$6, ¿cuánto se cobra por 10 tacos?*
3. *Una señora hizo una olla de agua fresca con 4 litros de agua y 8 naranjas. Otra señora hizo una olla con 2 litros de agua y seis naranjas. ¿Cuál agua tendrá más sabor a naranja?*
4. *Otras señoras hicieron agua de limón. Una puso 6 litros de agua y 36 limones. Otra puso 9 litros de agua y 54 limones, ¿Cuál agua tendrá más sabor a limón?*
5. *Un campesino tiene dos parcelas. Para la parcela que mide 2 hectáreas necesita 2½ costales de semilla. ¿Cuántos costales de semilla necesita para la parcela que mide 5 hectáreas?*

Se puede observar de las conclusiones que obtienen, que las personas tienen concepciones acerca de la proporcionalidad, y han creado talentos y métodos para solventar problemas donde está inmersa. Las características de los grupos, en cuanto a las soluciones construidas son:

- *Resolución... con destreza y agilidad... se utiliza predominantemente: búsqueda del valor unitario.*

- *… permite resolver acertadamente aquellos que no implican cálculos complejos … es el límite en la capacidad de resolución; en este nivel de conceptualización el procedimiento de cálculo predominante es el de las duplicaciones del valor conocido (sin ir al valor unitario)*
- *Uso predominante de aproximaciones; en esta etapa, se utilizan las duplicaciones como estrategia fundamental para obtener los resultados, pero éstos no se obtienen con exactitud.*

Manejo inconsciente y local de la proporcionalidad; los sujetos son capaces de resolver algunos de los problemas, pero no muestran estrategias ni acercamientos sistemáticos;...

En el artículo de Ávila et. al. (1995) también se reportan algunas de las estrategias que emplearon los individuos sujetos a la investigación

Los siguientes diálogos muestran algunas de las estrategias de solución utilizadas…

E. (Plantea el problema 2.)

Antonio. … Le toca a cada taco a 1.50; a

1.50 por 10, pagaría yo… 15 pesos (Anto-

nio, carpintero, sin escolaridad).

E. (Plantea el mismo problema)

Jovita. Quince pesos.

E. ¿Cómo le hizo?

J. Lo que hice es que sumé: si por cua-

tro tacos pago seis pesos, por ocho tacos

pago 12 pesos… por ocho tacos 12 pesos,

por 10 tacos serían 12… ya no me acuerdo.

E. Por cuatro tacos paga seis pesos, luego me dijo que por ocho tacos eran…

J. (interrumpe) Por ocho tacos 12 pesos, 12 más uno… son 15 pesos, paga 15 pesos: 6 más 6: 12, más 3: 15.

E. ¿De dónde sacó los 3 pesos?

J. La mitad de 6, de tacos (Jovita, ama de casa, con cuatro años de escolaridad).

E. (Plantea el problema de los tacos.)

Juliana. ¿Sí la puedo apuntar?

E. Claro que sí, si usted quiere…

J. (Anota los cuatro datos del problema en forma vertical; pero luego los borra y los reacomoda, como intentando configurar dos sumas con ellos; se ve dudosa.)

E. Mejor hágala pensando, como usted sabe.

J. (Se ríe, deja el lápiz; se queda pensando, mueve los labios)… ¿Pero a cómo me daría el taco? … porque en cuatro taco son 6 000 y en otros cuatro serían 12 000… en los otros dos es donde ya no sé.

E. A ver, usted llevaba lo de ocho, ya no más le falta lo de dos, en ocho me dijo que eran 12 000.

J. Ahí es donde ya no le entiendo, en los otros dos (Juliana, alfabetizada, ama de casa).

Los algoritmos que se estudian en la escuela y en los textos para educación de adultos son extraños al juicio con que las personas proceden (Ávila, et. al. (1995)). En este sentido, la proporcionalidad vista a través de la regla de tres, aparentemente no es conclusión del pensamiento matemático esencial.

...Las formas de entender y de operar en este ámbito, indican que probablemente sería un mejor camino orientar los esfuerzos educativos hacia el procedimiento de búsqueda del valor unitario. … Al parecer, los sujetos tienen concepciones más o menos avanzadas, y destrezas más o menos desarrolladas, independientemente de su nivel de escolaridad.… de lo que podríamos llamar respuestas correctas que obtuvimos, se observa que los conocimientos construidos no tienen relación con la escolaridad de las personas. En ocasiones, los porcentajes favorecen a los analfabetos, en ocasiones a los recién escolarizados o a los de mayor escolaridad.… Es la experiencia generada en el trabajo o en las actividades propias del intercambio comercial las que parecen generar y mantener activas las ideas y las destrezas matemáticas de las personas. …, la insistencia de algunas mujeres recién alfabetizadas o con escolaridad por saber qué operación sirve para resolver el problema las llevó en varias ocasiones a obtener respuestas equivocadas o les impidió resolver los problemas... entonces... ¿qué es lo que la escuela aporta al individuo para enfrentarse a este tipo de situaciones, o si realmente los conocimientos que prevalecen son producto del interactuar cotidiano? … El saber de las personas, al parecer, está constituido por lo que se construye a pulso de manera cotidiana, que es finalmente lo que tiene sentido y utilidad.… De hecho, las personas que más fracasos

tuvieron se cuentan entre las que intentaron escribir utilizando los algoritmos escolares. Éstos son algunos puntos que nos hacen insistir en la urgencia de llevar a cabo el cambio profundo en la educación que se les ofrece a los sectores populares.

Se desprende del trabajo anterior que los participantes en el estudio, emplean la proporcionalidad de una manera empírica, usando el valor unitario y duplicaciones apara resolver problemas, pero en ello no usan los procedimientos establecidos escolarmente. Los métodos que emplean los tiene presentes por su uso cotidiano en las actividades que desempeñan.

3.4 LA LINEALIDAD EN LA FÍSICA ESCOLAR

En el estudio acerca de las concepciones alternativas acerca de la lectura de las gráficas cartesianas que representan movimiento físico, que reporta Dolores et. al. (2002), primero menciona que la modificación que sufrió la matemática de las constantes a las variables, lo propuso Descartes al inicio del siglo XVII, con la introducción de cantidades variables, lo que propició el surgimiento de la geometría Analítica y el inicio del desarrollo del Análisis. Además menciona que a partir del progreso de las ciencias naturales, las secciones cónicas tuvieron referentes en algún contexto, como el hecho que las elipses y parábolas son las orbitas del movimiento de cuerpos celestes o las curvas que seguían los proyectiles. Por lo que respecta a aspectos de las nociones de proporcionalidad y linealidad, hace mención que en los programas oficiales de la educación en México se aborda la proporción directa en 9° grado (Tercer año de secundaria):

…en el 9° grado se hace énfasis en las razones de cambio, especialmente la de variación con tasa constante…

En cuanto a los programas de Ciencias Naturales en la educación primaria menciona que en quinto año se estudia el movimiento rectilíneo, entre otros. Continuando en segundo año de secundaria en la materia de Física I, donde en el programa se sugiere:

> *… su caracterización e identificación a través de la representación gráfica del cambio de posición en el tiempo, asociado a la velocidad con la inclinación de la recta que lo representa.*

Por lo que respecta a los bachilleratos mexicanos con orientación a las ciencias y/o ingenierías, dice que:

> *… incluyen al menos un curso de Física, en el cual está inmersa la Cinemática que estudia el movimiento rectilíneo uniforme y el uniformemente variado.*

Dolores et. al. (2002), afirma de manera contundente que:

> *Tanto la matemática como la física manifiestan un interés por el estudio del movimiento; hipotéticamente la variación directamente proporcional tratada desde la escuela primaria en la asignatura matemática es el marco general en el que caben las modelaciones particulares de movimiento rectilíneo con velocidad constante tratadas en la física escolar.*

En relación a las dificultades que manifiestan los estudiantes en la comprensión de las gráficas, en particular con aspectos lineales, Leinhardt et al. (1990) (Citado por Dolores et. al. (2002)):

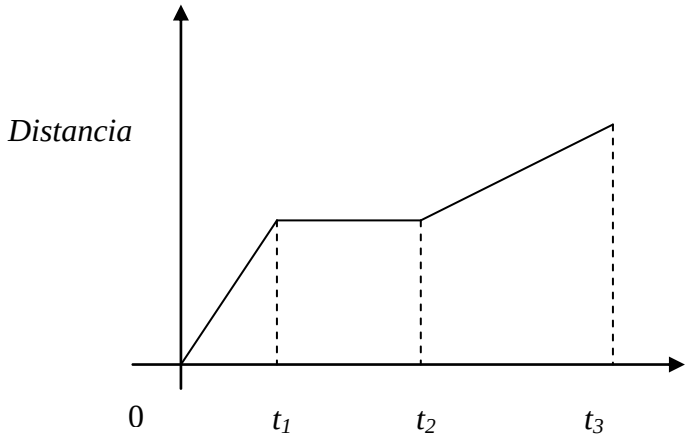
… la confusión entre la pendiente y la altura;…

Refiriéndose al análisis de respuestas a las situaciones didácticas que plantea Dolores et. al.

> *Situación 1. Se mostró la gráfica… que representa la distancia recorrida por un automóvil en movimiento con relación al tiempo t. Se supone que el auto se mueve en línea recta, en una carretera horizontal…*

preguntan

> *¿En qué intervalo de tiempo la velocidad fue mayor?*
>
> *a ( ) entre t = 0 y* t_1
>
> *b ( ) entre* t_2 *y* t_3
>
> *c ( ) entre* t_1 *y* t_2
>
> *d ( ) en* t_3 *«*

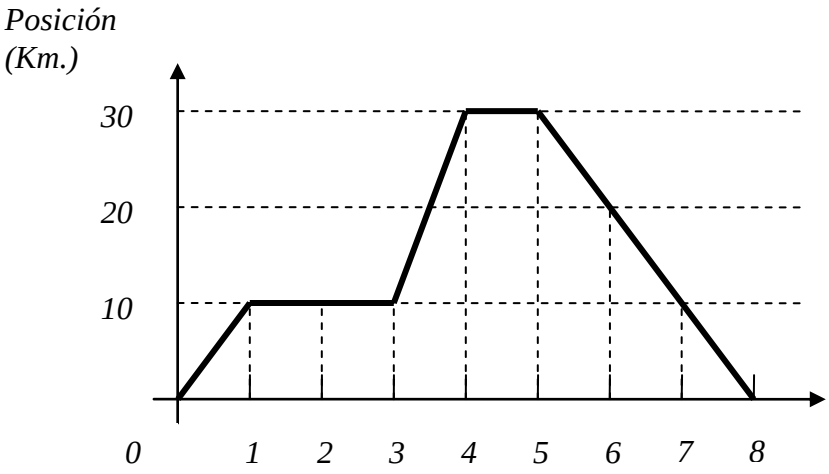


Reportan que la mayoría de los estudiantes de secundaria seleccionaron las opciones c ó d; los de secundaria en su mayoría lo hicieron con el inciso b. Más de la mitad de los profesores de preparatoria escogió el inciso correcto, quizás se apoyaron en

…la pendiente de la gráfica en ese intervalo, todos los demás (excepto los estudiantes universitarios) manifestaron muy escasa inclinación por esta opción.

Algunos de los entrevistados de mayor nivel académico, respondieron en forma acertada, posiblemente porque asociaron que la pendiente de los segmentos de recta, en ese contexto de movimiento rectilíneo, a la velocidad; y posiblemente porque habrían pensado de manera proporcional, en el sentido de que se recorre más distancia en tiempos iguales.

La situación 2, es igualmente ilustrativa para efectos de la linealidad, ya que al preguntar por la velocidad en determinados tiempos, están preguntando por la pendiente de la recta, en ese contexto de la Física:



Tiempo (t) en horas

Preguntaron

a) Entre t=1 y t=3; v = _____

b) Entre t=3 y t=4; v = _____

c) Entre t=5 y t=8; v = _____

Dolores et. al. (2002), reportan que en la primera pregunta, nadie de los estudiantes, excepto algunos de preparatoria, respondió que la velocidad es de 0 Km/h. Ellos asociaron la velocidad con la ordenada. Por parte de los profesores pocos de bachillerato respondieron que es 0 Km/h; y en los maestros de secundaria:

> *…la interpretación de la velocidad como pendiente de la gráfica pareció estar ausente.*

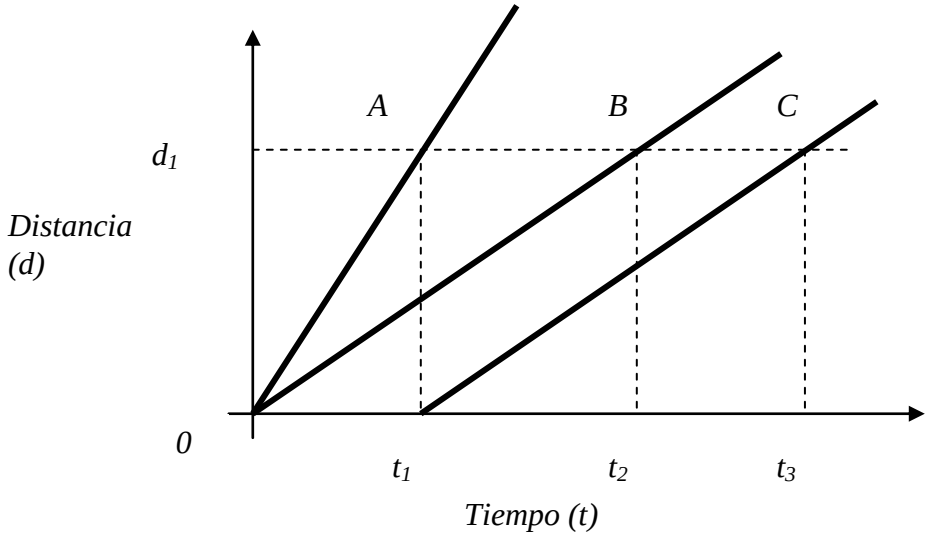
Las respuestas al inciso *b*, donde la respuesta correcta esperada es a partir de calcular el cociente $\frac{30-10}{4-3}=20 \quad km/h$ fueron:

> *… En general, se ofrecieron respuestas muy heterogéneas aunque fue notoria la preferencia por dar la magnitud de la ordenada de mayor altura … Con los maestros de preparatoria se obtuvo el mayor porcentaje de respuestas correctas, quizá basadas en la idea de la pendiente o el cociente de los incrementos de distancia respecto del incremento de tiempo.*

En la tercera pregunta, los estudiantes respondieron de diferentes formas,

> *… sin embargo nadie insinuó siquiera que la velocidad fuese negativa… las respuestas de los profesores no fueron muy distintas… y solamente cinco del grado de preparatoria acertaron.*

La Situación 3, estuvo dada en referencia a la variación de las distancias que recorren tres automóviles, desplazándose en línea recta en caminos horizontales, a partir de la gráfica:



Las preguntas se refirieron a las velocidades instantáneas y para contestarlas se debía escribir falso (F) o verdadero (V)…

a) La velocidad del auto B en t_2 es igual que la de C en el mismo punto……..( )

b) El auto B arrancó con mayor velocidad……..( )

c) La velocidad del auto A en t_1 es igual que la de B en t_2……..( )

su caracterización e identificación a través de la representación gráfica del cambio de posición en el tiempo, asociado a la velocidad con la inclinación de la recta que lo representa."

En la Física se estudia el movimiento rectilíneo uniforme y el uniformemente acelerado, teniendo como marco general, desde el punto de vista matemático a la variación directamente proporcional. En estos fenómenos de cambios constante, la velocidad, —— y la aceleración —— representan la *ratio mutabilitas constant*. En el mismo sentido las expresiones, $x=x_0+v(t-t_0)$ y $v=v_0+a(t-t_0)$, son formas lineales que corresponden a los dos diferentes tipos de movimiento. Esto muestra una filiación

conceptual entre la proporcionalidad y la *linealidad.* Lo cual debería tener repercusión en la didáctica de la Física.

3.5 EL CONCEPTO DE PROPORCIÓN VISTA A TRAVÉS DE LA EVOLUCIÓN DE LOS LIBROS DE TEXTO DIRIGIDOS A LA ENSEÑANZA

La investigación alrededor de la *noción de linealidad*, (Acosta, 2006) arroja que hay indicios de ella en el concepto de proporción, como lo plantea Gómez (1999) al reportar que en la historia vista a través de los libros de texto la enseñanza de la proporcionalidad ha tenido cambios metodológicos, relacionados a tres grandes periodos. En seguida se transcribe textualmente lo referido por Gómez (1999) en relación al primer periodo:

1. ***Hasta el final del siglo XVIII****, en los libros generales de aritmética, la proporcionalidad se ubica en un bloque de contenidos dedicados a la comparación de números, donde se estudiaban razones y progresiones, y a continuación un largo listado de sus aplicaciones, fundamentalmente las referidas a diversas situaciones prácticas cuyos nombres eran: la regla de tres (cuyo objeto es determinar el cuarto proporcional), la regla de compañías (reparto del beneficio), la regla de interés (beneficio con una tasa convenida), la regla de descuento (comercial), la regla conjunta (cambio de moneda, trueques), la regla de aligación (precio medio y composición de una mezcla en cantidades convenidas), y la regla de falsa posición (usar números arbitrarios para encontrar el verdadero). El enfoque metodológico seguía un estilo en el se ponían multitud de casos o cuestiones concretas semejantes, puestas de innumerables modos, sobre las que se establecían como reglas los variados medios particulares de que se valían para resolverlos.*

La proporcionalidad como precedente de la noción de *linealidad*, aparece en los libros de texto del siglo XVIII referido a diversas situaciones prácticas, esto es para resolver problemas cotidianos de la época, como reparto de beneficios, cambios de moneda, trueques, etc. En esta parte la *linealidad* está en el estatus protomatemático, ya que en ese contexto no es el objeto de estudio, ni es una herramienta útil para la explicar otros objetos. Por otra parte la proporcionalidad en ese ámbito si es un instrumento que fundamenta las reglas enunciadas, por lo que opera como una noción paramatemática.

Gómez (1999) muestra que en el siglo XIX hay cambio en la forma en que se aborda la proporcionalidad, y como consecuencia la *linealidad*, al considerar aspectos generales obtenidos del álgebra:

2. ***En el siglo XIX*** *se modifica el tratamiento de la proporcionalidad al incorporar planteamientos generales del álgebra. Se considera que una proporción es una igualdad los problemas de proporciones se reducen a problemas de ecuaciones, esto permite entre otras cosas el estudio independiente de las progresiones en los libros de álgebra. El capítulo dedicado a la proporcionalidad parece que pasa de estar organizado en torno a la comparación de números a organizarse en torno al estudio de "cantidades que varían en la misma razón" (ej. Cirodde, 1865, p. 214), mas tarde denominadas "magnitudes proporcionales" (ej. Bruño, 1939, p. 324; Dalmáu Carles, 1937, p.14). Por otro lado, aunque las aplicaciones de la proporcionalidad también admitían un estudio algebraico, se mantenían en los libros de aritmética ya que no podían desatenderse a los estudiantes que abandonaban sus estudios antes de acceder al estudio del álgebra. En este caso el enfoque metodológico abandonaba la teoría clásica, y recurría a un nuevo estilo de razonamiento aritmético basado en el análisis en cuestión y la deducción de las consecuencias que resulta del mismo para que se pueda encontrar la solución a los problemas por discernimiento propio, sin depender del recuerdo de las reglas.*

En este periodo se aprecia el tránsito de significados de la proporcionalidad a la linealidad, ya que los problemas de proporciones se transforman a problemas de ecuaciones, y se vincula con las progresiones, como la progresión aritmética. Se inicia la sistematización del estudio de la proporcionalidad al pasar, de la reflexión con los números, al análisis de cantidades que varían en la misma razón.

El tercer periodo considerado por Gómez (1999) en cuanto a la enseñanza de la proporcionalidad por medio de los libros de texto, se refiere a:

> 3. ***En el siglo XX*** *la actividad escolar está organizada conforme a la división en grados, según la edad y condiciones intelectuales de los alumnos, bajo programas oficiales de carácter cíclico (repetición de los temas aumentando el grado de dificultad en cursos sucesivos) y mediante enseñanza simultanea. Para hacer posible este modelo se necesita un texto que pueda ser usado al mismo tiempo por todos los escolares de una misma clase, el libro escolar, que uniformiza la metodología, reduce el contenido y adapta su presentación a formas textuales aptas para ser memorizadas y reproducidas por los niños. En el caso de la proporcionalidad ésta se ubica en los libros escolares de nivel superior y sus formas textuales son básicamente: enunciados verbales, tablas de valores, representaciones gráficas y expresiones simbólicas*

Mediante la aportación que hace Gómez (1999) se entrevé que el planteamiento de la proporción directa en los libros de texto del siglo XVIII, está encaminada a la comparación de números por medio de reglas que respondían algún hecho práctico, como cálculo del beneficio con una tasa predeterminada, la determinación de un descuento de tipo comercial, la regla para el cambio de moneda o trueques, la regla para el cálculo de la composición de una mezcla en cantidades convenidas, entre otras. En el siglo XIX, los libros de texto incorporan al álgebra considerando cantidades que varían en la misma razón, planteando su igualdad y su uso en la resolución de problemas de proporcionalidad. Ya en el siglo XX, se

incorporan el libro escolar, que uniformiza la metodología, reduce el contenido y adapta su presentación a formas textuales aptas para ser memorizadas y reproducidas por los niños, apareciendo enunciados verbales, tablas de valores y expresiones simbólicas de la proporción directa, para ser empleado simultáneamente por los estudiantes de un grado●

3.6 EL ÁLGEBRA LINEAL Y LA LINEALIDAD

3.6.1 LA GENESIS DE LA DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

En el Álgebra Lineal la noción de *linealidad* adquiere el estatus de noción matemática y es donde se establece la definición aceptada hasta nuestros días. Esta "versión moderna" se basa en la teoría de espacios vectoriales (Dorier, 2000), lo que su enseñanza, a partir de esta perspectiva, ha llevado a problemas didácticos y cognitivos, posiblemente, debido a la forma en como se ha instalado previamente la noción, desde la matemática elemental. Entonces es factible que, los diferentes significados de la noción de *linealidad*, han sido obstáculos en su aprendizaje, de lo cual se pretende dar cuenta en esta investigación.

> *En Francia, esta teoría se enseña usualmente en su versión axiomática de acuerdo a la presentación de Bourbaki, en la cual su forma hipotético deductiva de que la presentación lógica de los conceptos, podrían hacer creer a los profesores que su contenido es muy simple. Se ha reforzado la estandarización de sus herramientas y vocabulario, en virtud de un amplio empleo en otros campos, dentro y fuera de la matemática. La aproximación axiomática ha adquirido recientemente universalidad, debido a su gran difusión después de 1930, lo que no debería esconder su gran desarrollo durante muchos siglos con fases difíciles de unificación.* (Traducción libre de Dorier, 2000)

Se tiene referencia de que la primera teoría local sobre la linealidad se dio a partir de los Sistemas de ecuaciones lineales numéricas, aunque las técnicas de solución ya se conocían

desde la antigüedad. Incluso aún hasta mediados del siglo XVIII se emplearon técnicas empíricas para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de los primeros ejemplos significativos ubicados en un libro de texto, en relación a ecuaciones lineales es en *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes* escrito por Euler en 1750. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia de tal época. Euler empezó con el caso de dos ecuaciones y dio el siguiente ejemplo (Dorier, 2000):

$$3x-2y=5 \quad \text{y} \quad 4y=6x-10$$

> *Veremos que no es posible determinar ambas variables desconocidas x e y, ya que eliminando a una de ellas, obtenemos una ecuación idéntica,….. La razón de este hecho es que la segunda ecuación 6x-4y=10, es sólo el doble de la primera 3x-2y=5, no difiriendo en absoluto.* (Euler (1750), Traducción libre de Dorier, 2000)

Aunque esto no era tan significativo para los matemáticos de la época, no ofrecía nuevos métodos de solución, lo novedoso fue la aproximación descriptiva y cualitativa de su estudio. Aunque menciona que la segunda ecuación es el doble de la primera, este no fue el hecho que indicó que el sistema era indeterminado, sino que provino de un proceso de eliminación.

Para n = 3 Euler proporciona dos ejemplos, uno con dos ecuaciones similares y otra en la cual una ecuación es el doble de la suma de las otras dos. No lo intenta resolver, pero concluye:

> *Así cuando se dice que para determinar tres incógnitas, basta con tener tres ecuaciones, hay que añadir allí esta restricción, que estas tres ecuaciones aplazan tanto entre ellas, que ninguna sea de esté comprendida en otras.* (Euler (1750), Traducción libre de Dorier, 2000)

Para n = 4, Euler dice que en algunos casos con dos incógnitas puede permanecer indeterminado

5x + 7y - 4z + 3v -24 = 0

2x - 3y + 5z -6v -20 = 0

x + 13y - 14z + 15v +16 = 0

3x + 10y -9z + 9v - 4 = 0

ellas querrán sólo dos, porque habiendo tirado de la tercera el valor de

x = -13y + 14 z - 15v – 16

y que la ha sustituido en el segundo para tener

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29} \qquad y \qquad x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}$$

estos valores de x y de y serán sustituidos en la primera y la cuarta ecuación, lo que conducirá a ecuaciones idénticas, de modo que las cantidades z y v quedarán indeterminados. (Euler (1750), Traducción libre de Dorier, 2000)

La prueba de Euler se basa otra vez en técnicas de eliminación y sustitución. El criterio de dependencia es el hecho de que las incógnitas permanecen indeterminadas. Además de no mencionar ninguna relación lineal entre las ecuaciones. Aunque hay algunas que son evidentes: (1) – (2) = (4) (1) -2x (2) = (3). Euler da una conclusión para cualquier n:

Cuando se sostiene que para determinar n cantidades desconocidas basta con tener n ecuaciones que expresan su información propia, hay que añadir allí la restricción de que todas las ecuaciones sean diferentes entre ellas, o que no haya ninguna el que esté contenida en otras. (Euler (1750), Traducción libre de Dorier, 2000)

En términos actuales significa que las ecuaciones son linealmente independientes, pero de manera cauta, Dorier (2000) afirma que Euler (Dorier, 2000) refiere como un *accidente* el hecho de que las cantidades desconocidas permanecen indeterminadas, aunque si proveniente de las relaciones lineales de las ecuaciones, por lo que la tarea inicial en esa época es resolver el sistema de ecuaciones. El enfoque de Euler va hacia el ajuste de ecuaciones, en tanto el concepto de dependencia lineal es más general, válido para una gran cantidad de objetos. A la inclusión de una ecuación en otra Dorier (2000) le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX. Esta explicación del caso excepcional de dependencia inclusiva en sistemas cuadrados fue un cambio en el punto de vista en la aproximación de ecuaciones lineales. En el ejemplo de cuatro ecuaciones, Euler (Citado por Dorier (2000)) propone la primera relación entre el número de ecuaciones independientes, el tamaño del conjunto solución y el número de parámetros para representarlo, lo que años posteriores se formalizará en los conceptos de rango y dualidad.

> *Cuando dos líneas de cuarto orden se entrecruzan en 16 puntos y por otro lado en 14, conducen a ecuaciones totalmente diferentes son suficientes para determinar una línea de este orden…* (Traducción libre de Dorier, 2000)

Entonces el origen del Álgebra Lineal es consecuencia del afán de resolver sistemas de ecuaciones simultáneas, provenientes de problemas añejos en diferentes contextos. Sin embargo, en ese proceder se fueron incorporando aportaciones teóricas, como el concepto primitivo de dependencia inclusiva, el cual es posible identificarlo como antecedente conceptual de la dependencia lineal. Esta última vinculada conceptualmente con la proporción directa.

3.6.2 EL NACIMIENTO DE LA TEORÍA DE DETERMINANTES

En siglo XVIII Gabriel Cramer publicó un tratado titulado *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques (*Introducción al Análisis de las Curvas Algébricas). Este documento es el primero donde aparece una notación para la escritura de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes no específicos. Aunque en 1693 Leibniz había escrito una carta con contenidos semejantes, pero la cual se publicó por primera vez en 1850. En el libro de Cramer también se presenta una regla para obtener la solución de un sistema cuadrado como función de sus coeficientes – empleando lo que en nuestros días se conoce como determinantes. A partir del trabajo de Cramer, los determinantes han sido ampliamente utilizados y constituyen un tópico importante de matemáticas. La Teoría de los determinantes ha constituido un marco inevitable para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, siendo las dos corrientes actuales de desarrollo, la mejora en el proceso de cálculo en la regla de Cramer y el aumento en las dificultades de cálculo de determinantes específicos. Sin embargo, los determinantes son una herramienta eficiente para el estudio de ecuaciones lineales, aunque involucran cierta complejidad propia de su uso. Por lo que la aproximación intuitiva de Euler como tal no permaneció con tanta influencia como los determinantes en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (Citado en Dorier (2000).

Entonces el determinante es un constructo que surge del análisis teórico, derivado de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Así el estatus didáctico que adopta en escenarios escolares es de naturaleza protomatemática. En el caso de sistemas no homogéneos , si el determinante es distinto de cero, tiene solución única, lo que posteriormente se articula conceptualmente con el hecho de que los vectores asociados, son linealmente independientes.

3.6.3 EL CONCEPTO DE RANGO

Entre 1840 y 1879 empezó a tomar forma dentro de la Teoría de determinantes. Siendo las dificultades a las que se enfrentaron los matemáticos de la época:

1. el reconocimiento de la invariancia que era, si no invisible, al menos asumido sin la necesidad de la prueba.

2. la posibilidad de la misma definición de dependencia entre ecuaciones y n-uplas.

3. la anticipación del concepto de dualidad y la consideración de todos los sistemas de ecuaciones que tienen el mismo juego de soluciones. (Traducción libre de Dorier, 2000)

La idea de menor[9] posibilitó una aproximación del tamaño del conjunto solución en relación con el número máximo de ecuaciones independientes. En efecto, el máximo orden *r* de los menores que no desaparecen en un sistema de *p* ecuaciones lineales con *n* variables da el número *n-r* de variables arbitrarias que se seleccionan para describir el conjunto solución de un sistema consistente y representa el máximo número de ecuaciones linealmente independientes. Estas ideas eran conocidas a mediados del siglo XIX. El método clásico consiste en aislar la parte de las ecuaciones correspondiente al menor no nulo de máximo orden y usar la regla de Cramer y ubicando las otras variables como parámetros en el segundo miembro. En relación a lo anterior, Dorier (2000) cita a Smith (1861):

En un artículo de 1861 (Smith 1861), mostró que el máximo orden de menor no cero también es relacionado con el número máximo de soluciones independientes [……] El no sólo estaba interesado en las maneras de resolver un sistema de ecuaciones, sino que también estaba interesado en las bases teóricas (Traducción libre de Dorier, 2000)

El concepto de rango fue un aspecto medular en la descripción de sistemas de ecuaciones lineales, en el periodo comprendido entre 1840 y 1879. Fue posible el estudio de la dependencia de las ecuaciones mediante el uso de los determinantes a través de técnicas más sofisticadas que las empleadas por Euler.

[9] *"Dada una matriz cuadrada* $A = (a_{ij})$ *y dos enteros* $1 \leq i$, $j \leq n$, *se define el menor* M_{ij} *como el determinante de la matriz que se obtiene de A al omitir la fila i-ésima y la columna j-ésima".* (Barrera, 2007)

Frobenius es de los primeros en definir en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal simultáneamente para ecuaciones y n–uplas, vinculándolo con el concepto de dependencia inclusiva ya mencionada. Al considerar a las ecuaciones y a las n-uplas como la misma clase de objetos en cuanto a la linealidad. Frobenius brinda un gran aporte hacia el concepto moderno de vector. Define el concepto de base de las soluciones e incorpora la noción de *sistema asociado* a un sistema dado, esto es que un sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes son los componentes de los elementos de cualquier base de soluciones del sistema inicial.

En el sentido moderno, con respecto al espacio de soluciones, un sistema asociado representa una base de formas lineales de un espacio ortogonal, sin embargo esta noción está vinculada con la noción de dualidad. Con esto se puede probar que el orden máximo de los menores no nulos, de cualquier sistema de ecuaciones lineales, es un invariante, no sólo en cuanto al sistema, sino también al conjunto solución[10].

Por vez primera Frobenius propuso una forma diferente de los procesos devenidos desde la época de Cramer. Ya no hubo una separación arbitraria entre incógnitas principales y secundarias, y ecuaciones, pero sobretodo el concepto de dependencia lineal reemplazó el término de dependencia inclusiva, acuñado por Euler. Fue hasta 1879 que Frobenius llamó al rango como el orden máximo del menor no nulo (Dorier, 2000).

3.6.4 E L D E S A R R O L O P O S T E R I O R

En 1886 Capelli y Garbieri en su *Corso di Analisi Algebrica,* mostraron que un sistema de rango *k* es equivalente a un sistema triangular con exactamente *k* términos no nulos de la diagonal. Siendo la base de la prueba el método de eliminación empleando los menores del sistema como coeficientes. Este resultado es importante en la eficiencia de la resolución de problemas de análisis numérico y programación lineal, debido al gran número de ecuaciones e incógnitas, que pudieran involucrarse.

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales llevó a la explicación de dos conceptos clave acerca de la linealidad: rango y dualidad. En este proceso, la unificación de las

[10] Todos los sistemas que tienen el mismo conjunto de soluciones tienen el mismo orden máximo de los menores no nulos

propiedades lineales comunes, tanto de las ecuaciones, como de sus soluciones, jugaron un rol fundamental hacia la unificación del concepto de vector como elemento de una estructura lineal.

> *… Frobenius puso las bases para la primera aproximación teórica de la linealidad, aun cuando el contexto de determinantes ahora pareciera ser un tanto técnico para generar ideas intuitivas eficaces. Desde un punto de vista didáctico, el análisis histórico muestra la consistencia del inicio con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales cuando se enseña álgebra lineal. Ello provee motivos de encontrar instrumentos, además de los determinantes, que pudieran evitar las dificultades técnicas que engendran. Sería increíble que los conceptos de rango y dualidad habrían tomado forma si los determinantes no se hubieran introducido en forma temprana, a través de un enfoque más intuitivo.* (Traducción libre de Dorier, 2000).

3.7 REFLEXIONES ALREDEDOR DEL ESTADO DEL ARTE

Se ha evidenciado con los trabajos presentados que hay un engarzamiento entre el razonamiento multiplicativo, el razonamiento proporcional y la conceptualización de la noción de linealidad. Sin embargo en la didáctica no se hace explícita la articulación de los significados que van teniendo las nociones conforme un estudiante avanza en el currículo escolar. Esto exhibe una desarticulación entre los significados de las nociones de proporcionalidad y linealidad, lo cual ha conducido a problemas didácticos y cognitivos, posiblemente debido a la forma en como se ha puesto en escena la noción, desde la matemática elemental.

También es de resaltarse la prevalencia del modelo lineal en estudiantes de secundaria en escenarios geométricos. Dicho de otro modo existe la creencia generalizada en los jóvenes de ese rango de edad, que la mayoría de los fenómenos a su alrededor presentan tasas de variación constante, o sea que se comportan linealmente (De Bock, et. al., (1998) citado en el apartado 3.2 de esta tesis)

Por otra parte en la génesis del Álgebra Lineal no se encuentra la noción de proporcionalidad directa, sino como se planteó, su origen se dio a partir de los sistemas de

ecuaciones lineales numéricas, resaltando que los procedimientos de solución fueron conocidos desde antaño, y que en la actualidad su fundamento teórico está en los espacios vectoriales. Esto representa un obstáculo epistemológico, que repercute en el entendimiento de la linealidad partiendo de concepciones de la proporcionalidad.

Es necesario intentar diseñar secuencias didácticas donde se involucren los significados de la noción de *linealidad*, fundamentadas en algunos de los resultados de investigación que se han plasmado en el Estado del Arte de este trabajo.

CAPÍTULO IV

LA LINEALIDAD EN LA DIDÁCTICA

4.1 LA LINEALIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO

Se han tomado en cuenta ciertos libros de texto representativos, por su uso frecuente en la escuela, en particular de matemáticas, administración, economía, y química, analizando el estatus didáctico de términos, nociones, definiciones y usos vinculados a la proporcionalidad y a la linealidad.

Este análisis se realiza con el propósito de identificar el estatus didáctico que tienen algunos significados de la noción de *linealidad* en los libros de texto, en cuanto a rol que toman en el sentido de ser paramatemático, protomatemático, matemático y metamatemático.

Como elemento conductor de este análisis, se tomó la búsqueda de objetos matemáticos y sus definiciones, vinculados a la linealidad, como son: ecuación lineal, función lineal, línea recta, transformación lineal, dependencia e independencia lineal, proporcionalidad directa, operador lineal, entre otras.

En uno de los textos de cálculo para bachillerato (Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., Garza, J., 2005) seleccionados se presenta una conceptualización de la derivada, a partir de la idea de razón de cambio constante, la cual en este trabajo de tesis se estima como idea germinal de la linealidad. Dicho análisis se efectúa en el marco de un problema de movimiento rectilíneo uniforme, empleando el estatus protomatemático de la proporción directa, generalizando posteriormente a la ecuación lineal, donde la velocidad corresponde a la pendiente de la recta. En ese mismo texto en la *Unidad II*, a través de un problema donde la velocidad de un automóvil no es constante, incorpora la idea de considerar pequeños intervalos de tiempo, donde en ellos la velocidad si es constante empleando el Método de Euler. Con ello lo que se hace es una linealización en cada subintervalo, al considerar la velocidad constante en cada uno de ellos. La expresión lineal recursiva que aparece es un instrumento y por lo tanto juega un papel paramatemático, ya que de manera explícita se emplean el carácter lineal, sin embargo la noción de linealidad no es el objeto de estudio.

Otro estatus paramatemático de la linealización a través del Método de Euler lo evidencia Edwards y Penney (1987), al presentar la solución por medio de aproximaciones numéricas de una ecuación diferencial, donde la función involucrada no es lineal.

Acerca del tema de la línea recta en el texto de Geometría Analítica de Lehmann (2007), define a la ecuación lineal en las variables *x* e *y*, donde al despejar *y* se evidencia el coeficiente de la variable independiente *x*, la cual representa la tasa de variación constante o pendiente de la recta. La proporción directa que aparece implícita, mantiene un estatus protomatemático, ya que no es objeto de estudio, ni es herramienta. Kolman (1981) generaliza la ecuación lineal para *n* variables, donde en este caso el objeto de estudio es la ecuación lineal por lo que tiene el carácter de noción matemática. En Galubitsky (1999) se enuncia propiamente una definición de linealidad en el sentido de un mapeo que va de un espacio a otro, de dimensiones diferentes. Grossman (1996) define a la multiplicación de una matriz y un vector como una combinación lineal de las columnas de la matriz *A*. La linealidad está implícita y juega el papel paramatemático, esto es herramental, para efectos de explicar tal producto. En este mismo texto se da la definición de dependencia e independencia lineal. Se considera desde la perspectiva de este trabajo como una conceptualización integradora ya que muestra evidencia de las filiaciones conceptuales, entre este tema, propio del Álgebra Lineal, con la proporción directa. Se conserva un estatus protomatemático de la proporción directa, aunque por su papel instrumental en la comprensión de la dependencia lineal, se propone una transformación a un carácter paramatemático.

También Grossman (1996) enuncia la definición de espacio vectorial, como preámbulo a la conceptualización de transformación lineal basado en la definición de función, cimentando la noción de linealidad en tanto los objetos que pertenecen al espacio, cumplen con la definición de linealidad. Además ejemplifica que el operador integral y el operador diferencial son transformaciones lineales, no siéndolo la función lineal de la forma $f(x) = m x + b$. Este hecho representa un obstáculo epistemológico y cognitivo que conlleva a conceptualizaciones erróneas en el aula, si no se abordan cuidadosamente por medio de experiencias didácticas que resalten el hecho de considerar $b=0$ para ser una transformación lineal.

Otra perspectiva, que va en sentido inverso a lo dicho antes. En enfoques de ingeniería es frecuente caracterizar a un sistema es lineal cuando *la magnitud de la salida del sistema es proporcional a la magnitud de la entrada del sistema.* Generalmente cuando se aborda esta perspectiva no se trae a colación el concepto de transformación lineal, adquiriendo la

linealidad un estado protomatemático, ya que ni es el objeto matemático de estudio, ni tiene característica instrumental, para efectos de algún uso en la misma ingeniería.

En otro texto (Barrera, 2007) ejemplifica las aplicaciones de matrices y sistemas de ecuaciones que tienen lugar en ingeniería, mediante la ley de Hooke, leyes de Kirchhoff junto con la ley de Ohm y un problema de distribución de temperaturas en placas delgadas. En los procesos se emplean, tanto la proporción directa con un carácter paramatemático y la noción de linealidad con un estatus protomatemático.

En el tema de ecuaciones diferenciales, Granville (2005) define a la ecuación diferencial lineal de primer orden. El sentido de lo *lineal* está dado al tomar en cuenta el grado de la derivada de mayor orden, asociándose en este caso el grado uno. Además menciona que la forma lineal es el referente para reducir a ecuaciones no lineales, como se muestra también en el mismo texto.

En el texto *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (O'Neil, 2008), aparece la noción de linealidad como una propiedad de la transformada discreta de Fourier, al igual que en las propiedades de las integrales complejas.

En el texto *Matemáticas para Administración y Economía* Drapear, J. y Klingman, J. (1976) plantea el método de la Programación lineal para optimizar una función lineal (costos o beneficios), sujeto a restricciones dadas por desigualdades lineales. En este enfoque la noción de linealidad no es propósito de estudio ni es un implemento explícito para el entendimiento de un concepto, sin embargo la naturaleza de los objetos matemáticos involucrados son ecuaciones y sistemas lineales.

En diversos textos de Química General (Hogg, J., Bickel, Ch., Nicholson, M. y Wik, (1970); O'Connor, R. (1976); Garzón, G. (1986)) aparece el tema de la estequiometria donde se estudian las proporciones cuantitativas o relaciones de masa de los elementos que participan en una reacción química. Para que dichas relaciones sean verdaderas la ecuación química debe estar balanceada, esto es debe cumplir la ley de la conservación de la materia. Cada sustancia tiene asignado un número denominado coeficiente estequiométrico, el cual indica la proporción de cada sustancia involucrada. Es de resaltar que en el cálculo de cantidades que intervienen en una reacción química, la proporción directa empleada a través de reglas de tres, presenta un estatus paramatemático en el sentido de ser un

instrumento para resolver un problema, en este caso ubicado fuera del contexto de la matemática.

4.2 E N L O S L I B R O S D E T E X T O D E M A T E M Á T I C A S

En el contexto de las ciencias la linealidad puede ser vista bajo diversas perspectivas:

- En Salinas, et. al. (2005) para motivar la conceptualización de la derivada, inicia con un análisis de la razón de cambio constante, a través de un problema de movimiento rectilíneo uniforme:

  > *Un automóvil transita por una carretera recta. El automóvil viaja con una velocidad constante de 40 metros/segundo… Supongamos que en un momento en que empezamos a medir el tiempo (o sea en el instante* ***t*** *= 0), el automóvil se encuentra a 30 metros a la derecha de un punto de referencia O sobre la carretera… Hemos llamado* ***x*** *a la posición correspondiente al tiempo* ***t****,… Nuestra intención es analizar a fondo esta situación y obtener de ella el mayor provecho "matemático" posible.*

  Se presentan tablas numéricas donde aparecen el tiempo ***t*** y la posición ***x***, la primera donde va aumentando el tiempo segundo a segundo, la segunda de medio segundo en medio segundo y la última, de un cuarto de segundo en un cuarto de segundo, esto es en cada una de ellas se incrementa el tiempo a un *ritmo constante o tasa constante*. En seguida se explica con ejemplos puntuales el que el automóvil tenga velocidad constante:

  > *… en 2 segundos la posición aumenta 80 metros…porque 2 veces 40 es igual a (2) (40)=80,…*

  Después se hace mención que aunque las tablas se miren diferentes, representa numéricamente el mismo hecho, el *movimiento rectilíneo con velocidad constante*. Se está empleando, aunque no se diga en forma explícita, la noción de proporcionalidad y

por ende un significado de la noción de linealidad, al resaltar que la tasa con que varia la posición respecto del tiempo es constante. En este sentido la proporcionalidad está jugando un papel protomatemático, ya sus propiedades son empleadas para abordar el este movimiento, pero la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento explícito para el estudio del fenómeno.

En un segundo *Análisis* se resalta la posición inicial a los *30 metros a la derecha de un punto de referencia O*, mediante ejemplos numéricos:

70 *metros* = 30 *metros* + 40 *metros*

↑ ↑

la posición inicial *lo que aumenta la posición al transcurrir un segundo*

... Igualmente, si aplicamos ese razonamiento en la tabla C, la posición 50 la podemos interpretar como:

50 *metros* = 30 *metros* + 20 *metros*

↑ ↑

la posición inicial *lo que aumenta la posición al transcurrir un segundo*

...

a partir de lo cual se manifiesta la utilidad de lo anterior para establecer la *forma algebraica*:

$x = 30 + 40\ t$

↑ ↑

la posición inicial *lo que aumenta la posición al transcurrir t segundos*

Esa expresión algebraica también podemos escribirla como:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x(t)} = 30 + 40\ \boldsymbol{t}$$

donde la expresión ***x(t)*** *denota la posición del automóvil correspondiente al tiempo* ***t.***

En este punto se hace referencia que se tiene *una técnica sistemática para predecir o conseguir los valores de la posición en cualquier tiempo* ***t****,* y ejemplifica:

..., la posición en el tiempo ***t*** *= 25 segundos es*

$$x = x\,(25) = 30 + 40\,(25) = 1030 \text{ metros}\ldots$$

En un cuarto *Análisis* resaltan que el problema se puede estudiar a través de aspectos geométricos, numéricos y algebraicos.
En el apartado *Hacia la generalización* hace mención acerca de las características del *movimiento rectilíneo uniforme*:

A incrementos iguales en tiempo, le corresponden incrementos iguales en la posición…
La posición ***x*** *y el tiempo* ***t*** *están relacionados algebraicamente por una ecuación de la forma*

$$x = x_0 + v\,t$$

donde x_0 *es la posición inicial (correspondiente a* $t = 0$*) y* v *es el valor constante de la velocidad"*

Se afirma que en el contexto del Álgebra, dicha expresión se conoce como *ecuación lineal en dos variables*, siendo estas ***x*** y ***t***. En ello se deja entrever una significación de la noción de linealidad al constatarse que el fenómeno, cambio de posición con respecto del tiempo, es constante, comenzando en una posición de inicio. Incluso los autores mencionan ello como una razón de cambio lineal. Dicho de otro modo que en el contexto físico mencionado, la velocidad es constante, partiendo de una posición inicial:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esto trae el significado de que, partiendo de la posición inicial x_0, la posición x es directamente proporcional al tiempo:

$$x \alpha t$$

esto es:

$$x = vt.$$

En la *Unidad II* del mismo texto (Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., Garza, J., 2005), mediante un problema donde la velocidad de un automóvil no es constante, incorpora la idea de considerar pequeños intervalos de tiempo, donde en ellos la velocidad es constante empleando el ***Método de Euler***. Realmente se está haciendo una linealización en cada subintervalo, al considerar la velocidad constante en cada uno de ellos. Lo ejemplifica considerando:

> *...la velocidad (o razón de cambio) no es una función lineal, de hecho es una función cuadrática:*
>
> $$v(t) = 3t^2$$
>
> *...nos interesa calcular: un valor aproximado para el* ***desplazamiento d*** *del automóvil cuando han transcurrido 4 segundos.*
>
> - ***Primero:***
>
> *..., tomando subintervalos de un segundo ($\Delta t = 1$). ...*
>
> - ***Segundo:***
>
> *De acuerdo con la fórmula* $v(t) = 3t^2$, *calculemos la velocidad (en metros/segundo) en cada uno de los tiempos indicados:*
>
> $$v(0) = 0, \quad v(1) = 3, \quad v(2) = 12$$
> $$v(3) = 27, \quad v(4) = 48$$
>
> *Consideremos que en cada subintervalo la velocidad es constante…*

En este momento se linealiza, al tomar la velocidad constante en cada intervalo de tiempo, calculando el desplazamiento en cada uno de ellos:

…

- ***Tercero:*** *…*

$$\Delta_1 d \approx [v(0)] \cdot 1 = 0$$

$$\Delta_2 d \approx [v(1)] \cdot 1 = 3$$

$$\Delta_3 d \approx [v(2)] \cdot 1 = 12$$

$$\Delta_4 d \approx [v(3)] \cdot 1 = 27$$

- ***Cuarto:***

El ***desplazamiento*** *en* $t = 4$ *es la suma de los incrementos del desplazamiento de cada subintervalo,…*

$$d(4) = \Delta_1 d + \Delta_2 d + \Delta_3 d + \Delta_4 d$$

$$d(4) \approx 0 + 3 + 12 + 27 = 42 \text{ metros}$$

La linealización es el referente a seguir para estimar la velocidad no constante de un automóvil, al discretizar el tiempo en pequeños intervalos, donde en cada uno de ellos la velocidad es constante. Con esto se reafirma lo manifestado por De Bock et. al. (1998) al consignar que el tema de las relaciones lineales, es de gran valor en virtud de que subyacen como modelo básico de gran cantidad de problemas en matemáticas aplicadas.

- En Método de Euler tiene aplicaciones en otras ramas de la matemática, considerando por supuesto la prerrogativa de la linealización. Bajo el hecho de que una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

con mucha frecuencia no es posible encontrar su solución por los métodos analíticos simples o en ocasiones ni por métodos basados en series infinitas, sobretodo cuando la función *f(x, y)* no es lineal en *y*. Por ello es un apartado frecuente en algunos textos de Cálculo o de Ecuaciones Diferenciales, el que se muestre el *método de Euler*, para la

solución numérica de la ecuación diferencial antes escrita. Por ejemplo Edwards y Penney (1987) lo plantean como sigue:

Aquí se analizará el método de Euler para calcular aproximaciones numéricas de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(a) = y_0 \tag{2}$$

en un intervalo de la forma $a \le x \le b$. *Se escoge primero un tamaño de paso fijo h>0 para considerar los puntos*

$$a = x_0, x_1, x\ldots., x_n, \ldots.$$

donde $x_n = a + n\,h$, *de modo que* $x_n = x_{n-1} + h$ *para cada n = 1, 2, 3,…Nuestra meta será encontrar aproximaciones aceptables* $y_1, y_2, y_3, \ldots$ *A los verdaderos valores de la solución y(x) de la ecuación (2) en los puntos* $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ *Por lo tanto, se investigarán aproximaciones de razonable exactitud*

$$y_n \approx y(x_n) \tag{3}$$

para cada n.

Cuando $x = x_0$, *la razón de cambio de y con respecto a x es* $y' = f(x_0, y_0)$. *Si el cambio de y continúa a esta misma razón de* $x = x_0$ *a* $x = x_1 = x_0 + h$, *el cambio de y será* $h\,f(x_0, y_0)$ *exacto. Se tomaría por lo tanto*

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{4}$$

como una aproximación del verdadero valor de $y(x_1)$ *de la solución para* $x = x_1$. *En forma similar, se tomaría*

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \tag{5}$$

como aproximación de $y(x_2)$. *Al haberse alcanzado el n-ésimo valor aproximado* $y_n \approx y(x_n)$ *, se tomaría*

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{6}$$

como aproximación al verdadero valor de $y(x_{n+1})$.

La forma de la ecuación recursiva *(6)* es una expresión lineal en el sentido, de ser una expresión que contiene un estado inicial y_n u ordenada al origen, al cual se suma un término que indica un *grado de variación fijo o cambio constante*, de magnitud *h*. Entonces el *método de Euler* implica una serie de aproximaciones sucesivas del valor de la solución de la ecuación diferencial, considerando una tasa de variación constante en cada intervalo de magnitud *h*. La expresión lineal recursiva *(6)* debiera considerarse como un instrumento y por ende juega un papel *paramatemático*, ya que de forma explícita se emplean el carácter lineal, sin embargo la noción de linealidad no es el objeto de estudio.

- Lehmann (2007) en el tema de la línea recta dice:

> *… hemos visto que la ecuación de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es de la forma lineal*
>
> $$A\,x + B\,y + C = 0 \qquad (1)$$
>
> *En donde ya sea A o B debe ser diferente de cero y C puede o no ser igual a cero. La ecuación (1) se llama la forma general de la ecuación de una recta….*
>
> *TEOREMA 5. Una ecuación lineal en las variables x y y representa una recta y recíprocamente.*
>
> *NOTAS. 1. Este teorema muestra lo apropiado del término lineal para designar las expresiones algebraicas de primer grado.”*

Al despejar *y* de la expresión *(1)* se tiene

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

donde el coeficiente $-\frac{A}{B}$ de la *x* es la tasa de variación constante o pendiente de la recta que cruza por el punto $\left(0,-\frac{A}{B}\right)$. En esto la proporción directa tiene un estatus

protomatemático, ya que ni es objeto de estudio, ni se hace explícito su carácter de herramienta, está un tanto desapercibido en la didáctica de este tema.

- Kolman (1981) plantea que hay problemas prácticos que a menudo surgen en diversas ciencias como en la física, la biología, la economía, en todas las ramas de la ingeniería, la investigación de operaciones, y en la misma matemática, donde se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales.

  La ecuación

  $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$, *la cual expresa y en términos de las variables* $x_1\ x_2, ... x_n$ *y las constantes* $a_1, a_2, ..., a_n$ *se denomina ecuación lineal.*

  En este caso la ecuación lineal tiene el carácter de *noción matemática*, ya que es el objeto de estudio propiamente dicho.

- Galubitsky (1999) establece la siguiente definición de transformación *lineal*:

  Definición 3.3.1 *Un mapeo L:* $R^n \rightarrow R^m$ *es lineal si*

  (a) $L(x+y) = L(x) + L(y)$ *para toda* $x, y \in R^n, y$

  (b) $L(cx) = c\,L(x)$ *para toda* $x \quad R^n$ *y para todos los escalares* $c \in R$"

- Grossman (1996) define a la multiplicación de una matriz y un vector como una combinación lineal de las columnas de la matriz A:

  Sea A una matriz de m x n y $\mathbf{x}$ *un vector de n x 1. Considere el producto*

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & ..... & + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & ..... & + a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & ..... & + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

  o

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Observe que $c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ *es la primera columna de A,* $c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$ *es la segunda columna, y así sucesivamente. Entonces (9) se puede escribir como*

$$Ax = x_1 c_1 + x_2 c_2 + ... + x_n c_n \qquad (10)$$

El lado derecho de la expresión (10) se llama ***combinación lineal*** *de los vectores* $c_1, c_2, ..., c_n$. *Las combinaciones lineales se estudiarán con detalle en la sección 4.4. Aquí simplemente se observa el siguiente hecho útil:*

El producto de la matriz A de m x n y el vector columna ***x*** *es una combinación lineal de las columnas de A.*

Suponga ahora que B es una matriz de n x p. Sea C = AB y se c_1 *la primera columna de C. Entonces*

$$c_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + & a_{12}b_{21} + & \ldots\ldots & + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + & a_{22}b_{21} + & \ldots\ldots & + a_{2n}b_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + & a_{m2}b_{21} + & \ldots\ldots & + a_{mn}b_{n1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + b_{21} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + b_{n1} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

es igual a la combinación lineal de las columnas de A. Como esto se cumple para todas las columnas de C = AB, se ve que

> *Cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A."*

En este tema del texto referido, la linealidad está implícita y juega el papel *paramatemático*, esto es herramental, para efectos de explicar el producto entre una matriz y un vector, como la combinación lineal de las columnas de la matriz y el vector.

- Una conceptualización integradora es la que se muestra desde la definición de dependencia e independencia lineal, dada por Grossman (1996)

Dependencia e independencia lineal *Sean* $\boldsymbol{v_1, v_2,\ldots,v_n}$, *n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son* ***linealmente dependientes*** *si existen n escalares* $c_1, c_2,\ldots,c_n$ *no todos cero tales que*

$$c_1 \boldsymbol{v_1} + c_2 \boldsymbol{v_2} + \ldots + c_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son ***linealmente independientes.***

….], v1, v2,…, vn *son linealmente independientes si la ecuación*

$c_1 \boldsymbol{v_1} + c_2 \boldsymbol{v_2} + \ldots + c_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$ *se cumple sólo para* $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

Que aunada al teorema:

Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno es un múltiplo escalar de otro

Muestran filiaciones conceptuales, ya que si dichos vectores, por ejemplo $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ están en el espacio vectorial *V*, y suponiendo que $\mathbf{v_2} = c\mathbf{v_1}$ para un escalar c diferente de cero, es evidente que $c\,\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0}$, lo que implica que dichos vectores son linealmente dependientes. Entonces existen constantes c_1 y c_2 tal que $c_1\,\boldsymbol{v_1} + c_2\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0}$. Por lo que si $c_1 \neq 0$ y despejando $\boldsymbol{v_1}$ se tiene

$$\boldsymbol{v_1} = -\frac{c_2}{c_1}\,\boldsymbol{v_2}$$

el decir que $\boldsymbol{v_1}$ es múltiplo escalar de $\boldsymbol{v_2}$ implica la filiación conceptual de que $\boldsymbol{v_1}$ es directamente proporcional a $\boldsymbol{v_2}$, en cuyo caso la constante de proporcionalidad es

$$k = -\frac{c_2}{c_1}, \text{ por lo que } \boldsymbol{v_1} = k\,\boldsymbol{v_2}$$

En la didáctica vigente en este tema *en comento*, no se explicita el vínculo conceptual que hay con la proporcionalidad directa, manteniéndose con un carácter protomatemático, aunque se propondrá el cambio de estatus a paramatemático, ya que podría jugar un papel herramental en el entendimiento de la dependencia lineal.

- La conceptualización de linealidad está implícita en la propia definición de espacio vectorial. Grossman (1996) lo define como

> *... Un* ***espacio vectorial real*** *V es un conjunto de objetos, llamados vectores, junto con dos operaciones llamadas* ***suma*** *y* ***multiplicación por un escalar*** *que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación....*
>
> *i.* *Si* $\boldsymbol{x} \in V$ *y* $\boldsymbol{y} \in V$, *entonces* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ (***cerradura bajo la suma***)
>
> *ii.* *Para todo* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *y* $\boldsymbol{z}$ *en V,* $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
>
> ***(ley asociativa de la suma de vectores).***

iii. *Existe un vector* $\mathbf{0} \in V$ *tal que para todo* $\mathbf{x} \in V \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x}$

(el $\mathbf{0}$ *se llama* ***vector cero*** *o* ***idéntico aditivo****).*

iv. *Si* $\mathbf{x} \in V$*, existe un vector* $-\mathbf{x}$ *en V tal que* $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$

($-\mathbf{x}$ *se llama* ***inverso aditivo*** *de* $\mathbf{x}$*).*

v. *Si* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *están en V, entonces* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

(ley conmutativa de la suma de vectores*).*

vi. *Si* $\mathbf{x} \in V$ *y* α *es un escalar, entonces* $\alpha\,\mathbf{x} \in V$

(cerradura bajo la multiplicación por un escalar*)*

vii. *Si* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *están en V y* α *es un escalar, entonces* $\alpha\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\,\mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{y}$

(primera ley distributiva*)*

viii. *Si* $\mathbf{x} \in V$ *y* α *y* β *son escalares, entonces* $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{x}$

(segunda ley distributiva*).*

ix. *Si* $\mathbf{x} \in V$ *y* α *y* β *son escalares, entonces* $\alpha(\beta\,\mathbf{x}) = (\alpha\,\beta)\,\mathbf{x}$

(ley asociativa de la multiplicación por escalares*).*

x. *Para cada vector* $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

- Antes de abordar la definición de Transformaciones lineales, Grossman, S. (1996) hecha mano de dos ejemplos, el primero con un referente gráfico:

Reflexión respecto al eje x. *En* R^2 *se define una función T mediante la fórmula* $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. *Geométricamente, T toma un vector en* R^2 *y lo refleja respecto al eje x. Esto se ilustra en la figura 5.1. Una vez que se ha dado la definición básica, se verá que T es una transformación lineal de* R^2 *en* R^2.

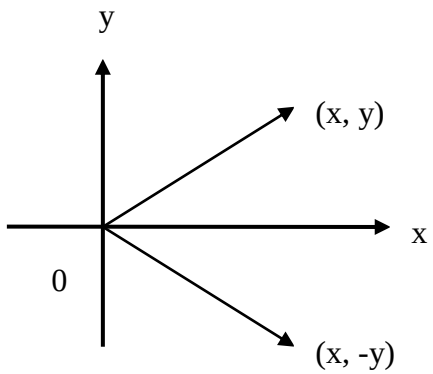


Figura 5.1 *El vector (x, -y) es la reflexión respecto al eje x del vector (x, y)*

y el segundo en un contexto donde se involucran vectores de producción y vectores de materia prima:

Transformación de un vector de producción en un vector de materia prima. *Un fabricante hace cuatro tipos de productos, cada uno requiere tres tipos de materiales. Se denota a los cuatro productos por P_1, P_2, P_3 y P_4 y a los materiales por R_1, R_2 y R_3. La tabla siguiente da el número de unidades de cada materia prima que se requieren para fabricar 1 unidad de cada producto.*

		Necesarios para producir 1 unidad de			
		P_1	P_2	P_3	P_4
Número de unidades de materia prima	R_1	2	1	3	4
	R_2	4	2	2	1
	R_3	3	3	1	2

Surge una pregunta natural: si se produce cierto número de los cuatro productos, ¿cuántas unidades de cada material se necesitan? Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 el número de artículos fabricados de los cuatro productos y sean r_1, r_2 y r_3 el número de unidades necesario de los tres materiales. Entonces se define

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

...

En general se ve que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

o

$$A\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}$$

... se define la función T por $\boldsymbol{r} = T\,\boldsymbol{p} = A\,\boldsymbol{p}$. *Esto es, T es la función que "transforma" el vector de producción en el vector de materia prima."*

En cierto sentido la forma matricial $\boldsymbol{r} = T\,\boldsymbol{p}$ mantiene un vínculo conceptual con la proporción directa, en el sentido de que el vector $\boldsymbol{r}$ es "directamente proporcional" a la matriz *A*. Cuando se aborda este tema en los cursos de licenciatura, no se explicita su relación con la proporcionalidad, con lo cual se deja de tener una oportunidad de incorporar otro elemento que puede favorecer al entendimiento del tema ubicado en el Álgebra Lineal.

El mismo autor vincula a la transformación lineal con el concepto de función:

En la sección 1.7 se escribió un sistema de ecuaciones como

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

donde A es una matriz de m x n, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ *y* $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$*. Se pidió encontrar* $\boldsymbol{x}$ *cuando A y* $\boldsymbol{b}$ *se conocían. No obstante, esta ecuación se puede ver de otra manera: suponga que A se conoce. Entonces la ecuación* $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *"dice": proporcione una* $\boldsymbol{x}$ *en* $\boldsymbol{R}^n$ *y yo le daré una* $\boldsymbol{b}$ *en* $\boldsymbol{R}^m$*; es decir, A representa una función con dominio* $\boldsymbol{R}^n$ *e imagen* $\boldsymbol{R}^m$*.*

La función que se acaba de definir tiene las propiedades de que $A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x}$ *si α es un escalar y* $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\,\boldsymbol{x} + A\,\boldsymbol{y}$*. Esta propiedad caracteriza las transformaciones lineales."*

La noción que articula conceptualmente a la proporción directa con la definición de Transformación lineal es la linealidad.

- Se entrevé que la proporcionalidad directa y la definición de linealidad está inmersa en la definición de Transformación lineal, Grossman, S. (1996):

Transformación lineal *Sean V y W espacios vectoriales reales. Una* ***transformación lineal*** *T de V en W es una función que asigna a cada vector* $\boldsymbol{v} \in V$ *un vector único* $T\boldsymbol{v} \in W$ *y que satisface, para cada* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *en V y cada escalar α,*

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{v}$$

y

$$T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T\boldsymbol{v}$$

En seguida de esta definición, en el mismo texto se lee una nota aclaratoria acerca de la notación:

1. Se escribe T: V → W para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W; esto es, T es una función con V como su dominio y un subconjunto de W como su imagen.

*2. Se escriben indistintamente T**v** y T(**v**). Denotan lo mismo; las dos se leen "T de **v**". Esto es análogo a la notación funcional f(x), que se lee "f de x…*

En los ejemplos 12 y 13 se ve inmersa las nociones de linealidad y proporcionalidad:

EJEMPLO 12 Operador integral *Sea J: C [0,1] → **R** definida por*

$Jf = \int_0^1 f(x)dx$. *Como* $\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$ *y*

$\int_0^1 \alpha\ f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx$ *si f y g son continuas, se ve que J es lineal. Por ejemplo, J(x³) = ¼. J se llama* ***operador integral..***

EJEMPLO 13 Operador diferencial *Suponga que D: $C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$ se define por D f = f'. Como (f+g)' = f' + g' y (αf)' = αf' si f y g son diferenciables, se ve que D es lineal. D se llama* ***operador diferencial..***

Al final de esa sección, el autor escribe una nota, que desde la perspectiva didáctica de este trabajo es contundente para la epistemología de la noción de linealidad:

ADVERTENCIA *No toda transformación que se ve lineal es en realidad lineal. Por ejemplo, defina T: R→ R por Tx = 2x + 3. Entonces la gráfica de* $\{(x, Tx) : x \in R\}$ *es una línea recta en el plano xy; pero T no es lineal porque T(x+y)= 2(x+y)+3 = 2x +2y +3 y Tx+Ty = (2x+3)+(2y+3) = 2x+2y+6. Las únicas transformaciones lineales de R en R son funciones de la forma f(x) = mx para algún número real m. Así, entre todas las funciones cuyas gráficas son rectas, las únicas que son lineales son aquellas que pasan por el origen. En álgebra y cálculo una* ***función lineal*** *con dominio R está definida como una función que tiene la forma f(x) = mx + b. Así, se puede decir que una función lineal es una transformación de R en R si y sólo si b (la ordenada al origen) es cero.* ☺

- En ambientes escolares de ingeniería es común tener aproximaciones a la noción de linealidad, como la que se transcribe a continuación

  Se establece que un sistema es lineal, cuando cumple con los dos criterios siguientes[11]:

  1. Si una entrada ***x*** *al sistema produce una salida* ***x****, entonces una entrada* ***2x*** *producirá una salida* ***2x****. Esto es, la magnitud de la salida del sistema es proporcional a la magnitud de la entrada del sistema.*

  2. Si una entrada ***x*** *produce una salida* ***x****, y una entrada* ***y*** *produce una salida* ***y****, entonces una entrada* ***x+y*** *producirá* ***x+y****. En otras palabras, el sistema maneja dos entradas simultáneas de manera independiente y esas no interactúan en el sistema. Esos criterios implican el hecho que un sistema lineal no producirá frecuencias de salida, que no estén presentes en la entrada.*

  Observen que no hay nada en estos criterios que diga que la salida del sistema es la misma que la entrada, o que la salida se parece a la entrada.

[11] Linealidad, definición; http://www.dliengineering. .com/vibman-spanish/definicindelinealidad.htm

Por ejemplo la entrada podría ser una corriente eléctrica y la salida podría ser una temperatura. En el caso de estructuras mecánicas como máquinas consideraremos la entrada como una fuerza vibratoria y la salida como la vibración medida.

- Barrera (2007) al ejemplificar las aplicaciones de matrices y sistemas de ecuaciones que tienen lugar en ingeniería y otras áreas, al emplear la ley de Hooke en un problema de deformación de vigas, se emplea la proporción directa con un carácter *paramatemático* y la noción de linealidad al no ser explicita juega un estatus *protomatemático*:

Supongamos que se tiene una viga elástica en la que se aplican pesos de magnitudes W_1, W_2,…., Wn en los puntos P_1, P_2,…, P_n respectivamente (ver la figura 2.1). Denotemos por y_i a la magnitud del desplazamiento del punto P_i por la acción de las cargas. Supongamos que la viga obedece a la ley de Hooke (nota al pie de la página del texto original: *La ley de Hooke establece que la magnitud de la deformación de un cuerpo elástico bajo la acción de una fuerza F, es directamente proporcional a la magnitud de F, para materiales elásticos. De acuerdo con dicha ley, el peso W_j produce un desplazamiento igual a d_{ij} W_j en el punto P_i, en donde d_{ij} es una constante que depende de las propiedades de elasticidad de la viga y de la distancia del punto P_i al punto P_j.*

de estas consideraciones se tiene que y_i es la suma de los desplazamientos originados por cada uno de los pesos, es decir, se tiene:

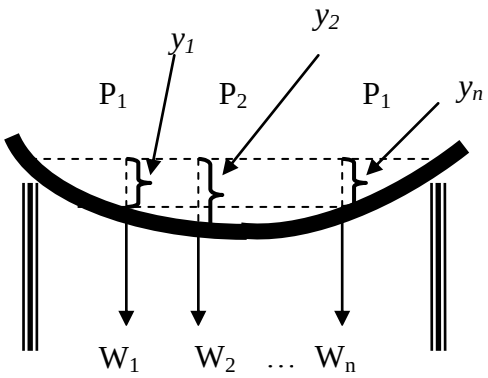


Figura 2.1. *Deformación de una viga bajo la acción de n cargas.*

$$y_i = d_{i1} W_1 + d_{i2} W_2 + \ldots\ldots + d_{in} W_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.2)$$

En forma matricial las ecuaciones 2.2 se pueden escribir como:

$$DF = Y, \text{ en donde } Y = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \quad y \quad F = \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{matrix} \qquad (2.3)$$

A la matriz D se le llama la matriz de flexibilidad y sus columnas se interpretan de la siguiente forma.

Supongamos que en el punto P_i se aplica un peso unitario y en los restantes puntos el peso es cero, entonces $F = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$ *, por lo que*

$$Y = \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & \ldots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{ni} \end{bmatrix}$$

El significado de la ecuación anterior es que la columna i-ésima de la matriz D representa la deformación cuando se aplica un peso unitario en

el punto P_i, es decir, un peso unitario aplicado en el punto i produce desplazamientos d_{1i}, d_{2i}, ...,d_{ni} en los correspondientes puntos P_1, P_2, …,P_n.

Cuando D tiene inversa, conociendo los desplazamientos y_1, y_2,… , y_n se pueden conocer los pesos W_1, W_2, …, W_n que actúan sobre la viga, pues de la ecuación $DF = Y$ se obtiene $F = D^{-1}Y$. Las columnas de D^{-1} se interpretan como sigue.

Cuando de toma un desplazamiento de una unidad en el punto i-ésimo y cero en los restantes, se tiene $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$*, por lo que al efectuar el producto $D^{-1}Y$, el resultado es la columna i-ésima de D^{-1} cuyas entradas son las magnitudes de los pesos W_1, W_2,…, W_n que producen un desplazamiento de una unidad en el punto P_i y cero en los restantes.*

También en el mismo texto (Barrera, 2007), se plantea una aplicación de las leyes de Kirchhoff junto con la ley de Ohm para circuitos eléctricos, siendo los sistemas de ecuaciones lineales un medio para la solución de tales problemas. Basándose en que la ley de Ohm, que dice que el voltaje (V) es directamente proporcional a la intensidad de corriente (I) que circula en un conductor.

$$V \alpha I,$$

Lo que se traduce en la expresión de la ley de Ohm,

$$V = R I,$$

Donde la constante de proporcionalidad es la resistencia (R). Se presenta el problema determinar la intensidad de corriente que circula en cada rama de un circuito, que contiene resistencias, donde hay caídas de potencial y pilas con un determinado voltaje (diferencia de potencial). Al aplicar las leyes de Kirchhoff para los voltajes, se forma un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. (Barrera, 2007)

En la misma sección del texto mencionado, también se abordan, un problema de distribución de temperaturas en placas delgadas, y otro sobre conservación de bosques. En el primero se busca encontrar la temperatura en puntos internos de la placa; y en el segundo se pregunta por el número de hectáreas por explotarse por unidad de tiempo, por región y por especie de árbol. Ambos también se resuelven mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

- En el estudio de las ecuaciones diferenciales, Granville (2005) inicia mencionando que una ecuación diferencial es aquella que contiene derivadas o diferenciales. Además menciona la clasificación de las ecuaciones diferenciales, siendo un tipo la ecuaciones diferenciales lineales:

La ecuación diferencial lineal de primer orden en ***y*** *es de la forma*

(B) $$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

siendo P y Q funciones de x únicamente, o constantes.

Asimismo, la ecuación

(C) $$\frac{dx}{dy} + Hx = J,$$

siendo H y J funciones de y constantes, es una ecuación diferencial lineal.

Para integrar (B), hagamos

(7) $$y = uz,$$

en donde z y u son funciones de x que deben determinarse. Derivando (7),

(8) $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo en (B) los valores dados por (8) y (7), el resultado es

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + Puz = Q, \text{ o sea,}$$

(9) $$u\frac{dz}{dx}+(\frac{du}{dx}+Pu)z=Q.$$

Ahora determinamos u integrando la ecuación

(10) $$\frac{du}{dx}+Pu=0$$

en donde las variables x y z son separables. Empleando el valor de u así obtenido, hallamos z resolviendo la ecuación,

(11) $$u\frac{dz}{dx}=Q,$$

en donde x y z pueden separarse. Evidentemente, los valores de u y z así obtenidos satisfarán (9), y la solución de (B) se da entonces por (7).

Además la forma lineal es el referente para reducir a ecuaciones no lineales:

Algunas ecuaciones no lineales pueden reducirse a la forma lineal mediante una transformación apropiada. Un tipo de tales ecuaciones es

(D) $$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^{n},$$

siendo P y Q funciones de x únicamente o constantes. La ecuación (D) puede reducirse a la forma lineal (B) del tipo II por medio de la sustitución $z=y^{-n+1}$. *Pero tal reducción no es necesaria si resolvemos la ecuación según el método que se dio para el tipo III."*

En esta cita la significación de lo *lineal* está dado por el grado uno de la derivada de mayor orden. Además se resalta que el procedimiento para reducir las ecuaciones no lineales está fundado en la forma lineal.

- Dentro de los temas de Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, se aborda la transformada discreta de Fourier (O'Neil, 2008)

DEFINICIÓN 3.9 Transformada discreta de Fourier de N puntos

Sea N un entero positivo. Sea $u = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$ *una sucesión de N números complejos. Entonces la N transformada discreta de Fourier de N puntos de u es la sucesión* $DFT_N(u)$ *definida por*

$$DFT_N(u)_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi ijk/N}$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Para simplificar la notación, se usa una convención utilizada con la transformada de Laplace y se denota la transformada discreta de Fourier de N puntos de una sucesión ***u*** *por* ***U*** *(con minúscula para la sucesión dada de N números y mayúscula de la misma letra para su transformada discreta de Fourier de N puntos). En esta notación, si* $u = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$, *entonces*

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi ijk/N}$$

También se abrevia la frase "transformada discreta de Fourier" por TDF…

La noción de linealidad aparece como una propiedad de la transformada discreta de Fourier:

3.7.1 Linealidad y periodicidad

Si $u = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$ *y* $v = \{v_j\}_{j=0}^{N-1}$ *son sucesiones de números complejos y* ***a*** *y* ***b*** *son números complejos, entonces*

$$au + bv = \{au_j + bv_j\}_{j=0}^{N-1}.$$

La linealidad de la TDF de N puntos es la propiedad:

$$D[au + bv](k) = aU_k + bV_k .$$

Esto se sigue inmediatamente de la definición de la transformada, ya que

$$D[au + bv](k) = \sum_{j=0}^{N-1} (au_j + bv_j) e^{-2\pi ijk/N}$$

$$= a\sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi ijk/N} + b\sum_{j=0}^{N-1} v_j e^{-2\pi ijk/N} = aU_k + bV_k .$$

También en el tema Propiedades de las integrales complejas se muestra la noción de linealidad (O'Neil, 2008):

10.2.2 Propiedades de las integrales complejas

Desarrollará algunas propiedades de $\int_{\Gamma} f(z)dz$.

TEOREMA 10.2 Linealidad

Sea Γ *una curva suave a pedazos y sean* ***f*** *y* ***g*** *continuas en* Γ. *Sean* α *y* β *números complejos. Entonces*

$$\int_{\Gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z)dz + \beta \int_{\Gamma} g(z)dz. \blacksquare$$

Al igual que para la multiplicación de una matriz por un vector explicada como una combinación lineal, la noción de *linealidad* presenta el estatus *paramatemático*, esta es el instrumento para establecer la propiedad de linealidad de la transformada discreta de Fourier y de evidenciar que la integral compleja cumple con la misma propiedad.

En este apartado, se han presentado los diferentes estatus didácticos que tienen los significados de linealidad, esto es su naturaleza, protomatemática, paramatemática, matemática y metamatemática. Estos estadíos se han "rescatado" de los objetos matemáticos estudiados en los libros de texto, de uso común en el bachillerato universitario

(Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo) y licenciatura (Carreras de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo) seleccionados.

La organización de los significados, en función de su estatus didáctico, deberá ser un elemento a considerar en el diseño curricular de matemáticas, desde educación elemental, hasta la licenciatura. Ello también tendría implicaciones a considerarse para el futuro diseño de secuencias didácticas.

4.3 EN LIBROS DE TEXTO DE ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

La toma de decisiones es un tema vigente y valioso en el ámbito del funcionamiento de as organizaciones actualidad es una dificultad a resolver en diversas organizaciones. Un medio científico para la elección de alternativas adecuadas es la denominada Investigación de Operaciones[12], siendo la Programación Lineal (PL) uno de sus campos. El problema de la PL, cuando el problema es susceptible de modelarse linealmente, consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una expresión lineal, sujeta a ciertas condiciones que son aproximadamente lineales, dadas por el propio problema. Entonces la respuesta a la proposición depende de la resolución de dichas condiciones, representadas por un sistema de desigualdades lineales, optimizando la expresión lineal que representa el beneficio de una cantidad.

Citando textualmente a Draper y Klingman (1976), matricialmente el problema se puede escribir como:

> *... como*
>
> $$\textit{Maximice } \boldsymbol{Z = CX}$$
>
> $$\textit{sujeta a } \boldsymbol{A\,X \leq B}, \qquad \boldsymbol{X \geq 0}$$

[12] Conjunto de métodos cuantitativos que permiten argumentar la toma de decisiones.

donde ***C, X*** y ***B*** son vectores y ***A*** es una matriz m × n. En paralelo, un problema de programación lineal para minimizar, lo enuncian:

... como

$$\textit{Minimice } \boldsymbol{Z = CX}$$

$$\textit{sujeta a } \boldsymbol{A\,X \geq B}, \qquad \boldsymbol{X \geq 0}$$

Las gráficas de desigualdades lineales en dos variables otorgan un medio para mirar el espacio de soluciones factibles y la operación del método de solución al problema de la PL.

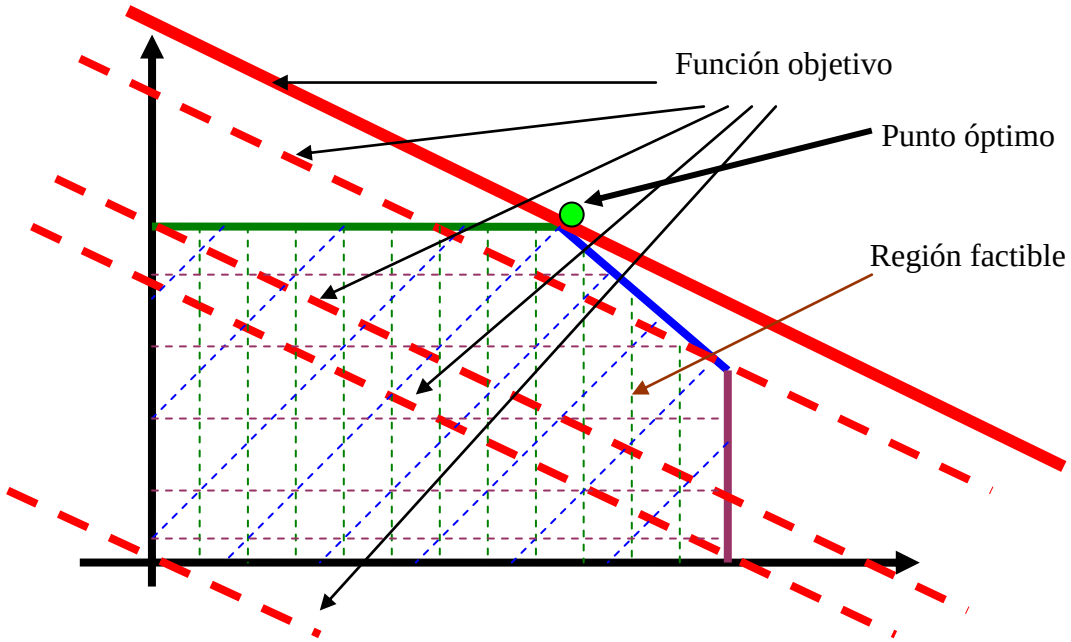


Fig. 1

Conservando la pendiente y cambiando la ordenada al origen de la llamada función objetivo, o sea la expresión lineal que representa el beneficio, el vértice "más extremo" de la región factible[13] es el punto donde se halla el óptimo.

En este apartado se muestra que la noción de *linealidad* adopta un estatus didáctico protomatemático, ya que en el Modelo de la Programación Lineal, no es objeto de estudio, ni instrumento para el estudio de algún concepto en particular, sino que naturaleza permanece subyacente en esta temática de la Investigación de operaciones.

4.4 EN LA QUÍMICA ESCOLAR

En la estequiometria (del griego *στοιχειον* = stoicheion (elemento) y *μετρον* = metrón (medida)), tema común de la química básica (Hogg, J., Bickel, Ch., Nicholson, M. y Wik, (1970); O'Connor, R. (1976); Garzón, G. (1986)), se efectúa el cálculo de las relaciones cuantitativas entre reactivos y productos en el desarrollo de una reacción química. Estas relaciones se pueden deducir a partir de la teoría atómica, y en ello se emplea la proporcionalidad directa.

En 1792 Jeremías Benjamín Richter (1762 – 1807) escribió:

> *La estequiometria es la ciencia que mide las proporciones cuantitativas o relaciones de masa en la que los elementos químicos que están implicados*[14]

En una reacción química hay una modificación de las sustancias presentes: los reactivos se gastan para originar los productos. En este proceso hay una modificación de los enlaces entre los átomos, por el movimiento de los electrones, dándose la ruptura y la formación de enlaces, pero la cantidad y tipo de átomos se conserva (Ley de la conservación de la masa: *En una reacción química, la masa de los reactivos es igual a la masa de los productos*),

[13] Es el polígono formado por la intersección de las desigualdades lineales y el cual se ubica en el primer cuadrante del plano cartesiano.

[14] Concepto de Estequiometría, acuñado por Richter (1762 – 1807).
http://es.wikipedia.org/wiki/Estequiometr%C3%ADa

esto es se mantienen durante el proceso tanto el número de átomos de cada elemento químico, como la carga total.

Una ecuación química, como representación escrita de una reacción química, debe reflejar lo que pasa durante su transcurso, respetando la ley de la conservación de la materia, para ello se anota delante de cada sustancia un número llamado coeficiente estequiométrico que indica la proporción de cada sustancia involucrada (que puede ser el número de moléculas, átomos, iones o moles, esto es, la cantidad de materia que se consume o se forma). Por ejemplo, en la combustión del metano (CH_4) reacciona con oxígeno molecular (O_2) del aire, para formar bióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O). La reacción sin balancear es:

$$CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

Esta ecuación aun no cumple con la ley de la conservación de la masa, para ello se balancea la reacción. Se puede efectuar por tanteos o mediante algún método específico, uno de ellos el método algebraico, consiste en el planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones simultaneas de primer grado, donde se consideran tantas ecuaciones como elementos químicos participan en la reacción (Acosta, 1999)

Para la reacción de combustión del metano, se buscan las x_i que balancean la ecuación:

$$x_1\, CH_4 + x_2\ O_2 \rightarrow x_3\, CO_2 + x_4\, H_2O$$

Elemento	Símbolo químico	Ecuación lineal
Carbono	C	$x_1 = x_3$
Hidrógeno	H	$4x_1 = 2x_4$
oxígeno	O	$2x_2 = 2x_3 + x_4$

Originando un sistema lineal de tres ecuaciones y cuatro incógnitas (consistente indeterminado):

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 \quad\quad &= 0 \\ 4x_1 \quad\quad\quad - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 \; - 2x_3 \; - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Hay múltiples soluciones, pero la menor eneada que equilibra la ecuación, es la de los coeficientes estequiométricos $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 2)$:

$$1CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow 1\ CO_2 + 2\ H_2O$$

La proporcionalidad se emplea en problemas del tipo:

Si reaccionan 32 g. de metano con suficiente oxígeno, ¿cuantos gramos de agua se obtienen?

Empleando los coeficientes estequiométricos, se sabe que

1 peso molecular de metano (16g.)	→	*Producen*	→	*2 pesos moleculares de agua 2(18g.)=36g.*

32g de metano	→	*¿Cuánto producirán de?*	→	*agua*

Esto se mira como una proporción directa:

$$\frac{16\,g}{36\,g} = \frac{32\,g}{peso \quad agua} \qquad peso \quad agua = \frac{(32g)(36)}{16} = 72g$$

En otros términos si se emplea el doble de masa de metano de lo que indican los coeficientes estequiométricos, se obtendrá el doble de masa de agua de lo que indica su coeficiente estequiométrico.

En este tema, que es común en los cursos de Química General del Bachillerato (Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo), las proporciones cuantitativas de las sustancias, empleadas en el balanceo de una reacción química, la proporción manifiesta como regla de tres, adopta un estatus *paramatemático.*

4.5 REFLEXIONES DIDÁCTICAS

Desde la perspectiva de este trabajo se considera a la noción de *linealidad* como un elemento fundamental en la construcción del saber matemático. Esta noción cumple una función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada. Se tienen evidencias vistas desde los libros de textos, de los diferentes estatus didácticos (protomatemático, paramatemático, matemático y metamatemático) que se manifiestan por los diversos significados de las nociones de linealidad y proporcionalidad, situación que ha generado ciertas incongruencias conceptuales, que en cierto sentido representan obstáculos epistemológicos. Se busca precisar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate epistemológico de los significados de la noción de linealidad, posibilita su resignificación en la Didáctica de la Matemática (Rondero, et. al. (2008)).

Por otra parte, se desprende un elemento de análisis de carácter didáctico en referencia a lo que propicia incongruencias conceptuales y sobre la forma en que se instalan las nociones de proporcionalidad y linealidad, desde la matemática elemental a la matemática avanzada, al no hacer explicitas las filiaciones entre ambas nociones, lo que a su vez repercute en la articulación del *corpus de saberes* que constituyen al Álgebra lineal, lo que incide directamente en su aprendizaje, al ser obstáculos los mismos significados de la linealidad.

Una primera incongruencia que se puede resaltar es la que se da entre la proporcionalidad directa y la función lineal, al tratar de generalizar la proporcionalidad $y = \frac{b}{a}x$, a una nueva forma dada por la llamada función lineal $f(x) = ax + b$, con $x \in \Re$, es decir hay una ruptura de lo proporcional a lo lineal, en el sentido de la aparición del término independiente en la expresión de la función.

Otra incongruencia se presenta al abordarse desarticuladamente la función lineal, ya que cuando $b \neq 0$, no cumple con la correspondiente definición de transformación lineal

$$T(c_1x + c_2y) = c_1T(x) + c_2T(y),$$

dado que sólo la función $f(x) = ax$, es la que satisface esta definición (Golubitsky, M. y Dellnitz M. B., 2001).

Una incongruencia conceptual que se puede remarcar es la que se refiere al tratamiento de vectores en R^n, linealmente dependientes. Para el caso de vectores definidos en *R*, son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal, $c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} = 0$ se cumple para $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$. En este caso realmente se verifica para dos vectores cualesquiera en R, o sea que siempre son linealmente dependientes. Un aspecto didácticamente rescatable es el que refiere a como se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Como se puede ver de la definición anterior, se cumplen las proporcionalidades directas, $\overline{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\overline{v_2}$ siempre y cuando $c_1 \neq 0$, o bien $\overline{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overline{v_1}$, siempre y cuando $c_2 \neq 0$. Este argumento usualmente no se discute en la matemática escolar y por tanto se deja de instalar en los estudiantes esta noción de la linealidad que como se puede mostrar es un eje conceptual transversal en toda la matemática, además de no jugar el papel paramatemático que debería. Por supuesto al trabajar con el espacio lineal *R*, se debe entender que se están trabajando vectores colineales entre sí.

Precisamente al generalizar a espacios vectoriales en R^n, con $n > 1$, es posible analizar como se relacionan en este caso la proporcionalidad y la dependencia lineal. Los *n* vectores $v_1, v_2, ..., v_n$, son linealmente dependientes si y sólo si, la combinación lineal,

$$c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + ... + c_n v_n = 0,$$

se cumple cuando al menos uno de los coeficientes es distinto de cero.

En tal caso para un $c_k \neq 0$, se tiene que,

$$v_k = -(\frac{c_2}{c_k})v_2 - (\frac{c_3}{c_k})v_3 - .... - (\frac{c_{k-1}}{c_k})v_{k-1} - (\frac{c_{k+1}}{c_k})v_{k+1} - .... - (\frac{c_n}{c_k})v_n,$$

se presenta una generalización de la proporcionalidad para el caso de $\Re^n$, con $n>1$, lo que se interpreta que cuando los vectores son dependientes linealmente entonces hay una forma de representar un vector en términos de los otros, o bien debido a que se presenta este tipo de proporcionalidad, es posible expresar un vector como una combinación lineal de los otros.

El enunciado anterior se podría expresar, mediante una "nueva operación", en la siguiente forma matricial generalizada, en donde se muestra claramente como se puede interpretar la dependencia lineal en términos de una relación de proporcionalidad.

Esto es,

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}) \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_{n-1}} \end{pmatrix} = \overline{x_n}$$

O bien, en forma más breve se puede representar por medio de la expresión,

$$\alpha \bar{x} = \bar{v}$$

Por último, otro tipo de incongruencia conceptual se da en el caso de los operadores lineales que generan a su vez a las ecuaciones diferenciales lineales como puede ser el caso, $L = aD + b$ donde *D* es el operador derivada *d/dx*, *a* y *b* son constantes reales.

Una ecuación diferencial lineal de primer orden se genera al operar *L* sobre una función *y(x)*, es decir,

$$L\,[y(x)] = (a\,D + b)\,[y(x)] = a\,D\,[y(x)] + b\,[y(x)] = ay' + b\,y,$$

la cual puede ser homogénea o no homogénea, según se iguale a *cero* o a *g(x).*

Cabe señalar que en este caso, la linealidad se centra precisamente en el operador y no en alguna de las variables que intervienen en la propia ecuación diferencial. Esta característica de linealidad se ve reflejada a la hora de encontrar la solución general ψ_g de una ecuación diferencial lineal no-homogénea, dada a su vez como combinación lineal de la solución

general ψ_h de su correspondiente ecuación diferencial lineal homogénea y la solución particular ψ_p de la ecuación diferencial lineal no-homogénea, esto es,

$$\psi_g = \psi_h + \psi_p.$$

Se considera una *incongruencia conceptual* a la ruptura epistemológica de algunos significados de objetos matemáticos vinculados a las nociones, lo cual se manifiesta en la didáctica. En este apartado sólo se ha dado cuenta de algunas de tales incongruencias.

Por otra parte, desde otro punto de vista, dentro de las reflexiones didácticas cabe mencionar el vínculo entre la noción de *linealidad* con algunas de las ecuaciones de la recta que presentan los libros de texto. Se aprecia que tal noción en la didáctica del nivel superior no es explícita desde las distintas representaciones analíticas de la recta en el plano.

Con la ecuación $y=mx+b$, donde $m= tan\ \alpha$ y α es el ángulo de inclinación con respecto al eje x, se inicia la enseñanza de la recta en el bachillerato (Lehmann, 2001). Las ecuaciones mismas representan un obstáculo en la interpretación del concepto de transformación lineal $L(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})=aL(\mathbf{u})+bL(\mathbf{v})$, de lo cual Golubitsky y Dellnitz (2001) afirman que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. La forma $ay=bx$ representa una transformación lineal, sin embargo *la ecuación pendiente ordenada al origen* no lo es como ya se dijo anteriormente (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008). Ello no se aclara en el nivel medio superior, y como consecuencia, esta vaguedad sobrevive hasta los cursos iniciales de licenciatura.

Desde el enfoque geométrico, se puede trazar una recta uniendo dos puntos diferentes, siendo esta única; y existe sólo una recta que pasa por otro punto distinto que es paralela a la primera. La noción de linealidad tiene conexiones estrechas con la noción de paralelismo, sin embargo tal circunstancia no se hace explícita en la escuela. Tampoco se explica el vínculo conceptual entre la proporcionalidad, la linealidad y dependencia lineal como ya se dijo antes.

En los primeros semestres de licenciatura se aborda, aunque de manera aislada con respecto al tema de *la recta* del nivel medio superior, la ecuación $ax+by=0$ conociendo dos puntos

(x_1,y_1) y (x_2,y_2) por medio del determinante *3 x 3* igualado a cero: , pero

ello no se articula, ni con la proporcionalidad, ni con la dependencia lineal, lo cual auspicia un referente matemático escolar pobre en significados.

Por otra parte, para el aprendizaje de los conceptos de *recta tangente*, *derivada* y *diferencial* del *corpus* del Cálculo diferencial (Edwards y Penney, 1997) son indispensables las aproximaciones lineales. Sin embargo en la didáctica escolar no se agregan dichos elementos, privilegiando lo algorítmico y memorístico.

En el Cálculo multivariable (Stewart, 1999) cuando se trata la forma vectorial de una recta en R^2 especificando su dirección y uno de sus puntos; se tiene que, si $\boldsymbol{u}= (a, b)$ es un vector no nulo diferente de cero, el punto $P_0= (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{w}_0$ el vector asociado con P_0, y $\boldsymbol{x}$ el vector asociado al punto $P(x, y)$. La recta L que pasa por P_0 y es paralela a $\boldsymbol{u}$ consiste de los puntos $P(x,y)$, tal que $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}_0+t\boldsymbol{u}$. Este objeto matemático se denomina *la ecuación paramétrica de la recta*. Dicha representación en términos de sus componentes está dada por $x=x_0+ta$, $y=y_0+tb$, donde t es un parámetro al que se le puede asignar cualquier número real. De lo anterior despejando t de ambas ecuaciones, e igualándolas se obtiene la *ecuación simétrica de la recta*: —— —— . Para obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0=(x_0, y_0)$ y que contiene el vector no nulo $\boldsymbol{n}=(a,b)$, se emplea el producto punto $\boldsymbol{n}\cdot P_0P=0$, donde $P(x, y)$ está en la recta y donde $P_0P= (x-x_0, y-y_0)$, por lo que $\boldsymbol{n}\cdot P_0P=a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ (Kolman y Hill, 2006).

La forma paramétrica conecta las nociones de paralelismo y dependencia lineal, y representa el movimiento de una partícula por la trayectoria rectilínea. Aunque esta manera de presentar la ecuación de la recta tampoco se vincula de manera clara con la linealidad en la didáctica. Ello representa un obstáculo para el entendimiento de su definición, tanto como mapeo lineal como transformación lineal.

Hay diferentes temas de matemáticas que se explicitan mediante ecuaciones de rectas, como *Polinomios de Lagrange*, *Métodos de aproximación*, *Convexidad*, entre otros, dando variantes a los puntos de vista sobre la *noción de linealidad*. Sin embargo en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados (Acosta, Tarasenko y Rondero, 2010), ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior.

Es necesario continuar con la búsqueda indicios del vínculo entre las ecuaciones de la recta en el plano, con los significados que presenta la noción de *linealidad*, para contribuir en un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar.

A través de sus significados, la noción de *linealidad* es un elemento de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica transversal conceptual entre la matemática elemental y la matemática avanzada.

Se han mostrado algunas rupturas y filiaciones epistemológicas de la noción de linealidad las cuales tienen implicaciones conceptuales de carácter cognitivo y didáctico.

El problema del aprendizaje de la noción de linealidad en ambiente escolar, es un fenómeno complejo, en virtud de los estatus (estados) didácticos (protomatemático, metamatemático, paramatemático y matemático) que adoptan sus significados, además de la naturaleza epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural del fenómeno. Se han caracterizado los estados didácticos de la noción, además de algunas incongruencias conceptuales que se presentan en su aprendizaje, en ciertas áreas de la matemática como pueden ser el Álgebra lineal y las Ecuaciones diferenciales.

Es posible identificar el fenómeno didáctico a partir de sus estatus y de las incongruencias conceptuales en relación a otras nociones matemáticas, lo cual puede incidir en su aprendizaje.

El rescate epistemológico, de las nociones matemáticas, como el de la *linealidad*, aporta elementos que pueden repercutir en la puesta en escena de algunos de sus significados, en distintos momentos de la trayectoria escolar (Rondero, et. al. (2008)).

CAPÍTULO V

LO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO DE LA LINEALIDAD

5.1 ESCENARIOS HISTÓRICOS Y LA EVOLUCIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA NOCIÓN DE LINEALIDAD

En base a la identificación de algunas filiaciones y rupturas epistemológicas de la noción de *linealidad* en la historia de la matemática se determinaron cuatro escenarios históricos, donde cada uno tiene una cierta relevancia para el desarrollo de la investigación, aunque no necesariamente es la única clasificación. El primero se remonta a las culturas ancestrales egipcia, china y babilónica, donde el cobro de impuestos se calculaba por medio de la proporción directa y la progresión aritmética. En el segundo, se toma como referencia principal a autores clásicos de la cultura griega, quienes emplearon a la noción de proporcionalidad como elemento epistemológico de construcción de muchos de sus resultados.

El tercer escenario, se caracteriza por ser una época en donde se presenta un enlace conceptual entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad, donde Fermat y Descartes, dieron pleno sentido a los trabajos de Apolonio sobre lugares geométricos.

El último escenario, parte del origen del Álgebra Lineal, cuyo sustento epistemológico está dado por la noción de linealidad, la cual genera conceptos tales como: dependencia e independencia lineal, rango, entre otros.

En la Didáctica de las Matemáticas, la linealidad aparece en los saberes escolarizados, desde la proporcionalidad directa, hasta el Álgebra Lineal, por lo que se cree que es a través de la articulación de saberes como se pueden explicitar las relaciones conceptuales de la linealidad. En este trabajo se considera a la linealidad como una noción que ha evolucionado en la historia, a partir de necesidades socioculturales de las épocas referidas. (Acosta et. al. (2008)).

5.2 PRIMER ESCENARIO HISTÓRICO

La matemática anterior a la griega, en particular la babilónica y la egipcia, habrían de alcanzar un alto grado de desarrollo de la habilidad operatoria, para abordar todo tipo de problemas de la vida cotidiana, desde la repartición de una herencia, hasta el cálculo de interés compuesto. La aritmética babilónica funcionaba para hacer cálculos astronómicos y

mercantiles, o lo relacionado con áreas y volúmenes, donde esta último está inmiscuida la proporción directa (Filloy, 1998).

En la cultura egipcia, no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dan elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde *a*, *b* y *c* son conocidas y *x* desconocida. Se puede resaltar como lo señala Boyer (1991) refiriéndose al trabajo del escriba Ahmes, que aparece en el *Papiro de Rhind,* en donde se muestra la solución de este tipo de ecuaciones, empleando un método que en nuestros días se conoce como el *método de la falsa posición*.

Hay un libro clásico en la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* (Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático) de la dinastía Han (206 AC – 220 DC) (Struik, 1986), en el cual aparecen porcentajes y proporciones en el Capítulo II: *Mijo y arroz*. Por su parte, en el Capítulo III: *Distribución por progresiones,* se presentan problemas de aplicación de impuestos a productos de cualidades diferentes; así como aplicaciones de "la regla de tres" y de progresiones aritméticas y geométricas. El Capitulo VI: *Aplicación imparcial de impuestos*, trata del cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población. En el Capítulo VII: *Excesos y deficiencias* se ocupa fundamentalmente de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos (García, 2000).

La noción de proporcionalidad aparece en ambas culturas, en el cálculo del cobro de impuestos y en aspectos geométricos en el cálculo de áreas y volúmenes. Por su parte, la noción de linealidad, surge incipientemente desde que se trabajan las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, usadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

5.3 SEGUNDO ESCENARIO HISTÓRICO

En referencia al segundo escenario, la noción de linealidad aparece explícita o implícitamente, cuando Euclides hace mención de la recta en todos sus postulados. En su conocido libro, *Los Elementos*, escrito hacia el año 300 AC, presenta los conocimientos de la Grecia clásica, deduciéndolos a partir de cinco postulados, siendo los referidos a la recta de manera directa:

1. Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.

2. Toda recta se puede prolongar indefinidamente.

> *5. Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.*

Euclides emplea el primero de ellos, no sólo en el sentido de que por dos puntos pasa una recta, sino además de que ésta es única.

> *… tal unicidad era el noveno de sus axiomas. Es verosímil que este axioma esté intercalado, y algunos consideran que debe colocarse entre los postulados, complementando al primero. El cuarto postulado, que pudiera parecer algo oscuro a una mentalidad moderna, es usado por Euclides en el sentido de que cualquier ángulo recto puede superponerse sobre cualquier otro.* (Postulados de Euclides, 2007)

Hacia 370 a d C Eudoxio de Cnido (408? – 355?) (Hofmann, 2002) ahonda en las ideas de Anaxágoras, tomando a la geometría antigua como un caso particular

> *... Parte del axioma de las medidas (dos magnitudes no pueden formar una razón si la menor de ellas no puede hacerse más grande que la mayor mediante su multiplicación por números enteros) y define indirectamente al igualdad de dos razones a: b y c : d exigiendo que al elegir dos números dados cualesquiera m y n resulte siendo m a*

menor o mayor o igual a *n B sea m c* menor o mayor o igual a *n d.*

Euclides emplea la proporcionalidad directa, donde relaciona el área del círculo con el cuadrado de su diámetro para inferir el área comprendida dentro de la circunferencia (Hofmann, 2002)

> *... Como ejemplo demostrativo, sirve (según Euclides, Elementos XII, 2) la proporcionalidad del área del círculo f al cuadrado de su diámetro , d^2.*

> *Al inscribir en las circunferencias correspondientes f y f′ sus polígonos regulares semejantes de manera que* $f_n < f$ *y* $f_n' < f'$*, entonces resulta que* $f_n : f_n' = d^2 : d'^2$*. Siendo f no proporcional a* d^2 *sino, por ejemplo* $f_n : f_n' = (f - \varepsilon) : f'$ *(*ε *es una superficie menor que* f_n*), se podría entonces mediante una duplicación continuada del número de lados conseguir que* $f_n : f - \varepsilon$*, de modo que* $f_n' > f'$*, lo cual se opone a la construcción primaria.*
>
> *Análogamente se puede rechazar la suposición* $f_n : f_n' = f : (f' - \varepsilon')$*, quedando solamente la posibilidad* $f : f' = f_n = f'_n\ d^2 : d'^2$*. De igual manera demuestra Eudoxio la proporcionalidad del volumen de la esfera al cubo de la arista igual al diámetro de aquella y corrobora la exactitud de la determinación del volumen de la pirámide y del cono llevada a cabo por Demócrito.* (Hofmann, 2002)

Gran parte de lo que en nuestros días se conoce como matemática pre-euclidiana, se debe a las menciones de Aristóteles acerca de la matemática elemental de se época (Hofmann, 2002)

> *... La observación aristotélica de que lo recto no se deja fundamentalmente comparar con lo curvilíneo, se desarrolla, entre sus comentadores, - hemos de citar, ante todo, a Averroes (1126-1198) – hasta alcanzar las proporciones de un verdadero dogma, que hace aparecer la rectificación de las curvas en general como algo imposible.*

Remontándose al siglo III a d C hay referencia de linealidad en una carta que dirige Arquímedes a Eratóstenes donde resalta que ha recogido algunos resultados matemáticos a través de medios mecánicos, para después demostrarlos geométricamente. Siendo la base de sus demostraciones, la teoría de las razones y proporciones de Euclides. Al respecto Torija (1999) menciona:

La base teórica está formada por la teoría de las razones y las proporciones entre magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes, que componen un sistema ordenado y cumplen las propiedades de suma, resta y multiplicación… Se dice que 'dos magnitudes guardan entre si una razón si, al ser multiplicada, una puede exceder a la otra'. Basándose en los Elementos de Euclides se determina cuándo una magnitud es igual o mayor que otra. Arquímedes añade expresamente el siguiente postulado: "de dos magnitudes desiguales, la mayor excede a la menor en una cantidad tal que, añadida sucesivamente a sí misma, puede exceder a cualquier magnitud determinada del mismo tipo que las comparadas. (Torija, 1999)

En el primer postulado del primer libro Sobre la esfera y el cilindro en Torija (1999), Arquímedes, da la definición de recta, más empleada hasta nuestros días.

1. La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.
2.De dos líneas convexas que unen dos puntos situados en el mismo lado de la recta que los une, y donde una de las cuales envuelve a otra, la envolvente es la de mayor longitud…

Por otra parte Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión

Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, 1999)

Dicho de otro modo el volumen de la esfera es directamente proporcional al diámetro elevado al cubo[15]. En cuanto a la proporcionalidad directa entre las dos cantidades, el

[15] El volumen tiene una dependencia lineal con el diámetro al cubo y una dependencia no lineal con el diámetro

volumen y el cubo del diámetro, existe una dependencia lineal, en el sentido de que si aumenta el cubo del diámetro, también hay un incremento del volumen, y el aumento es constante, esto es por ser magnitudes del mismo tipo, en este caso ambas de dimensión tres:

(Volumen de la esfera) α (cubo del diámetro)

$$V = k\, d^3$$

En distintos contextos encontramos este vínculo de proporcionalidad directa. En la Física, se estudia que la aceleración que se imprime a un cuerpo sin considerar el rozamiento, depende de la magnitud de la fuerza que se le aplique:

(Fuerza) α (aceleración)

$$F = m\, a$$

Donde m es la masa del objeto y matemáticamente es la constante de proporcionalidad.

En la ecuación de Einstein

(Energía) α (masa)

$$E = c^2\ m$$

donde c^2 es el cuadrado de la velocidad de la luz y juega el papel de constante de proporcionalidad.

La linealidad está encajada en los procesos de proporcionalidad directa, y esto se palpa en resultados ancestrales y ha representado un elemento de análisis y descubrimiento, tal es como el aportado por Arquímedes, al trabajar de la forma que lo había hecho Euclides.

5.4 TERCER ESCENARIO HISTÓRICO

En el tercer escenario, coincidente con la etapa denominada por Hofmann (2002) *Periodo Culminante del Barroco*, Descartes (1596 – 1650) funda el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, siendo su meta un método de investigación que permita ir de lo complejo a lo sencillo, y de las hipótesis a la evidencia y a la claridad. Persigue la unión empezada, pero no terminada por Viète, del Álgebra con la Geometría (Hofmann, 2002)

> *... Descartes agrega a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida. En la Geometría de 1637 considera, después de haber introducido un segmento unidad, cada segmento como un número (transformación de la geometría en aritmética), pudiendo de este modo, al sustituir el principio de la homogeneidad de la suma hasta entonces tenido por sagrado, por razones geométricas, expresar siempre la suma, diferencia, producto y cociente de dos segmentos por otro segmento y considerar también como tal cada combinación de un número reducido de las cuatro operaciones... Descartes sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con compás y regla, considerándolos como problemas del plano (denominación de Apolonio)... Ya en 1628 distingue entre soluciones reales (= positivas) y falsas (= negativas).*

También en 1628, Descartes interpreta a la ley descubierta por Galileo como $v = g\ s$ *(en vez de* $v = g\ t$*)* (Hofmann, 2002)

> *Aquí menciona ya los infinitesimales, pero los rechaza. En 1637, Descartes acepta el dogma de Aristóteles de la incompatibilidad de lo rectilíneo con lo curvo, y lo expresa en esta forma: ninguna curva algebraica se deja rectificar; como ejemplo de lo contrario da la rectificación algebraica de una curva trascendental, es decir, de la espiral*

logarítmica, explicándola con la trayectoria isogonal de los rayos que pasan por un solo punto (1638).

En el siglo XVII, hay un florecimiento de la matemática, en el sentido de la unificación de conocimientos nuevos, a partir de trabajos antiguo, esto es, Fermat y Descartes toman lo obtenido por Apolonio de Pérgamo (262? - 190? a d C), desde su escrito *La Cónica*, establecen la unificación geométrica - algebraica de la recta, proponiendo su ecuación (Hofmann, 2002):

En su empeño de dar pleno sentido a los trabajos antiguos sobre lugares geométricos, se le ocurrió a Fermat, como a Descartes, de cuyas obras no conocía nada entonces, determinar la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x. Ya da a la recta que pasa por el origen, la forma $b\,x = a\,y$ *y considera* $a\,x + b\,y = c$ *como la ecuación de una recta en su forma general y la amplía al problema del lugar geométrico de Apolonio, reconociendo que* $\sum a_i x + b_i y + c_i = d$ *es la ecuación de una recta.*

Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola a los lugares geométricos que hoy conocemos, se le atribuye la hipótesis de las orbitas excéntricas o teoría de epiciclos para intentar explicar el movimiento relativo de los planetas y de la velocidad cambiante de la luna, entre otras cosas (Hofmann, 2002):

De los demás escritos de Apolonio se han conservado únicamente las secciones proporcionales (en traducción árabe); nos es conocido únicamente por referencias de Pappo (aprox. 320 d. de C.). La Sección proporcional, la Sección espacial y la Sección determinada se refieren esencialmente a las propiedades de series de puntos proyectivos. Las Intercalaciones se refieren a los problemas de este tipo que se pueden lograr con compás y regla, tratándose de curvas directrices que se

> *pueden construir con líneas rectas. En los Lugares geométricos planos se tratan lugares geométricos rectilíneos y circulares, apareciendo en el fondo principios de la teoría de las inversiones.*

Las líneas rectas han jugado un papel preponderante para generar conocimiento matemático, desde la antigüedad.

5.5 CUARTO ESCENARIO HISTÓRICO

El cuarto escenario, ubicado a partir del siglo XVIII, es donde se da el inicio incipiente del Álgebra Lineal, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de n ecuaciones con m incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Posteriormente se incorporan conceptos como matrices, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Todo lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad.

Como se señaló con anterioridad, ya se conocían métodos de solución en las culturas ancestrales china, egipcia y babilónica. Sin embargo, uno de los primeros ejemplos significativos de su tratamiento analítico, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. Aunque esto no era tan significativo para los matemáticos de la época, pues no ofrecía nuevos métodos de solución, lo novedoso fue la aproximación descriptiva y cualitativa de su estudio.

Las pruebas de Euler se basan en técnicas de eliminación y sustitución. El criterio de dependencia es el hecho de que las incógnitas permanecen indeterminadas. Proporciona una conclusión para cualquier n:

> *Cuando se sostiene que para determinar n cantidades desconocidas basta con tener n ecuaciones que expresan su información propia, hay que*

> *añadir allí la restricción de que todas las ecuaciones sean diferentes entre ellas, o que no haya ninguna que esté contenida en otras.* (Euler (1750), citado en de Dorier (2000); traducción libre)

En términos actuales significa que las ecuaciones son linealmente independientes, pero de manera cauta, Dorier (2000) afirma que Euler refiere como un *accidente* el hecho de que las cantidades desconocidas permanecen indeterminadas, aunque que provienen de las relaciones lineales de las ecuaciones, por lo que la tarea inicial en esa época es resolver el sistema de ecuaciones. El enfoque de Euler va hacia el ajuste de ecuaciones, en tanto el concepto de dependencia lineal es más general, válido para una gran cantidad de objetos. A la inclusión de una ecuación en otra Euler, citado por Dorier (2000) le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX. Esta explicación del caso excepcional de dependencia inclusiva en sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, fue un cambio en el punto de vista en la aproximación de ecuaciones lineales.

Finalmente, se puede decir que Euler no propuso ninguna aproximación teórica de la dependencia lineal, pero sí enfatizó ciertos hechos intuitivos que tendrían implicaciones importantes en esa dirección.

En siglo XVIII, Cramer publicó un tratado titulado *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques.* Este documento es el primero donde aparece una notación para la escritura de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes no específicos. Aunque en 1693, Leibniz había escrito una carta con contenidos semejantes, la cual se publicó por primera vez en 1850. En el libro de Cramer se presenta una regla para obtener la solución de sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, como función de sus coeficientes, empleando lo que ahora se conoce como determinantes. A partir de este trabajo los determinantes han sido ampliamente utilizados y constituyen un tópico importante de las matemáticas, de modo tal que la teoría de los determinantes ha constituido un marco indispensable para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Cabe señalar que la aproximación intuitiva de Euler, no permaneció con tanta influencia como los determinantes en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (citado en Dorier, 2000).

El concepto de rango, empezó a tomar forma dentro de la Teoría de determinantes entre 1840 y 1879, siendo algunas de las dificultades en su conceptualización a las que se enfrentaron los matemáticos las siguientes:

> *1. el reconocimiento de su carácter invariante que era, si no invisible, al menos asumido sin la necesidad de la prueba.*
> *2. la posibilidad de la misma definición de dependencia entre ecuaciones y n-uplas.*
> *3. La anticipación del concepto de dualidad y la consideración de todos los sistemas de ecuaciones que tienen el mismo juego de soluciones.* (Traducción libre de Dorier, 2000)

En referencia a Frobenius, se puede decir que es de los primeros autores en definir en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal simultáneamente para ecuaciones y n–uplas, vinculándolo con el concepto de dependencia inclusiva ya mencionada. Al considerar a las ecuaciones y a las n-uplas como la misma clase de objetos en cuanto a la linealidad. Frobenius da un gran aporte hacia el concepto moderno de vector. Define el concepto de base de las soluciones e incorpora la noción de *sistema asociado* a un sistema dado, esto es, que un sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes son los componentes de los elementos de cualquier base de soluciones del sistema inicial.
Propuso una forma diferente de los procesos que devienen desde la época de Cramer. Ya no hubo una separación arbitraria entre incógnitas principales y secundarias, y ecuaciones, pero sobretodo el concepto de dependencia lineal reemplazó el término de dependencia inclusiva, acuñado por Euler. Fue hasta 1879 que Frobenius llamó al rango como el orden máximo del menor no nulo, (Dorier, 2000).

5.6 REFLEXIONES DE LO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

Esta aproximación histórico-epistemológica, sobre las nociones de proporcionalidad y *linealidad*, proporciona evidencias de su evolución conceptual a partir de las necesidades

sociales y culturales imperantes en los escenarios establecidos. Se rescatan elementos epistemológicos que en principio es posible incorporar a la didáctica de la matemática.

Se ha mostrado a partir del señalamiento histórico planteado, la existencia de filiaciones y rupturas epistemológicas entre los significados de las nociones de *linealidad* y proporcionalidad en los escenarios citados. En la didáctica tradicional no se hace explícita la articulación de los significados que van teniendo las nociones conforme un estudiante avanza en el currículo escolar. El mismo análisis epistemológico revela una desarticulación entre los significados de las nociones de proporcionalidad y linealidad, al considerar distintas eras en la historia. Por otro lado se ha reflejado en el aprendizaje de conceptos asociados a las nociones, motivo del presente trabajo, problemáticas de aprendizaje, posiblemente debido a la manera en como se ha puesto en escena la noción, desde la matemática elemental. Esta problemática también se hace evidente en las transformaciones metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad mostrada por medio de los libros de texto empleados en los siglos XVIII XIX y XX. (Gómez (1999), apartado 3.5 de esta tesis)

Por otra parte en el cuarto escenario donde se plantea el origen del Álgebra Lineal no es patente la presencia de la noción de proporcionalidad directa, ya que la solución de los sistemas de ecuaciones lineales, dio pauta para su desarrollo, y posterior fundamento matemático en la teoría de espacios vectoriales. Entre, la didáctica escolar vigente y el desarrollo histórico de las ideas asociadas a la proporcionalidad y linealidad, se manifiesta cierto paralelismo funcional, pero no exhaustivo (no es un paralelismo absoluto).

Es posible diseñar secuencias didácticas en donde se involucren articulaciones conceptuales explícitas y con intencionalidad didáctica, que vinculen conceptualmente los significados de la proporcionalidad y las relaciones funcionales lineales.

CAPÍTULO VI

LA LINEALIDAD Y LO SOCIOCULTURAL

6.1 ASPECTOS SOCIOCULTURALES Y LA ENSEÑANZA DE LA LINEALIDAD

Se considera de gran relevancia para la presente investigación algunas aproximaciones teóricas que dan luz acerca de la influencia que ha tenido lo *sociocultural* en el origen de las ideas vinculadas a los significados de la noción de linealidad, su repercusión en la forma en que un individuo lo aprende y los hechos didácticos derivados de esto.

A partir de la perspectiva de este trabajo es relevante tanto el medio sociocultural, como los instrumentos de mediación para la autoformación y evolución de los procesos psicológicos superiores como son el pensamiento, la capacidad de análisis–síntesis, la argumentación, la reflexión o la abstracción, entre otros (Vigotsky, 1977). Se piensa que dichos procesos psicológicos superiores son los que llevan a la *cognición*[16] de los significados de la linealidad desde perspectivas didácticas y no didácticas. Además se cree que el proceso psíquico de internalización de los significados de la noción de linealidad es un proceso paulatino que sucede conforme un individuo "camina" por la escuela.

Por otra parte se sostiene que aunado al medio sociocultural y a los instrumentos de mediación, el pensamiento social (Guimelli, 2004) influye en la percepción que tiene un estudiante de los significados de la linealidad desde los hechos cotidianos de la vida diaria, tanto en la escuela, como fuera de ella. Esto refuerza la apreciación de que el aprendizaje de la matemática es un problema complejo, en virtud de su naturaleza eminentemente social.

Con tal complejidad del fenómeno educativo de la matemática, ha sido necesario tomar en cuenta algunos elementos del *enfoque socioepistemológico*, en el sentido del análisis sistémico de la noción de linealidad que pretende la propia tesis, al incorporar las dimensiones *cognitiva, epistemológica, sociocultural y didáctica.*

En particular se resalta que hay indicios históricos epistemológicos, del surgimiento de ideas "embrionarias" de *linealidad* como una construcción social (apartado 5.2 de esta tesis). Ello desde las ocasiones en que se hizo evidente la necesidad de administrar, cuando

[16] El concepto de cognición (del latín: *cognoscere*, "conocer") hace referencia a la facultad de los seres de procesar información a partir de la percepción, el conocimiento adquirido (experiencia) y características subjetivas que permiten valorar y considerar ciertos aspectos en detrimento de otros. El enfoque cognitivo ha insistido sobre como los individuos representan el mundo en que viven y cómo reciben información, actuando de acuerdo con ella. Se considera que los sujetos son elaboradores o procesadores de la información. http://es.wikipedia.org/wiki/Cognici%C3%B3n

algunos grupos humanos adoptan el sedentarismo, con la consecuente práctica de la agricultura. Ello impulsó el desarrollo del conocimiento técnico y científico, en particular para calcular los impuestos. Al parecer la matematización pragmática de la administración es un elemento sociocultural de referencia.

En otro tenor, también se muestran algunos elementos de un cierto paralelismo funcional (no estructural), entre el desarrollo de la noción de linealidad, en una persona y en lo histórico social de las civilizaciones, en relación al origen, entendimiento y empleo de sus significados matemáticos asociados. Tal corriente de pensamiento es el *Recapitulacionismo* el cual considera que el desenvolvimiento intelectual de nuestros estudiantes cruza en cierto sentido por los mismos tramos por las que ha surcado la humanidad (Furinghetti y Radford, 2002).

Por último, una visión de perspectiva transdisciplinar, la proporciona la Etnomatemática (D' Ambrosio, 2008) la cual trata de comprender el par saber – hacer matemático en el contexto de la historia de la humanidad a través de sus grupos humanos. D' Ambrosio afirma que ese saber – hacer matemático es influido por un contexto caracterizado por factores naturales y sociales propios de la cultura, y que en estudios sobre Etnomatemática de lo cotidiano se da un aprendizaje matemático, en labores de artesanos, médicos, tianguis, entre otros.

La noción de linealidad aparece en hechos sociales y culturales, de antaño y actuales, tanto en ambientes escolares y no escolares. Donde un rasgo característico es que son elementos que permiten explicar un fenómeno o que forman parte de la solución de un problema. Considerar tales acontecimientos en la didáctica, enriquece de manera considerable su proceso de aprendizaje en ambiente escolar.

6.2 LA "INTERNALIZACIÓN" DE LA LINEALIDAD

Según el enfoque aportado por Vigotsky (1977) (apartado 2.1.4 de esta tesis), para comprender el proceso de apropiación de operaciones socio-psicológicas desde las interrelaciones sociales es menester tomar en cuenta el fenómeno psíquico de *internalización*. Este fenómeno es el proceso que implica la transformación de fenómenos sociales en fenómenos psicológicos, a través del uso de herramientas y signos. Este proceso

de internalización revoluciona y reorganiza permanentemente la acción psicológica de los sujetos sociales y se manifiesta en un progresivo control, regulación y dominio de sí mismo, conducta que se evidencia en el ámbito sociocultural.

Vygotski define a la *Ley de la doble formación* o *Ley genética general del desarrollo cultural*, la cual dice que

> *... en el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: a nivel social, y más tarde, a nivel individual… Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones psicológicas se originan como relaciones entre seres humanos.*

Los *instrumentos de mediación* vinculan la aparición de las funciones, a nivel social y a nivel individual, siendo, el lenguaje (oral, escrito y el pensamiento) el más importante de estos instrumentos.

Esta relación dual denota la relevancia del medio sociocultural y de los instrumentos de mediación para la autoformación y evolución de los procesos psicológicos superiores como son el pensamiento, la capacidad de análisis–síntesis, la argumentación, la reflexión o la abstracción, entre otros.

A partir de la perspectiva de este trabajo, se considera que dichos procesos psicológicos superiores son los que han dando pauta a los significados de la linealidad. Las expresiones cotidianas acerca de la linealidad, en edades tempranas: "te vas aquí derechito", "la delimitación de este terreno es esta línea"; o cuando en el "Jardín de niños" el niño usa la proporcionalidad directa, al tener claro que con más dinero compra más chocolates, son manifestaciones que se originan a través de relaciones entre humanos. Al igual que en cuestiones mercantiles, al estimar el interés obtenido por una inversión, o la renta que se tiene que pagar en virtud de una deuda contraída. La argumentación y la reflexión que se "debiera propiciar" en el bachillerato o en el nivel superior, entre el profesor y los estudiantes, al graficar una línea recta sabiendo la ecuación pendiente-ordenada al origen; o en el estudio de regresión lineal al ajustar determinados datos; o en la argumentación para distinguir el comportamiento lineal del no lineal; y la reflexión-abstracción que se requieren

en aspectos como la modelación de un sistema lineal, sucede a un ámbito de interrelación humana.

Estos procesos son representativos del enfoque teórico-dialéctico de Vygotski, ya que se considera dialéctica al iniciar en la sociedad y después retorna a ella, pero en un estrato superior. Al respecto Vygotski afirma:

> *...la internalización de las actividades socialmente originadas e históricamente desarrolladas es el rasgo distintivo de la psicología humana. La base del salto de la psicología animal a la humana.*

Al recapitular, en el marco de la teoría Vigotskiana los procesos de interiorización son hacedores de la personalidad, de la conciencia individual y social. Son procesos fundamentales para el desarrollo de los procesos psicológicos superiores en el que participan los instrumentos de mediación, especialmente el lenguaje.

El proceso psíquico de internalización, envuelve una experiencia social (el lenguaje social cotidiano del niño de preescolar o escolarizado) que poco a poco se va transformando en lenguaje de usos intelectuales (el socio-lenguaje cotidiano del niño, se va transformando en pensamientos). Conforme se va dando este perfeccionamiento, el sujeto incrementa su autonomía o independencia con los objetos reales, concretos que empiezan a manifestarse mentalmente en su perspectiva abstracta.

En esta última fase de la internalización, al referirnos al ejemplo del lenguaje y del pensamiento, el niño tiene la posibilidad de hacer generalizaciones de una palabra o concepto, cuando lo logra, el lenguaje se ha sido interiorizado debido a que ahora su función ha sido modificada.

Según lo manifiesto la noción de linealidad inicia su *internalización*, desde la niñez, en la solución de problemas cotidianos, donde aparece el pensamiento proporcional cualitativo (Ruiz y Valdemoros, 2006, apartado 3.2 de esta tesis), con el empleo de procesos de pensamiento comparativos *más grande que, menor que, menos corto que*, etc. Después ya en el sistema escolar se enfatizar la enseñanza temprana de la razón y la proporción a partir de niveles cualitativos, con apoyo de recursos didácticos (figuras, dibujos y expresiones) para facilitar el desarrollo de patrones de percepción, en apoyo a los correspondientes

procesos de cuantificación. Estos son antecedentes conceptuales del pensamiento proporcional cuantitativo y de la propia linealidad. Streefland (1984a, pp.327-348, citada por Ruiz y Valdemoros, 2006), dice:

> *...que el pensamiento cualitativo evoluciona cuando hay un avance en el pensamiento y el niño puede incorporar más elementos para un análisis que le permita considerar distintos factores conjuntamente*.

En el sistema escolar de educación básica, se pone en escena a la proporción cuantitativa, como la igualdad de dos razones. Al respecto, Freudenthal (1983) (citado por Ruiz y Valdemoros, 2006, apartado 3.2 de esta tesis), interpreta a las razones internas, como relaciones dadas entre diferentes valores de la misma magnitud (precio con precio, distancia con distancia, tiempo con tiempo, etc.) y las razones externas como relaciones entre valores de diferentes magnitudes (tiempo con distancia, o litros de leche con precio, etc.). Al involucrar magnitudes iguales y diferentes le da un contexto cotidiano y social a la noción de proporcionalidad.

6.3 LA LINEALIDAD COMO PENSAMIENTO SOCIAL

Junto con el medio sociocultural y los instrumentos de mediación, se encuentra involucrado el pensamiento social asociado a las nociones de linealidad y proporcionalidad lo cual está en relación estrecha con los hechos socioculturales. Un estudiante del sistema escolar de cualquier grado, es un sujeto social que está influido por un discurso matemático. Algunos de los significados que tiene la noción de linealidad se vinculan con el pensamiento social que se le asigna, y no por ello es una forma deficiente del pensamiento formal. Guimelli (2004) caracteriza los denominados *sesgos cognitivos* como una forma de pensamiento, que influencia al sujeto social en el salón de clases y los caracteriza como *distorsiones, aberraciones, y otros errores de juicio que al parecer caracterizan el funcionamiento cognitivo del sujeto social.* Uno de los sesgos el *sesgo de la representatividad*, y como ya se dijo en esta tesis (apartado 2.1.5, al citar a Guimelli, (2004)) trata acerca de sobrevaluar la importancia de cierta información para sacar sus conclusiones. Es frecuente que los individuos prefieran usar atajos para llegar a soluciones rápidas y aceptables socialmente.

Esto se hace evidente cuando se presenta el obstáculo cognitivo en un niño al que se intenta explicar porqué en un metro lineal hay diez decímetros y en un metro cúbico hay mil decímetros cúbicos. En este caso el sujeto ingenuo prefiere hacer inferencias desde un razonamiento que lo lleva a reunir eventos estadísticamente independientes pero socialmente aceptables. A veces esto puede no entenderlo, en virtud del pensamiento ingenuo dado por un "sesgo cognitivo", donde no logra desprenderse del modelo lineal que había sido inmediato en sus experiencias cotidianas (De Bock et. al., 2007, apartado 3.2 de esta tesis).

En general el problema del aprendizaje de la noción de linealidad en ambiente escolar, es un fenómeno socialmente complejo, debido a su naturaleza *sistémica*, donde al menos intervienen las dimensiones, *epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural*. En la enseñanza institucionalizada, la noción de linealidad no se aborda bajo las filiaciones epistemológicas que se requieren para su aprendizaje en las diferentes etapas escolares. Su concepción en cada una de ellas, es percibida de manera aislada y sin conexión una de la otra, esto es, no se efectúa una articulación de la noción en el medio escolar de un estudiante, ya que el discurso escolar no lo propicia, ni tampoco el medio socio-cultural le exige a los estudiantes que hayan incorporado dichos saberes. Pero, se considera que esta problemática compleja, es consecuencia de menospreciar, tanto la naturaleza social de la matemática escolar y de la misma matemática, así como su repercusión en el sistema didáctico.

El aspecto social no implica solamente lo referido al hecho cotidiano de la vida, sino a las prácticas sociales surgidas por una necesidad humana por satisfacerse, lo que revalora a la matemática como un producto que permite satisfacer requerimientos de los grupos humanos, en un lugar y tiempo. Por lo que es de destacar que *el conocimiento no es una verdad absoluta ni preexistente, sino por el contrario la vivencia de las prácticas al interior de las comunidades hace que el saber*, en este caso el de la linealidad, *sea característico de los escenarios que los problematizan y les permiten su existencia* (Buendía, 2004).

6.4 PERSPECTIVA DE ESTE TRABAJO Y LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Esta tesis se encuentra influida por aspectos teórico metodológicos de la escuela mexicana de Matemática Educativa en México. Una de las corrientes de pensamiento vigente y muy dinámica de esta escuela es la llamada *Socioepistemología*. Esta es incluyente en el sentido de que aborda aspectos relevantes del fenómeno educativo de la matemática. Este enfoque de naturaleza sistémica contiene a las dimensiones *sociocultural, epistemológica, cognitiva y didáctica*, y sus interrelaciones entre ellas. Este trabajo incorpora a dichas dimensiones desde la perspectiva del análisis y del rescate epistemológico de la noción de linealidad, pero no es su propósito la identificación y caracterización de las prácticas sociales que las originan.

Aunque cabe mencionar, un tanto con este enfoque, que hay indicios históricos del surgimiento de ideas primitivas de *linealidad* como una construcción social. Se cree, que al momento que se hizo evidente la necesidad de administrar, cuando el ser humano después de ser nómada durante muchos años, se volvió al sedentarismo, surge la agricultura, con lo que se elevó el nivel de vida de la población en general, teniendo la necesidad de administrar recursos materiales y humanos, y de cobros fiscales. Ello, posiblemente fomentó el nacimiento de conocimiento técnico y científico, sobretodo para calcular los impuestos. Parece ser que la matematización pragmática de la administración para el pago de contribuciones al gobierno, en dicha época, representa un elemento sociocultural de referencia haciendo un símil a lo que hace Montiel (2005) al identificar a: la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor, como prácticas de referencia.

Se ha realizado un estudio bajo una perspectiva sistémica, a través de términos y conceptos vinculados a la *noción de linealidad* que aparecen en los ambientes escolares, y donde la idea germinal: *ratio mutabilitas constant*, aparece. Algunos de tales términos son: proporcionalidad, multiplicidad, línea, recta, lineal, linealidad, linealidad como propiedad de objetos matemáticos (por ejemplo en las propiedades de la integral indefinida, o del diferencial), dependencia e independencia lineal, modelo lineal.

6.5 EL RECAPITULACIONISMO Y LA LINEALIDAD

En esta investigación se considera la existencia de cierto paralelismo funcional, no estructural, entre el desarrollo individual de la noción de linealidad y su desarrollo histórico social, en cuanto al surgimiento, comprensión y uso de conceptos matemáticos asociados. Esto es que el crecimiento intelectual de un individuo compendia los estadios evolutivos de la sociedad. Esta corriente de pensamiento llamada *Recapitulacionismo* considera que la ontogenia[17] recapitula la filogenia[18] en relación al aprendizaje de la matemática. Los métodos y verdades matemáticas se han obtenido en diversos países y culturas a través de procesos complejos, donde se han dado errores y retrocesos. Esto es fructífero desde la dimensión epistemológica, y puede emplearse pedagógicamente. Detrás de un concepto hay una postura epistemológica, la cual condiciona el pensamiento y la interpretación del desarrollo histórico de conceptos. El estudio del pensamiento pertenece a la psicología, en cambio el desarrollo conceptual de la matemática corresponde al estudio histórico de las ideas. La recapitulación psicológica del desarrollo intelectual de nuestros estudiantes pasa en mayor o menor grado por las mismas etapas por las que ha atravesado la humanidad (Furinghetti y Radford, 2002).

El surgimiento de la noción de linealidad y sus significados en las etapas evolutivas de un sujeto parece que están en cierta correspondencia con el surgimiento y uso de los conceptos que se manifiestan en diferentes escenarios históricos (capítulo V de esta tesis). Esto es, la primera aproximación antecedente de la noción de linealidad que hace uso un niño de cuatro años es la proporción cualitativa, al establecer comparaciones del tamaño de objetos *mayor que* o *menor que* (Ruiz y Valdemoros 2006, apartado 3.2 de esta tesis), hecho que aparece datado en épocas tempranas de la humanidad, al apreciar la diferencia de talla entre una persona y un animal muy grande. Por su parte el uso de la proporción cuantitativa para

[17] "La ontogenia es la historia del cambio estructural de una unidad sin que ésta pierda su organización. Este continuo cambio estructural se da en la unidad, en cada momento, o como un cambio desencadenado por interacciones provenientes del medio donde se encuentre o como resultado de su dinámica interna". http://es.wikipedia.org/wiki/Ontogenia

[18] La filogenia (del griego: φυλον *phylon*: "tribu, raza" y γενεα *geneá*: "nacimiento, origen, procedencia") es la determinación de la historia evolutiva de los organismos. http://es.wikipedia.org/wiki/Filogenia

resolver problemas de estimaciones de interés simple con el propósito de pago de impuestos y en solución de problemas de primer grado con una incógnita como se marca en el *Papiro Rhind* escrito en 1650 AC (como ya se mencionó en apartado 5.2, al citar a Filloy, (1998)) presenta cierta correspondencia evolutiva del individuo al abordarse dicho tema en la escuela secundaria.

Struik (1986) refiere que el álgebra progresó de la aritmética, no sólo debido a que facilitaba cálculos prácticos de cierto contexto social, sino porque era el resultado de estudios realizados por grupos de elite sociocultural como los escribas en Egipto. El llamado *Papiro Rhind* contiene 85 problemas basados en un sistema decimal de numeración con signos propios, auspiciando una aritmética primordialmente aditiva, con propensión a reducir toda multiplicación a sumas reiteradas. No obstante lo elaborado y tedioso de los cálculos, el método fue practicado por miles de años. Muchos problemas eran sencillos y no iban más allá de una ecuación lineal con una incógnita, aunque también muestra un conocimiento de la suma de las progresiones geométricas. Esta secuencia hallazgos se repite en cierta forma en las secuencias didácticas contemporáneas, al transitar de procesos, aritméticos a los algebraicos en la educación secundaria; donde también hay un cambio de paradigma simbólico o semiótico, el transcurrir del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico.

La proporción directa localizada en libros de texto de aritmética, del siglo XVIII hasta los de nuestros días, como se describe Gómez (1999) (apartado 3.5 de esta tesis) en capítulos dedicados a la comparación de números, donde se abordaban razones y progresiones, muestra tal correspondencia, ya que: la regla de tres, la regla de compañías, la regla de interés, la regla de descuento, la regla conjunta, la regla de aligación y la regla de la falsa posición, tienen su razón de ser en la solución de problemas prácticos que se estudian en la escuela y el surgimiento histórico es precisamente por su uso en lo cotidiano del momento.

También en los últimos años de la educación secundaria se estudia la solución de una ecuación de primer grado $ax+by=c$, problemas con una incógnita y se resuelven sistemas de ecuaciones lineales simultáneas de dos incógnitas. Estos temas se estudian nuevamente en el primer año de bachillerato, donde se formulan problemas en contexto, vinculado con tales tópicos (Stewart, Redlin, y Watson, 2001).

Con una cierta analogía, desde el punto de vista histórico epistemológico, Descartes (1596 – 1650) funda el primer sistema matemático moderno. Persigue la unión empezada, pero no terminada por Viète, del Álgebra con la Geometría. En esta época se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de pares ordenados de números reales *(x,y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, *f(x,y)=0*) representado en un sistema de ejes cartesianos. La *linealidad* adopta representaciones, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita a su vez ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico (Como ya se mencionó en el apartado 5.4 de esta tesis).

Es pertinente mencionar que estas aportaciones se dan en pleno Renacimiento[19], donde surge la función lineal en el plano Cartesiano, propiciando otros significados asociados a la misma ecuación lineal. Ello en un sentido son sucesos socioculturales de esta época considerados como un parteaguas histórico y una *Revolución Científica*[20] de la propia matemática. En aquel momento Descartes y Fermat unifican a la Geometría con el Álgebra en la Geometría Analítica, y con su consecuente inmersión en el ámbito de funciones.

Los estudiantes de educación secundaria pasan por esta "revolución científica" al tener un cambio de paradigma en los temas que abordan en la escuela. Ellos trazaban rectas, circunferencias y elipses en educación primaria, sin tener en cuenta su ubicación en el plano, ahora trazan dichos lugares geométricos en un sistema de ejes coordenados, dando una localización precisa en R^2.

Por otra parte el Álgebra Lineal, inicia de manera incipiente desde el siglo XVIII con algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de *n* ecuaciones con *m* incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Posteriormente se incorporan conceptos como

---

[19] Renacimiento es el nombre dado al amplio movimiento de revitalización cultural que se produjo en Europa Occidental en los siglos XV y XVI. Sus principales exponentes se hallan en el campo de las artes aunque también se produjo la renovación en la literatura y las ciencias, tanto naturales como humanas. El Renacimiento es fruto de la difusión de las ideas del humanismo, que determinaron una nueva concepción del hombre y del mundo. http://es.wikipedia.org/wiki/Renacimiento

[20] Un concepto de la epistemología y la historia de la ciencia, expresado en la obra *La estructura de las revoluciones científicas* de Thomas Kuhn, como el momento en que la producción científica deja de reproducir los esquemas de la denominada *ciencia normal* y se produce un cambio de paradigma científico. http://es.wikipedia.org/wiki/Revoluci%C3%B3n_cient%C3%ADfica

matrices, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Todo lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad (apartado 5.5 de esta tesis).

En el ámbito escolar la teoría de sistemas de ecuaciones lineales, el estudio de los determinantes, matrices, rango de un sistema, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y en particular el concepto de transformación lineal $L(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})=aL(\mathbf{u})+bL(\mathbf{v})$, se aborda hasta el primer curso de Álgebra lineal (Kolman y Hill, 2006) en los primeros semestres de licenciatura. En referencia a ello Golubitsky y Dellnitz (2001) sostienen que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. Pero dicha noción se estudia en etapas escolares anteriores con otras formas y significados, los cuales están desarticulados con respecto a la definición formal.

La linealidad también aparece en los orígenes del cálculo infinitesimal donde Newton, interioriza que las trayectorias curvilíneas son la situación límite de trayectorias rectilíneas, llevada del problema del movimiento sobre la elipse, al movimiento sobre ciertos elementos infinitesimales (Cantoral R, Farfán R. 2004a). Al igual que el diferencial, que con dicho enfoque infinitesimal, se define como una función lineal. Estos aspectos se toman en cuenta en temas de la matemática avanzada o en la Física, donde por ejemplo se considera como un incremento infinitesimal, acentuando la linealidad más que la aproximación (Pulido, 1998).

Hay diversos temas de matemáticas que se explicitan mediante nociones y significados vinculados a la *linealidad*. Sin embargo, en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados (Acosta, Tarasenko y Rondero, 2010), ni se relacionan con temas afines del nivel medio superior.

En este apartado del trabajo se muestran algunos elementos que se establecen en este paralelismo entre lo histórico epistemológico y el desarrollo de la noción en situación escolar, tales que, a partir de esta investigación, lleve a ahondar más en resultados que favorezcan un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática del aula. Para tal propósito el rescate de los significados de la noción de linealidad en las etapas históricas permite aportar elementos para su aprendizaje en el ámbito escolar.

La *ontogenia* recapitula la *filogenia* de la ***Noción de linealidad***			Línea del tiempo
Historia y personajes	**Significado asociado a la noción**	**Etapa escolar donde se aborda**	
Épocas tempranas de la humanidad	Proporción cualitativa *mayor que, menor que*	Jardín de niños	
Civilizaciones, egipcia, babilónica y china (500 a. c.)	Proporción cuantitativa *interés simple*	Educación primaria	
Grecia (400 a. c.) Eudoxio de Cnido	Proporción cuantitativa *igualdad de dos razones*	Educación primaria	
Grecia (300 a. c.) Euclides	Concepto geométrico *recta*	Educación primaria	
Renacimiento Descartes y Fermat (Siglos, XVI y XVII)	La *recta* como lugar geométrico en un sistema coordenado	Educación secundaria y bachillerato	
Siglo XVIII, Euler Cramer	Solución[21] y propiedades de *sistemas de ecuaciones lineales*	Bachillerato y educación superior	
Siglo XIX, Cramer, Frobenius y otros.	Concepción de *rango*, *dependencia e independencia lineal*, *transformación lineal*	Educación superior	

[21] Ya se conocían métodos de solución en las culturas ancestrales china, egipcia y babilónica.

6.6 UNA VISIÓN ETNOMATEMÁTICA DE LA LINEALIDAD

Una visión del aspecto sociocultural del aprendizaje de la matemática, desde una perspectiva transdisciplinar, es la que proporciona la Etnomatemática (D' Ambrosio, 2008) que en su inicio ha intentado entender el binomio saber – hacer matemático durante la historia de la humanidad, en el contexto de grupos humanos, como naciones, pueblos y comunidades. D' Ambrosio afirma que ese saber – hacer matemático es influido por un contexto caracterizado por factores naturales y sociales propios de la cultura, y que en estudios sobre Etnomatemática de lo cotidiano se da un aprendizaje matemático, en trabajos de artesanos, en mercados ambulantes, cirujanos cardiólogos, comerciantes. Esto se propicia incluso hasta en los juegos de niños, como ejemplo, donde es común, o al menos lo era en la época de niñez del autor, en que se empleaban proporciones directas, a través del razonamiento multiplicativo (Como y a se mencionó en el apartado 3.2 de esta tesis, al citar a Singh (2000)), para el intercambio de canicas por su equivalencia[22].

> *… Marcelo de Carvalho Borba analizó la manera de cómo niños de la periferia se organizan para construir un campo de fútbol, obedeciendo, en escala, las dimensiones oficiales"* (D' Ambrosio, 2008)

El construir un objeto matemático a escala implica considerar una relación o correspondencia debida a las partes con el todo, dicho de otro modo es emplear la proporcionalidad directa, siendo esta nociones matemática de la que se "hecha mano" en primer término al momento de resolver problemas contextuales como es el mencionado.

En otra vertiente, el empleo de instrumentos de percusión, como parte de tradiciones de culturas autóctonas, es un contexto para estudiar las razones matemáticas. Pitágoras fue quien descubrió que existía una relación numérica entre tonos y se dio cuenta que la música, podía ser medida por medio de razones de enteros. Se sabe que el sonido producido al tocar una cuerda depende de la longitud, grosor y tensión de la misma y cualquiera de estas variables afecta la frecuencia de vibración de la cuerda. Pitágoras descubrió que al

[22] Un trébol (canica de cuatro hojas) equivale a cuatro vinos (canica translúcida de un sólo color), cinco tréboles corresponden a veinte vinos.

dividir la cuerda en ciertas proporciones era capaz de producir sonidos placenteros al oído. (Walt Disney. (1959). [Video])

> *…Un ejemplo muy interesante es la utilización de instrumentos de percusión, parte integrante de las tradiciones originarias de África. El ritmo que acompaña los instrumentos de percusión puede ser estudiado como auxiliar en la comprensión de razones"* (D' Ambrosio, 2008)

En el mismo ambiente familiar influido por la actividad profesional que tienen los padres, repercute en el desempeño de los hijos en la escuela.

> *… Buscando percibir la influencia que la profesión de los padres tiene sobre el desempeño de los hijos en la escuela, Adriana M. Marafon identificó prácticas matemáticas propias de la profesión del especialista en neumáticos.*[26 ,,23] (D' Ambrosio, 2008)

En otro tenor, un aspecto que ha motivado el surgimiento de conocimiento matemático, es el impulso de supervivencia y trascendencia de la especie humana.

> *… La realidad percibida por cada individuo de la especie humana es la realidad natural, acrecentada con la totalidad de artefactos y mentefactos (experiencias y pensamientos), acumulados por él y por la especie (cultura). Esa realidad, a través de mecanismos genéticos, sensoriales y de memoria (conocimiento), informa a cada individuo. Cada individuo procesa esa información, que define su acción, resultando en su comportamiento y en generación de más conocimiento. El cúmulo de conocimientos compartidos por los individuos de un grupo tiene como consecuencia compatibilizar el comportamiento de esos individuos y,*

[23] La referencia 26 citada por D' Ambrosio (2008) es: [Adriana César de Mattos Marafon: *A influência da familia na aprendizagem da matemática*, disertación de maestría, Instituto de Geociencias y Ciencias Exactas de la UNESP, Rio Claro, 1996]

> *acumulados, esos conocimientos compartidos y comportamientos compatibilizados constituyen la cultura del grupo* (D' Ambrosio, 2008).

En este sentido la agricultura fue una actividad económico social preponderante de los habitantes de los centros poblacionales de las grandes culturas ancestrales, asentadas en las márgenes de los grandes ríos (Nilo (Egipto), Tigris y Éufrates (Irak), Ganges (India), Yang tsé Kiang y Hoang Ho (China), entre otros). Dicha actividad tuvo gran influencia en la historia de las ideas, al reconocer las estaciones y celebrar su arribo, induciendo hechos de culto y religión. La matemática inicia la organización de esas necesidades y hechos cotidianos, que llevaron al desarrollo de ideas matemáticas que fueron esenciales en la construcción de conocimiento.

> *… Como nos cuenta Heródoto, la geometría fue aprendida de los egipcios, donde era más que una simple medición de terreno, teniendo que ver con el sistema de impuestos de las áreas productivas. …*

Esta visión Etnomatemática resalta la proporción que hay entre el área de un terreno de cultivo con el impuesto que se tenía que pagar por el. En esto también da cuenta de que un significado de la noción de la proporcionalidad tuvo su origen en una necesidad social manifiesta en dicha cultura ancestral.
El momento presente se muestra través de la interacción de la persona con su entorno, lo que D' Ambrosio llama comportamiento (práctica, hacer o acción):

> *... es el conjunto de explicaciones organizadas que resultan de una reflexión sobre el hacer*.

En general la Etnomatemática plasma como centro de su estudio al hombre, como persona completa, involucrada en una realidad, en continua interacción con su medio natural y sociocultural.

6.7 REFLEXIONES DE LO SOCIOCULTURAL ACERCA DE LA LINEALIDAD

En este capítulo se han considerado dos vertientes de la dimensión *sociocultural* en relación a los significados de la noción de linealidad, una acerca de su origen a partir de necesidades sociales modernas o de antaño, y otro sobre la importancia de lo social en el proceso de aprendizaje. El aspecto sociocultural, es una dimensión a considerarse en la explicación de las formas en que se propicia la construcción del saber matemático, todo lo cual incide en el proceso de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada.

En cuanto al origen de los significados de la noción de linealidad, desde las necesidades sociales, antiguas o modernas, están los enfoques *Socioepistemológico* y *Etnomatemático*. En la primera se retoma el enfoque sistémico y la relevancia de lo social en la construcción del conocimiento (apartado 6.3 de esta tesis); y en el segundo se trata de rescatar algunos elementos del origen del conocimiento que tienen origen las actividades de oficios y profesiones, en el contexto de comunidades, pueblos y naciones.

Por lo que respecta al aporte de lo social al aprendizaje, se tienen los enfoques *Vygotskiano* y *Pensamiento social* (Guimelli, 2004). El primero considera que los procesos de interiorización son elaboradores de la personalidad, de la conciencia individual y social. Los cuales son fundamentales para el desarrollo de los procesos psicológicos superiores en el que participan los instrumentos de mediación, especialmente el lenguaje. El segundo sostiene que una persona es un *sujeto* susceptible de tener un pensamiento social estructurado por la interacción con el medio en que se desenvuelve, lo cual es independiente de la formación intelectual que tenga.

En el proceso de aprendizaje de la noción de linealidad en la escuela contemporánea, resulta conveniente tomar en consideración lo *sociocultural*, aparte de las dimensiones, *cognitiva, epistemológica y didáctica*. Esto en tanto su génesis desde necesidades sociales modernas o de antaño y de su implicación en el proceso psíquico de internalización, donde una experiencia social paulatinamente va cambiando en lenguaje de usos intelectuales.

CAPÍTULO VII

EXPERIMENTACIÓN

7.1 CONSIDERACIONES DE LA EXPERIMENTACIÓN

A partir de hechos experimentales se efectúa un análisis acerca, del *contrato didáctico*[24] y de ciertos elementos involucrados en la *cognición* de los significados de la linealidad, tanto de estudiantes de los niveles medio superior y superior, como de profesores de los mismos grados del sistema educativo nacional. Como una forma de organizar la actividad científica y para cumplir el propósito de este apartado, se emplean algunos elementos de la Ingeniería didáctica (Artigue, 1995) por su estatus de metodología de investigación cualitativa.

Un primer elemento experimental consiste en una entrevista clínica colectiva[25] (Anexos 1 y 2) secuenciada que permita conocer los significados de la noción de linealidad que ponen en juego los sujetos (estudiantes o profesores) al momento de enfrentarse a un problema *geométrico* y otro de *rendimiento de capital*. Se lleva a cabo de manera grupal, con la intención de incorporar a un mayor número de estudiantes al debate de ideas, a través de las argumentaciones puestas en escena en el ámbito de discusión. Bajo estas características se pretende dar a esta entrevista una connotación social, donde en principio los participantes contribuyeran a la construcción del conocimiento dentro del ámbito del *contrato didáctico* en que han estado inmersos, para el caso que nos ocupa el de las *nociones de linealidad* y *proporcionalidad.* Esto permite tener un acercamiento a la concepción, realización y uso de conocimientos adquiridos con antelación en la escuela respecto de la *linealidad.*

Por otro lado, para determinar aspectos del contrato didáctico en relación a la linealidad, se aplicó un cuestionario a tres profesores, dos de nivel medio superior y uno de superior, y a un estudiante de licenciatura. La aplicación de este instrumento formó parte del curso: *El vínculo conceptual entre la proporcionalidad y la linealidad* del "Segundo Coloquio de Matemática Educatica", llevado a cabo del 11 al 14 de junio de 2008, organizado por el Área Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

El contenido del cuestionario son trece tareas, diez de ellas, se tomaron del instrumento diseñado y aplicado por Ruiz y Valdemoros (2006) a estudiantes de educación elemental. La onceava y doceava se basaron en preguntas que elaboraron De Bock, Verschaffel y

[24] *El conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro.* (Brousseau, 1980, cit. por Sarrazy, 1996; 86 en Ávila, 2001)

[25] En este trabajo se considera a la entrevista clínica colectiva como instrumento que permite precisar los saberes asociados a la linealidad derivados del contrato didáctico en que se han desenvuelto los entrevistados.

Janssens (1998), para distinguir entre un problema de variación directamente proporcional y otro de variación inversamente proporcional. La última tarea, tiene el propósito de mirar los elementos que los encuestados incorporan en la modelación, desde un problema escolar común (Ver Anexo 3).

Por otra parte, también se analizaron las estrategias que tienen los estudiantes de nivel medio superior y algunos de nivel medio, a través de las respuestas exitosas (resultado esperado) de un problema de trigonometría planteado en el concurso de la Olimpiada Estatal de Matemáticas 2009 en el Estado de Hidalgo, donde participaron alrededor de 1100 jóvenes, de los cuales alrededor del 80 % corresponde a nivel medio superior y el 20 % a estudiantes del nivel medio básico (secundaria). Ello para identificar los significados de la noción de linealidad que emplea el estudiante para resolverlo y determinar que tanto hace uso de las razones y proporciones.

En otro momento se solicitó resolver tal problema de trigonometría de la Olimpiada, a cinco profesores de nivel medio superior quienes participaron en el curso corto del "Tercer Coloquio de Matemática Educativa para Profesores" llevado a cabo del 9 al 11 de diciembre de 2009, en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Al analizar las respuestas escritas se identificaron diferentes estrategias que emplean los docentes al intentar resolver el problema.

7.2 PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA CLÍNICA COLECTIVA

En esta entrevista, que fue video grabada (el diálogo íntegro está transcrito en el Anexo 1), participaron cuatro estudiantes de licenciatura del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería (ICBI) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), Javier[26] de primer semestre de Sistemas Computacionales, Erick y Guillermo de segundo de la misma carrera e Iván de sexto semestre de Física y Tecnología Avanzada. Además como entrevistadores Carlos Rondero Guerrero y Juan Alberto Acosta Hernández.

Se planteó un problema de trigonometría, mediante el cual se pretende que los estudiantes afloren algunos de los significados en relación con la noción de linealidad en relación al

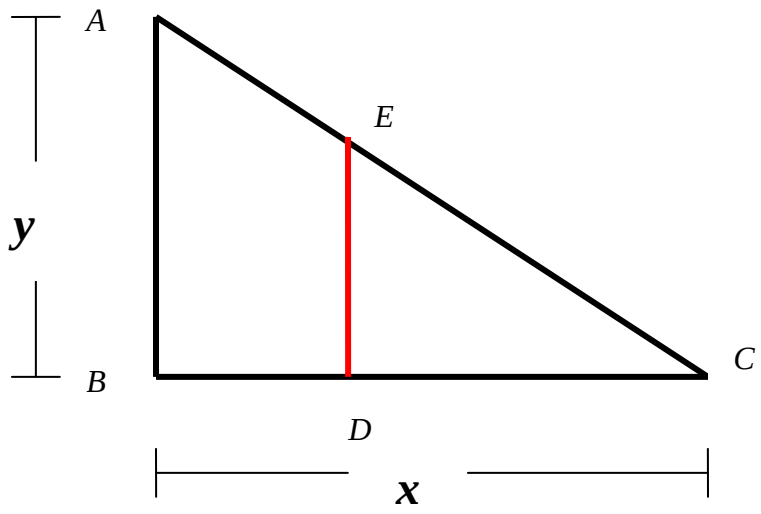
[26] Estudió hasta quinto semestre de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la UAEH

contrato didáctico al que han estado sujetos. Esto también permite analizar algunas de sus estrategias y concepciones al momento de reconstruir conocimiento en un ámbito social.

El marco de saberes a partir del cual se diseñó esta actividad, está basado en la recapitulación psicológica del desarrollo intelectual que se supone han tenido los estudiantes entrevistados al pasar por el *currículum de la noción de linealidad*[27] proporcionado por la escuela. Estos saberes son: razones y proporciones, semejanza de triángulos, razones trigonométricas, pendiente, recta y función lineal.

El problema planteado es:

> *Sean los triángulos ABC y EDC, considerando que DC = 4. y el segmento DE paralelo al segmento AB ¿Cuál es la expresión que permite calcular la longitud del segmento DE en términos de x e y?*



Al analizar la entrevista videograbada se identifican algunos escenarios. Uno es el geométrico, en el cual fue planteado originalmente el problema, donde esperábamos que identificaran los triángulos semejantes y plasmaran la igualdad de las dos razones dadas por los mismos triángulos. A partir de las preguntas y argumentaciones que fueron surgiendo en

[27] Se considera *Curriculum de la noción de linealidad* a los saberes vinculados a la proporcionalidad y a la linealidad que han sido enseñados en la escuela con antelación.

el transcurso de la dinámica, los escenarios, en el contexto de la geometría analítica, y el algebraico aparecieron posteriormente.

Lo primero fue que Iván, *ubica el vértice B del triángulo ABC, con el origen del sistema cartesiano, sin llegar descubrir alguna proporción.*

Reforzado por la figura se presume que su proceder fue porque los ejes cartesianos están dentro de su uso inmediato y cotidiano, debido al contrato didáctico al que han estado sujetos.

Javier, *identifica dos triángulos, sin hacer referencia explícita a su semejanza y manifiesta que el ángulo ACB es el mismo que el ángulo ECD, llamándole* θ*. Obtiene la tangente trigonométrica de ambos triángulos, igualando las dos razones:*

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{DE}{4}$$

las iguala:

$$\frac{y}{x} = \frac{DE}{4}.$$

Aunque Javier no le llama proporción, si iguala las razones y despeja *DE*, obteniendo el resultado esperado. Al parecer hasta ese punto de la entrevista sólo emplea a la proporción, pero no la identifica como tal. Esto sucede debido a que está empleando recursos trigonométricos y de Geometría analítica.

Dado que hasta ese momento en los argumentos no aparece la idea de proporción, los entrevistadores tratan de llevar al grupo al escenario de semejanza de triángulos, al preguntar

¿Alguien estaría pensando en proporcionalidad? En otras palabras si no ponemos en juego a θ *¿Habría otra manera de llegar a la misma relación?*

Javier dice

… se pueden usar las razones y proporciones ya que se basan en el mismo ángulo y que la semejanza de triángulos se basa en lo mismo;

además menciona que

Para que haya semejanza, los ángulos deben ser iguales o los lados proporcionales,

por lo que escribe

$$\frac{y}{x} = \frac{DE}{4}$$

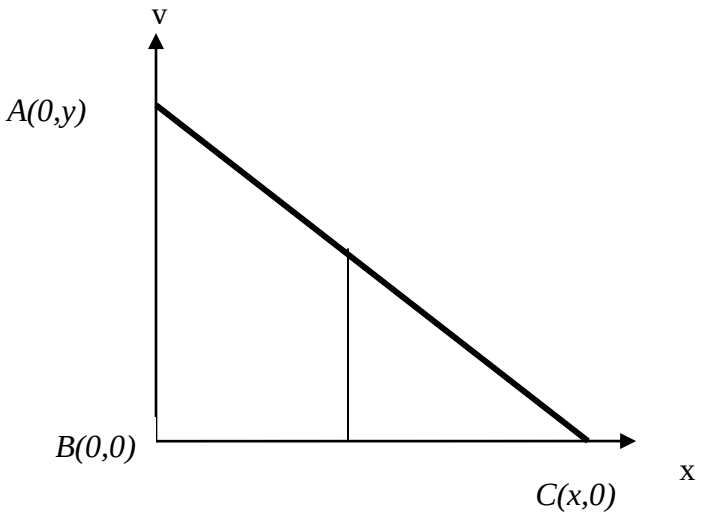
Con el propósito de desequilibrar las estructuras empleadas hasta el momento, al reconsiderar el primer intento, que había sido abandonado, por parte de Iván de anclar los triángulos al sistema cartesiano, se pregunta:

¿Qué característica verían aquí (se señala las hipotenusas de los triángulos semejantes)? ¿Habrá alguna relación con alguna de las características de la recta?

Javier identifica q*ue la pendiente de la recta que pasa por los puntos (0, A) y (C, 0) fijando el origen en B, es*

$$\frac{y}{x}$$

y además negativa.



Hasta ese momento se les indujo a reflexionar sobre algún significado que permitiera articular los saberes: *semejanza, proporcionalidad, recta y pendiente.* No surge el término *linealidad*, que era lo esperado, pero si se identifican cierta *constatificación* de magnitudes, como son: *el ángulo, la igualdad de dos razones y la pendiente*. Con ello empieza a surgir en las argumentaciones la *razón de cambio constante* como una característica intrínseca de la recta.

En el mismo escenario del plano cartesiano,
Erick, *hace la analogía con la recta a 45° que cruza el origen y cuya ecuación es y = x*

En este momento se manifiesta un vínculo conceptual, inducido entre la proporcionalidad, con la recta a 45° que pasa por el origen.
Al interrogar

> *¿Cuándo se trabaja con recta y pendiente, ustedes ven alguna proporcionalidad?*

Iván, *dibuja triángulos de diferentes tamaños, cuyas hipotenusas están a lo largo de una recta sobre el plano cartesiano, diciendo que esos triángulos tienen la misma tangente trigonométrica*

Aunque se cayó en la cuenta que los entrevistados consideran a la tangente trigonométrica como fórmula, más que como razón trigonométrica.

Con el propósito de motivar la reflexión de involucrar a la proporcionalidad, como parte inherente de la pendiente de la recta, se preguntó:

> *¿La recta, que tiene de característica en relación a su pendiente? ¿Dada una recta que la caracteriza?*

Iván comenta que *la proporcionalidad dada por la altura entre la base, y la pendiente de una recta, es la misma.*
En el mismo tenor, a la pregunta

¿En rectas distintas, que cambia?

Javier afirma que c*ambia la pendiente, cambia la proporcionalidad***.**
En este momento de la entrevista, se involucra a la función lineal, con la pregunta

¿Cuándo hablamos de recta estamos hablando de que función?

Javier responde f*unción lineal.*
Para tratar de vincular la proporción directa y a la pendiente con la función lineal en el plano, se pregunta

¿Qué caracteriza a esa función lineal?

Guillermo, responde que *un punto y la pendiente.*
Javier dice que e*l exponente de la variable.*

Se insiste en relacionar a la proporción directa y a la pendiente con la función lineal en el plano, cuestionando,

¿Cómo es esa pendiente?

Guillermo indica que *no cambia*

Los entrevistadores mencionan que la semejanza y proporcionalidad, como características geométricas, se transforman en algo analítico, al manifestarse la expresión algebraica de la recta que involucra a la pendiente. Al parecer los estudiantes no lo relacionan de manera directa. A lo que se cuestiona

> *¿Habían pensado en una relación entre semejanza, proporcionalidad, recta, pendiente?*

Guillermo menciona que *lo usamos día con día, pero no hay mucha conciencia de ello***.**

Erick, dice que a*l principio yo no habría pensado resolver el problema con la semejanza*

Javier comenta *al principio lo pensé como una sucesión de puntos, pero al ver el ángulo apliqué la tangente trigonométrica.*

Para propiciar la conclusión colectiva y cerrar esta parte de la entrevista, se formula una pregunta abierta

¿Les parece interesante esta perspectiva de lo que hemos estado discutiendo?

Javier responde que s*i porque esto sirve para agilizar la mente.*

Tomando en consideración el caso de no ser recta (señalando la hipotenusa del triángulo original) sino curva, con el propósito de fomentar la reflexión, se plantea el cuestionamiento

> *¿Emplearíamos los mismos elementos, esas proporcionalidades, semejanza?*

Iván dice que *habría cierta proporcionalidad aunque ya no sería la misma proporción, ye entre equis……. habría que ver como va cambiando DE*.

Un poco antes del final de la primera parte de la entrevista colectiva, los entrevistadores comentan que en toda la discusión está en escena *lo lineal*; y que esta noción está inmersa en conceptos tales como: *semejanza, proporcionalidad, recta, pendiente y función lineal.*
Para relacionar estos conceptos con el Cálculo infinitesimal, (se traza una curva y se señalan puntos en ella) y se pregunta

> *¿Qué pasaría con esa supuesta proporcionalidad en estos puntos (se dibuja una curva)? ¿Se seguiría conservando?*

Iván, responde que *ahora la pendiente en cada uno de esos puntos sería la derivada; la proporción sería la derivada.*

Finalmente se menciona que en esos casos la proporcionalidad ya no es constante.

Esta parte de la entrevista colectiva, deja entrever que los estudiantes participantes, están "anclados" al *contrato didáctico* por el que han transitado en la escuela. Además en el transcurso del evento no mostraron fluidez de concepciones y significados asociados a la *linealidad*. Se esperaba el surgimiento natural de dichos significados, esto es, que adoptaran el papel de sujeto epistémico, lo que implica que actuaran por razones intelectuales. Pero se comprueba que los entrevistados están fuertemente influidos por un contrato ligeramente didáctico o incluso no didáctico, en virtud de su actuar como sujetos que han dado respuesta a presiones de sus profesores (sujeto didáctico) (Ávila, 2001).

7.3 SEGUNDA PARTE DE LA ENTREVISTA CLÍNICA COLECTIVA

Esta etapa de la entrevista, que también fue video grabada (el diálogo íntegro está transcrito en el Anexo 2), se llevó a cabo en seguida de la primera parte. Participaron los mismos

cuatro estudiantes de licenciatura del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería (ICBI) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) y los mismos entrevistadores.

Se planteó un problema de *rendimiento de capital*, por ser un ámbito donde está contenida la noción de linealidad, como una noción paramatemática en un contexto sociocultural. Con este instrumento se pretende que los estudiantes muestren algunos de los significados de la noción de linealidad en un contexto pragmático, en relación al *contrato didáctico* al que han estado sujetos.

También se considera el vínculo muy cercano entre la razón y el lenguaje, lo cual se deberá inferir que lo expresado de forma oral representa en cierto sentido lo que está pensando el sujeto (Schopenhauer, 1987). El enfoque bajo el cual se diseñó esta actividad, está fundado en el sentido de uso práctico de la linealidad, un tanto oculto en la expresión del *interés simple.* Además también se pretende descubrir ciertos elementos de la dupla saber – hacer matemático en los estudiantes participantes bajo el esquema pragmático de este tema. Además se considera que hay un cierto paralelismo en el proceso de apropiación del conocimiento científico de un individuo y de su emergencia desde las necesidades sociales de, naciones, pueblos y comunidades. Por lo tanto se piensa también que el desarrollo intelectual de los entrevistados ha transcurrido por el *currículum de la noción de linealidad* brindado por la escuela.

Al inicio de la segunda parte de la entrevista, se explica de antemano que hay un capital inicial con un determinado interés por periodo de tiempo, aclarando que ese periodo de tiempo puede ser prefijado de antemano, a lo que se pregunta:

> *¿Cómo podemos identificar algo, una expresión matemática algo que nos permita calcular, lo que se llama a veces el monto, es decir, ese capital original?*
>
> *¿Cuanto ha ganado conforme ha transcurrido el tiempo y con una determinada tasa de interés?*

Como referente a la pregunta, se les dice que este es un problema antiquísimo, al que la humanidad se enfrentó hace ya muchos siglos y en muchas culturas, aunque no haya sido

estrictamente igual al planteado en esta entrevista. Se agrega que, pudo suceder que los gobiernos de civilizaciones ancestrales solicitaran un determinado impuesto al pueblo y si no lo pagaban en la fecha prevista, tendrían que erogar una cantidad extra. En este contexto del problema, se toma en cuenta que el dinero cambia de valor en el tiempo. Y que de forma análoga sucedería algo parecido, si alguno de los entrevistados le debiera al banco y por tanto esta institución cobraría dinero, por los intereses en virtud del préstamo. A las preguntas

¿Cómo obtengo el capital? ¿Cómo lo expreso? ¿Qué variables están en juego? ¿Cómo están interviniendo esas variables?

Javier identifica las variables: *capital inicial, el interés (positivo o negativo), los intervalos de tiempo, ya sean meses años semanas, días* y dice respecto a los intervalos: *no se pero como que eso podría influir, porque no sería igual fijarlo anual, a fijarlo por día.* Y agrega *entre más cercano sea el periodo de tiempo, como que va ir creciendo un poco más rápido por que se aplica más veces.*

Al respecto Iván cuestiona *¿si tengo este dinero, después de determinado tiempo me dan dinero porque lo tengo ahí?* Y agrega *¿ese que me dan se le suma?* A lo que se aclara inmediatamente que se tiene el capital inicial, una tasa de interés en un plazo.

Aquí Iván identifica dos maneras de obtener el "nuevo capital", cuando los intereses no se reinvierten y cuando si se suman al capital al final de cada periodo. Se aclara que el problema considera el caso en que los intereses no se reinvierten, aunque el hecho no sea eficiente financieramente, y se recuerdan las variables ya identificadas por Javier (*capital inicial, los periodos de tiempo y la tasa de* interés)

Javier propone la expresión $Cantidad(n)= C + n\ (i \cdot C)$), donde dice que es *la cantidad actual…al tiempo n*. Se les cuestiona

¿Cuánto tenemos en el banco después de n periodos de tiempo?

A lo que Javier dice *sería igual al capital inicial, lo que llamo C* y agrega *mas la cantidad de veces que se aplica el interés, por… el número de periodos de tiempo, por el interés multiplicando al capital inicial.*

En este momento de la entrevista el planteamiento del problema requiere reafirmarse a partir del diálogo ya que por ejemplo Guillermo dice: *si el interés se le pone al capital inicial y el interés que nos otorgan no genera intereses, entonces simplemente se va sumando, pero no afecta al capital inicial.* Entonces el mismo concluye: *pues sería el capital y la suma de los intereses, que se supone se van retirando,…*

Por otra parte Iván escribe en el pizarrón $C(t)= C_i + t(i \cdot C)$), y dice *el capital en determinado tiempo sería el capital inicial más t por los intereses.* Se aclara que el segundo término del miembro derecho es una tasa, y él mismo agrega: *es el porcentaje que me dan de intereses*. Y se pregunta

¿A quien se la aplicas?

Guillermo responde: *a la cantidad inicial*. Además se comenta que Iván emplea *t* para identificar periodos de tiempo y Javier usa *n* y se reescribe la expresión como $C_n = C_i + i\ C_0\ n$ y se corrige la expresión escrita en el pizarrón por Iván $C\ (t)= C_0 + t(i \cdot C_0)$) cambiando C_i por C_0 del primer término del segundo miembro, y *C* por C_0 del segundo término del miembro de la derecha. Con el propósito de que se identifique la naturaleza de *n*, se pregunta a Javier

¿n como varía?

Javier responde: *según los intervalos de tiempo, uno, dos, tres*. Pero Iván dice*…yo quería cambiar porque…hay que ver como cambia el interés en su tiempo porque por ejemplo… tal vez en un año me den el doce por ciento, pero que tal si yo quiero saber lo que me aumentó en medio año, entonces no me ayudaría saber cuantos ene uno o ene dos porque, ene me haría falta saber, me haría falta que pasara un año para saberlo.*

Se señala, que siendo cuidadosos, la expresión planteada por Javier, implica que la *n* es de tipo discreto, que en la expresión corregida que había escrito Iván al principio considera continua a *t* y además que C_0 es fija, en virtud de ello se pregunta

¿n es fija o variable? (escribe en el pizarrón n variable)

Se argumenta que *n* es variable y que *i* (el interés) es fijo. Con el propósito de vincular ambas partes de la entrevista, se cuestiona

¿Hay alguna relación de esto con lo que discutimos anteriormente?

Iván dice: *si porque es una ecuación de una recta*. Javier asevera *es una función lineal otra vez todo se estudia… respecto a una proporción, en este caso la proporción estaría dada por el interés, si se varía el interés la proporción aumenta o disminuye dependiendo… si es mayor o menor el valor.*

Desde la construcción de argumentos fundados en el problema de la ganancia financiera, partiendo de un capital inicial y una tasa de interés fijo, se identifica la forma de la expresión matemática propuestas por Javier e Iván, como *la ecuación de una recta o una función lineal*, y se vincula con la *variación directamente proporcional*, representada por el *interés.*

Con el propósito de involucrar otros registros de representación semiótica, se les pregunta

¿Cómo lo dibujarían en R^2? ¿Cómo escribirían la gráfica?

Javier traza dos ejes cartesianos perpendiculares, anota la palabra cantidad arriba del eje vertical y *n* periodos a la derecha del eje horizontal (escribe algunos dígitos de números enteros positivos sobre las marcas hechas en el eje horizontal). A partir de las argumentaciones de los participantes se concluye que el capital inicial C_0 puede estar en cualquier punto de la forma $(0, C_0)$, esto es que al inicio del periodo hay un capital inicial, lo que gráficamente representa la ordenada al origen de una recta que representa el comportamiento de este fenómeno financiero (si se considera discreto). Además Javier analiza lo dicho por los participantes, respecto a lo que sucede en los primeros periodos, utilizando el registro de representación algebraico, y escribe $n = 1$, $C_0 + i\,C_0$ y dice: *esta C es cero, o sea la constante, entonces estos,… aumentaría en un porcentaje dependiendo de la i,… y para el que sigue… n = 2,* $C_0 + 2i\,C_0$ *o sea se incrementa de esta manera, en este caso lineal, sería una recta mas o menos y* puntea una línea que pasa por el punto (1,1) y dice: *entonces se puede prolongar para cualquier lado, en este caso se supone que...* Por lo que se pregunta

¿Se puede prolongar? y *¿Cuál fue la cantidad de arranque,…?*

Javier contesta que, *para fines prácticos serviría sólo este lado* señalando el eje horizontal, y agrega *porque no hay periodos negativos,… ya en un contexto más geométrico pasaría lo mismo y… eso nada más para enfatizar que existe una recta,…* Pero para distinguir entre lo discreto y lo continuo, se pregunta

¿Es una recta?

Javier contesta que *si,… como habían planteado el primer problema* dibuja un triángulo rectángulo *en este caso* C_0 *quedaría por aquí* y marca el vértice del ángulo agudo a la izquierda de la base horizontal, del triángulo y traza líneas verticales dentro del triángulo y numera los puntos de intersección con la base *estos segmentos serían* y traza líneas horizontales que parte de las intersecciones de las verticales con la hipotenusa, y dice *i por* C_0*; este dos i por ce cero, y* escribe en la intersección de la segunda línea horizontal con la hipotenusa *dos i por* C_0*; este tres i por* C_0*,* escribe en la intersección de la tercera línea horizontal con la hipotenusa, y concluye que *de cierta forma existe una relación en que se va incrementando siempre la misma, la misma cantidad, o sea todo dependería en este caso del valor de i, o sea que, cuanto se incrementa a partir del ... capital inicial y del interés, que vendría siendo el interés lo que regiría en este caso la proporción, la pendiente de la recta,… ora como que regresando podríamos ligar con el problema anterior…* Guillermo agrega: *pues, si es una función lineal y el interés sólo afecta a la cantidad inicial, se puede decir que la pendiente sería una constante*. Esta última argumentación es aprovechada para vincular el *interés* con la pendiente de la recta, cuestionando

¿Qué está haciendo las veces de pendiente?

Guillermo responde *pues la pendiente la veo como n… ¿qué es lo que está representando el tiempo, verdad? periodos de tiempo, entonces pues teniendo una cantidad constante que sería,* escribe en el pizarrón $y = m\,x + b$ y continua *este sería la cantidad constante sería un punto en el eje* y señala el eje vertical, del sistema de coordenadas rectangulares, dibujado antes *y teniendo m como que siempre está bajo uno… siempre va a ir aumentando una cantidad constante… que es el interés ya que es una tasa fija,…* Erick aclara *la pendiente que es m, que es constante y el interés, al igual que la recta cambia su*

inclinación con respecto a la pendiente,… va a cambiar, con respecto al interés, cambia el interés va a ser diferente y igual que la recta… pues si la pendiente cambia,… hay semejanza entre el problema anterior… hay algo constante que hace que cambie la gráfica, bueno al irlo graficando. Se pregunta

¿Qué es eso que cambia? ¿Qué es eso constante?

Erick responde *el interés y la pendiente.*

Los entrevistadores invitan a reflexionar acerca de sus argumentos en el sentido de haber colocado sólo algunos de los puntos que están sobre una línea recta punteada que son coincidentes con los enteros del eje horizontal, o sea que corresponden únicamente a determinados valores de una posible recta continua. Por lo que se les interroga

¿Qué características tienen entre si esos puntos?

Javier responde que *vendrían siendo colineales,… en la misma recta*. Añadiendo, Iván dice*… sólo que es el mismo análisis que hacia de poner toda la recta con,… bueno punteada, sólo que tomando determinados valores,… valores discretos entre uno y n.* Al respecto Javier comenta *vendría siendo la misma relación, lo único que cambiaría vendría siendo… el dominio… pero las relaciones si no cambiarían lo cual fue la primer pregunta ¿cual es la relación?* En este punto de la entrevista surge la noción de *dominio* de una *relación, y* la argumentación acerca de su naturaleza, por lo que se les inquiere

¿Es importante hacer esta distinción?

Javier responde *... diría que no importaría mucho porque no varía es decir no cambia tanto con respecto al tiempo… la relación es lineal… y no importan los valores de en medio… va a funcionar la misma relación dado que el incremento es constante o sea es lineal… se basa en el interés y en el periodo de tiempo,… pero no importaría si está continuo o no porque se puede manejar así para fines re prácticos de uno, dos, tres, cuatro años pero si se quisiera saber este en periodos fraccionales entonces funcionaría la misma*

relación y ya no importaría si es continua o no. Respecto del papel que desempeña *n* como variable, dependiente o independiente, se cuestiona

¿n funciona como variable dependiente o independiente?

Javier responde que *n es la variable independiente porque… es la que si en este caso arbitraria se dice quiero saber un tiempo cuanto tiempo tres cuanto dos y medio*. Se resalta que *n* es discreta y que estrictamente no es una función lineal en que la variable independiente (equis) tendría que estar definida en un intervalo de los números reales. Añade Javier *nada más sería cuestión de fijar el dominio de equis… haciendo mención de que en este caso se trata de una variable discreta que se incrementa conforme los números naturales*. Se comenta que aunque no se pudiese anotar la recta como continua, si es posible distinguir una característica adicional, por lo que se les pregunta

¿Cuál?

Iván contesta *están sobre una recta*. En este momento se vuelve a decir que son colineales, pero se aprovecha el momento para introducir a la entrevista la concepción de lo *no lineal*, esto es que los puntos no están sobre una misma recta, preguntando

¿Que pasaría si, no en este modelo sino en otro, esos puntos discretos, no fuesen colineales?

Javier responde *debería de haber… una relación que nos indicará que punto está donde en cierto tiempo… creo que no sería una recta pero igual debería haber una relación que… controlara el crecimiento o decrecimiento del capital.* Nuevamente se pregunta

¿Cuándo esta condición no se cumple? ¿Cuándo cambiamos esa condición? ¿Cómo le haces con tu capital?

Iván responde: *pero ahí no se que tan real sea por ejemplo si… saco los intereses y los meto en otra cuenta para que me generen intereses, entonces interés interés manejan intereses…*Pero se pregunta

¿Qué le va a pasar a tu capital?

Javier dice *más rápido va a crecer.* Por lo que se les pregunta

¿Porqué crece más rápido?

Guillermo responde *porque el incremento es mayor.* Con el objeto de enfocar otro registro de representación semiótico, para esta consideración de un posible fenómeno *no lineal*, se cuestiona

¿Cómo se vería reflejado, por ejemplo en la gráfica?

Empleando la curva antes dibujada en el pizarrón, se explica que C_0 es el capital con que se inicia el proceso, pero se incrementa de acuerdo a $C_0 + i\,C_0$, por lo que se les pregunta

¿Pero si i cambia permaneciendo constante C_0?

Además se señala una trayectoria sobre la curva ya dibujada en el pizarrón, y se vuelve a preguntar

¿Qué le está pasando?

Javier responde: *estaría como que más inclinado*. Se reafirma que la pendiente crece más, a lo que Erick acota diciendo: *es igual como cuando la pendiente es la que va moviéndose es decir suba y baja es igual que el interés entre más alto… va subiendo más…*

Con la intensión de vincular la expresión lineal surgida de las argumentaciones, se invita a la reflexión, tomando en cuenta el movimiento uniforme rectilíneo con velocidad constante, como un fenómeno físico continuo, por lo que se plantea la expresión –se escribe en el pizarrón $x(t)=x_0+vt)$- y se pregunta

¿Ven en esto algún parecido? o… pueden pensar que t es tiempo y es continuo
¿Ven alguna semejanza?

Javier comenta: *v vendría siendo… si vendría reflejando eso una recta, bueno una semirrecta de puntos…* Se le induce a que Javier dibuje la recta. Javier dice: *entonces si que daría una recta continua* y dibuja un sistema de ejes coordenados marcando enteros en ambos ejes; escribe *t* al final del eje de las abscisas y *x(t)* arriba del eje de las ordenadas, además, después de algunas argumentaciones del entrevistador y él, escribe x_0 entre la primera y segunda marca del eje de las ordenadas, diciendo que *podría estar en cualquier lugar*, y agrega *equis con cero se incrementaría en este caso,… depende del interés pero...* Se le ubica en el nuevo contexto diciendo que en este caso no necesariamente se trata del interés, además de que *v* es positivo. Entonces Javier argumenta: *positivo daría similar a esto* y señala la recta trazada antes *con un crecimiento dependiendo del valor de v*. Se aclara que en un contexto es *v* y en el otro es *i*, y se pregunta

¿Qué que son?

Iván responde *la pendiente*. A lo que se pregunta

¿Qué nos da así en ese contexto? ¿Qué nos está señalando? ¿Qué papel juega digamos?

Iván responde: *nos va diciendo como va cambiando los valores en el tiempo*. Javier agrega *que tan rápido crecen o que tan rápido disminuye*. Se reafirma lo dicho por los estudiantes, comentando que significa que tan rápido crece o decrece. Además se aclara que cuando se es deudor del banco, el capital decrece.
Para iniciar el cierre de la entrevista, y se generen conclusiones se cuestiona

¿Qué relación ven en todo esto junto con el problema que discutimos anteriormente?
¿Cuándo si algo se puede ver de esta forma? y ¿Cuando no?

Javier, comenta *bueno se puede hablar de rectas y de funciones lineales cuando el crecimiento es fijo o sea… cuando el cambio, es… determinado o sea no varía, porque si empieza a variar ya no podemos estar hablando de cosas como estas* -señala al pizarrón- *sino que aparecerían las curvas que ya habíamos mencionado,… entonces… habría que fijar el cambio, en este caso la tasa de cambio que vendría siendo reflejada por la pendiente,… entonces sería lo que importaría para poder hablar ya de funciones lineales…* Erick al respecto dice… *si el cambio es constante si se puede manejar una gráfica* -mueve su mano de arriba abajo- *función lineal,… por ejemplo si se intenta variar… el tiempo aumentando cinco y luego sube a diez y algo así… quizás ya no sería una gráfica lineal y no se puede expresar con esa ecuación, habrá que encontrar una distinta*.

Se les recuerda que se pueden abordar tanto una gráfica continua de una recta, o puede ser de tipo discreto.

Iván reflexiona diciendo *…por ejemplo en la anterior se rompía si aumentamos el exponente… ya no podíamos hacer ninguna… pero por ejemplo… yo he escuchado que… dicen interés sobre interés entonces… ya ahí el interés no sabemos como cambia en el tiempo, entonces si el interés cambia con el tiempo, entonces aquí el interés dependería también de t entonces sería como una función que no dependa de una sola variable entonces ya no podría hacer un análisis similar porque ya no sería una función lineal si tenemos dos variables, y más si se están multiplicando.*

Para delimitar el contexto objeto de la entrevista se dice el interés sobre interés, es el llamado interés compuesto, el cual deja de ser una forma lineal. Javier: acota… *caso concreto,… regresando a aquello de la derivada, se supone que la derivada refleja la pendiente ¿no?, pero esta m… hablando de funciones,* escribe en el pizarrón $m = f'(x)$,… *es igual a la derivada* -se aclara que en un punto dado-.

Javier continúa: *en un punto dado, en este caso sería equis (x)*. Se señala que podría ser x_0. Prosigue Javier *o un punto a cualquiera* reescribe en el pizarrón $m=f'(a)$… *para que una función sea lineal,… el exponente tenía que ser uno ¿no?, entonces al momento de hacer la derivada, ese exponente se reduce y da que una, que la pendiente sea constante, entonces si el exponente varía, la pendiente nos da otra función y entonces ya no, ya no es constante y eso vendría a dar lo que habíamos mencionado hace rato de que si para hablar de función lineal es, el interés tiene que ser fijo* (sic). La acotación que se hace aquí, vincula el hecho

de que, al derivar una función algebraica, el exponente disminuye, y en particular la derivada de una función lineal de la forma $y=f(x)$ es una constante, y la cual corresponde a la pendiente. Javier complementa *el crecimiento tiene que ser constante… si cambiamos la variable,… si nos da como derivada… una función en términos,… de la variable… independiente ya no estaríamos hablando de la función lineal… todo depende… si la original es una función lineal o no para saber si… el crecimiento*. Se pide a Javier que derive $x(t)$ con respecto a t en la expresión $x(t)=x_0+vt$. Javier argumenta: *este es cero* - refiriéndose a la derivada de la constante x_0 *y esta quedaría nada mas como v*, escribiendo $x'(t)=v$. Se amplia lo dicho por Javier, diciendo que esto se da en el contexto de *velocidad-tiempo-posición*, y se ahonda preguntando de manera personalizada

¿Qué tipo de movimiento Iván se da eso?

Iván responde *en un tipo, un movimiento rectilíneo… uniforme* y se vuelve a preguntar

¿Porque se llama rectilíneo uniforme?

Iván de nuevo responde *…rectilíneo uniforme porque tiene para empezar tiene que describir una recta y* y

¿Que es que es esa expresión que está ahí?

Iván dice: *ajá pero… tiene que describir una recta porque no puede dar,… porque el cambio de dirección es una…* Se sigue preguntando

¿Claro si pero además en que otro aspecto se refiere el movimiento rectilíneo uniforme?
¿Que cosa lo caracteriza?

Iván dice: *la velocidad que es constante*. Se comenta que la velocidad es constante y por tanto la razón de cambio también lo es constante. Pero además se relaciona con la noción de proporcionalidad, cuestionando

¿Hay proporcionalidad ahí?

Javier dice que si con mímica. Iván complementa: *si, porque en cada intervalo de tiempo va aumentando la misma distancia…* Se hace la remembranza respecto a que, seguramente habían oído desde la secundaria, que a "distancias iguales en tiempos iguales", lo que significa que existe una proporcionalidad que implica que la velocidad sea constante. Ya a manera de conclusión se inquiere

¿Qué función describe ese movimiento?

Iván otra vez contesta: *una función lineal*. Ya para cerrar la entrevista, se invita a los estudiantes a que comente sus impresiones generales.

Erick interviene: *se me hace interesante porque… es analizar… la manera entender el segundo problema… numéricamente o analíticamente… pero cada quien pensó diferente, y… al menos en mi caso… al principio si me costó algo de trabajo,…*

Guillermo agrega *si, también me pareció interesante por la forma en que lo relacionan una cosa con la otra, básicamente es lo mismo pero, hay que saberlo verlo (sic)*. Por el comentario de Guillermo se pregunta

¿En que te ayuda Guillermo… eso que dices, hay que saberlo ver en que te ayuda,… cuando lo ves ¿que pasa?... ¿ contigo en tu mente? ¿qué pasa?

Guillermo da respuesta: ...*saber verlo, a eso me refiero a que… apreciar en diferentes formas que puede ayudar para resolver el problema*. Se invita a Javier a que concluya. Javier dice ...*de repente… no nos damos cuenta de cuantas formas podemos aplicar… la ecuación de una recta, o sea que existen relaciones lineales que de repente están ahí y no nos damos cuenta que están y púes que en el momento en que nos ponemos a reflexionar sobre ello, podemos llegar de distintos problemas a la misma cosa, ya sea desde un lado, desde el otro, no importa o sea, vamos a llegar a lo mismo, mientras sean en este caso*

relaciones lineales, pero pues… es que las aplicaciones que tiene… son bastante amplias, eso lo venimos a aprender cosas a lo zonzo.

Iván concluye: *lo que estaba viendo es que, si la linealidad y la recta se utilizan para muchas cosas, pero cuando se rompe la linealidad, bueno cuando ya no podemos atacar un problema de manera lineal,… de nuevo regresamos a la linealidad porque, por ejemplo cuando teníamos una función que parecía parábola… tratábamos de encontrar su tangente que… en realidad es regresar a la recta para describir otra vez, entonces cuando perdemos la linealidad, tratamos de recuperarla nuevamente porque la linealidad como que nos hace ver la manera más fácil, como que tener una recta siempre nos dice, a pues si está, si mientras el tiempo aumenta está hacia abajo, quiere decir que este está, si es, es decreciente,… entonces… como que siempre que perdemos la linealidad tratamos de recuperarla ¿no?*.

Por la importancia intrínseca que tiene la noción de linealidad, se resalta con lo comentado por Iván, en el sentido de que frecuentemente los estudiantes encuentran en el transcurso de sus estudios los términos *línea* y *linealidad* de diferentes formas. Además que, en problemas de diferentes contextos es frecuente que las personas empleen como primera opción el modelo lineal.

Una manera para encontrar la ecuación de la recta tangente en un punto a una curva es por medio de la derivada de la función, que podría no ser lineal. En cierto sentido se linealiza en dicho punto, lo que sucede de manera frecuente. Ello evidencia la importancia y significación de la *noción de linealidad*, en el Cálculo. Además esta *noción* está vinculada con el álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, con la derivada e integral como operadores lineales. Lo anterior no es porque necesariamente esté relacionado con la recta, pero si con *lo lineal* en tales temas de matemáticas. Mediante el análisis de las respuestas de los estudiantes entrevistados, se ha tratado de indagar, un poco alrededor del pensamiento de cuando interviene y cuando no interviene la linealidad.

Esta actividad tuvo como antecedente inmediato, las reflexiones alrededor de temas tratados en la primera parte de la entrevista: *razones y proporciones; semejanza de triángulos; razones trigonométricas, pendiente, recta y función lineal.*

Algunas retrospecciones que se desprenden de la segunda parte de la entrevista clínica colectiva, son que los estudiantes pusieron en juego conocimientos matemáticos como:

variable, recta, función lineal, dominio, crecimiento, tiempo, variación, movimiento rectilíneo uniforme, derivada, gráfica de una recta. Aunque en principio lo hicieron de manera desarticulada, pero en el transcurso de la entrevista los fueron enlazando. El contexto financiero en que se desarrolló permitió que asociaran conceptos matemáticos, como *pendiente de una recta, razón de cambio constante* y *proporcionalidad* con el concepto mercantil de *interés simple* o *tasa de rendimiento.* Esto refleja los distintos significados de la *linealidad* que ha propiciado el *contrato didáctico* al que los entrevistados han estado sujetos.

7.4 CUESTIONARIO A PROFESORES

Con el propósito de precisar aspectos del *contrato didáctico* en relación a la linealidad, se aplicó un cuestionario a tres profesores, dos de nivel medio superior (NMS), uno de superior (NS), y a un estudiante de licenciatura (L), dentro de las actividades del curso corto *El vínculo conceptual entre la proporcionalidad y la linealidad* (en el Anexo 3 se incluye el material didáctico que se empleó, así como el instrumento aplicado) durante el "Segundo Coloquio de Matemática Educatica", llevado a cabo del 11 al 14 de junio de 2008, organizado por el Área Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Los aspectos considerados en el curso fueron:

- Aspectos teórico – metodológicos de la noción de linealidad
- Competencias matemáticas que deben adquirir estudiantes de Nivel medio superior (con promedio de 15 años de edad), de acuerdo al Programme for International Student Assessment (PISA)
- Aspectos vivenciales de Programación neurolingüística.

El cuestionario consistió de trece tareas, las diez primeras, se tomaron del instrumento diseñado y aplicado por Ruiz y Valdemoros (Ruiz, E y Valdemoros, M., 2006) a estudiantes de educación elemental, cuyo propósito para este trabajo, es clarificar las argumentaciones, de los profesores y del estudiante, y explorar los significados de la

linealidad que ponen en juego. Las tareas onceava y doceava se fundamentaron en preguntas que elaboró De Bock y colaboradores (De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998)), para distinguir entre un problema de variación directamente proporcional y otro de variación inversamente proporcional. La última tarea, tiene la intensión de apreciar los elementos, que los participantes incorporan en la modelación, desde un problema escolar común, que se resuelve mediante un sistema de ecuaciones lineales simultáneas 2 × 2 (aunque también es posible resolverlo mediante procesos de aproximación aritméticos).

A partir de esta actividad se obtuvieron las respuestas matemáticas, las argumentaciones basadas en distintos significados que tiene la noción de linealidad y un listado de las competencias matemáticas que supuestamente se ponen en juego al momento de resolver las tareas, esto último acorde al documento de Luis Rico (Rico, 2005).

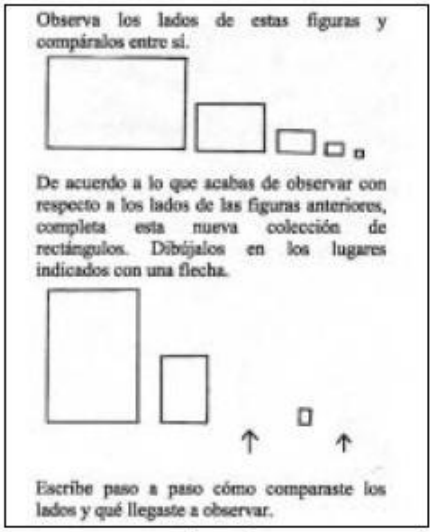
7.4.1 ANALISIS DE RESPUESTAS

Por lo que respecta a las respuestas y argumentaciones a las tareas encaminadas a explorar los aspectos cualitativos, se tiene:

Tarea 1. Los argumentos escritos de la respuesta acertada por Prof. 3 de NS (Nivel superior) *Tamaño de la puerta, distancia entre ventanas, medida de lados*; los argumentos de una respuesta no acertada por parte del estudiante 1 de NS (Nivel superior), son: *1.- Comprobar que el dibujo no se deforme de manera extraña. 2.- Las líneas deben de permanecer igual solo de menor tamaño. 3.- La copia sea proporcional al dibujo original*. Los otros dos profesores, ambos de nivel medio superior (NMS), no dieron argumentaciones, y uno acertó y el otro no. Considerando que en la *visualización* (Conferencia de Cantoral, 2002)[28] hay un peso importante de la imagen visual y lo perceptual, dos de los participantes no lograron dar la respuesta correcta, a pesar de haber argumentado, aunque no tan bien, con comentarios que dejan entrever su pensamiento en relación a la proporcionalidad cualitativa.

[28] "La *visualización* matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado." Conferencia *Visualización y pensamiento matemático, estrategias de enseñanza.* dictada por Cantoral (2002), obtenido de http://pdf.rincondelvago.com/visualizacion-semiosis-e-intuicion-en-la-ensenanza-de-las-funciones-en-matematicas.html

Tarea 1.



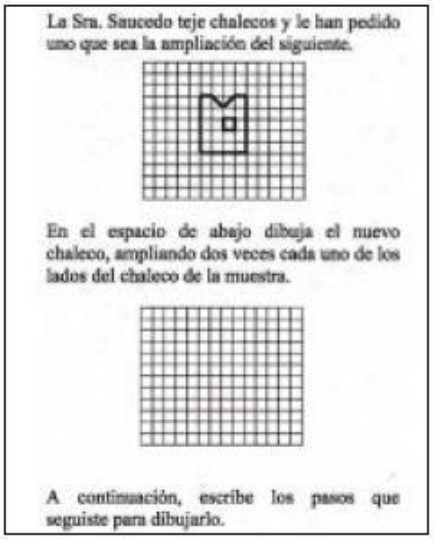
Tarea 2.

Tarea 2. Las respuestas de todos fueron acertadas. Los argumentos que escribieron fueron: Prof. 1 NMS *En el patrón observado, la altura del rectángulo siguiente es aproximadamente ½ del anterior. Por lo cual me parece que la figura en 4° lugar no corresponde;* Prof. 2 NMS: *primero observé que cada rectángulo tenía la mitad de largo que el anterior. Luego me percaté que cada rectángulo tenía la mitad de ancho. Luego, noté que la segunda serie de rectángulos eran los mismos de la primera serie, pero colocados en otro sentido, de modo que el "largo" y el "ancho" invierten sus papeles;* Prof. 3 NS *la medida de cada figura, largo y ancho;* Estudiante 1 NS *1.- Observando que los lados eran la mitad del lado del rectángulo más grande y así sucesivamente. 2.- Observé que cada rectángulo que se dibuja es del tamaño de ¼ aprox. del anterior.* Las cuatro personas dibujaron la respuesta esperada. A partir de la percepción visual hicieron un reconocimiento del patrón en base al tamaño que cambia de forma proporcional.

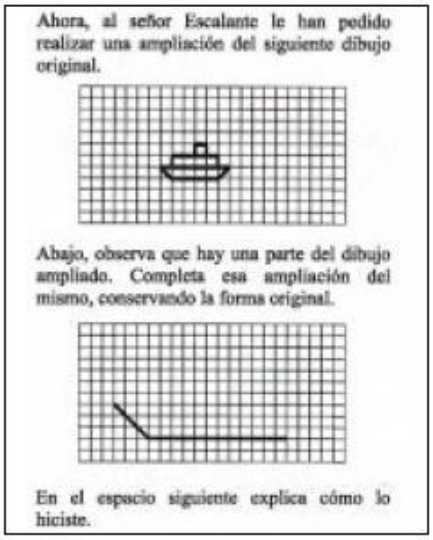
Las tareas 3, 4 y 5 estuvieron dirigidas a la articulación entre la proporción cualitativa y la proporción cuantitativa.

Tarea 3. Los pasos reportados por los sujetos cuestionados son: Prof. 1 NMS *1.- Contar el número de cuadros del modelo original. 2.- Contar los cuadros que se utiliza para el chaleco y verificar que si cabe al ampliarlo a lo doble. 3.- Elegir lugar donde comenzar el*

dibujo; Prof. 2 NMS *empecé con la parte del "cuello" del chaleco, q e es la líneas diagonales y las tracé 2 veces más largos, luego me fui por la "orilla" del chaleco y conté 2 cuadros en lugar de 1, y luego 10 cuadros en lugar de 5; (por la altura del chaleco);* Prof. 3 NS: *duplicando cuadros;* Estudiante 1 NS *puesto que pide ampliarlo dos veces; podemos multiplicar por dos cada tamaño de línea y cada espacio entre las mismas, así obtenemos la ampliación dos veces.* Todos los sujetos obtuvieron la respuesta esperada, pero las estrategias que pusieron en juego se basan en el conteo directo de cuadros y en el razonamiento multiplicativo que es parte del pensamiento proporcional (Sección 3.2 de esta tesis). Con ello se muestra, que aun en personas de escolaridad de al menos licenciatura, también emplean estrategias similares a las que ponen en juego niños alrededor de 11 años (Ruiz y Valdemoros, 2006)



Tarea 3.



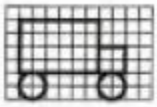
Tarea 4.

Tarea 4. Las siguientes fueron las explicaciones de lo que hicieron: Prof. 1 NMS -*Contar cuadros para saber la escala de ampliación (en este caso el triple). –Comenzar a dibujar siguiendo las marcas del predibujo y la escala* (sic); Prof. 2 NMS *Primero medí la "base" y noté q e era 3 veces más larga que la original, así que extendí la diagonal a 3 cuadros y luego tracé los otras dos partes del barco, aumentadas 3 veces en lo largo y en lo ancho;* Prof. 3 NS *cada cuadrito son 9 más;* Estudiante 1 NS *Puesto que se sigue una proporcionalidad diferente para cada parte del barco, fue necesario contar cuántos*

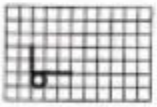
cuadros se ampliaba cada parte del mismo para poder construir la figura. Las cuatro personas dibujaron la respuesta esperada; emplean el conteo directo de cuadros y el razonamiento multiplicativo (Sección 3.2 de esta tesis). Con ello se evidencia que los cuestionados usan estrategias parecidas a los niños entrevistados por Ruiz y Valdemoros (2006).

Tarea 5. Las explicaciones que dieron: Prof. 1 NMS *Aquí sucede algo raro porqe lo largo del carro original es 8 y lo alto sin contar la rueda es 4. En la reducción lo largo es 3, es decir la reducción es de 3/8 mientras que el alto es 2; es decir la reducción es 2/4=1/2 (sic). NOTA Consideré mal contar lo largo, realmente la escala es ½ en ambos sentidos;* Prof. 2 NMS *Noté q e las magnitudes de la "caja" del camión se reducían a la mitad, por lo tanto tracé las restantes partes a la mitad de la medida original. Sin embargo me confundí en las "llantas", pero luego noté que de 4 cuadros que ocupaba la llanta original, sólo estaba en 1 cuadro así que también tracé la 2ª llanta dentro de un solo cuadro;* Prof. 3 NS *ahora es lo contrario. Es la mitad de largo, ancho y círculo;* Estudiante 1 NS *Observando que la reducción cada dos cuadros equivalen a uno, así que podemos realizar la figura.* Las cuatro personas dibujaron la respuesta esperada, aunque las estrategias fueron diferentes. Mientras que el estudiante empleó el conteo directo, los profesores reconocen además, a una razón de cambio con respecto al tamaño. Sin embargo el Prof. 1 NMS presentó cierta confusión por la variación del área, sobretodo de las ruedas.

El señor Escalante es dibujante y se ha pedido realizar la reducción del siguiente dibujo original.



Observa que abajo hay una parte del dibujo ya reducido. Completa esa reducción, sin modificar su forma.



En el espacio siguiente explica cómo lo hiciste.

Tarea 5.

Las tareas 6a, 6b, 7a, 7b, 8, 9, 10a y 10b se enfocaron a la proporción cuantitativa.

Tarea 6a. Las explicaciones paso a paso que dieron: Prof. 1 NMS escribe que el ancho de la segunda tabla es *2*; además dice que *Dividiendo el largo original entre el nuevo largo para saber la escala de reducción (1/3);* dibuja dos rectángulos, uno con 6 de ancho y 9 de largo, y otro con 2 de ancho y 3 de largo, y escribe *9/3=3;* Prof. 2 NMS escribe que el ancho de la segunda tabla es *2*; *Noté q e de 6 a 9 parece guardar las mismas proporciones, tendrá q e ser de 2 a 3 así se cumple q e los lados del rectángulo pequeño son la tercera parte de los lados del rectángulo mayor (sic);* Prof. 3 NS escribe que el ancho de la segunda tabla es *2; 9 cm en proporción son 3 veces 3 6 cm en proporción son 2 veces 3;* Estudiante 1 NS escribe que el ancho de la segunda tabla es *2; mediante una proporción.* Las cuatro personas dibujaron la respuesta esperada y también en este problema identifican una razón de cambio con respecto al tamaño, como una manifestación del pensamiento proporcional cuantitativo.

Tarea 6b. Las explicaciones paso a paso que dieron: Prof. 1 NMS, escribe que el ancho de la segunda tabla es *5/2*; además dice que *En realidad era muy sencillo x q el largo es doble q' el ancho;* escribe la regla de tres *" "* y *" — –",* agrega: *Empecé a hacer algo raro* y dibuja dos rectángulos, uno con 6 de ancho y 12 de largo, y otro con *x* de ancho y *5* de largo (dibujando una flecha que va del primer rectángulo al segundo), y escribe *" "*y *" – —";* Prof. 2 NMS escribe que el ancho de la segunda tabla es *2.5*; agrega: *Como el largo (12) es el doble del ancho (6) entonces, si el largo del nuevo rectángulo es de 5, entonces su ancho, parece conservar las mismas proporciones, debe medir 2.5 cm.* Prof. 3 NS escribe un número o símbolo ilegible*;* Estudiante 1 NS escribe que el ancho de la segunda tabla es *2.5*, y dice que *Mediante una proporción.*. Los dos profesores del NMS y el estudiante de NS dibujaron el rectángulo esperado, e identifican la razón de cambio constante. Además los Profesores 1 y 2 de NMS, emplean la notación de regla de tres, de proporción *a:b::c:d* y como la igualdad de dos razones. De forma no espera el Prof. 3 NS no respondió la pregunta.

Tareas 7a y 7b. Las respuestas y sus argumentos fueron: Prof. 1 NMS, a la pregunta *¿Cuánto pagó por ellas?* escribe *$ 210* y explica *Obteniendo el precio de una bolsa a partir de datos iniciales*, escribe *"— ", precio de una bolsa* y agrega:*"*

”; Prof. 2 NMS escribe la regla de tres “ ” y el despeja a *x, “*

_____ “ escribe *Respuesta= $210* y explica *Como a más bolsas, se debe pagar proporcionalmente más dinero, se puede emplear una regla de 3 como ésta*; Prof. 3 NS: escribe *cada bolsa tiene un costo de 30 pesos*; Estudiante 1 NS, a la pregunta *¿Cuánto pagó por ellas?* escribe *$ 210* y explica *aplicando proporcionalidad.* Los cuatro cuestionados anotaron la respuesta esperada. Dos de los profesores (Prof. 1 NMS y Prof. 3 NS) primero identificaron el costo unitario; y después uno de ellos empleo pensamiento multiplicativo y el otro uso regla de tres. El Prof. 2 NMS empleó de forma directa la regla de tres. El estudiante no da mayores argumentaciones.

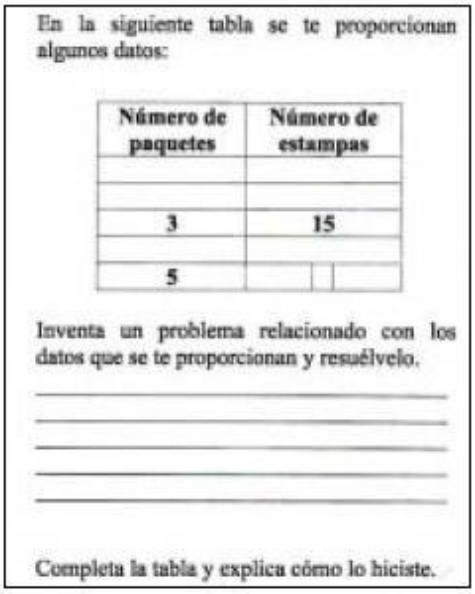
Andrés compro 4 bolsas de dulces y por ellas pagó $120:

Julián compró 7 bolsas de esos dulces:

¿Cuánto pagó por ellas? _____.

¿Cóeno resolviste el problema?

Tarea 7a y 7b.


En la siguiente tabla se te proporcionan algunos datos:

Número de paquetes	Número de estampas
3	15
5	

Inventa un problema relacionado con los datos que se te proporcionan y resuélvelo.

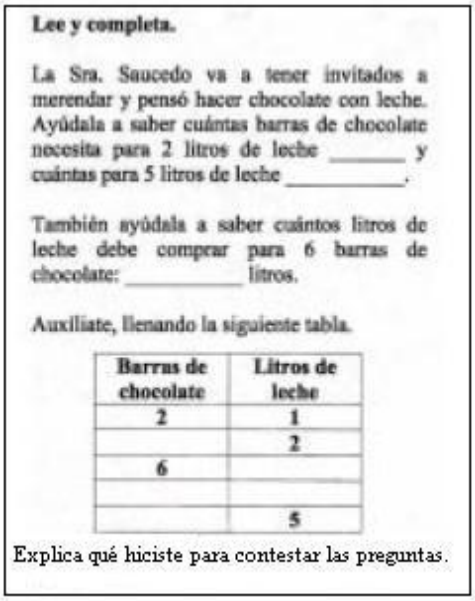
Completa la tabla y explica cómo lo hiciste.

Tarea 8.

Tarea 8. Las realizaciones y explicaciones fueron: Prof. 1 NMS completa la tabla; propone el problema *Si para enviar por correo tres paquetes iguales se requiere de 15 estampillas postales ¿Cuántas estampillas se necesitan si se enviaran 5 paquetes iguales?* y explica: *encontrando el número de estampas para un paquete*; Prof. 2 NMS escribe *Primero, para dar respuesta a este problema intentamos llenar la tabla,* agrega: *Encontramos que por 3 paquetes hay 15 estampas, entonces pienso que hay 5 estampas por paquete:” ”. Considerando que se cumple siempre esta relación, entonces lleno la*

tabla, completa la tabla y propone el problema: *¿Cuántas estampas hay en 4 paquetes?*; Prof. 3 NS llena la tabla y propone el problema: *Juan necesita mandar cajas para su familia en Panamá por correo, es por eso que debe colocarles estampillas tiene un costo de 5 pesos ¿si necesita 7 estampas cuanto le cuesta? 7 × 5= 35* pesos; Estudiante 1 NS llena la tabla y propone el problema: *Juan compro 3 paquetes, en los cuales había 15 estampas. Cuantas estampas contiene cada paquete?* y argumenta *usando una relación de proporcionalidad, teniendo en cuenta que cada paquete contiene el mismo núm. de estampas.* Los Prof. 1 y 2 NMS y el estudiante, a través de sus argumentaciones, resaltan primero el número de estampas por paquete y después sugieren de forma implícita, el uso del pensamiento multiplicativo.

Tarea 9. Las respuestas y explicaciones fueron: Prof. 1 NMS escribe que, se necesitan *4* barras de chocolate para 2 litros de leche, *10* barras para 5 litros de leche y *12* litros para 6 barras de chocolate (este último no es acertado) y explica: *2 barras 1 litro por cada litro son 2 barra (lo doble de barras por cada litro)*; Prof. 2 NMS escribe *Primero observé el primer par de datos de la tabla q e para 1 litro de leche se emplean 2 barras de chocolate, así que entonces para 5 litros de leche se gastarían (5×2)=10 barras de chocolate. Luego llené el dato de 3 litros de leche para las 6 barras de chocolate. Pero partí de la relación más "pequeña".* No responde directamente los tres cuestionamientos iniciales y llena la tabla; Prof. 3 NS escribe que, se necesitan *4* barras de chocolate para 2 litros de leche, *10* barras para 5 litros de leche y 3 litros para 6 barras de chocolate y explica: *proporción por cada Lt de leche 2 barras de chocolate*; Estudiante 1 NS escribe que, se necesitan *4* barras de chocolate para 2 litros de leche, *10* barras para 5 litros de leche y *3* litros para 6 barras de chocolate y explica: *usando proporcionalidad directa.* Desde las argumentaciones a esta pregunta, también se resalta el empleo del razonamiento multiplicativo y la identificación de un valor unitario constante.



Lee y completa.

La Sra. Saucedo va a tener invitados a merendar y pensó hacer chocolate con leche. Ayúdala a saber cuántas barras de chocolate necesita para 2 litros de leche _____ y cuántas para 5 litros de leche _____.

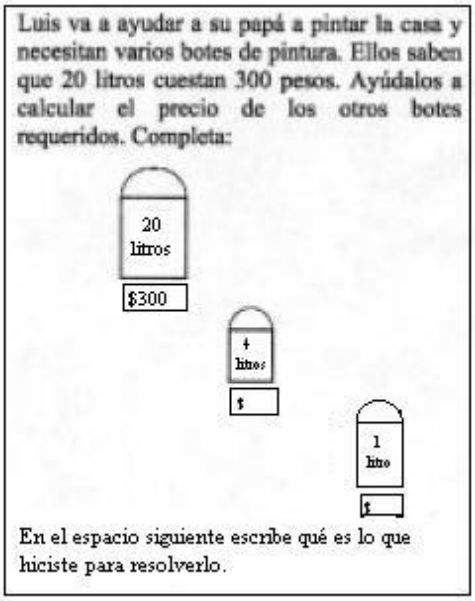
También ayúdala a saber cuántos litros de leche debe comprar para 6 barras de chocolate: _____ litros.

Auxíliate, llenando la siguiente tabla.

Barras de chocolate	Litros de leche
2	1
	2
6	
	5

Explica qué hiciste para contestar las preguntas.

Tarea 9.



Tarea 10a y 10b.

Tareas 10a y 10b. Las respuestas y sus argumentos fueron: Prof. 1 NMS, responde que 4 litros cuestan *$ 60* y 1 litro *15* y explica *Suponiendo que el precio de un bote de pintura varía en forma proporcional a la cantidad de litros (En la vida real generalmente no es así, es decir no cuesta lo doble un bote del doble de volumen)*; Prof. 2 NMS escribe *Igual, como son relaciones o proporciones directas puede usar regla de 3, si* " " → despeja a *x,* " — " y " " → despeja a *x,* " — "; Prof. 3 NS responde que 4 litros cuestan *$ 60* y 1 litro *15* y explica *Proporción entre litros y pesos, cada litro cuesta 15 pesos*; Estudiante 1 NS, responde que 4 litros cuestan *$ 60* y 1 litro *15* y explica " ". La secuencia del mismo problema conduce a identificar el costo unitario; los Prof. 2 NMS y Prof. 3 de NS, usan la regla de tres directa y después despejan la variable *x* (uno lo escribe y otro no), obteniendo de esta forma el costo unitario. El estudiante también emplea la regla de tres para explicar, argumentando que si 20 l. cuestan $ 300, 4 l. cuestan $ 60.

Tarea 11. Al problema: "El granjero Gustavo necesita aproximadamente 4 días para cavar una zanja alrededor de un terreno de pastura cuadrado de 100 m. de lado. ¿Cuántos días necesitaríamos para cavar la zanja alrededor del terreno si el lado es de 300 m.?", respondieron: Prof. 1 NMS dibuja dos cuadrados uno de 100 m. por lado y otro de 300 m.

de lado y escribe: *Por cada 100 m un día, entonces por cada 300 m son 3 días, por los cuatro lado = 12*; Prof. 2 NMS dibuja un cuadrado de 100 m por lado y escribe *como tiene 4 lados y se tarda 4 días, se pide pensar que tarda 1 lado por día, o sea 100 m. de zanja por día. Entonces para zanjar (300m × 4)= 1200 metros de zanja se llevaría "*——

"; Prof. 3 NS escribe la regla de tres " " Estudiante 1 NS, sólo responde, *12 días.* Los profesores 1 y 2 NMS obtienen los metros cavados por día y después emplea el razonamiento multiplicativo para obtener el total de días necesarios para hacer esta operación en un terreno de 1200 metros de perímetro. El profesor 3 NS usa la regla de tres directamente. Y el estudiante sólo escribe la respuesta.

Tarea 12 al problema: "El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de lado 200 m. ¿Cuántas horas necesitaría para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?" respondieron: Prof. 1 NMS dibuja dos cuadrados uno de 200 m. por lado y otro de 600 m. de lado y escribe: *lo triple Pero abonar significa poner abono en toda la superficie (200)(200)= 40000 m^2 600 × 600= 360000 m^2*, además escribe "—— " *El terreno a abonar tiene 9 veces más área q e el anterior se tardará (9)(8)=72 hrs.*; Prof. 2 NMS dibuja un cuadrado de 200 m por lado y escribe *Área=(200)(200)= 40000 m^2 lo abona en 8 hora. Entonces para un terreno de 600 m de lado sería: 366666 m^2* dibuja un cuadrado de 600 por lado *y luego con una regla de 3:"* *"→"* ——— —— ——", "

". Prof. 3 NS escribe Estudiante 1 NS, responde *24horas.*

Los profesores 1 y 2 NMS se percatan que la variación del área implica un comportamiento no lineal, a diferencia del cambio que sucede con el perímetro, aunque en el proceso de solución emplean una regla de tres, donde se involucra el cambio proporcional del área. El Prof. 3 NS manifiesta un pensamiento ingenuo (Bachelard, 2004) al escribir una regla de tres donde involucra la longitud del lado del cuadrado, en lugar del área, esto es, no distingue que se trata de un problema no lineal considerando el perímetro. El estudiante 1

NS tampoco distingue la diferencia entre esta tarea y la anterior, en cuanto al comportamiento lineal, por lo que muestra también un pensamiento ingenuo al respecto.

Tarea 13 al problema "Un zoológico tiene aves (bípedos) y felinos (cuadrúpedos). Si en el zoológico hay 60 cabezas y 200 patas, ¿Cuántas aves y cuantos felinos viven allí?"

Prof. 1 NMS escribe " " " " "

2y=80 y *y=40* y plantea la solución " ";

Prof. 2 NMS escribe *Formamos 2 ecuaciones:*

aves=60-felinos, y sustituimos para resolver la ecuación:

(60 - felinos)(2)+4 felinos=200 patas

120 – 2 felinos+4 felinos=200 patas

120 patas + 2 felinos=200 patas

2 felinos = 200 patas- 120 patas

2 felinos = 80 patas

felinos= 80 patas / 2 patas = 40

Entonces hay 20 aves Comprobando el # de patas:

20 aves + 40 felinos

20(2) + 40 (4)= 40 + 160= 200 patas.

Prof. 3 NS escribe " " *40 felinos* y *20 aves* y comprueba

Estudiante 1 NS, escribe

Hay 40 felinos

20 aves

Si denotamos a las aves como "x" y a los felinos como "y" tenemos:

$$x + y = 60$$

$$2x + 4y = 200.$$

Calculamos

$$2y = 80$$

$$y = 40 \qquad x = 20.$$

Los cuatro cuestionados manifiestan pensamiento algebraico al resolver el problema por medio de un sistema de ecuaciones simultáneas de 2×2. Ninguno intenta resolverlo por medio de pensamiento aritmético (pruebas ensayo error numéricas para el número de cabezas y patas), como lo resolvería un niño que curse educación primaria (Filloy y Rojano, 1989).

7.4.2 REFLEXIONES ACERCA EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL Y DE LA LINEALIDAD

En cuanto a las estrategias y argumentaciones que se desprenden del análisis de las respuestas se considera que las personas a quienes se aplicó el cuestionario, emplean de manera importante la imagen visual y lo perceptual, aunque cabe decir que hubo desatinos a pesar de haber argumentado, pero aún así dejan entrever su pensamiento proporcional cualitativo.

Hubo un reconocimiento de patrones en base al tamaño que varía de manera proporcional. Emplearon el conteo directo de cuadros y en el razonamiento multiplicativo lo cual es parte del pensamiento proporcional (Sección 3.2 de esta tesis). Se evidencia, que aun en personas de escolaridad mayor al bachillerato, también ponen en juego estrategias parecidas a las de niños de 11 años (Ruiz y Valdemoros, 2006). En un problema las personas cuestionadas emplearon estrategias diferentes, e incluso respuestas diferentes. A menudo se utilizó el conteo directo y en otras oportunidades, una razón de cambio con respecto al tamaño de las figuras propuestas, presentando cierta confusión por la variación del área en círculos, en los cuales el diámetro disminuye a la mitad. Con esto se identificó una razón de cambio con respecto al tamaño de la figura, como una manifestación del pensamiento proporcional

cuantitativo. La notación de la: regla de tres, proporción escrita de la forma *a:b::c:d* y de la igualdad de dos razones, aparecen desde la tarea 6. En ciertas argumentaciones se identifica primero el valor unitario constante y posteriormente un participante emplea el pensamiento multiplicativo, y el otro usa la regla de tres.

En la tarea 10 también se identifica el costo unitario, se emplea la regla de tres y después despejan la variable *x*.

En la tarea 11 un participante obtiene la tasa unitaria por tiempo (metros cavados por día) y luego emplea el razonamiento multiplicativo para obtener el total de días necesarios; otro usa la regla de tres directamente; y el estudiante sólo escribe la respuesta. A través del proceso de solución los participantes se percatan de la naturaleza lineal del problema. En cambio en la tarea 12, sólo los dos profesores de nivel medio superior se dan cuenta que la variación del área implica un comportamiento no lineal, a diferencia del cambio que sucede con el perímetro, aunque en el proceso de solución emplean una regla de tres, donde se involucra el cambio proporcional del área. El profesor de nivel superior manifiesta un pensamiento ingenuo (Bachelard, 2004) al emplear de manera directa una regla de tres donde involucra la longitud del lado del cuadrado, en lugar del área, lo cual implica que no distingue que se trata de un problema no lineal considerando el perímetro. Finalmente el estudiante de nivel superior tampoco distingue la diferencia entre esta tarea y la anterior, en cuanto al comportamiento lineal, por lo que muestra también un pensamiento ingenuo.

Por lo que respecta a la última tarea, donde se pide plantear y resolver un problema donde las variables tienen un comportamiento lineal, todos los cuestionados muestran un pensamiento algebraico al solucionarlo a través de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas. Nadie intenta resolverlo por medio de procesos aritméticos (pruebas ensayo error numéricas para el número de cabezas y patas), como lo resolvería un niño de educación elemental (Filloy y Rojano, 1989).

7.5 ESTRATEGIAS EMPLEADAS EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE TRIGONOMETRÍA

Considerando al pensamiento proporcional como un elemento fundamental en la construcción de conceptos trigonométricos, es de interés el pensamiento proporcional cuantitativo, que aparece cuando el estudiante puede hacer uso de las razones y

proporciones y esgrime, las razones entre magnitudes con las mismas unidades (razones internas).

Se analizaron las estrategias que tienen los estudiantes de nivel medio superior y algunos de nivel medio, a través de las respuestas exitosas (resultado esperado) de un problema de trigonometría planteado en el concurso de la Olimpiada Estatal de Matemáticas 2009 en el Estado de Hidalgo, donde participaron alrededor de 1100 jóvenes, de los cuales alrededor del 80 % corresponde a nivel medio superior y el 20 % a estudiantes del nivel medio básico (secundaria).

> *En un triángulo rectángulo con catetos de longitud **a** y **b** está inscrito un cuadrado de tal manera que el cuadrado y el triángulo comparten el ángulo recto y un vértice del cuadrado está sobre la hipotenusa. Hallar el perímetro del cuadrado.*

En particular la pretensión del análisis de las respuestas a este problema, es determinar si emplean la noción de proporción, esto es la igualdad de dos razones, en este caso internas -las dimensiones son longitudes del triángulo y del cuadrado-; y como plantean sus argumentaciones en el intento de darle solución.

La expectativa respecto de las respuestas fue el que de manera general todos usaran la proporcionalidad en la solución.

7.5.1 R E S U L T A D O S

Del total de estudiantes participantes, sólo alrededor de 12 estudiantes lograron llegar a la respuesta esperada, por varias maneras. Cinco de ellos emplearon semejanza de triángulos y proporcionalidad con razones internas; cuatro usaron áreas de los triángulos y del cuadrado; y los menos, tres lo resolvieron empleando el teorema de Pitágoras, siendo uno de los concursantes alumno de nivel medio básico (secundaria).

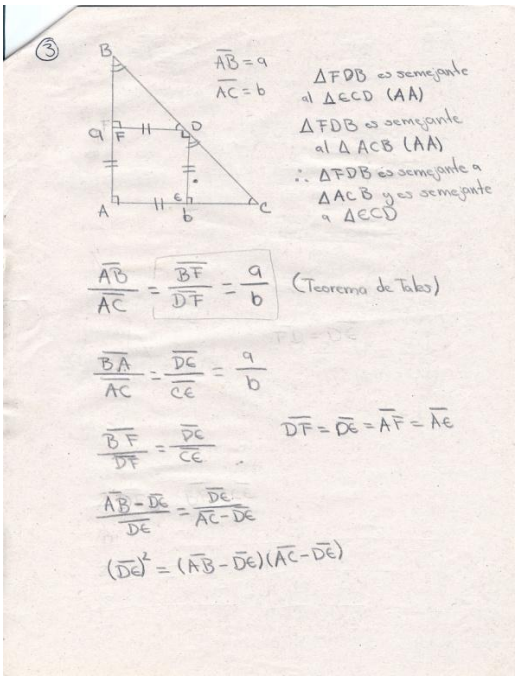
Un estudiante, que no llegó a la solución, presentó la siguiente secuencia:

Dibuja el cuadrado inscrito en el triángulo rectángulo, a partir de la cual hace su planeamiento de solución, como se muestra en figuras 1 y 2. Se observa que el

planteamiento se basa en la semejanza de triángulos y en la noción de proporcionalidad; sin embargo la siguiente expresión ya no respeta dicha semejanza y tampoco es veraz la igualdad de las razones, ya que es inconsistente la razón del lado derecho

$$\frac{\overline{AB}-\overline{DE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}-\overline{DE}}.$$

Entonces los argumentos que siguieron llevaron a resultados incongruentes.



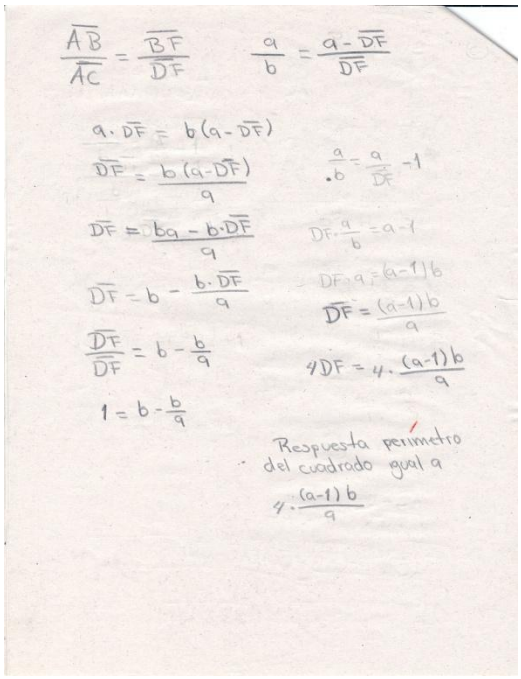


Figura 1. Figura 2.

Una solución, también basada en semejanza de triángulos y en la proporcionalidad de razones internas, donde si llega a la solución es la siguiente:

Primero dibuja el cuadrado inscrito en el triángulo como se muestra en la figura 3:

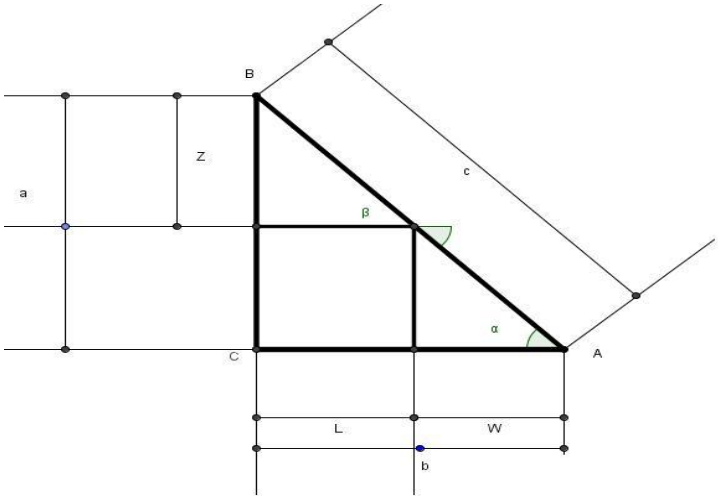


Figura 3. Dibujo del cuadrado inscrito en el triángulo

Escribe las siguientes expresiones:

$$a = L + z \qquad a - L = z \qquad b = L + W \qquad b - L = W$$

$$\alpha = \beta$$

Emplea el concepto de tangente trigonométrica, asociándola a la igualdad de dos razones internas:

$$\tan \alpha = \tan \beta$$

$$\frac{L}{W} = \frac{z}{L}$$

por supuesto, aunque no lo menciona, está implícito el uso de semejanza de triángulos. Continúa con las siguientes argumentaciones:

$$LL = Wz$$

$$L^2 = (b - L)(a - L)$$

$$L^2 = ab - aL - bL + L^2$$

$$aL + bL = ab$$

$$L(a + b) = ab$$

$$L = \frac{ab}{a + b}$$

Entonces el perímetro del cuadrado inscrito en el triángulo es:

$$4\frac{ab}{a+b}$$

Otra forma utilizada, aunque por menos estudiantes, fue con las áreas de los triángulos formados:

Por comodidad se muestra el desarrollo empleando el triángulo anterior:

El área total del triángulo mayor es igual al área del triángulo superior más el área del cuadrado, más el área del triángulo inferior:

$$\frac{ab}{2} = \frac{Lz}{2} + L^2 + \frac{WL}{2}$$

$$ab = Lz + 2L^2 + WL$$

$$ab = L(a-L) + 2L^2 + (b-L)L$$

$$ab = aL - L^2 + 2L^2 + bL - L^2$$

$$\frac{ab}{a+b} = L$$

Entonces el perímetro es

$$4\frac{ab}{a+b}$$

Y una última forma que pocos estudiantes aplicaron, fue por el teorema de Pitágoras:

Empleando el mismo triángulo, un estudiante escribió:
La hipotenusa del triángulo mayor es:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

La hipotenusa del triángulo superior:

$$c_1 = \sqrt{(a-L)^2 + L^2}$$

La hipotenusa del triángulo inferior:

$$c_2 = \sqrt{(b-L)^2 + L^2}$$

Como:

$$c = c_1 + c_2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a-L)^2 + L^2} + c\sqrt{(b-L)^2 + L^2}$$

y simplificando la expresión anterior, tres estudiantes dieron la respuesta.

7.5.2 R E F L E X I O N E S

Los estudiantes que participaron en la Olimpiada Estatal de Matemáticas en el Estado de Hidalgo en el año 2009, en su mayoría fueron del nivel medio superior. De los doce participantes que llegaron a la respuesta esperada, uno fue de nivel medio básico, aunque ya había recibido entrenamiento con los profesores asesores del evento. Dicho estudiante empleó las áreas de las figuras geométricas (triángulo y cuadrado).

La mayoría (cinco) de los alumnos que lo resolvieron emplearon la semejanza que hay entre los tres de triángulos involucrados y a partir de lo cual obtuvieron relaciones de proporcionalidad interna entre las longitudes de los lados (longitud a longitud).

Cuatro de los doce se basaron en el concepto de área, del triángulo y del cuadrado, y en las argumentaciones esgrimidas, no pusieron en juego la noción de proporcionalidad de razones internas, ya que para este enfoque no fueron necesarias. Partieron de la idea de que la suma de las áreas de los dos triángulos (superior e inferior) más la del cuadrado es igual al área del triángulo rectángulo original, esto es "la suma de las partes es igual al todo".

Los tres jóvenes restantes que dieron respuesta aceptable, lo hicieron a través del Teorema de Pitágoras, el cual fue más demandante de argumentaciones algebraicas, y donde tampoco se empleó la noción de proporcionalidad de razones internas.

Cabe mencionar que en todas las estrategias exitosas (las que llegaron a la solución esperada) partieron del dibujo del cuadrado inscrito en el triángulo rectángulo, donde un lado del cuadrado está sobre uno de los catetos, y que coincidentemente es dibujado en la horizontal. Pusieron en juego, a partir de la lectura del enunciado del problema, dos representaciones semióticas, la geométrica y la algebraica (Reséndiz, 2003).

7.5.3 C O N C L U S I O N E S

Se infiere que la proporción cuantitativa no es empleada por la mayor parte de los estudiantes que participaron en la Olimpiada de Matemáticas en el Estado de Hidalgo, en el año 2009. Sin embargo de los doce jóvenes (alrededor del 1 % de los participantes) que dieron la respuesta esperada, cinco involucraron a la proporcionalidad como elemento fundamental para la solución. Esto es, al identificar la semejanza de triángulos deducen la igualdad de dos razones, de manera directa o involucrando la tangente trigonométrica. Ello implica que la noción de proporcionalidad es el primer recurso cuantitativo, que ponen juego los estudiantes, y que es esencia del pensamiento proporcional (Ruiz y Valdemoros, 2006).

Por otra parte el reconocimiento de los objetos trigonométricos se da en sistemas semióticos diferentes: la representación geométrica del cuadrado inscrito en el triángulo y la escritura algebraica de la igualdad de las razones internas, habiendo partido de un enunciado escrito en lenguaje matemático escolar (Duval, 1999).

También se rescata que "el área total del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos menores, más el área del cuadrado", desde otra de las estrategias de solución, donde no se pone en juego la proporcionalidad, pero si se enfatiza la importancia del concepto de área.

Es posible que la aplicación del teorema de Pitágoras por otros participantes, haya sido en virtud de está muy vinculado al triángulo rectángulo, aunque la solución algebraica fue más laboriosa.

Luego entonces, se propone que la noción de proporcionalidad cuantitativa, debe jugar un papel articulador en la didáctica, al ser antecedente conceptual de la noción de linealidad, para la construcción de conceptos trigonométricos en el nivel medio superior y superior. Esto en virtud de la transposición de saberes asociados a los significados de la noción, que van apareciendo a través de la trayectoria escolar de un estudiante (Acosta, et. al., 2010).

Se continúa la búsqueda de precisar algunos indicios para un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate de la noción de proporcionalidad desde la trigonometría, y en particular de la proporcionalidad cuantitativa, posibilita aportar elementos para la Didáctica de la Matemática que pueden contribuir al Currículum Escolar. Incluso el poder repercutir en el nivel medio superior en cursos como

el de Geometría Analítica, e incluso hasta en una primera aproximación al Álgebra Lineal en el nivel superior.

7.6 REFLEXIONES DE LA EXPERIMENTACIÓN

Las estrategias experimentales que se pusieron en juego reflejan ciertas características del *contrato didáctico*, como por ejemplo la desarticulación de conceptos y de sus significados aledaños, por los que han pasado los actores involucrados tanto en las entrevistas, como a través de las respuestas de los cuestionarios. Además se identificaron algunos significados de la *linealidad* envueltos en los conocimientos y habilidades mostradas por los profesores de los niveles, medio superior y superior, y por los estudiantes de licenciatura y de bachillerato que participaron.

Estos hechos experimentales, están basados en la recapitulación psicológica del desarrollo intelectual sobre los saberes asociados a la *linealidad*, de los partícipes, al "pasar" por el *currículum escolar de la noción de linealidad*. Asimismo bajo la consideración de que la expresión oral es reflejo del pensamiento de un individuo (Schopenhauer, 1987), y para el presente caso, las declaraciones de los significados de la linealidad.

En el proceso dialéctico propuesto por la entrevista, el primer conocimiento matemático manifiesto, es la tangente trigonométrica de uno de los ángulos del triángulo como una razón. Para después igualar dos razones del triángulo rectángulo, sin denominarla proporción de manera explícita, manifestando que no es necesario el ángulo de la tangente trigonométrica. Además un estudiante comentó que *para que haya semejanza, los ángulos deben ser iguales o los lados proporcionales.*

Anclando el triángulo rectángulo al sistema cartesiano, se descubre que hay una recta que es colineal a la hipotenusa, y que presenta una pendiente negativa vinculada a una de las razones descubiertas.

A pesar de que de manera inmediata no surge el término linealidad, si aparecen las palabras: *semejanza, proporcionalidad, recta y pendiente.* En particular se menciona que *la proporcionalidad dada por la altura entre la base, y la pendiente de una recta, es la misma.* Además se identifica cierta *constatificación* de magnitudes, como son: *el ángulo, la igualdad de dos razones y la pendiente*. De ello emana la conclusión de que la *razón de cambio constante* es una característica inherente de la recta. Además que la diferencia entre

dos rectas, sin considerar a la ordenada al origen, es el *cambio de pendiente* lo que implica que *cambia la proporcionalidad***.** Manifestaron que la recta es una forma de la función lineal, cuya característica semiótica algebraica está dada por el *exponente de la variable* y que la pendiente *no cambia.*

Aunque no de forma inmediata, durante la entrevista se aprecia la transformación de la semejanza y de la proporcionalidad, como características geométricas, en algo analítico, al aparecer la expresión algebraica de la recta que involucra a la pendiente.

Los entrevistados asocian una tasa de cambio variable, con un fenómeno no lineal y con la derivada, diciendo *ahora la pendiente en cada uno de esos puntos sería la derivada; la proporción sería la derivada, donde* en esos casos la proporcionalidad ya no es constante.

Esta parte de la entrevista colectiva, deja entrever que los estudiantes participantes, están "anclados" al *contrato didáctico* por el que han transitado en la escuela. Además en el transcurso del evento no mostraron fluidez de concepciones y significados asociados a la *linealidad*. Se esperaba el surgimiento natural de dichos significados, esto es, que adoptaran el papel de sujeto epistémico, lo que implica que actuaran por razones intelectuales. Pero se comprueba que los entrevistados están fuertemente influidos por un contrato ligeramente didáctico o incluso no didáctico, en virtud de su actuar como sujetos que han dado respuesta a presiones de sus profesores (sujeto didáctico) (Ávila, 2001).

Por lo que respecta a la segunda parte de la entrevista clínica colectiva bajo la consideración de que se trata de un problema de connotación sociocultural muy antiguo asociado al pago de impuestos y donde se considera que el dinero cambia de valor en el tiempo, aparecen las variables: *capital inicial, el interés (positivo o negativo), los intervalos de tiempo*. También los entrevistados propusieron expresiones lineales como: *Cantidad(n)= C + n (i·C)*), *C(t)= C_i + t(i·C)*), o la expresión anterior modificada *C (t)= C_0 + t(i·C_0)*). Se argumentó de forma colectiva que la variable *n* en la primera expresión, es discreta, y que *t* de la segunda expresión es continua, además que C_0 es fija. En este contexto sociocultural económico, se identificó el tipo de variable que puede surgir en un problema de este tipo.

Desde la construcción de argumentos fundados en el problema de la ganancia financiera, partiendo de un capital inicial y una tasa de interés fijo, se identificaron las expresiones matemáticas como: *la ecuación de una recta o una función lineal*, vinculada a la *variación directamente proporcional*, representada por el *interés.*

Por lo que respecta a las gráficas asociadas, trazaron los ejes cartesianos identificando al capital inicial como la ordenada al origen de una recta que representa el comportamiento de este fenómeno financiero de tipo discreto, ya que los puntos están a lo largo de una línea recta. Aclararon que *para fines prácticos* sólo debe considerarse el primer cuadrante. Descubren que: *existe una relación en que se va incrementando siempre la misma cantidad,* que depende *del valor de i,* esto es *cuanto se incrementa a partir del capital inicial y del interés,* lo que se regula por *la proporción,* o *la pendiente de la recta.* Puesto que *si es una función lineal y el interés sólo afecta a la cantidad inicial, se puede decir que la pendiente sería una constante.* Con estas argumentaciones se vincula el *interés* con la pendiente de la recta asociada, y aparece la forma conocida: $y = m\ x + b$ donde la *pendiente es m* y representa *el interés* lo que describe *una tasa fija.* Se concluye que *si la pendiente cambia,* la gráfica es distinta, circunstancia que vinculan con el problema de la primera parte de la entrevista. Sin embargo argumentan que sólo algunos de los puntos están sobre una línea por lo que concluyen que son *colineales* y representan *el dominio* de una *relación lineal,* la cual *se basa en el interés y en el periodo de tiempo.*

Asociaron el papel de *n* como *variable independiente* y resaltaron que es necesario fijar *el dominio de equis* como una *variable discreta que se incrementa conforme los números naturales.*

Por lo que respecta a la concepción de un comportamiento *no lineal* de un fenómeno financiero semejante, comentaron que no se representaría mediante *una recta,* pero argumentan que debería existir una *relación que controlara el crecimiento o decrecimiento del capital.* Por lo que dijeron que el capital aumentaría debido a que *el incremento es mayor.* Al poner atención al registro de representación gráfico de este posible fenómeno *no lineal,* dicen que *estaría como que más inclinado*. Además de que *es igual que el interés, entre más alto va subiendo más.*

Al involucrar la expresión del movimiento uniforme rectilíneo con velocidad constante $x(t)=x_0+vt$ como expresión semejante a las surgidas en las argumentaciones, los estudiantes ubican a *t* al final del eje horizontal y a *x(t)* como el eje de las ordenadas, en un sistema cartesiano de coordenadas. Además aclara que *v* es una variable que representa crecimiento, de manera análoga que *i (interés)* en el problema financiero, identificándola con *la*

pendiente. Descubren que el papel que juegan es *como van cambiando los valores en el tiempo*, además de la significación de que tan rápido crece o decrece la variable.

Los entrevistados comentaron que en ambas partes de la entrevista de abordan *rectas y funciones lineales*, ya que *el crecimiento es fijo*, y si no es el caso se trataría de comportamientos no lineales, ya sea discretos o continuos. También asociaron estos comportamientos de *interés sobre interés* con expresiones cuyas variables estaban en una potencia diferente a uno, lo que *no sería una función lineal*. Con ello pusieron en la palestra el llamado interés compuesto, el cual deja de ser una forma lineal.

Comentaron que *la derivada refleja la pendiente* en un punto dado, y asociaron el hecho de que para que sea *una función sea lineal, el exponente* de la variable tendría que ser *uno*, y al derivarse el *exponente* disminuye originando que *la pendiente sea constante*. Además agregaron que para el caso de que la derivada fuera una función no constante, la variación no es constante y *el exponente varía* y es distinto de uno. Ello lo corroboraron al derivar $x(t)=x_0+vt$ con respecto a t, y ver que $x'(t)=v$. También identificaron que este fenómeno corresponde al *movimiento rectilíneo uniforme*, cuya característica es *la velocidad constante*. Por lo que se concluye que la velocidad es constante y por tanto la razón de cambio también lo es constante y que se relaciona con la noción de proporcionalidad, debido a que *en cada intervalo de tiempo va aumentando la misma distancia*. Además que la función que describe ese movimiento es *una función lineal.*

De manera explícita los estudiantes entrevistados resaltaron la importancia de entender y abordar un problema desde diferentes registros de representación: *numérico, analítico* y gráfico. Además puntualizaron que hay que saber ver un problema, en el sentido de apreciar las diferentes formas en que puede ser abordado; y que hay diversas maneras de usar *la ecuación de una recta*, esto es que hay *relaciones lineales* en determinados problemas que *están ahí y* que no se percata de ello; y de que se puede llegar a partir de distintos problemas a las mismas expresiones lineales. Por otra parte que hay amplias aplicaciones y dieron a entender que su paso por la escuela ha sido sin reflexionar suficientemente.

También se acota que cuando *se rompe la linealidad*, hay la tendencia a regresar a ella, y se comentó puntualmente que en una función parabólica hay un cierto retorno a la linealidad cuando se encuentra la tangente *que en realidad es regresar a la recta para describir otra vez* un fenómeno *porque la linealidad como que nos hace ver la manera más fácil*, de mirar

su comportamiento creciente o decreciente. Esto resalta la importancia y significación de la *noción de linealidad*, en los fenómenos de variación, tanto continua como discreta. Además de que esta *noción* está inmersa en el álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, con la derivada e integral como operadores lineales. No porque necesariamente esté vinculado en si mismo con la recta, sin embargo si con *lo lineal*.

Se ha indagado acerca de algunos elementos del *contrato didáctico* que se manifiestan a través de distintas representaciones semióticas en donde está involucrada la noción de linealidad. Algunas retrospecciones que se desprenden de la segunda parte de la entrevista clínica colectiva, son que los estudiantes pusieron en juego conocimientos matemáticos como: *variable, recta, función lineal, dominio, crecimiento, tiempo, variación, movimiento rectilíneo uniforme, derivada, gráfica de una recta.* Aunque en principio lo hicieron de manera desarticulada, pero en el transcurso de la entrevista los fueron articulando. El contexto financiero en que se desarrolló permitió que asociaran conceptos matemáticos, como *pendiente de una recta, razón de cambio constante* y *proporcionalidad* con el concepto mercantil de *interés simple* o *tasa de rendimiento.* Esto pone en evidencia que desde una perspectiva dialéctica, reflexiva y contextual es posible el surgimiento de distintos significados de la *linealidad* que el propio *contrato didáctico* había fomentado, pero de manera desarticulada.

Por lo que respecta a las respuestas al cuestionario aplicado a tres profesores, dos de nivel medio superior (NMS), uno de superior (NS), y a un estudiante de licenciatura (L), dentro de las actividades del curso corto *El vínculo conceptual entre la proporcionalidad y la linealidad,* se evidenció que aun en adultos de escolaridad superior al bachillerato, también emplean estrategias parecidas a las que despliegan niños de alrededor de 11 años (Ruiz y Valdemoros, 2006). También hubo un reconocimiento de patrones en base a la longitud de uno de los lados de figuras geométricas que cambia de manera proporcional. Además se emplearon, el conteo directo, el razonamiento multiplicativo lo que implica el uso del pensamiento proporcional (Sección 3.2 de esta tesis). Con frecuencia se utilizó el conteo directo y en otras ocasiones, una razón de cambio con respecto al tamaño de las figuras propuestas, aunque también se presentó cierta confusión por la diferencia entre la variación del área en círculos y la variación de sus diámetros. Con esto se identificó una razón de cambio con respecto al tamaño de la figura, como una manifestación del pensamiento

proporcional cuantitativo. La notación de la: regla de tres, proporción escrita de la forma *a:b::c:d* y de la igualdad de dos razones, aparecen desde la tarea 6. En ciertas argumentaciones se identifica primero el valor unitario constante y posteriormente un participante emplea el pensamiento multiplicativo, y el otro usa la regla de tres.

En la tarea 10 también se identifica el costo unitario, se emplea la regla de tres y después despejan la variable *x*.

En la tarea 11 un participante obtiene la tasa unitaria por tiempo (metros cavados por día) y luego emplea el razonamiento multiplicativo para obtener el total de días necesarios; otro usa la regla de tres directamente; y el estudiante sólo escribe la respuesta. Por las respuestas ellos se percatan de la naturaleza lineal del problema. En cambio en la tarea 12, sólo los dos profesores de nivel medio superior se percatan que la variación del área implica un comportamiento no lineal, a diferencia del cambio que sucede con el perímetro, aunque en el proceso de solución emplean una regla de tres, donde se involucra el cambio proporcional del área. El profesor de nivel superior manifiesta un pensamiento ingenuo (Bachelard, 2004) al emplear de manera directa una regla de tres donde involucra la longitud del lado del cuadrado, en lugar del área, lo cual implica que no distingue que se trata de un problema no lineal considerando el perímetro. Finalmente el estudiante de nivel superior tampoco distingue la diferencia entre esta tarea y la anterior, en cuanto al comportamiento lineal, por lo que muestra también un pensamiento ingenuo.

Por lo que respecta a la última tarea, donde se pide plantear y resolver un problema donde las variables tienen un comportamiento lineal, todos los cuestionados muestran un pensamiento algebraico al solucionarlo a través de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas. Nadie intenta resolverlo por medio de procesos aritméticos (pruebas ensayo error numéricas para el número de cabezas y patas), como lo resolvería un niño de educación elemental (Filloy y Rojano, 1989).

En un problema las personas cuestionadas emplearon estrategias diferentes, e incluso respuestas diferentes.

A partir de esta actividad se obtuvieron las respuestas matemáticas, las argumentaciones basadas en distintos significados que tiene la noción de linealidad y un listado de las competencias matemáticas que supuestamente se ponen en juego al momento de resolver las tareas, esto último acorde al documento de Luis Rico (Rico, 2005).

Considerando al pensamiento proporcional como un elemento fundamental en la construcción de conceptos trigonométricos, es de interés el pensamiento proporcional cuantitativo, que aparece cuando el estudiante puede hacer uso de las razones y proporciones y esgrime, las razones entre magnitudes con las mismas unidades (razones internas).

Por lo que respecta a las estrategias que emplearon los estudiantes en el concurso de la Olimpiada Estatal de Matemáticas 2009 en el Estado de Hidalgo, se concluye que la proporción cuantitativa no es empleada por la mayor parte de los estudiantes participantes. Sin embargo de quienes dieron la respuesta esperada, cinco estudiantes de doce incluyeron a la proporcionalidad como elemento fundamental para la solución. Con ello se infiere que la noción de proporcionalidad y por ende la linealidad es el primer modelo "del que se hecha mano" como recurso para resolverlo, lo cual coincide con los resultados manifiestos por Ruiz y Valdemoros (2006). Se rescata una estrategia donde no se pone en juego la proporcionalidad, la cual está basada en el concepto de área, al considerar que "el área total es igual a la suma de las áreas de las partes". También se planteó otra manera de resolverse aplicando el teorema de Pitágoras, aunque su desarrollo algebraico es más elaborado.

Por otra parte durante el proceso de solución fueron empleadas transformaciones de los distintos sistemas semióticos de los objetos trigonométricos involucrados, esto es a partir de un enunciado escrito en lenguaje cotidiano, generaron la representación geométrica del cuadrado inscrito en el triángulo y la escritura algebraica de la igualdad de las razones internas, (Duval, 1999).

Por lo obtenido se propone que la noción de proporcionalidad cuantitativa en su calidad de, noción metamatemática y antecedente conceptual de la noción de linealidad, debe ser un elemento articulador en la didáctica (Acosta, et. al., 2010).

El proceso de búsqueda de caracterizar ciertos indicios para un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar es permanente y continuo. Para ello el rescate de la noción de proporcionalidad desde distintos tópicos de la matemática, como por ejemplo de la trigonometría, permite brindar elementos para la Didáctica de la Matemática que pueden mejorar el Currículum Escolar.

REFLEXIONES
Y
CONCLUSIONES

En este trabajo, inmerso en la Escuela Mexicana de Matemática Educativa, se abordó el problema del aprendizaje de la noción de *linealidad*, desde las perspectivas, histórico-epistemológica, sociocultural, cognitiva y didáctica, rescatándose sus significados que se expresan en el ámbito escolar, y que han propiciado que dicha noción, como un saber erudito, sea transpuesto en un objeto de enseñanza.

A partir de esta recuperación de significados, manifestada a través de sus estatus didácticos como noción, está una *idea germinal*, (Cantoral, 2001) de la *linealidad*. Ello debido al papel que juega en la construcción de conocimiento asociado a la misma noción, y su ubicación como un movilizador tanto de procesos como de significados, los cuales se construyen de forma paulatina, lográndose su total sentido epistémico. Se ha identificado desde esta investigación que la *idea germinal* que se manifiesta desde el recate de la noción de linealidad, desde culturas añejas, hasta la madurez conceptual alcanzada a mediados del siglo XIX, de la cognición y de la misma didáctica, es: *ratio mutabilitas constant* –razón de cambio constante-.

A C E R C A D E L O D I D Á C T I C O

En términos de la transposición didáctica, se considera que el saber enseñado es distinto cualitativamente del saber erudito, de manera tal que las nociones de proporcionalidad y *linealidad* tienen un funcionamiento didáctico acorde a los distintos significados que adquieren según los niveles escolares en que se pongan en escena. Algunas de las consideraciones al respecto que se pueden resaltar, son las siguientes:

- La enseñanza temprana de la razón y la proporción debe iniciar en educación preescolar, en aspectos cualitativos empleando esquemas y representaciones que allanen el desarrollo de patrones de percepción, como respaldo a los procesos de cuantificación que activan el pensamiento proporcional.
- Se requiere del razonamiento multiplicativo para abordar el razonamiento proporcional.
- Es necesario involucrar estrategias que tomen en cuenta, al pensamiento proporcional, tanto cualitativo, como cuantitativo.
- Es posible estudiar a la proporcionalidad y a las funciones lineales en R^2 que pasan por el origen por medio de la progresión aritmética.

- Se puede resaltar que en el movimiento rectilíneo uniforme, el referente de lo lineal es la velocidad, la cual se puede considerar como *ratio mutabilitas constant*. Si se toma en cuenta a la expresión conocida $x=x_0+vt$, es posible identificarla a su vez como una función lineal. Circunstancia que no se explicita en la didáctica, por lo que es importante incluir representaciones analíticas, numéricas, gráficas y contextuales.
- Existe una *articulación conceptual* entre el razonamiento multiplicativo, el razonamiento proporcional y los significados de la noción de *linealidad*. Sin embargo, en la didáctica vigente no es explícita la articulación de tales significados en tanto un estudiante avanza en el currículo escolar, lo que propicia una desarticulación epistemológica que ocasiona inconsistencias didácticas y cognitivas.

Por lo que respecta al análisis didáctico de los libros de texto de matemáticas, administración y economía, y química, se examinó el estatus didáctico de: conceptos, definiciones y usos vinculados a las nociones de *proporcionalidad* y *linealidad*, en base a la caracterización dada por Chevallard (1997), referidas como *nociones protomatemáticas, paramatemáticas, matemáticas y metamatemáticas.* De tal consideración se desprende lo siguiente:

- Partiendo de la idea germinal de la linealidad como: *ratio mutabilitas constant*, es posible conceptualizar a la derivada, en donde la proporción toma el estatus *protomatemático*, dado que la linealidad no es en si un objeto de estudio ni una herramienta en el contexto del movimiento rectilíneo uniforme.
- En fenómenos caracterizados por una aceleración constante, ésta es ahora la *ratio mutabilitas constant* de la expresión lineal $v= v_0 + at$, la cual funciona como noción *paramatemática*, dado que sin ser la linealidad el objeto de estudio, resulta ser un elemento explicativo del evento físico de que se trate.
- La resolución de una ecuación diferencial por medio de aproximaciones numéricas, se efectúa por medio de una la linealización propuesta en el Método de Euler, denotando de igual modo el carácter *paramatemático* de la linealidad.
- En la definición de la función lineal el coeficiente de la variable independiente, identificado como la pendiente de la recta, subyace la *ratio mutabilitas constant*. En este

contexto la proporción directa mantiene un estatus *protomatemático*, mientras que la linealidad interviene en lo *paramatemático,* al no ser objeto de estudio por sí misma.

- Por otra parte, cuando se generaliza la función lineal para *n* variables, la linealidad también presenta un carácter *paramatemático.*
- Ahora bien, en la definición de transformación lineal, la linealidad manifiesta un estatus didáctico de *noción matemática*., ya que en este caso sí es un objeto de estudio.
- En la definición de la multiplicación de un vector por una matriz, como una combinación lineal entre el vector dado y los renglones de la matriz, aquí la *linealidad* toma el papel *paramatemático*, dado que es una herramienta usada para explicitar tal producto.
- La definición de espacio vectorial se sustenta en la propia definición de transformación lineal, fungiendo la *linealidad* en términos de lo *paramatemático.*
- Se resalta que los conceptos de derivada e integral son nociones matemáticas, pero además mantienen el estatus *paramatemático* con respecto a la linealidad, cuando son identificados como operadores lineales.
- Por su parte la función lineal $f(x) = m\,x + b$, no es estrictamente una transformación lineal, aún y cuando *m* es la *ratio mutabilitas constant*, hecho relevante que pocas veces aparece y se aclara en los cursos de Álgebra Lineal. Esto posteriormente se convierte en un obstáculo epistemológico que propicia conflictos cognitivos en los estudiantes.

- El concepto de dependencia lineal es un eje de articulación conceptual, ya que involucra diversas filiaciones epistemológicas, entre varios temas del Álgebra Lineal, donde a su vez se puede resaltar el papel que juega la proporción directa, intentando de ese modo explicitar su transición de lo *protomatemático*, a lo *paramatemático*, dado su rol herramental.

Otras consideraciones respecto de los libros de texto, son:

- En la solución de algunos problemas contextuales de la ingeniería, donde intervienen varias variables en las leyes, de Hooke, Kirchhoff y Ohm, se requiere emplear matrices y sistemas de ecuaciones, la proporcionalidad juega un papel como noción *paramatemática* y la *linealidad* tiene un estatus *protomatemático*.

- En la definición de la ecuación diferencial lineal de orden-n, *"lo lineal*" se caracteriza por la condición de ser lineal el operador que la genera. En este caso, al no ser objeto de estudio, la noción de linealidad tiene el estadio *paramatemático*.
- Por su parte las transformadas discreta y continua de Fourier, son operadores lineales donde nuevamente la linealidad, cumple su cometido *paramatemático.*
- En la Programación lineal, la noción de linealidad no es la intención de estudio, ni es un implemento explícito para su entendimiento, aún y cuando los objetos matemáticos involucrados como las ecuaciones y sistemas sean de naturaleza lineal, por lo que la linealidad interviene de una forma *protomatemática.*
- El tratamiento que se le da al tema de estequiometría en algunos textos de Química General, es por medio de las proporciones cuantitativas de las sustancias, empleadas en el balanceo de una reacción química. En este caso la proporción expresada como regla de tres, acoge un estatus *paramatemático.*

A partir de la visión de esta investigación se valora a la noción de linealidad como un ingrediente básico en la construcción del saber matemático. Tal noción cumple un cometido de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada. Se ha atestiguado desde el análisis de los libros de textos los distintos estadios didácticos manifiestos desde los diferentes significados de las nociones de linealidad y proporcionalidad.

También del análisis de textos, se identificaron, ciertas incongruencias conceptuales y la manera en que se instalan las nociones de proporcionalidad y linealidad, desde la matemática elemental a la matemática avanzada.

Estas incongruencias se propician cuando:

- En la matemática elemental, se da una ruptura conceptual de lo proporcional a lo lineal, al tratar de generalizar la proporcionalidad a la llamada función lineal de la forma pendiente ordenada al origen, por la aparición del término independiente en la expresión de la función.
- Por su parte, en la matemática avanzada, específicamente en el Álgebra Lineal, se propicia otra incongruencia cuando no se explicita suficientemente el hecho relevante de que la función lineal $f(x)= a\ x + b$, cuando $b \neq 0$, no satisface la definición de

transformación lineal, mientras que la función $f(x) = ax$, sí la cumple, aunque en ambas expresiones aparece la *ratio mutabilitas constant* como elemento concordante.

- Un hecho didáctico de relevancia de este trabajo es el resaltar la forma en como se articulan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa de vectores en R^2 y en R^3. Esto sucede cuando uno de los vectores se expresa en términos de los otros, de manera tal que la noción de proporcionalidad debería, en este contexto, escenificar un rol paramatemático, en el entendido de que se está empleando el concepto extendido de colinealidad.
- Con respecto a lo anterior, una generalización de la proporcionalidad para el caso de R^n con $n > 1$, se da cuando los vectores son linealmente dependientes, en cuyo caso como es sabido, se representa un vector como una combinación lineal de los otros.
- Es posible, si se define una nueva operación, denotar la propiedad anterior en forma matricial generalizada, donde se representa la dependencia lineal en términos de una relación de proporcionalidad.
- En el caso de los operadores lineales que generan a las ecuaciones diferenciales lineales, la *linealidad* se ubica en el operador y no en alguna de las variables que participan en la propia ecuación diferencial. Esta peculiaridad se manifiesta al hallar la solución general de una ecuación diferencial lineal no-homogénea, mostrada a la vez como combinación lineal de la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada y de la solución particular de la ecuación diferencial lineal no-homogénea.

Este trabajo de investigación también ha posibilitado una breve reflexión acerca de algunas de las ecuaciones de la recta y su vínculo con la noción de *linealidad.* Se observa que la *linealidad* en la didáctica del nivel superior no es explícita desde las distintas representaciones analíticas de la recta en el plano. Las ecuaciones mismas representan un obstáculo en la interpretación del concepto de transformación lineal:

- A partir del referente geométrico de la recta en R^2, la noción de *linealidad* tiene nexos cercanos con la noción de paralelismo, pero tal circunstancia no se hace explícita en la escuela.

- El tema de *la recta* en bachillerato está desarticulado con el estudio de los determinantes, en particular, en lo que se refiere a la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, entre otras definiciones, se puede representar por medio de un determinante y esto no se vincula, ni con la proporcionalidad, ni con la dependencia lineal, lo cual favorece un enfoque matemático escolar que confunde los significados de la *linealidad*.
- La forma paramétrica de la recta une las nociones de paralelismo y dependencia lineal, además de representar el movimiento de una partícula por la trayectoria rectilínea. Sin embargo, esta forma de introducirla se relaciona de forma clara con la *linealidad* en la didáctica. Esto representa un obstáculo en la interpretación de su definición, tanto como mapeo lineal, como transformación lineal.
- Es posible explicar temas como: *Polinomios de Lagrange*, *Métodos de aproximación*, *Convexidad*, por medio de ecuaciones de rectas, pudiendo presentar variantes a la *noción de linealidad*.

Es de resaltarse el hecho de que los significados de la noción de linealidad representan un andamiaje fundamental de articulación conceptual en la matemática escolar y se distingue su importancia transversal entre la matemática elemental y la matemática avanzada, esto es debido a la condición metamatemática de la noción de *linealidad*. En tal caso, la adecuada instalación de los elementos conceptuales antes señalados, propiciaría un aprendizaje matemático bien articulado con diversos conceptos del Álgebra Lineal.

A C E R C A D E L O E P I S T E M O L Ó G I C O

En cuanto al rescate de significados en lo histórico-epistemológico, se identificaron, sin ser únicos ni exhaustivos, cuatro escenarios, de los cuales se señalan los siguientes:

- Respecto al primer escenario, donde se ubicaron a las culturas ancestrales egipcia, china y babilónica, se rescata que a partir de la necesidad social del cobro de impuestos, se empleó para su cálculo la proporción directa y la progresión aritmética.
- El segundo escenario refiere a autores clásicos griegos, quienes usaron a la noción de proporcionalidad como componente epistemológico en la constitución de muchos resultados de la época, como en el cálculo de áreas y volúmenes, además de las conceptualizaciones de la recta en la Geometría Euclidiana, entre muchos otros. En esta

época un elemento fundamental fue el desarrollo conceptual de la noción de proporcionalidad.

- En el tercer escenario, se presenta un vínculo conceptual entre la noción de proporcionalidad y el nacimiento incipiente de la noción de linealidad, siendo Descartes y Fermat, quienes redireccionaron los resultados de Apolonio acerca de los lugares geométricos. En esta época, es cuando se manifiesta de manera más clara una filiación epistemológica entre las nociones de proporcionalidad y linealidad, y ya para el siglo XIX se inicia una ruptura entre ambas nociones.
- El último escenario histórico se caracteriza la génesis y evolución del Álgebra Lineal durante el siglo XIX, cuyo amplio fundamento epistemológico está dado por la noción de linealidad, lo cual gesta conceptos como: dependencia e independencia lineal, rango, transformación lineal entre otros. En particular la definición de transformación lineal es la que aglutina todas las conceptualizaciones previas de la linealidad y es en cierto modo "la cumbre" de la noción bajo estudio. Por otra parte, es en esta época, donde es más marcada la ruptura epistemológica entre las nociones de proporcionalidad y linealidad.

Algunos de los elementos epistemológicos que se pueden rescatar para la didáctica de la matemática son:

- Entre los escenarios históricos se mostraron rupturas epistemológicas de las nociones de linealidad y proporcionalidad. Esto implica una gran desarticulación entre sus significados en tanto un estudiante recorre el currículo.
- A partir del análisis de los libros de texto de los siglos XVIII XIX y XX, ha permitido hacer un rescate de la evolución epistemológica de la linealidad en la didáctica de este periodo, que tiene cierto paralelismo funcional con la historia de la ciencia.
- En la génesis del Álgebra Lineal, no es patente la presencia de la noción de proporcionalidad, dado que hay una ruptura de carácter epistemológico, ya que el inicio de la misma, fue a partir de la solución de sistemas de ecuaciones lineales y su posterior fundamento matemático en la teoría de espacios vectoriales. El rescate conceptual implica establecer en lo didáctico, una filiación entre la proporcionalidad con algunos de los conceptos iniciales del Álgebra Lineal.

- Al identificar cierto paralelismo entre los procesos de la didáctica escolar actual, con el desarrollo de las ideas del Álgebra lineal, se toma en cuenta que la proporcionalidad es un elemento articulador, con carácter *metamatemático,* cuyos significados se originan en la matemática elemental, lo cual repercute en el entendimiento de la linealidad misma.

En este trabajo se considera a la linealidad como una noción que ha evolucionado en la historia, a partir de necesidades socioculturales de las épocas referidas. Con el propósito de vincular conceptualmente los significados de la proporcionalidad y las relaciones funcionales lineales, es necesario tomar en cuenta secuencias didácticas en donde se involucren andamiajes conceptuales articuladores.

A C E R C A D E L O S O C I O C U L T U R A L

Al tomar en cuenta el aspecto *sociocultural* de los significados de la *linealidad,* en su génesis desde necesidades sociales, se resalta lo siguiente:

- Los requerimientos sociales antiguos y modernos, han fomentado el desarrollo de las ideas de la *linealidad,* como una construcción social del saber matemático, manifiesto desde la necesidad de administrar el gobierno y los bienes en lo general. Esto ha impulsado y fomentado el desarrollo del conocimiento científico y técnico, en particular para calcular los impuestos, cuya representación más simple es una ecuación lineal. En este tenor parece que la matematización pragmática de la administración es un elemento sociocultural de referencia del origen de la *proporcionalidad* que posteriormente evoluciona a la *linealidad*. Ello coincide con el enfoque *Socioepistemológico* que resalta que las *prácticas sociales que han dado origen al conocimiento en las comunidades, donde los escenarios las problematizan y les permiten su existencia*.
- La evolución de la *linealidad* en el devenir histórico, ha tenido cierto paralelismo, funcional y no estructural, con los procesos cognitivos de los estudiantes, en aspectos precientíficos, lo cual tiene cierta correspondencia con el enfoque del *Recapitulacionismo*.

- Por otra parte, en estudios con el enfoque *Etnomatemático*, se rescatan ciertos significados de la noción de *linealidad*, manifestados a través del uso de la proporción, en actividades matemáticas que se realizan en diferentes oficios y profesiones.

Sobre la relevancia del aspecto social en el proceso de aprendizaje, se considera lo siguiente:

- Se considera que tanto el medio sociocultural, como los instrumentos de mediación, como el lenguaje, fomentan la *cognición* de los significados de la linealidad desde ámbitos didácticos y no didácticos. Además, el proceso mental de internalización de los significados de la *linealidad*, es un elemento que construye en parte la conciencia individual y social, a través de un proceso paulatino en tanto un individuo transita por la escuela, como lo sostiene la *Teoría de Vygotski* en lo general.
- El pensamiento social incide en la apreciación que tiene un estudiante de los significados de la *linealidad* desde los hechos cotidianos, escolares y extraescolares, lo cual puede ser concordante o discordante con la formación intelectual que él tenga, esto es coincidente con el enfoque teórico del *Pensamiento Social*,
- En el ámbito sociocultural de la ingeniería, es frecuente considerar como característica esencial de un sistema lineal, el hecho de que la magnitud de la variable de la salida del sistema es proporcional a la magnitud de la variable de la entrada del sistema, lo cual es una apreciación social en esta disciplina.
- Una concepción social muy generalizada es la referida a que muchos de los fenómenos que suceden en el entorno de los estudiantes de secundaria en escenarios geométricos, presentan tasas de variación constante, es decir existe la creencia, socialmente validada entre ellos de que siempre suceden de manera lineal, aunque no sea así.
- Es importante rescatar las estrategias cotidianas que emplean personas de poca escolaridad en la solución de problemas, que en la tradición escolar involucran fracciones, decimales y la misma proporcionalidad, para su posible incorporación en la didáctica escolar.

A C E R C A D E L O C O G N I T I V O
D E S D E L A E X P E R I M E N T A C I Ó N

Los resultados de los hechos experimentales, evidencian ciertas peculiaridades del *contrato didáctico*, por el que han pasado los protagonistas. Además se identificaron ciertos significados de la *noción de linealidad* circunscritos en los conocimientos y habilidades exhibidas por docentes de los niveles, medio superior y superior, y por estudiantes de licenciatura y de bachillerato participantes.

En particular las entrevistas consideran la recapitulación psicológica del desarrollo intelectual sobre los saberes coligados a la *linealidad*, bajo la apreciación de que la expresión oral es manifestación directa del pensamiento de una persona.

Respecto a la entrevista clínica colectiva, se obtuvieron los siguientes elementos de análisis:

- Se identificó una *constatificación* de magnitudes, desde los ángulos, la igualdad de dos razones y la pendiente, en el problema geométrico, y del interés, y la velocidad en el problema en contexto. De tal manera que se corrobora que la *razón de cambio constante* es una característica inherente de fenómenos económicos y físicos, y de la recta o función lineal, representada por la pendiente y vinculada con la proporcionalidad. Manifestándose en este proceso la idea germinal de la linealidad: *ratio mutabilitas constant*.
- En problemas en contexto, en ocasiones surgen comportamientos lineales de variación discreta, acotados en un dominio, pero regidos por una razón de cambio constante.
- Cuando estudiantes aventajados de licenciatura son enfrentados a un problema no lineal, en ocasiones asocian el significado de una razón de cambio no constante, relacionándolo adecuadamente con la derivada y la pendiente, que en este caso varían, y donde aclaran que la proporcionalidad ya no es constante.
- Se cotejó que los estudiantes entrevistados se percataron que al derivar la expresión $x(t)=x_0+vt$, que representa la posición de una partícula con respecto al tiempo, identificaron a la velocidad como la razón de cambio constante, lo cual se vincula con la *ratio mutabilitas constant*.

- Cuando se rompe la *linealidad,* hay la propensión a retornar a ella, es decir se tiende a "linealizar" fenómenos no lineales, para ver su comportamiento.
- Los estudiantes están "anclados" al *contrato didáctico* que se expresa a través de las representaciones semióticas puestas en escena durante la entrevista. Los entrevistadores habían supuesto que el surgimiento de los significados de la linealidad fuera espontáneo y natural. Sin embargo, hubo necesidad a través de un debate de ideas, de poner en juego elementos de discusión que permitieran percatarse de las filiaciones conceptuales entre los significados de proporcionalidad y la *linealidad.*
- En la entrevista se dio un debate colectivo, donde aparecieron argumentaciones y reflexiones alrededor de algunos de los significados de la *linealidad* que el propio *contrato didáctico* no propicia su adecuada instalación, ni su articulación conceptual.
- En este debate se puso en juego un proceso dialéctico, reflexivo y contextual donde se evidenció el surgimiento de ciertos aspectos de la *linealidad,* que se les dificulta ponerlos en escena, debido a la manera desarticulada en que han sido aprendidos.

Por lo que respecta al cuestionario aplicado se tiene las siguientes distinciones:

- Cuando a los adultos de escolaridad mayor al bachillerato se les enfrentan a problemas de proporcionalidad directa, sus estrategias, son las esperadas, muy similares a las que emplean niños de sexto año de primaria, como son identificación de patrones en base al cambio proporcional, el conteo directo, el razonamiento multiplicativo lo que implica el uso del pensamiento proporcional. Ellos reconocen una razón de cambio constante que es una manifestación del pensamiento proporcional cuantitativo, representada por la regla de tres, o de la forma *a:b::c:d,* o como la igualdad de dos razones.
- Hay profesores y estudiantes de nivel superior que presentan un pensamiento ingenuo al tratar de resolver un problema no lineal mediante el empleo directo de una regla de tres.
- Con respecto a las respuestas al último problema, revelan un pensamiento algebraico al haber solucionado el sistema de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas. Nadie intentó resolverlo a través de procesos aritméticos (pruebas ensayo error numéricas para el número de cabezas y patas), como lo hubiera podido resolver un niño de educación elemental.

En relación a los procesos que utilizaron los concursantes de la Olimpiada Estatal de Matemáticas, se tienen las siguientes precisiones:

- El pensamiento proporcional es un elemento básico en la construcción de saberes geométricos y trigonométricos.
- El pensamiento proporcional cuantitativo, aparece cuando el estudiante puede hacer uso de las razones y proporciones y las esgrime con las mismas unidades (razones internas).
- La proporción cuantitativa no es puesta en escena por la mayor parte de los participantes.
- Quienes respondieron de la forma esperada, cinco estudiantes de doce, involucraron a la proporcionalidad como componente primordial para llegar al resultado.
- La noción de *linealidad* es el primer modelo al que recurren para resolverlo, lo cual concuerda con los resultados de Ruiz y Valdemoros (2006).
- Algunos de los estudiantes emplean la estrategia que se basa en el concepto de área, al tomar en cuenta que *"el área total es igual a la suma de las áreas de las partes",* donde se compromete a la proporcionalidad.
- Otra forma de resolverlo, fue utilizando el teorema de Pitágoras.
- En el transcurso de la resolución se utilizaron modificaciones de los diferentes sistemas semióticos de las nociones trigonométricos incluidas. Desde un texto escrito en lenguaje ordinario, se suscitaron la representación geométrica del cuadrado inscrito en el triángulo y la expresión algebraica de la igualdad de las razones internas.

R E F L E X I Ó N F I N A L

La investigación ha pretendido caracterizar algunos referentes que posibiliten un discurso didáctico congruente y articulado, en la matemática escolar. Para esto, el rescate de los significados de la noción de *linealidad*, a partir de diferentes temas de la matemática, posibilita identificar y proponer elementos conceptuales incidentes en la didáctica de la matemática.

En función del análisis de los resultados obtenidos, se resalta que las nociones de proporcionalidad y *linealidad*, tienen un estatus metamatemático y deben ser elementos articuladores transversales en la didáctica de la matemática.

El problema de la enseñanza de los significados de la noción de linealidad en ambiente escolar, es un fenómeno complejo y en tanto, un hecho de naturaleza *sistémica*, donde intervienen las dimensiones, *epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural*.

En la enseñanza institucionalizada, la diversidad de significados que tiene la noción de linealidad, hacen que no se perciba en su estatus metamatemático. Está involucrada en prácticamente todas las etapas escolares y su concepción en cada nivel educativo, es vista de manera aislada y sin conexión una de la otra, esto es, no hay articulación de la noción, a través de sus significados, en el ámbito escolar de un estudiante, ya que el discurso escolar no lo propicia, ni tampoco el medio socio-cultural le demanda tal congruencia de saberes.

Esta investigación acerca de la noción de *linealidad* y de sus significados no puede considerarse acabada ya que existen muchos aspectos por investigarse, por lo que ello invita a continuar este trabajo a la comunidad de matemáticos educativos.

ANEXOS

ANEXO 1

Entrevista a cuatro estudiantes del ICBI acerca de proporcionalidad y linealidad
Salón del CIMA ICBI
28 de mayo de 2007

Prof. Acosta: Nos encontramos en el área académica de matemáticas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, hoy lunes 28 de mayo del año 2007, siendo las 10:18 horas para realizar una entrevista donde van a participar el Doctor Carlos Rondero (pequeña pausa) Y los estudiantes (pequeña pausa)

Javier: Javier Servín de la licenciatura en Sistemas Computacionales primer semestre.

Iván: Iván Santos Romero de la licenciatura en física sexto semestre.

Guillermo: Guillermo Leyva Salvador de la licenciatura en Sistemas computacionales segundo semestre.

Erick: Erick Quintanar Gómez de la licenciatura en Sistemas Computacionales segundo semestre

Prof. Acosta: Bien iniciamos, consideremos, tenemos el siguiente triángulo, el triángulo ABC, una línea que es paralela a AB, DE, este cateto es equis, este cateto es ye. Primero si DC es cuatro, cuanto mide DE. Quien quiera participar levante la mano por favor (pequeña pausa) participe alguien, levante su nombre, pase al pizarrón, tome algún plumón (pequeña pausa) no cuanto mide (pequeña pausa) perdón ahí tuve una equivocación, cuanto mide DE.

Javier: Cuanto mide DE

Prof. Acosta: DC es cuatro, cuanto mide DE, la pregunta estaba bien hecha

Prof. Rondero: de lo que se trataría es de que si alguno de ustedes pasa al pizarrón o puede ir platicando que estrategias ocuparía para la posible solución de ese problema, o sea se tiene un triángulo rectángulo, se conoce un valor que es DC, digamos que es una parte de la base de ese triángulo no, el triángulo tiene base DC no, se puede decir que la altura h, digo AB ye y la base completa es equis, de tal manera que pudiese buscarse alguna relación o va a intervenir en la solución entre ye y equis dada la forma en que se está planteando el problema, tenemos una altura que le podemos llamar AB ye, una base BC que le podemos llamar equis (pequeña pausa) entonces ustedes ven el triángulo (pequeña pausa) de hecho se ve que no nada más hay un triángulo y entonces nos interesa ir viendo el tipo de estrategias de pensamiento que ustedes tienen para la solución y que la pueden ir diciendo, aunque no necesariamente que pasen al pizarrón pueden ir diciendo alguno de ustedes que está pasando o que elementos matemáticos ocuparían, que conceptos etcétera. ¿Si está claro? Si, ve diciendo más o menos que se te ocurre. ¿puedes decir tu nombre?

Prof. Acosta Su nombre por favor quien quiera participar.

Prof. Rondero: Tómenlo con calma vayan así pensando que elementos emplearían para atacar el problema. Si Iván (pequeña pausa) venos explicando para ver que estas pensando

Iván: Primero me imagino así como un sistema de coordenadas, me imagino un plano cartesiano, entonces supongo que este es el punto cero cero (señala el vértice del ángulo recto) entonces digo que este lado (señala el lado BC) estos puntos tienen coordenadas equis y ye, el C y el A, entonces para encontrar este cateto

(señala el lado DE) puedo expresar este otro cateto (señala el lado DC) y la hipotenusa (señala el lado EC) en función de equis y de ye, por ejemplo puedo decir que este cateto (DE) es (escribe y lo va diciendo: X - BD = DC

Prof. Rondero: A ver X – BD = DC, remárcalo para que se vea en la cámara.

Iván: es cuatro (escribe X - BD = DC = 4) Este otro cateto (DE) sería (puntea una perpendicular a AB desde el punto E) ye menos efe a (escribe Y – FA) (pequeña pausa) (escribe CE)

Prof. Acosta: Fuerte Iván para que se escuche en la cámara.

Iván: ¿ninguno de los otros lados está dado, (pequeña pausa) verdad? Sólo (señala DC)

Javier: ¿equis y ye se consideran lados fijos?

Prof. Acosta: Si (pequeña pausa) ahora no necesariamente se está solicitando que digan un valor numérico ¿si?

Prof. Rondero: A ver otra vez, vayan pensando en esos elementos, aunque no ha dicho Iván si se puede trabajar en parte con esto, ya se puede diseñar un estrategia, pero ¿Qué otras cosas? ¿Qué otros elementos conceptuales ocuparían ahí?

Javier: Si fijamos por ejemplo este ángulo (señala el ángulo ACB) por ejemplo, es el ángulo theta (escribe θ) cualquiera (pequeña pausa) la tangente de ese ángulo theta

Prof. Rondero: No es un dato dado, pero puedes tomarlo como referencia.

Javier: ..Nombramos este ángulo como theta (señala el ángulo ACB) y queda fijo (pequeña pausa) no importa el valor. La tangente de theta, tomando el triángulo a be ce (ABC) la tangente sería el cateto opuesto en este caso sería ye, entre el cateto adyacente que en ese caso sería equis (X) (escribió $\tan\theta = \frac{y}{x}$, pero tomando en cuenta el triángulo e de ce (escribe DCE) la tangente del mismo ángulo es igual al cateto opuesto que sería de e (DE) entre el cateto adyacente que en este caso lo conocemos que es cuatro (escribió $\tan\theta = \frac{DE}{4}$)

Prof. Rondero: Por cierto, eso lo puedes hacer ¿de que tipo? (pequeña pausa) a los dos triángulos a que estas haciendo referencia (pequeña pausa) ¿Qué tipo de triángulos son?

Javier: En este caso se refiere a un triángulo rectángulo

Prof. Rondero: Si pero ¿Qué más? ¿Tienen alguna característica en común?

Javier: No me acuerdo su nombre, al compartir el mismo ángulo, los demás ángulos son iguales, (pequeña pausa) creo que se llaman proporcionales.

Iván: semejantes

Prof. Rondero: algo más que quieras decir allí Iván aparte de eso

Iván: no

Javier: al tratarse de este mismo ángulo, entonces este valor y este valor son iguales (señala $\tan\theta = \frac{y}{x}$ y $\tan\theta = \frac{DE}{4}$, podemos igualar ye sobre x es igual al segmento de e sobre cuatro (y escribe $\frac{y}{x} = \frac{DE}{4}$), ya tenemos la relación y queremos obtener el valor de DE, entonces segmento DE en términos de equis y de ye, sería igual a cuatro ye sobre equis (escribe $DE = \frac{4y}{x}$

Prof. Rondero: ¿que querría decir esa posible respuesta que está dando Javier? (pequeña pausa) ¿Qué dicen los demás al respecto?

Prof. Acosta: Guillermo ¿Qué opinas?

Guillermo: mh, mh (silencio)

Prof. Rondero: ¿a alguien se le ocurre otra estrategia distinta? (pequeña pausa) pueden argumentar a favor o en contra de esa estrategia (pequeña pausa)¿la ven consistente? Etcétera, o a menos que se les ocurriera otra estrategia, Iván

Iván: Aquí,.. no es de lógica ye entre equis, si son ambos fijos, no necesariamente es de e (señala DE), porque estamos diciendo que ese de e (DE) y este DE son iguales (señala el segmento DE sobre el triángulo dibujado en el pizarrón). Allí no estamos haciendo una diferencia entre este de e (DE) (señala la expresión $DE = \frac{4y}{x}$ escrita en el pizarrón) y este de e (señala el segmento DE sobre el dibujo del triángulo rectángulo)

Prof. Rondero: ¿En que sentido?

Iván: Porque (pequeña pausa) aquí estamos hablando de que (pequeña pausa) no hemos hablado nunca de cómo se forma este de e (DE) (señala el segmento DE) y entonces este de e (señala $DE = \frac{4y}{x}$) que es este segmento (señala el segmento DE sobre el triángulo), no está hablando si es este o este, y está diciendo que cualquier de e (DE) es cuatro ye entre equis (señala $DE = \frac{4y}{x}$) (pequeña pausa) y (pequeña pausa)

Javier: es que, allí lo que toma en cuenta, es que el punto de (D) no se mueve porque nos están dando la distancia de ce (DC) que es la distancia horizontal que es igual a cuatro, así como que se fija la posición de DE, ahora no recuerdo si dijeron que la línea tenía que ser (mueve su mano derecha de arriba abajo) paralela al otro lado.

Prof. Acosta: Si es paralela, si de e (DE) es paralela a a be (AB)

Javier: acabo de encontrar otro pequeño problema, que esto funcionaría únicamente para triángulos rectángulos

Prof. Acosta: ¿porqué?

Javier: porque esa relación de la tangente funciona únicamente para triángulos rectángulos (pequeña pausa) para cualquier triángulo tendríamos que utilizar otra cosa, otra relación (pequeña pausa) podría ser, no se, la ley de los senos o la ley de los cosenos, pero eso sería para cualquier otro triángulo que no fuera rectángulo, se supone que debería funcionar

Prof. Rondero: y esto de que se habla, esto que mencionó Iván, de la semejanza de triángulos, aunque no fueran triángulos rectángulos ¿lo podrías ocupar?

Javier: si al ser el segmento de e (DE) paralelo a cualquiera de los otros lados se pueden obtener triángulos semejantes, dado que este al compartir los ángulos, pues funcionaría

Prof. Rondero: se daría la semejanza, entre otras cosas, pero la incógnita o la pregunta de Iván tiene sentido, pero alguien, no se si tu mismo Javier, ya mencionaste que está dado en términos de de ce (DC) que está fija que vale cuatro, de tal manera, Iván que lo que tu mencionabas, ¿Qué pasaría con ese argumento? ¿Qué dices?

Respecto a la pregunta de cambiar (pequeña pausa) este ese segmento paralelo a be (AB) en otro punto (pequeña pausa) ¿Qué pasaría con de ce (DC)? Ya no valdría cuatro

Iván: ya no valdría cuatro

Prof. Rondero: Hay algún impedimento, ¿ves algún impedimento de esta estrategia?

Iván: No lo que pasa es que no me había dado cuenta donde se tomaba en cuenta la posición de de ce (DC) pero es en el cuatro

Prof. Rondero: Es que ahora, pasa algo más, quiere decir entonces que de e (DE) que es ese segmento está en función como vemos ahí de ye equis, pero ye tiene un valor determinado para, ye es una altura, como vemos, y equis es una base, si ya se esta viendo ahí, si cambia ese punto de (D), pues cambia de ce (DC) ¿no? ¿de acuerdo? y entonces de e (DE) estaría dado en términos, como ya se ve, de el valor que tenga de ce (DC) y otra vez ye (y) y equis (x), es una altura y una base, ahora si ¿Qué pasa si el punto a (A) lo alargamos? Lo lo extendemos, quiere decir si el lado a ce (AC) si se extendiese ¿Qué pasa con la altura ye (y)? (pequeña pausa) un poco como Iván estaba mencionando ¿no? Si se cambia este punto (señala el punto D), cambia este segmento de recta (señala el segmento DE), pero este valor cambia (señala el segmento DC sobre el triángulo), pero ahora si este punto, este lado a ce (señala el segmento AC sobre el triángulo), que viene a funcionar como la hipotenusa lo alargáramos ¿no? ¿Qué pasaría con ye (y)?

Iván: (no es audible)

Prof. Rondero: cambia en ye (y) pero ¿haría cambiar esta relación (señala el segmento DC)?

Javier: si el punto A se desplaza, pero si se desplaza junto a be (B) en una forma, este, vertical igual (pequeña pausa)

Prof. Rondero: No no, has de cuenta que el segmento a ce (AC) siguiendo la misma (señala sobre la hipotenusa del triángulo) sin cambiar las posiciones, lo alargamos, entonces aquí anda un nuevo ye (y) (señala a la izquierda del triángulo rectángulo en el pizarrón) ¿no? y la base (señala el segmento BC sobre el triángulo) (pequeña pausa)

Javier: ¿haciendo crecer la equis o dejándolo fijo?

Prof. Rondero: No no no,

Javier: también crece junto

Prof. Rondero: crece junto, teniendo un triángulo más grandote, digamos

Javier: Este mientras ¿los ángulos se sigan manteniendo iguales para poder (pequeña pausa)?

Prof. Rondero: si esto no cambiamos nada (señala todo el triángulo)

Javier: podría ocuparse la misma (pequeña pausa)

Prof. Rondero: ¿cambia eso inclusive? ¿directamente cambia?

Javier: esto directamente, no porque

Prof. Rondero: no

Javier: porque el segmento de ce (DC) sigue siendo cuatro, pero si moviese de cierta forma de e (DE) junto con el segmento a be (AB) entonces sólo habría que ajustar, nada mas, el valor de de ce (DC)

Prof. Rondero: de acuerdo ahora, otro detalle ahí, que es interesante de mencionar, he Iván empezaba a hacer ese tipo de cosas, sin manejar lo que tu hiciste Javier, un

ángulo, pero luego él menciona otro argumento que es respecto a la cuestión de la proporcionalidad, es decir como se llama, la semejanza de los triángulos ¿no? y aquí tu ocupas un ángulo theta que no te da, no te da el dato, digo el problema originalmente, tu lo ocupas, pero no se está ocupando ninguno, o alguien, la pregunta sería, alguien está pensando o pensaría en proporcionalidad

Javier: pues, de cierta forma sí, porque para poder obtener esa relación y después pasar a la igualdad estamos asumiendo que el ángulo theta es el mismo

Prof. Rondero: claro

Javier: de un ángulo a otro, como que theta (θ) está en cierto modo implícito el concepto de la proporcionalidad porque no se puede ocupar para triángulos que no son semejantes

Prof. Rondero: exacto, ahora si no usáramos, un poco ex profeso ¿no? digamos si no usáramos esto como argumento que usó Javier (borra el ángulo theta (θ) escrito por Javier entre la intersección de los segmentos AC y BC; también borra del pizarrón X-BD = DC, escrito por Iván)) y quisiéramos llegar a la misma relación ¿cómo ocuparían? ¿Qué ocuparían, otra vez de argumento de inicio? (pequeña pausa) y ¿si pondrían en juego, o no la proporcionalidad? (pequeña pausa) en otras palabras, si no consideramos, ya dijimos que es válido todo eso, que hizo Javier ¿no? si no consideramos, si no ponemos en juego a theta (θ)

Prof. Acosta: ¿habrá otra manera de llegar a la misma relación?

Javier: podríamos usar lo que son las razones y las proporciones ¿no? pero al final de cuentas se basan en lo mismo, en que al ser el mismo ángulo, las proporciones se mantienen

Prof. Acosta: ¿podrías (pequeña pausa)? Comenta lo que estas pensando, por favor

Javier: Es que este, si no usamos el ángulo y usamos otra cosa que se me ocurre son las razones y proporciones, para no usar este tipo de igualdades y funciones (señala $\tan\theta = \frac{DE}{4}$ y $\frac{y}{x} = \frac{DE}{4}$), podríamos pensar en usando todo como segmentos

Prof. Rondero: y usando semejanza de triángulos, puedes ocupar eso

Javier: a lo que me refiero es que la semejanza de triángulos, de cierta forma se basa en lo mismo, porque para que exista la semejanza, los ángulos deben ser iguales o los lados proporcionales y todo eso se mantiene gracias a que comparten los mismos ángulos, entonces si hacemos las proporciones, por ejemplo, equis sobre ye, sería uno, proporcional a de ce (DC) sobre de e (DE) (escribe $\frac{y}{x} = \frac{DC}{DE}$) si hacemos esa proporción vendría a ser razón de lo mismo porque esto funciona gracias a que son semejantes comparten ángulos, y entonces a final de cuentas este ángulo está metido aquí, a lo mejor no con un nombre, en este caso fue theta (θ), pero está jugando un papel importante porque mantiene la semejanza entre los triángulos, entonces como que vendría siendo lo mismo ¿no?

Prof. Rondero: Y por último si quieres este volver a despejar explícitamente a de ce (DC), no a de e (DE) perdón,

Javier: a de e (DE) en este caso nos va (pequeña pausa)

Prof. Rondero: por cierto, Javier ¿puedes hacer la proporción contraria?

Javier: ¿al revés ye sobre equis?

Prof. Rondero: aja, exacto

Javier: es lo mismo, cambio al recíproco, ye sobre equis igual a de e sobre de ce (escribe $\frac{x}{y}=\frac{DE}{DC}$, (pequeña pausa) en este caso puedo no sustituir el valor de cuatro, pero para que esto sea un poco mas general, esto queda, …queremos obtener… de e (DE) ¿verdad? Segmento de ce (DC) por ye (y) entre equis, igual a de ce (DE) (escribe $DE=\frac{\overline{DC\ y}}{x}$) que sería una forma más general

Prof. Rondero: es una forma más general, en cuanto te den el valor de de ce (DC), simplemente la sustituyes bajo el entendido que de otra manera se conoce equis (x) y ye (y) ¿no? la altura y la y la base. Ora como se dan cuenta ustedes, esto como que empieza a extenderse a muchas otras cosas ¿no? por ejemplo esto que estábamos planteando hace rato, metemos para acá, ahora A estará aquí (prolonga la hipotenusa del triángulo dibujado en el pizarrón), aquí estaría be (B), manteniendo todo lo demás ¿no? que sigue siendo exactamente lo mismo, pero ahora ¿qué? ¿Ustedes podrían decir alguna alguna característica alguna cosa que si esto? Iván que por cierto quiero resaltar que Iván lo empezó a pensar esto como si estuviese ese ese triángulo o esos triángulos como si estuviesen anclados aquí ¿no? (dibuja un triángulo rectángulo, haciendo coincidir el ángulo recto con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas) a un sistema de coordenadas y planteaba esto así (señala el triángulo en el sistema cartesiano que dibujó) ¿un poco así lo viste Iván? ¿no? Pero en cuanto le metemos sistema de coordenadas, por cierto a esta a esta situación ¿en que, ustedes que vería aquí? (remarca la hipotenusa del triángulo que dibujó)

Javier: una recta

Prof. Rondero: una recta, claro que también es esto podría ser ¿no? los segmentos de, pero entonces será que esta (señala el triángulo original) esto que estamos aquí discutiendo ¿tenga alguna relación con algunas de las características de la recta?

Javier: Pues…podría pensarse desde ese lado también porque de alguna forma lo que vendría siendo ye (y) sobre equis (x), que aparece por ahí en algún lugar, sería equivalente a la pendiente ¿no? en ese caso porque al partir del origen estaríamos tomando como que la medida de esos lados, equis (x) y ye (y), entonces el punto a (A) sería el cero coma ye (0,y) y el punto ce (C) sería el equis coma cero (x,0), si fijamos el be (B) en cero coma cero (0,0), entonces la pendiente de esa recta sería ye (y) sobre equis (x), negativo, porque esta así (coloca la palma de su mano inclinada) seria menos ye sobre equis y este, aparece su, ahí (señala al pizarrón), entonces debe haber cierta relación entre (pequeña pausa)

Prof. Rondero: si ahí hay muchos detalles que se pueden discutir, la idea es que ustedes todos vayan participando ¡eh!, con lo que se les vaya ocurriendo ¡eh!, no no necesariamente que den toda la argumentación completa, aquí pues claro puede ser el ángulo (señala sobre el triángulo ubicado en el sistema de coordenadas, que dibujó el Prof. Rondero abajo del triángulo original) de inclinación, estas cosas que son, ¡eh! te dicen que ¿Cómo se llama? Que es el ángulo es la pendiente es negativa, o cosas de ese estilo ¿no?, pero ahora sigamos un poco con esta misma idea de pensamiento, este (pequeña pausa) si ustedes habrán, fíjense vamos un poco resumiendo, es semejanza semejanza de es

Prof. Acosta: ..janza

Prof. Rondero: semejanza, semejanza (lo escribe en el pizarrón), luego ¿qué decimos? este.. ¿eh? proporcionalidad (lo escribe en el pizarrón) y luego estamos hablando de, que algo esta apareciendo otra cosa ¿qué está apareciendo? Recta. (pequeña pausa) ora y cuando aparece recta tu mencionabas, Javier alguna característica específica, cuando pinté un poco la gráfica, mencionabas algo más, recta asociado con pendiente (pequeña pausa) y ahora la pregunta es, bueno ¿hay alguna relación conceptual entre todo esto?

Javier: pues a mi todavía todo todo todo se me hace ligado al ángulo, porque la pendiente de cierta forma refleja la tangente del ángulo

Prof. Rondero: sigues pensando en una cosa así (señala donde se escribió el ángulo theta)

Javier: sigo pensando en el, o sea todo eso me lleva a que la recta tiene un ángulo dado, la proporcionalidad se da por los ángulos, la semejanza igual, manteniendo los ángulos fijos, pero la semejanza sigue existiendo y la pendiente nos da la inclinación, pero la inclinación, es este, nos la da en función de la tangente del ángulo

Prof. Rondero: que es como una proporción de lados

Javier: (asiente con la cabeza)

Prof. Rondero: ¿no?

Prof. Acosta: Erick

Prof. Rondero: ¿tu nombre?

Erick: Erick (se dirige al pizarrón) orita como estamos haciendo el plano cartesiano y de la ecuación de la recta este, bueno decimos que es un triángulo rectángulo (dibuja un rectángulo), entonces este, rectángulo es la mitad, dando un ángulo de cuarenta y cinco grados (traza su diagonal) al igual que una ecuación equis es igual a ye (escribe x = y) y esta vendría siendo así ¿no? (dibuja una recta a 45°, partiendo del origen, en el plano cartesiano, que contenía el segundo triángulo dibujado antes por el Prof. Rondero) generalmente es este de cuarenta y cinco grados la ecuación de la recta, entonces

Prof. Rondero: ye igual a equis (y = x)

Erick: entonces equis y ye van a ser iguales, entonces por ejemplo si aquí vale cuatro (señala el punto (4,0) en el eje de las abscisas del plano cartesiano) aquí también va a valer cuatro (señala el punto (0,4) en el eje de las ordenadas del plano cartesiano), entonces yo pienso que de e vale cuatro (señala el segmento DE sobre el triángulo original)

Prof. Acosta: entonces hay una, ¿hay una relación entre eso que acabas de comentar,..

Erick: aja y todo esto (señala lo escrito en el pizarrón)

Prof. Acosta: …con lo que había argumentado Javier antes?

Erick: si de hecho con el plano cartesiano (lo señala en el pizarrón) y todo esto si es cierto, y aparte porque es un triángulo rectángulo #$$%& (Min. 28:15) de cuarenta y cinco grados y también cuando se grafica una ecuación, bueno una recta de cuarenta y cinco grados, bueno es equis igual a ye (x = y) significa que este punto, este como decían aquí el compañero ¿Cómo se llama? Iván, me dije no es que aquí (señala los segmentos DE y DC del triángulo original) me imagino el plano igual y mas o menos este, me acordé y entonces de e (DE) vale cuatro

Prof. Rondero: No, no pero eso no estamos diciendo que DE valga cuatro

Erick: No, pero bueno yo, o sea si le pongo (señala la recta trazada sobre la hipotenusa del segundo triángulo trazado sobre un sistema de coordenadas) en un plano cartesiano igual que como está allí, este ¿Cómo sería?

Prof. Rondero: Si pero ahí abría que tener cuidado en como estructurar, este como hacer la figura correspondiente ¿no?

Erick: tengo el punto cuatro que sería ¿qué? de aquí sería de ce (DC)

Prof. Rondero: espérate, otro detalle este Erick, tu estas hablando de un triángulo rectángulo (señala el triángulo original), pero no necesariamente el ángulo este es de cuarenta y cinco grados, tu tiene ye igual a equis (y = x), sí pero en este caso no necesariamente es así ¿de acuerdo? Si, ¿tú querías decir algo? (señala a Guillermo) ¿alguien más? Volvemos a la pregunta esta, entre semejanza, proporcionalidad, recta, pendiente ¿hay alguna, algo que si diga?, Javier ya mencionó algunas cosas ¿no? el dice bueno pues todo está como en términos de ese ángulo, de esa de esa tangente, de esa proporcionalidad, ¿Qué más podemos decir al respecto?

Iván: Bueno de lo que decía, se le ve como que está aferrada a la idea de theta (θ) y por eso que en realidad porque la, bueno yo creo que es porque la, ¿cómo se llama?, a característica principal de, pues de la recta es la pendiente ¿no? es lo que las hace diferente, por eso cuando vemos una recta, lo primero que nos imaginamos es la pendiente

Prof. Rondero: y, y ya que dice eso, menciona eso Iván, ¡hee! Cuando estamos hablando de recta, estamos hablando de pendiente, estamos hablando de tangente del ángulo de inclinación, pero ustedes ¿ahí ven alguna proporcionalidad? ¿cuando se está trabajando con recta y con pendiente, se ve alguna proporcionalidad?

Javier: No hasta que se fijan los lados, porque para que exista la proporcionalidad tendría que ser como que una relación entre dos cosas, o sea que se mantiene cierto criterio para ambas y entonces como que (pequeña pausa)

Prof. Rondero: Si tenemos una recta cualquiera, y aparte de que aquí está un ángulo de inclinación (dibuja una recta en un plano coordenado), por supuesto ¿no?, pero ¿hay alguna proporción, entre por ejemplo este triángulo, este, este otro triángulo, podría ser este otro, o este otro grandote que está acá? (A partir de la recta que dibujó, lo cierra para formar un triángulo grande, dentro del cual dibuja otros dos triángulos, con ángulos comunes), este ya lo #$%& si lo mantengo así con el mismo ángulo ¿no? ¿entre los lados hay una proporcionalidad o no?

Iván: Si porque, si relacionamos, todos los (hace una señal de en forma de "c" invertida entre sus dedos, índice y pulgar de la mano derecha) ángulos, (Iván pasa al pizarrón y el Prof. Rondero pasa a sentarse) si relacionamos este lado y este lado (señala los catetos del triángulo menor, que había dibujado el Prof. Rondero) e intentamos sacar la pendiente de este ángulo (señala el ángulo entre los catetos), bueno digo la tangente de este ángulo va a ser igual que la tangente de este ángulo y que la tangente de este ángulo (va señalando ángulos semejantes del dibujo)

Prof. Acosta: y así sucesivamente

Iván: #$%& entonces, pues todos estos lados serían proporcionales entre ellos

Prof. Rondero: tons, y habría al mismo tiempo semejanza de triángulos ¿no? ¿y si la recta no tuviese esa característica que ya acabamos de mencionar? Algunos detalles

ya los mencionó Javier y otros Iván ¿si no tuviese esa característica? ¿podríamos hablar de recta como tal? (pequeña pausa) o sea si todo eso que se menciona de que agarras diferentes triángulos y vas identificando la proporción ¿entre que, entre que Iván? No está muy clara ¿entre que y que?

Iván: cateto opuesto y este triángulo (va al pizarrón), por ejemplo y este cateto adyacente entre este cateto opuesto y entre este cateto adyacente, para sacar la tangente

Prof. Rondero: ¿siempre son que? Alturas y bases ¿no? ¿y con que empezamos a plantear el problema originalmente?

Javier: con alturas y bases, equis y ye (x e y)

Prof. Rondero: aja, entonces regreso a la pregunta, si no, si no, tuviésemos esa característica que ustedes están ahora cada vez más explícitamente identificando ¿podríamos hablar de recta, como la conocemos, como la trabajamos?

Guillermo: mhmh

Prof. Acosta: Guillermo

Prof. Rondero: Haber Guillermo

Guillermo: Yo pienso que no es que, si valida mucho con la pendiente, si le quitamos la pendiente es como (pequeña pausa) bueno sin esa propiedad la recta no tiene una relación en si, no hay con que relacionarse y se pierde completamente el punto

Prof. Rondero: ¿Qué dirías que se pierde? Dices el punto, pero ¿Qué dirías que se pierde? ¿Qué se pierde? O los demás inclusive también he, lo que quieran argumentar ¿Qué se pierde? ¿Qué se perdería?

Guillermo: bueno, el ángulo se supone que es el mismo, porque son rectas paralelas, bases con bases, alturas con alturas, y la pendiente lo que nos implica igual es en cierta forma el ángulo, porque, como la ecuación ecuación de la recta eme equis (mx) dado por una ordenada de ge ye, nos da una inclinación, y si no tenemos la pendiente, entonces no habría una inclinación para relacionar #$%& bueno no se explicarlo

Prof. Acosta: ¿seguiría siendo recta si esa relación no es igual?

Javier: pues si seguirían siendo (pequeña pausa)

Guillermo: muchas rectas

Javier: bueno rectas, pero a lo mejor no la misma, no estaríamos seguros de que fuera la misma, no mantener esa relación, se supone que para que una, este para que una recta exista, bueno no que exista, pero que sea única pasa por un punto y tiene una pendiente, si movemos ese punto en, de una forma en que no esté en la misma recta, entonces la recta se va ha mover junto con ese punto y pasa lo mismo junto con la pendiente, si cambia la pendiente, cambia la inclinación, ya no estaríamos hablando de la misma recta, a lo mejor si de rectas pero ya no de la misma.

Prof. Rondero: Si, y si regreso a este punto una vez más, regresando a este punto, otra vez no conocemos theta (è) (señala en el pizarrón el ángulo marcado con theta, anteriormente), cuando estamos en el contexto de ese problema, no estamos hablando de recta, no estamos hablando de pendiente, y sin embargo con estos elementos (señala lo escrito en el pizarrón) con los que ya discutimos, no vamos a insistir en eso se pudo resolver el problema, otra vez ¿con que elementos? ¿con que argumentos matemáticos? (pequeña pausa) proporcionalidad y

semejanza, y ahora al revés, si tenemos semejanza y proporcionalidad con los debidos cuidados, por supuesto ¿podemos hablar de recta y de pendiente?

Javier: Sí

Prof. Rondero: y cuando hablamos de recta y de pendiente ¿de que estamos hablando? que, la recta ¿qué, que tiene de característica en relación a su pendiente?

Javier: el ángulo

Prof. Rondero: No, por decir, haber hago la pregunta de otra manera, dada una recta ¿qué la caracteriza?

Iván: pues por ejemplo, que si tenemos una recta y, y nos fijamos en un punto, algún otro punto tiene la proporcionalidad de que creció o decreció la pendiente con respecto a, al punto anterior, por ejemplo si (señala al pizarrón) si nos fijamos en este punto (señala el vértice formado por dos de las rectas dibujadas en el sistema coordenado, con anterioridad) para llegar aquí, en equis (x) tuvo que crecer lo mismo que ye (y), es decir tuvo que crecer proporcionalmente en equis (x) y en ye (y), y la proporción a la que tuvo que crecer, pues fue la pendiente

Prof. Rondero: No, no es lo mismo, pero si en esa proporcionalidad, en esa proporcionalidad si, y la proporcionalidad ¿base altura base o altura base? (señala las alturas y las bases de los triángulos dibujados en el sistema cartesiano dibujado)

Iván: altura base

Prof. Rondero: altura base ¿no? ¿si? y entonces, otra vez una recta tiene como característica ¿qué? #$% La pendiente que ya más o menos, este Iván lo mencionó que debe ser ¿cómo? en ese, en ese sentido de que sea la misma ¿qué está pasando? es lo que caracteriza a la recta, o sea ¿qué? (pequeña pausa) tu lo mencionabas Javier, si, si estamos hablando de otra recta distinta ¿qué (pequeña pausa)?

Javier: cambia, cambia la…

Prof. Rondero: cambia la pendiente

Javier: cambia la proporcionalidad

Prof. Rondero. Pues claro (pequeña pausa) claro, y bueno cuando hablamos de una recta estamos hablando de, de ¿qué? ¿qué tipo de función estamos hablando allí?

Javier: función lineal

Prof. Rondero: Una función lineal, una función lineal, ya por ahí desde un principio alguien lo mencionaba, no se si Javier mismo, tiene esta estructura ¿no? (escribe en el pizarrón $y = m\,x + b$) es la mas conocida, no pasa nada si ponemos esto así, por ejemplo (#$%&), o si ponemos cualquier otra notación ¿y que caracteriza a esta función lineal? Participen (señala a Erick y a Guillermo) ¿ahora que caracteriza a esa función lineal?

Guillermo: Un punto y la pendiente

Prof. Rondero: un punto y la pendiente

Javier: el grado del exponente, ¿no? porque si cambiamos de cierta forma (pequeña pausa)

Prof. Rondero: el grado del exponente dices, y ustedes dicen un punto y la pendiente (señala a Guillermo y a Erick) y ¿un punto y la pendiente? ¿pero algo más de la pendiente? Permíteme (señala a Javier) ¿algo más de la pendiente?

Guillermo: o sea me refiero a be (b) que es la ordenada

Prof. Rondero: es como, es como fijar un punto

Guillermo: es como fijar un punto, y la pendiente se supone que es ye (y) sobre equis (x) en un plano cartesiano

Prof. Rondero: pero que agregarías a esa pendiente ¿que tiene? ¿qué tiene que tener? ¿qué característica debe tener? (pequeña pausa) dada y ¿qué más?

Guillermo: ¿me lo puede repetir?

Prof. Rondero: Si, dada una recta tienes dar, que dar un punto y una pendiente, y la pendiente ¿Qué característica tiene? lo que estamos aquí discutiendo, (pequeña pausa) para la recta dada

Guillermo: ¿la pendiente para la recta dada?

Prof. Rondero: ¿cambia o es la misma?

Guillermo: es la misma, es proporcional en un punto, ser proporcional, puede cam (pequeña pausa) es lo mismo, bueno

Prof. Rondero: la misma digamos, eso hay que decirlo abiertamente es la misma, es fija, es fija, es un característica que estamos viendo con toda la discusión. Tu decías otra cosa (señala a Javier)

Javier: #$%& en cuanto a las características de la, en este caso de la función que define la recta, cambiemos, podemos cambiar a (a) y be (b) de manera libre por así decirlo, entonces serían dos rectas, pero si cambiamos el exponente de la equis (x) pasa algo diferente, o sea como que con eso no podemos jugar tan libremente, porque nos cambia totalmente la función, ahora en ves de, pueden dar cosas diferentes, parábolas y demás

Prof. Rondero: Claro, o sea Javier está poniendo atención en que el, el el exponente de la equis (x) tiene que ser uno, si porque si ya cambiara ya ya no estaríamos hablando de la misma función, por supuesto ¿no? y tu lo que mencionabas este Guillermo, es pues si lo que hemos estado discutiendo que son como características gráficas, he por decir geométricas de la de, de esa, de esa recta a la cual no le habíamos, (señala la hipotenusa del triángulo original) o acá mismo porque la podemos ver como recta, como segmento en términos de proporcionalidad etcétera, etcétera, y que no le habíamos dado ninguna estructura de carácter analítico, hasta este momento empieza a aparecer y ¿de todo esto que dicen? Podemos manejar cuestiones de proporcionalidad, semejanza, cuando si, cuando no, empieza a jugar o a intervenir una recta, hay aspectos (pequeña pausa), y luego ya después cómo esas características geométricas y demás se traducen en algo de tipo ¿qué? (pequeña pausa) analítico. Javier resalta un detalle ya de de tipo analítico aquí la variable (señala la expresión $y = m\ x + b$) equis (x) que juega como variable independiente no tiene nunca un exponente distinto de uno

Guillermo: #$%&

Prof. Acosta: un poco más fuerte Guillermo, por favor

Guillermo: si el exponente fuera diferente de uno ya no sería una función lineal

Prof. Rondero: ya no sería una función lineal

Iván: y tal vez ya no siquiera sería tendríamos el mismo problema ¿no?

Prof. Rondero: por situaciones no tendríamos el mismo problema y este problema realizando una vez, hace rato le quité el ángulo alfa (α), si pudiésemos llegar a hacer algo parecido a resolver el problema con esta idea de recta (señala lo escrito en el pizarrón), con las características de la pendiente, el poner otro segmento de recta, etcétera, etcétera ¿se podría hacer? ¿resolver ese problema?

Javier: ¿Cómo #$%&? 42:58

Prof. Rondero: Si, si planteando el mismo problema, eh pero ahora ocupando la idea de recta, de función lineal

Iván: Si pues ya nada más sería sacar la ecuación de la recta se a (CA) y al otra ecuación es ye (y), digo equis igual a cuatro (x = 4) entonces es la intersección de esa recta y tomamos la distancia de entre los dos puntos

Prof. Rondero: Si, ya los detalles técnicos, este se podrían ver, ¿no? como dice Iván, más o menos ya lo mencionó podríamos ver con más detalle, pero en principio se podría plantear. Entonces, ustedes una vez más ¿ven alguna relación? ¿lo habían pensado antes, alguna relación entre semejanza, proporcionalidad, recta, pendiente? (pequeña pausa) ¿habían pensado en de anticipado en, en esa relación conceptual, entre esos conceptos, entre esos términos?

Guillermo: yo pienso que es como, yo pienso que lo usamos, día con día, porque te enseña a #$$%

Prof. Rondero: Bueno hay, a veces no hay, no hay mucha conciencia. Erick, ¿tu que puedes decir?

Erick: #$ Bueno yo no había pensado en eso de la semejanza, bueno si después de haber comentado, no había pensado en la semejanza de los triángulos

Prof. Rondero: ustedes al principio no se les ocurrió ocupar como estrategia semejanza de triángulos

Erick: #$%& ya se ve la proporcionalidad entre la altura y la base

Guillermo: o sea la proporcionalidad si pero, usando la función de la recta y la pendiente, no es, así claro no es, simplemente se usa por, yo creo por la práctica je je

Prof. Rondero: ¿ustedes habían pensado en esto en relación así conceptual? (se dirige a Javier e Iván)

Javier: Pues, de hecho empecé a pensar el problema de una forma así, este como que este, fijando puntos igual

Prof. Rondero: y el ángulo ¿no?

Javier. Y, pero cuando apareció el ángulo me acordé, de que podía meter, por ejemplo la relación (pequeña pausa)

Prof. Rondero: todavía, todavía lo tiene aquí (señala las relaciones escritas en el pizarrón, que involucran tan θ)

Javier: aja, o sea que si la empecé a pensar por ese lado, pero en cuanto me apareció el ángulo, luego luego empecé a pensar en las funciones trigonométricas, que en cierta forma mantienen las relaciones sin importar el ángulo, no importa en si la medida de los lados, mientras el ángulo sea, mantiene entre las este, las funciones, mantiene esa relación

Prof. Rondero: entonces, en la medida es una proporción, una proporción ahí ¿no?, entre lados y demás pero efectivamente desde un principio, Javier estuvo por esta estrategia ¿no? a lo mejor no lo pensaste exactamente como si fuera una recta y que se yo, pero al final de cuentas si estabas trabajando con esa proporcionalidad, y y mete el ángulo para poder manejar esa proporcionalidad entre los lados como se ve aquí (señala el lado derecho del pizarrón, donde están escritas las tangentes trigonométricas) y finalmente llega a la solución, sin hacer mención de es, que estamos trabajando una recta, con la pendiente, con nada de eso; sin embargo esta un poco ahí en juego eso. (pequeña pausa) Bueno ¿les parece interesante la, esta perspectiva de lo que hemos estado discutiendo?

Javier: Pues si, a final de cuentas todo esto sirve para agilizar la mente

Prof. Rondero: A a ¿Qué, que? ¿Qué concep, que concepto piensan ustedes, que que empieza a ligar estos, estos elementos? ¿Qué liga? ¿Qué concepto fundamental liga?

Javier: geometría

Prof. Rondero: Bueno si geometría de base, claro, proporcionalidad, pero ya dijimos que hay una cierta relación conceptual entre todo esto, pero ¿hay algo que lo abarca? ¿hay algo que lo abarca? O sea por ejemplo hubiéramos, nosotros podríamos haber quedado con eso y ya prácticamente estaría resuelto el problema, pero al involucrar esos otros elementos. (pequeña pausa) Por ejemplo si esto, otra vez, mas que ya lo mencionamos, si no fuese así, estuviese así (señala una prolongación imaginaria de al de la hipotenusa, del triángulo original), estoy exagerando ahí ¿no? ¿qué pasaría? ¿se puede seguir manejando esa proporcionalidad, esa semejanza, etc.?

Iván: bueno, haber habría cierta proporcionalidad ¿no? pero la proporcionalidad ya no sería ye (y) entre equis (x), bueno, esa, esa relación que obtuvimos ahí (señala al pizarrón), sino ora hay que ver como es que va cambiando de e (DE) sobre #$%&

Prof. Rondero: Pero ya es otro problema ¿no? y es otro problema muy distinto, ya todos esto no hay una estrictamente una, una liga conceptual, ya ahí ya rompiste

Javier: #$% es una forma más general ¿no?

Prof. Rondero: en cierto modo de una forma más general, pero, por supuesto más complicada, porque no tenemos esta esta esta parte conceptual y esto, esto que hemos estado manejando aquí (señala la hipotenusa del triángulo original) se mantiene, se mantiene ¿Qué quiere decir que se mantenga? ¿Qué se mantiene ahí? (pequeña pausa) por ejemplo cuando mencioné este punto lo podemos acá (señala el punto A sobre el triángulo original), este otro acá (señala el punto B sobre el triángulo), pero seguimos manteniendo la misma (pequeña pausa) no lo dije pero mas o menos ¿qué? ¿la misma que?

Javier: la misma dirección, la misma proporción

Prof. Rondero: pues sí, (pequeña pausa) y podríamos seguir moviendo ese punto, hacia arriba, hacia abajo, etcétera ¿no? pero hay algo que lo, que une todo esto, que que aglutina todo ese esa eso, que es finalmente algo que tiene que ver con ¿qué? ¿esto que es? son funciones ¿qué? o es una función ¿que? (señala las funciones lineales escritas antes en el pizarrón)

Javier: lineal

Prof. Rondero: lineal (escribe en el pizarrón la palabra "lineal"), ¿no creen que algo hay aparte de función, algo algo adicional que anda ahí jugando un papel fundamental? (pequeña pausa) por ejemplo otra vez, en el momento que deje de ser eso una (pequeña pausa) algo lineal, (pequeña pausa) una recta… aunque no le llamemos función ¿eh? allá no está llamándose función (señala el triángulo) originalmente ¿qué es? (pequeña pausa) un segmento de recta, y eso es algo lineal ¿no? bueno, luego todo lo demás otros aspectos de proporcionalidad de semejanza etcétera etcétera ¿no? pero a final de cuentas lo lineal, lo los, el comportamiento lineal es lo que está en juego con todo ello (pequeña pausa) ¿cómo ven eso?

Guillermo: #$%& en el primer problema todo se rige por las propiedades de la recta #$ se pierde

Prof. Rondero: se pierde, ¿si rompes lo lineal, puedes hacer esto? (señala las proporciones escritas en el pizarrón) ¿esto? ¿esto? (señala lo escrito en relación a lo proporcional)

Iván: #$ tendríamos que buscar una manera de de buscar las características de esa otra nueva forma ¿no?

Prof. Rondero: ya estaríamos hablando de un problema distinto. Bueno si gusta alguien argumentar otra cosa, o preguntar algo más, para terminar esta primera parte

Javier: para un problema así, bueno ya pasando al problema de la curva, igual este, se podría mantener el concepto de proporcionalidad, pero ahora la proporción es diferente, o sea la proporción no es lineal, o sea la proporción vendría dada por la ecuación de esa curva en caso de que se elija para una ecuación (¿ocasión?)

Prof. Rondero: muy interesante tu observación, es de esperarse, lo que dice Javier, es de esperarse ¿no? esa entre comillas, si es que podemos seguirle llamando proporcionalidad, dejémoslo así entre comillas, habría, tendría que estar regido por esa otra estructura que ya no es la recta, sino que podría ser otro tipo de curva, pus si, necesariamente, pero a veces ¿qué es lo que ocurre? Que hablamos de recta, estamos a veces, o antes hablamos de proporcionalidad y semejanza y no lo ligamos conceptualmente, cuando trabajamos por ejemplo con la recta, particularmente su característica que es una pendiente constante ¿no? (pequeña pausa) ¿verdad? y si lo viéramos por cierto en el sentido, no vamos a meter ahora, para terminar ya con eso, cuando nos metemos a algo así (señala la gráfica escrita en el lado derecho del pizarrón, donde se dibujó una curva), este ¿qué está pasando? con esa, esa pendiente o esa supuesta proporcionalidad entre, este, (pequeña pausa) ¿se seguiría dando? ya mas o menos lo mencionabas Javier

Iván: ahora serían proporcionales, porque la pendiente, la pendiente ahora en cada uno de esos puntos sería la derivada ¿no? entonces la proporción ahora sería la derivada

Prof. Rondero: por ahí iría el asunto, ya no estamos hablando de una algo ¿qué sea qué? ocupamos esto (escribe una constante en el pizarrón) constante ¿no? aquí ya no podemos estar hablando de lo mismo. Ya Iván ya mencionó, metió en juego la derivada, bueno no, ahora no queremos meternos mucho en eso, pero por supuesto que interviene ahí ¿no? ya, lo que ya no podemos hablar Iván de que en esos casos la pendiente vaya a ser ¿qué? (pequeña pausa) constante. Bueno dejamos esta primera parte ¿podemos parar esta primera parte? (se lo indica al camarógrafo), por favor. 53:34

ANEXO 2

Entrevista a cuatro estudiantes del ICBI acerca de interés simple y linealidad
Salón del CIMA ICBI
28 de mayo de 2007

Prof. Rondero: se trata de lo siguiente, se tiene un determinado capital, inicial, el, se puede dar una denominación general ce (C) o lo pueden decir bueno tengo diez mil pesos ¿no? y se empieza a transcurrir el tiempo, pero hay un determinado interés, por cada periodo de tiempo ¿no? si ya saben usted que el interés se puede fijar, este, mensualmente, trimestral, semestral, anual o el tiempo que sea, pero es un periodo determinado fijo, entonces la pregunta es ¿cómo le podemos hacer, pensando en que se tiene un determinado capital que se le puede llamar ce (C) y tiene un determinado interés fijo ¿no?, ahora podríamos fijar un valor o no cinco por ciento diez por ciento y y es por cada periodo, el periodo se puede definir o no, también en términos generales, la pregunta es ¿cómo podemos hacer identificar algo, una expresión matemática algo que nos permita calcular eh lo que se llama a veces eh el monto, es decir, ese capital original cuanto ha ganado conforma ha transcurrido eh el tiempo y con una determinada tasa de interés ¿no? ese es ese es el punto. Y déjenme recordarles nada mas brevemente, que este es un problema antiquísimo ¿eh?, la humanidad se enfrentó a el hace muchos siglos y en muchas culturas aunque no haya sido tal como lo planteamos ahora, pudo haber sido que el gobierno (pequeña pausa) los gobernantes pidieran un determinado impuesto a los gobernados ¿no? y si estos gobernados no pagaban, tendrían que pagar a su vez, en la medida que se tardaban en pagarle al gobernante, tenían que pagarle una cantidad extra (pequeña pausa) y por último ahí una consideración, creo que puede servir en la discusión que vamos a tener, es que a veces lo que no, no se entiende muy bien, no se acepta, o no se piensa previamente, es que el dinero cambia de valor en el tiempo (pequeña pausa) y por muchas razones, no voy a entrar en muchos detalles, en este contexto en que estamos hablando, porque hay, hay un pago de interés; pero igual si tu eres el que le debes al banco, entonces en lugar de que (pequeña pausa) el banco te dé el dinero, por tus intereses ¿no? te va a cobrar a ti dinero porque no le estas pagando ¿no? a tiempo, o simplemente por el préstamo. (pequeña pausa) He de tal manera que este, bueno vayamos discutiendo, iba yo a decir algo más, pero se me, se me escapó, bueno vayamos discutiendo ¿Qué piensan ustedes al respecto? ¿cómo? igual que hace rato, o sea si alguien quiere poner algo en el pizarrón, o vamos primero fijando ideas, o alguna pregunta que se les ocurra.

Prof. Acosta: o sea ¿como obtengo el capital?, he a partir de un capital inicial que tendrá algún rédito en el tiempo ¿no? o sea ¿cómo, como lo expreso? ¿Cómo lo expreso?

Javier: una expresión que refleje cuanto se ha ganado del capital en cierto tiempo

Prof. Acosta: por ejemplo

Prof. Rondero: si el capital, digamos, como usualmente se puede decir como el capital que vas a tener a futuro, después de que hayas dejado equis periodo de tiempo con un determinado interés, bueno eso de equis periodo de tiempo es un decir, o sea

se fija mas o menos, pueden hacer un esquema si se les ocurre, o antes este, (pequeña pausa) fíjate que esta parte podría ser interesante, antes antes de que se nos ocurra y ponerlo en el pizarrón podríamos decir, bueno ¿Qué está, que variables están en juego? Y ¿Cómo están interviniendo esas variables.

Javier: pues como que habría tres variables ¿no?, serían, capital inicial, (pequeña pausa)

Prof. Rondero: capital inicial (afirmando)

Javier: el interés

Prof. Rondero: el interés

Javier: ya sea positivo o negativo, a favor o en contra, como fuera

Prof. Rondero: Claro

Javier: de cierta forma los intervalos de tiempo, ya sean meses años semanas, días, porque no se pero como que eso podría influir, porque no sería igual fijarlo anual, a fijarlo por día, porque como que por día va creciendo un poquito más rápido y no se me imagino no se, de finanzas no se mucho.

Prof. Rondero: claro, claro, claro

Javier: como que ya creció un poquito más rápido, porque el interés ya se aplicaría a una forma más constante, o sea entre más cercano sea el periodo de tiempo, como que va ir creciendo un poco más rápido por que se aplica más veces

Prof. Rondero: claro, claro definitivamente

Javier: no se si se hará completamente cierto

Prof. Rondero: haber ¿alguien quería aclarar algo y aclarar sus ideas? ¿alguien más?

Iván: lo que yo no se, si por ejemplo si tenemos el valor inicial, este de lo que metimos en el banco y nuestro interés, yo no se como funciona lo de los intereses, si si tengo este dinero, después de determinado tiempo me dan dinero porque lo tengo ahí ¿no?

Prof. Rondero: claro

Iván: y este, pero después ese se vuelve ¿ese que me dan se le suma?

Prof. Rondero: no, ahora no, ahora no, simplemente estamos pensando que tienes el capital inicial como ya dijimos, tienes una tasa de interés que se fija el plazo, que dice Javier, por decir algo, mensual, entones si es mensual esa tasa, entonces el periodo de tiempo ¿cómo tiene que ser?

Prof. Acosta: lo que es interesante lo que comenta Iván, porque, como que está identificando, como que dos maneras ¿no?

Prof. Rondero: claro

Prof. Acosta: ¿Cuáles son esas dos maneras?

Iván: Una es que

Prof. Acosta: una

Iván: que deja mi dinero, el que yo metí, por ejemplo cada determinado tiempo me, me por decir al final del mes por decir me aumenta tres pesos, pero como ese dinero que metí no le van a sumar el anterior, al siguiente mes también le van a sumar tres pesos y así cada mes le va a sumar tres pesos, pero si cada mes va sumar tres pesos, entonces al siguiente tal vez sean tres diez y al siguiente sea tres veinte

Prof. Rondero: estamos hablando ahora Iván, y ya una vez hecha la aclaración esta, estamos hablando del primer caso, que mencioné yo ¿está claro? el primer caso

Erick: #$%& el interés es fijo, cada mes se va incrementando diez pesos, o sea el interés no aumenta, sino…

Prof. Rondero: no

Erick: #$%& por ciento cada mes
Prof. Rondero: si tu, todavía para hacerlo más fácil, si tu recoges tu interés y sigues teniendo
Prof. Acosta: el mismo capital
Prof. Rondero: el mismo capital (pequeña pausa) ¿no? 1:01:10
Javier: que sería todo el interés basado en el capital inicial, incrementa conforme incrementa el monto de la, por decir así la suma en el banco
Iván: y no sería por ejemplo, este recomendable para cuando es ese tipo de cosas sacar el dinero de los intereses y meterlo en otra cuenta, para que me genere más interés
Prof. Rondero: y si pero ahora ya no esta (pequeña pausa)
Todos: - ríen –
Prof. Rondero: si pero eso no está a discusión esa parte financiera de de eficientar, (pequeña pausa) este (pequeña pausa) si se puede, por supuesto que se puede manejar, pero en este momento no está a discusión, haber regresamos al punto, o sea ya Javier decía tenemos, que variables, un capital inicial, esa es de entrada ¿no? ese ese capital inicial digamos, no cambia, es fijo, los periodos de tiempo, tu tienes que decir pues es que esto lo dejé a tres años a tres meses, a cinco años, pero, ojo con esto, la tasa de interés una vez que se dice te va a dar tal tasa de interés, entonces todo tiene que estar referido a ello, o sea yo te voy a dar una tasa de interés, del diez por, lo voy a hacer más fácil, del doce por ciento anual, les voy a dar una tasa de interés del doce por ciento anual, entonces tu puedes preguntarte, después de un año, después de un año, después de cinco años, o después de diez años ¿cuánto tienes?
Javier: a mí como que se me ocurre algo, si tenemos (pequeña pausa) un capital fijo (pasa al pizarrón y escribe $Cantidad(n) = C + n\,(i \cdot C)$)
Prof. Rondero: aja
Javier: todo esto a la cantidad, la actual, que se yo, al tiempo ene (escribe “cantidad (n):”)
Prof. Rondero: no al tiempo cero Javier
-Hablan al mismo tiempo (sólo unos segundos) el Prof. Rondero y Javier y no se les entiende-
Javier: al tiempo (borra la n que está dentro del paréntesis)
Prof. Rondero: a bueno a tiempo fijo, ¿si quieres hablar de la cantidad inicial?
Javier: no se (pequeña pausa) al tiempo (vuelve a escribir la n, dentro del paréntesis) ¿cuánto tenemos en el banco después de ene periodos de tiempo?
Prof. Rondero: a (pequeña pausa) eso, ah ahora ya vas tu a eso, aja
Javier: entonces como que sería igual al capital inicial, lo que llamo ce (escribe la letra c, después del igual)
Prof. Rondero: aja
Javier: mas la cantidad de veces que se aplica el interés, por decir la (pequeña pausa) el número de periodos de tiempo, por el interés multiplicando al capital inicial, esto sería para esteee (pequeña pausa) para un interés aplicado únicamente al capital inicial, de que si al primer mes me van a sumar tres pesos, que cada mes me sumen tres pesos, no se hay una relación un tanto más simple al hecho de decir que, este que el interés iría directo al, en este caso a la cantidad #$%& de un banco, lo que decía que si un cambio le suman tres al otro tres diez, luego tres veinte
Prof. Rondero: haber

Javier: como que se me ocurre que esta podría ser por allí la
Prof. Rondero: Javier dice esto, ¿qué dicen los demás?
Guillermo: es que no me queda claro, si el capital, si el interés se se le pone al capital inicial y el interés que nos otorgan no genera intereses, entonces simplemente se va sum, se va sumando, pero no afecta al capital inicial
Iván: al capital inicial
Guillermo: Y entonces si me pide cuanto capital tengo al paso de (pequeña pausa)
Prof. Rondero: del tiempo digamos
Guillermo: diez intervalos de tiempo que da el capital, pues sería el capital y la suma de los intereses, que se supone se van retirando, no tendría mucho (pequeña pausa)
Iván: ha yo también estaba pensando ¿puedo ponerle (pequeña pausa)? (señalando si puede pasar al pizarrón)
Prof. Rondero: si, si, claro, claro adelante, adelante
Iván: (escribe en el pizarrón $C\ (t)= C_i + t(i \cdot C)$) el capital en determinado tiempo sería el capital inicial más te (t) por los intereses
Prof. Rondero: es es una tasa, esa una tasa, no, está bien así Iván, es una tasa
Iván: ah, este es el porcentaje que me dan de intereses ¿no?
Prof. Rondero: exactamente, pero ese, ese, esa tasa a ¿quien se la aplicas?
Guillermo: a la cantidad inicial
Prof. Rondero: Guillermo dice a la cantidad inicial, capital inicial (pequeña pausa) un poco ya lo está reflejando Javier allá arriba Iván
Guillermo: es lo mismo
Prof. Rondero: es lo mismo
Iván: es que yo quería expresarse ese i por ce (C_e) era mi i
Prof. Rondero: ¡ah! Ese es otro asunto, si también se podría ver así, eso también es
Iván: pero (pequeña pausa)
Prof. Rondero: no y todavía más Iván se podría poner en global todo eso en tu interés, en lo que es el (pequeña pausa), una es la tasa de interés y otro lo que ya ganaste, lo que ya ganaste de interés
Iván: esta partes es la... la puso (pequeña pausa)
Prof. Rondero: Es, es prácticamente es de hecho lo mismo ¿no? Iván aquí está usando te (t) (señala la expresión escrita por Iván en el pizarrón), como para identificar periodos de tiempo y Javier utilizó ene (n) (señala la expresión escrita por Javier en el pizarrón), así como que podamos poner como la notación de este estilo ¿no? (escribe en el pizarrón $C_n =$) esta es inicial, le podemos poner ce cero ¿no? (completa en el pizarrón $C_n = C_0$ y a la C_i que había escrito Iván rescribe C_0 en lugar de C_i) un poco para. ¿si? ¿me explico? para mas o menos, i por ce cero por ene (completa en el pizarrón $C_n = C_i + i\ C_0\ n$ debajo de la expresión que había escrito Javier) ¿no? es prácticamente lo mismo, es el mismo ce cero (corrige la expresión escrita en el pizarrón por Iván $C\ (t)= C_0 + t(I \cdot C_0)$). Cuando dice Javier ene, es porque estas pensando me imagino ¿en que? ¿ene (n) como varía?
Javier: según los intervalos de tiempo, uno, dos, tres (pequeña pausa)
Prof. Rondero: ene varía uno dos tres etcétera (escribe en el pizarrón *n = 1, 2, 3,.....)* ¿tu este Iván?
Iván: como el tiempo, sólo que (pequeña pausa) yo quería cambiar porque, es como cambia el tiempo, pero hay que ver como cambia el interés en su tiempo ¿no?,

porque por ejemplo tal vez yo quiera,… tal vez en un año me den el doce por ciento, pero que tal si yo quiero saber lo que me aumentó en medio año, entonces no me ayudaría saber cuantos ene uno o ene dos porque, ene me haría falta saber, me haría falta que pasara un año para saberlo ¿no? (pequeña pausa) este (pequeña pausa)

Prof. Rondero: si, si tiene sentido lo que dice Iván ¿no? que a final de cuentas (señala la expresión que escribió, debajo de la que había anotado Javier), (pequeña pausa) este, (pequeña pausa) pero pero la estructura es esta, al final de cuentas ¿no?, si ya hay, eso es un poco más sofisticado que en lugar de decir periodos completos yo fuera a pensar en que quiero ver cuando estoy (pequeña pausa) como en medio experimental

Javier: #$%& así como (pequeña pausa)

Prof. Rondero: claro, se puede ser un poco más sofisticado, pero la idea general es esta (señala la expresión que escribió, debajo de la que había anotado Javier) y están de acuerdo que ene es de tipo discreto, (pequeña pausa) y aquí te (señala la expresión corregida que había escrito Iván inicialmente ($C\ (t)= C_0 + t(I \cdot C_0)$) podría ser mas de tipo continuo, pero eso es, ahora no nos vamos a meter mucho a discusión pero lo que si vayamos a a identificar algunas cosas, ¿ce cero (C_0) es una cantidad fija o varía?

Guillermo: fija

Javier: es fija

Prof. Rondero: fija, ce cero es fija (escribe en el pizarrón C_0 *fijo*) ¿ene (n) es fija o es variable? (escribe en el pizarrón *n variable*)

Javier: es variable

Prof. Rondero: ene (n) es variable ¿i?

Javier: es fijo

Prof. Rondero: i es fijo (escribe en el pizarrón *i fijo*), (pequeña pausa) con esas consideraciones, digan que o platíquenos que estructura ven en el sentido de de ¿hay alguna relación de esto con lo que discutimos anteriormente?

Iván: si porque es una ecuación de una recta ¿no?

Javier. es una función lineal otra vez todo se estudia bajo, ya respecto a una proporción, en este caso la proporción estaría dada por el interés, si se varía el interés la proporción aumenta o disminuye dependiendo de su, de si es mayor o menor el valor

Prof. Rondero: claro, sólo que ¿cómo alguien? ya sea Javier mismo o alguien quien quien quiera, este ¿Cómo pondrían una una est gráfica típicamente en en erre dos (R^2)? ¿Cómo la pondrían? ¿Cómo escribirían la la la (pequeña pausa) la gráfica? ¿Cómo lo dibujarían? si lo (pequeña pausa) por ejemplo Javier para el primer caso o Guillermo o Erick, quien quiera el primer caso (Javier pasa al pizarrón)

Javier: Yo la pondría con una gráfica de la cantidad con el tiempo, (traza dos ejes cartesianos perpendiculares) en este caso la cantidad, esta sería la del banco, a la que le llaman ce ene (C_n), bueno cantidad (escribe arriba del eje vertical la palabra *cantidad*) esto refleja la cantidad que hay en el banco dependiendo, yo la pondría contra este, los ene (n) periodos (escribe en el eje horizontal *n periodos*)

Prof. Rondero: aja, (pequeña pausa) y bien se empieza se entiende que empieza uno, toma uno, dos, tres y ¿se tienen varios términos?

Javier: el capital inicial lo ponemos en el origen

Prof. Rondero: no, no necesariamente
Javier: bueno (pequeña pausa)
Iván: #$
Javier: podemos desplazar el (pequeña pausa) los ejes a cualquier lado
Prof. Rondero: si, si pero es más fácil Javier que lo
Javier: #$
Prof. Rondero: fijes en un, como estas poniendo ahí cantidad inicial lo fijes en cualquier valor distinto de cero en ye (*y*)
Javier: #$ podemos fijar por ejemplo la cantidad (marca puntos en los ejes coordenados que están trazados en el pizarrón) (pequeña pausa) la cantidad la podemos fijar por ejemplo aquí (marca el punto *(0,1)*) sobre el eje vertical)
Prof. Rondero: ahí el punto de arranque ce cero (C_0) vale uno ¿no?
Javier: diez por ejemplo
Prof. Rondero: no, ponle ce cero en general, ce cero (C_0) para seguir ahí con eso ¿no?
Javier: ce cero (C_0) (pequeña pausa) y entonces en el primer periodo…
Prof. Rondero: ponle ahí, ponle valores si quieres
Javier: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, (pequeña pausa) (Escribe números enteros positivos sobre las marcas hechas en el eje horizontal)
Prof. Rondero: todos los demás ¿van siguiendo a Javier? Iván, pueden interrumpir o preguntar o sugerir cualquier cosa ¿eh? ustedes participen, con toda confianza
Javier: primer periodo tendríamos algo como, aquí ce cero más el interés, en este caso sería i, por ce, i por ce (*C*), este es para #$ (escribe $n = 1,\ C_0 + i\ C_0$ en el pizarrón)
Prof. Acosta: ¿Qué ce es esa?
Javier: esta ce es cero, o sea la constante, entonces estos,.. aumentaría en un porcentaje dependiendo de la i, que sería, si la i es positiva, entonces pasaría un valor por ahí (marca el punto *(1,1)* dependiendo del valor de la i, (pequeña pausa) y para el que sigue se mantendría una relación parecida para ene (*n*) igual a dos, sería ce cero (C_0) mas dos i por ce con cero (escribe en el pizarrón $n = 2,\ C_0 + 2i\ C_0$), o sea se incrementa de esta manera, en este caso lineal, sería una recta mas o menos (puntea una línea que pasa por el punto (1,1)), #$ dibujarla, entonces se puede prolongar para cualquier lado, en este caso se supone que (pequeña pausa)
Prof. Rondero: Haber, haber ahí hay dos detalles eso que acaba de hacer Javier ¿se puede prolongar? ¿Qué dicen los demás?
Iván: no, sino que, bueno, a menos que en un periodo de tiempo antes le diga dame y ya después le pago y luego (pequeña pausa)
Prof. Rondero: no, no en le contexto en que estamos, ¿Qué? ¿Cuál fue la cantidad de arranque, Javier?
Javier: no, por eso, para fines prácticos serviría sólo este lado (señala el eje horizontal) porque no hay periodos negativos, pero este (pequeña pausa), ya en un contexto más geométrico pasaría lo mismo y o sea la (pequeña pausa) eso nada más para enfatizar de que existe una recta, por así decirlo, que une los puntos que van a, y que va a seguir incrementando en este caso el (pequeña pausa)
Prof. Rondero: ¿Qué dicen ahí ustedes? de de esa expresión que tenemos arriba, de lo que está discutiendo Javier, tenemos una (pequeña pausa), tu dices Javier ¿que es una recta?

Javier: pues (pequeña pausa) si, y que se comporta (empieza a escribir del lado izquierdo del pizarrón)

Prof. Rondero: ¿Qué dicen los demás? ¿Haber?

Javier: como habían planteado el primer problema (dibuja un triángulo rectángulo) en este caso ce cero (C_0) quedaría por aquí (marca el vértice del ángulo agudo a la izquierda de la base horizontal, del triángulo), y esto (va trazando líneas verticales dentro del triángulo y numera los puntos de intersección con la base) estos segmentos serían (traza líneas horizontales que parte de las intersecciones de las verticales con la hipotenusa) i por ce cero; este dos i por ce cero (lo escribe en la intersección de la segunda línea horizontal con la hipotenusa)dos i por ce cero; este tres i por ce cero (lo escribe en la intersección de la tercera línea horizontal con la hipotenusa); o sea de cierta forma existe una relación en que se va incrementando siempre la misma, la misma cantidad, o sea todo depen (pequeña pausa), dependería en este caso del (pequeña pausa) valor de i, o sea que, cuanto se incrementa a partir del ... capital inicial y del interés, que vendría siendo el interés lo que regiría en este caso la proporción, la pendiente de la recta que está (pequeña pausa) dando origen a (pequeña pausa) los valores de la cantidades en el banco, o sea todo vendría, ora como que regresando podríamos ligar con el problema anterior con este (señala el triángulo dibujado a la izquierda del pizarrón) en razón al (señala las líneas verticales) al segmento ¿Qué era de e (DE)?

Prof. Rondero: Si, #$ ¿Qué dicen los demás? por favor nos interesa que que argumentan los demás que que ¿Cómo complementan? ¿Qué? ¿quee? (pequeña pausa) ¿que les parece esa última consideración? Argumenten por favor, digan algo

Guillermo: pues, si está bien es una función lineal

Prof. Acosta: ¡más fuerte Guillermo! por favor

Guillermo: pues, si es es una función lineal y efe el interés sólo afecta a la cantidad inicial, se puede decir que la pendiente sería una constante

Prof. Rondero: la pendiente es una constante y ¿cómo cual? aquí como ¿qué está haciendo las veces de pendiente? Guillermo

Guillermo: ¿disculpa?

Prof. Rondero: ¿qué está haciendo las veces de pendiente? o ¿Cómo estas viendo la pendiente, ahí?

Guillermo: pues la pendiente la veo como ene (n) que (se dirige al pizarrón y señala la letra n) aquí es este, ene es (pequeña pausa) ¿qué es lo que está representando el tiempo, verdad?

Prof. Rondero: periodos de tiempo

Guillermo: periodos de tiempo, entonces pues teniendo una cantidad constante que sería, (pequeña pausa) bueno si lo vemos con, (pequeña pausa) este, (pequeña pausa) así (escribe en el pizarrón $y = m\,x + b$) este sería la cantidad constante sería un punto en el eje (señala el eje vertical, del sistema de coordenadas rectangulares, dibujado antes) y teniendo m como que siempre está bajo uno, porque, (pequeña pausa) siempre está bajo uno “orita" que, (pequeña pausa) explico, explicó, (pequeña pausa) bueno el problema es que siempre, siempre va a ir aumentando una cantidad constante (señala la recta dibujada antes) que es el interés ya que es una tasa fija, esto lo hace mil, simplemente, (pequeña pausa)

Erick: si #$ que la pendiente que es eme (*m*), que es constante y el interés, al igual que la recta cambia su inclinación con respecto a la pendiente igual, este, va a cambiar, a cambiar todo este, con respecto al interés, cambia el interés va a ser diferente y igual que la recta este, pues si la pendiente cambia, va a cambiar, esto sería, a veces hay semejanza entre el problema anterior y este, que hay algo constante que hace que cambie la gráfica, bueno al irlo graficando, (pequeña pausa)

Prof. Rondero: ¿qué es eso que cambia? ¿qué es eso constante?

Erick. El interés y la pendiente

Prof. Rondero: #$ ¿#$ ya está dado no? bueno aquí, dos elementos aquí, dos consideraciones importantes, esto ya dijimos mas o menos, ya lo argumentó inclusive, pero aquí estrictamente hablando, Javier puso así como, como todo como si fuera una recta punteada (señala la recta punteada, dibujada antes por Javier), estrictamente hablando aquí ya mas o menos se calcula, ¿se fijaron como le hizo? dijo aquí esto es como ¿como cuanto? como ce mas i ce cero (señala el punto *(1,1)* de la gráfica trazada antes por Javier) ¿no? lo que incrementó i ce cero, acá ya, creo que ya no lo puso, aunque lo hizo aquí (señala la expresión analítica), pero se entendía que esto ¿era cuanto? ce cero que es esta parte (señala la gráfica) mas dos i ce cero ¿no? ¿verdad? y ya tu ya dijiste Guillermo que se incrementa de un periodo a otro también lo mismo ¿no? está pasando mas o menos Erick lo mencionó. Pero ahora estamos estrictamente hablando ¿de que? de de estos valores así (marca sólo los puntos de la recta, coincidentes con los enteros del eje horizontal) que solamente son para tres, para cuatro, para dos, para cinco, etcétera, ¿sí? (pequeña pausa) los podemos ir poniendo allí con todo detalle estarían así. Entonces la pregunta es ¿qué? es, (pequeña pausa) así nos daría la gráfica estrictamente ¿no? ¿Qué características tienen entre si esos puntos?

Javier: ya este, usando una palabra un poquito más específica, vendrían siendo colineales ¿no?

Prof. Rondero: colineales es el término que se usa, que quiere decir (pequeña pausa)

Javier: en la misma recta

Prof. Rondero: que están (pequeña pausa)

Javier: todo viene en la misma recta

Prof. Rondero: que están sobre la misma recta. Iván ¿Qué dices de eso?

Iván: #$, (pequeña pausa) pues que serviría el mismo análisis ¿no? sólo que es el mismo análisis que hacia de poner toda la recta con, #$ bueno punteada, sólo que tomando determinados valores, ya no, ya no vamos a tomar los valores entre uno y dos, sólo vamos a tomas valores discretos entre uno y ene

Prof. Rondero: claro

Javier: vendría siendo la misma este… la misma relación ¿no? lo único que cambiaría vendría siendo en este caso el dominio del (pequeña pausa) que se toma para (pequeña pausa) 1:20:40

Prof. Rondero: exactamente

Javier: pero las relaciones si no cambiarían lo cual fue la primer pregunta ¿cual es la relación?

Prof. Rondero: Así es, si con esta distinción, con esa distinción les parece que es importante hacerlo Guillermo, Erick, Javier, Iván ¿es importante hacer esta distinción que acabo que acabamos de mencionar, o no es importante?

Javier: para este caso específico yo diría que no importaría mucho porque no varía es decir no cambia tanto con respecto al tiempo la relación es la relación es lineal otra vez y este no importa los valores de en medio en este caso me preguntaba que pasa siii a la mitad del tiempo en este caso podríamos hacer la misma relación porque todavía para medio año se han fijado los periodos de tiempo en años para medio año va a funcionar la misma relación dado que el incremento es constante o sea es es lineal o sea no cambia mucho todo se basa en el interés y en el periodo de tiempo (pequeña pausa) pero no importaría si está con (pequeña pausa) continuo o no porque esa misma relación o sea se se puede manejar así para fines re prácticos de uno, dos, tres, cuatro años pero si se quisiera saber este en periodos, #$% periodos fraccionales entonces funcionaría la misma relación y ya no importaría si es continua o no

Prof. Rondero: si pero por el otro lado digamos que dado dada esa consideración de que la variable ¿ene (*n*) funciona como variable dependiente o independiente?

Javier: ene es #$% la variable independiente porque (pequeña pausa)

Prof. Rondero: claro

Javier: es la que si en este caso arbitraria se dice quiero saber un tiempo cuanto tiempo tres cuanto dos y medio

Prof. Rondero: exactamente entonces esa no es continua... es discreta como ya lo dijo Iván de tal manera que no podríamos decir estrictamente que sería como una función lineal como ya lo puso Guillermo ahí porque equis allí tendría que estar en todo en un intervalo de los reales

Javier: nada más sería cuestión de fijar el dominio de equis

Prof. Rondero: exactamente

Javier: haciendo mención de que en este caso se trata de una variable discreta que se incrementa conforme los números naturales

Prof. Rondero: sin embargo tú también ya lo mencionaste aquí hay un gran detalle o sea aunque no pudiésemos hablar tan directamente o poner la recta como como continua ¿no? digamos la recta como siempre la escribimos si hay que distinguir que ya estamos argumentando el hecho de que esos puntos tienen como una característica adicional ¿cuál? entre si

Iván: están sobre una recta

Prof. Rondero: estarían sobre una misma recta son colineales tú ya lo mencionaste #$% y eso quiere decir que estarían sobre una misma recta. Porque ahora que pasaría si, no en este modelo sino en otro, esos puntos discretos, no fuesen colineales.

Javier: debería de haber de cierta forma una relación que nos indicará que punto está donde en cierto tiempo ¿no?

Prof. Rondero: claro

Javier: siempre debe #$% para en este caso problema #$% no importa si fuese así o fuese de la otra manera que decían que este que el interés es sobre el monto actual no sobre el capital inicial en este caso creo que no sería una recta pero igual debería haber una relación que que este en cierta forma controlara el crecimiento decrecimiento del capital ¿no?

Prof. Rondero: claro, claro, pero ya no podríamos decir que fuese colineal si entonces ya no podríamos decir que están ¿sobre qué?

Javier e Iván: sobre una misma recta

Prof. Rondero: sobre una misma recta ¿no? (pequeña pausa) en todo caso, y si para terminar un poco esta discusión ¿cuándo esta condición no se cumple? tu Iván la planteabas desde hace rato ¿cuando esta condición no se cumple? o sea dicho de otro modo ¿cuándo cambiamos esa condición? bajo que condiciones ora si ya un poco más reales de ¿cómo le haces con tu capital? para que ya no sigas teniendo esto y que puedas, si nos vemos todavía más financieros que ganes más

Iván: pero ahí no se que tan real sea por ejemplo si yo tengo una, (pequeña pausa) bueno y saco los intereses y los meto en otra cuenta para que me generen intereses, entonces interés interés manejan intereses, pero no se hasta donde sean considerados los intereses para sacar los intereses en otra cuenta ¿no? porque..

Prof. Rondero: en principio si puedes, pero no cambia mucho si tienes la misma tasa y por supuesto aquí el asunto es entre más grande ten#$ eso no lo hemos dicho pero entre más grande sea la tasa ¿Qué le va a pasar a tu capital?

Javier: más rápido va a crecer

Prof. Rondero: y ¿porqué crece más rápido? Guillermo, Erick ¿porqué crecería muy rápido?

Guillermo: porque el incremento es mayor

Prof. Rondero: si claro el incremento es mayor, pero ¿cómo se vería reflejado, por ejemplo en la gráfica? O ¿cómo se vería reflejado?

Guillermo: si (pequeña pausa) (apenas audible)

Prof. Rondero: si vamos a suponer esto mismo que se puso aquí (El Prof. Rondero pasa al pizarrón) puedo seguir con los puntos ¿no? (señala la curva antes dibujada en el pizarrón) ce cero arranca de inicio y lo mismo, pero ahora esto fue ce cero más i ce cero ¿no? pero si i, ce cero no cambia, pero si i cambió que esta, que va a pasar, este punto donde va a estar, arriba ¿no? más arriba, digamos todos los demás irían así ¿no? (señala una trayectoria sobre la curva ya dibujada en el pizarrón) tons ya, aunque no lo pongamos en una recta ¿qué le está pasando?

Javier: estaría como que más inclinado

Iván, Guillermo y Erick: #$% (murmullo)

Prof. Rondero: crece más, la pendiente ¿como estaría? si si seguimos pensando en función de pendiente en términos de pendiente Erick

Erick: es igual como cuando la pendiente es la que va moviéndose es decir suba y baja es igual que el interés entre más alto pus va subiendo más #$%

Prof. Rondero: y por cierto aunque ya pensemos en términos de algo continuo, de alguna manera continuo, ¿ustedes ven en esto algún parecido? A ver lo voy a poner así, sencillo (pequeña pausa) (escribe en el pizarrón $x(t)=x_0+vt$) ¿ven en esto algún parecido? o algo (pequeña pausa) ahora pueden pensar que t es tiempo y es continuo digamos #$ (pequeña pausa) ¿ven alguna semejanza?

Javier: en cierta forma lo que es uve vendría siendo igual a este a la #$% lo que es el pequeño intervalo ahora si vendría reflejando eso una recta, bueno una semirrecta de puntos, sino que (pequeña pausa) 1:28:00

Prof. Rondero: dibújala si quieres Javier, haber dibújala por favor

Javier: entonces si que daría una recta continua

Prof. Rondero: quieres borrar eso, esa parte que tienes enfrente, si quieres borrarle, nada más para que tengas más espacio

Javier: ahora ahora eso si daría una recta continua aquí mismo se podría poner como una (pequeña pausa)

Prof. Rondero: no borra borra #$ otra gráfica
(Javier dibuja un sistema de ejes coordenados marcando los enteros en ambos ejes)
Prof. Rondero: como ven Javier se va por lo seguro de haciendo por escala, (pequeña pausa) (Javier escribe *Cant* arriba del eje de las ordenadas.*)* no no pero ahora pero no no Javier pero ahora ya en este contexto directamente
Javier: ¿directamente?
Prof. Rondero: si si exactamente
Javier: en este caso la variable sería te (escribe *t* al final del eje de las abscisas)
Prof. Rondero: ¡ajá!
Javier: y en este caso vendría siendo equis en función de te (escribe *x (t)* arriba del eje de las ordenadas)
Prof. Rondero: ¡ajá!
Javier: y este (pequeña pausa) esto quedaría en equis con cero (escribe x_0 en la primera marca del eje de las ordenadas)
Prof. Rondero: ¿Qué pasa ahí?
Javier: (borra la primera y escribe x_0 entre la primera y segunda marca del eje de las ordenadas) podría estar en cualquier lugar
Prof. Rondero: si si si exacto
Javier: equis con cero y (pequeña pausa) se incrementaría (pequeña pausa) en este caso (pequeña pausa) depende del interés pero
Prof. Rondero: no, pero no habrían no necesariamente estaríamos hablando del interés
Javier: bueno si bueno en este caso dependería del (pequeña pausa) uve (señala *v* la ecuación)
Prof. Rondero: uve (*v*)
Javier: (pequeña pausa) y pasaría por (pequeña pausa) continuo otra vez lo único que habría que ver es si ese uve (*v*) es positivo o es negativo
Prof. Rondero: piénsalo como que es positivo como lo estamos viendo aquí en el problema
Javier: positivo daría similar a esto (señala la recta trazada antes) con un crecimiento dependiendo del valor de uve (*v*)
Prof. Rondero: uve (*v*),
Javier: ya sea
Prof. Rondero: o sea ahora en ese contexto y en estos dos contextos uve (*v*) o allá i ce cero (iC_0) ¿qué que son?
Iván: la pendiente
Prof. Rondero: si la pendiente, y que nos dice ¿qué nos da así en ese contexto? ¿ ¿qué nos está señalando? ¿qué papel juega digamos?
Iván: nos va diciendo como va cambiando los valores en en el tiempo
Javier: que tan rápido crecen o que tan rápido disminuye
Prof. Rondero: que tan rápido crece ¿no? algo tiene que ver crecimiento, también podría hablarse de decrecimiento por supuesto, como ya decías tu positivo o negativo igual allá arriba ¿no? puede ser positivo o negativo que tan rápido crece o decrece, si tu eres el que le debes al banco, tu capital va obviamente a decrecer ¿no?, muy bien para ya casi para cerrar esto maestro este ¿qué que que relación ven en todo esto junto con el problema que discutimos anteriormente? ¿cuándo si algo se puede ver de esta forma? ¿cuando no?
Javier: bueno se puede hablar de rectas y de funciones lineales cuando el crecimiento es fijo o sea cuando el, en este caso cuando el cambio, es este determinado o sea no

varía porque si empieza a variar ya no podemos estar hablando de cosas como estas (señala al pizarrón) sino que aparecerían las curvas que ya habíamos mencionado ya antes, entonces como que habría que fijar 1:31:29 el cambio, en este caso la tasa de cambio que vendría siendo reflejada por la pendiente ¿no? entonces sería lo que importaría para (pequeña pausa) para poder hablar ya de funciones lineales en este caso

Prof. Rondero: ¿Qué piensan los demás?

Erick: Pues si como decía ¿no?, de que este, si el cambio es constante si se puede manejar una gráfica (mueve su mano de arriba abajo) función lineal, porque ya cuando por ejemplo si se intenta variar cada, por ejemplo el tiempo aumentando cinco y luego sube a diez y algo así pues si ya, quizás ya no sería una gráfica lineal y no se puede expresar con esa ecuación, habrá que encontrar una distinta

Prof. Rondero: una distinta (pequeña pausa) ¿Guillermo?

Guillermo: #$%

Prof. Rondero: aunque no siempre estemos hablando de una gráfica continua recta continua ¿no? como en aquel caso pudiese ser de tipo discreto ¿no?

Iván: aunque aquí por ejemplo en la anterior se se rompía si aumentamos el exponente ¿no? ya no podíamos hacer ninguna ¿no? pero por ejemplo aquí pensándolo de manera de del interés yo he escuchado que por decirlo luego dicen interés sobre interés entonces (pequeña pausa) estee ya ahí el interés no sabemos como cambia en el tiempo, entonces si el interés cambia con el tiempo, entonces aquí el interés dependería también de te (t) entonces sería como una función que no dependa de una sola variable entonces ya no podría hacer un análisis similar porque ya no sería una función lineal si tenemos dos variables, y más si se están multiplicando

Prof. Rondero: si, de lo que está hablando Iván finalmente es lo que se llama cuando dices interés sobre interés, es el interés compuesto, efectivamente ya deja de ser una forma lineal

Javier: algo que #$& caso concreto,

Prof. Rondero: ¿a ver?

Javier: regresando a aquello de la derivada, se supone que la derivada refleja la pendiente ¿no?, pero (pequeña pausa) esta eme (m) se supone que este, hablando de funciones, algo así ¿no? (escribe en el pizarrón $m = f'(x)$), la eme es debido a la, es igual a la derivada

Prof. Rondero: en un punto dado

Javier: en un punto dado, en este caso sería equis (x)

Prof. Rondero: equis cero (x_0)

Javier: o un punto a (a) cualquiera (reescribe en el pizarrón $m=f'(a)$). Se supone que, para que una función sea lineal, regresando a lo que vimos hace rato, este habíamos dicho que el exponente tenía que ser uno ¿no?, entonces al momento de hacer la derivada, ese exponente se reduce y da que una, que la pendiente sea constante, entonces si el exponente varía, laa la pendiente nos da otra función y entonces ya no, ya no es constante y eso vendría a dar lo que habíamos mencionado hace rato de que si para hablar de función lineal es, el interés tiene que ser fijo

Prof. Rondero: exacto

Javier: el crecimiento tiene que ser constante

Prof. Rondero: claro

Javier: Entonces si cambiamos la variable 1:34:50 entonces ya no estaríamos hablando de funciones lineales, pss este, si nos da como derivada en este caso una función en términos, una función de variable, de la variable en este caso independiente ya no estaríamos hablando de la función lineal, entons todo depende del, si la original es una función lineal o no para saber si este, el crecimiento, entons no sé como que

Prof. Rondero: haber simplemente Javier deriva equis con respecto a te (t) en esa expresión

Javier: ¿esta? (señala la expresión $x(t)=x_0+vt$)

Prof. Rondero: si escribe derivada de equis con respecto a te (t)

Javier: bueno pero entonces en este caso

Prof. Rondero: si derivada de equis con respecto a te (t) (pequeña pausa) si bueno esta bien

Javier: este es cero (refiriéndose a la derivada de la constante x_0) y esta quedaría nada mas como

Prof. Rondero: ve (v)

Javier: ve (v) (escribe $x'(t)=v$) mjua si

Prof. Rondero: Si lo vemos en el contexto de de velocidad tiempo posición pues sabemos que ¿Qué tipo de movimiento Iván se da eso?

Iván: en un tipo, un movimiento rectilíneo este uniforme

Prof. Rondero: y porque se llama rectilíneo uniforme

Iván: este para bueno, rectilíneo uniforme porque tiene para empezar tiene que describir una recta yy

Prof. Rondero: y que es que es esa expresión que está ahí

Iván: ajá pero pero no sólo suer (pequeña pausa) tiene que describir una recta porque no puede (pequeña pausa) dar (pequeña pausa), porque el cambio de dirección es una #$%

Prof. Rondero: claro si pero además en que otro aspecto se refiere el movimiento rectilíneo uniforme en en que que cosa lo caracteriza

Iván: la velocidad que es constante

Prof. Rondero: la velocidad que es constante, la razón de cambio que es constante ¿no? y allí se está viendo. Pero además ¿hay proporcionalidad ahí?

Javier: (asiente con la cabeza)

Iván: si porque en cada intervalo de tiempo va aumentando la misma distancia por ejemplo si lo tenemos aquí en esta posición decimos que va llevando una velocidad determinada, vamos a imprimir una velocidad de terminada y si no hay fuerza de fricción y eso, entonces cae en determinado tiempo va a aumentar la misma cantidad

Prof. Rondero: bueno eso de que aquella expresión que se dice que lo oyeron desde la secundaria, distancias iguales en tiempos iguales ¿no? pus la proporcionalidad que quiere decir, que la velocidad es constante y debido a esas características es lo otro ¿qué función describe ese movimiento?

Iván: una función lineal

Prof. Rondero: y ahora digan o comenten por favor ya casi para terminar sus impresiones, quisiéramos oír las impresiones de de cada uno de ustedes. Me quito de aquí porque las impresiones de cada uno de ustedes, un poco más fuerte, para ya con eso cerramos la entrevista

Erick: se me hace interesante porque bueno aquí lo que vimos bueno es analizar este bueno, la manera entender el segundo problema, se puede decir que numéricamente o

analíticamente de una manera, pero cada quien pensó diferente, y bueno al menos en mi caso como que al principio si me costó algo de trabajo, bueno chín ¿cómo lo resuelvo? 1:38:12 ya después este, cuando empecé a resolver con la con la, con la efe (*f*) y todo eso ya, ya como #$% ¿no? pero cada quien tuvo una manera distinta de de llegar a resolverlo

Prof. Rondero: claro, Guillermo

Guillermo: si, también me pareció interesante por la forma en que lo relacionan una cosa con la otra, básicamente es lo mismo pero, hay que saberlo verlo je, je

Prof. Rondero: pero, pero en que te ayuda Guillermo ya que dices eso, eso, en que te ayuda a eso que dices, hay que saberlo ver en que te ayuda, o sea, cuando lo ves ¿que pasa? con, contigo en tu mente ¿qué pasa?

Guillermo: pues, saber verlo, a eso me refiero a que si lo se, bueno apreciar en diferentes formas que puede ayudar para resolver el problema

Prof. Rondero: Javier, por favor

Javier: bueno de repente así como que no nos damos cuenta de cuantas formas podemos aplicar en este caso la ecuación de una recta, o sea que existen relaciones lineales que de repente están ahí y no nos damos cuenta que están y púes que en el momento en que nos ponemos a reflexionar sobre ello, podemos llegar de distintos problemas a la misma cosa, ya sea desde un lado, desde el otro, no importa o sea, vamos a llegar a lo mismo, mientras sean en este caso relaciones lineales, pero pues esteee, es que las aplicaciones que tiene pues son bastante amplias, eso lo venimos a aprender (pequeña pausa), cosas a lo zonzo

Prof. Rondero: je, je muy bien, Iván

Iván: eh, eh bueno, eh, lo que estaba viendo es que (pequeña pausa), si la linealidad y la, la recta se utilizan para muchas cosas, peroo cuando se rompe la linealidad, bueno cuando ya no podemos atacar un problema de, de manera lineal, este, de nuevo regresamos a la linealidad porque, por ejemplo cuando teníamos una, una función que parecía parábola nosotros tratábamos, tratábamos de encontrar su tangente que pus en realidad es regresar a la recta para describir otra vez #$, entonces cuando perdemos la linealidad, tratamos de recuperarla nuevamente porque la linealidad como que nos hace ver la manera más fácil, como que tener una recta siempre nos dice, a pues si está, si mientras el tiempo aumenta está hacia abajo, entons quiere decir que este está, si es, es decreciente,

Prof. Rondero: si es decreciente

Iván: entonces este, como que siempre que perdemos la linealidad tratamos de recuperarla ¿no?

Prof. Rondero: esto último que dice Iván es muy interesante, porque, bueno todo lo que han dicho ustedes, me refiero nada más, retomando un poco lo que, es esto (el Prof. Rondero pasa al pizarrón) efectivamente con mucha frecuencia, y eso ustedes lo han de encontrar seguido en, en su carrera en los estudios que están siguiendo, se van a encontrar el término línea, linealidad de diferentes formas (pequeña pausa), yy lo que dice Iván es, que en muchas ocasiones como que pareciera que hay que regresar en, en parte si hay que regresar en muchas ocasiones a lo lineal, por ejemplo ya más o menos lo mencionaba, tienes una curva aquí, tienes un punto determinado (dibuja una curva, marca un punto sobre ella y traza una línea recta punteada hasta el eje de las abscisas, perpendicular a dicho eje) y tienes una curva que tiene una determinada derivada en este punto, y a final de

cuentas usas la derivada para la, para encontrar la ecuación de la recta tangente, recta tangente, es como si esta curva que no es lineal, en este punto la linealizamos, ahora no vamos entrar en detalle de cómo sacar la ecuación de una recta tangente, pero lo podemos hacer, ¿se dan cuenta? y bueno eso si ocurre mucho, con mucha frecuencia y eso da un poco la importancia que que, que que, ojalá que después de esta experiencia ustedes lo vean ¿no? hay que ver como juega, como interviene la línea-li-dad (escribe *linealidad* en el pizarrón, con una flecha apuntando hacia abajo) en lo lineal (escribe en el pizarrón *lineal* al final de la flecha) y con que otras, con que otros términos aspectos de la matemática está relacionada esta noción (escribe *noción* arriba de la palabra *linealidad*) de linealidad con lo lineal y con que otros aspectos ¿cuándo si y cuando no? Ustedes han, han llevado o van a llevar álgebra lineal, van a llevar ecuaciones diferenciales, van a hablar de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, y así de muchos operadores lineales, la derivada y la integral son operadores ¿de que tipo? lineales ¿qué quiere decir eso? ahora no entraremos en mucho detalle pero son, y así ¿no? en muchos lugares oyen hablar de la lin lo lineal no necesariamente siempre pensando en que tiene que ser todo relacionado con la recta ¿está claro? ese es otro tema que también discutiríamos en otro momento, pero se dan cuenta como la linealidad lo lineal está relacionado con muchas cosas de matemáticas. Y un poco lo que hemos tratado de averiguar, que les agradecemos a todos ustedes, el maestro Acosta y yo, su disposición para esto, averiguar un poco alrededor del pensamiento de cuando interviene y cuando no interviene la linealidad, y ojalá que les haya sido útil la entrevista, para nosotros ha sido muy enriquecedora muchísimas gracias muchachos

Prof. Acosta: muchas gracias

Prof. Rondero: gracias 1:43:58

Nota: Dentro de la transcripción del diálogo, los símbolos en conjunto o aislados #$%& significa que no se escucha de manera adecuada una palabra o alguna frase corta de dos o tres palabras.

ANEXO 3

El material didáctico del curso: *El vínculo conceptual entre la proporcionalidad y la linealidad*, tuvo como sustento teórico metodológico: a las *nociones de proporcionalidad y linealidad*; *Las Competencias Matemáticas*, establecidas por el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes; y aspectos vivenciales de *Programación neurolingüística.* Este curso formó parte de las actividades del 2° Coloquio de Matemática educatica, llevado a cabo del 11 al 14 de junio de 2008 y fue organizado por el Área Académica de Matemáticas, del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Material didáctico íntegro:

SEGUNDO COLOQUIO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA PARA PROFESORES

CURSO CORTO

"El vínculo conceptual entre la proporcionalidad y la linealidad"

Profesor: Juan Alberto Acosta Hernández

Miércoles 11 de junio; 12:00 – 14:00 y 16:00 – 18:00

Palabras clave: Linealidad, Epistemología, Cognición, Sociocultural, Didáctica de la matemática

Introducción

La linealidad es una noción empleada por muchos individuos en lo cotidiano, aunque en ocasiones no se perciba con tal denominación. En el ámbito no escolar, hay ejemplos donde dicha noción está presente, como en el cálculo que hace una persona del interés simple de un capital invertido o del pago de una deuda contraída, por el préstamo de un monto de dinero. Como parte de los saberes escolarizados, la linealidad aparece desde la proporcionalidad directa, hasta el Álgebra lineal. Posteriormente la noción aparece en aspectos especializados como, la modelación de un sistema a través de la Programación Lineal, mediante el cual se buscan las mejores decisiones, al optimizar una función objetivo con restricciones, ambas lineales.

Las actividades humanas influyen en las concepciones de los individuos, de tal manera que al llegar a los ambientes escolares, donde se abordan los conceptos matemáticos, éstos son permeados por el significado original que se había instalado con anterioridad. Esto es, la linealidad es preconcebida a partir de las experiencias cotidianas de hechos simples que se expresan en lenguaje coloquial como "el camino es recto", "no te pases de la raya", las cuales son llevadas a la escuela donde el estudiante descubre que se pueden resolver problemas con la proporción directa y que la recta tiene una ecuación, pero el discurso escolar tradicional no articula estos dos conceptos. Se han recabado evidencias acerca de la

estrecha vinculación conceptual que existe entre la proporcionalidad directa, y la linealidad, vinculación que se muestra también en los conceptos de función lineal, sistemas de ecuaciones lineales, hasta las misma definición de mapeo lineal o transformación lineal.

En lo relativo al aspecto sociocultural, se resalta que los individuos tienen concepciones intuitivas acerca de la recta, las cuales ya en el ámbito escolar requieren su matematización como función lineal, transformando los significados previos. Ahora bien en lo que se refiere al discurso escolar, tanto en los libros de texto en que se apoya la enseñanza como las explicaciones que brinda un docente en la escuela, a menudo parte de experiencias cotidianas para explicar un fenómeno lineal. Tal es el caso cuando se estudia el movimiento rectilíneo uniforme, en el que se postula la proporción directa a través de, "distancias iguales en tiempos iguales", lo que manifiesta una razón de cambio constante, que no es otra cosa que la velocidad. Esto es, la trayectoria que describe el móvil es una línea recta. Es a través de la articulación de saberes que se buscan explicitar las relaciones conceptuales de la linealidad en el curriculum escolar.

Desarrollo del curso

Se han considerado tres vertientes dentro de este curso corto, una encaminada a la reflexión de la *noción*[29] *de la linealidad* a partir de la *proporcionalidad directa*. El segundo matiz es el enfoque dado por la temática general de este Coloquio: *Las Competencias Matemáticas*, establecidas por el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessmentt, PISA). Por último el tercer aspecto, es el referido a la incorporación de elementos metadidácticos, como son el empleo de técnicas de Programación Neurolingüística durante el curso.

Aspectos teórico- metodológicos

La linealidad

A partir del estudio, en proceso, de la noción de linealidad (Acosta, 2008), se tienen elementos de carácter cognitivo a partir de artículos de investigación referidos a dicha noción, desde la perspectiva de la proporción directa. En este análisis del estado del arte, se muestra que la noción de linealidad, en su versión como función lineal de la forma $y = mx$ con $x \in R$, tiene un vínculo conceptual con la proporción directa $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. En Singh (2000), se resalta la importancia del razonamiento multiplicativo al abordar la proporcionalidad. Además dice que el problema de la enseñanza del razonamiento multiplicativo está compuesto por las maneras en que enseñamos las proporciones en la escuela, y que se requiere investigar cómo los esquemas de unidades compuestas de la estructura multiplicativa de los niños, pueden desarrollarse a través del pensamiento proporcional. En otra investigación (De Bock, et. al., 1998) se afirma que el tema más importante en

[29] El término *noción* lo menciona Chevallard (1991) y dice que son objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas

educación matemática elemental es el correspondiente a las relaciones lineales o directamente proporcionales. Además señalane

> *"Debido a la gran aplicabilidad para el entendimiento de problemas en matemáticas y ciencias, el modelo lineal (o proporcional) es un concepto clave en educación primaria y secundaria"* (Traducción libre de De Bock, et. al., 1998).

Ruiz y Valdemoros (Ruiz y Valdemoros, 2006), hace referencia a una evaluación acerca de la propuesta de enseñanza de razón y proporción, efectuada con un grupo de sexto grado de primaria, conformado por 29 niños mexicanos que tenían 11 años de edad. La niña sujeto del estudio de caso, reflejó el proceder de sus compañeros, quienes resolvieron el cuestionario inicial con algoritmos manipulados mecánicamente, sin darle sentido a sus elaboraciones, lo cual se comprobó al inicio del programa de enseñanza. Dicho programa propició la ampliación del pensamiento proporcional cualitativo de la niña en cuestión, lo que le permitió ampliar las relaciones cuantitativas y mejorar el manejo de los algoritmos, enmarcándolos en aplicaciones llenas de sentido.

En relación con las concepciones que, desde los usos cotidianos, han edificado personas de escasa o nula escolaridad a partir de su experiencia en problemas donde, entre otros conceptos, se involucran a la proporcionalidad, Ávila (Ávila, et. al. (1995)) reporta que

> *"[….] las personas han construido estrategias para resolver problemas donde la proporcionalidad directa está implicada. Estos problemas, comúnmente conocidos como de regla de tres, generan respuestas matemáticas por parte de todos los sujetos con quienes trabajamos. [….] En todos los casos, las estrategias de resolución son diferentes a las escolarizadas. [….] imponen una revisión profunda al curriculum de matemáticas."* (Ávila, et. al. (1995))

En este estudio, el aspecto sociocultural de la proporcionalidad directa, juega un papel preponderante en las concepciones de personas de baja escolaridad, ya que las mismas pueden resolver problemas en forma distinta a las escolares. Los datos que obtuvieron estos investigadores, se recolectaron mediante entrevistas individuales bajo la técnica del interrogatorio crítico. En cuanto al manejo de la proporcionalidad directa, se le considera relevante por los usuarios de la educación básica de adultos, como lo refiere De Lella (1988) (Citado en Ávila, et. al., 1995),

> "*Tal conocimiento, en efecto, es indispensable para una interacción adecuada con el entorno laboral y comercial. Sus aplicaciones son innumerables y están presentes en todos los sectores de la actividad humana (Dupuis y Pluvinage, 1981; Soto y Rouche, 1995). Asimismo, y de acuerdo con diversos investigadores ([….] Lesh, Post y Behr, 1988) la proporcionalidad es la culminación de la matemática elemental y la piedra angular de toda la matemática que vendrá después."* (Ávila, et. al. (1995))

Tomando como referencia los resultados de las investigaciones antes aludidas, es posible resaltar que la proporcionalidad es un elemento de vínculo entre la matemática elemental y la matemática avanzada, pero su característica como elemento articulador se ha descuidado

en la didáctica, al no explicitarse los puentes conceptuales en la construcción de saberes que conlleven a un entendimiento más amplio acerca de la linealidad.

En el aspecto epistemológico de la *noción de linealidad*, hay evidencias de ella en el concepto de proporción, como lo plantea Gómez (1999) al reportar que en la historia vista a través de los libros de texto, la enseñanza de la proporcionalidad ha tenido cambios metodológicos, vinculados a tres grandes periodos. El primero considerado a finales del siglo XVIII, donde los libros de aritmética, ubican a la proporcionalidad a partir de la comparación de números, a través del estudio de las razones y progresiones, lo que derivó en varias reglas con motivos prácticos, como la de: tres; compañías (reparto del beneficio); la falsa posición (usar números arbitrarios para encontrar el verdadero); entre otras. En el segundo periodo, ubicado en el siglo XIX, cambia el tratamiento de la proporcionalidad al incorporar planteamientos generales del álgebra. Se considera que una proporción es una igualdad y los problemas de proporciones se reducen a la solución de ecuaciones. El tema de la proporcionalidad se organiza en torno al estudio de "cantidades que varían en la misma razón", lo que más tarde se denominan magnitudes proporcionales. El tercer periodo que considera Gómez (1999) en cuanto a la enseñanza de la proporcionalidad por medio de textos, está datado en el siglo XX, en donde este tema se ubica en los libros escolares de nivel superior y sus representaciones principalmente se expresan como: frases, formas tabulares, gráficas, así como expresiones algebraicas y aritméticas.

Las Competencias en Matemáticas [1]
El propósito del Programa Internacional de Evaluación de estudiantes PISA es establecer en que medida los jóvenes de 15 años al finalizar la escolaridad obligatoria están preparados para satisfacer los desafíos de las sociedades actuales. Además pone énfasis en la alfabetización o formación básica en los dominios cognitivos de la lectura, las matemáticas y las ciencias.

En particular los apartados de reflexión acerca de la evaluación PISA 2003, en cuanto a matemáticas son:

- Dominio de evaluación: alfabetización matemática de los estudiantes.
- Marco teórico y componentes: contenido, contexto y competencias.
- Variables y complejidad, para el diseño de instrumentos de evaluación.
- Estudio empírico: análisis y aclaración en niveles de competencias de los estudiantes.

Según PISA (2003) la *Alfabetización Matemática o* su término "equivalente", *Competencia matemática*, según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico *(OCDE, 2005, 2004)*

> *"Capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo"*

En estudios que han desempeñado PISA/OCDE sitúa el entendimiento de la matemática como una colección de procesos que brindan respuesta a problemas.

> **"**La concepción en que se sustenta, considera que las matemáticas deben priorizar las *tareas de encontrar (problemata),* sobre las *tareas de probar (teoremata).*

Considerar a la matemática como *modo de hacer* y a la noción de alfabetización, responden a un *modelo funcional* acerca del aprendizaje de las matemáticas. El cual propone: *tareas contextualizadas, herramientas conceptuales y un sujeto.* Por ello el foco de la evaluación PISA 2003 se centra en *cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido.*

El marco teórico del estudio PISA se sostiene en la hipótesis de aprender a *matematizar (resolución de problemas)* y debe ser objeto básico de todos los estudiantes (OECD, 2003). Por lo que se debe imitar lo que hace un matemático profesional al resolver problemas involucrando capacidades y habilidades que muestren que una persona es competente en matemáticas.

La evaluación PISA propone establecer, qué conocimientos, capacidades y habilidades pueden activar los alumnos a los que se les presentan problemas, dicho de otro modo, *medir hasta qué punto es matemáticamente competente, un estudiante, para resolver los problemas con éxito.* Para ello se consideran tres dimensiones de la evaluación:

1. El *contenido matemático* que se debe utilizar para resolver el problema, sugiriendo organizar los contenidos en base a los fenómenos y tipos de problemas de los que surgieron, atendiendo a grandes áreas temáticas.
2. La *situación*, que corresponde a la parte del mundo del estudiante en el cual se sitúa la tarea (personales, educativas, públicas y científicas)
3. Las competencias o procesos son variables del sujeto, las cuales deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con matemáticas y resolver entonces la cuestión planteada.

Las competencias declaradas establecen un plan de formación, constituyendo elementos determinantes para establecer su calidad y permiten llevar a cabo su evaluación. La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que propone, mientras que su eficacia responde al modo en que estas se logran en el medio y largo plazo.

Las Competencias o procesos generales, escogidos por el proyecto PISA son:

- Pensar y razonar
- Argumentar
- Comunicar
- Modelar
- Plantear y resolver problemas

- Representar
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
- Usar herramientas y recursos Emplear los recursos y herramientas vinculadas con el contexto, modos y situaciones.

Por otra parte, las respuestas a tareas de alta complejidad muestran el mayor nivel de competencia matemática, las cuales empíricamente, se caracterizan:

- *Primer nivel:* Responden a preguntas en contextos conocidos, mediante procedimientos rutinarios
- *Segundo nivel:* Saben interpretar y reconocer en contextos que necesitan inferencia directa; extraen información de una fuente; emplean algoritmos, fórmulas y procedimientos elementales; razonamientos directos.
- *Tercer nivel:* Saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, donde requieren decisiones secuenciales; estrategias de solución de problemas sencillos; también son capaces de elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamiento.
- *Cuarto nivel:* Pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas, formulando supuestos; seleccionan e integran diferentes representaciones y su vínculo con el mundo real; razonan con flexibilidad; elaboran y comunican explicaciones y argumentos fundados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
- *Quinto nivel:* Desarrollan modelos y trabajan con ellos; Comparan y evalúan estrategias para abordar problemas complejos en relación con estos modelos; emplean habilidades del pensamiento y razonamiento; emplea representaciones simbólicas y formales e intuitivas; puede reflexionar acerca de sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamiento.
- *Sexto nivel:* Saben formar conceptos, generalizar y utilizar información fundada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Aplican su entendimiento y comprensión; dominan operaciones y relaciones simbólicas formales; formulan y comunican con exactitud sus acciones y reflexiones en relación a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.

Programación Neurolingüística

Según Ibarra (1997) la Programación Neurolingüística (PNL) es una técnica que se desenvolvió en la década de los setenta, la cual brinda herramientas y habilidades para desarrollar estados de excelencia individual y grupal.

> "Es un modelo explícito de la experiencia humana y la comunicación; describe la dinámica fundamental de los procesos neurológicos que sostienen la actividad de nuestros sentidos"

Esta disciplina también, está vinculada con lo que algunos investigadores norteamericanos, como Paul Denison, han dado en llamar *gym brain* (Ibarra, 1997), quienes han trabajado en programas que pretenden atacar deficiencias en el lenguaje.

En particular la *Gimnasia cerebral* (Ibarra, 1997) es un conjunto de actividades fiscas e intelectuales, que facilitan el aprendizaje integral colocando en concordancia movimientos, sensaciones y respuestas del lenguaje, como el articular palabras.

Consideraciones finales

El problema del aprendizaje de la noción de linealidad en ambiente escolar, es un fenómeno complejo donde intervienen las dimensiones, epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. En este curso se darán algunas evidencias de ello.

La noción de linealidad es un elemento de articulación en el ámbito escolar de la matemática. Aún sin ser la única, no se percibe en forma transversal en las etapas escolares y su concepción en cada una se estudia de manera aislada y sin conexión.

Se considera a la linealidad como una noción que ha evolucionado en la historia, primero a partir de necesidades socio culturales de la época referida, hasta constituir desde el siglo XIX, un cuerpo de conocimientos estructurados en teorías formales. Se concibe que la evolución de estas ideas pudiera aportar elementos que repercutan hacia la instalación didáctica de la noción de linealidad en distintos momentos de la trayectoria escolar. La didáctica de la matemática, no ha agregado los elementos de enlace entre las vertientes que la sustentan.

Bibliografía

Acosta, J. (2008) Análisis epistemológico, cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad. Tesis doctoral (en proceso). México: CICATA-IPN.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33-59). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A., et al. (1995). Experiencia de vida y construcción de los números racionales. *Pedagogía.* Tercera época, Universidad Pedagógica Nacional. México. Vol. 10, Num. 5, pp. 38 – 47.

Camacho, A. (2000) *Difusión de conocimientos matemáticos los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite.* Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV – IPN, México, D.F., México

Cantoral, R.; Farfán, R. (2004b) La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématique.* La Pensée Sauvage, France. Vol. 24, Num. 2.3, pp. 137 – 168.

Chevallard, Y. (1991) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Editorial Aique. Buenos Aires: Argentina.

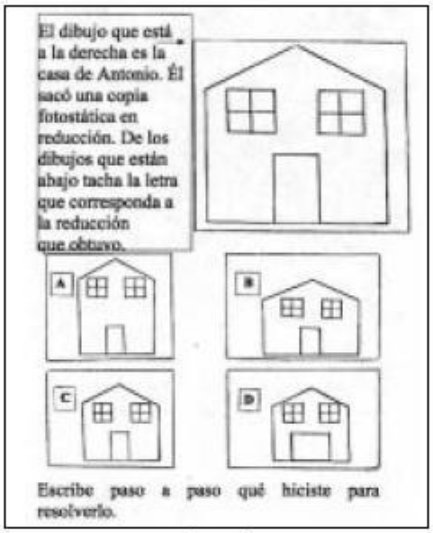
De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. Educational Studies in Mathematics an International journal. Kluwer Academic Publisher. 35(1), 65-83
Furinghetti, F. y Radford, L. (2002). Historical conceptual development and the teaching of mathematics: From philogenesis and ontogenesis theory to classroompractice. En L. D. English (ed.) *Handbook of international research in Mathematics Education.* USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NTCM.
Gómez, B (1999) Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de "compañías" *RELIME 2*(3), 19-29.
Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006) Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina *RELIME 2(9), 299-324*
Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. Educational Studies in Mathematics an International Journal. Kluwer Academic Publisher. 43(3), 271-292
Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas.* (2ª ed.). [Serie Maestros del Pensamiento Científico]. México, D.F., México: Instituto Politécnico Nacional.
Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.

Cibergrafía

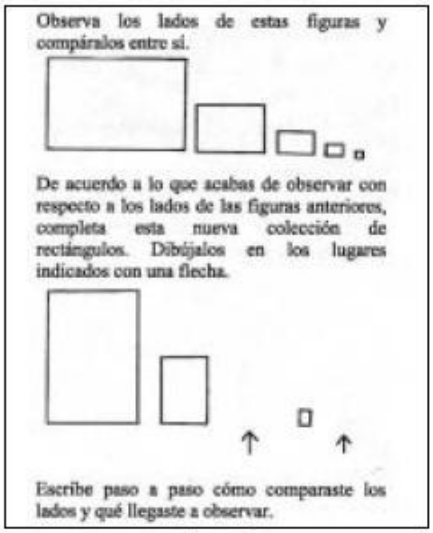
[1] http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL07-2777.PDF

Instrumento aplicado durante curso: *El vínculo conceptual entre la proporcionalidad y la linealidad*.

Las dos primeras tareas exploraron los aspectos cualitativos en el terreno de la proporcionalidad.

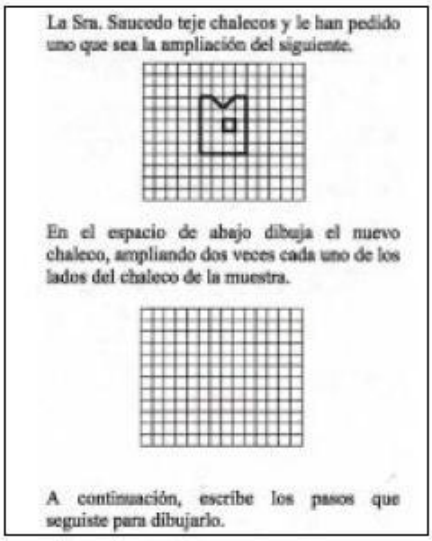


Tarea 1.

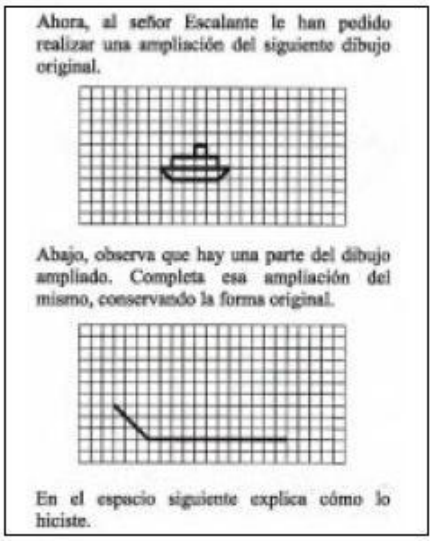


Tarea 2.

Las tres siguientes estuvieron enfocadas al tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo:

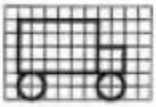


Tarea 3.

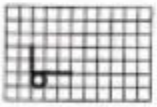


Tarea 4.

El señor Escalante es dibujante y se ha pedido realizar la reducción del siguiente dibujo original.



Observa que abajo hay una parte del dibujo ya reducido. Completa esa reducción, sin modificar su forma.

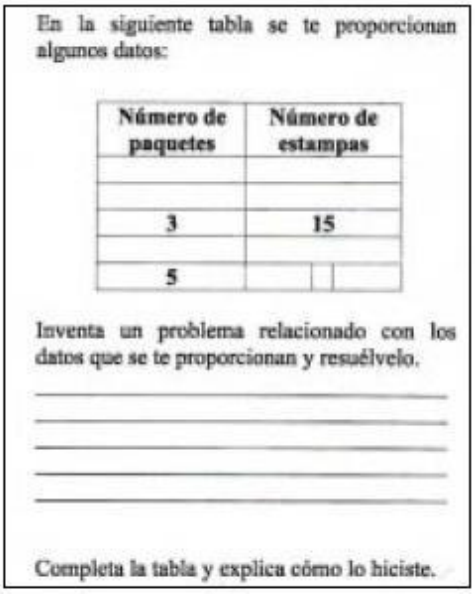


En el espacio siguiente explica cómo lo hiciste.

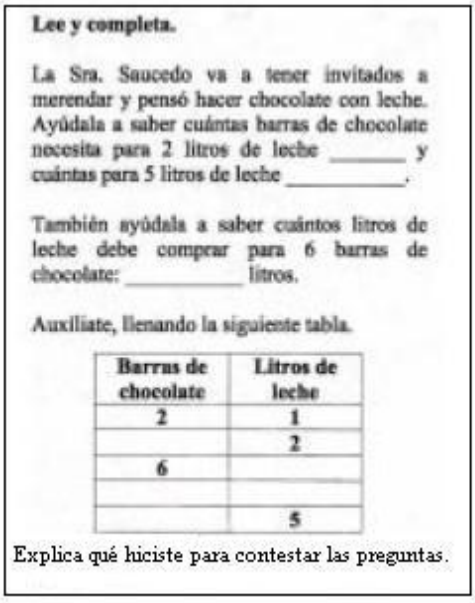
Tarea 5.

Las ocho tareas restantes del cuestionario se centraron en el campo cuantitativo del pensamiento del estudiante.

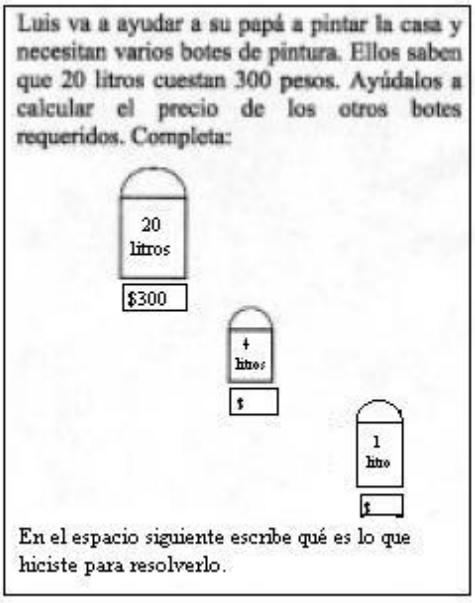
Tarea 7a y 7b.



Tarea 8.



Tarea 9.



Tarea 10a y 10b.

11.- El granjero Gustavo necesita aproximadamente 4 días para cavar una zanja alrededor de un terreno de pastura cuadrado de 100 m. de lado. ¿Cuántos días necesitaríamos para cavar la zanja alrededor del terreno si el lado es de 300 m.?

12.- El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de lado 200 m. ¿Cuántas horas necesitaría para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?

13.- Un zoológico tiene aves (bípedos) y felinos (cuadrúpedos). Si en el zoológico hay 60 cabezas y 200 patas, ¿Cuántas aves y cuantos felinos viven allí?

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, J. (1999). La Matemática y la ley de Lavoisier. *MATE* (Num. 2, pp. 5 – 8). Subnodo Regional de Matemática Educativa. Revista de divulgación de aspectos matemáticos, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Acosta, J. (2000). Museo Interactivo de Matemáticas, *II Simposium Internacional "Las Humanidades en la Educación Técnica ante el siglo XXI", y V Simposium Nacional "La Educación Técnica en México"*. México: Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas.

Acosta, J. (2003). Representaciones en Matemáticas y otro ámbito, ¿Pensamiento Global o Local? *Memoria del XXXVI Congreso Nacional, Sociedad Matemática Mexicana* (Volumen 1, pp. 163). Pachuca, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. y Karelin, O. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad**.** *Memoria del History and Pedagogy of Mathematics 2008, ICME*, México.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2010) La resignificación de la noción de linealidad. *ALME 23* (enviado para su publicación). México: CLAME.

Ada, J. (1998). A Glance Over the Evolution of Research in Mathematics Education. En Sierpinska, A. And Kilpatrik, J. *Mathematics Education as Research Domain: A Search for Identity,* 49-56. Kluwer Academic Publishers, Great Britain.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV, México.

Arellano, J. (2005). *Los esquemas metodológicos para la investigación social.* México: S y G editores.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33-59). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A., et al. (1995). Experiencia de vida y construcción de los números racionales. *Pedagogía.* Tercera época, Universidad Pedagógica Nacional. México. Vol. 10, Núm. 5, pp. 38 – 47.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Educación Matemática*. Editorial Iberoamérica. México. Vol. 13, Núm. 3

Bachelard, G (2004). *La formación del espíritu científico* (25ª ed.). México: Siglo XXI editores.

Barrera, F. (2007). *Álgebra Lineal.* México: Grupo Editorial Patria.

Boero, P. & Szendrei J. R. (1998). Reasearch and Results in Mathematics Education: Some Contradictory Aspects. En Sierpinska, A. And Kilpatrick, J. *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity,* 197 – 212. Kluwer Academic Publisher. Great Britain.

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics*. United States: Wiley.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)* Tesis doctoral no publicada, CINVESTAV, México.

Camacho, A. (2005). Sistemas Sintéticos. Lo inteligible en los manuales para la enseñanza. *Cinta de Moebio,* (022), Santiago, Chile.

Camacho, A. (2000). *Difusión de conocimientos matemáticos los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite.* Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV, México

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004a). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México, D.F., México: Thomson Editores.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2004b). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématique.* La Pensée Sauvage, France. Vol. 24, Núm. 2.3, pp. 137 – 168.

Cantoral, R. (1997). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Serie: Antologías* (1), Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA, IPN, México.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Editorial Aique. Buenos Aires: Argentina.

D' Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Entre las tradiciones y la modernidad* México: Limusa: Cideccyt

De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of

similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics an International journal*. Kluwer Academic Publisher. 35(1), 65-83

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity. From analysis to Improvement.* USA: Springer

Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa.* Vol. 24, Núm. 3, pp. 137 – 168.

Dorier, J. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Mathematics Education Library. Vol. 23. Dordrecht. The Netherlands.

Draper, J. & Klingman, J. (1976). *Matemáticas para Administración y Economía.* México: Harper & Row Latinoamericana.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Edwards, C. & Penney, D. (1987). *Cálculo y Geometría Analítica.* (2ª ed.). México: Prentice-Hall-Hispanoamericana, S. A.

El mundo de la matemática. Curso teórico-práctico (1995). Barcelona, España: Océano grupo editorial S.A.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, Vol. 9.* Núm. 2

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual development and the teaching of mathematics: From philogenesis and ontogenesis theory to classroompractice. En L. D. English (ed.) *Handbook of international research in Mathematics Education.* USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NTCM.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción.* España: Gedisa Editorial.

Garzón, G. (1986). *Fundamentos de química general.* (2ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson Editores.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de "compañías" *RELIME 2*(3), 19-29.

Granville, W. (2005). *Cálculo diferencial e integral*. México: Editorial Limusa.

Grossman, S. (1996). *Álgebra lineal*. (5ª ed.). México: Editorial Mc Graw Hill

Guimelli, C. (2004). *El pensamiento social.* (1ª ed.) [Filosofía y Cultura Contemporánea] Universidad Nacional Autónoma de México. México: Ediciones Coyoacán.

Hitt, F. (1997). *Sistemas semióticos de representación. Avance y perspectiva, (16).* Ejemplar de mayo-junio, CINVESTAV, México.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la Matemática.* México: Editorial Limusa.

Hogg, J., Bickel, Ch., Nicholson, M. y Wik, H. (1970). *Química un enfoque moderno.* México: Editorial Reverte Mexicana, S. A.

Kolman, B. (1981). *Álgebra Lineal*. (2ª ed.). Estados Unidos de América: Fondo Educativo Interamericano.

Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. (1993). CINVESTAV, México

Lehmann, C. (2007). *Geometría Analítica*. México: Limusa

Margolinas, C. (1998). Relations between the Theorical Field and the Practical Field in Mathematics education. En Sierpinska, A. And Kilpatrick, J. *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, 351 – 356. Kluwer Academic Publisher. Great Britain.

Montiel, G. (2005). *Un estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA, IPN, México.

O'Connor, R. (1976). *La química.* México: HARLA.

O'Neil, P. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería.* (6ª ed.) México: Thomson

Pérez, R. (2003). *¿Existe el Método Científico?* (3ª). México: FCE, SEP, CONACYT, ECN.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* (10ª ed.). México: Siglo XXI Editores.

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño.* México. Fondo de Cultura Económica

Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: La transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar.* Tesis doctoral no publicada, CINVESTAV, México.

Reséndiz, G. (2003). La visualización gráfica, una habilidad básica que desarrollar en el curriculum de Técnico Superior Universitario. *Memoria XXXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana 2003*. México.

Rondero, C., Tarasenko, A. Acosta, J. (2009). Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. *ALME 22*, México.

Ruiz, E. y Valdemoros, M (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Relime Vol. 9, Núm. 2, pp. 299-324.*

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., Garza, J. (2005) *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas: ITESM.

Schopenhauer, A. (1987) *El mundo como voluntad y representación*. Introducción de E. Friedrich Sauer. México: Editorial Porrúa.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. Educational Studies in Mathematics an International journal. Kluwer Academic Publisher. 43(3), 271-292

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2001) *Precálculo.* (3ª ed.). México: Thomson editores.

Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas.* (2ª ed.). [Serie Maestros del Pensamiento Científico]. México: Instituto Politécnico Nacional.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.

Vygotski, L. (1977) *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, La Pléyade.

William, D. (2003). The impact educational research on Mathematics Education En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F. K. S. Leung (eds.) *Second international handbook of Mathematics Education.* USA: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, NTCM.

CIBERGRAFÍA

Cantoral, R. (2002) Conferencia *Visualización y pensamiento matemático, estrategias de enseñanza.* Obtenido el 13 de mayo de 2010 de http://pdf.rincondelvago.com/visualizacion-semiosis-e-intuicion-en-la-ensenanza-de-las-funciones-en-matematicas.html

Cognición. Concepto. Obtenido el 16 de abril de 2010

http://es.wikipedia.org/wiki/Cognici%C3%B3n

Ensayo sobre el principio de la población. (2007, 22). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Obtenido en mayo 7, 2007 de http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensayo_sobre_el_principio_de_la_poblaci%C3%B3n&oldid=7690278

Estequiometría. Obtenido en febrero de 2010. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. De http://es.wikipedia.org/wiki/Estequiometr%C3%ADa

Euclides, postulados. (2007, 23). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Obtenido en agosto 7, 2007 de http://es.wikipedia.org/wiki/Postulados_de_Euclides

Filogenia, concepción biológica. Obtenido el 13 de abril de 2010.
http://es.wikipedia.org/wiki/Filogenia

García, F., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz, L. (2005). *Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los planes de ahorro.* Obtenido en marzo 5, 2008 del sitio web de la Universidad de Jaen: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Garcia_Bosch_Gascon_Ruiz.pdf

Ivic, Iván (1994) Lev Semionovich Vygotsky (1896-1934) [Versión Electrónica] *Revista trimestral de educación comparada. Paris: UNESCO: Oficina Internacional de Educación. Vol. 24, Núm. 3 y 4, pp. 773 – 799.* http://www.ibe.unesco.org/publications/ThinkersPdf/

vygotskys.PDF

Linealidad, definición. Obtenido en mayo 7, 2007 de
http://www.dliengineering.com/vibman-spanish/definicindelinealidad.htm

Ontogenia, concepción biológica. Obtenido el 13 de abril de 2010.
http://es.wikipedia.org/wiki/Ontogenia

Pensamiento, tipos. Obtenido en junio 22, 2009 de
http://html.rincondelvago.com/pensamie nto_tipos.html.

Praxeología, definición. Obtenido el 8 de febrero de 2010 de
http://es.wikipedia.org/wiki/Praxeolog%C3%Ada

Renacimiento, concepción. Obtenido el 13 de abril de 2010 de
http://es.wikipedia.org/wiki/Renacimiento

Revolución científica. Concepción de Thomas Kuhn. Obtenido el 13 de abril de 2010.
http://es.wikipedia.org/wiki/Revoluci%C3%B3n_cient%C3%ADfica

Rico, L. (2005) La competencia matemática en PISA. En fundación Santillana (Ed.) *La enseñanza de las matemáticas y el informe PISA*. Obtenido en febrero 7, 2008 de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL07-2777.PDF

Sierra, M, et. al. (2003) El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. Editorial Santillana *Educación*

Matemática. Obtenido en diciembre 12 de 2008, del sitio web de la Universidad Autónoma del Estado de México: http//redayc http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/15102.pdf

Significante, (2009) obtenido el 14 de septiembre de 2009. http://es.wikipedia.org/wiki/Significante

Vergnaud, G. (1990) Teoría de Campos conceptuales *[Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10 n°2, 3, pp. 133-170, 1990]* Traducción por Juan Godino. Obtenido en septiembre de 2009. http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/matriale /materials/didactica/campos.pdf

VIDEOGRAFÍA

Walt Disney Productions. (1959). *El pato Donald en el país de las matemáticas* [Video] EUA: Walt Disney Productions.

Warner Bros. (1988). *Con ganas de triunfar* [Video] EUA: Warner Brothers Productions.