



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y  
TECNOLOGÍA AVANZADA DEL IPN. UNIDAD LEGARIA

LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIABLE

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN  
MATEMÁTICA EDUCATIVA

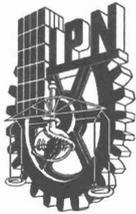
PRESENTA:

ENRIQUE JAVIER GÓMEZ OTERO

DIRECTOR DE LA TESIS:

DR. CRISÓLOGO DOLORES FLORES

MÉXICO, D.F., SEPTIEMBRE DE 2007.



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de     México     siendo las   11:00   horas del día   15   del mes de   octubre   del   2008   se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de   CICATA LEGARIA   para examinar la tesis de grado titulada:

### “La construcción de la noción de variable”

Presentada por el alumno:

**GÓMEZ**

Apellido paterno

**OTERO**

materno

**ENRIQUE JAVIER**

nombre(s)

Con registro: 

A	0	3	0	2	5	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISION REVISORA

Director de tesis

  
Dr. Crisólogo Dolores Flores

Codirector de tesis

  
Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

  
Dr. Apolo Castañeda Alonso

  
**CICATA - IPN**

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

  
Dr. Gustavo Martínez Sierra

  
Dr. Ricardo Cantoral Uriza

### EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

  
Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 28 del mes octubre del año 2008, el (la) que suscribe Enrique Javier Gómez Otero alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A030257, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Crisólogo Dolores Flores y cede los derechos del trabajo intitulado “La construcción de la noción de variable”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [ejgo@prodigy.net.mx](mailto:ejgo@prodigy.net.mx). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



ENRIQUE JAVIER GÓMEZ OTERO

## INDICE

	Página
Glosario.....	1
Resumen.....	3
Introducción.....	7
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Antecedentes y el problema de investigación.....</b>	<b>9</b>
1.1 El problema y el objetivo de la investigación.....	13
1.2 Elementos teóricos.....	16
1.3 Elementos metodológicos.....	16
1.4 Estructura de la tesis.....	17
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Estado del arte.....</b>	<b>18</b>
2.1 <i>Children's understanding of numerical variables</i> , Kuchemann (1980).....	19
2.2 <i>Some misconceptions concerning the concept of variable</i> , Rosnick (1981).....	20
2.3 <i>On the meaning of variable</i> , Schoenfeld & Arcavi (1988).....	21
2.4 <i>Cognitive processes involved in learning school algebra</i> , Kieran, Booker, Filloy, Vergnaud, & Wheeler (1990).....	24
2.5 <i>Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable</i> , Ursini (1996).....	27
2.6 <i>Introducing the variable through pattern exploration</i> , English & Warren (1998).....	27
2.7 <i>La conceptualización de la variable en la enseñanza media</i> , Trigueros, Ursini & Lozano (2000).....	29
2.8 <i>Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study</i> , Carlson, Jacobs, Coe & Larsen (2002).....	30
2.9 <i>La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria</i> , Juárez (2002).....	31
2.10 <i>Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior</i> , Vicario (2002).....	32
2.11 <i>Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand?</i> , Fujii (2004).....	33
2.12 <i>La noción de seriación en niños preescolares del Estado de Guerrero</i> , Cruz (2006).....	39
2.13 <i>What are these things called variables?</i> , Wagner (1983).....	40
2.14 Orientación de nuestra investigación.....	42
<b>Capítulo 3</b>	
<b>Elementos teóricos.....</b>	<b>45</b>

3.1	La variable. Una visión de su origen y desarrollo .....	46
3.1.1	La noción de variable como símbolo.....	46
3.1.2	<i>En torno a las nociones de número y variación</i> , Moreno (1991).....	47
3.1.3	Aleksandrov <i>et al</i> (1981).....	52
3.2	La construcción del conocimiento.....	54
3.2.1	La construcción de conceptos matemáticos. La teoría APOE.....	56
3.3	La centración y la causalidad.....	60
3.4	La seriación.....	63
<b>Capítulo 4</b>		
<b>Elementos metodológicos</b> .....		66
4.1	Características metodológicas de la investigación.....	66
4.2	Participantes.....	68
4.3	Procedimientos e instrumentos utilizados .....	68
1.	<i>Primera situación</i> . Descenso de un líquido.....	68
2.	<i>Segunda situación</i> . Volumen constante, altura creciente de un líquido.....	69
3.	<i>Tercera situación</i> . Alargamiento de un resorte.....	70
4.	<i>Cuarta situación</i> . Alargamiento de un resorte y la ordenación de cuerpos redondos.....	72
5.	<i>Quinta situación</i> . Alargamiento de un resorte y la ordenación de cuerpos redondos.....	73
<b>Capítulo 5</b>		
<b>Los resultados</b> .....		75
5.1	Análisis de los resultados.....	75
5.1.1	Situaciones asociadas a la variación del volumen de líquidos.....	76
a)	Primera situación <b>descenso de un líquido</b> .....	76
	Cuadro de resumen.....	84
b)	Segunda situación <b>Volumen constante, altura creciente de un líquido</b> .....	86
	Cuadro de resumen.....	97
5.1.2	Situaciones asociadas a la variación de la elongación de resortes.....	98
c)	Tercera situación <b>alargamiento de un resorte</b> .....	98
	Cuadro de resumen (Parte 1) .....	102
d)	Cuarta situación <b>alargamiento de un resorte</b> .....	102
	Cuadro de resumen (Primer momento).....	106
e)	Quinta situación <b>alargamiento de un resorte</b> .....	106
	Cuadro de resumen (Primer momento).....	112
5.1.3	La ordenación de objetos redondos de tamaños similares, pesos y colores variables.....	113
c)	Tercera situación <b>ordenación de objetos redondos</b> .....	113
	Cuadro de resumen (Parte 2) .....	115
d)	Cuarta situación <b>ordenación de objetos redondos</b> .....	115
	Cuadro de resumen (Segundo momento).....	119

e) Quinta situación <b>ordenación de cuerpos redondos</b> .....	119
Cuadro de resumen (Segundo momento).....	124
<b>Conclusiones</b> .....	126
<b>Bibliografía</b> .....	131
<b>Anexos</b> .....	136
Situación experimental 1.....	137
Situación experimental 2.....	152
Situación experimental 3.....	174
Situación experimental 4.....	183
Situación experimental 5.....	194

A MI ESPOSA POR SU  
COMPRENSIÓN Y APOYO.

A XITLALI MIROSLAVA QUE NACIÓ DURANTE MIS  
ESTUDIOS Y LLENÓ DE FELICIDAD NUESTRA VIDA.

CON AFECTO Y GRATITUD AL DR. CRISÓLOGO DOLORES FLORES  
QUE CON SU DEDICACIÓN, DISPONIBILIDAD DE TIEMPO Y ATINADOS  
CONSEJOS, PUDE CONCLUIR ESTE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.

A LOS DOCTORES: RICARDO CANTORAL URIZA, JAVIER LEZAMA ANDALÓN,  
GUSTAVO MARTINEZ SIERRA Y APOLO CASTAÑEDA ALONSO, POR SUS  
VALIOSOS CONSEJOS PARA MEJORAR LA PRESENTE INVESTIGACIÓN.

A LAS NIÑAS Y NIÑOS ENTREVISTADOS, PROFESORES Y PERSONAS QUE DE  
ALGUNA FORMA CONTRIBUYERON EN ESTA INVESTIGACIÓN, RECIBAN MI MÁS  
SINCERO AGRADECIMIENTO.

## **Glosario**

**Variable.** Idea primaria de percepción de cambio que se forman los niños pequeños al observar fenómenos concretos. En la observación de fenómenos concretos entran en juego la centración, la causalidad y la seriación para identificar las cosas cambiantes. Al parecer los niños no perciben la variable de un suceso de manera aislada, sino que al expresar la causalidad del suceso, es ahí, donde establecen la relación entre dos variables de la forma  $P \rightarrow Q$ .

**Centración.** Fenomenológicamente se refiere a poner la atención en la(s) o característica(s) más importante(s) de un suceso. Es el paso del mirar, a la observación; con la centración inicia la indagación de las causas de un suceso, esto hace que el sujeto del total de variables posibles en un evento, centra la atención en algo.

**Causalidad.** Es una consecuencia de la acción. La causalidad es una explicación de los hechos encontrados a partir de la acción. Es una forma de organización intelectual que resulta, de filtrar las consecuencias efectivas de todas las manipulaciones que hace el niño sobre los objetos.

**Covariación.** Es una relación que se establece entre dos variables, en un fenómeno de variación. Por ejemplo en el descenso de un líquido, se establece la relación entre la variable volumen del líquido respecto a la variable tiempo (que es el intervalo que dura el descenso del volumen del líquido).

**Construcción.** Se refiere a las acciones y procesos mentales en los que el individuo se involucra y que dichas acciones y procesos mentales permiten formar ideas y conceptos.

**Método clínico.** Consiste en un sistema de preguntas flexibles no estructuradas, que se van adaptando a las respuestas del individuo, de acuerdo a la actividad o experimento que se esté desarrollando. Dicho método nos permite mediante el estudio de casos, observar y analizar las acciones físicas o mentales que realiza un individuo ante una situación problemática y de estas

acciones, deducir cómo el individuo se comporta ante un fenómeno. El método clínico tiene como objetivo conocer el pensamiento de la persona o personas a la que se le aplica.

**Situaciones experimentales.** Se refiere a los experimentos que fueron diseñados para la obtención de evidencias, a favor o en contra de nuestra hipótesis. Estas situaciones experimentales tuvieron como marco fenómenos covariacionales como el descenso y ascenso del volumen de un líquido respecto al tiempo, el alargamiento del resorte de una balanza producido por el peso de objetos redondos.

**Ordenación.** Es una actividad que implica el establecimiento de una comparación entre las características o cualidades de los objetos de una misma o diferente colección. Como sucedió en el experimento en el que se les pide a los niños ordenar como puedan los cuatro objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes. La ordenación la hicieron de manera ascendente y descendente (de menor a mayor peso y viceversa), de acuerdo a los colores de los objetos y al azar.

**Seriación.** Es una actividad que relaciona un evento respecto al tiempo, estableciendo estadios del suceso. En nuestras situaciones experimentales, se controlaron estadios del suceso, esto con la finalidad de que los niños hicieran los dibujos respectivos de cada estadio y así después de observado el fenómeno y realizado los dibujos del suceso, a los niños se les colocaba en desorden los dibujos y ellos tenían que realizar la seriación de acuerdo a lo acontecido, en la mayoría de los casos que analizamos, los niños hicieron esta seriación de acuerdo a lo ocurrido.

## Resumen

La construcción de conceptos matemáticos de acuerdo con la teoría APOE es una progresión de construcciones mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas de manera dialéctica, mediante la abstracción reflexiva y la descomposición genética, como mecanismos para hacer dichas construcciones (Dubinsky, 2000). En este sentido, la construcción de la noción de variable deberá ser mediante la manipulación de objetos físicos o mentales para formar acciones relacionadas a la idea de cambio. Las acciones deben ser interiorizadas para formar procesos prescindiendo de los objetos físicos. Estos procesos se encapsulan para formar objetos, la noción de variable como tal. La noción de variable como objeto es organizada en esquema, es decir se vuelve parte de la estructura cognitiva del individuo. Sin embargo, la noción de variable puede desempeñar una doble función, como objeto y proceso. Como objeto, cuando la noción está encapsulada y se le pueden aplicar operaciones tales como suma, resta o relacionarlas con alguna función o fórmula, por ejemplo. Como proceso, las reflexiones e interiorizaciones que el individuo realice de las acciones, las manipulaciones físicas o mentales sobre cosas u objetos que cambian sin necesidad de tenerlos presente.

Esta perspectiva teórica contrasta con la forma en que es presentada la noción de variable en los libros de cálculo y la forma en que se enseña. Dolores (1996) muestra diferentes definiciones de variable de libros de cálculo que se usan en el bachillerato. Esto hace suponer que solo basta la definición de variable para que el alumno se apropie de esta noción o es un concepto ya formado que no requiere un análisis exhaustivo para su asimilación. Investigaciones respecto a la noción de variable en situación escolar (Ursini, 1994; 1996; Trigueros *et al.*, 2000; Rosnick, 1981; Wagner, 1983; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Kieran *et al.*, 1990) manifiestan que no es suficiente la definición de variable para que el estudiante se apropie de ella. Por el contrario surgen dificultades en la comprensión del símbolo que representa esta noción y como consecuencia la aparición de concepciones alternativas que distan de las aceptadas formalmente (Dolores, 1998; Dolores *et al.*, 2002; Dolores, 2004).

La mayoría de las investigaciones analizadas parten de la idea de que esta noción ya tiene existencia en forma de símbolo, y sólo se hacen investigaciones entorno a su significado

(Kuchemann, 1980; Rosnick, 1981; Schoenfeld & Arcavi, 1988). Otras se preocupan por investigar las dificultades que se presentan en los alumnos al operar con símbolos en la transición de la aritmética al álgebra (Wagner, 1983; Kieran *et al.*, 1990; Ursini, 1994; 1996; Trigueros *et al.*, 2000).

Nuestro trabajo de investigación, a diferencia de estas investigaciones, no está interesado en la noción de variable como símbolo, sino en el proceso de su construcción. Por lo que nuestra pregunta de investigación se centra en investigar ¿cómo se construye la noción de variable en niños pequeños y qué procesos favorecen su construcción? De esta pregunta de investigación se desprende como objetivo de investigación, identificar los procesos que se ponen en juego en la construcción de la noción de variable en niños pequeños.

## **Abstract**

The construction of mathematical concepts in agreement with theory APOE is a progression of mental constructions of actions, processes, objects and schemes of dialectic way, by means of the reflective abstraction and the genetic decomposition, like mechanisms to make these constructions (Dubinsky, 2000). In this sense, the construction of the variable notion will have to be by means of the manipulation of physical or mental objects to form actions related to the change idea. The actions must be internalized to form processes doing without the physical objects. These processes are encapsulated to form objects, the notion of variable like so. The variable notion as object is organized in scheme, that is to say, becomes part from the cognitive structure of the individual. Nevertheless, the variable notion can perform one double function, like object and process. Like object, when the notion is encapsulated and you can apply operations such as addition, subtraction or relate any function or formula, for example. As process, the reflections and internalizations that the individual makes of the actions, the physical or mental manipulations on things or objects that change without having them present.

This theoretical perspective contrasts with the form in which the notion of variable in calculation books is introduced and the form in which it is taught. Dolores (1996) shows different definitions from variable of calculation books that are used in high school. This makes suppose that only the variable definition is enough so that the student appropriate of this notion or is a concept already formed that does not require an exhaustive analysis for its assimilation. Investigations with respect to the notion of variable in school situation (Ursini, 1994; 1996; Trigueros *et al.*, 2000; Rosnick, 1981; Wagner, 1983; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Kieran *et al.*, 1990) show that the variable definition is not sufficient so that the student appropriate of her. On the contrary difficulties in the understanding arise from the symbol that represents this notion and like consequence the appearance of alternative conceptions that differ formally of accepted (Dolores, 1998; Dolores *et al.*, 2002; Dolores, 2004).

Most of the analyzed investigations start off the idea that this notion already has existence in symbol form, and investigations are only made surroundings to their meaning (Kuchemann,

1980; Rosnick, 1981; Schoenfeld & Arcavi, 1988). Others worry to investigate the difficulties that appear in the students when operating with symbols in the transition of the Arithmetic to algebra (Wagner, 1983; Kieran *et al.*, 1990; Ursini, 1994; 1996; Trigueros *et al.*, 2000).

Our work of investigation, unlike these investigations, is not interested in the notion of variable like symbol, but in the process of its construction. Reason why our question of investigation is centered in investigating how is constructed the notion of variable in small children and what processes favor its construction? This question of investigation it is come off like investigation target, to identify the processes that are involved in the construction of the variable notion in small children.

## Introducción

Nuestro trabajo de investigación centra su interés en la construcción de la noción de variable. Para indagar respecto a la idea de variable se hizo un análisis de los resultados de las investigaciones que se han realizado entorno a esta noción. Los resultados encontrados son variados y van desde propuestas para trabajar la noción de variable (Ursini, 1996; English & Warren, 1998). El significado que representa una letra para el estudiante (Kuchemann, 1980). La interpretación del significado de los símbolos que le asocian los alumnos durante el tránsito de la aritmética al álgebra (Kieran *et al.*, 1990; Ursini, 1994; Trigueros *et al.*, 2000). Las dificultades que se les presentan a los estudiantes cuando utilizan letras en expresiones algebraicas (Rosnick, 1981; Wagner, 1983). Nuestro trabajo a diferencia de las anteriores investigaciones que parten del símbolo para realizar sus conjeturas, el nuestro tiene como propósito abordar los procesos cognitivos que originan la construcción de la noción de variable desde el punto de vista covariacional en niños pequeños. Partimos de la hipótesis de que la construcción de la noción de variable no es un proceso aislado o independiente, sino que la noción de variable a nuestro juicio emerge de la relación al menos de dos entidades cambiantes donde en la mayoría de los casos una de ellas es el tiempo.

Para recabar evidencias a favor o en contra de nuestra hipótesis, se diseñaron situaciones experimentales que tuvieron como marco fenómenos covariacionales como el descenso y ascenso del volumen de un líquido respecto al tiempo, volumen constante de un líquido respecto al tiempo, el alargamiento del resorte de una balanza producido por el peso de objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes. Se utilizó el método clínico en la puesta en escena de los experimentos. Este método nos permite mediante el estudio de casos, observar, preguntar y analizar las acciones físicas o mentales que realiza un individuo ante una situación problemática y de estas acciones, deducir cómo el individuo se comporta ante un fenómeno, permitiéndonos identificar los procesos de razonamiento que intervienen en la construcción de la noción de variable en niños pequeños. Es de mencionar que en la observación de los experimentos efectuado por los niños, intervienen además de las variables, la centración y la causalidad, partes importantes en la observación y explicación del fenómeno.

Finalmente se analizaron los resultados de las situaciones experimentales. De estos resultados se obtuvieron ideas primarias acerca de la construcción de la noción de variable en niños pequeños.

El presente trabajo de investigación está dividido en cinco capítulos. Capítulo 1 Antecedentes y el problema de investigación. Se presenta una introducción a nuestro trabajo de investigación, investigaciones que se han realizado acerca de la idea de variable, el planteamiento del problema y el objetivo de la investigación, los elementos teóricos y los elementos metodológicos. Capítulo 2 Estado del arte. Se analizan resultados de las investigaciones relacionadas a la noción de variable y nuestro posicionamiento, esto es, hacia a dónde se dirige nuestro trabajo de investigación. Capítulo 3 Elementos teóricos. Se hace un análisis epistemológico de la génesis y desarrollo de la noción de variable y asumiremos una posición cognitiva desde la perspectiva constructivista acerca de los procesos que se ponen en juego en la construcción del conocimiento y en particular de la noción de variable asociada a los conceptos de centración, causalidad y seriación. Capítulo 4 Elementos metodológicos. Se hace mención del método clínico, que de manera similar fue el método que utilizamos en la puesta en escena de los experimentos, tomando en cuenta la centración y la causalidad aspectos que intervienen en la observación de un fenómeno, además se explica la forma en que se diseñaron las cinco situaciones experimentales que nos sirvieron para recabar evidencias de nuestra hipótesis. Capítulo 5 Los resultados. Se analizan los resultados de la puesta en escena de las cinco situaciones experimentales, así como las conclusiones a manera de respuestas a las preguntas del problema de investigación, finalmente se hace una reflexión y se plantean sugerencias para continuar este trabajo de investigación. Por último, se hace referencia a la bibliografía utilizada y se exponen las cinco situaciones experimentales como anexos.

# CAPÍTULO 1

## ANTECEDENTES Y EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Introducción. El conocimiento matemático tiene un papel importante en el desarrollo científico de un país y como consecuencia en la formación integral del ser humano, no se explicarían los avances tecnológicos sin la colaboración de esta disciplina. En particular la Matemática Educativa como disciplina científica, contribuye a este desarrollo desde el sistema escolar, puesto que su campo de estudio son los fenómenos didácticos asociados al saber matemático, es decir el estudio de los procesos de constitución, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar (Cantoral *et al.*, 2000).

El estudio de estos procesos y sus consiguientes manifestaciones en el desarrollo del pensamiento matemático en el ámbito educativo, son estudiados por grupos o comunidades de matemáticos profesionales como el grupo internacional del PME (Psychology of Mathematics Education) y la comunidad del CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa) por mencionar algunos.

En nuestro país uno de los grupos que se ha destacado en este sentido, es el formado por Cantoral y Farfán, cuyo programa de investigación es el pensamiento y lenguaje variacional (PLV), el cual brinda una oportunidad de tender puentes entre la investigación y la realidad del aula, mediante una aproximación sistémica que se denomina aproximación socioepistemológica. Dicha aproximación incorpora cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento matemático: su naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, el plano cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza; por lo que el pensamiento y lenguaje variacional como línea de investigación en esta aproximación permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral & Farfán, 1998).

Vinculados a esta línea de investigación en los aspectos didácticos y cognitivos, se encuentran las investigaciones desarrolladas en el bachillerato por el Dr. Crisólogo Dolores. Las evidencias empíricas recabadas mostraron en los estudiantes, la escasa presencia que tienen acerca de las ideas relacionadas con la variación e ideas confusas acerca de la derivada; las dificultades que tienen los estudiantes al interpretar gráficas en el estudio del movimiento; las concepciones alternativas que se detectan cuando se analizan las gráficas de funciones (Dolores, 2000; Dolores, 2002; Dolores, 2004).

Los resultados obtenidos en estos trabajos de investigación hacen reflexionar, por qué los conceptos matemáticos que se involucran en el estudio de la matemática de la variación y el cambio, tales como variable, función, límite, continuidad, derivada, etc. no están siendo comprendidos por los estudiantes y como consecuencia de ello surgen interpretaciones que distan del conocimiento matemático aceptado. En los textos escolares de matemáticas y en los planes de estudio, incluso en la práctica escolar, se asume que el orden: números reales, variable, función, límite, continuidad, derivada, etc. es el camino adecuado para construir a una de las partes esenciales de la matemática del cambio: el cálculo. Este orden presupone que la noción de función es precedida por una noción más simple: la de variable.

Relacionado a la noción de variable, Kuchemann (1980) realiza un estudio centrando su interés en las diferentes formas que tienen los alumnos de interpretar los símbolos literales. Los resultados muestran que los estudiantes, tienen una diversidad de ideas acerca de la variable y varias de estas ideas distan de las aceptables, de manera que los significados por ellos atribuidos, se convierten en obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio. Kuchemann estudia el significado que los estudiantes le asocian a la literal, encuentra seis formas de interpretación. Entre estas destaca *la letra como variable* donde el alumno después de un proceso de trabajo con símbolos algebraicos es capaz de interpretar que la literal  $x$  representa un rango de valores y describir el grado con el cual los cambios de un conjunto se determinan por los cambios de otro.

Por su parte, Ursini (1994; 1996) y Trigueros *et al* (2000), investigaron los usos que se le da a la variable en el contexto escolar. Ellas establecieron tres clasificaciones del término variable:

como incógnita, como número generalizado y como relación funcional. Como incógnita se refiere a identificar el símbolo (letra) que representa un valor específico, ya sea en una ecuación o un problema y realizar las operaciones indicadas. Como número generalizado, implica interpretar que la letra puede tomar cualquier valor que se puede manipular y operar en expresiones algebraicas. La variable como relación funcional se requiere reconocer y expresar en sus diversas representaciones, la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación y establecer rangos de variación entre ellas.

Por otro lado, las dificultades que presentan los estudiantes cuando son utilizados símbolos en expresiones algebraicas han sido investigadas por Rosnick (1981) y Wagner (1983). Rosnick (1981) se interesa por investigar las dificultades que muestran los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, en particular los símbolos que en el álgebra se manejan, es decir el uso de letras en las ecuaciones. Los resultados revelaron dificultades en la interpretación de las literales. A su vez, Warner (1983) en su estudio plantea algunas reflexiones acerca de los problemas que tienen los estudiantes que inician el estudio del álgebra con símbolos literales o variables. Plantea una dualidad que ocasiona dificultad: los símbolos literales como números y los símbolos literales como letras y las diferencias existentes, es decir, los símbolos literales pueden representar números y letras, tal es el caso de las letras  $\pi$  y  $e$  del alfabeto griego que representan un número cuya representación digital no es simple. Esto para el estudiante que se inicia en la asignatura del álgebra es complicado de entender.

Diez definiciones del término variable son reportadas en un estudio exploratorio (Schoenfeld & Arcavi, 1988) acerca del significado del término variable en diferentes disciplinas, esto demuestra lo multifacético que resulta este término, lo complejo que es su comprensión por el aspecto simbólico que maneja y los diferentes contextos en los que se aplica.

Los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra tienen dificultades en la interpretación del significado de los símbolos que en esta asignatura se utilizan, en particular al considerar a la  $x$  como número generalizado (Kieran *et al.*, 1990). Algo similar ocurre con el signo *igual*, que en la escuela primaria es usado para anunciar un resultado, en el álgebra debe ocurrir un cambio interpretativo, además de la igualdad, expresa el carácter simétrico y transitivo

(Kieran *et al.*, 1990, p.98). Estas discontinuidades que se presentan del tránsito de la aritmética al álgebra por el uso de una simbología poco usual para el alumno puede originar obstáculos en la enseñanza de esta disciplina.

Otros estudios exploratorios como los de Kieran (1990) y Ursini (1996), realizados en ambientes computacionales con Logo, utilizan la computadora como un recurso en la enseñanza de simbología algebraica, en la transición de la aritmética al álgebra. Los resultados mostraron que la necesidad de utilizar símbolos, por parte de los estudiantes, para generalizar una relación entre cantidades y expresar esa generalización en lenguaje formal, favorece el tránsito de la aritmética al álgebra de manera menos difícil, además de contribuir de esta manera a desarrollar la comprensión de la noción de variable.

En la búsqueda de alternativas didácticas para trabajar el concepto de variable. Ursini (1996) propone como recurso didáctico, el uso de herramientas computacionales como es la programación en Logo, en la introducción a la enseñanza del álgebra, particularmente en los usos de la variable. Los resultados mostraron que la mayoría de los alumnos fueron capaces de entrar en contacto con los tres usos de la variable antes señalados. Otra alternativa didáctica sugerida por English & Warren (1998), es un estudio acerca de la introducción de la noción de variable pero, a través de patrones de exploración. En esta propuesta se describe la forma de cómo en actividades concretas, los alumnos desarrollan habilidades al explorar e investigar patrones en modelos y números, estas actividades contribuyen a formular verbalmente reglas para estos patrones en un primer momento, y posteriormente buscar formas para generalizar estas actividades utilizando símbolos. Los resultados mostraron diferencias en las estrategias utilizadas por los estudiantes, los menos competentes utilizan estrategias aditivas o de razón, los más competentes intentaron identificar la relación funcional involucrada en la actividad y usaron notación algebraica en sus generalizaciones.

Un estudio exploratorio realizado en el centro del estado de Guerrero sobre las ideas asociadas a la variable con alumnos del nivel medio, medio superior y superior realizado por Vicario (2002), muestran la escasa presencia de la idea de variable concebida como magnitud, es decir asociada a una representación geométrica (longitud, área, volumen). Se tiene una concepción

de variable asociada a las literales y afloran concepciones alternativas en el plano gráfico y conjuntista al plantear situaciones de variación; los estudiantes manifestaron dificultades en la comprensión de la noción de variable en los problemas que se les plantearon.

Los datos y evidencias mostradas por los investigadores indican, que la construcción de la idea de variable no es una tarea sencilla, pues surgen dificultades, confusiones y concepciones alternativas que interfieren en ese proceso. Ante estas dificultades, es conveniente que los estudiantes comprendan este concepto, pues es pieza fundamental para la formación de nuevos conceptos como función, concepto importante en la matemática de la variación y el cambio. Presumimos que si los estudiantes construyen y se forman en la mente la comprensión de la noción de variable, serán más asequibles los nuevos conceptos asociados a esta noción.

### 1.1 El problema y el objetivo de la investigación.

La construcción de conceptos matemáticos, según la teoría APOE es una progresión de construcciones mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas de manera dialéctica, para ello se vale de la abstracción reflexiva y de la descomposición genética como mecanismos para hacer dichas construcciones. La construcción de un concepto matemático comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos, éstos se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron y finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Asiala et al., 1996 p. 8, Citado por Meel, 2003, p. 243). Una *acción* es una transformación del objeto la cual es percibida por el individuo un tanto externa, esto es los procesos de manipulaciones externas con los objetos concretos. Un *proceso* es cuando una acción es repetida y el individuo reflexiona sobre esta acción y la interioriza, no depende de un estímulo externo. Un *objeto* es cuando el individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, se vuelve conciente del proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones (si son acciones o procesos) pueden actuar, y es capaz de construir tales transformaciones, cuando el individuo aprehende concientemente los procesos, se dice que los ha *encapsulado* para

formar objetos. Una vez contruidos los procesos y los objetos, pueden ser organizados en una estructura para formar *esquemas* (Dubinsky et al., 2004). conci

La variable como noción matemática de acuerdo a la teoría APOE, puede jugar un doble rol: como proceso y como objeto. Como proceso serían las reflexiones e interiorizaciones que el individuo realizó de las acciones, las manipulaciones físicas o mentales sobre cosas u objetos que cambian sin necesidad de tenerlos presente; el sujeto está conciente de lo que cambia sin realizar la acción concreta. Como objeto, esto es que la noción esté encapsulada, es decir que a la variable se le pueden aplicar operaciones para ser transformada a un nivel superior, ya sea en una letra, fórmula o función. Bajo esta perspectiva teórica diríamos que un individuo tiene formada la noción de variable como objeto, cuando ha encapsulado todas las propiedades o características inherentes a los procesos asociados a las cosas cambiantes.

Ahora bien, esta perspectiva teórica de la construcción de los conceptos matemáticos, contrasta con la manera en que se presentan en los libros de cálculo y la forma en que se enseñan. En este sentido, Dolores (1996) muestra la variedad de definiciones de la noción de variable que se presentan en los libros de cálculo más usados en el bachillerato, algunas de estas definiciones se expresan así: *...es una cantidad que se le puede asignar...un número ilimitado de valores; ...son de dos clases: independientes y dependientes; ...x representa a un número cualquiera del conjunto de números; ...la totalidad de los elementos de un conjunto; el símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado; los números  $x$  y  $y$  se llaman variables* (Dolores, 1996, pp. 10-11). Estas definiciones mayoritariamente están expresadas en términos conjuntistas y algunas de ellas no reflejan la esencia de la variable, por ejemplo *...variable es la totalidad de los elementos de un conjunto*, sugiere la idea de cardinalidad de un conjunto que puede ser una constante y no da idea de cambio y variación. Generalmente esos textos plantean la definición del concepto de variable antes de estudiar a las funciones, pues la consideran como un precedente necesario, sin embargo no se plantea un tratamiento exhaustivo que pretenda su asimilación, para los textos solo basta la definición de variable para que el estudiante se apropie de ella o quizá suponen que es un concepto ya formado que no requiere mayor atención. En este sentido, investigaciones en el ámbito educativo (Ursini, 1994; 1996; Trigueros *et al.*, 2000; Rosnick, 1981; Wagner, 1983;

Schoenfeld & Arcavi, 1988; Kieran *et al.*, 1990), muestran que no es suficiente la definición de variable para que el estudiante se apropie de esta noción, por el contrario, plantean que surgen dificultades en los estudiantes sobre la comprensión de los símbolos que representan la noción de variable y la aparición de concepciones alternativas relacionadas a esta noción, que distan de las aceptadas en matemáticas (Dolores, 1998; Dolores *et al.*, 2002; Dolores, 2004).

Nosotros consideramos que la noción de variable es tan importante en su proceso de construcción como cuando ya está formada como objeto. Tanto en la investigación como en el tratamiento que recibe en los textos escolares (principalmente los de nivel medio y superior) a la variable se le da un trato de *objeto* matemático, factible de manipularse. Así por ejemplo, las relaciones especiales que se establecen entre las variables constituyen funciones, dichas relaciones se producen al estudiar fenómenos de variación cuando se trata de cuantificarlos y es en este proceso cuando la variable, mediante la abstracción adquiere la forma de objeto matemático facilitando su manipulación. Las fórmulas son manifestaciones de esta operatividad en la cual queda expresada la relación de al menos dos variables.

La mayor parte de las investigaciones analizadas acerca de la variable como Kuchemann, 1980; Rosnick, 1981; Schoenfeld & Arcavi, 1988, parten de la idea de que esta noción ya tiene existencia en forma de símbolo, y éste sirve como referente para hacer investigaciones acerca de su significado. Otras están preocupadas por investigar las dificultades que tienen los estudiantes al operar con símbolos durante la transición de la aritmética al álgebra (Wagner, 1983; Kieran *et al.*, 1990; Ursini, 1994; 1996; Trigueros *et al.*, 2000). Nuestro trabajo de investigación, a diferencia de las investigaciones que parten del símbolo para realizar sus conjeturas, tiene un propósito diferente, estudiar la noción de variable pero en su proceso de construcción. Nos interesa entender cómo se construye esta importante noción, para posteriormente determinar qué procesos favorecen su construcción. Se pretende investigar la noción de variable desde un punto de vista relacional, es decir presumimos que la noción de variable no se construye de manera independiente como si tuviera ya un estatus de objeto, sino que para construirla es necesario relacionar al menos dos fenómenos cambiantes. Por tanto nuestra pregunta de investigación se centra en investigar cómo se construye la noción de variable en niños pequeños y qué procesos están presentes en su construcción. De aquí que el

objetivo general que se persigue con este trabajo es identificar los procesos que se ponen en juego en la construcción de la noción de variable en niños pequeños.

## 1.2 Elementos teóricos.

El presente trabajo se fundamenta, por un lado, en la posición epistemológica de donde se asume su génesis y desarrollo. Para ello analizamos cómo se desarrolla la idea de variable en la transición por los tres estadios: retórica, sincopada y simbólica, hasta adquirir el status de símbolo. Además analizaremos los estudios de Moreno (1991) y la posición de Aleksandrov *et al* (1981) relacionados al número y la variación, y la aparición de las matemáticas de las variables, respectivamente. Por otro lado, asumimos una posición cognitiva desde la perspectiva constructivista, esta nos permitirá visualizar qué procesos intervienen en la construcción de la noción de variable en niños pequeños y en consecuencia cómo se construye dicha noción.

## 1.3 Elementos metodológicos.

Desde el punto de vista metodológico nuestro trabajo de investigación, se apoya en el método clínico desarrollado por Jean Piaget. Dicho método nos permite mediante el estudio de casos, observar y analizar las acciones físicas o mentales que realiza un individuo ante una situación problemática y de estas acciones, deducir cómo se construye la noción de variable en niños pequeños.

En nuestra investigación utilizaremos este método planteando situaciones experimentales, utilizando diálogos, haciendo cuestionamientos a los niños por parte del entrevistador, acerca de lo que sucede en las situaciones experimentales propuestas y las explicaciones con sus propias palabras de lo acontecido. Del análisis y de la integración de la información que se obtenga en estos procesos, nos planteamos identificar algunos de los procesos de construcción de la noción de variable en niños pequeños.

Para analizar las percepciones de los niños de entre 4 y 8 años se diseñaran y aplicaran situaciones experimentales en las cuales la noción de variable esté presente. Partimos del supuesto que de la observación y análisis de las interacciones de los niños ante situaciones particulares de cambio, podremos obtener evidencia que nos permitan detectar qué procesos se involucran en la construcción de la noción de variable, pues también asumimos que en esas edades es aún incipiente esa noción.

Asimismo, para el diseño de las situaciones experimentales se consideraran los experimentos realizados acerca de fenómenos variacionales (Piaget y Colaboradores, 1971; Piaget, 1992; Inhelder B., Sinclair, H. & Bovet, M., 1975; Carlson et al., 2002). En términos sintéticos este trabajo se orienta mediante el esquema metodológico siguiente:

- Diseño de situaciones experimentales de variación y cambio.
- Reproducir y registrar en audio y video las situaciones experimentales con niños pequeños.
- Análisis de la información.

#### 1.4 Estructura de la tesis.

La presente tesis está estructurada de cinco capítulos. En el Capítulo 1, se presentan los antecedentes y el problema de investigación. En el Capítulo 2, se analizan investigaciones relacionadas a la noción de variable. En el Capítulo 3, se exponen los elementos teóricos que apoyan nuestra investigación. En el Capítulo 4, se presentan los aspectos metodológicos que se utilizó en la investigación. En el Capítulo 5, se muestran los resultados obtenidos y las conclusiones que de éstos se derivan. Finalmente se presenta la bibliografía y los anexos correspondientes.

# CAPÍTULO 2

## ESTADO DEL ARTE

El objetivo de este trabajo se orienta hacia la investigación de los procesos de la construcción de la noción de variable. Para delinear un panorama que de cuenta del estado que guardan las investigaciones que se han realizado en esta dirección, nos dimos a la tarea de hacer una revisión y análisis de las investigaciones relacionadas al tema. El análisis de estas investigaciones se caracterizó por la identificación de los objetivos que guiaron la investigación, la metodología utilizada, las condiciones en que fueron realizadas y los resultados obtenidos. Al final se plantea una delimitación entre estos trabajos y el nuestro.

Las investigaciones analizadas fueron: *Children's understanding of numerical variables*, de Kuchemann (1980); *Some misconceptions concerning the concept of variable*, de Rosnick (1981); *On the meaning of variable*, de Schoenfeld & Arcavi (1988); *Cognitive processes involved in learning school algebra*, de Kieran, Booker, Filloy, Vergnaud, & Wheeler (1990); *Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable*, de Ursini (1996); *Introducing the variable through pattern exploration*, de English & Warren (1998); *La conceptualización de la variable en la enseñanza media*, de Trigueros, Ursini & Lozano (2000); *Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study*, de Carlson, Jacobs, Coe & Larsen (2002); *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria*, de Juárez (2002); *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior*, de Vicario (2002); *Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand?*, de Fujii (2004); *La noción de seriación en niños preescolares del Estado de Guerrero*, de Cruz (2006); *What are these things called variables?*, de Wagner (1983).

## 2.1 *Children's understanding of numerical variables*, Kuchemann (1980).

Con la finalidad de conocer cómo los alumnos interpretan los símbolos literales, Kuchemann cuestionó a 3000 estudiantes de entre 13 y 15 años. Para ello proporcionó un cuestionario donde se pedía a los alumnos que interpretaran, manipularan y resolvieran expresiones algebraicas representadas por símbolos literales. Al analizar las respuestas encontró seis interpretaciones de estos símbolos:

- a) *Letra evaluada*: A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido. Por ejemplo, en la pregunta: “ $e + f = 8$ , ¿cuánto es  $e + f + g$ ?”, el alumno contesta 12 en lugar de  $8 + g$ .
- b) *Letra no usada*: En este caso la letra se ignora, o es reconocida sin darle un significado como en el caso de: “súmale 2 a  $3n$ ” el alumno responde 5 o  $5n$  en lugar de  $3n + 2$ .
- c) *Letra como objeto*: El alumno asocia la letra dándole el nombre de un objeto o el objeto mismo, por ejemplo en la expresión “ $4n + 3n$ ” el estudiante piensa que son “4 naranjas y 3 naranjas” o “4 enes más 3 enes, lo que para él significa 7 enes juntas”, esta forma de operar suele ser apropiada cuando se suman términos semejantes, pero en otros contextos no es conveniente.
- d) *Letra como incógnita*: En esta forma la letra se concibe como un número desconocido y el estudiante opera con la letra para obtener dicho número, aunque en ocasiones tenga algunos inconvenientes como en las respuestas  $8 + g$  ó  $3n + 2$  mencionadas anteriormente.
- e) *Letra como número generalizado*: Aquí la letra representa valores y no sólo un valor específico como por ejemplo: si  $A + B = 12$  y B es menor que A, qué valor puede tener A.
- f) *Letra como variable*: En este caso la letra representa un rango de valores, el alumno es capaz de describir el grado con el cual los cambios de un conjunto se determinan por los cambios de otro, estableciendo al menos una relación de segundo orden. Por ejemplo  $a = b + 2$ , el alumno debe comprender que el valor de  $a$  es siempre dos veces más que el valor de  $b$ .

Los resultados obtenidos muestran que los alumnos, tienen seis formas diferentes de interpretar los símbolos literales, ello puede provocar el surgimiento de dificultades cuando se tenga que representar, utilizar y operar la noción de variable.

## 2.2 *Some misconceptions concerning the concept of variable*, Rosnick (1981).

Este trabajo se interesa por investigar las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión del uso de letras en las ecuaciones al trasladar un enunciado verbal a una expresión algebraica. Nuevamente esta investigación centra su atención en las representaciones simbólicas de la variable a partir de situaciones problemáticas. La investigación abarcó a estudiantes de primer año de ingeniería y estudiantes que habían llevado uno o dos semestres de cálculo. El estudio incluyó un examen de diagnóstico y entrevistas videogradas. Para ello se les planteó el problema siguiente:

Escribe una ecuación, usando las variables  $S$  y  $P$  para representar el siguiente enunciado: “En esta universidad hay seis veces tanto estudiantes como profesores.” Usa  $S$  para el número de estudiantes y  $P$  para el número de profesores (Rosnick, 1981, pp. 418 y 419).

Los resultados obtenidos manifestaron la dificultad que los estudiantes tienen al trasladar un problema verbal a lenguaje algebraico, “...37 % de los alumnos de un grupo de 150 estudiantes que inician ingeniería no fueron capaces de escribir la ecuación correcta...” (Rosnick, 1981, p. 419). Muchos de los estudiantes que escribieron  $6S = P$  creyeron que  $S$  es una etiqueta permanente para *estudiantes*, mientras que una variable permanente para *número de estudiantes*. Ellos leyeron la ecuación  $6S = P$  como “Hay seis estudiantes para cada profesor”, tomando a  $S$  como estudiantes y  $P$  como profesores. Contrariamente, ellos leerán  $S = 6P$  como “un estudiante para cada seis profesores” en lugar de lo apropiado “el número de estudiantes es igual a seis veces el número de profesores”. Así letras en ecuaciones pueden abstractamente permanecer para *número*, esto sonaría obvio, pero no lo es del todo para los estudiantes.

En este sentido un cuestionario de opción múltiple acerca del significado de  $P$  y  $S$  del enunciado de arriba, aproximadamente 40% de 152 estudiantes fueron incapaces de seleccionar “*número de profesores*” como la opción correcta, similares resultados fueron para  $S$ . Ante esta situación, existe una tendencia en los alumnos de ver las letras como entidades concretas, de ahí que esto sea una de las causas que originen dificultades al trasladar el enunciado de un problema y su correspondiente expresión algebraica.

El autor sugiere ante esta problemática que los profesores de matemáticas deberían ser concientes de la situación que implica la comprensión de las variables, constantes, parámetros y todo lo que incluya el uso de las letras en el álgebra. Esto ayudaría a sus estudiantes a distinguir las diferentes formas en las cuales las letras pueden ser usadas, como variables y como entidades concretas en ecuaciones.

### 2.3 *On the meaning of variable*, Schoenfeld & Arcavi (1988).

Los autores realizaron un estudio en el que se describe un ejercicio reflexivo y estructurado de quienes la intención es reexaminar la noción de variable y redescubrir su riqueza y diversidad de significados. Esto a su vez, sugieren los autores, puede ayudar a remodelar las formas de enseñar y usar el concepto de variable en las clases.

El estudio se estructuró en tres partes, el trabajo con diversos grupos (matemáticos, educadores matemáticos, computadores científicos, lingüistas y lógicos) en un ejercicio, como el término se ha usado, se comparan las respuestas, la profundidad, variedad y riqueza del concepto, la segunda parte se examinaron algunas definiciones de este concepto de la literatura, no sin antes tratar de producir una definición que capturara lo esencial del término variable y por último se proporcionan sugerencias relacionadas a la enseñanza de este concepto surgido del grupo de discusión.

El trabajo de investigación inicia con la pregunta: *una variable es un*\_\_\_\_\_, debiéndola responder con una palabra. Esta actividad se realizó con personas de diferentes disciplinas, las palabras que se generaron fueron: *símbolo, reemplazo, pronombre, parámetro, argumento,*

*indicador, nombre, identificador, espacio vacío, vacío, referencia, caso* (Shoenfeld & Arcavi, 1988, p. 421). Esta lista de palabras se amplió con las definiciones de variable en la segunda parte, como se puede observar el término variable tiene diferentes interpretaciones.

En la segunda parte del estudio se examinan definiciones de variable tomadas de la literatura. Encontraron diez definiciones:

- 1) *Del latín variabilis: variable.*
- 2) *Una cantidad que puede asumir cualquier valor de un conjunto específico. Un símbolo en una fórmula matemática representando una variable: reemplazo.*
- 3) *Cantidades variables...tienen que estar continuamente incrementando o decreciendo: y así hacer por el movimiento de su incremento o decrecimiento mencionados, generar líneas, áreas o sólidos.*
- 4) *Una cantidad o fuerza la cual a todo lo largo de un cálculo matemático o investigación es asumida para variar o capaz de variar en valor.*
- 5) *Una variable es un símbolo que puede ser reemplazado por cualquier elemento de algún conjunto designado de números (u otras cantidades) llamado dominio de la variable. Cualquier miembro del conjunto es un valor de la variable. Si el conjunto solo tiene un miembro la variable se vuelve constante. Si un enunciado contiene dos variables relacionadas de tal forma que cuando el reemplazo es realizado para la primera variable, el valor de la segunda variable es determinado, la primera variable es llamada variable independiente, y la segunda es llamada variable dependiente.*
- 6) *Un propósito general del término en matemáticas para una entidad la cual toma varios valores en cualquier contexto particular. El dominio de la variable puede ser limitado a un conjunto particular de números o cantidades algebraicas.*
- 7) *Las variables las cuales son generalmente representadas por letras, representan un conjunto vacío en cual un elemento arbitrario (o su símbolo) de un conjunto dado puede ser sustituido... las variables son utilizadas en dos formas: facilitan enunciar leyes, y la solución de un problema expresado en términos de variables proporcionan el resultado de muchos casos arbitrariamente individuales sin nuevos cálculos, por una mera sustitución.*
- 8) *Una variable es una letra o cadena de letras usadas para denotar un número...en cualquier tiempo, una variable significará un número particular, llamado valor de la variable, el cual puede ser cambiado de vez en cuando...El valor de la variable puede cambiar millones de veces...Nosotros asociaremos a cada variable una caja de ventana. La variable asociada es garbada a lo alto de cada caja, dentro está una tira de papel con el presente valor de la variable escrita en ella. La variable es un nombre para el número que aparece constantemente adentro*

- 9) *Una variable es llamada una entidad que posee un valor que puede cambiar durante la ejecución de un programa. Una variable está asociada con una memoria de localización específica y el valor de la variable está contenido en esa memoria de localización.*
- 10) *Cualquier símbolo cuyo significado no está determinado es llamado una variable, y las diferentes determinaciones de las cuales su significado es sensible es llamado valor de la variable. Los valores pueden ser conjuntos de entidades, proposiciones, funciones, clases o relaciones, según las circunstancias. Si un enunciado es realizado acerca de 'Sr. A y Sr. B', 'Sr. A' y 'Sr. B' son variables cuyos valores son asignados a hombres. Una variable puede tener un rango de valores asignado convencionalmente, o puede (en ausencia de cualquier indicación del rango de valores) tener como rango de sus valores todas las determinaciones que traduzca el enunciado en el cual lo significativo ocurre. (Schoenfeld & Arcavi, 1988, pp. 421 y 422)*

Las definiciones anteriores de *variable* muestran lo multifacético que es este término, lo complejo que puede ser su comprensión por el aspecto simbólico con que representa y los diferentes contextos en los que se aplica, aunado a que el significado de variable es variable (Shoenfeld & Arcavi, 1988, p. 425).

Por último los autores proporcionan tres sugerencias relacionadas a la enseñanza del concepto de variable surgido de esta investigación.

- 1) Las variables son herramientas para expresar generalizaciones matemáticas. Se ayudaría a los estudiantes en un primer momento a tener hábitos para hacer enunciados verbales antes de pedirles una formalización usando lenguaje matemático, por ejemplo ¿puedes decir si la suma de dos números impares será necesariamente par o impar? Preguntar por las regularidades de los patrones y resumirlos verbalmente pueden ayudar a la transición de la aritmética al álgebra.
- 2) Los aspectos dinámicos del concepto de variable deberían ser enfatizados cada vez que sea apropiado y viable, por ejemplo los alumnos pueden ser conducidos a observar la temperatura de un cuarto en un tiempo  $t$ , la distancia que un objeto cae en  $t$  segundos, etc. Hacer la noción de variable más significativa conducirá a su ampliación.
- 3) Gran parte del currículo del álgebra consiste en soluciones de ecuaciones independientes del contexto desde la cual fueron realizadas, inclusive los problemas verbales son cuidadosamente organizados y enseñados en unidades separadas. Se

recomienda que los estudiantes sean expuestos a un amplio rango de problemas para la cual el álgebra, especialmente en su rol de una herramienta para la generalización matemática pueda ser útil, como por ejemplo un amigo mío observó que:  $39 \times 62 = 93 \times 26$ ; es decir cuando inviertes el número 39 y 62, encuentras que el producto de los números invertidos es el mismo que los dos números iniciales, ¿cualquier otra pareja de números tienen esta propiedad?

La variedad de significados del término variable, hace que su aprehensión sea complicada para los estudiantes.

#### 2.4 *Cognitive processes involved in learning school algebra*, Kieran, Booker, Filloy, Vergnaud, & Wheeler (1990).

El estudio realizado por Kieran *et al* (1990) comprende una serie de investigaciones relacionadas al aprendizaje del álgebra escolar. Centra su interés en el estudio de los procesos de transición de la aritmética al álgebra, en el cual surgen dificultades en los estudiantes. Este trabajo de investigación aborda tres aspectos, el desarrollo del álgebra desde la perspectiva epistemológica; las continuidades y discontinuidades del álgebra con respecto a la aritmética que se presentan en los estudiantes y el uso de ambientes computacionales en el aprendizaje del álgebra.

El desarrollo histórico del álgebra, como un sistema de símbolos ha pasado por tres etapas: 1) La etapa retórica antes de Diophantus (250 años después de nuestra era), se caracterizó por el uso de una descripción en lenguaje ordinario para resolver problemas de tipo particular y careció del uso de símbolos o signos especiales para representar incógnitas. 2) La etapa del álgebra sincopada (desde Diophantus hasta finales del siglo XVI), se introdujo abreviaciones para cantidades desconocidas, la inquietud de los algebristas fue averiguar la identidad de la letra o letras, como opuesto para intentar expresar lo general. 3) La etapa del álgebra simbólica, iniciada por el uso de las letras de Vieta para representar cantidades dadas, es posible transformar las soluciones generales a expresiones y usar el álgebra como herramienta para demostrar reglas que gobiernan las relaciones numéricas. El desarrollo de un lenguaje

simbólico especializado despojó de significado el lenguaje en la cual la actividad algebraica había sido previamente expresada. El álgebra retórica y sincopada fueron ligeramente fácil de seguir y comprender, pero el paso a un sistema simbólico eliminó los significados de los objetos individuales e incluso las operaciones que actúan sobre ellos, haciendo al álgebra semánticamente débil.

La aritmética y el álgebra comparten muchos símbolos y signos, tales como el signo igual, los signos de suma y resta. A pesar de la aparente continuidad entre la aritmética y el álgebra, la interpretación dada a estos símbolos y signos es diferente en álgebra, un ejemplo el signo igual que en la escuela primaria es usado para anunciar un resultado, en el álgebra debe ocurrir un cambio interpretativo, además de la igualdad, expresa el carácter simétrico y transitivo (Kieran *et al.*, 1990, p. 98). La primera experiencia que tienen los estudiantes de la escuela primaria en el uso de letras (términos literales) es como etiquetar medidas, que con frecuencia interfiere con la llegada del significado del término variable en una ecuación algebraica, relaciones como  $10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$ , aquí no solo son letras leídas como etiquetas, sino también el signo igual es leído como una proposición “hay 10 milímetros en/por 1 centímetro” (Kieran *et al.*, 1990, p. 101). En este sentido, estudiantes más antiguos en álgebra continúan el uso de esta etiqueta de interpretación de términos literales, incluso en situaciones donde no es apropiada como en el caso del “problema de los estudiantes y profesores” arriba mencionado.

Por otra parte, la comprensión del término literal como variable Harper (1987 citado en Kieran, *et al.*, 1990) ha sugerido la existencia de etapas y ha hecho notar que los estudiantes usan los términos literales antes, que son capaces de conceptualizarlos como variables, es decir, perciben lo general en lo particular. En sus entrevistas a 144 alumnos de secundaria por medio de preguntas como “si tienes la suma y la diferencia de cualquiera de dos números dados, demuestra que siempre puedes encontrar qué números son”. La evidencia encontrada fue tres tipos de soluciones, que tienen que ver con la historia de las matemáticas. El autor notó un cambio en la preferencia de la aproximación retórica para usar la letra y expresar incógnitas en expresiones dadas, así los estudiantes crecieron en experiencia y madurez matemática. El uso de la notación de Vieta fue logrado por una minoría de los estudiantes más capaces.

En este estudio el aprendizaje del álgebra en ambientes computacionales es todavía insipiente, se están realizando investigaciones en este sentido para conocer los efectos en la enseñanza. Por lo que respecta a la variable, Sumurcay (1985 citado en Kieran, *et al.*, 1990), investigó este concepto en alumnos de 9 a 16 años en ambientes computacionales de Logo, Pascal y LSE, encontró que el concepto de variable no ocurre espontáneamente en los estudiantes al trabajar en el ambiente Logo, es necesario una intervención didáctica. En el Logo Math Project (Hoyles, Sutherland, & Evans, 1985 citado en Kieran, *et al.*, 1990), se incorporó la intervención de un profesor en el estudio de cómo estudiantes de 11 a 14 años desarrollan el concepto de variable en un contexto de programación de Logo. Sutherland and Hoyles (1986 citado en Kieran, *et al.*, 1990), encontraron que los estudiantes necesitan tener experiencia acerca de las variables en diferentes situaciones antes de que una síntesis pueda tener lugar. Al final de los tres años de estudio, los estudiantes fueron entrevistados para ver si habían podido hacer conexiones entre los usos de la variable en Logo y en álgebra. Algunas de las preguntas en la entrevista fueron tomadas del CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science). Sutherland reportó que la experiencia de estudiantes con Logo enriquecieron sus conocimientos de variable en un contexto algebraico.

En esta misma dirección Thomas and Tall (1986 citado en Kieran, *et al.*, 1990), investigaron el aprendizaje del concepto de variable entre alumnos de 12 años en un ambiente BASIC haciendo notar que el procedimiento utilizado por los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra fue sobre todo de tipo procedimental (entrada / salida), sin embargo en un ambiente Logo el uso de variables implicó una habilidad para generalizar una relación entre cantidades y expresar esa generalización en lenguaje formal. Esto refleja que el uso de un programa de computación en la enseñanza y el aprendizaje como el Logo desarrolla habilidades en los estudiantes para la comprensión del concepto de variable.

Los resultados de este estudio sobre las continuidades y discontinuidades entre la aritmética y el álgebra mostraron que, muchos de los errores que cometen los estudiantes son resultados de lo razonable, sin embargo fracasan, en los intentos por usar o adaptar previamente el

conocimiento adquirido a una nueva situación. Tal es el caso del término variable que puede ser usado como una incógnita o un número general en el contexto del álgebra.

## 2.5 *Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable*, Ursini (1996).

El objetivo de esta investigación es propiciar en los alumnos el desarrollo de un potencial para trabajar con distintos usos de la variable, antes de la enseñanza formal del álgebra. El estudio está basado en actividades que fueron desarrolladas previamente en un ambiente computacional (LOGO) con 34 alumnos de primero de secundaria que no habían recibido aún una enseñanza formal de álgebra.

Se consideraron tres usos distintos de la variable: como *número general* que representa un número indeterminado involucrado en un método o regla general; como *relación funcional*, representa números cuyos valores se mueven dentro de ciertos rangos de manera interrelacionada; y como *incógnita específica*, que representa un valor desconocido pero específico, que puede determinarse con precisión tomando en cuenta las restricciones del problema.

Los resultados obtenidos en el uso de la variable como relación funcional mostraron que los alumnos fueron capaces de determinar intervalos numéricos, hacer registros tabulares, localizar los valores con los cuales había que correr un programa para obtener en la pantalla de la computadora el tamaño máximo o mínimo de una figura y dar una descripción cualitativa del comportamiento global de dos variables inter-relacionadas.

## 2.6 *Introducing the variable through pattern exploration*, English & Warren (1998).

Una propuesta didáctica para la introducción de la noción de variable es realizada por English & Warren (1998), el objetivo es revisar la alternativa de aproximación de patrones y destacar las dificultades que pueden presentar a los estudiantes, cuando carecen de habilidades y conocimiento de procesos. Esta investigación fue realizada con 430 estudiantes de entre 12 y 15 años.

La idea es, dado un modelo (gráfico, tabla de datos, etc.), los alumnos mediante la exploración, pueden determinar la regularidad que presenta el modelo haciendo una descripción verbal de su comportamiento. Prueban sus hipótesis para una determinada cantidad  $n$  de casos. Por último, construyen su generalización empleando símbolos algebraicos.

En la introducción de la noción de variable, se utiliza un patrón de aproximación que consiste: Paso 1, presentar un dibujo donde hay un cuadrado formado por cuatro palitos. Paso 2, abajo del cuadrado, se presentan dos cuadrados formados de siete palitos en forma horizontal. Paso 3, abajo de estos cuadrados, se presentan tres cuadrados formados de diez palitos en forma horizontal. Se pretende que los estudiantes encuentren una regularidad en la construcción de estos cuadrados para una cantidad  $n$  de cuadrados. Durante el proceso de búsqueda los estudiantes discuten, comparan las diferentes formas construidas para encontrar una regla general que describa sus patrones y exprese esta regla con sus propias palabras. Algunas variantes serían, encontrar más reglas a un patrón dado, comparar estas reglas alternativas, y generar un nuevo patrón de modelo. Estas actividades informales preparan el camino para la introducción del concepto de variable y también las ideas de equivalencia y simplificación algebraica. Lo que resalta en esta actividad con la exploración del modelo, es que los alumnos deben establecer una relación de dependencia entre el número de palitos y el número de cuadrados que se forman, implícitamente las variables son los *palitos* y el *número de cuadrados* que se pueden formar.

Los patrones se conformaron con las cuatro generalizaciones lineales,  $x + c$ ,  $ax$ ,  $ax + c$ , y  $ax - c$ . Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes tuvieron grandes dificultades al intentar generalizar los patrones, especialmente cuando trataron de expresarlos en forma algebraica. Encontraron más fácil verbalizar sus generalizaciones que registrarlas simbólicamente. Para representar sus generalizaciones en forma simbólica utilizaron estrategias de razón, estrategias aditivas y la estrategia de relación funcional. Los alumnos menos competentes usaron una estrategia de razón o una estrategia aditiva, esto es, una aproximación recursiva y no usaron notación algebraica para registrar sus generalizaciones.

Los alumnos más competentes (menos del 25 %) intentaron identificar la relación funcional y usaron notación algebraica para registrar sus generalizaciones, encontrando tres formas diferentes para el caso de los cuadrados:  $3x + 1$ ,  $4 + 3(x - 1)$ , y  $2x + x + 1$ . En la primera expresión  $3x$  representa la forma en que aumentan los palitos para formar los siguientes cuadrados y solo se le agrega 1 para obtener el primer cuadrado. En la segunda expresión 4 representa el primer cuadrado y  $3(x - 1)$  la forma en que se va incrementando para obtener los siguientes cuadrados. En la tercera expresión  $2x$  representa los palitos de la parte superior e inferior del cuadrado,  $x$  representa el palito vertical y 1 es el palito del primer cuadrado;  $(2x + x)$  representan la forma en que se va incrementando los palitos después del primer cuadrado. Estas exploraciones de patrones a través de actividades concretas, pueden ser usadas para introducir ideas elementales de álgebra e inducir a un número de habilidades y procesos.

2.7 *La conceptualización de la variable en la enseñanza media*, Trigueros, Ursini & Lozano (2000).

Esta investigación tiene como objeto estudiar la interpretación, simbolización y manipulación que realizan los estudiantes de diferentes niveles (secundaria, preparatoria e inicio de universidad) respecto a la variable en sus distintos usos. Para ello se utilizó un cuestionario que se aplicó a 98 alumnos para explorar la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que implican los distintos usos del concepto de variable (*incógnita*, *número general* y *relación funcional*, arriba mencionados).

Cada uso de la variable está caracterizada por acciones específicas, en particular el uso de la variable en relación funcional se requiere reconocer la correspondencia entre cantidades y sus diferentes representaciones (gráfica, tabla, problema verbal o expresión analítica); determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente y viceversa; reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación; determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra; expresar una relación funcional en sus distintas representaciones a partir de los datos de un problema.

Los resultados mostraron que si bien, los usos de la variable están presentes en los cursos de matemáticas, los estudiantes no adquieren la capacidad de interpretarlos, simbolizarlos y manipularlos de manera satisfactoria; lo que impide una comprensión del carácter multifacético de este concepto; por lo que una mala conceptualización de la variable puede ser causa importante para las múltiples dificultades que suelen tener los estudiantes en los cursos de matemáticas en los diferentes niveles escolares.

### *2.8 Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study, Carlson, Jacobs, Coe & Larsen (2002).*

Un estudio acerca de la modelación de dos cantidades variantes es llevado a cabo por Carlson et al (2002). Su propósito, desarrollar la noción de razonamiento covariacional y proponer un marco teórico para describir las acciones mentales involucradas en la aplicación de este tipo de razonamiento, cuando se interpretan y representan eventos de funciones dinámicas. Para este propósito se pidió a 20 estudiantes que habían terminado el 2º semestre de cálculo con alto rendimiento responder 5 preguntas que implicaban un análisis de aspectos covariacionales de eventos dinámicos (llenado una botella, cambio de temperatura respecto al tiempo, una escalera deslizándose de una pared hacia abajo); las variables adoptan en estas actividades el aspecto dinámico cuando los alumnos modelan gráficamente y describen el comportamiento de estos eventos.

En este trabajo se define al razonamiento covariacional como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atienden a las formas en las que ellas cambian entre sí. El marco teórico se sintetiza en dos tablas: una que contiene la descripción de cinco acciones mentales del razonamiento covariacional en el que se describen las acciones mentales y las conductas asociadas; y otra tabla que describe cinco niveles de razonamiento covariacional (N<sub>1</sub> Coordinación, N<sub>2</sub> Dirección, N<sub>3</sub> Coordinación cuantitativa, N<sub>4</sub> Razón promedio y N<sub>5</sub> Razón instantánea). Estas dos tablas están relacionadas, puesto que según sean las conductas mostradas por el estudiante ante un evento covariacional, le corresponderá un determinado nivel.

Los resultados obtenidos al hacer observaciones con estudiantes señalan que, tuvieron dificultad en la construcción de imágenes de una razón de cambio continuo, particularmente en la representación e interpretación de una razón creciente y decreciente para una situación física, como ocurrió en el bosquejo de la gráfica del llenado con agua (a velocidad constante) de una botella y asociar la variable volumen con la variable altura, sólo 5 (25%) de los estudiantes proporcionaron una solución aceptable, mientras que 14 (70%) construyeron una gráfica creciente que fue estrictamente cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

La forma de presentar a los estudiantes los fenómenos físicos, en el que se relacionan dos variables, estableciendo dependencia entre éstas para su consecuente explicación, fue parte importante en el diseño de nuestras situaciones experimentales.

## 2.9 *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria, Juárez (2002).*

Con el propósito de conocer el estado en que se encuentran los profesores respecto a los usos de la variable, Juárez (2002) realiza un estudio exploratorio acerca de la comprensión del concepto de variable en los profesores de matemáticas de secundaria. Para ello diseña y aplica un cuestionario de 65 preguntas abiertas a 74 profesores de secundaria. En el diseño del cuestionario, el análisis y clasificación de las respuestas se utilizó la caracterización de los tres usos de la variable (como incógnita específica, número general y variable en relación funcional) según Trigueros y Ursini mencionada en párrafos anteriores.

De esta investigación se obtienen evidencias empíricas la cual revelan que los profesores de matemáticas de secundaria no tienen un buen manejo de los tres usos de la variable (Juárez, 2002, p. 88). El porcentaje promedio de respuestas correctas a las preguntas del cuestionario fue de 52.7%, lo que indica que los profesores tienen una pobre comprensión del concepto de variable; ningún profesor contestó acertadamente el 100% de las preguntas del cuestionario. Las mayores dificultades que se presentaron es cuando los profesores se enfrentaron a las variables de tipo relacional, solo el 49.1% acertaron, en la variable como incógnita específica obtuvieron un 52.3% de aciertos y la variable como número general obtuvieron un 58.2% de

aciertos. En lo que a la variable en relación funcional respecta se concluye que la mayoría de los profesores son capaces de trabajar con la idea de variación cuando ésta se presenta en forma de tabla así como reconocer la correspondencia entre cantidades, sin embargo esto se dificulta cuando se trata de determinar intervalos de variación, reconocer la variación conjunta en forma gráfica o expresar de manera analítica una relación funcional.

Esta investigación concluye con una reflexión acerca de las dificultades de los estudiantes cuando trabajan con el álgebra, dichas dificultades podrían ser causadas por la poca comprensión que tiene el profesor de los diferentes aspectos de la variable y que al momento de enseñar los contenidos esta incomprensión es transmitida a los alumnos sin que el profesor sea consciente de ello; asimismo se sugiere la conveniencia que se aborden los diferentes contenidos en que aparecen los distintos usos de la variable y así tratar de ayudar a los profesores a desarrollar una mejor comprensión y manejo de este concepto.

2.10 *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior*, Vicario (2002).

En un estudio exploratorio acerca de la variable realizado por Vicario (2002) en Chilpancingo, Guerrero se exploran las concepciones que de variable tienen los estudiantes de nivel medio, medio-superior y superior (78 alumnos de secundaria, 81 de bachillerato y 88 principiantes universitarios, haciendo un total de 247). Para ello, se diseñó un cuestionario de nueve preguntas, en las primeras seis se les cuestiona sobre la representación de las variables, en la pregunta siete se les pide identificar y clasificar a las constantes y las variables a partir de una expresión algebraica, en la pregunta ocho se les pide que a partir de la representación gráfica, identifiquen en qué ejes del plano cartesiano la gráfica presenta cambios y en la última pregunta se les presenta la gráfica de una función y se les pide identificar qué es lo que cambia en una representación gráfica.

Los resultados de esta investigación muestran que la mayoría de los estudiantes cuestionados reconocen a las variables, si están representadas preferentemente con las letras  $x$  e  $y$ . Cuando se trata de la identificación de variables en expresiones analíticas, a los estudiantes se le

facilita tal identificación si en éstas se encuentra presente la letra  $x$ , ellos la identifican como *incógnita* o como *variable*. Cuando se trata de una expresión algebraica donde se encuentren presentes dos variables como  $x$  e  $y$ , igualadas a una constante numérica, ellos la identifican como *valores desconocidos* y como *variables*. Cuando se les presenta una expresión como:  $y = 10$ , con  $y = f(x)$  en donde  $x > 0$ ; los estudiantes identifican como variables solo a  $x$ ,  $f(x)$ , omiten decir  $y$ , quizás porque la ven igualada a una constante. Por otro lado cuando se les presenta expresiones que involucran variables en términos conjuntistas como  $A = \{x|x \in \text{vocales}\}$ , dicen algunas veces que las variables son las  $x$  y otras veces  $A$ .

Respecto a la identificación de variables dadas varias gráficas cartesianas, en particular la gráfica de una función cuya representación es una paralela al eje de las  $x$ , los estudiantes dicen que cambia la  $x$  y la  $y$  no cambia, sin embargo cuando se tiene una gráfica con los elementos contrarios (la recta paralela al eje  $y$ ) las respuestas varían, ya que unos mencionaron que  $x$  cambia y la  $y$  no cambia, otros que  $x$  cambia, otros más que  $x$  no cambia y la  $y$  si cambia. Cuando se trata de una gráfica donde  $x$  e  $y$  son variables los alumnos concluyen que las que presentan los cambios son las dos variables.

Por último los resultados de esta investigación mostraron la escasa presencia de la idea de variable concebida como magnitud, es decir asociada a una representación geométrica (longitud, área, volumen). Se tiene una concepción de variable asociada a las literales y afloran concepciones alternativas (las que difieren de las aceptables) en el plano gráfico y conjuntista al plantear situaciones de variación; los estudiantes manifestaron dificultades en la comprensión de la noción de variable en los problemas que se les plantearon.

2.11 *Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand*, Fujii (2004).

Esta investigación trata sobre las dificultades que los estudiantes tienen acerca de la comprensión del uso de expresiones simbólicas en la asignatura del álgebra en la escuela secundaria, para lo cual propone la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética mediante el uso de expresiones numéricas generalizables. Para recabar información

empírica el autor utiliza cuestionarios, entrevistas y registros de videograbaciones de estudiantes japoneses y estadounidenses.

La investigación está dividida en dos partes, en la primera se hace un análisis de los resultados de investigaciones sobre la comprensión de los símbolos literales por parte de los estudiantes, del cual se obtiene que muchos de los estudiantes de secundaria parecen tener una muy pobre comprensión de lo que los símbolos literales denotan y cómo pueden ser tratados en expresiones matemáticas. Al respecto el autor ha estado desarrollando un conjunto de problemas del conflicto cognitivo, donde el conflicto cognitivo es considerado como una herramienta para investigar y evaluar la profundidad y calidad de la comprensión de los estudiantes. En la segunda parte, un intento es realizado para mostrar como el currículum de la escuela primaria puede ofrecer mejores oportunidades a los niños para pensar algebraicamente, el autor argumenta que el problema que se enfrenta acerca de la dificultad de la comprensión de la variable, pudiera ser más relacionado al currículum que a algún supuesto nivel cognitivo, además se presenta una aproximación para introducir el pensamiento algebraico en el currículum de la escuela primaria y secundaria usando expresiones numéricas generalizables basadas en un concepto de cuasi-variable.

Para identificar la comprensión de los estudiantes acerca de los símbolos literales se plantearon dos problemas:

#### Problema 1

Mary tiene el siguiente problema que resolver:

“Encuentra valor(es) para  $x$  en la expresión:  $x + x + x = 12$

Ella contestó de la siguiente manera.

- a. 2, 5, 5
- b. 10, 1, 1
- c. 4, 4, 4

¿Cuál de su respuesta(s) es (son) correctas? (Circula la letra(s) que son correctas.

Expone la razón de tu selección.

#### Problema 2

Jhon tiene el siguiente problema que resolver:

“Encuentra el valor(es) para  $x$  y  $y$  en la expresión  $x + y = 16$

El contestó de la siguiente manera.

- a. 6, 10
- b. 9, 7
- c. 8, 8

¿Cuál de su respuesta(s) es (son) correctas? (Circula la letra(s) que son correctas.

Expone la razón de tu selección.

Para el problema 1 algunos estudiantes eligieron solo el mismo valor respuesta c (4, 4, 4) y en el problema 2 los mismos estudiantes eligieron solo diferentes valores, las respuestas a(6,10), b(9,7); la razón para esta clase de respuestas parece ser que la misma letra representa el mismo número en el Problema 1 y diferentes letras representan diferentes números en el Problema 2, estas respuestas son clasificadas como de tipo A. Por otro lado había estudiantes quienes seleccionaron todas las respuestas del Problema 1 y también todas las respuestas del Problema 2, la razón parece ser que: todo suma 12 para el Problema 1 y en el Problema 2: todo suma 16; estos estudiantes parecen ignorar diferencias en las letras y parecen considerar que las letras pueden representar cualquier número, estas respuestas son clasificadas como de tipo B. Es importante hacer notar que es raro en los estudiantes obtener los dos problemas correctos.

En el resultado de las entrevistas a tres estudiantes, uno del tipo A y dos del tipo B, sobre la pregunta de si es correcta o incorrecta la expresión: Un estudiante japonés expresó la relación entre los lados y perímetro de un cuadrado usando  $x$  como:  $x + x + x + x = x$ . El alumno de tipo B contestó “correcto”, la razón “*porque x es una variable*”; la alumna del mismo tipo recomendó que el lado derecho de  $x$  pudiera ser  $4x$ . Después ella trató de sustituir el número 4 en  $x$ . En esta etapa la alumna de tipo A expone: *pero, es decir, en ese enunciado x tiene que ser el mismo número, no?*, basado en este comentario, la alumna del tipo B sugirió remplazar  $x$  en  $a$  o  $y$ , tratando de ser consistente con la alumna del tipo A. El alumno del tipo B pareció pensar que no era necesario hacer eso. Al final concluyeron:

Tipo A “*Porque x es supuesto ser la mismo cosa en todo el enunciado*”.

Tipo B “*No tiene que ser la misma cosa. Es una variable*”.

En el análisis del estudio escrito y las entrevistas, cuatro respuestas son identificadas “ambos problemas son correctos”, “Tipo A”, “Tipo B” y “Otro”; los cuatro grupos parecen mostrar niveles de comprensión de los símbolos literales. Nivel 0 cuya respuesta es “otros”, los

estudiantes tienen un vaga concepción de símbolos literales, no hay reglas para interpretar o sustituir números en los símbolos literales. El nivel 1 (Tipo B), hay algo de lógica tras las respuestas de los estudiantes, en este nivel el aspecto “no específico”(x puede ser cualquier número) de la variable es dominante, pero el aspecto “definido” (la misma letra representa el mismo número) está ausente. El nivel 2 (Tipo A), el aspecto “definido” de variable parece volverse dominante, las repuestas son elegidas por la convención de que la misma letra representa el mismo número, los estudiantes no son capaces de considerar el aspecto “no específico” al mismo tiempo. En el nivel 3, los estudiantes son capaces de atender ambos aspectos de la variable, que la misma letra representa el mismo número y también que letras diferentes no necesariamente o siempre representan diferentes números.

Para detectar la comprensión de los estudiantes que subyace en la eficacia del procedimiento, el autor ha desarrollado un conjunto de problemas del conflicto cognitivo, antes mencionado. En la solución de ecuaciones lineales y desigualdades en la cual la solución del conjunto contiene todos los números, claramente la ‘desaparición’ de  $x$  fue supuesta para provocar conflicto cognitivo en los estudiantes. Un problema planteado en 7° y 8° grado es la desigualdad siguiente:

Mr A resolvió la desigualdad  $1 - 2x < 2(6 - x)$  como sigue:

$$1 - 2x < 2(6 - x)$$

$$1 - 2x < 12 - 2x$$

$$- 2x + 2x < 12 - 1$$

$$0 < 11$$

Aquí Mr. A entró en dificultad.

1 Escribe abajo tu opinión acerca de la solución de Mr. A.

2 Escribe abajo tu forma de resolver esta desigualdad  $1 - 2x < 2(6 - 2x)$  y tus razones.

El problema fue diseñado para incluir la desaparición de  $x$ , con la expresión verbal “Aquí Mr. A entró en dificultad”, y la expresión “ $0 < 11$ ” para destacar la naturaleza del problema. La expresión pudo haber sido escrita como “ $0x < 11$ ”. Los conflictos de los estudiantes considerando la dificultad causada por Mr. A fueron evidentes en las respuestas siguientes: “Yo también me detuve aquí”, y “De momento no tengo idea que hacer”, sin embargo comentarios de los estudiantes tales como “No sé porque Mr. A entró en dificultad aquí” fue

identificado como una señal para no ser provocado por el conflicto. Respuestas no provocadas fueron encontradas en solo 3.5% de estudiantes, mientras la mayoría de los estudiantes 96.5%, pareció ser intencionadamente provocados por el conflicto. La mayoría de los estudiantes escribió alguna conclusión en sus hojas. Las respuestas de los estudiantes fueron clasificadas en cinco categorías. Categoría A (13%) consistió de respuestas donde el conflicto fue capaz de resolver dando la respuesta correcta. La categoría B (34%) se subdividió en dos, B1 (26%) los estudiantes persistieron en tener una  $x$  al final de la respuesta usando procedimientos irrelevantes, mientras que el grupo B2 quienes esperaron obtener una respuesta conteniendo  $x$ , pero no pudieron al final conservarla, concluyendo que “no hay solución”. La categoría C (18%) los estudiantes no lograron al final de la respuesta contener  $x$ . La categoría D (3%) no dieron respuesta o solución.

Por otro lado el autor propone la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética introduciendo el uso de los números como cuasi-variables, por esta expresión se entiende un enunciado numérico o grupo de enunciados numéricos que indican una relación matemática subyacente la cual permanece cierta para cualquiera de los números que sean usados, por ejemplo  $78 - 49 + 49 = 78$ . Utilizando expresiones de esta forma, es que expresiones numéricas generalizables pueden ayudar a los niños a identificar y discutir largas generalizaciones algebraicas antes de que aprendan la notación formal. El uso de expresiones numéricas generalizables pueden proporcionar un importante puente entre la aritmética y el pensamiento algebraico que los niños necesitan cruzar continuamente durante sus años en la primaria y secundaria. El uso de enunciados numéricos generalizables para representar cuasi-variables pueden proporcionar una salida al concepto de variable en los primeros años de la escuela.

Acerca de las expresiones cuasi-variables, se investigó si los niños pueden ocuparse en el pensamiento cuasi-variable y cómo expresan ese pensamiento. Para ello usan un diálogo-entrevista basado en el método de Peter (restando 5).

El dialogo-entrevista empieza con Peter resta cinco de algunos números:

$$37 - 5 = 32$$

$$59 - 5 = 54$$

$$86 - 5 = 81$$

El dice que esto es bastante fácil de hacer. ¿Estás de acuerdo?

Pero algunos otros no son muy fáciles, como:

$$32 - 5$$

$$53 - 5$$

$$84 - 5$$

Peter dice, “Yo hago esto primero sumo 5 y después resto 10, como

$32 - 5 = 32 + 5 - 10$ . Calculándola de esta manera es más fácil”.

Los resultados mostraron que este método puede ser generalizado al responder “en lugar de restar 5, él suma 5 y luego resta 10. Si tú sumas 5 necesitas restar 10 para igualarla”, además crearon otros ejemplos para sustraer 6, 7, 8 y 9. El caso de Alan parece representar claramente el pensamiento cuasi-variable, pues mencionó “para cualquier número que restes, tienes que agregar otro número, que esté entre 1 y 10 que iguale 10, como 7 y 3 o 4 y 6. Restas 10 y eso te da la respuesta”. Similar respuesta es mencionada por Zoe “cualquier número es el que estás restando, se necesita tener otro número para hacer 10. Sumas el número para hacer 10, y luego restas 10. Si tú tienes  $22 - 9$ , sabes que  $9 + 1 = 10$ , así que suma el 1 y después resta 10”. Este método puede ser generalizado para número entre 1 y 10.

En relación a las implicaciones para la reforma de las matemáticas en la escuela primaria, el autor hace tres sugerencias para suavizar la transición de la aritmética al álgebra: a) describir y hacer uso de procesos generalizables y propiedades estructurales de la aritmética, generalmente; y de expresiones cuasi-variables en particular; b) generalización de soluciones a problemas aritméticos que ayuden a los estudiantes a desarrollar el concepto de variable en un sentido informal; c) proporcionar oportunidades a los estudiantes para discutir sus estrategias de solución para estos problemas a fin de destacar procesos matemáticos fundamentales e ideas.

Para finalizar, acerca de la dificultad de los estudiantes por la comprensión del álgebra, se comenta que este problema no debería ser construido simplemente en términos de demandas cognitivas que pertenecen al pensamiento algebraico como opuestas al pensamiento aritmético. Existe también un serio problema en la forma que el pensamiento algebraico y el pensamiento aritmético han sido separados en el currículum escolar, especialmente en la

escuela primaria. Es necesario para la escuela del siglo 21 desarrolle aproximaciones de enseñanza que relacionen los tres procesos de la actividad matemática (expresar, transformar y leer). Alguna reforma del currículum de la escuela primaria y secundaria debería considerar el papel del álgebra como una herramienta para el pensamiento matemático relacionado a expresiones numéricas largas antes de que los niños sean introducidos a la notación simbólica formal.

## 2.12 *La noción de seriación en niños preescolares del Estado de Guerrero, Cruz (2006).*

Esta investigación es realizada con el propósito de explorar el estado en que se encuentra la noción de seriación en 18 niños de entre 5 y 7 años de educación preescolar de la ciudad de Chilpancingo, Gro. Para este propósito se apoyó del método clínico al realizar las actividades y observar el comportamiento de los niños durante las sesiones. Dichas sesiones se videograbaron y fueron de tres tipos: 1) Seriación con palillos, 2) Seriación con tablillas, 3) Seriación con prismas cuadrangulares y cilindros de base variable (los palillos, las tablillas, los prismas y los círculos eran proporcionalmente de tamaños diferentes).

Cada seriación se dividió en dos partes. La primera se le pedía al niño que realizara la seriación de los objetos colocados en desorden, para el caso de los palillos se le pedía “Tú vas hacer una bonita escalera con todos estos objetos, acomódalos del más chico al más grande”, posteriormente, se le pedía que lo hiciera del más grande al más pequeño. Esta actividad, se realizó de manera semejante con las tablillas, los prismas y los cilindros. La segunda parte (con pantalla), se le pidió al niño que proporcionará al entrevistador, los palillos colocados en desorden para hacer una escalera, en esta actividad el niño no podía observar como quedaba colocada la serie los palillos. De forma similar se realizó la actividad con los demás objetos que el niño iba a seriar.

De los resultados obtenidos, 5 niños pudieron elaborar la serie con éxito, así como la reversibilidad y la conservación de la cantidad; 10 niños solamente pudieron completar parcialmente la serie, no tenían desarrollada la reversibilidad ni la conservación; 3 niños no pudieron realizar parcialmente la serie (no más de tres elementos).

Es notorio que los niños utilizan diferentes procedimientos para realizar la seriación de los objetos. Algunos hacían una primera ordenación y después rellenaban los “huecos”, quizá haciendo comparaciones y relaciones de transitividad; otros manifestaban imposibilidad de usar la transitividad y empleaban mucho tiempo ensayando acomodos; hubo quien ni siquiera pudo acomodar los palillos en desorden. El procedimiento que siguieron los niños que pudieron realizar la actividad fue, observar los objetos (palillos, tablillas o prismas), posteriormente tomaban uno o dos y a partir de esto los iban comparando por parejas y ubicándolos en el lugar correspondiente hasta finalizar. Otra forma de construir lo que se pedía, era ordenar en forma ascendente hasta llegar a un palillo o tablilla grande y a partir de ésta elaborar otra descendente.

En este trabajo, aunque se aboca al estudio de la noción de seriación en niños pequeños, la idea de variable está implícita, puesto que en el momento en el cual el niño realiza la seriación de los objetos, sean palillos, tablillas, prismas o círculos, está en el fondo considerando la cualidad “tamaño” de los objetos como lo que está cambiando. El niño que es exitoso en la seriación de los objetos, debe considerar que hay diferencia en los tamaños de los objetos, tomar esta característica y realizar la ordenación de manera ascendente y descendente los objetos. Por consiguiente, la seriación juega un papel importante para establecer una relación de orden entre cualidades de los objetos, pero, para que esto ocurra, es necesario que el niño perciba lo que está cambiando.

### 2.13 *What are these things called variables*, Wagner (1983).

En este estudio se describen algunas reflexiones acerca de los problemas que tienen los estudiantes que inician el estudio del álgebra con símbolos literales o variables. El autor señala que los símbolos literales son fáciles de usar pero difíciles de entender, porque los símbolos literarios tienen características similares a los numerales y a las palabras, por lo cual los estudiantes pueden concebirlos erróneamente y pensar que se trata de una nueva notación. En particular, establece dos características de los símbolos literales, como números y como letras y las diferencias existentes, es decir, los símbolos literales pueden representar números y letras.

La letra como número, se pueden mencionar los casos de  $\pi$  y  $e$ , que no tienen una representación digital simple (Wagner, 1983, p. 471), de ahí que sea ésta la forma de representar el número. Por otro lado la forma en que se expresa una ecuación en donde la letra es considerada temporalmente (un número desconocido), al lado de un número con su respectivo signo, realizando una operación y que finalmente mediante algunas operaciones, esa letra temporal se transforma en el número real buscado que satisface ciertas condiciones.

Los símbolos literales como letras, para este caso se establecen dos situaciones, la letra que pertenece a un sistema alfabético para formar palabras para poder comunicarse en forma escrita y la letra que se usa convencionalmente en las matemáticas para designar un número específico o un conjunto indeterminado de valores con los cuales es posible operar.

Una diferencia que se le dificulta entender a los alumnos que se inician en la asignatura del álgebra es la relación entre los números y las letras, los números representan un valor único y las letras pueden representar simultáneamente diferentes números, a esto nos referimos cuando llamamos variables a los símbolos literarios, tal es el caso de “... $0 < n < 20$  ó  $y = 3x + 2$ , donde  $n$  puede tomar números mayores que 0, pero menores que 20; y el número de  $y$  dependerá del número que se le asigne a  $x$ , está propiedad de representación simultánea se refiere cuando los símbolos literales se llaman variables...” (Wagner, 1983, p. 471).

Otro ejemplo que se presenta en el contraste entre letras y números es la usada en la multiplicación de  $3mn$ , que representa el producto de (3) ( $m$ ) ( $n$ ) en esta expresión algebraica se mezclan letras y números, independientemente de la interpretación del valor posicional que da el número por sí solo, se involucran dos sistemas diferentes, por un lado el sistema decimal y el sistema alfabético por el otro, además de las operaciones algorítmicas implícitas.

Una característica que presentan los símbolos literales y que proporciona el lenguaje matemático es su flexibilidad y generalidad, “...los símbolos literales pueden ser usados para representar cualquier conjunto, un solo enunciado puede de una vez por todas definir un concepto o afirmar una relación” (Wagner, 1983, p. 477), como es el caso del enunciado “ $x$  es

un maestro matemático”, representa el conjunto de maestros, maestras e incluso computadoras dedicadas a la enseñanza de las matemáticas.

El autor sugiere a los profesores que introduzcan las ideas gradualmente de los diferentes usos de los símbolos literales, por ejemplo, en los primeros grados, cuando usamos  $P$  para nombrar un punto o  $N$  para representar un número, podemos decir que estas letras son como abreviaciones de las palabras. Más tarde, cuando usamos letras arbitrarias como etiquetas, podemos explicar a los alumnos que estas letras son como nombres para cosas. Cuando comenzamos a usar letras arbitrarias en contextos numéricos, deberemos mencionar que no hay conexión entre el orden alfabético y el orden numérico.

Entender esta característica de los símbolos literales como números y como letras, y estas letras pueden representar simultáneamente diferentes números, dando lugar a la noción de variable, no es nada fácil, esto es un proceso en donde algunos estudiantes que inician en el estudio del álgebra, si no tienen una sólida comprensión de estos significados, las deficiencias que muestren se trasladaran a estudios posteriores.

#### 2.14 Orientación de nuestra investigación

Los trabajos de investigación analizados sobre la variable son abordados desde diferentes puntos de vista. Kuchemann (1980) realiza un estudio cognitivo para determinar el significado que representa una letra para el estudiante. Kieran *et al* (1990) Ursini (1994) Trigueros *et al* (2000) en un contexto algebraico, analizan la interpretación del significado de los símbolos que le asocian los alumnos al transitar de la aritmética al álgebra. En este sentido, Rosnick (1981) y Wagner (1983) analizan las dificultades que se les presentan a los estudiantes cuando utilizan letras en expresiones algebraicas, el primero estudia la comprensión que implica el tránsito de un problema verbal al lenguaje algebraico al utilizar letras en las ecuaciones, y el segundo hace algunas reflexiones y sugerencias acerca de las dificultades de emplear símbolos literales. Schoenfeld & Arcavi (1988) realizan un estudio acerca del significado del término *variable* y sus implicaciones didácticas, encontrando que este término tiene diferentes significados.

Ursini (1996) y English & Warren (1998) realizan diseños de propuestas para trabajar la variable en el ámbito escolar con la ayuda de la programación Logo y la introducción de patrones de exploración, respectivamente. A su vez Fujii (2004) analiza la comprensión de los estudiantes de los símbolos literales a través del conflicto cognitivo e introduce el uso de números cuasi-variables como ayuda a los estudiantes de primaria durante la transición de la aritmética al álgebra. Juárez (2002) y Vicario (2002) realizaron estudios exploratorios acerca de la comprensión de la noción de variable en profesores y alumnos respectivamente, sus resultados muestran que tanto profesores de secundaria como alumnos de diferentes niveles, no tienen un buen manejo del concepto de variable y en los alumnos surgen concepciones que no son congruentes con las que se aceptan en las matemáticas. Por su parte, Carlson *et al* (2002) en su estudio, evidencia las dificultades que tienen los estudiantes en la modelación e interpretación de eventos dinámicos, mostrando en los estudiantes la carencia de un razonamiento covariacional, entendido éste, como *las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atienden a las formas en las que ellas cambian entre sí*. Esta definición es compartida en la presente investigación.

En las investigaciones revisadas, la noción de variable es estudiada en situación escolar atendiendo sus usos y concepciones, tomando como centro de atención el símbolo que la representa o bien el proceso de su construcción entre la aritmética y el álgebra. La letra o el símbolo es considerada por los escolares adolescentes como incógnita, como número generalizado o relación funcional. El trabajo de investigación que nos proponemos realizar, a diferencia de las investigaciones anteriores que parten del símbolo para realizar sus conjeturas, tiene como objetivo, estudiar los procesos de construcción de la noción de variable en niños pequeños cuando el símbolo aún no es parte importante del proceso. Esta es otra diferencia, ya que las investigaciones mencionadas se han realizado con niños de mayor edad.

Por otro lado, partimos del supuesto de que la noción de *variable* se construye en forma correlacional, es decir, se requiere de establecer relaciones primarias entre objetos o procesos cambiantes. La idea de variable no emerge como objeto en el sentido de la teoría APOE, sino que deriva de acciones y experiencias en donde hay que establecer relaciones y comparaciones

entre cosas cambiantes. La idea primigenia de cambio está íntimamente asociada a la de variable, que implica la realización de comparaciones, en donde el tiempo puede jugar un importante papel. Nos damos cuenta cómo se pasa de la mañana a la tarde, por la comparaciones que hacemos respecto de la posición del sol o por el aumento o disminución de la temperatura ambiental. Siempre hay necesidad de establecer un “antes” o un “después”. En la mañana el sol estaba en el oriente, en la tarde en el occidente. Posición y tiempo necesariamente correlacionados. Para que un objeto cambie o no cambie es necesario demandar un referente de comparación, si cambia es menester tener en cuenta con respecto a qué cambia, si no cambia también es necesario tener en cuenta respecto de qué no cambia. Partimos de la hipótesis de que la construcción de la noción de variable no es un objeto aislado, independiente, sino que la noción de variable a nuestro juicio emerge de la relación de al menos dos entidades, una de las cuales puede permanecer constante o incluso ambas pueden ser cambiantes. Por ejemplo en el movimiento de una persona cuando corre, podemos atender la distancia que recorre respecto de un punto, centramos la atención en la distancia cambiante respecto de una posición constante. Cuando centramos la atención en el aumento o variación del peso de las personas, podemos hacer varias mediciones del peso, pero éstas necesariamente deben referirse al tiempo. “Hace un mes A pesaba 58 Kg., hoy pesó 60 Kg” Hay dos entidades cambiantes necesariamente ligadas que dan cuenta del proceso, el peso y el tiempo. Ahora bien en el proceso de construcción de la noción de variable estas “variables” pueden no ser explícitas, más bien (eso suponemos) pueden ser influidas por la causalidad y la centración. “Un globo aumenta de tamaño por efecto del inflado”, “Un recipiente que se está llenando con agua, aumenta la altura del nivel agua por efecto del vaciado del agua”. En ambos casos, el aumento del volumen y el aumento del nivel del agua son causados por el inflado y vaciado respectivamente. Puede ser que eso interese a los niños pequeños, el fenómeno y lo que lo causa. Sin embargo en el inflado y en el llenado se puede centrar la atención solo en el aumento del volumen o en el aumento del nivel del agua. La centración es un proceso que conduce a la discriminación de los procesos: enfocar la atención en un uno o dos procesos desatendiendo los demás. Parece que la mente humana privilegia lo primero. En este trabajo pretendemos encontrar evidencias empíricas que nos permitan explicar esto.

# CAPÍTULO 3

## ELEMENTOS TEÓRICOS

En este trabajo estamos interesados en investigar los procesos de construcción de la noción de variable. En el capítulo anterior hemos analizado las investigaciones que han tocado este tema y hemos llegado a la conclusión de que la mayoría, han estudiado esta noción pero asociada al símbolo que la representa. Esta posición asume que la idea de variable es generada en condiciones digamos escolares y por tanto varias investigaciones centran su atención en el paso de la aritmética al álgebra. No es casual que en la educación básica se enfatice sobre la aritmética y el trabajo consiguiente con las operaciones básicas con números y formas estáticas trabajadas en la geometría euclidiana. En la secundaria se introduce el lenguaje algebraico, en la cual las literales pueden asumir el estatus de incógnitas y de “números generalizados”. Esta transición presupone que la introducción de las literales posibilitó la aparición de la idea de variable. Sin embargo, una idea de variable relacionada con la variación, aparece explícitamente en los últimos años de la secundaria y se usa formalmente en el bachillerato y la universidad. Nosotros no estamos buscando cómo vive o se construye la variable en tanto ente semiótico. Estamos interesados en investigar cómo se construye antes de que adquiera ese status. Por tanto, nuestra visión de esa construcción es analizada desde dos ángulos, desde una explicación epistemológica y desde una explicación cognitiva.

La posición epistemológica nos permitirá establecer cómo se genera y desarrolla la idea de variable, para ello asumiremos (y por tanto explicaremos) los tres estadios por los que atravesó la idea de variable en tanto símbolo. También revisaremos la relación entre el número y la variación de MORENO L. (1991) y la posición de Aleksandrov *et al* (1981) que explica la aparición de la matemática de las variables de la negación de la matemática de las constantes. La posición cognitiva nos permitirá asumir, desde la perspectiva constructivista, qué procesos del pensamiento, de la memoria o de la imaginación se ponen en juego en dicha construcción. En esta dirección asumimos que la construcción primaria de la noción de variable está

asociada a la centración, la causalidad y la seriación, conceptos que serán desarrollados en líneas posteriores.

### 3.1 La variable. Una visión de su origen y desarrollo.

#### 3.1.1 La noción de variable como símbolo.

El origen y desarrollo de la noción de variable como símbolo está asociado al desarrollo histórico del álgebra. Este desarrollo histórico del álgebra, como un sistema de símbolos ha pasado por tres etapas: la etapa retórica, la del álgebra sincopada y la del álgebra simbólica.

La etapa retórica antes de Diophantus (250 años después de nuestra era), se caracterizó por el uso de una descripción en lenguaje ordinario para resolver problemas de tipo particular y careció del uso de símbolos o signos especiales para representar incógnitas. Al respecto, Nesselmann (1842 citado en Puig & Rojano, 2004, p. 199) menciona que además de expresar los problemas con palabras, sus soluciones también eran verbalizados.

La etapa del álgebra sincopada (desde Diophantus hasta finales del siglo XVI), se introdujeron abreviaciones para cantidades desconocidas, la inquietud de los algebristas fue averiguar la identidad de la letra o letras, como opuesto para intentar expresar lo general.

La etapa del álgebra simbólica (finales del siglo XVI en adelante), iniciada por la introducción de símbolos literales por parte de Vieta en 1591, origina un cambio en las formas de expresar cantidades desconocidas y dadas (Aleksandrov *et al.*, 1981). Esto hace posible transformar las soluciones generales a expresiones y usar el álgebra como herramienta para demostrar reglas que gobiernan las relaciones numéricas. En este sentido, Puig & Rojano (2004) mencionan que lo fundamental en el desarrollo del álgebra, no es la mera existencia de letras para representar cantidades o de signos extraños a un lenguaje común para representar operaciones, sino el hecho de que uno puede operar con un sistema de signos sin tener que recurrir a traducirlo a un lenguaje común.

Por consiguiente, el desarrollo de un lenguaje simbólico especializado en años posteriores producto de la abstracción y formalización en el plano matemático, despojó de significado el lenguaje en la cual la actividad algebraica había sido previamente expresada. El álgebra retórica y sincopada fueron ligeramente fácil de seguir y comprender, pero el paso a un sistema simbólico eliminó los significados de los objetos individuales e incluso las operaciones que actúan sobre ellos, haciendo al álgebra semánticamente débil.

En el marco de las etapas por la que la atravesó la idea de variable, en el presente trabajo de investigación interesa la idea de variable como ente de naturaleza retórica, pues esta etapa se asocia, en nuestro caso, a la explicación de los niños con sus propias palabras de problemas de variación de dos objetos cambiantes, sin la utilización de símbolos especiales.

### 3.1.2 *En torno a las nociones de número y variación*, Moreno (1991).

La idea de cuantificar los objetos y medir las cosas cambiantes, ha sido objeto histórico de estudio, de ahí que el origen de la noción de variable este ligado al estudio del número, la magnitud y la fusión entre ambos. En este sentido, se considera pertinente analizar el proceso evolutivo por el que atraviesa la concepción de número y magnitud hasta llegar a un nuevo concepto de número dado por Stevin a finales del siglo XVI. Estos conceptos son primordiales para la concepción de la noción de variable.

a) El número. La concepción griega de número consideró las ideas de los principales exponentes de la matemática: Pitágoras y Aristóteles, en los que a su vez, se basó Euclides para realizar su reflexión sobre el número. La matemática griega se caracteriza por ser contemplativa del mundo real, por lo que el sujeto ve de manera exterior al objeto, como una realidad dada, sin un papel activo. Por ser realistas solo aceptaban algunas construcciones que eran independientes del sujeto. Por lo que a los inconmensurables no se les reconoció como proveedores de un nuevo principio, ya que se consideraban como un producto del hombre. Pero al verlos como indispensables se les reubicó con una perspectiva platónica, pero siempre como no atribuibles a la operatividad. La ontología era la clave de la significación de los objetos matemáticos, puesto que estaban anclados en un período intra-objetal. Se veía a los

objetos matemáticos bajo las formas de lo discreto y lo continuo, sin poderse modificar por el hombre, esto explica por qué el dominio del número (lo discreto) permanece separado del dominio geométrico (lo continuo).

b) La magnitud y el continuo. Aristóteles proporciona las bases para el continuo geométrico, como una abstracción del continuo físico. Las magnitudes son abstracciones, representadas geoméricamente, de las cosas medibles continuas. Los objetos físicos continuos devienen, mediante un proceso de abstracción, figuras geométricas continuas: magnitudes. Algunas de sus características en términos operativos son: la operación de subdivisión (idea importante que introduce Aristóteles) en la que entran las nociones de continuidad y divisibilidad. Lo continuo es definido como lo divisible en partes siempre divisibles, en su concepción lo continuo es divisible al infinito. La divisibilidad es empleada por Aristóteles, aunque no tiene conciencia de su carácter operatorio, para definir que lo continuo no puede estar hecho de indivisibles, algunos conceptos de continuidad son: tiempo, movimiento, peso, longitud, área y volumen.

c) El número y lo discreto. Los objetos matemáticos, eran para Aristóteles de dos tipos, continuos y discretos, en lo discreto se toma al número, que es concebido como una colección de unidades, motivo que daba para no incluir al uno como tal, con base en la expresión de que “la naturaleza de la colección es diferente a la naturaleza de los elementos que componen la colección”, que se conciben como unidades. Una idea abstracta de unidad, es: una unidad en un sentido absoluto, pues se le considera como indivisible, porque si no, se presentaría una unidad más primitiva. El número al concebirse como magnitud toma la característica de ser divisible, ya que lo podemos descomponer en unidades, en la concepción de Stevin “los números son continuos”.

d) Oresme y la latitud de las formas. Por el siglo XVI, con Oresme se introdujo la idea de cantidad en su trabajo la naturaleza del “cambio de una cualidad”, en la que estableció el empleo de figuras geométricas con el propósito de representar el comportamiento de una cualidad: de este modo logró poner al servicio del estudio de la variación algunos recursos de la geometría. La importancia del trabajo de Oresme radica, en la construcción de un modelo

geométrico que permita representar y operar mediante la teoría de las proporciones un fenómeno físico, dada una recta horizontal y su correspondiente medición perpendicular en cualquier punto de ella. Para el cual toma en cuenta las concepciones aristotélicas del continuo, mencionando: “Toda cosa medible, excepto los números pueden representarse mediante una cantidad continua. Por lo tanto para la medición de tales cosas, es necesario que podamos representar los puntos mediante las líneas y superficies... porque en estas entidades geométricas pueden hallarse tanto las mediciones como sus razones”.

Oresme se refiere a los puntos de una recta como “una ficción necesaria” para representar un lugar del cuerpo sobre el cual se hace una medición intencional, la cual puede presentarse con un segmento perpendicular al cuerpo allí donde se realiza la medición, la longitud de dicho segmento vendría siendo la latitud de la intensidad. A Oresme le interesa considerar simultáneamente todas las latitudes ya que “Toda cualidad lineal está representada mediante una superficie... la cantidad de esa superficie designa la intensidad de dicha cualidad”. Esto es parte sustancial para el camino hacia el estudio de la variación y en consecuencia de las cosas cambiantes (la variable), puesto que cada longitud de segmento perpendicular representa un estado de variación de la variable (cualidad según Oresme), la cantidad de la superficie total (intensidad de la cualidad o cualidad total según Oresme) vendría siendo el estado final del fenómeno físico.

Además el análisis que realiza Oresme de la naturaleza del “cambio de una cualidad”, le permite introducir los términos de “uniforme”, para una cualidad cuyas latitudes no cambian en el tiempo: son constantes, y “uniformemente diforme” para una cualidad cuya latitud es variable, pero cuya razón de cambio es constante, como la velocidad en un movimiento uniformemente acelerado, estos ejemplos sirvieron posteriormente a Galileo.

Oresme al traducir los problemas con el modelo geométrico, muestra que tal modelo incorpora sustancialmente a la variación, lo que diferenció a la matemática del siglo XVI de la matemática griega. Sus consideraciones sobre la variación como un elemento de análisis de una figura, no son suficientes para ubicar su estudio como inter-objetal pero sí da los

elementos para ubicar su trabajo en un momento de la transición de una fase a otra (de lo Intra-objetal a lo Inter-objetal).

e) De Oresme a Galileo. Oresme con su modelo geométrico posibilita el abandono de las formulaciones puramente retóricas de los problemas y con ello favorece la aparición de un lenguaje con rasgos simbólicos (aún incipientes) que conduce al álgebra de Vieta, esto es de particular importancia pues indica el inicio de la necesidad de operar con las cosas cambiantes. El modelo geométrico proporcionó las bases mediante las cuales en Galileo ya aparece la intencionalidad de cuantificar una variable, a partir de consideraciones físicas con su correspondiente representación gráfica, al demostrar que “la distancia es proporcional al cuadrado del tiempo” durante la caída libre de un cuerpo. En esta demostración entran en juego el análisis de las cosas cambiantes (variables) como el tiempo y la distancia, el tiempo como una variable (independiente) y la distancia como variable (dependiente), ésta variable es representada por un rectángulo, siendo su área la distancia total recorrida por el cuerpo. Es posible que esta forma de representar la variable distancia recorrida mediante el área, sea el germen de la desdimensionalización de las variables, lo cual constituye un paso necesario para la creación del lenguaje algebraico y la consecuente operatividad de las mismas.

Con la introducción de la variación se dota al modelo de Oresme del medio para hablar del movimiento en términos geométricos, esto es, constituye el lenguaje con el que Galileo nos habla del mundo físico. En correspondencia entre los hechos de la realidad física y lo que el modelo geométrico-cinemático predice, van surgiendo los criterios de justificación al tiempo que se descubren los resultados. Dicho modelo empieza a ganar autonomía y se hace independiente de la situación que originalmente fue estudiada y en consecuencia se operacionalizan las cosas cambiantes (variables). Tal es el caso cuando se pasa del estudio del movimiento naturalmente acelerado a la mecánica de Newton, en el marco del modelo geométrico-cinemático. La abstracción y las generalizaciones involucradas en el paso de una etapa (la galileana) a otra (la newtoniana) quedan vinculadas a través del lenguaje algebraico y la geometría analítica.

f) Un nuevo concepto de número. La matemática griega produjo un concepto de número como resultado de un proceso de abstracción aplicado a lo discreto. Al tener un carácter realista la matemática griega no permitió la participación del sujeto como creador de una teoría de la aritmética. A finales del siglo XVI, Simón Stevin dio un cambio con sus obras “La aritmética y la práctica de la aritmética y en la disme”, en la que presenta un nuevo concepto de número, en la que toma conciencia del papel activo del sujeto, su propósito era introducir una notación para los números, que permitiera una manipulación efectiva.

La palabra griega Arithmos se refiere a número de cosas, o sea al conteo de objetos. Platón decía que la palabra que se pronuncia de último al contar, nos da el Arithmos de la cosa involucrada, (Teeteto, 198): “veremos entonces el contar solo como el mirar por encima las cosas para ver qué tan grande es el número”. Al parecer el nuevo término de número da una ruptura con la noción griega, para Klein el Arithmos significa, en cada caso, un número definido de cosas definidas. Se refiere a las cosas en la medida en que están presentes en este número y no pueden, en principio, ser separadas de ellas. Stevin emprende una crítica fundamental del concepto tradicional de Arithmos apreciando el sistema digital y posicional de los árabes y sobre la base de este sistema.

Al identificar al número con su símbolo permite el desarrollo de un “nuevo” campo operatorio, al ser opuesto a la matemática griega, se pone al sujeto en papel activo para el desenvolvimiento de la matemática. La idea central del proceso de conceptualización de Stevin es: la parte es del mismo material que el todo; la unidad es una parte de una multitud de unidades; la unidad es del mismo material que la multitud de unidades (que es número). Para Stevin, el material de que están “hechos” los números, se caracterizan por la divisibilidad infinita, es decir, por la continuidad. Por lo que la categoría de estudio del número es la categoría de cantidad. Lo que se cerciora viendo que los números fraccionarios son partes de la unidad, o sea que surge una correspondencia entre los números y las magnitudes geométricas. En su conceptualización Stevin, une a la aritmética y la geometría, separadas con Euclides. Con esto Stevin dice: “las semejanzas entre magnitud y número son tantas y universales que casi parecen idénticas.” Entonces magnitud y número pertenecen a la categoría de cantidad, pero magnitud es la abstracción representada geoméricamente de cosas

medibles continuas, dicha representación de la magnitud es un número, la representación de esa magnitud en número es una cantidad.

Esta nueva concepción de Stevin de número, proporciona elementos para el estudio de la continuidad en los años subsecuentes, pues la divisibilidad infinita toma relevancia en la cuantificación de los procesos de variación hacia lo infinitamente pequeño.

### 3.1.3 ALEKSANDROV *ET AL* (1981)

El análisis que se realiza de la variable toma consideraciones desde un punto de vista histórico. En el siglo XVI el problema de la física fue el estudio del movimiento, esto fue producto de las necesidades de la vida diaria y el desarrollo del conjunto de la ciencia de esa época. Con el estudio del movimiento, aparece la interdependencia de magnitudes variables como reflejo de las propiedades generales del concepto de cambio. De este modo, surgen en la matemática de esos tiempos el concepto de magnitud variable y función, siendo éstos el objeto de la matemática lo que determinó la nueva etapa: la matemática de las magnitudes variables. Así, Galileo en la ley de la caída libre de los cuerpos, relaciona las variables distancia y tiempo, estableciendo que la distancia recorrida en la caída crece proporcionalmente al cuadrado del tiempo. En este sentido, el concepto de variable es introducido en la matemática como una magnitud variable, la cual evidencia su carácter geométrico y continuo.

Se describe a la variable como una imagen abstracta de una magnitud que varía, lo que supone distintos valores durante el proceso que se considera. En la matemática una variable  $x$  es “algo” o más exactamente “cualquier cosa” que puede tomar distintos valores numéricos. Este es el sentido general de variable, particularmente se puede entender como variable el tiempo, la distancia o cualquier otra magnitud variable. Íntimamente ligada al concepto de variable está el concepto de función, puesto que una función es la imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra. Es probable que las magnitudes variables (variable) y sus relaciones de dependencia (función) hayan sido descubiertas de manera paralela al estudiar los fenómenos de movimiento, pues se percibe lo que está cambiando (variable) respecto de qué está cambiando (otra variable). En este sentido, el proceso de abstracción que se origina al

establecer relaciones de dependencia entre las magnitudes variables, se manifiesta en su representación geométrica y con esto en la operatividad de dichas magnitudes, este es un elemento importante en la transición de la variable concreta a la variable como símbolo.

Hacia el siglo XVII, el primer paso definido hacia la matemática de las magnitudes variables fue la aparición, en 1637, de la Geometría de Descartes. Las ideas básicas de Descartes eran las siguientes:

Considerar, por ejemplo en la expresión:  $x^2 + y^2 = a^2$ , que la  $x$  y la  $y$  no son incógnitas a obtener, como se consideraban en el álgebra (la ecuación no permite determinarlas), sino tomarlas como variables, de este modo la ecuación expresa la interdependencia de dos variables. Se considera al plano, que ahora llamamos cartesiano e introduce las coordenadas  $x$ ,  $y$ , que actualmente se llaman cartesianas para representar a esas variables, por lo que a cada par de valores  $x$  e  $y$  corresponde un punto y recíprocamente. Esto es de suma importancia, pues está implicada la idea de variable, mediante puntos  $(x, y)$  con valores diferentes que se mueven en el plano. De modo que el lugar geométrico es el conjunto de puntos que describen las variables, la expresión anterior determina la circunferencia de radio  $a$  y centro el origen. El hecho de considerar a  $x$  e  $y$  no como incógnitas, sino como magnitudes variables desde el punto de vista geométrico, Descartes aporta fundamento a la idea de variable. Sobre esta base se creó la Geometría Analítica de la unión de la Geometría, el álgebra y la idea de magnitud variable.

El siguiente paso decisivo en la matemática de las magnitudes variables fue dado por Newton y Leibnitz durante la segunda mitad del siglo XVII, al sentar las bases del Cálculo Diferencial e Integral. La noción de variable continua que decrece sin límite es manifiesta en la concepción de infinitesimal (lo infinitamente pequeño) en el desarrollo del Cálculo. Originando el verdadero comienzo del Análisis, puesto que el objeto de este cálculo son las propiedades de las funciones mismas, distinto del objeto de la Geometría Analítica que son la figuras geométricas. Posteriormente en el siglo XIX, la noción de variable evoluciona en la concepción de intervalo. Los intervalos son concebidos no como constituidos de puntos o indivisibles, sino como una extensión, como un medio continuo en el que sólo era posible aislar puntos distintos o separar los diferentes valores de una magnitud continua, con esto se

funda la teoría rigurosa de los límites. Pero el desarrollo del Análisis necesitaba una mayor precisión de la definición de número real como valor posible de una magnitud variable. Con el surgimiento de la teoría de los números reales las magnitudes variables adquieren formalidad y se involucran en esta teoría, pues definen la noción de intervalo como un conjunto de puntos, y el rango de variación de una variable, como un conjunto de números reales.

### 3.2 La construcción del conocimiento

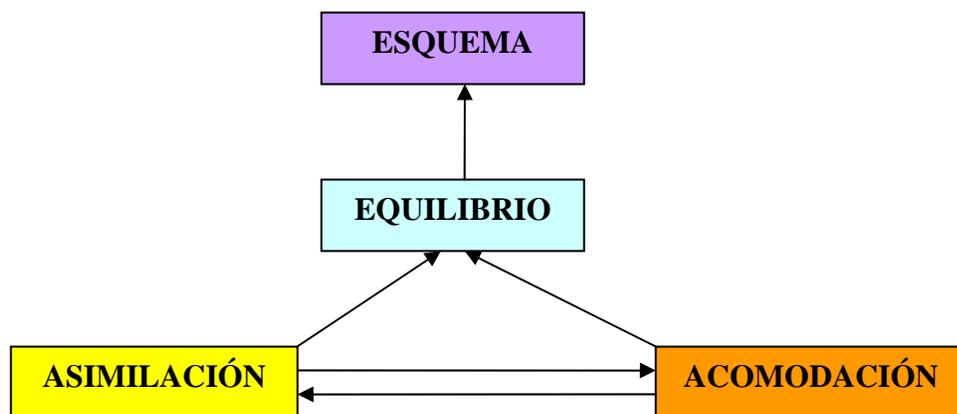
En el plano cognitivo, identificar los procesos que entran en juego en la construcción del conocimiento ha sido de gran interés, y en el ámbito educativo toma relevancia, pues la construcción de saberes es una tarea fundamental. En particular, identificar los procesos que involucran la construcción de la noción de variable en niños pequeños es parte esencial de nuestro trabajo de investigación. Para ello, presentamos a continuación un acercamiento de cómo se concibe la construcción del conocimiento desde la perspectiva constructivista y cómo se concibe la construcción de la noción de variable bajo la teoría APOE.

La perspectiva constructivista se fundamenta en la teoría genética desarrollada por Jean Piaget. Se basa en que el desarrollo y aprendizaje pasan por diferentes etapas o estadios de evolución de acuerdo al grado de maduración que el individuo se encuentre. Esta teoría explica cómo el individuo construye su conocimiento. Para esto establece el esquema como una unidad indisoluble de la acción del sujeto y del objeto, que es a la vez funcional pues hace posibles sus intercambios gracias a los mecanismos de asimilación y acomodación (Coll, 1996 citado en Castorina, *et al.*, 1998).

Cuando se habla de esquema se refiere a los "... esquemas de acciones [esto es] a lo que, en una acción, se puede trasladar, generalizar o diferenciar de una situación a la siguiente; dicho de otra forma, a lo que tienen en común diversas repeticiones o aplicaciones de la misma acción" (Piaget, 1967 citado por Coll, 1996 en Castorina, *et al.*, 1998, p. 23). Los esquemas representan las acciones interiorizadas de los individuos al interactuar con los objetos, estas acciones pueden ser trasladadas a situaciones similares o nuevas produciendo nuevos esquemas. Este proceso de construcción de nuevos esquemas se establece mediante la

interacción del sujeto con el objeto a través de los mecanismos de asimilación y acomodación como se dijo anteriormente.

Por lo que “toda asimilación consiste en relacionar los datos actuales con los elementos anteriores para modificar el objeto en función de la acción y del punto de vista propio...” (Piaget, 1987, p. 377). La acomodación tiene la característica de modificar las estructuras internas del individuo, en función de la asimilación efectuada para alcanzar un equilibrio, “el equilibrio entre la asimilación y acomodación se define por la conservación más o menos durable de secuencias exteriores, siempre que las secuencias conservadas sean complejas y extensas y, entre más lo sean más estable será el equilibrio del esquema que los engloba” (Piaget, 1987, p. 375).



*Esquema de la apropiación del conocimiento.*

La perspectiva constructivista centra su atención en la dinámica interna del proceso de construcción del conocimiento que el individuo experimenta, es decir los procesos cognitivos que entran en juego en las interacciones del sujeto y del objeto “...el conocimiento parte no del sujeto ni del objeto, sino de la interacción entre los dos...” (Piaget, 1976, p. 256).

Este proceso de construcción del conocimiento se lleva a cabo cuando el sujeto trata de explicar las condiciones invariantes del objeto, en el que intervienen en unidad indivisible la

asimilación y la acomodación antes mencionadas y lograr en el individuo una interiorización de esa explicación, que lo lleve a un estado de equilibrio para la formación de esquemas. Desde esta perspectiva la construcción del conocimiento se concibe como un proceso individual. Esta perspectiva proporcionará elementos que nos permitan mediante un estudio de casos investigar cómo los niños construyen la noción de variable.

### 3.2.1 La construcción de conceptos matemáticos. La teoría APOE.

Una teoría que surge de la perspectiva constructivista es la teoría APOE. Esta teoría nos proporcionará fundamentos para identificar los componentes que entran en juego en la construcción de un concepto, y de esta teoría explicar qué procesos se llevan a cabo en la construcción de la noción de variable. Para ello, primeramente, explicaremos en qué consiste esta teoría.

La teoría APOE fue creada por Ed Dubinsky y su grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Esta teoría surge de estudios de los niveles de comprensión de los estudiantes de nivel universitario sobre el concepto de composición de funciones, y de entrevistas sobre la capacidad de comprensión de conceptos como los de inducción y cuantificación, sobre sus habilidades para emplear dichas ideas matemáticas a fin de hacer las demostraciones y resaltar el significado de las oraciones matemáticas complejas (Dubinsky, 2000).

En esta teoría la influencia del estructuralismo y la abstracción reflexiva de Piaget toman relevancia en las investigaciones que Dubinsky realiza en la construcción de conceptos matemáticos, para ello "...propone un modelo de cognición: es decir una descripción de construcciones mentales específicas que un aprendiz puede hacer a fin de desarrollar su comprensión del concepto" (Dubinsky et al., 2004, p. 7). A esta teoría le da el nombre de APOS (actions, processes, objects y schemes por sus siglas en inglés).

Según Dubinsky (2000) la teoría APOE trata de describir el desarrollo, en la mente del alumno, la comprensión de un concepto matemático. El desarrollo para él es una progresión de

construcciones mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas de manera dialéctica, para ello se vale de la abstracción reflexiva y de la descomposición genética como mecanismos para hacer dichas construcciones.

“La abstracción reflexiva conlleva dos momentos indisociables: un proceso de reflexión en el sentido de una proyección en un nivel superior de lo extraído del nivel precedente y un producto de la reflexión en el sentido de una reconstrucción o reorganización cognitiva (más o menos consciente o no) de lo que de este modo ha sido transferido” (Piaget, 2000, p. 40). Sobre la abstracción reflexiva, Dubinsky comenta “mi objetivo en estos artículos no sólo era resumir los resultados, sino describir mi reformulación del mecanismo de la abstracción reflexiva de Piaget, para aplicarla a los fenómenos en las matemáticas más avanzadas que las que Piaget había estudiado” (Dubinsky, 2000, p. 60). Al respecto, Meel (2003) menciona que la abstracción reflexiva toma un papel importante en la teoría APOE, pues separa las propiedades conectadas e identifica los elementos salientes que comprenden el concepto en forma separada del contexto, además extiende la construcción de conexiones entre los conceptos abstraídos y constituye una estructura fuera de las abstracciones relacionadas. Esto se relaciona con los procesos de reflexión y el producto de reflexión antes mencionados en el que Dubinsky denomina interiorización y encapsulación respectivamente (Dubinsky, 2000, p. 59).

Por otro lado “una descomposición genética de un concepto es un conjunto estructurado de construcciones mentales las cuales pueden describir cómo el concepto puede desarrollarse en la mente de un individuo” (Dubinsky et al., 2004, p. 7).

En la teoría APOE la comprensión de un concepto “... comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente contruidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas” (Asiala et al., 1996 p. 8, Citado por Meel, 2003, p. 243).

Para tener una idea más clara acerca de lo que son las acciones, procesos, objetos y esquemas, Ed Dubinsky et al., (2004) nos dice lo siguiente:

Una *acción* es una transformación de objetos la cual es percibida por el individuo como siendo por lo menos un tanto externa. Es decir, un individuo cuya comprensión de una transformación está limitada a una concepción de acción puede llevar a cabo la transformación solamente por reacción a entradas externas que dan detalles precisos sobre qué pasos hacer. Por ejemplo, un estudiante que es incapaz de interpretar una situación como una función a menos que tengan una (única) fórmula para calcular valores, está limitado a una acción del concepto de función. En tal caso, el estudiante es incapaz de hacer más con esta función, excepto evaluarla en puntos específicos y manipular la fórmula.

Cuando una acción es repetida y el individuo reflexiona sobre esta acción, ésta puede ser interiorizada en un *proceso*. Es decir, una construcción interna es hecha cuando efectúa la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar, describir o incluso invertir los pasos de la transformación sin que en realidad se realicen esos pasos. En contraste a una acción, un proceso es percibido por el individuo como interno y bajo control de uno, en lugar de como algo que uno hace en respuesta a entradas externas. En el caso de las funciones, una concepción de proceso permite al sujeto pensar en una función como receptor de uno o más entradas, o valores de las variables independientes, realizando una o más operaciones sobre las entradas y devolviendo los resultados como producciones o valores de las variables dependientes. Con una concepción de proceso de función, un individuo puede relacionar dos o más procesos para construir una composición, o invertir el proceso para obtener funciones inversas.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, se vuelve conciente del proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones (si son acciones o procesos) pueden actuar, y es capaz de construir tales transformaciones, entonces el individuo está pensando este proceso como un *objeto*. En este caso, diremos que el proceso ha sido encapsulado a un objeto. En el curso de la realización de una acción o proceso en un objeto, es con frecuencia necesario desencapsular el objeto de regreso al proceso del cual vino a fin de usar sus propiedades en la manipulación. Es fácil ver cómo la encapsulación de procesos a objetos y la desencapsulación de los objetos a procesos surgen cuando uno está pensando acerca de manipulaciones de funciones tales como suma, multiplicación, o solamente formando conjuntos de funciones.

Una vez contruidos los objetos y procesos pueden ser interconectados en varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados para conectarlos (por composición o en otras formas); los procesos y los objetos están relacionados en virtud del hecho que el primero actúa sobre el segundo. Una colección de procesos y objetos pueden ser organizados en una estructura para formar un *esquema*.

Los esquemas pueden ser tratados como objetos e incluidos en la organización de los esquemas de “nivel superior”. Cuando esto sucede, decimos que el esquema ha sido tematizado a un objeto. El esquema puede entonces ser incluido en el nivel superior de esquemas de estructuras matemáticas. Por ejemplo, las funciones pueden ser formadas en conjuntos, las operaciones sobre estos conjuntos pueden ser introducidas, y las propiedades de las operaciones pueden ser verificadas. Todo esto puede ser organizado al construir un esquema para la función, la cual puede ser aplicado a conceptos tales como espacios duales, espacios de mapeo lineal y al álgebra de funciones (Dubinsky et al., 2004, p. 10-12).

Como se mencionó las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas en esta teoría están relacionados dialécticamente, esto es que los objetos pueden volver a ser procesos y viceversa, por lo que la comprensión de conceptos matemáticos vienen siendo construcciones sucesivas. Ahora bien, en la construcción de conceptos matemáticos mediante las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) se presenta una dualidad entre proceso y objeto, por ejemplo, si tenemos construido como objeto el concepto de número, podemos aplicarle operaciones como suma, resta, multiplicación, etc., esto modificaría al objeto número y lo transformaría a otro nivel superior donde el objeto número deja de ser (se desencapsula) pasando a ser proceso al manipularlo y aplicarle ciertas operaciones, este es el papel de la dualidad entre proceso y objeto. En este sentido Sfard (1991) se refiere cuando menciona que una concepción operacional es dinámica (proceso) y que una concepción estructural es estática (objeto).

En este sentido, Cantoral *et al.*, (2000) nos hace el siguiente comentario acerca de proceso y objeto:

“...la mayoría de las nociones matemáticas desempeñan un papel dual: el de proceso y el de objeto en función de la situación y de la conceptualización que el alumno tenga...se debe iniciar con el desarrollo de un *proceso* en términos concretos, y en la medida en que el alumno se familiariza con los procesos, éstos toman la forma de una serie de operaciones que pueden ser desarrolladas y coordinadas en su pensamiento. El alumno habrá adquirido un pensamiento operacional con respecto a ese concepto. En una etapa posterior, la imagen mental de este proceso cristaliza en una nueva y única entidad, digamos que en un nuevo *objeto*. Una vez que éste ha sido adquirido, el estudiante ha desarrollado cierta habilidad para pensar dicha noción, ya sea en el nivel dinámico, como proceso, o en el nivel estático como objeto”

Una noción matemática como es la variable de acuerdo a la teoría APOE puede tomar la dualidad ya mencionada, esto es, como objeto y como proceso, según sea la situación y la concepción que el sujeto tenga de la variable. Como objeto (que la noción ya esté encapsulada) a la variable se le pueden aplicar operaciones para su transformación, pasando a una etapa superior por ejemplo, una función y como proceso será necesario construir esta noción mediante acciones físicas o mentales, estableciendo relaciones de correspondencia entre cosas que cambian. En nuestro trabajo de investigación, no estamos interesados en la noción de variable como objeto (símbolo), sino como proceso, de acuerdo con esta teoría, esto es, determinar las acciones físicas o mentales que realizan los niños pequeños para reflexionar y describir la noción de variable. Las acciones físicas o mentales que realicen los niños, surgirán de las situaciones experimentales de fenómenos covariacionales que se les presenten, en la cual los niños traten de percibir y explicar lo sucedido para posteriormente, identificar los procesos que se involucran en la construcción de la noción de variable.

### 3.3 La centración y la causalidad.

La centración y la causalidad juegan un papel importante para el individuo en la percepción de las cosas y los fenómenos que nos rodean. Una característica del individuo es percibir el mundo que le rodea por medio de los sentidos. En la infancia los sentidos juegan un papel importante en el conocimiento de las cosas que nos rodean, pues es por medio de ellos que podemos en un primer momento acercarnos a la realidad. Por medio de ellos sentimos el calor del sol, saboreamos una fruta, olemos el humo, miramos el vuelo de un pájaro, etc., el primer acercamiento que tenemos con la realidad que nos rodea es a través de los sentidos. Ahora bien, no todo lo que nos rodea puede ser percibido por el individuo, existen cosas que no percibe o simplemente no le llaman la atención.

La atención según Rubinstein (1977), se manifiesta dentro del marco de la percepción y del pensamiento. La atención es una faceta de todos los procesos cognoscitivos de la conciencia, y precisamente aquella faceta en que dichos procesos aparecen como una actividad orientada hacia el objeto. Fenomenológicamente, se caracteriza a la atención casi siempre como una orientación seleccionadora de la conciencia hacia una determinada cosa, la cual deviene

consciente con especial claridad y precisión (Rubinstein, 1977, p. 491). Por lo que la existencia de la atención significa ante todo, la modificación de la estructura del proceso, el paso del ver al mirar, al contemplar, de la percepción a la observación, del proceso a la actividad orientada (Rubinstein, 1977, p. 492). Esto hace que el sujeto del total de variables posibles en un evento, centra la atención en algo. Al respecto Piaget & Inhelder (1981) en sus trabajos de investigación con niños pequeños mencionan, que es posible reducir todas las ilusiones primarias a efectos de centración, consistiendo ello en que los elementos centrados por la mirada sean sobreestimados y que los elementos situados en la periferia del campo visual sean subestimados. Así, un niño centra su atención en el barco que se hunde y no en el que flota a pesar de tener igual tamaño o al mencionar en dos colecciones de objetos, que tiene más, el que ocupa mayor espacio (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1975, p. 329). Así pues, centrar la atención en algún objeto o evento, es parte importante para la búsqueda de las explicaciones de lo que sucede en nuestro alrededor.

En esta búsqueda, los niños pequeños plantean preguntas de los “por qué” para entender las causas de las cosas que les llaman la atención, Piaget & Inhelder (1981) señalan:

“...los “por qué” atestiguan una precausalidad intermedia entre la causa eficiente y la causa final: y tienden, sobre todo, a encontrar una razón, desde esos dos puntos de vista, para los fenómenos que para nosotros son fortuitos, pero que para el niño provocan entonces mucho más necesidad de una explicación finalista. ¿Por qué hay dos coches, uno grande y otro pequeño?, pregunta, p. ej., un chico de seis años. A lo cual casi todos sus coetáneos, interrogados sobre el particular, contestaron: Es que se necesita uno para los grandes paseos y otro para los pequeños” (Piaget & Inhelder, 1981, p. 111).

En los “por qué” el niño establece una relación de causalidad. Acerca de la causalidad García (1991) menciona:

“...la causalidad es algo que parte de los fenómenos que ocurren cuando el niño entra en contacto con los objetos... La causalidad es algo que le ocupa al niño largo tiempo antes de que éste pueda desligarla de la actividad del propio yo; en otras palabras, antes de ser capaz de explicar las cosas a partir de los resultados de la experiencia y no a partir de una perspectiva egocéntrica. Desde el momento en que el niño comienza a manipular los objetos, también empieza a construir millares de relaciones causales entre los datos de su campo de acción. La causalidad es una consecuencia de la acción. La causalidad no es otra cosa que una explicación de los hechos encontrados a partir de la acción...la causalidad es una forma de organización intelectual, que resulta de filtrar las

consecuencias efectivas de todas las manipulaciones que hace el niño sobre los objetos. La causalidad es la semilla del desarrollo de la inteligencia. Explicar es resolver contradicciones, es encontrar causas. El encontrar la causa, es alcanzar la equilibración” (García, 1991, p. 32).

La explicación causal, es a su vez, susceptible de grados de aproximaciones sucesivas, una vez que se pone de manifiesto la transformación que explica el pasaje de *A* a *B*, se presenta la cuestión de saber por qué es así, y a un nuevo progreso del “cómo”, se sucederá un nuevo “por qué”, etc. (Piaget & García, 1996, p. 27). Así lo demuestra en sus experimentos Piaget y sus colaboradores, en el tránsito por los diferentes estadios que realizan los niños. Tal es el caso de uno de sus experimentos de Piaget & Inhelder (1981) con niños pequeños, para que explicaran, acerca de lo que pasa después de la disolución de un terrón de azúcar. Las explicaciones que manifiestan los niños en los distintos estadios, es que el azúcar desaparece (se disuelve y ya no se ve); los pequeños granos de azúcar se conservan en la sustancia, sin peso ni volumen; en otro estadio se agrega el peso y el último estadio el niño toma en cuenta el volumen (Piaget & Inhelder, 1981, p. 114). Estas explicaciones a nuestro juicio, provienen de las experiencias del niño, del grado de desarrollo mental y las actividades operatorias que pueda realizar con los objetos.

En nuestros experimentos, la centración y la explicación causal jugarán un papel importante, ya que los experimentos están diseñados para que los niños centren la atención en dos objetos cambiantes (variables) y de esta centración versará la explicación causal que los niños realicen de los sucesos. En este sentido, presumimos que la construcción de la noción de variable no se realiza de manera aislada, sino que para construirla es necesario relacionar al menos dos objetos cambiantes. Los objetos cambiantes que serán relacionados en los experimentos son: volumen de un líquido respecto a tiempo y alargamiento de un resorte respecto al peso, realizando algunas variantes como la ordenación de los objetos redondos. La idea es que a los niños se les presente una situación experimental y de sus percepciones encuentren una explicación a partir de las acciones de manipulación de los objetos cambiantes, es decir la causa que origine el cambio. La explicación verbal por parte de los niños de sus percepciones en el experimento será gran utilidad, pues suponemos que es ahí donde podrá identificarse si los niños perciben cambios y cómo éstos se manifiestan.

### 3.4 La seriación.

Según Nemirovsky & Carvajal (1994), la seriación es una operación del pensamiento lógico que está involucrada en el concepto de número. La seriación constituye uno de los aspectos fundamentales del pensamiento lógico. “Seriar es establecer relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenar esas diferencias” (Nemirovsky & Carvajal, 1994, p. 15). Dichos aspectos hacen referencia a la acción de agrupar los objetos por sus características cualitativas como pueden ser: la forma, el tamaño, el color, etc. y realizar relaciones crecientes o decrecientes entre los objetos. De acuerdo con las autoras, la seriación tiene dos propiedades: la transitividad y la reciprocidad (reversibilidad).

La transitividad se da al establecer una relación entre un elemento de una serie y el siguiente y de éste con el posterior, podemos deducir cuál es la relación que hay entre el primero y el último. Por ejemplo, si se ordenan vehículos con base en la diferencia en la fecha de producción, si A es más antiguo que B y B más antiguo que C, necesariamente A es más antiguo que C.

La reciprocidad (reversibilidad) se da cuando se tiene una serie y cada elemento tiene una relación tal con el elemento inmediato de manera que al invertir el orden de la comparación, dicha relación también se invierte. En el ejemplo anterior, si comparamos B con C la relación es B más antiguo que C y si comparamos C con B la relación se invierte, es decir C es menos antiguo que B.

Nemirovsky & Carvajal (1994) mencionan que el proceso de construcción de la seriación en niños pequeños atraviesa por tres estadios:

Primer estadio (Hasta los 5-6 años aproximadamente).

El niño de este estadio al pedirle que haga la seriación de los palillos (19 palillos que varían de longitud medio centímetro entre cada uno) del más largo al más corto, la realiza de manera incompleta, estableciendo en principio parejas donde cada elemento es perceptivamente muy

diferente al otro. El niño considera los elementos en términos absolutos “grande” y “chico”, en otro momento hace tríos “grande”, “mediano” y “chico”; más adelante el niño realiza seriaciones de cuatro o cinco elementos buscando formar escaleritas en forma creciente o decreciente, designando a los elementos como “grande”, “mediano”, “más mediano”, “chico”, “chiquito”, etc.

Segundo estadio (Desde los 5-6 años hasta los 7-8 años aproximadamente).

El niño de este estadio puede construir la serie de diez palillos por tanteo, es decir toma un palillo primero al azar, luego otro que compara con el primero, después un tercero que compara con los dos anteriores para decidir dónde colocarlo y así sucesivamente. El niño aún no ha construido la transitividad, no puede deducir que si un elemento es más grande o más pequeño que el último también lo es respecto a todos los anteriores y tiene que recurrir a la comprobación efectiva. El niño de este estadio no ha construido la reciprocidad, puede constatar que si un elemento A es mayor que B, éste es menor que A, pero aún no puede deducir la inversión de la relación. El niño relaciona cada elemento con el anterior y con el elemento posterior de la serie, pero lo hace en forma sucesiva puesto que no puede considerar que un elemento sea más grande que otro y que al mismo tiempo es más pequeño que otro elemento.

Tercer estadio (Desde los 7-8 años aproximadamente).

El niño de este estadio ha construido la transitividad y la reciprocidad. Si hace una serie creciente toma del conjunto de palillos, el palillo más pequeño, luego el más pequeño de los que quedan y así sucesivamente, en caso de una serie decreciente el proceso es inverso. El niño de este estadio puede establecer que si  $A > B$  y  $B > C$ , puede deducir que  $A > C$  y las relaciones inversas que de éstas se derivan.

La importancia que tiene la seriación en nuestro trabajo de investigación radica, en que para percibir las cosas que cambian en los fenómenos de variación, es indispensable establecer estadios en el tiempo, esto es, relaciones de orden entre las cosas cambiantes,  $E_1, E_2, \dots, E_f$

para determinar lo que sucedió primero, después y al final. Determinar estados de variación es parte importante para la apropiación de las cosas cambiantes (noción de variable).

# CAPÍTULO 4

## ELEMENTOS METODOLÓGICOS

### 4.1. Características metodológicas de la investigación.

Nuestro trabajo de investigación se apoya en el método clínico para el estudio de casos particulares. El método clínico tiene como objetivo conocer el pensamiento de la persona o personas a la que se le aplica. Este método consiste en un sistema de preguntas flexibles no estructuradas, que se van adaptando a las respuestas del individuo, de acuerdo a la actividad o experimento que se esté desarrollando. Se trata de que el sujeto tenga la oportunidad de expresar todo lo que quiera, es decir que no se limite, de esta manera se pretende conocer más a fondo la forma en que efectúa los procesos de razonamiento ante cierta actividad (Pulasky, 1985).

El método clínico llamado también método de exploración crítica, tiene dos rasgos principales. El primero, en la medida en que el método se destina a despejar un campo nuevo, sus procedimientos se dejan orientar por las conductas originales imprevistas y, a menudo, imprevisibles del pensamiento infantil. El segundo rasgo consiste en que el experimentador hace sin cesar hipótesis sobre los diversos significados cognoscitivos de las conductas observadas y las comprueba en la realidad, analiza los procesos de pensamiento (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1975). En este sentido, se menciona que el “análisis se puede hacer conjuntamente, por medio de las variaciones de las situaciones experimentales, como por medio de diálogos entre el niño y el experimentador, haciendo hincapié en los aspectos críticos y reveladores del problema planteado” (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1975, p. 40).

Además, al explorar los razonamientos de los niños, se entabla una conversación en el curso de la cual se esfuerza por seguir los meandros del pensamiento infantil (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1975, p. 41).

Sobre esta base metodológica se diseñaron las situaciones experimentales. Estas nos permitieron observar conductas, expresiones y razonamientos de los niños acerca de la

construcción de la noción de variable, de ahí obtuvimos elementos que nos permitieron ponderar nuestra hipótesis principal. En nuestro caso, la hipótesis que nos hemos planteado es que la noción de variable no se construye de manera independiente, sino que para construirla es necesario relacionar al menos dos entes cambiantes y en donde uno de ellos puede ser el tiempo. Para ello, las cinco situaciones experimentales en las cuales participarán niños pequeños fueron diseñadas considerando fenómenos de variación con dos objetos cambiantes, tales como el descenso de un líquido respecto al tiempo, volumen constante de un líquido respecto al tiempo y ascenso de la altura de un líquido respecto al tiempo, alargamiento de un resorte en relación al peso de un objeto y la ordenación de objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes. En los experimentos de ascenso, volumen constante y descenso de la altura de un líquido, la variable tiempo es considerada y las situaciones experimentales restantes no. La finalidad de no considerar el tiempo, juega un papel importante, pues queremos observar las percepciones y el comportamiento de los niños en las situaciones donde el tiempo no es considerado.

Las situaciones experimentales con dos entes cambiantes tienen como objetivo, observar las percepciones de los niños pequeños de entre 4 y 8 años, pues a esta edad (así lo suponemos) es incipiente la noción de variable. En la puesta en escena de estas situaciones experimentales, utilizaremos el método clínico, ya mencionado, a través de diálogos, haciendo cuestionamientos a los niños por parte del entrevistador, acerca de lo que sucede en los experimentos, los dibujos que realizarán del suceso y las explicaciones con sus propias palabras de lo acontecido. El procedimiento a manera general (más adelante se hará con más detalle) utilizado en las cinco situaciones experimentales es:

1. Se les pide que observen la situación experimental de cambio.
2. Que dibuje lo sucedido después presentar la situación experimental donde intencionalmente se hacen cambiar: volúmenes de agua, pesos, elongaciones de resortes y hasta colores de objetos. O bien se conservan constantes: volumen, tamaño de objetos redondos.
3. Se pregunta a los participantes acerca de lo que cambia y se les plantean actividades de seriación.
4. Finalmente se les pide que expliquen o justifiquen lo sucedido.

La valoración de las situaciones experimentales, se hará del análisis de las respuestas obtenidas en la puesta en escena, esto nos permitirá identificar qué elementos de los procesos de razonamiento intervienen en la construcción de la noción de variable en niños pequeños.

#### 4.2 Participantes.

En la situación experimental 1 se entrevistaron seis niños. En la situación experimental 2 participaron 5 niños. La situación experimental 3 se entrevistaron a dos niños. En la situación experimental 4 fueron 2 niños los que participaron. La situación experimental 5 se realizó con 4 niños. En total fueron entrevistados 19 niños de entre 4 y 8 años en las cinco situaciones experimentales. La finalidad de considerar estas edades es de explorar la idea de variable, qué está sucediendo con la noción de variable en niños pequeños. Cuatro niños fueron invitados nuevamente a ser entrevistados en diferentes situaciones experimentales. Las situaciones experimentales 2 y 5 las entrevistas se efectuaron en sus respectivas escuelas de preescolar.

#### 4.3 Procedimientos e instrumentos utilizados.

##### 1. *Primera situación.* Descenso de un líquido

**Objetivo.** Analizar el fenómeno descenso de la altura de un líquido. Las variables a observar son el descenso del nivel del agua respecto al tiempo.

**Instrumentos.** Un embudo de separación, un vaso deprecitado, agua colorada (rosa), 6 fotocopias del embudo de separación, marcador, grabadora.

**Procedimiento.** Se le pide que observen detenidamente lo que va a suceder en el embudo de separación (lleno de agua color rosa) y se le indica que hay una válvula en la parte inferior que controla la salida del líquido y cae al vaso deprecitado, dicha salida del líquido se realizará contando en intervalos de aproximadamente 5 segundos haciendo un total de 4 intervalos. Para esto se le proporcionaron varios dibujos del dibujo del embudo de separación para que

marcaran cada descenso del líquido, desde que está lleno hasta quedar vacío, haciendo un total de 6 dibujos. Al finalizar, se le pide que realice la seriación de los dibujos (dados en desorden) de acuerdo a lo sucedido. Por último se le cuestiona sobre lo sucedido.



Dibujo del embudo de separación utilizado en las situaciones experimentales 1 y 2.

2. *Segunda situación.* Volumen constante, altura creciente de un líquido

Objetivo. Analizar la estabilidad de un fenómeno (en este caso el volumen de agua) y un fenómeno cambiante: ascenso de la altura de un líquido, ambos respecto al tiempo.

Instrumentos. Un embudo de separación, agua colorada (rosa), 7 fotocopias del embudo de separación, marcador rojo, cámara de video.

Esta situación experimental se divide en dos fases:

a) Fase 1: *volumen constante.* Consiste en presentarles el embudo de separación lleno de agua coloreada (rosa) en tres ocasiones, es decir se presenta el embudo y se oculta, dando un lapso de tiempo de 5 segundos en cada presentación, esto con la finalidad de observar las percepciones de los niños, al no tener a la vista el embudo de separación lleno. Al mismo tiempo en cada ocasión de la presentación del embudo, se le proporciona una fotocopia del embudo de separación para que marquen lo que observan (en total tres). Posteriormente se le pide al niño que serie los dibujos marcados (presentados en desorden). Finalmente se le hacen

preguntas tales como ¿podrías explicarme con tus propias palabras qué fue lo que viste? ¿Qué fue lo que pasó? ¿Qué tenía el frasco? ¿Cómo estaba el frasco?, esto con la finalidad de observar el comportamiento de los niños ante el fenómeno de la altura constante del volumen del líquido.

b) Fase 2: *altura creciente de un líquido*. Se le presenta al niño el embudo de separación vacío, al mismo tiempo se le proporciona una fotocopia del embudo para que marquen lo que observa. A continuación se oculta el embudo y se le agrega un poco de agua coloreada (menos de la mitad del frasco), se le muestra al niño el embudo y se le da una fotocopia del embudo para que marque lo que observa. Se vuelve a ocultar el embudo y se le agrega agua (un poco más de la mitad), se le presenta al niño y se le pide que marque lo que observa en otra fotocopia. Luego se oculta el frasco y se llena, otra vez se le muestra al niño y se le da una fotocopia pidiéndole que marque lo que observa. Posteriormente se colocan los dibujos marcados en desorden, para que el niño los ordene. Finalmente se le hacen algunas preguntas de lo sucedido, por ejemplo ¿podrías explicarme con tus propias palabras qué fue lo que viste? ¿Qué fue lo que pasó? ¿Cómo estaba el frasquito al principio? ¿Después que pasó? ¿Y al final cómo estaba el frasquito?

El propósito de ocultar el embudo de separación en las dos fases, es para observar el comportamiento del niño, al no ver la acción de llenar el frasco (fase 2), como ocurría en la situación experimental 1 acerca del descenso de la altura de un líquido.

### 3. Tercera situación. Alargamiento de un resorte

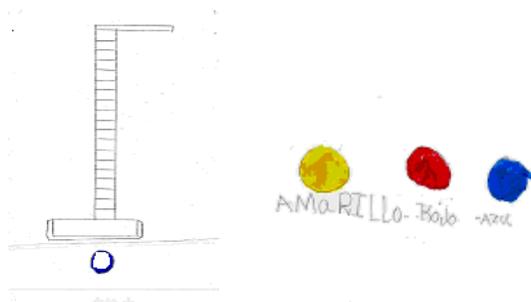
Objetivo. Analizar los procesos cambiantes de alargamiento de un resorte, en relación con el peso de los objetos redondos.

Instrumentos. Un artefacto construido en forma de una balanza graduada, tres objetos redondos del mismo tamaño de colores y pesos diferentes. El objeto azul más pesado, el rojo menos pesado y el amarillo más liviano que los anteriores, tres marcadores del color de los objetos, 4 fotocopias de la balanza incompleta (le falta el resorte y la tapa) y abajo de la

balanza un círculo dibujado, lápiz, cámara de video. Además se les pidió seriar los objetos redondos, esta actividad se realiza después de concluir la actividad de la balanza, en esta situación el tiempo no es considerado.

Procedimiento. Al principio se presentan la balanza y los tres objetos redondos (azul, rojo y amarillo), después se le proporciona una fotocopia del dibujo de la balanza incompleta (le falta el resorte y la tapa), se le indica que observe la balanza y complete lo que le falta al dibujo. En otro momento se le indica que coloque uno de los objetos redondos en la balanza y observe lo que ocurre, al mismo tiempo se le entrega la segunda fotocopia para completar lo que observa y rellene el círculo del color del objeto. Después coloca un segundo objeto redondo, se le proporciona otra fotocopia, se le pide que observe, dibuje lo que sucede y coloree el círculo del color correspondiente. La misma actividad se realiza con el tercer objeto (con la cuarta fotocopia).

A continuación se le indica al niño que realice la seriación de los dibujos de acuerdo al orden de lo acontecido. Después de esta actividad se le pide que ordene los objetos redondos como pueda y los coloque en hilera. Se le pregunta que explique cómo hizo su ordenación. Posteriormente se separan (recortan) los dibujos de la balanza, de los círculos coloreados, se le colocan en desorden los dibujos de la balanza por un lado y los dibujos de los círculos coloreados por el otro y se le pide al niño que entregue el primer dibujo que realizó de la balanza con el círculo del color del objeto redondo correspondiente, después el segundo y así sucesivamente. Para finalizar con la actividad se le solicita al niño que explique con sus propias palabras lo que sucedió.



Dibujo utilizado de la balanza incompleta y el dibujo de los tres objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes.

#### 4. Cuarta situación. Alargamiento de un resorte y la ordenación de tres cuerpos redondos.

Objetivo. Analizar los procesos de alargamiento de un resorte en relación con el peso de los objetos redondos, así como la ordenación de los objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes.

Instrumentos. Una balanza graduada, cuatro objetos redondos del mismo tamaño de colores y pesos diferentes (azul, roja, verde y amarillo), cuatro marcadores del color de los objetos, hojas blancas, lápiz, cámara de video.

Procedimiento. Esta actividad se desarrolló en dos momentos.

Primer momento. Se le presentan al niño la balanza graduada y los cuatro objetos redondos (azul, rojo, verde y amarillo) de tamaños similares y pesos diferentes. Después, se colocan en la balanza los objetos redondos en desorden de uno en uno y se le indica que observe lo que ocurre. Posteriormente se le proporciona una hoja blanca y se le pide que dibuje lo que observó. A continuación, se le solicita que explique con sus propias palabras lo que sucedió.

Segundo momento. Se le vuelven a presentar los cuatro objetos redondos en desorden y se le pide al niño que los ordene como pueda. Después, se le entrega una hoja blanca y se le pide que dibuje su ordenación. Luego se le indica que explique cómo realizó la ordenación.



Dibujos de la balanza y los cuatro objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes.

##### 5. *Quinta situación.* Alargamiento de un resorte y la ordenación de cuatro cuerpos redondos

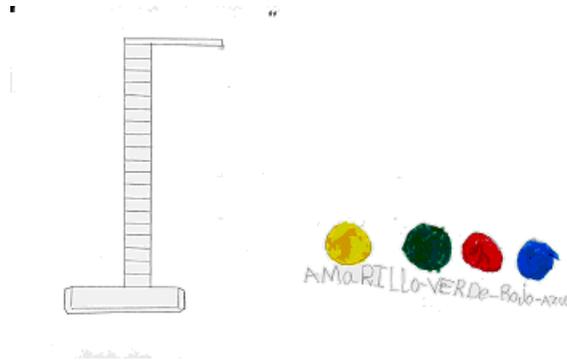
Objetivo. Analizar los procesos cambiantes de peso y el alargamiento de un resorte, así como la ordenación de cuatro cuerpos redondos de tamaños similares y pesos diferentes.

Instrumentos. Una balanza graduada, cuatro objetos redondos de tamaños similares, colores y pesos diferentes (azul, roja, verde y amarillo), cuatro marcadores del color de los objetos, cuatro fotocopias de la balanza, hojas blancas, lápiz, cámara de video.

Procedimiento. La situación experimental se dividió en dos momentos, además se agregaron cuatro fotocopias de la balanza debido a los resultados obtenidos en la situación anterior, en donde a los niños entrevistados se les dificultó realizar los dibujos.

Primer momento. Se le presentan al niño la balanza graduada y los cuatro objetos redondos (azul, rojo, verde y amarillo) de tamaños similares y pesos diferentes. A continuación, se coloca en la balanza un objeto redondo y se le indica que observe bien lo que sucede, se le proporciona una fotocopia de la balanza graduada sin el resorte y la tapa, se le pide que complete el dibujo de acuerdo a lo que observó (puede usar colores). Después se le solicita que coloque otra pelotita diferente y haga su dibujo, ejecuta la misma acción con las demás pelotitas. Luego se le pide que realice la seriación de los dibujos (colocados en desorden) de acuerdo a lo sucedido. Posteriormente, se realizan preguntas al respecto tales como: ¿por qué pusiste primero este dibujo?, ¿por qué va al final éste?, etc. Al final, se le solicita que explique con sus propias palabras lo que sucedió.

Segundo momento. Se le vuelven a presentar los cuatro objetos redondos en desorden y se le pide al niño que los ordene como pueda. A continuación, se le entrega una hoja blanca y se le pide que dibuje su ordenación. Luego se le indica que explique con sus propias palabras cómo realizó la ordenación.



Dibujo utilizado de la balanza incompleta y de los objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes.

Las cinco situaciones experimentales diseñadas, pretenden que los niños centren la atención en dos procesos cambiantes, que suponemos están necesariamente ligados entre sí, en el sentido de Rubinstein (1977), que caracteriza la atención como una orientación seleccionadora de la conciencia hacia una determinada cosa, la cual deviene consciente con especial claridad y precisión, esto hace que se modifique la estructura del proceso, el paso del ver al mirar, al contemplar, de la percepción a la observación, del proceso a la actividad orientada. Por consiguiente, de la centración en los dos procesos cambiantes de cada situación experimental, los niños podrían explicar con sus propias palabras, la causalidad del fenómeno ocurrido. De acuerdo con García (1991) la causalidad es una consecuencia de la acción, la explicación de los hechos encontrados a partir de la acción, es una forma de organización intelectual, que resulta de filtrar las consecuencias efectivas de todas las manipulaciones que hace el niño sobre los objetos. De ahí que la centración y la causalidad, jueguen un papel importante en nuestras situaciones experimentales para que los niños puedan identificar y explicar las cosas que cambian. Esto se podría manifestarse mediante la ordenación de los dibujos y las explicaciones de lo sucedido de acuerdo a sus percepciones.

# CAPÍTULO 5

## LOS RESULTADOS

### 5.1 Análisis de los resultados.

En la búsqueda de elementos que contribuyeran al fortalecimiento de nuestra hipótesis, diseñamos cinco situaciones experimentales. Dichas situaciones fueron diseñadas con la intención de que los niños centrarán la atención en fenómenos de cambio específicos preparados ex profeso. Mediante esas situaciones y la interacción que se estableciera con los niños a través de la observación y la intervención de ellos mismos, nos planteamos explicar la centración, la causalidad y la seriación, en relación con la construcción de la noción de variable. En total fueron cinco situaciones experimentales y se orientaron en tres sentidos: las relacionadas con la variación del volumen de líquidos, las relacionadas con la variación de la elongación de resortes y, la ordenación de objetos redondos de tamaños similares, pesos y colores variables. En las situaciones experimentales del primer tipo las variables en juego son el volumen o nivel del líquido en relación al tiempo. En las situaciones el segundo tipo las variables en juego son las elongaciones de un resorte en relación al peso. En las situaciones del tercer tipo se precisa de ordenar objetos, las variables son el peso y el color, aquí, existe una relación necesaria de ordenación que suponemos está asociada a la idea de variación. La ordenación según Nemirovsky & Carvajal (1994) se considera a la acción de agrupar los objetos por sus características cualitativas como pueden ser la forma, el tamaño, el color, etc. y realizar relaciones crecientes o decrecientes entre dichos objetos. En nuestro caso, la ordenación de los objetos redondos, está en el sentido de observar qué característica utilizan los niños para agrupar los objetos y realizar la ordenación, creciente o decreciente, es ahí donde consideramos está involucrada la idea de variación.

Cabe mencionar que en las primeras dos situaciones experimentales el tiempo fue considerado, y en las siguientes tres no se consideró. El hecho de no considerar el tiempo fue con en el propósito de observar, en los niños sus comportamientos en las percepciones de estos fenómenos. Los sujetos participantes en las situaciones experimentales fueron 19 niños cuyas

edades oscilaban entre 4 y 8 años. En la escritura de los diálogos de las cinco situaciones experimentales, utilizamos la letra E que significa entrevistador y la letra inicial mayúscula el nombre del niño entrevistado.

#### 5.1.1 Situaciones asociadas a la variación del volumen de líquidos.

##### a) Primera situación **descenso de un líquido.**

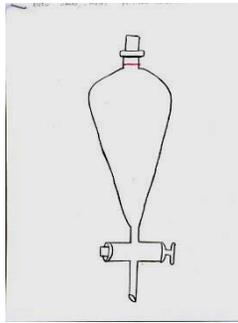
Se entrevistó a seis niños entre 5 y 8 años, el objetivo fue analizar sus percepciones en el fenómeno descenso de la altura de un líquido en relación al tiempo.

Actividades.

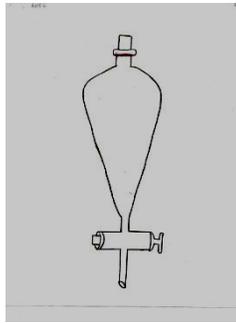
1. Se muestra a los niños el recipiente lleno de líquido.
2. Se le proporciona un dibujo del embudo y el niño marca el nivel del líquido.
3. Se hace descender el nivel del líquido, cerrando la válvula a intervalos de 5 segundos aproximadamente.
4. Se le proporciona un segundo dibujo y el niño marca el nivel.
5. Se repite la operación hasta quedar vacío el embudo y marcar el nivel del líquido en los dibujos restantes, haciendo un total de 6 dibujos.
7. Posteriormente se les proporcionan los dibujos por ellos marcados pero en desorden y se les pide que los ordenen.
8. Finalmente se le hacen preguntas acerca de lo ocurrido.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

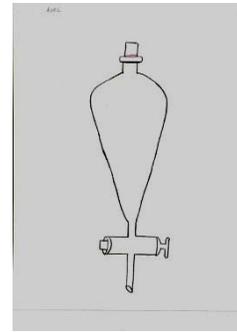
1. Orden de marcación y seriación. Anel (5 años)



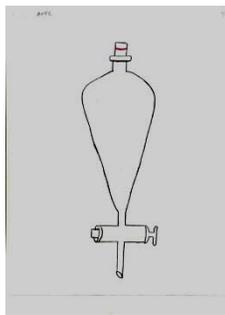
1



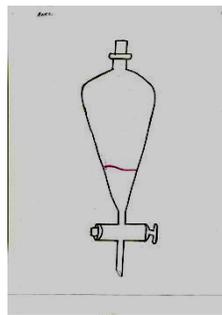
2



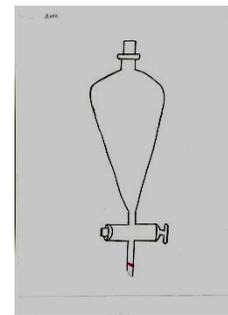
3



4



5



6

Anel presenta una seriación muy particular. Los cuatro primeros dibujos tienen la marca en la “boca” de la botella. El quinto debajo de la mitad y el último en la parte final del recipiente. La ordenación de los dibujos por ella presentados indican una seriación que no se corresponde con los estadios que se le escenificaron en la situación experimental. La ordenación que presenta da cuenta de solo tres estadios, al principio lleno, el intermedio un poco debajo de la mitad y el final. Al preguntarle acerca de lo sucedido se nota que está consciente de que lo presentado es un fenómeno en donde algo está cambiando. Pero el centro de su atención es el flujo. Veamos:

E: ¿Cómo estaba al principio?

A: Llenito.

E: Y ¿qué le fue pasando, qué le fue pasando al agua?

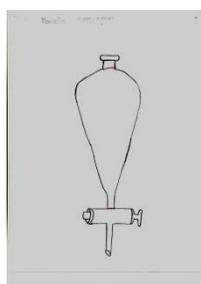
A: Estaba bajito.

E: Y al final ¿qué le pasó al agua?

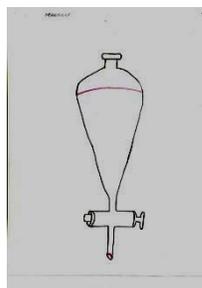
A: Se fue más.

Por sus respuestas, se puede suponer que la niña distingue los cambios más notables, lleno, medio lleno y vacío. Además, se manifiestan ideas asociadas a la temporalidad de un suceso: al principio, qué le fue pasando y al final.

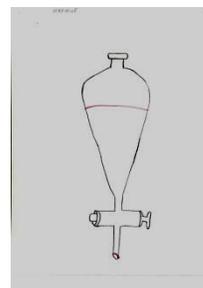
## 2. Orden de marcación y seriación. Marielle (8 años)



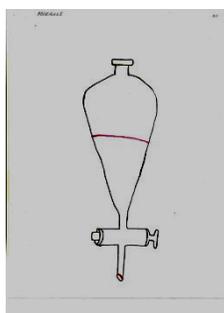
1



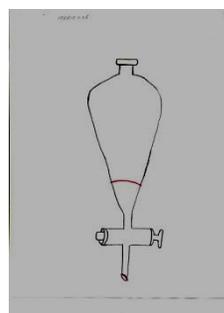
2



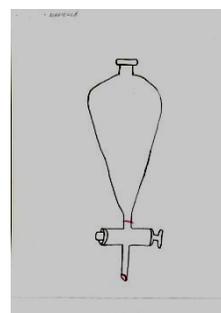
3



4



5



6

Marielle muestra una seriación que se corresponde a los estadios presentados en la situación experimental. La idea de cambio en el nivel del líquido está presente en la niña, esta idea es reforzada en el interrogatorio que se le hace de lo sucedido, siendo el centro de su atención el flujo del líquido. Como se ve:

E: ¿Cómo estaba al principio el frasquito?

M: Hasta aquí, estaba lleno.

E: ¿Y después qué sucedió?

M: Se... se le fue saliendo el agua, pues.

E: ¿Hubo cambio o no cambió?

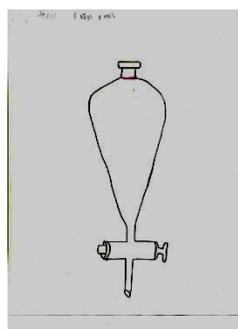
M: Sí cambió

E: ¿Qué fue lo que cambió?

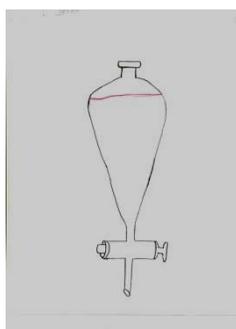
M: Que estaba lleno y que le salía el agua.

Sin embargo, las expresiones reiteradas como “estaba lleno y que se le salía el agua” indican que también su centro de atención fue atraído por el flujo del agua al igual que Anel. Lo que les interesa es el fenómeno en sí. Además en las respuestas al interrogatorio, se nota la utilización del término cambio y las nociones “antes” y “después” que dan idea de temporalidad.

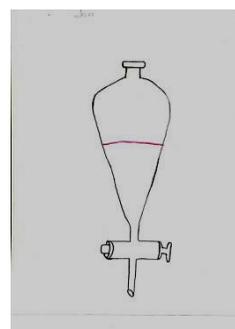
### 3. Orden de marcación y seriación. Jesús (8 años)



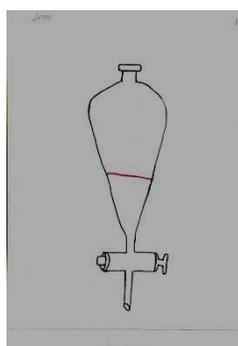
1



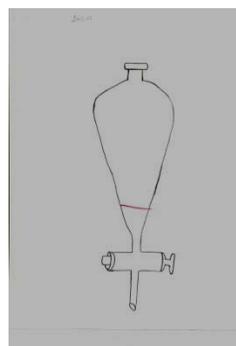
2



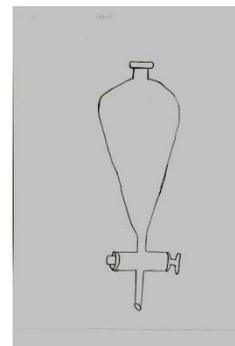
3



4



5



6

La seriación concuerda con los estadios exhibidos en la situación experimental presentada. La idea de cambio está presente en el niño al marcar en los dibujos los distintos niveles del líquido. Esta idea es fortalecida en el cuestionamiento que se le hace de lo ocurrido, como a continuación se ve:

E: ¿Cómo estaba al principio?

J: Lleno.

E: ¿Qué le fue sucediendo al agua?

J: Se fue cayendo.

E: ¿Qué le pasó al agua, cambió o no cambió?

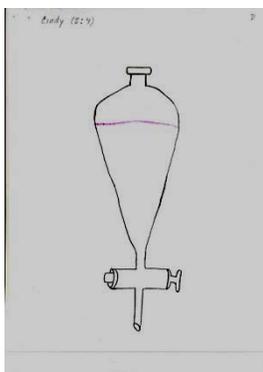
J: Cambió.

E: ¿Por qué? Explica.

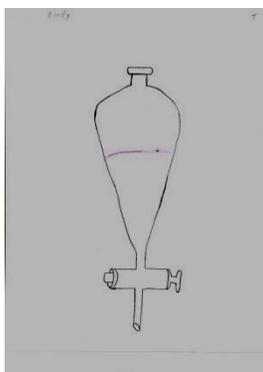
J: Se fue este...vaciando al vasito.

Nuevamente se notan en las respuestas de Jesús la centración de su atención en el fenómeno mismo de flujo, para él “se fue vaciando al vasito” o bien “se fue cayendo” refiriéndose al líquido. Además es notorio en sus respuestas que lo que cambia sucedió porque el agua estaba cayendo, es decir para él los cambios fueron causados por el vaciado del líquido. Esto nos hace suponer una relación de causalidad entre los cambios y sus causas usada por Jesús en sus respuestas.

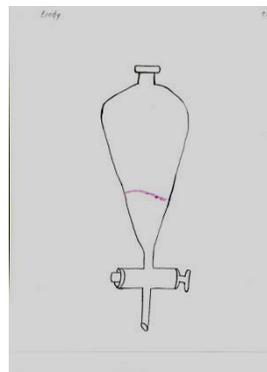
#### 4. Orden de Marcación y seriación. Cindy (5 años)



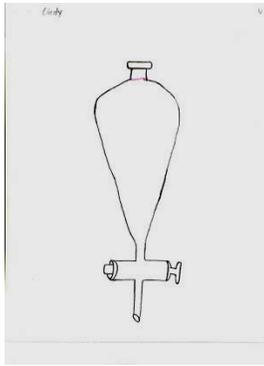
1



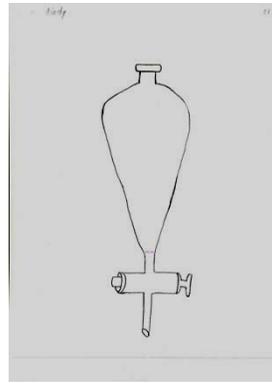
2



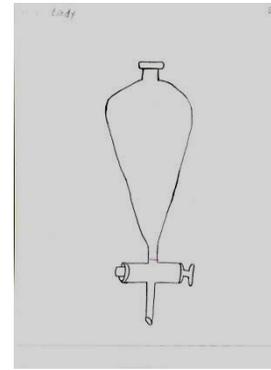
3



4



5



6

La seriación del 1º y 4º estadios no se corresponde a los estadios de la situación experimental presentada. Pareciera que hay dos seriaciones, el primer grupo de los tres primeros dibujos y el otro grupo de los tres restantes. Sin embargo, por las marcaciones en los dibujos de los diferentes niveles del líquido y sus respuestas, la niña está consciente de que lo presentado es un fenómeno en donde algo está cambiando. Siendo el centro de su atención el flujo del líquido. Como se manifiesta:

E: ¿Recuerdas cómo estaba el frasco al principio?

C: (Mueve la cabeza afirmativamente).

E: Y ¿qué le pasó?

C: Se le echó agua.

E: ¿Qué le pasó al frasquito?

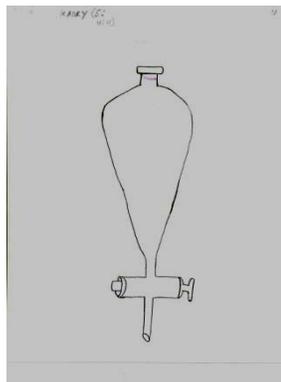
C: (Pausa) se le fue.

E: Y al final ¿cómo quedó?

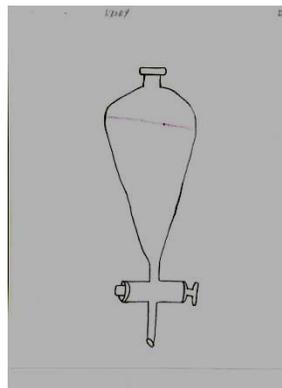
C: Con nada quedó.

La niña al mencionar “se le fue” centra la atención en el flujo del líquido, el flujo del mismo para ella es lo que originan los cambios “se le echó agua, se le fue, con nada quedó”. Aquí hay una relación de causalidad originada por el flujo del líquido. Además en cuestionamiento se menciona de ideas asociadas a la temporalidad de un suceso: al principio, al final.

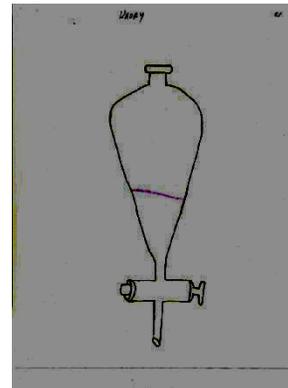
5. Orden de marcación y seriación. Kaory (4 años)



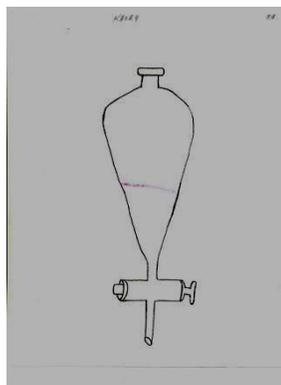
1



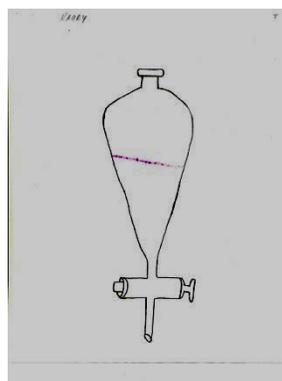
2



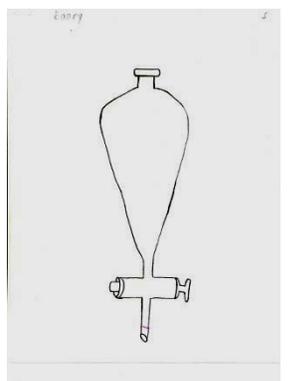
3



4



5



6

La seriación de los dibujos no se corresponde al orden de la situación experimental presentada. Los tres primeros dibujos guardan cierta relación con el descenso del nivel del líquido, no así los tres restantes. La niña al parecer tiene la idea de cambio, pues marca los diferentes niveles del líquido en los dibujos, pero esta idea vagamente es reforzada en el cuestionamiento. Como se muestra:

E: ¿Te acuerdas qué le pasó al agua?

K: (Mueve la cabeza negativamente para indicar que no recuerda).

E: Al principio ¿cómo estaba?

K: (No responde).

E: ¿Qué tenía el frasco?

K: Agua.

E: ¿Estaba hasta abajo, estaba bajito, hasta dónde estaba?

K: Estaba hasta abajo.

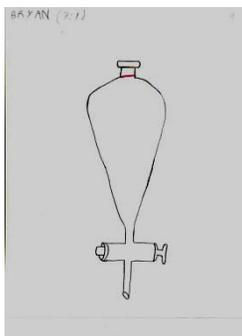
E: ¿Y después cuando se le fue saliendo?

K: Quedó poquito.

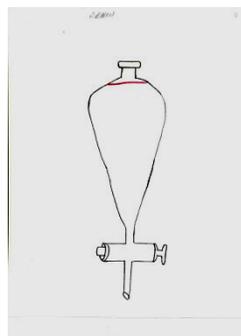
E: ¿Te acuerdas qué le pasó al agua?

K: (Mueve la cabeza negativamente para indicar que no recuerda).

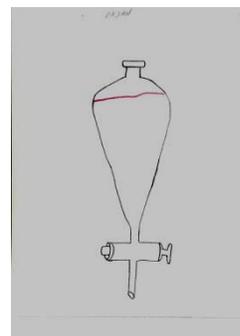
#### 6. Orden de marcación y seriación. Bryan (7 años)



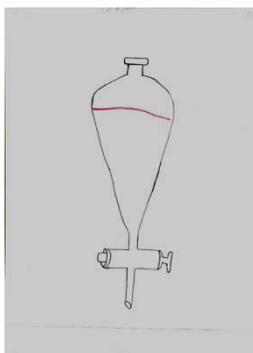
1



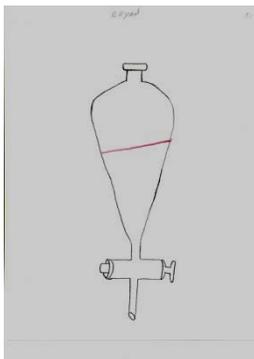
2



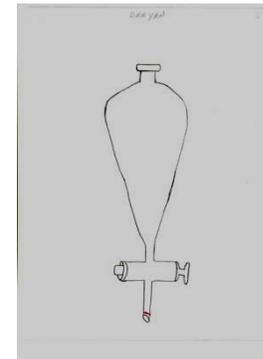
3



4



5



6

La seriación de los dibujos se corresponde a los estadios en que se presentó la situación experimental. La idea de cambio en el nivel del líquido está presente en el niño, al marcar en los dibujos los diferentes niveles y esta idea es reforzada con sus respuestas en el interrogatorio. El centro de su atención es el flujo mismo del líquido. Como se muestra:

E: ¿Te acuerdas cómo estaba al principio el frasco?

B: Lleno.

E: ¿Y después que le pasó al agua?

B: Se fue bajando.

E: ¿Y cómo quedó al final?

B: Vacía.

E: ¿Qué le pasó al agua?

B: Se acabó, se fue bajando pues.

En sus respuestas de Bryan se nota que centra su atención en el fenómeno en sí del flujo. Mencionar reiteradamente “se fue bajando” indica la acción que le sucedió al líquido. Además se nota en sus respuestas que lo que cambia sucedió porque el agua “se fue bajando”, para él los cambios fueron causados por el vaciado del líquido. Esto nos hace suponer una relación de causalidad entre los cambios y sus causas expresadas por Bryan en sus respuestas.

Nuevamente en el interrogatorio se expresan nociones de temporalidad: al principio, después y al final.

A continuación se presenta un cuadro con un resumen de esta situación experimental.

<b>a) Primera situación experimental. Descenso de un líquido</b>			
NIÑO (A)	SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS	EXPLICA EL SUCESO	OBSERVACIONES
KAORY (4 años)	No hay correspondencia con el suceso en el 5° estadio.	Con dificultad.	<i>Percibe la variación del líquido al marcar los diferentes niveles.</i>
ANEL (5 años)	No hay correspondencia con el suceso hasta el 5° y 6° estados.	Al principio “llenito”, después “estaba bajito, al final “se fue más”.	<i>Al parecer distingue los cambios bruscos (lleno, medio lleno y vacío).</i>
CINDY (5 años)	Pareciera que hay dos seriaciones de tres dibujos cada una.	“Se le echo agua”, después “se le fue” y al	<i>Centración en el flujo del líquido. Los cambios son</i>

	El estado 1 lo coloca en el estado 4.	final “con nada quedó”.	<i>porque se le fue, refiriéndose al agua.</i>
BRYAN (7 años)	Marca los niveles y sería de acuerdo al orden del suceso.	Al principio “estaba lleno”, después “se fue bajando” al final “vacía”, “se acabó, se fue bajando pues”.	<i>Centración en el flujo del líquido. Los cambios son provocados por el vaciado del líquido.</i>
MARIELLE (8 años)	Seriación de acuerdo al orden de los sucesos.	Al principio “estaba lleno”, después “se le fue saliendo el agua”.	<i>Centración en el flujo del líquido. Los cambios son provocados porque se le salía el agua.</i>
JESÚS (8 años)	Marca y sería de acuerdo al orden de los sucesos.	Al principio “estaba lleno”, “se fue cayendo”, “se fue este... vaciando al vasito”.	<i>Centración en el flujo del líquido. Los cambios son porque el agua estaba cayendo.</i>

De esta situación experimental se puede notar, que los niños centraron su atención en el flujo del líquido, al marcar en los dibujos, diferentes niveles del líquido y externar en sus respuestas “estaba llenito, lleno” “estaba bajito, se le fue saliendo el agua, se fue cayendo, se le fue, quedó poquito” “se fue más, vacío, con nada quedó, vacía”. La idea de variación en los niños se hace presente, en las marcaciones en los dibujos de los diferentes niveles del líquido y es reforzada con las respuestas antes mencionadas en los interrogatorios. La mayoría de los niños expresan que la causa de los cambios es por el flujo del líquido “se le fue saliendo, se fue cayendo, se le fue”. También se hacen mención de términos como: al principio, después y al final, ideas asociadas a la temporalidad de un suceso. En la seriación de los dibujos, hay dificultad en las niñas Kaory (4 años), Anel y Cindy (5 años), esto es posible que se deba, según Nemirovsky & Carvajal (1994) a que aún tienen dificultades en intercalar los estados intermedios de un suceso (propios del primer estadio de la seriación), sólo distinguen las diferencias notorias “lleno, vacío”. Los tres niños restantes Bryan (7 años) y Marielle y Jesús

(8 años) realizan la seriación de acuerdo a lo sucedido en la situación experimental, esto es indicativo del tercer estadio de la seriación, que de acuerdo con Nemirovsky & Carvajal (1994) los niños pueden seriar tanto de manera ascendente como descendente.

b) Segunda situación **volumen constante, altura creciente de un líquido.**

Se entrevistó a 5 niños de preescolar, nuestro objetivo fue analizar las percepciones que experimentan los niños en la estabilidad de un fenómeno (volumen constante de agua) y un fenómeno cambiante (ascenso de la altura de un líquido) ambos respecto al tiempo. Esta situación se dividió en dos fases. (Terminada una comenzaba la otra)

Fase 1. Volumen constante

Actividades

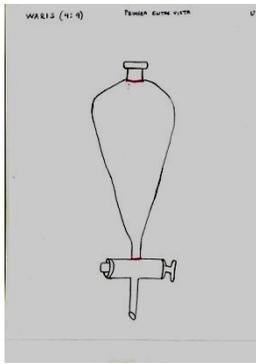
1. Se muestra a los niños el recipiente lleno de líquido.
2. Se le proporciona un dibujo del embudo y el niño marca el nivel del líquido.
3. Se oculta por unos segundos el embudo y se le vuelve a mostrar el embudo lleno.
4. Se le proporciona un segundo dibujo y marca el nivel del líquido.
5. Se repite la operación haciendo un total de tres dibujos.

El objeto de ocultar el embudo, fue para observar las percepciones de los niños, ante algo que no se tiene por unos instantes a la vista.

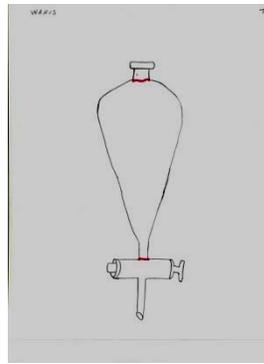
6. Posteriormente se les proporcionan los dibujos por ellos marcados pero en desorden y se les pide que los ordenen.
7. Finalmente se le hacen preguntas acerca de lo ocurrido.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

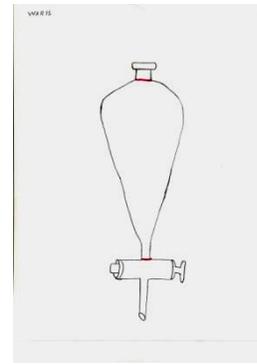
1. Orden de marcación y seriación. Waris (4 años)



1



3



2

Se notan marcaciones en la parte superior e inferior de los tres dibujos del nivel del líquido del embudo. La seriación del 2° y 3° estadios no se corresponde al orden en que se escenificaron en la situación experimental que se presentó. La niña al parecer nota que el líquido no sufre cambio, esto se corrobora en sus respuestas. Como vemos:

E: ¿Qué es lo que hiciste ahorita?

W: Le marqué.

E: ¿Qué sucedió con estos tres dibujitos?

W: Le remarqué mucho.

E: ¿No hiciste otra cosa, qué sucedió entre cada dibujito?

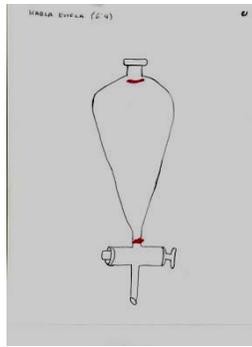
W: No.

E: ¿No pasó nada?

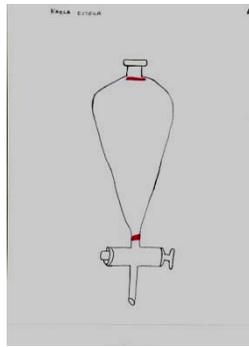
W: No.

Es de suponer que la niña al centrar la atención en el nivel del líquido y observar que el líquido no sufrió cambio alguno, para ella “no pasó nada”, sólo le remarqué mucho en los tres dibujos. Esto puede ocasionar que la niña haga la seriación de los dibujos de manera indistinta. No se da cuenta que hubo un lapso de tiempo entre cada dibujo.

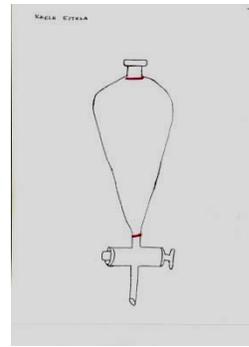
2. Orden de marcación y seriación. Karla Estela (6 años)



1



2



3

La niña marca la parte superior e inferior del embudo en los tres dibujos y muestra una seriación que se corresponde a los estadios presentados en la situación experimental. La niña centra su atención en el líquido y menciona lo que observó como se muestra:

E: ¿Puedes decir qué pasó ahorita que te estuve enseñando el frasquito?

K: Pausa, vi agua.

E: ¿Y cómo estaba el agua, tenía poquita, como estaba?

K: Tenía mucha.

E: ¿Hasta dónde estaba el frasquito?

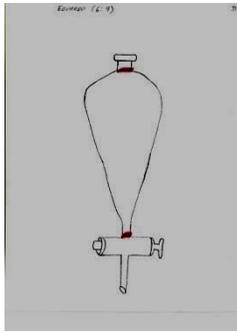
K: Hasta aquí (Señala en el dibujo la parte superior del embudo).

E: ¿Te acuerdas cómo estaban los tres dibujitos, había más o había menos o estaban iguales o cómo estaban?

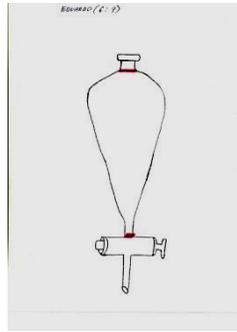
K: Estaban iguales (contesta rápidamente).

La niña nota de que el nivel del líquido no sufrió cambio, marcando la parte superior e inferior del embudo en los tres dibujos y esta idea es reforzada “estaban iguales” en alusión a las marcas del líquido en los tres dibujos.

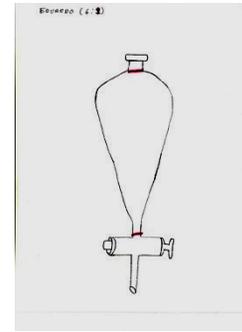
3. Orden de marcación y seriación. Eduardo (6 años)



2



3



1

La seriación que realiza el niño no corresponde a los estadios de la situación experimental presentada. Eduardo marca la parte superior e inferior del líquido en los tres dibujos. Esto hace suponer que el niño nota que el nivel del líquido no sufrió cambio en las tres presentaciones, como se ve:

E: ¿Cómo estaba el frasco... qué tenía, cómo estaba?

Ed: Agua rosa.

E: ¿Y hasta dónde estaba, te acuerdas hasta dónde estaba?

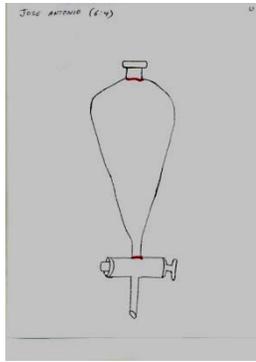
Ed: Grande.

E: ¿Estaba vacío o cómo estaba?

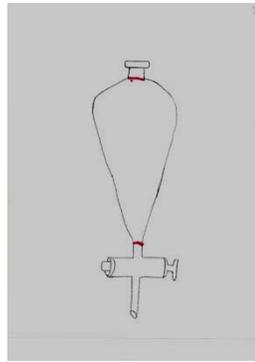
Ed: Lleno.

Eduardo menciona que el frasco con agua rosa estaba “lleno”. Es de suponer que el hecho de mencionar que estaba lleno el frasco, el niño centra la atención en el volumen de agua, el cual se mantuvo lleno en las tres presentaciones.

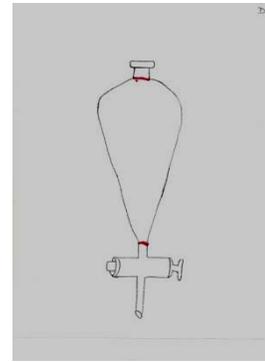
4. Orden de marcación y seriación. José Antonio (6 años)



1



2



3

El niño como en los casos anteriores, marca la parte superior e inferior del embudo en los tres dibujos. La seriación se corresponde a los estadios en que se presentó la situación experimental, pero el niño en el interrogatorio no argumenta lo ocurrido, como se muestra:

E: ¿Cómo estaba el agua?

J: No contesta.

E: ¿Había qué... había poquita, estaba llena o cómo estaba?

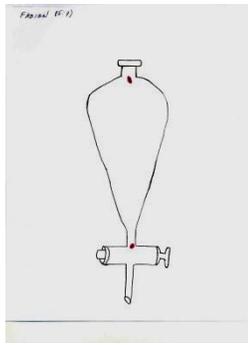
J: Había poquita agua.

E: ¿En todos lo frasquitos había poca agua?

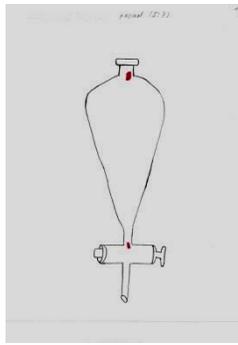
J: (Mueve la cabeza afirmativamente).

El niño nota que el nivel del líquido no sufre cambio alguno, marcando en los tres dibujos la parte superior e inferior del frasco, pero sus respuestas no coinciden con lo sucedido “había poquita agua”.

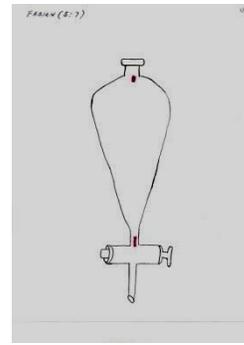
5. Orden de marcación y seriación. Fabián (5 años)



2



3



1

El niño marca la parte superior e inferior de los tres dibujos. La seriación que realiza Fabián no se corresponde a los estadios presentados en la situación experimental, pero el niño en el interrogatorio manifiesta lo sucedido, como vemos:

E: ¿Me puedes platicar cómo estaba el frasquito?

F: Este, tenía agua rosita.

E: ¿Y cómo estaba?

F: Lleno.

E: ¿En los tres dibujos?

F: Sí

E: En los tres dibujos ¿cómo estaban?

F: Llenitos.

El niño nota que el nivel del líquido no sufre cambio alguno, al marcar en los tres dibujos la parte superior e inferior del embudo y lo refuerza mencionando que en los tres dibujos estaban “llenitos”. Esto puede ser indicio de la percepción de un fenómeno estable en el niño, ya que al darse cuenta de que no hubo cambios en el nivel del líquido en los estados presentados, para él en los tres dibujos, el frasco estaba llenito.

Fase 2. Altura creciente de un líquido

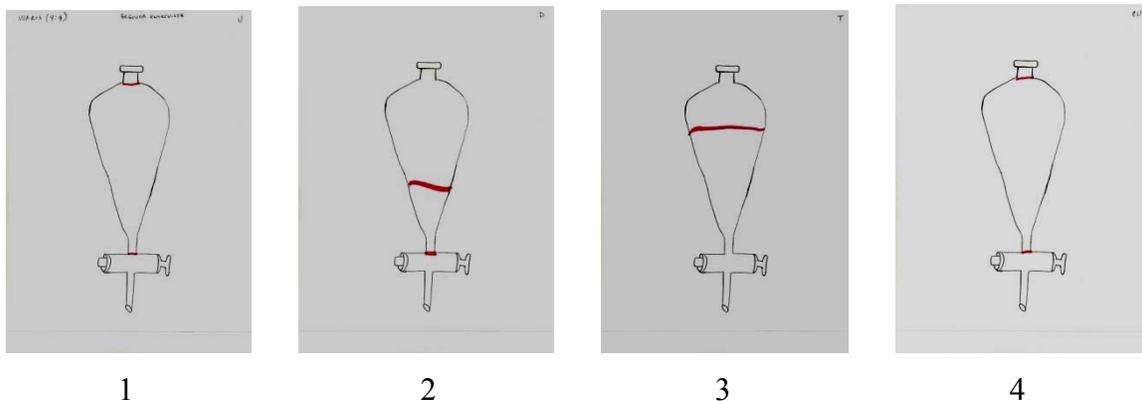
Actividades.

1. Se muestra a los niños el recipiente vacío.
2. Se le proporciona un dibujo del embudo y el niño marca lo que observa.

3. Se oculta el embudo y se le agrega un poco de líquido.
4. Se le proporciona un segundo dibujo y el niño marca el nivel del líquido.
5. Se repite la operación en dos ocasiones hasta quedar lleno el embudo, haciendo un total de 4 dibujos.
6. Posteriormente se les proporcionan los dibujos por ellos marcados pero en desorden y se les pide que los ordenen.
7. Por último se le hacen preguntas a cerca de lo sucedido.

A continuación se presentan los resultados.

#### 1. Orden de marcación y seriación. Waris (4 años)



La seriación es realizada conforme realizó los dibujos. El primer dibujo no se corresponde al primer estadio presentado en la situación experimental, pues marca en el dibujo la parte superior e inferior como si el embudo estuviera lleno, esto es argumentado en el interrogatorio como se ve a continuación:

E: ¿Cómo estaba al principio?

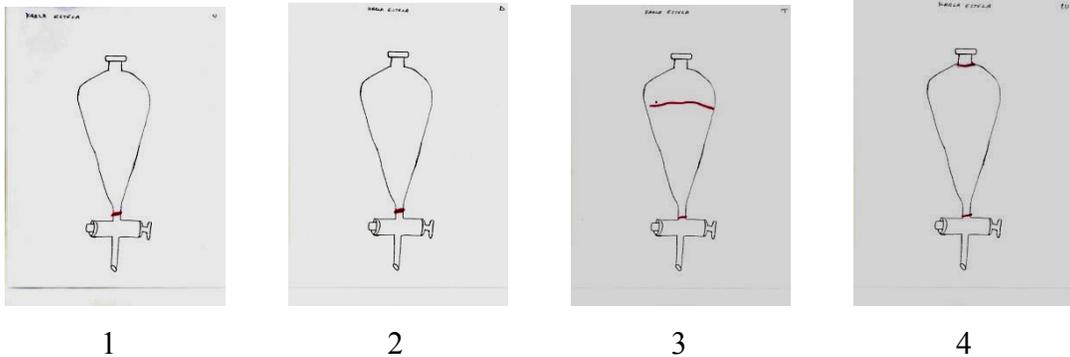
W: Estaba lleno, un poquito al medio y otra vez lleno.

E: ¿Después qué le pasó cuando no tenía nada?

W: Se le subió (moviendo la mano hacia arriba).

La niña se da cuenta del cambio que experimenta el nivel del líquido centrando la atención en el ascenso del líquido en sí en el frasco, pues marca los diferentes niveles en los dibujos (solo el primer dibujo no coincide con el estadio presentado en la situación experimental). La idea de cambio es reforzada al mencionar “se le subió”. Al parecer para la niña “se le subió” es indicativo de lo que le ocurrió al líquido y en consecuencia, expresar estadios del suceso “estaba lleno, un poquito al medio y otra vez lleno”. Se hace mención de los términos: al principio y después, estos términos están asociados a la idea de temporalidad de un suceso.

## 2. Orden de marcación y seriación. Karla Estela (6 años)



La seriación es acorde al orden en que realizó los dibujos, sólo que el segundo dibujo tiene una mínima diferencia respecto al primero. La niña centra la atención en el ascenso del líquido, pues marca en los dibujos los diferentes niveles del líquido. Esto muestra que Karla se da cuenta del cambio que experimenta el nivel del líquido, expresándolo a continuación:

E: ¿Te acuerdas cómo estaba el frasco al principio?

K: Vacío.

E: ¿Y después?

K: Lleno.

E: ¿Y después el tercer dibujito?

K: Estaba hasta la mitad.

E: ¿Y el último dibujito?

K: Estaba lleno.

E: Entonces ¿qué le pasó al frasquito, qué le fue pasando al frasquito en cada dibujito?

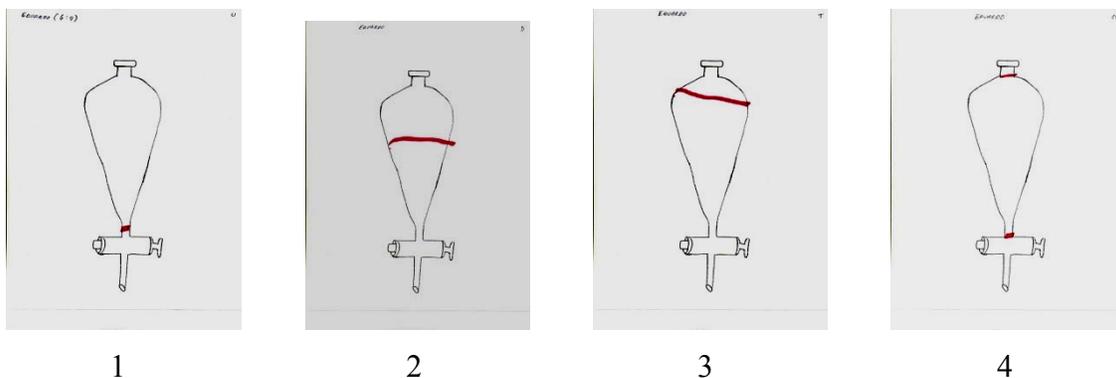
K: Diferente.

E: ¿Qué fue lo diferente?

K: Porque es que estaba vacío y lleno.

La niña nota el cambio en el nivel del líquido al mencionar “diferente” refiriéndose a lo que le sucedió al frasco en cada dibujo y reafirma la idea del cambio diciendo que lo diferente es “porque es que estaba vacío y lleno”. Además, la niña establece estadios del suceso: vacío, la mitad y lleno. Así como Waris, con Karla se hace mención de algunos términos asociados a la idea de temporalidad: al principio, después, al último.

### 3. Orden de marcación y seriación. Eduardo (6 años)



La seriación de los dibujos se corresponde a los estadios de la situación experimental presentada. El niño centra la atención en el nivel del líquido y se da cuenta del cambio que experimenta el nivel del líquido en el embudo, pues marca en los dibujos los diferentes niveles del líquido (en los tres primeros dibujos solo la parte superior del embudo y en el último la parte inferior y superior). La idea de cambio en el niño está presente en el interrogatorio siguiente:

E: ¿Qué tenía el frasquito al principio?

Ed: Pausa... poca agua.

E: Y después ¿qué le sucedió después que tenía poquita agua?

Ed: Pausa, no contesta.

E: ¿Cómo estuvo al final?

Ed: Lleno.

E: Entonces ¿cómo estaba al principio?

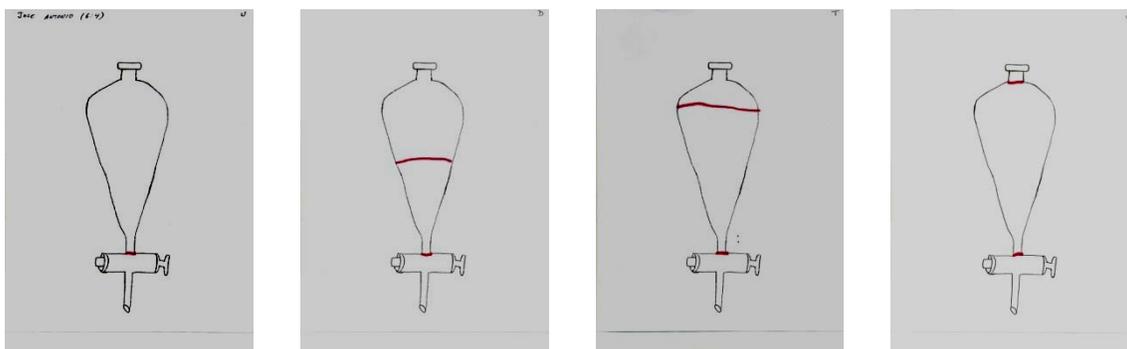
Ed: Con poco agua.

E: ¿Y después?

Ed: Con muchito.

El niño nota el cambio que sufre el nivel del líquido y refuerza esta idea mencionando que al principio estaba “con poca agua” y al final “lleno”. Como en los casos anteriores, se hace mención de términos relacionados a la temporalidad de un suceso: al principio, después, al final.

#### 4. Orden de marcación y seriación. José Antonio (6 años)



1

2

3

4

El niño centra la atención en el nivel del líquido, pues marca en los dibujos sus diferentes niveles. La seriación de los dibujos la realiza conforme a los estadios de la situación experimental presentada. El niño nota la idea del cambio, según las marcas de los diferentes niveles en los dibujos, pero en el interrogatorio se le dificulta expresar esta idea, como a continuación se observa:

E: ¿Te acuerdas cómo estaba al principio el frasquito?

J: Lleno.

E: ¿Y después?

J: No contesta.

E: ¿Después... qué le fue pasando?

J: Se le quitó agua.

E: ¿Se le quito agua?

J: Se le quito agua poco a poquito.

E: ¿Te acuerdas qué le fue pasando al frasquito después?

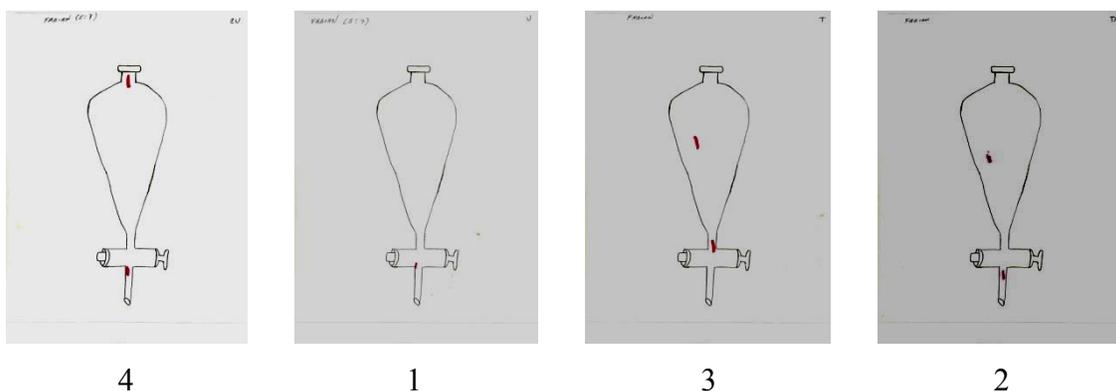
J: Se estaba yendo el agua.

E: El último dibujito ¿cómo estaba?

J: Lleno.

El niño nota el cambio que sufre el nivel del líquido, marcando en los dibujos los diferentes niveles, pero sus explicaciones del suceso hay confusión con lo ocurrido. También se hace mención de ideas asociadas a la temporalidad como: al principio, después, el último.

#### 5. Orden de marcación y seriación. Fabián (5 años)



La seriación de los dibujos no se corresponde a los estadios de la situación experimental presentados. El niño centra la atención en el nivel del líquido y marca en los dibujos los diferentes niveles del líquido. Fabián se da cuenta del cambio que experimenta el nivel del líquido al marcar en los dibujos los diferentes niveles, pero en el cuestionamiento sus respuestas no coinciden con lo sucedido en la situación experimental, como se puede observar:

E: Al principio ¿cómo estaba... cómo estaba al principio?

F: Se llenó.

E: ¿Y después... y después?

F: Poquito.

E: ¿Y el último dibujito?

F: Pausa.

E: ¿Tenía mucha, poquita, nada o... estaba lleno?

F: No tenía nada.

En el interrogatorio se manifiestan ideas asociadas a la temporalidad: al principio, después, último.

A continuación se presenta un cuadro de resumen de esta situación experimental.

<b>b) Segunda situación experimental. Volumen constante, altura creciente de un líquido</b>				
<b>PARTICIPANTES</b>	<b>1) Fase Volumen constante de un líquido</b>		<b>2) Fase Altura creciente de un líquido</b>	
<b>NIÑO (A)</b>	<b>SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS</b>	<b>EXPLICA EL SUCESO</b>	<b>SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS</b>	<b>EXPLICA EL SUCESO</b>
<b>WARIS (4 años)</b>	Marca arriba y abajo del embudo y ordena los estados 1, 3 y 2 respectivamente.	“Le marqué” “no sucedió nada”	Realiza la seriación de acuerdo al orden en que realizó los dibujos.	“Estaba lleno, un poquito al medio y otra vez lleno”.
<b>FABIÁN (5 años)</b>	Marca arriba y abajo del embudo y ordena los estados 2, 3 y 1.	Los tres dibujitos ¿cómo estaban? “llenitos”	Marca y ordena los estados 4, 1, 3 y 2 respectivamente.	Se le dificulta explicar lo sucedido.
<b>KARLA (6 años)</b>	Marca y seria de acuerdo al orden de lo acontecido.	“Estaban iguales”.	Marca y realiza la seriación de acuerdo al orden en que realizó los dibujos.	“Vacío” después “lleno”.
<b>JOSE (6 años)</b>	Marca arriba y abajo del embudo y seria de acuerdo a lo acontecido.	Se le dificulta explicar lo ocurrido.	Realiza la seriación de acuerdo a lo acontecido.	Dificultad al explicar lo sucedido “se le quitó agua poco a

				poquito”.
EDUARDO (6 años)	Marca arriba y abajo del embudo y ordena los estados 2, 3 y 1 respectivamente.	¿Cómo estaba el frasco? “lleno”.	Marca y seria de acuerdo al orden de lo acontecido.	Al principio “con poca agua” y después “con muchito”

En la *primera fase*, la mayoría de los niños centran la atención en el nivel del líquido, se dan cuenta de que el líquido del embudo lleno no sufre cambios, pues marcan el mismo nivel del líquido en los tres dibujos. La idea de que no hubo cambio la refuerzan mencionando que “estaban iguales” “llenitos” “no sucedió nada”. Al realizar la seriación de los dibujos solo dos niños la hacen conforme efectuaron sus dibujos, los tres restantes no la realizan, esto puede deberse a la similitud de los dibujos y por ende su dificultad al ordenarlos. Es de comentar en esta fase que los niños no mencionan ideas asociadas a la temporalidad, a pesar de que hubo un lapso de tiempo en las marcaciones de cada dibujo.

En la *segunda fase*, los niños centran la atención en el nivel del líquido y notan el cambio que sufre el nivel del líquido, al marcar los diferentes niveles en cada dibujo, pero la explicación del suceso sólo es reforzada en el interrogatorio por tres niños (Waris 4 años, Karla 6 años y Eduardo 6 años). En la explicación del suceso, se menciona que al principio estaba “con poca agua” después “con muchito” al final “lleno” “se le subió”. Estos términos nos están indicando que lo que está cambiando es el nivel del líquido. Respecto a la seriación dos niñas (Waris 4 años y Karla 6 años) realizan la seriación de acuerdo al orden en que hicieron los dibujos. Dos niños José Antonio y Eduardo (6 años) realizan la seriación de acuerdo los estadios de la situación experimental presentada. Sólo a Fabián (5 años) se le dificulta realizarla. Asimismo, se hace mención de ideas asociadas a la temporalidad como: al principio, después, al final, al último.

### 5.1.2 Situaciones asociadas a la variación de la elongación de resortes.

#### c) Tercera situación **alargamiento de un resorte.**

Se entrevistó a dos niños de 8 años. El objetivo fue analizar los procesos cambiantes de alargamiento de un resorte en relación con el peso de los objetos redondos. Esta situación se dividió en dos partes.

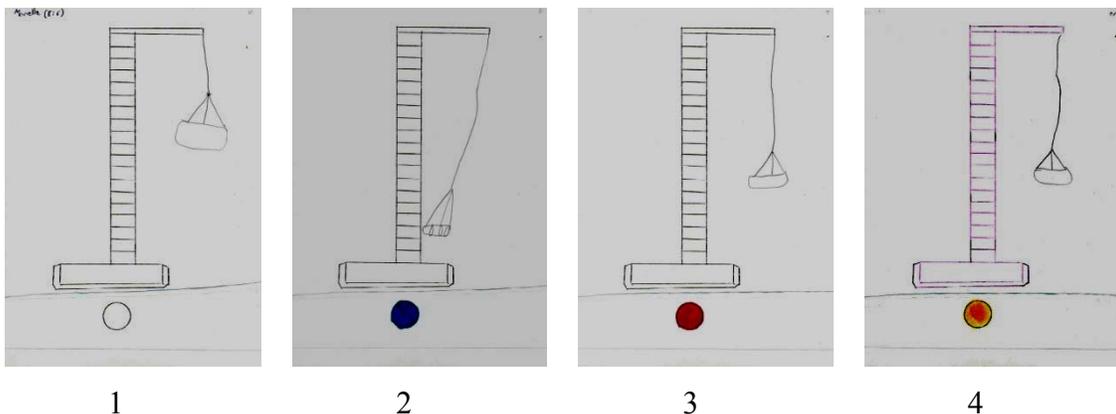
### Parte 1. Alargamiento de un resorte

#### Actividades.

1. Se muestra a los niños un artefacto construido en forma de una balanza graduada y tres objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes de color azul más pesado, rojo menos pesado y amarillo más ligero, así como tres marcadores del color de los objetos redondos.
2. Se le proporciona una fotocopia del dibujo de la balanza incompleta (le falta el resorte y la tapa), se le pide que observe la balanza sin peso y complete lo que le falta al dibujo.
3. Se le pide al niño que coloque uno de los objetos redondos en la balanza y observe lo que ocurre.
4. Se le proporciona una segunda fotocopia del dibujo, se le pide que dibuje lo sucedido y coloree el círculo que hay debajo de la balanza del color del objeto redondo.
5. Se repite la operación con los dos objetos restantes, haciendo 4 dibujos en total.
6. Se le indica que realice la seriación de los dibujos que están en desorden.
7. Se procede a cuestionarle acerca de lo sucedido.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

#### 1. Orden de seriación. Marielle (8 años)



La niña realiza la seriación de los dibujos de acuerdo al orden en que los hizo, observándose una relación de correspondencia entre los alargamientos del resorte y los pesos de los objetos. En los dibujos se observa que se alarga mas con el objeto azul, se alarga un poco con el objeto rojo y no se alarga con el amarillo (aunque el dibujo es un poco diferentes al primero). En el interrogatorio, Marielle explica el procedimiento en la realización de los dibujos y la relación de causalidad entre el alargamiento y el peso, como se muestra:

E: ¿Qué fue lo que hiciste?

M: Primero fui contando los cuadritos (señala las marcas de la balanza) hasta ver hasta donde llegaba la bolita y hasta ahí dibujaba la tapita).

E: ¿Y qué le sucedió?

M: Se bajó hasta abajo (toma la tapa y baja el resorte).

E: ¿Por qué?

M: Por lo pesado de la bolita.

E: Primeramente ¿cómo estaba la balanza?

M: Así como está ahorita (sin peso).

E: ¿Y después que le sucedió al resorte?

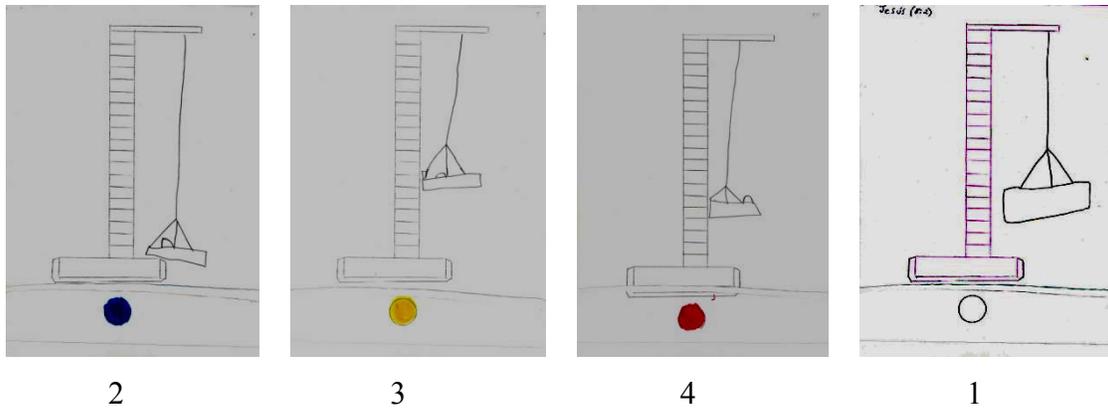
M: Se estiró mucho (toma la tapa y la baja).

E: ¿Por qué se estiró?

M: Por el peso de las bolas.

La niña centra su atención en el alargamiento del resorte. Se da cuenta por los dibujos realizados, que el cambio que sufre el resorte es originado por el peso de los objetos y sus respuestas refuerzan esta idea, se estiró “por lo pesado de la bolita, por el peso de las bolas”, aquí está presente la idea de la causalidad, la causa que origina que se alargue el resorte es por el peso de los objetos. Se hacen mención de ideas de temporalidad como: primero, cómo estaba, después.

2. Orden de seriación. Jesús (8 años)



La seriación no es realizada conforme a los dibujos que hizo. El primer dibujo es colocado al final, es posible que esto se deba a que centra la atención en el alargamiento del resorte y lo asocia al color del peso de los objetos, cosa que no sucede con el primer dibujo (la balanza sin peso), como a continuación se ve:

E: ¿Qué viste, qué le pasó?

J: Se estiró (señala el resorte moviendo su mano hacia abajo).

E: ¿Cuándo se estiró... por qué se estiró?

J: Porque la azul pesa más.

E: ¿Y con las otras no se estiraron?

J: Con la roja.

E: ¿Y con la amarilla?

J: Se quedó así (señala la tapa de la balanza sin nada).

E: Entonces la que se estiró más ¿cuál fue?

J: La azul.

E: ¿Y la que no se estiró?

J: La amarilla.

E: ¿Y la que se estiró un poquito?

J: La roja.

El niño se da cuenta del alargamiento que experimenta el resorte, pues en los dibujos que realiza hay una relación entre el alargamiento y el peso de los objetos y esta idea es reforzada

en sus respuestas, se estiró “porque la azul pesa más, con la amarilla no se estiró y un poquito con la roja”. Jesús nota por el color de cada objeto redondo, que tienen pesos diferentes.

El siguiente cuadro representa un resumen de esta situación experimental.

c) Tercera situación experimental. <b>Alargamiento de un resorte</b> (Parte 1)		
PARTICIPANTE	SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS	EXPLICA EL SUCESO
MARIELLE (8 años)	Realiza la seriación de acuerdo al orden de lo acontecido.	¿Por qué se estiró (el resorte)? “por el peso de las bolas”
JESÚS (8 años)	Seria los estados 2, 3, 4 y 1 respectivamente.	Explica lo ocurrido, se estira “porque la azul pesa más” no se estira con la “amarilla”

Los dos niños centran su atención en el alargamiento del resorte, esto se observa en los diferentes dibujos del alargamiento del resorte y esta idea es reforzada en el interrogatorio en el cual los niños en sus respuestas, explican la relación de causalidad que se presenta en el suceso entre el peso y el alargamiento, se estiró “por el peso de las bolas”, “porque la azul pesa más”, no se estira “con la amarilla”. El niño centra la atención del peso de los objetos por su color.

d) Cuarta situación **alargamiento de un resorte.**

La entrevista se realizó con dos niños, Anel de 5 años y Bryan de 7 años. En esta situación experimental se utilizaron cuatro objetos redondos de tamaños similares, colores y pesos diferentes (azul, rojo, verde y amarillo, de mayor a menor respectivamente). El objetivo fue analizar los procesos cambiantes de alargamiento de un resorte en relación con el peso de los objetos redondos. Además, en otro momento, se les pidió a los niños participantes ordenar los objetos redondos. Por lo que esta situación experimental se dividió en dos momentos.

Primer momento. Alargamiento de un resorte

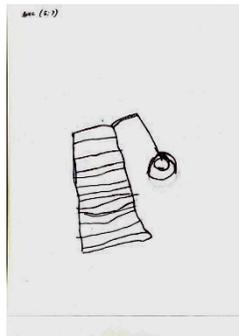
Actividades (similares a la tercera situación experimental).

1. Se le muestra al niño la balanza graduada y los objetos redondos de tamaños similares, pesos y colores diferentes amarillo, verde, rojo y azul.
2. Se le pide al niño que observe detenidamente la acción de colocar en la balanza de uno en uno cada objeto redondo.
3. Se le proporciona una hoja y se le pide que haga el dibujo de lo sucedido.
4. Se le interroga acerca de lo ocurrido.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1. Anel (5 años)

#### DIBUJO DE ANEL



La niña se le dificulta representar por medio de dibujos lo ocurrido en la situación experimental (alargamiento-peso), pues únicamente dibuja la balanza sin peso. En consecuencia, utiliza el lenguaje verbal para explicar lo sucedido, como a continuación se muestra:

E: ¿Puedes dibujar aquí lo que viste?

A: (Dibuja la balanza), ¡ya!

E: ¿Me podrías decir qué sucedió cuando le pusimos cada una de las pelotitas?

A: La amarilla se fue hasta aquí (señala en la balanza).

E: ¿Y la otra?

A: La roja cayó hasta aquí (señala un poco abajo).

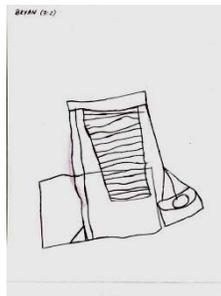
E: ¿Y hasta dónde cayó la azul?

A: Hasta acá (señala más abajo).  
E: Por qué cayó hasta allá abajo la azul?  
A: Porque está pesada.  
E: ¿Y la amarilla?  
A: No está pesada.  
E: ¿Y qué le pasa aquí al resortito?  
A: Se estira.  
E: ¿Por qué se estira, si se estira hasta abajo?  
A: Porque esta pelota, la pelota... pesada.  
E: ¿Y cuándo no se estira?  
A: Se supone que no está pesada.

La niña centra la atención en la acción misma del alargamiento que experimenta el resorte y en consecuencia, expresa la relación de causalidad alargamiento-peso ¿por qué se estira, si se estira hasta abajo? “porque esta pelota, la pelota... pesada” ¿cuándo no se estira? “se supone que no está pesada”. Anel distingue las diferencias de los pesos de los tres objetos, por el alargamiento que experimenta cada uno (trabajo con los objetos redondos amarillo, rojo y azul). De ahí que centre su atención en el alargamiento y pueda explicar la relación entre el alargamiento y el peso. Se da cuenta de que es el peso de los objetos lo que provoca que el resorte se estire ¿por qué cayó hasta allá abajo la azul? “porque está pesada” “se supone que no está pesada”. Es de comentar que la niña tiene dificultad en establecer la diferencia entre dos pesos, ésta la realiza volviendo a colocarlos en la balanza.

## 2. Bryan (7 años)

### DIBUJO DE BRYAN



El niño tiene dificultades en la realización de los dibujos (se trabajó con cuatro objetos redondos, agregando uno de color verde) de lo sucedido en la situación experimental, prefiere explicarlo verbalmente, como se muestra:

E: ¿Qué fue lo que viste... ahí dibújalo o me platicas?

B: Te platico.

E: Haber trata de dibujar también.

B: No sé cómo se hace esto (señala la balanza).

E: Pláticame ¿qué sucedió, qué viste?

B: Que cuando ponías se bajaba ésta (señala la tapa de la balanza), pero la amarilla no se bajó ahí quedó.

E: ¿Por qué no se bajaría?

B: Por... que no pesa.

E: ¿Por qué se estirara el resortito?

B: Porque... porque se baja esto con el peso (señala la tapa) y esto se estira (señala el resorte).

E: Entonces ¿por qué se estira mucho?

B: Porque le pusieron la pelota pesada, por ponerle pesado pues.

E: ¿Y si no se estira, si no se alarga?

B: Es porque le pusieron una pelota que no pesa.

El niño centra la atención en la acción que experimenta el resorte de alargarse. Bryan en sus respuestas explica la relación de causalidad entre el alargamiento y el peso “porque se baja esto (tapa) con el peso y esto se estira (resorte)”. El niño se da cuenta que el alargamiento del resorte es provocado por el peso de los objetos y si no se estira “es porque le pusieron una pelota que no pesa”.

A continuación se presenta un cuadro con el resumen de esta situación experimental.

d) Cuarta situación experimental. <b>Alargamiento de un resorte</b> (Primer momento)		
PARTICIPANTES	SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS	EXPLICA EL SUCESO
ANEL (5 años)	No hay seriación, solo dibuja la balanza.	¿Por qué se estira? “porque esta pelota, la pelota... pesada” ¿cuándo no se estira? “se supone que no está pesada”
BRYAN (7 años)	No hay seriación, solo dibuja la balanza.	¿Por qué se estira? “Porque... porque se baja esto con el peso (señala la tapa) y esto se estira (señala el resorte).”

Los dos niños tuvieron dificultad en representar, por medio de dibujos, lo sucedido en la situación experimental presentada, solo dibujaron la balanza. Los dos niños centran la atención en la acción que experimenta el resorte al alargarse y por consiguiente, explican la relación de causalidad entre el alargamiento y el peso, al colocar los objetos redondos en la balanza se dan cuenta que, se alarga más “*porque le pusieron la pelota pesada, por ponerle pesado pues*”, ¿y si no se estira, si no se alarga? “*es que porque le pusieron una pelota que no pesa*”, “*se supone que no está pesada*”.

e) Quinta situación **alargamiento de un resorte.**

Se entrevistaron a 4 niños de preescolar de entre 5 y 6 años. Esta situación experimental es similar a la cuarta, únicamente se agregaron cuatro fotocopias de la balanza por los resultados obtenidos en los dibujos de la situación anterior. El objetivo fue analizar los procesos cambiantes de peso y el alargamiento de un resorte. La situación experimental se dividió en dos momentos.

Primer momento. Alargamiento de un resorte

Actividades.

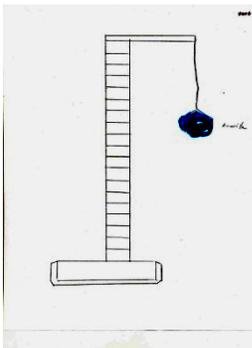
1. Se le presenta al niño la balanza graduada y los cuatro objetos redondos de tamaños similares, colores y pesos diferentes.
2. Se le indica que observe bien lo que sucede, cuando coloca al azar en la balanza un objeto redondo.

3. Se le proporciona una fotocopia de la balanza graduada sin el resorte y la tapa y se le pide que complete el dibujo de acuerdo a lo que observó (puede usar colores).
4. Se le solicita que coloque otra pelotita diferente y haga su dibujo, ejecuta la misma acción con las demás pelotitas, haciendo un total de cuatro dibujos.
5. Se le pide que realice la seriación de los dibujos (colocados en desorden) de acuerdo a lo sucedido.
6. Se le solicita que explique con sus propias palabras lo que sucedió.

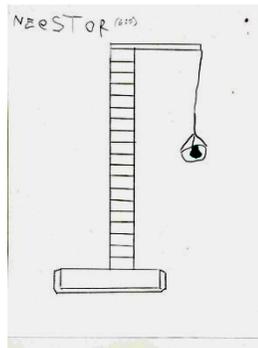
Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1. Néstor (6 años)

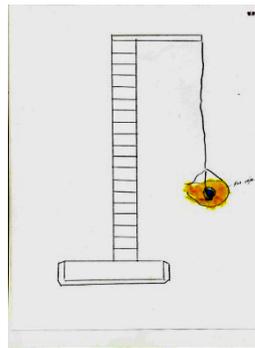
### SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS DE NESTOR



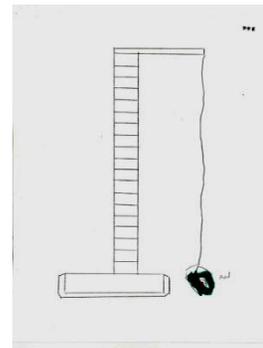
1 (pelota amarilla)



2 (pelota verde)



3 (pelota roja)



4 (pelota azul)

La seriación de los dibujos se corresponde al orden de los estadios de la situación experimental presentada. El niño centra su atención en la acción en sí del alargamiento del resorte, refiriéndose al alargamiento como “más chiquito”, como se muestra:

E: Éste va primero ¿por qué me dijiste que va primero? (pelotita amarilla).

N: Porque es el más chiquito.

E: ¿Está más chiquito esto (la pelota) o cuál es lo que está más chiquito?

N: Porque está más chiquito esto de largo (señalando en el dibujo el resorte).

E: ¿Por qué va ésta después de la segunda? (verde y roja respectivamente).

N: Está al revés (pasa la tercera que es verde al segundo lugar donde estaba la roja).

E: ¿Por qué ahora ésta va aquí? (la roja en tercer lugar).

N: Porque ésta (señala la roja) está más larga que ésta (señala la verde) y ésta (azul) está más larga que ésta (roja).

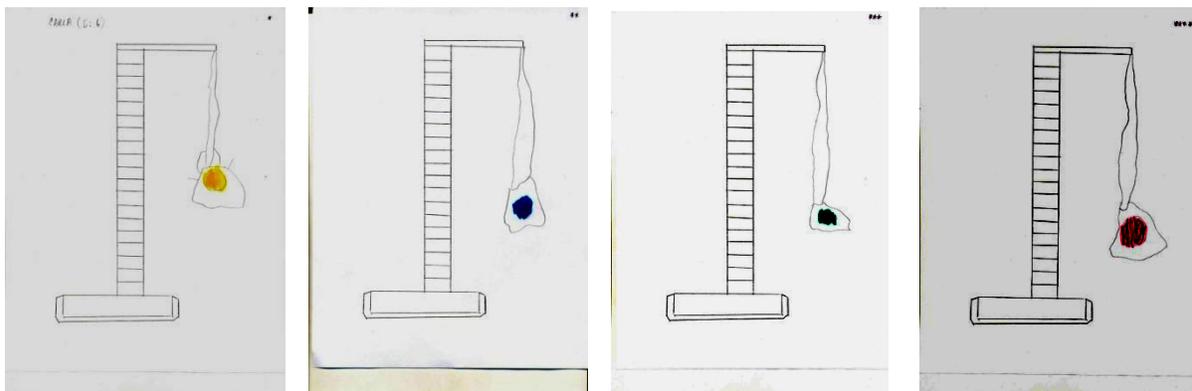
E: ¿Por qué ésta va al último? (la pelotita azul).

N: Porque es la más larga.

Néstor realiza la seriación de los dibujos, centrando la atención en el alargamiento del resorte, de menor a mayor alargamiento y lo refuerza expresando “porque ésta más chiquita”, “porque es la más larga”. Como se nota en los dibujos, el niño tiene problemas en la distinción de los colores amarillo, rojo y azul.

## 2. Carla (5 años)

### SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS DE CARLA



1 (pelotita amarilla)

2 (pelotita azul)

3 (pelotita verde)

4 (pelotita roja)

La seriación de los dibujos es de acuerdo al orden de los estadios de lo sucedido. Los alargamientos del resorte en los dibujos presentan poca diferencia. Esto hace suponer que la niña centra su atención en la acción del peso en sí (“caiga” para la niña), al colocar el objeto en la tapa, como se muestra:

E: ¿Te acuerdas qué fue lo que viste?

C: Que le puse una bolita...y se iba caer.

E: ¿Con todas pasó lo mismo?

C: No (mueve la cabeza negativamente).

E: ¿Cuál fue la que se bajó?

C: Ésta (agarra la pelotita azul y la coloca en la balanza).

Después de volver a colocar las pelotitas en la balanza de dos en dos se le pregunta:

E: ¿Cuál es la que se baja menos?

C: (Señala la amarilla).

E: ¿Y cuál es la que se baja más?

C: (Señala la azul).

E: De estas dos (verde y roja) ¿Cuál se baja más?

C: (Señala la roja y la coloca en la balanza).

E: ¿Por qué piensas tú que se baja?

C: Porque está pesada.

E: ¿Qué es lo que viste cuando pusiste las pelotitas?

C: Una se andaba cayendo...una pelotita se andaba cayendo para acá (señala hacia abajo).

E: ¿Y cuál es la que no cae?

C: La amarilla.

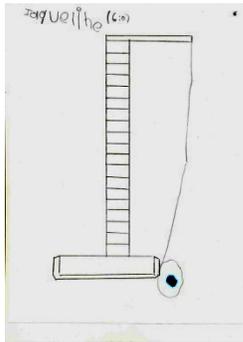
E: ¿Por qué cae, por qué baja?

C: Porque está pesada.

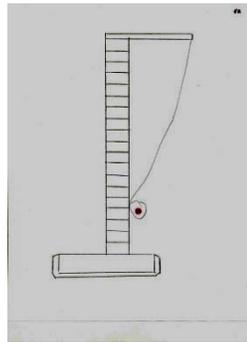
La niña en el interrogatorio, distingue las diferencias del peso por el color de los objetos, se “baja o caiga” para ella se refiere al peso, “se baja más” es el objeto azul que pesa más, “se baja menos” es el objeto amarillo el que pesa menos. La niña expresa en sus respuestas una relación de causalidad entre el peso y su efecto (alargamiento), por qué piensas que se baja reiterando “porque está pesada”. Es de mencionar que la comparación de las pelotitas la efectúa de dos en dos, colocándolas en la balanza para distinguir cuál pesa más, esto tiene que ver con el segundo estadio de la seriación.

### 3. Jacqueline (6 años)

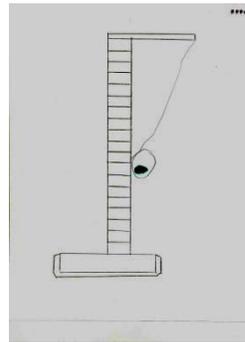
## SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS EN FORMA DESCENDENTE DE JAQUELINE



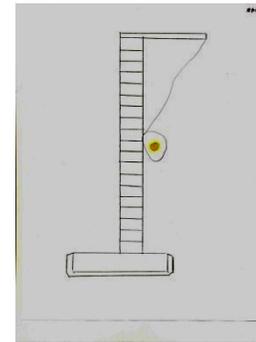
1 (pelotita azul)



2 (pelotita roja)



4 (pelotita verde)



3 (pelotita amarilla)

La seriación de los dibujos no se corresponde a los estadios de la situación presentada, pero el orden en que la niña los presenta, guardan una relación descendente (de mayor a menor) de acuerdo al alargamiento del resorte. Esto nos indica, que la niña centra su atención en el alargamiento que experimenta el resorte causado por el peso de los objetos, como a continuación se ve:

E: ¿Qué sucedió cuando le pusiste las pelotitas?

J: Se bajaron.

E: Pero, ¿se bajaron iguales?

J: No (moviendo la cabeza negativamente).

E: ¿Cuál se bajó más, cuál menos?

J: Estas tres (toma tres menos la amarilla).

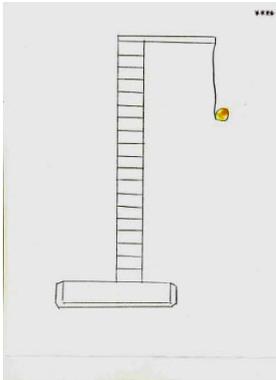
E: ¿Por qué se baja, por qué crees que se baja? (señalando el resorte).

J: Porque pesa ésta (tomando las pelotitas que pesan).

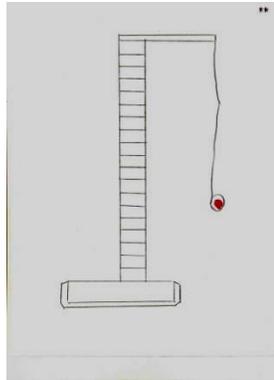
La niña en sus respuestas explica la relación de causalidad entre el alargamiento y el peso, ¿por qué crees que se baja? “porque pesa ésta” (tomando las pelotitas que pesan). A la niña también se le dificulta comparar dos pelotitas, para ello vuelve a colocar en la balanza cada pelotita y así verificar, esta acción la realiza varias veces comparando de dos en dos.

4. Armando (6 años)

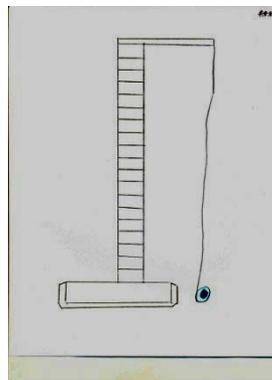
## SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS DE ARMANDO



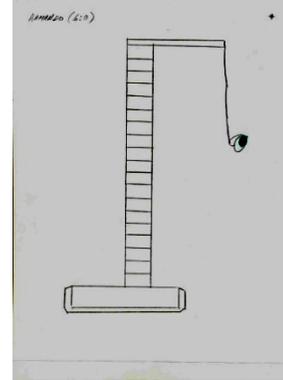
4 (pelota amarilla)



2 (pelota roja)



3 (pelota azul)



1 (pelota verde)

La seriación no se corresponde a los estadios de la situación experimental presentada. Sin embargo, los tres primeros dibujos guardan una relación de orden ascendente de acuerdo al alargamiento del resorte, el último no. El niño centra la atención en la acción del peso, “se cayó”, como se muestra:

E: ¿Qué fue lo que viste?

A: Que se cayeron todas (haciendo el resorte hacia abajo con su mano).

E: ¿Todas se cayeron?

A: Pero una no.

E: ¿Cuál no se cayó?

A: La amarilla (señalándola).

E: ¿Por qué crees que no se cayó la amarilla?

A: Porque era de papel.

E: ¿Y cuál de éstas pelotitas se cayó más?

A: La azul.

E: ¿Por qué?

A: Porque... está dura.

E: ¿Y la amarilla?

A: No se cayó.

E: ¿Y de la verde y la roja?

A: Se cayeron.

E: ¿Iguales se cayeron?

A: No (moviendo la cabeza).

E: ¿Cuál se cayó más?

A: La roja.

El niño centra la atención en el peso de los objetos distinguiéndolos por su color. En sus respuestas Armando explica la relación entre los objetos de acuerdo a su peso “todas se cayeron pero una no”, se cayó más “porque está dura la pelotita”, no se cae “porque era de papel” (al parecer, dura para el niño significa pesada y papel se refiere a algo que no pesa). En relación a los pesos intermedios (rojo y verde), el niño vuelve a colocar las pelotitas para verificar cual pesa más.

A continuación se presenta un cuadro con el resumen de esta situación experimental.

<b>e) Quinta situación experimental. Alargamiento de un resorte (Primer momento)</b>		
<b>NIÑO(A)</b>	<b>SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS</b>	<b>EXPLICA EL SUCESO</b>
CARLA (5 años)	De acuerdo al orden en que los realizó.	¿Por qué piensas que se baja? “porque está pesada”
NESTOR (6 años)	Efectúa la seriación de menor a mayor.	Va primero la amarilla “porque es la más corta (el resorte)”, después “porque ésta (roja) es más larga que ésta (verde) y ésta (azul) está más larga que ésta (roja).
JACQUELINE (6 años)	De mayor a menor peso.	¿Por qué crees que se baje? “porque pesa ésta (tomando las pelotas que pesan)”
ARMANDO (6 años)	Los tres primeros estados de acuerdo al peso, el último no.	¿Todas se cayeron (alargar el resorte)? “pero una no” no se cayó la amarilla “porque era de papel” se cayó hasta abajo (la azul) “porque está dura la pelotita”

Los niños entrevistados entre 5 y 6 años centran la atención en el alargamiento del resorte (Néstor 6 años y Jacqueline 6 años) o en el peso (Carla 5 años y Armando 6 años). En consecuencia los niños, explican la relación de causalidad entre el alargamiento del resorte y

el peso mencionando, se alarga el resorte “porque está pesada”, “porque pesa ésta” (tomando las pelotitas que pesan), “porque está dura la pelotita”. Los niños se dan cuenta que la pelotita amarilla es la que no pesa, ya que el efecto del peso hace que no se alargue el resorte “no cae, no se baja, porque era de papel, porque es el más chiquito” (no se estiró el resorte).

5.1.3 La ordenación de objetos redondos de tamaños similares, pesos y colores variables.

c) Tercera situación **ordenación de objetos redondos.**

Se entrevistó a dos niños de 8 años. En esta situación experimental el objetivo no fue planeado, únicamente se les pidió a los niños que realizaran algunas actividades relacionadas a la ordenación de los objetos redondos, por lo que se consideró para su análisis ubicar sus resultados en la parte 2.

Parte 2. Ordenación de objetos redondos

Actividades.

1. Se muestra a los niños tres objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes de color azul más pesado, rojo menos pesado y amarillo más ligero.
2. Se le pide que ordene los objetos redondos como pueda.
3. Se procede a cuestionarle acerca de su ordenación.

Estas actividades fueron realizadas a continuación de la seriación de los dibujos de la balanza de la parte 1.

Los resultados fueron los siguientes:

1. Marielle (8 años)

Se le pide que ordene los tres objetos redondos, preguntándole:

E: ¿Puedes ordenar esas pelotitas, las puedes ordenar, cómo las pudieras ordenar, cuál iría primero, cuál iría después?

M: Primero empezaría con el que no pesa (coloca la bolita amarilla), luego con el que pesa un poco (coloca la bolita roja después de la amarilla), luego con el que pesa mucho (coloca la azul después de la roja quedando en una hilera las tres).

E: ¿Cómo las ordenaste?

M: Este, primero fui buscando la que pesa menos y luego al último la que pesa más.

La niña centra la atención en la diferencia del peso de cada objeto. Con base en esta diferencia, realiza una ordenación de manera ascendente colocando en una hilera el objeto amarillo, rojo y azul, respectivamente “primero fui buscando la que pesa menos y luego la que pesa más”. Así, la niña establece su ordenación, pesa menos le corresponde el primer lugar, pesa un poco le corresponde el segundo lugar y finalmente la que pesa más le corresponde el último lugar. La niña en su ordenación hace mención de ideas asociadas a la temporalidad de un suceso: primero, luego y al último. Por lo que establecer, qué objeto va primero, segundo y final, es una ordenación en el tiempo, aún cuando no fue considerado.

## 2. Jesús (8 años)

Se le pide que ordene los tres objetos redondos haciéndole el siguiente cuestionamiento:

E: ¿Puedes ordenar estas pelotitas?

J: Pausa.

E: ¿Cómo pudieran ir ordenadas esas pelotitas?

J: (Las coloca en hilera).

E: ¿Cómo podrías ordenar, cuál iría primero?

J: (Coloca la azul al final, en medio la amarilla y al principio la roja).

E: ¿Por qué la amarilla ahí?

J: Porque pesa menos.

E: ¿Cuál seguiría... de la amarilla cuál seguiría?

J: La roja.

E: ¿Por qué?

J: Porque pesa poquito.

E: Y la azul ¿por qué?

J: Porque pesa más.

El niño realiza la ordenación de los objetos centrando la atención en su color, Primero el objeto rojo, después el amarillo y al final el azul. El niño al manipular los objetos redondos, se da cuenta de las diferencias de peso de cada uno, pero en su ordenación esta característica no la considera ¿por qué la amarilla ahí (segundo lugar)? “porque pesa menos” ¿cuál seguiría? “la roja, porque pesa poquito. En el interrogatorio se manifiestan ideas asociadas a la temporalidad de un suceso: primero, cuál seguiría.

El siguiente cuadro representa un resumen de la segunda parte de esta situación experimental.

c) Tercera situación experimental. <b>Ordenación de objetos redondos</b> (Parte 2)		
NIÑO(A)	ORDENACIÓN DE LOS OBJETOS	EXPLICA EL SUCESO
MARIELLE (8 años)	Ordenación en forma ascendente.	“primero fui buscando la que pesa menos y luego al último la que pesa más”
JESÚS (8 años)	De acuerdo al color: Rojo, amarillo y azul respectivamente.	¿Por qué la amarilla ahí? “porque pesa menos”, seguiría “la roja porque pesa poquito” y la “azul porque pesa más”

Los dos niños al realizar la ordenación de los objetos, sea por el peso o el color, están en el fondo implicando lugares o estados para cada objeto. El hecho de que la niña mencione que primero empezaría con la que pesa menos, luego al último la que pesa más, está considerando la característica peso como diferencia esencial para su ordenación. Así la niña hace una relación entre el lugar que ocupa un objeto de acuerdo con su peso. Por el contrario, Jesús centra su atención en el color de los objetos para realizar su ordenamiento (rojo, amarillo y azul). El niño distingue los diferentes pesos de los objetos en el interrogatorio, pero es el color la característica esencial la que predomina en su ordenación. En ambos casos se mencionan ideas de temporalidad asociadas a un suceso: primero, luego al último. Estos términos son importantes para establecer estadios de comparación en los fenómenos que cambian.

d) Cuarta situación **ordenación de objetos redondos.**

La entrevista se realizó con dos niños, Anel de 5 años y Bryan de 7 años. En esta situación experimental se utilizaron cuatro objetos redondos de tamaños similares, colores y pesos diferentes (azul, rojo, verde y amarillo, de mayor a menor respectivamente). El objetivo fue analizar los procesos que se manifiestan en la ordenación de objetos redondos. Por lo que esta situación experimental se dividió en dos momentos.

Segundo momento. Ordenación de objetos redondos

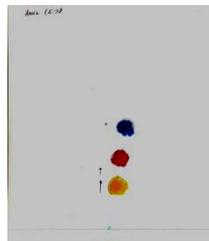
Actividades (similares a la tercera situación experimental).

1. Se muestra al niño los objetos redondos de tamaños similares, pesos y colores diferentes amarillo, verde, rojo y azul. El objeto rojo tiene un peso ligeramente mayor que el verde.
2. Se le pide que ordene los objetos redondos como pueda.
3. Se le proporciona una hoja blanca y se le pide que dibuje su ordenación.
4. Se procede a cuestionarle acerca de su ordenación.

Estas actividades fueron realizadas después de concluido el primer momento. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1. Anel (5 años)

ORDENACIÓN DE ANEL (de abajo hacia arriba: amarilla, roja y azul)



La niña realiza la ordenación de los objetos redondos en forma ascendente vertical (en este caso se trabajó con tres objetos), centrandó la atención en los diferentes pesos de cada objeto, como a continuación se muestra:

E: ¿Puedes ordenar estas pelotitas?

A: Ésta (señala la amarilla).

E: ¿Por qué crees que va primero?

A: Porque no está pesada.

E: ¿Y cuál se sigue?

A: Ésta (señala la roja).

E: ¿Y después?

A: Ésta (señala la azul).

Anel realiza la ordenación de los objetos redondos, centrando la atención en las diferencias de peso de los objetos (de menor a mayor) de manera vertical y justifica su ordenación diciendo que la amarilla va primero “porque no está pesada”, le sigue la roja y después la azul. La niña relaciona el lugar que ocupa el objeto de acuerdo con su peso. En esta ordenación se hacen uso de términos asociados a la temporalidad de un suceso: primero, después. Estos términos suelen ser usados en el lenguaje verbal para establecer estadios de diferencias en las cosas cambiantes.

## 2. Bryan (7 años)

### ORDENACIÓN DE BRYAN (amarilla, verde, roja y azul)



La ordenación la realiza de menor a mayor peso de los objetos en forma horizontal. El niño centra su atención en las diferencias de peso de cada objeto, como se muestra:

E: ¿Puedes ordenar estas pelotitas?

B: Así (coloca la amarilla, la verde, la roja y la azul respectivamente).

E: ¿Por qué ésta al último la azul?

B: Porque pesa más.

E: ¿Y por qué ésta primero, la amarilla?

B: Porque pesa menos.

E: ¿Y la verde?

B: Porque pesa un poquito más.

E: ¿Y la roja?

B: Porque pesa un poco más también.

E: ¿Un poco más? entonces...

B: No porque pesa ésta un poco menos (señala la verde) y ésta un poco más (señala la roja).

E: ¿Así las ordenarías?

B: Sí.

Bryan considera como característica las diferencias de peso de cada objeto para su ordenación. El niño se da cuenta que la pelota amarilla es la menos pesada y la azul es la que más pesa, puesto que al realizar la ordenación las coloca al principio y al final. Después coloca la verde en segundo lugar y la roja en tercero, existe duda en estas dos ya que el peso es parecido “porque pesa un poquito más (verde)” “porque pesa un poco más también (roja)” “no porque ésta pesa menos (verde) y ésta un poco más (roja)”. Cabe hacer notar que cuando los objetos de tamaños parecidos y de pesos diferentes, el niño distingue fácilmente los que tienen una diferencia notoria (no pesa y pesa mucho), se le dificulta distinguir los pesos con diferencias mínimas. Esto tiene relación con lo que mencionan Nemirovsky & Carvajal (1994) acerca del segundo estadio de la seriación, en donde el niño tiene que comparar los dos elementos para decidir donde poder colocar uno de ellos.

Los términos primero y último, denotan orden entre objetos. Cuando se ordena algo se hace considerando una característica, pero también estos términos son utilizados en la distinción de sucesos que cambian.

A continuación se presenta un cuadro con el resumen del segundo momento de la situación experimental.

d) Cuarta situación experimental. <b>Ordenación de cuerpos redondos</b> (Segundo momento)		
NIÑO(A)	ORDENACIÓN DE LOS OBJETOS	EXPLICA EL SUCESO
ANEL (5 años)	Ascendente vertical.	¿Por qué crees que va primero (la amarilla)? “porque no está pesada” le sigue “la roja” y después “Ésta” (señala la azul)
BRYAN (7 años)	Ascendente en forma horizontal.	La azul al último “porque pesa más”, la amarilla primero “porque pesa menos”, después la verde y la roja “porque pesa ésta un poco menos (señala la verde) y ésta un poco más (señala la roja)”.

Los dos niños centran la atención en las diferencias de peso de cada objeto. Se les dificulta la comparación (quién pesa más o quién pesa menos) de dos pesos, en particular entre dos objetos cuyas diferencias son mínimas. Con base en la diferencia de peso de los objetos realizan su ordenación. La niña en sus respuestas menciona que el objeto amarillo es el que ocupa el primer lugar “porque no está pesada”, le sigue “la roja” y después la azul. Por su parte, el niño justifica colocar en primer lugar el objeto amarillo “porque pesa menos”, después la verde y la roja “porque pesa ésta un poco menos (la verde) y ésta un poco más (la roja)” y al último la azul “porque pesa más”. Los dos niños relacionan el lugar que ocupa cada objeto de acuerdo con las diferencias de menor a mayor peso. Estas diferencias permiten crear estadios de comparación (va primero la amarilla, después la roja, al último la azul). Estadios necesarios cuando se pretende cuantificar las cosas que cambian. Los términos primero, después y último mencionados en el interrogatorio, están asociados a ideas de orden entre cosas y a la temporalidad de un suceso, en consecuencia se pueden establecer estadios con las diferencias de un suceso.

e) Quinta situación **ordenación de cuerpos redondos**.

Se entrevistaron a 4 niños de preescolar de entre 5 y 6 años. El objetivo fue analizar los procesos cambiantes en la ordenación de cuatro objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes amarillo, verde, rojo y azul. Esta situación experimental es similar a la cuarta y se dividió en dos momentos.

Segundo momento. Ordenación de objetos redondos

Actividades.

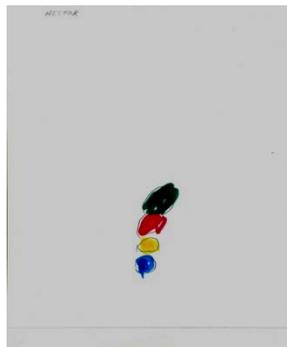
1. Se muestra al niño los objetos redondos de tamaños similares, pesos y colores diferentes amarillo, verde, rojo y azul. El objeto rojo tiene un peso ligeramente mayor que el verde.
2. Se le pide que ordene los objetos redondos como pueda.
3. Se le proporciona una hoja blanca y se le pide que dibuje su ordenación.
4. Se procede a cuestionarle acerca de su ordenación.

Estas actividades fueron realizadas después de concluido el primer momento. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1. Néstor (6 años)

#### ORDENACIÓN DE LAS PELOTITAS DE NESTOR

(El color de los objetos redondos de abajo hacia arriba es azul, amarillo, rojo y verde)



El niño realiza la ordenación de los objetos, centrandó la atención en el tamaño de los objetos (tienen tamaños similares) en forma vertical de manera ascendente. Como a continuación se ve:

E: ¿Las puedes ordenar (las pelotitas)?

N: En fila (amarilla, azul, roja y verde).

E: ¿Por qué las ordenaste así?

N: Porque así van derechas.

E: ¿Y por qué va la amarilla primero?

N: Porque está muy...chiquita (corrige y la coloca después de la azul).

E: ¿Por qué la verde hasta atrás?

N: Porque es la más grande.

E: Entonces ¿cómo las ordenaste?

N: Derecha.

E: ¿Puedes ordenarlas de otra forma, cómo las puedes ordenar?

N: (Pone las cuatro pelotitas juntas formando un rombo).

E: ¿Cómo las ordenaste, por qué así en bolita?

N: Porque (pausa), este porque se pueden ordenar así.

Néstor centra su atención en el tamaño de los objetos redondos y lo utiliza como criterio para realizar su ordenación. La ordenación la justifica diciendo “porque se pueden ordenar así”. En el interrogatorio nuevamente se hace mención del término primero asociado al orden y temporalidad.

## 2. Carla (5 años)

### ORDENACIÓN DE LAS PELOTITAS DE CARLA

(El color de las pelotitas de izquierda a derecha son amarillo, azul, verde y rojo)



La ordenación de los objetos la realiza, de acuerdo al orden en que hizo los dibujos de la balanza en el primer momento, como se muestra:

E: ¿Cómo las ordenarías, cuál crees que va primero?

C: (Pone la amarilla, luego la azul, después la verde y al final la roja).

E: ¿Por qué va primero la amarilla?

C: Porque ésta está primera.

E: ¿Y por qué va la azul ahí? (segundo lugar)

C: Porque es la segunda.

E: Pero ¿por qué?

C: Porque allí va de la amarilla (señalando los dibujos).

Al parecer la niña centra la atención, en el orden en que realizó los dibujos de la balanza en el primer momento, con su respectivo color. En consecuencia, toma esta característica para hacer la ordenación de los objetos, expresando en sus respuestas que la amarilla va primero “porque está primero”, la azul “porque es la segunda, porque allí va de la amarilla (señalando los dibujos)”.

3. Jacqueline (6 años)

### ORDENACIÓN DE MAYOR A MENOR DE LAS PELOTITAS DE JAQUELINE

(Los colores de las pelotitas son azul, rojo, verde y amarillo)



La ordenación de los objetos redondos la realiza de mayor a menor. Jacqueline centra la atención en las diferencias de los pesos de los objetos, como se observa:

E: ¿Por qué las ordenaste así?

J: Porque así iban.

E: ¿Cuál iba primero?

J: (Toma la azul).

E: ¿Por qué va primero?

J: Porque ella pesa más.

E: ¿Y por qué va al último la amarilla?

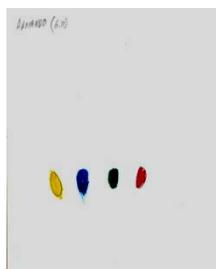
J: Porque no pesa.

La niña centra la atención en el peso de los objetos y el orden en que hizo los dibujos del primer momento para realizar la ordenación de los diferentes pesos de mayor a menor. El primer objeto es el que pesa más, al último el amarillo “porque no pesa”. Jacqueline relaciona el lugar con el peso correspondiente, a cada peso de un objeto le corresponde un lugar. Es de comentar que en algunos momentos, utiliza la percepción de peso manipulando los objetos, para diferenciar su peso.

#### 4. Armando (6 años)

##### ORDENACIÓN DE LAS PELOTITAS DE ARMANDO

(El orden es de derecha a izquierda, los colores de las pelotitas son: rojo, verde, azul y amarillo respectivamente)



El niño ordena los objetos redondos al azar. Como a continuación en el interrogatorio se muestra:

E: ¿Cómo las ordenas?

A: (Coloca las pelotitas en forma vertical primero la roja, después la verde, la azul y al final la amarilla).

E: ¿Por qué va primero la roja?

A: Porque la puse primero.

E: Y la verde ¿por qué le sigue?

A: Porque la puse segundo.

E: Pero de acuerdo a lo que tú vistes... ¿así las ordenarías o cómo las ordenarías?

A: Así.

El niño efectúa la ordenación de los objetos redondos al azar, sin considerar alguna característica de los objetos. En sus respuestas menciona que va primero la roja “porque la puse primero”, la verde “porque la puse segundo”. Es de mencionar que el niño colocó las pelotitas en forma vertical y después las dibujó en forma horizontal de derecha a izquierda.

A continuación se presenta un cuadro con el resumen de esta situación experimental.

e) Quinta situación experimental. <b>Ordenación de cuerpos redondos (Segundo momento)</b>		
NIÑO(A)	ORDENACIÓN DE LOS OBJETOS	EXPLICA EL SUCESO
CARLA (5 años)	De acuerdo con la seriación de los dibujos del primer momento (amarillo, azul, verde y rojo).	“Porque ésta está primera (amarilla)” “porque es la segunda (azul)”
NESTOR (6 años)	Ascendente en forma vertical, según el tamaño de los cuerpos.	“Porque se pueden ordenar así”.
JACQUELINE (6 años)	De mayor a menor.	¿Por qué va primero (azul)? “porque ella pesa más” la amarilla al último “porque no pesa”
ARMANDO (6 años)	Ordena los cuerpos redondos al azar.	¿Por qué va primero la roja? “porque la puse primero” y la verde “porque la puse segundo.

Los cuatro niños entrevistados realizan la ordenación de los objetos redondos de diferentes maneras. Néstor centra la atención en el tamaño de los objetos (aunque tenían similar tamaño) para realizar la ordenación y en sus respuestas menciona “porque se pueden ordenar así”. Aún así, el niño hace una relación entre el tamaño del objeto con el lugar que le asignó él, azul el primero, amarillo el segundo, rojo el tercero y verde el último. En este sentido, Néstor identifica diferencias de tamaño entre los objetos y los ordena, según él, del más chico al más grande. Estas diferencias de tamaño son propias de la seriación y a la vez se relacionan con las cosas que cambian. Por su parte Armando, realiza la ordenación de los objetos al azar, sin considerar alguna característica de los objetos, en sus respuestas al interrogatorio justifica diciendo “porque la puse primero (la roja)” “porque la puse segundo (la verde)”. Carla centra la atención en la seriación de los dibujos que realizó en el primer momento y la ordenación de los objetos la realiza en ese orden (amarillo, azul, verde y rojo). Al cuestionarle su ordenamiento menciona que puso la amarilla “porque está primera”, la azul “porque es la segunda” ¿por qué? “porque ahí va de la amarilla (señalando los dibujos)”. Carla relaciona el objeto redondo, con el lugar que ocupó en la seriación de los dibujos en el primer momento. A su vez, Jacqueline realiza su ordenación centrandó la atención en la diferencia del peso de los objetos de mayor a menor. En el interrogatorio ella menciona que, va primero la azul “porque pesa más” la amarilla va al final “porque no pesa”. Jacqueline relaciona las diferencias del peso de los objetos y de esta diferencia ordena cada objeto de mayor a menor de acuerdo a su peso. La diferencia de los pesos de los objetos y su consecuente ordenación, hacen posible establecer estadios de comparación entre las cosas cambiantes, como las diferencias del peso de los objetos, esta es una idea de la variación. Asimismo, se hacen mención en los interrogatorios del uso de términos: primero, segundo, al último. Dichos términos están asociados al orden de cosas y la temporalidad de un suceso. Es de mencionar que existe cierta dificultad en los niños al comparar los pesos intermedios, la comparación la hacen volviendo a utilizar la balanza, no así los pesos inicial y final. Esto según Nemirovsky & Carvajal (1994) forma parte del segundo estadio de la seriación donde el niño tiene que hacer comparaciones entre dos elementos para decidir qué elemento es el que continua en la serie. Los niños perciben los cambios más notables: inicial y final propios del primer estadio de la seriación.

# CONCLUSIONES

Los resultados de los experimentos planteados, nos proporcionan evidencias de ideas primarias en niños pequeños, acerca de la construcción de la noción de variable. Por lo que las preguntas que nos planteamos inicialmente ¿cómo se construye la noción de variable? y ¿qué procesos favorecen su construcción? La primera pregunta queda contestada en un primer acercamiento, que la construcción de la noción de variable en niños pequeños está asociada a la centración, la causalidad y la seriación.

La construcción de la noción de variable al parecer ocurre, cuando entran en juego la centración, la causalidad y la seriación en las percepciones de los fenómenos concretos. En estas percepciones de los fenómenos, la centración juega un papel importante, centrar la atención en un suceso o fenómeno, es fijar la atención en alguna particularidad del mismo, que nos estimule a buscar su explicación. En la búsqueda de la explicación, los fenómenos están ligados por causas y efectos, es decir para que las cosas sucedan debe existir algo que las origine, esto es, una relación de causalidad. La causalidad según García (1991) no es otra cosa que una explicación de los hechos encontrados a partir de la acción.

Consideramos que cuando los niños explican en un fenómeno la relación de causalidad, establecen relaciones entre variables. En esta explicación se hace presente la temporalidad del suceso y como consecuencia la seriación, pues hay un estado inicial que origina el suceso y al menos un estado final que provoca el efecto. Según Nemirovsky & Carvajal (1994) la seriación puede ser temporal y se manifiesta en los niños con las palabras “antes, ahora, después, etc.”. Esta seriación temporal se hizo presente en las explicaciones verbales de los niños de la causalidad del suceso observado.

Por otro lado, nuestros experimentos fueron diseñados con la finalidad de que los niños centraran la atención en dos variables. La mayoría de los niños centraron la atención a las cosas cambiantes, descenso del líquido, altura creciente de un líquido, alargamiento de un resorte, la ordenación de objetos redondos (de tamaños similares, colores y pesos diferentes). Esta centración condujo a los niños a la explicación de la causalidad del suceso al relacionar dos variables y establecer la seriación temporal (estados del suceso). Así en el descenso del volumen de un líquido, las variables que se relacionan son el descenso del volumen del líquido

y el tiempo. Estas relaciones se manifiestan cuando los niños expresan que al principio estaba “lleno” y después “se le fue saliendo el agua” y al final “vacío”. La seriación temporal se expresa verbalmente por el uso de las palabras “al principio, después y al final” y queda plasmada en la seriación de los dibujos del suceso. Es en el momento de seriar los dibujos, cuando los niños después de observado el fenómeno, ellos ordenan los dibujos del suceso que estaban colocados en desorden de manera cronológica. De esta forma se manifiesta la relación de las dos variables y los niños establecen estadios de cambio, propios de la variación como son en este caso: al principio “estaba lleno” (estado inicial), después “se le fue saliendo el agua” (segundo estado) y al final “vacío” (estado final). De manera similar con la altura creciente del nivel del líquido, las relaciones entre la altura creciente del líquido y el tiempo, se manifiestan cuando los niños explicaron que al principio estaba “con poca agua” y después “con muchito” y al final “lleno”, además de la seriación de los dibujos del suceso en el sentido antes mencionado.

En el experimento del alargamiento de un resorte, las variables que se relacionan son el alargamiento del resorte y el peso, las relaciones entre estas variables quedan de manifiesto, cuando los niños explicaron las relaciones de causalidad (se estira el resorte “por el peso de las bolas”, “porque la azul pesa más”, no se estira “con la amarilla”) y al realizar la seriación de los dibujos del suceso de manera cronológica. En la ordenación de los objetos redondos de tamaños similares, los niños establecen diferencias entre los diferentes pesos. Teniendo esta característica como criterio, realizan la ordenación de manera ascendente o descendente (una niña). Cuatro niños utilizan otro criterio en su ordenación: Néstor realiza la ordenación de acuerdo al tamaño, Jesús utiliza como criterio el color, Carla ordena los objetos redondos en el orden en que hizo los dibujos y Armando los ordena al azar. Estos criterios que utilizan los niños en su ordenación, tiene que ver a nuestro juicio, con la consigna que se les planteó (¿puedes ordenar estas pelotitas, cómo las pudieras ordenar?) y la centración que tuvieron los niños de los objetos a ordenar, es decir identificar una característica común en los objetos y a partir de ésta considerar sus diferencias. El hecho de ordenar los objetos implica en el fondo, en el caso del peso como criterio, una comparación entre los diferentes pesos y la correspondiente ordenación de manera ascendente o descendente, estableciendo lugares para cada objeto (primero, segundo, tercero y cuarto), es en el momento en que los objetos le corresponde un solo lugar, cuando la variable tiempo se hace presente, pues hay un primer

lugar para un objeto en un tiempo determinado, un segundo lugar para otro objeto en un tiempo posterior al primero y así sucesivamente, es de esta forma como la variable peso y el tiempo se relacionan. De manera similar sucede cuando el niño utiliza como criterio el tamaño o el color. Las relaciones entre estas variables quedan de manifiesto, cuando los niños explicaron las relaciones de causalidad (¿por qué va primero el amarillo? “porque no pesa”, y la azul que va al final “porque está pesada”, “porque se pueden ordenar así”).

La segunda pregunta ¿qué procesos favorecen la construcción de la noción de variable? De acuerdo a los resultados de nuestros experimentos, encontramos algunos indicios de que la variable asociada a la centración, la causalidad y la seriación, puede desarrollarse en niños pequeños, por medio de la observación de fenómenos concretos puestos en escena para su control. Dichos fenómenos contribuirán al establecimiento de estadios del suceso. En nuestras situaciones experimentales, además de la intencionalidad de centrar la atención en dos variables, se controlaron estadios del suceso, esto con la finalidad de que los niños hicieran los dibujos respectivos de cada estadio y así después de observado el fenómeno y realizado los dibujos del suceso, a los niños se les colocaba en desorden los dibujos y ellos tenían que realizar la seriación de acuerdo a lo acontecido. En la mayoría de los casos que analizamos, los niños hicieron esta seriación de acuerdo a lo ocurrido. Así es como consideramos que la seriación es una actividad que favorece el desarrollo de la noción de variable. Al seriar los niños establecen una comparación entre cualidades de los objetos que tienen en común, en el caso del peso, los niños comparan y establecen diferencias entre los objetos para clasificarlos (cuál pesa menos, cuál pesa más) y ordenarlos ya sea de forma ascendente o descendente.

Las actividades de ordenación y seriación llevadas a cabo en los experimentos implican, para la ordenación, crear relaciones entre los objetos con algo y en la seriación el establecimiento de estados y su consecuente distinción (E1, E2,...). La ordenación es con base a una característica o cualidad de los objetos, en nuestro caso esa ordenación la mayoría de los niños la establecen, cuando centran la atención, por ejemplo en las diferencias del peso entre los objetos. Por su parte, la seriación es con base al tiempo, esto queda de manifiesto cuando se utilizan los términos “antes”, “después” “al final” en la explicación de un fenómeno y cuando los niños realizan la seriación de los dibujos de un suceso, es en este caso cuando la variable tiempo emerge sin necesidad de explicitarla.

Otro elemento que consideramos, puede favorecer el desarrollo de la noción de variable y que se manifestó en nuestros experimentos, fueron los argumentos que dieron los niños, al pedirles que explicaran con sus propias palabras lo sucedido. En el experimento del ascenso del líquido y la altura creciente de un líquido, la mayoría de los niños argumentan que al principio “estaba lleno”, después “se fue bajando” al final “vacía”, “se acabó, se fue bajando” y “Estaba lleno, un poquito al medio y otra vez lleno”, respectivamente. Cuando los niños utilizan los términos “antes” “después” “al final”, están en el fondo implicando qué suceso estuvo primero, qué suceso estuvo después, esta es manifestación de la percepción de la variable, ya que estos términos son los elementos primordiales de la variación, pues ésta consiste en la determinación de estadios, uno percibe la variación si se tiene al menos dos estadios y se pueden comparar. El uso de los términos antes mencionados, pueden contribuir a desarrollar la noción de variable.

Es de mencionar, que en los experimentos realizados, los niños perciben con mayor facilidad los cambios bruscos “porque es que estaba vacío y lleno”. A los niños de entre 4 y 5 años, se les dificulta expresar verbalmente la causalidad de lo sucedido, esto es posible que se deba al lenguaje y a la madurez de los conocimientos propios de la edad. Además en su mayoría a los niños, cuando se les pide que orden los objetos redondos, no tienen dificultad para determinar qué objeto es el que pesa más y cuál es el que pesa menos, la dificultad estriba cuando son dos objetos que tienen una mínima diferencia de peso, la comparación la realizan tomando los objetos de dos en dos colocándolos en la balanza nuevamente o percibiendo mediante la manipulación la diferencia del peso. Los niños entre 6 y 7 años se pueden considerar en un estadio intermedio, pues aunque algunos expresan la causalidad del suceso, tienen dificultades al comparar pesos con diferencias pequeñas. Los niños de 8 años al parecer ya tienen ideas de lo que cambia, pues el caso de Marielle quien participa en el ascenso de la altura del líquido y el alargamiento de un resorte, no tiene dificultades en establecer la causalidad y la seriación del suceso al relacionar dos variables.

Por otro lado, de los experimentos realizados, al parecer, los niños no perciben la variable en el suceso de manera aislada, sino que al expresar la causalidad del suceso, es ahí, donde establecen la relación entre las dos variables de la forma  $P \rightarrow Q$  desde el punto de vista fenomenológico. De esto se puede hacer la siguiente reflexión, si las primeras percepciones de

la variable en los niños pequeños que entrevistamos son de la forma  $P \rightarrow Q$ , entonces cuando la variable adquiere ciudadanía como ente matemático, ¿no es así? El trabajo desarrollado en la presente investigación sugiere indagar y encontrar evidencias que contribuyan a profundizar estas ideas y poder responder a preguntas como ¿a qué edad es conveniente que se desarrolle la noción de variable? ¿Qué actividades son apropiadas para desarrollar esta noción en niños pequeños?, estos son algunos cuestionamientos que puedan contribuir a comprender esta importante noción.

# BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. D., *et al* (1981). Visión general de la matemática. En *La matemática I, su contenido, métodos y significado* (pp. 17-89). España: Alianza Editorial.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Relime*. 6(3), 199-219.

Cantoral, R., *et al* (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*. Sociedad Thales, España. Núm. 42, 14(3), 353-369.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E (2002). Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*. 33(5), 352-378.

Castorina, J. *et al* (1998). *Piaget en la educación*. México: Paidós.

Cruz, P. & Dolores, C. (2006). La noción de seriación en niños preescolares del Estado de Guerrero. *Memoria X Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. pp. 54-65. Sta. Cruz, Tlaxcala, México.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. Tesis doctoral, Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona” La Habana, Cuba.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Fernando Hitt (Ed.). Cap. 13, pp. 257-272. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D.F.

Dolores, C., Alarcón, G. & Albarrán, D. (2002). Concepciones Alternativas sobre gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria. *Relime*. 5(3), 225-250.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas, concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Relime*. 7(3), 195-218.

Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflexive Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*. 5, 55-92.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.). *Pensamiento Matemático Avanzado* (pp. 95-126). Kluwer Academia Publishers.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viraje personal. *Relime*. 3(1), 47-70.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Holton et al (Eds.). *The teaching and learning of mathematics at University Level An ICMI Study* (pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky et al., (2004). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. [En línea] Disponible en: <http://math.kent.edu/~edd/framework.pdf>

English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*. 91 (2), 166-170.

Fujii, T. (2004). *Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand?*. [En línea] Disponible en: <http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/Plen5fujii.pdf>

García, E. (1991). *Piaget*. Biblioteca grandes educadores: 5. México: Trillas.

Inhelder, B., Sinclair, H. & Bovet, M. (1975). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento*. España: Ediciones Morata. (pp. 57-85).

Juárez, J. (2002). *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Kieran, C., Booker, G., Filloy, E., Vergnaud, G. & Wheeler, D. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). Cambridge, USA.: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kuchemann, D. (1980). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*. 7(4), 23-26

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime*. 6(3), 221-278.

Moreno, L. (1991). En torno a las nociones de número y variación. *Mathesis*. 7(2), 189-204.

Nemirovsky M., Carvajal A. (1994). ¿Qué es el número? y construcción del concepto de número en el niño. En *Antología: Génesis del pensamiento matemático en el niño en edad preescolar* (pp. 11-28). México, SEP-UPN.

Piaget, J. y Colaboradores. (1971). *La epistemología del tiempo*. Buenos Aires, Argentina: El Ateneo.

Piaget, J. (1976). *La toma de conciencia*. España: Ediciones Morata.

Piaget, J., Inhelder, B. (1981). *Psicología del niño*. España: Ediciones Morata.

Piaget, J. (1987). *La formación del símbolo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (1992). Las operaciones elementales: Tiempo y movimiento. En *El Desarrollo de la noción de tiempo en el niño* (pp. 9-44). México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J., García, R. (1996). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo Veintiuno.

Piaget, J. (2000). *La equilibración de las estructuras cognitivas problema central del desarrollo*. México: Siglo veintiuno editores.

Puig, L. & Rojano, T. (2004). The History of Algebra in Mathematics Education. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12<sup>th</sup> ICMI Study*. Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Eds.). Cap. 8, pp. 189-223. Kluwer Academic Publishers. U.S.A.

Pulasky, M. (1985). *Para comprender a Piaget*. Barcelona: Península.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The mathematics teacher*. 74 (6), 418-420.

Rubinstein, J. (1977). *Principios de Psicología General*. Vedado, La Habana: Pueblo y Educación.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics teacher*. 81 (6), 420-427.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers. 22, 1-36.

Trigueros, M., Ursini, S. & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*. 12 (2), 27-48.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática*. 6(3), 90-108.

Ursini, S. (1996). Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 423-455), Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación Matemática*, 8(2), 33-40.

Vicario, M. (2002). *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior*. Tesis de licenciatura no publicada, FM-UAG, México.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables?. *The mathematics teacher*. 76 (7), 474-479.

# ANEXOS

## SITUACIÓN EXPERIMENTAL 1

### “DESCENSO DEL FLUIDO DE UN LÍQUIDO”

**OBJETIVO:** Analizar las percepciones en niños de 5 a 8 años del fenómeno descenso de la altura del volumen de un líquido con respecto al tiempo.

**MATERIAL:** Un embudo de separación, un vaso deprecipitado, agua colorada (rosa), 6 fotocopias del embudo de separación, marcador, grabadora.

### DESARROLLO

Se le pide al niño que observe el embudo de separación (lleno de agua color rosa) y se le indica que hay una válvula en la parte inferior que controla la salida del líquido y cae al vaso deprecipitado, dicha salida se realizará contando en intervalos de 5 segundos haciendo un total de 4 intervalos; para esto se le proporcionarán 6 hojas del dibujo del embudo de separación para que vaya marcando los niveles del líquido, al finalizar esta actividad, se le pide que realice la seriación de los dibujos, por último se le hacen preguntas tales como: ¿recuerdas al principio cómo estaba el líquido?, ¿y al final?, ¿puedes explicar qué sucedió?, etc.. Para tener el registro de las entrevistas se utilizó una grabadora.

### RESULTADOS DE LA EXPLORACIÓN

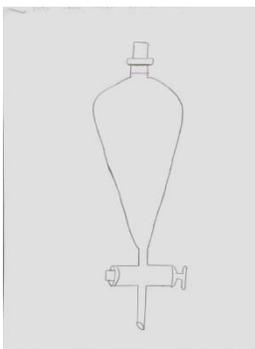
**ANEL** (5 años, 5meses).

<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>ANEL</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le presenta el embudo de separación lleno de agua de color rosa y se le indica que lo observe.
El frasquito ¿hasta dónde está?... ¿está vacío o está lleno?	Está lleno.	
Haber márcale ahí en tu dibujito hasta dónde está, hasta donde llega, ya te fijaste hasta dónde está.	(Marca la parte superior del frasco en el dibujo).	Se le proporciona una fotocopia del embudo de separación para cada marca.
Ahora le voy a ir abriendo a la llavecita y en este otro dibujito tú le marcas hasta donde llega el agüita, ahora marca hasta donde quedó.	(Marca la parte superior del embudo en el dibujo).	No percibe que descendió el volumen del líquido.
Ahora vamos abrirle otro poquito, fijate hasta dónde quedó y le marcas con una rayita hasta dónde está en	Aquí (vuelve a marcar la parte superior del frasco en el dibujo).	Otra vez no se da cuenta del descenso del líquido al realizar la marcación.

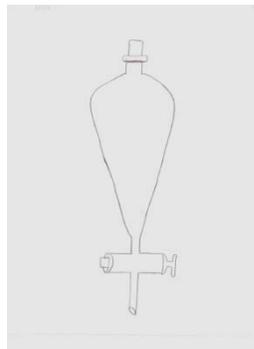
este dibujito.		
Ahora le voy a volver abrir a la llavecita y ahora dime hasta dónde llegó, márcale hasta dónde llegó... ¿hasta allí llegó el agua?	Sí (vuelve a marcar la parte superior del frasco en el dibujo).	Nuevamente no percibe el descenso del líquido.
Bueno, ahora vamos con otro dibujito (se vuelve a realizar la acción de abrir a la llave para que descienda el líquido), haber ¿hasta dónde está, fíjate hasta dónde está el agua?	Aquí se puede ser (señalando hasta donde llegó el agua).	Es hasta este momento en que la niña se da cuenta de que el líquido ha descendido.
Ahora, otro dibujito (se abre la llave), ¿hasta dónde llegó, hasta dónde llegó el agua?	(Marca la parte inferior del embudo en el dibujo).	Último dibujo.
(Los dibujos que marcó se desordenan), ahora vamos a ordenarlos, de estos dibujitos (en fila) ¿cuál fue el primer dibujito que hiciste?	Este (señala el primero que marcó).	Los dibujos se marcaron con números progresivos del 1 al 6 en la parte superior derecha de la hoja
Después ¿cuál le siguió... haber fíjate cuál siguió de éste?	(Señala el segundo que marcó).	
¿Cuál siguió después?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
Después ¿cuál siguió?	(Señala el cuarto dibujo que marcó).	
¿Y después, cuál siguió?	(Señala el quinto dibujo que marcó).	
¿Y después?	Este (señala el último dibujo que marcó).	
De los dibujitos que hiciste ¿cuál fue el primer dibujito, haber escoge ahí (colocados en fila desordenados) cuál fue el primer dibujito?	(Señala el primer dibujo que marcó).	
¿Y cuál fue el último dibujito?	(Señala el último dibujo que marcó).	La niña observa los números colocados en las hojas y establece el orden en que realizó los dibujos.
Te acuerdas ¿cómo estaba al principio, cómo estaba?	Llenito.	

¿Y qué le fue pasando, qué le fue pasando al agua?	Estaba bajito.	
Y al final ¿qué le pasó al agua?	Se fue más.	
¿Y quedó agua, qué le pasó al agua?	No le quedó nada.	
Entonces al principio ¿cómo estaba?	Lleno.	
¿Y después, que le fue pasando?	Se le fue...estaba poquito.	Duda.
¿Y después al final?	No había, no estaba nada.	
Entonces ¿qué le sucedió al agua rosita?	Se fue todo al vaso.	
¿Si crees que cambió o no cambió como estaba el agua?	No cambió.	
¿Por qué no crees que cambió?	Porque...porque...porque estaba bajita	Duda.
Pero al principio ¿cómo estaba?	Lleno.	
¿Y después?	Bajito.	
¿Si cambió o no cambió?	No.	

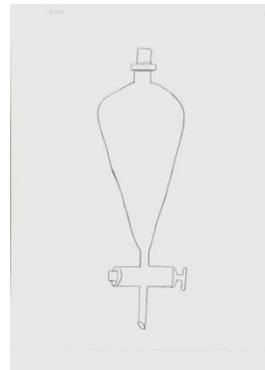
### ORDEN DE MARCACIÓN Y SERIACIÓN DE ANEL



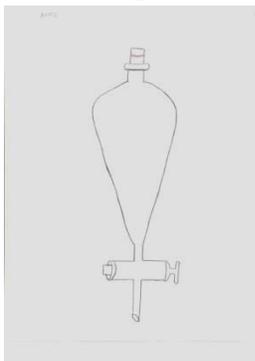
1



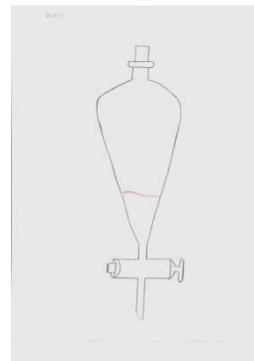
2



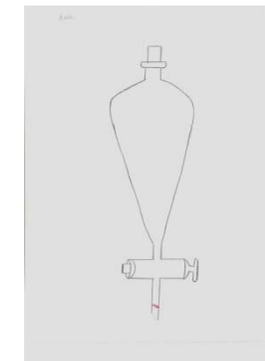
3



4



5



6

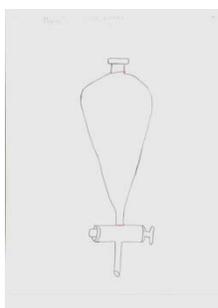
Anel observa que el líquido está lleno marcando correctamente, después en los siguientes tres dibujos no percibe el descenso del líquido es en el quinto dibujo que se da cuenta que el líquido ha descendido y finalmente quedar vacío. La seriación la realiza de acuerdo al orden en que se le dieron los dibujos, éstos fueron marcados con números progresivos en la parte superior derecha de la hoja, considero que esto influyó para que realizará la seriación en el orden de los dibujos proporcionados puesto que la niña ya sabe pronunciar y visualizar el orden de los números hasta diez. Anel percibe el descenso del líquido al manifestar que al principio estaba “lleno” y después “bajito” “se fue todo al vaso”, pero se contradice cuando se le pregunta ¿crees que cambió o no cambió como estaba el agua? menciona “no cambió, porque estaba bajita”.

**MARIELLE** (8 años, 6 meses).

<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>MARIELLE</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le presenta el embudo de separación lleno de agua de color rosa y se le indica que lo observe.
Aquí vas a ir anotando en dibujito hasta dónde llega el color del agua ¿hasta dónde está? marca hasta dónde llega.	De aquí hasta aquí (marca la parte superior y la parte inferior del dibujo sobre la válvula).	Se le proporciona una fotocopia del embudo de separación para cada marca.
Ahora voy a abrir la llavecita y me dices hasta dónde está, marca en el dibujito hasta dónde está el líquido.	De aquí hasta aquí (marca un poco abajo de la parte superior y la parte final del embudo).	
Ahora voy a hacer lo mismo (abrir a la llave) y me vas a decir hasta dónde está el agua y le marcas.	(Marca la parte superior un poco más abajo que en el dibujo anterior y la parte final del embudo).	
Hago lo mismo con el otro dibujito y tú le marcas.	(Marca la parte superior un poco más abajo que el dibujo anterior y la parte final del embudo).	
Ahora vamos con el otro dibujito.	(Marca la parte superior un poco más abajo que el dibujo anterior y la parte final del embudo).	
(Se realiza lo mismo con el último dibujo).	(Marca un poco más abajo que en el dibujo anterior y la parte final del embudo).	
Ahora me vas a decir ¿cuál fue el primer dibujito que hiciste?	No este no es, no lo veo, ¡ah acá está! (toma el primer dibujo que marcó)	Se desordenan los dibujos marcados y se colocan en una fila.
	Es éste, éste (proporciona	

Ahora ¿cuál es el que le siguió a éste?	el segundo dibujo que marcó).	
¿Y cuál le siguió a éste?	(Proporciona el tercer dibujo que marcó).	
Después ¿cuál siguió?	(Toma el cuarto dibujo que marcó).	
¿Y cuál fue el siguiente?	(Proporciona el quinto dibujo que marcó).	
	Y el último fue éste (toma el último dibujo que marcó).	Realiza la seriación sin dificultad.
Te acuerdas ¿cómo estaba al principio el frasquito?	Hasta aquí, estaba lleno.	
¿Y después qué sucedió?	Se...se le fue saliendo el agua, pues.	
¿Tú crees que hubo algún cambio de cómo estaba antes hasta después, qué pasó?	Que iba bajando el agua hasta abajo.	
Entonces ¿cómo estaba al principio?	Lleno.	
¿y después?	Vacío.	
Entonces ¿hubo cambio o no cambió?	Sí cambió.	
¿Qué fue lo que cambió?	Que estaba lleno y que le salía el agua.	

ORDEN DE MARCACIÓN Y SERIACIÓN DE MARIELLE



1



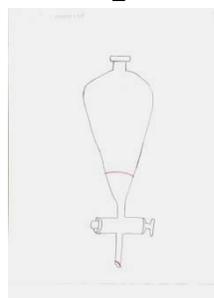
2



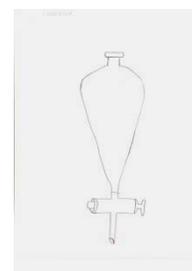
3



4



5



6

La niña observa el descenso del fluido adecuadamente por lo cual marca los niveles y sería los dibujos sin ningún problema, se da cuenta que en cada intervalo del descenso del líquido hay una disminución de éste. A las preguntas relacionadas a la variación (estado inicial, intermedio y final) responde de manera acertada indicando que al principio el recipiente estaba “lleno” y después “se le fue saliendo el agua” y al final “vacío”, de esto se puede inferir sin generalizar que la idea de variación esta presente en la niña a esta edad.

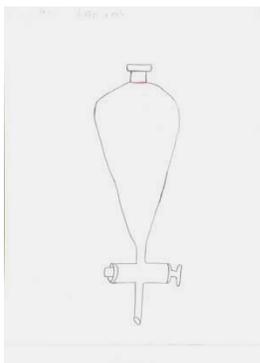
**JESUS** (8 años, 1 mes).

<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>JESÚS</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le presenta el embudo de separación lleno de agua de color rosa y se le indica que lo observe.
Vas a poner una marquita (en el dibujo) y ves hasta dónde está el líquido rosita, márcale hasta donde está.	Hasta aquí (señala y marca la parte superior del frasco).	Se le proporciona una fotocopia del embudo de separación para cada marca.
Ahora le abro a la llavecita y me vas a decir hasta dónde queda después de contar 5,... ahora márcale en el dibujito hasta dónde quedó.	Hasta aquí (marca la parte superior un poco abajo del dibujo anterior).	
Ahora en otro dibujito hacemos lo mismo, márcale hasta donde veas el líquido.	(Marca la parte superior del dibujo un poco abajo del dibujo anterior).	
Ahora vamos con otro dibujito.	(Marca la parte superior del dibujo un poco abajo del dibujo anterior).	La acción de marcar la ejecuta sin que se le indique.
Ahora vamos con el otro dibujito, ¿hasta dónde quedó?, márcale hasta donde halla quedado	(Marca la parte superior del dibujo un poco abajo del dibujo anterior).	
Y este último, ¿hasta dónde quedó?	Ríe, cero.	
¿Quedó qué?	Cero.	Menciona cero para indicar que no quedó nada de líquido en el frasco, en todos los dibujos solo marca la parte superior, excepto el último que no marca nada porque no quedó líquido.

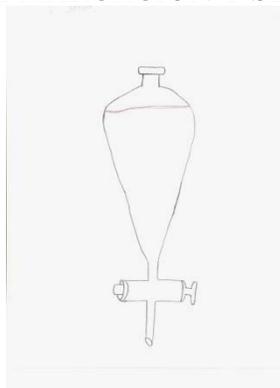
Ahora revolvemos los dibujitos que marcaste para que tú me digas ¿cuál fue el primero que hiciste, haber si te acuerdas cómo estaba el líquido?	Lleno... éste (busca el primer dibujo que hizo y me lo entrega).	
Ahora ¿cuál siguió de éste, cuál le siguió?	(Observa los dibujos y me proporciona el segundo que marcó).	
Haber, ahora de éste que tienes tú aquí ¿cuál fue el que le siguió?	(Proporciona el tercer dibujo que marcó).	
Ahora de éste que tienes tú aquí ¿cuál fue el que le siguió?	(Proporciona el cuarto dibujo que marcó).	
Y después de éste ¿cómo quedó?	(Proporciona el quinto dibujo que marcó).	
Y el último ¿cómo quedó, qué quiere decir esto?	Cero.	El niño asocia la ausencia del líquido con el número cero.
Ahora ¿cómo estaba al principio, te acuerdas?	Lleno.	
Y después ¿qué fue pasando al agüita rosa?	(No responde).	
Al principio ¿cómo estaba?	Lleno.	
Y después ¿qué fue sucediendo...quedó igual?	No.	
¿Qué le sucedió?	Se le bajó poquito.	
¿Qué le fue sucediendo a la agüita?	Se fue cayendo.	
¿Tú crees que quedó igual?	No.	
¿Qué le pasó al agua, cambió o no cambió?	Cambió.	
¿Por qué cambió?	No responde.	
¿Quedó igual como al principio?	No.	
¿Qué le sucedió, hubo cambio o no hubo cambio?	Si hubo cambio.	
¿Por qué, trátame de explicar por qué hubo cambio, cómo te diste cuenta que hubo cambio, qué sucedió?	Se fue este... vaciando al vasito.	
Entonces ¿cómo estaba al principio?	Lleno.	
Y después ¿qué sucedió	Se fue este tirando poquito.	

con el líquido rosita?		
Entonces ¿cambió o no cambió?	Cambió.	

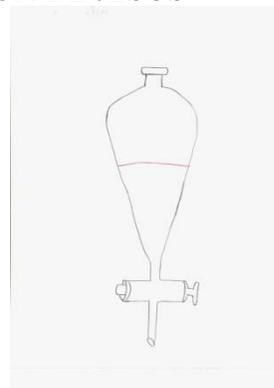
### ORDEN DE MARCACIÓN Y SERIACIÓN DE JESÚS



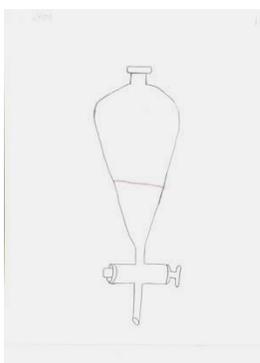
1



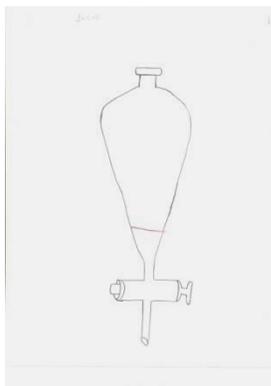
2



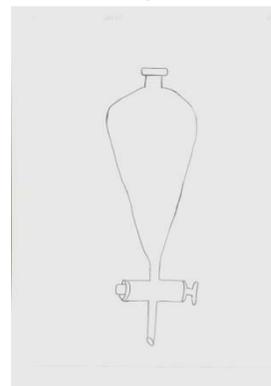
3



4



5



6

Jesús observa el descenso del líquido, marca en los dibujos el nivel de cada descenso adecuadamente, posteriormente sería los dibujos sin ninguna dificultad. La idea de cambio en el niño está presente puesto que en esta actividad menciona que al principio estaba “lleno” después “se fue tirando poquito”, “se fue vaciando al vasito”.

En las siguientes entrevistas se hizo uso de una videocámara para tener una mejor apreciación de la entrevista.

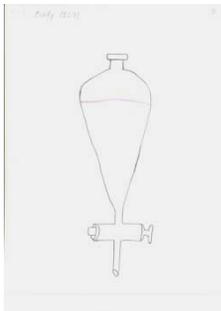
**CINDY** (5 años, 4 meses).

ENTREVISTADOR	CINDY	OBSERVACIONES
		Se le presenta el embudo de separación lleno de agua de color rosa y se le proporciona un dibujo.
Le vas a marcar en el		

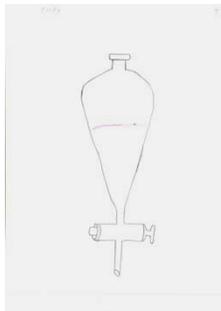
dibujito hasta donde llega el agua, márcale hasta donde llega el agua.	Hasta aquí (señala y marca la parte superior del dibujo)	
Ahora en otro dibujito yo le voy a ir abriendo a la llavecita y cuento cinco y tú le vas a marcar hasta donde llegó el aguüita... ¿hasta dónde llegó?	Aquí (señala el frasco y marca la parte superior del dibujo un poco menos que el dibujo anterior).	
Te voy a dar otro dibujito, cuento cinco y tú le vuelves a marcar hasta donde queda... ¿hasta dónde quedó el aguüita en el frasquito?	Aquí (señala el frasco y marca la parte superior del dibujo un poco menos que el dibujo anterior).	
Ahora te voy a dar otro dibujito para que le vuelvas a marcar... haber ¿hasta dónde llegó el agua en el frasquito?	Aquí (señala el frasco y marca en el dibujo la parte superior del frasco un poco abajo del dibujo anterior).	
Ahora vamos con otro dibujito, voy a contar y tú le vuelves a marcar... ¿hasta dónde llegó?	Hasta aquí (marca en el dibujo la parte superior un poco abajo del dibujo anterior).	
Y el último dibujito, ¿hasta dónde está?	Hasta aquí (marca en el dibujo sobre la válvula).	La niña marca solo la parte superior en el dibujo.
Ahora voy a revolver los dibujitos y me vas a decir cuál fue el primero que marcaste ¿te acuerdas cuál fue el primero de todos éstos?	(Busca el dibujo y me proporciona el segundo dibujo que marcó).	
¿Éste fue el primero?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Tú dices que éste fue el primero y después ¿cuál fue, cuál fue el que le siguió?	Éste (proporciona el tercer dibujo que marcó).	
Y después ¿cuál le siguió de éste?	(Proporciona el cuarto dibujo que marcó).	
Y después de éste ¿cuál le siguió?	(Toma el primer dibujo que marcó).	
¿Éste le siguió?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y después?	(Proporciona el quinto dibujo que marcó).	
¿Y después?	(Proporciona el sexto dibujo que marcó).	

Ahora unas preguntitas nada más ¿recuerdas cómo estaba el frasquito al principio?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Recuerdas cómo estaba el frasquito al principio?	(Mueve la cabeza negativamente).	No recuerda.
Y ¿qué le pasó al frasquito?	Se le echó agua.	
Y después de que se le echó agua ¿qué le pasó al frasquito?	(Pausa) se le fue (mueve la mano derecha señalando que se le abrió a la válvula).	
Y al final ¿cómo quedó?	Con nada quedó.	
¿Cómo estaba al principio el frasquito?... ¿qué tenía la principio el frasquito?	Agua.	
Y ¿cómo estaba el frasquito cuando lo viste y que hiciste el primer dibujito?	Estaba lleno.	
Y después ¿qué le sucedió al agua?	Estaba bajando.	
¿Y al final cómo quedó el frasquito, el último dibujito?	Ya no tenía agua.	
¿Qué le pasó al agua, podrías decirme qué le pasó al agua?	Le echaron agua.	
Y ¿qué le sucedió al agua después de que el frasquito tenía agua?	Se bajó.	

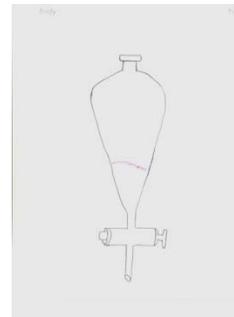
### SERIACIÓN DE CINDY



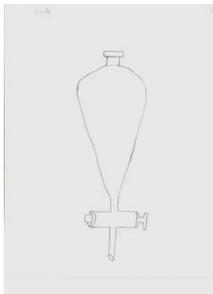
1



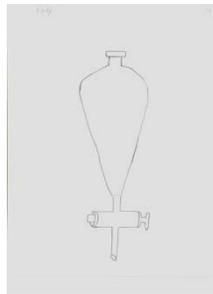
2



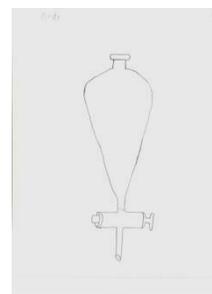
3



4



5



6

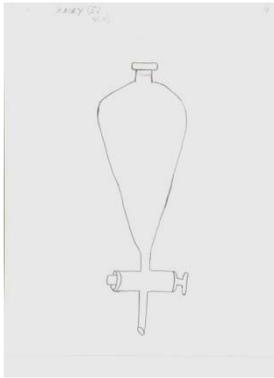
Cindy se confunde en la seriación, el primer dibujo lo coloca en el cuarto lugar, es posible que se deba a la falta de observación de los dibujos marcados ya que solo se equivoca en uno, esto puede que tenga relación con sus respuestas sobre el descenso del líquido recuerda lo sucedido con cierta dificultad (con ayuda del entrevistador). Por otro lado la niña tiene idea del cambio en el movimiento del descenso del líquido, pues menciona que cuando hizo el primer dibujo el frasco estaba “lleno”, después “estaba bajando” y al final “ya no tenía agua”.

**KAORY** (4 años, 11 meses).

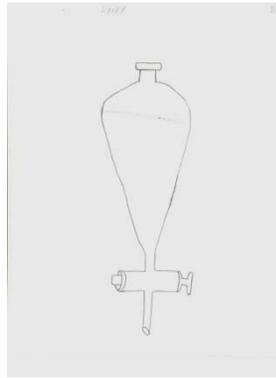
<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>KAORY</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le presenta el embudo de separación lleno de agua de color rosa y se le proporciona un dibujo.
Vas a poner una marquita (en el dibujo) de hasta dónde está la agüita.	(Señala en el frasco hasta donde llega el agua y marca en el dibujo la parte superior).	
Ahora te vamos a dar otro dibujito, le abro a la llavecita, cuento hasta cinco y le vas a marcar hasta donde se quede la agüita... ahora márcale en tu dibujito.	(Señala en el frasco hasta donde quedó el agua y marca la parte superior en el dibujo un poco abajo del dibujo anterior).	
Ahora te voy a dar otro dibujito, cuento cinco y le vuelve a marcar hasta donde quedó la agüita, ¿hasta dónde quedó?	(Señala en el frasco hasta donde quedó el agua y marca la parte superior del dibujo un poco abajo del dibujo anterior).	
Ahora te voy a dar otro dibujito para que vuelvas a marcar, ¿hasta dónde llegó la agüita?	Hasta aquí (señala en el dibujo y marca la parte superior del dibujo un poco abajo del anterior).	
Vamos hacer igual con este otro dibujito, ¿hasta dónde llegó?	(Señala en el frasco hasta donde quedó el agua y marca la parte superior del dibujo un poquito abajo del anterior).	
Y este otro dibujito vas a marcarle hasta dónde está, ¿hasta dónde está?	(Señala en el dibujo la parte inferior y le marca).	
Ahora vamos a revolver los dibujitos... ¿te acuerdas cuál fue el primer dibujito que marcaste?	(Observa los dibujos y señala el primer dibujo que marcó).	Los dibujos se colocan de tal manera que pueda observarlos.
Y de éste dibujito ¿cuál fue	(Señala el segundo dibujo	

el que le siguió?	que marcó).	
Y después de éste ¿cuál le siguió?	(Señala el quinto dibujo que marcó).	
Y después de éste ¿cuál le siguió?	(Señala el cuarto dibujo que marcó).	
¿Luego de éste?	(Señala el tercer dibujo que marcó)	
¿Y el último?	(Señala el último dibujo que marcó).	
Ahora ¿te acuerdas cómo estaba al principio el frasquito en forma de conito?	(Mueve la cabeza negativamente para indicar que no recuerda).	
¿Qué tenía el frasquito?	Agua.	
¿Y estaba, hasta dónde estaba?	Hasta arriba.	
¿Y qué le fue sucediendo al agua, después qué le pasó?	(No responde, mueve la mano derecha en señal de nerviosismo).	
¿Te acuerdas qué le pasó al agua?	(Mueve la cabeza negativamente para indicar que no recuerda).	
Al principio ¿cómo estaba?	(No responde, sigue moviendo la mano derecha).	
¿Qué tenía el frasquito?	Agua.	
¿Hasta dónde estaba?	(No responde).	
¿Estaba hasta abajo, estaba bajito, hasta dónde estaba?	Estaba hasta abajo.	
¿Y después cuando se le fue saliendo?	Quedó poquito.	
¿Estaba hasta abajo o hasta dónde estaba el agua, hasta dónde le llegaba?	Hasta abajo.	
¿Qué le pasó al agua, puedes decir qué le sucedió al agua?	(No responde).	
¿Te acuerdas qué le pasó al agua?	(Mueve la cabeza negativamente para indicar que no recuerda).	Al final la niña ya no respondió las preguntas.

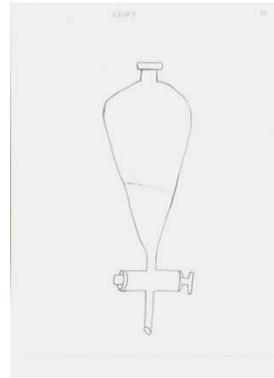
## SERIACIÓN DE KAORY



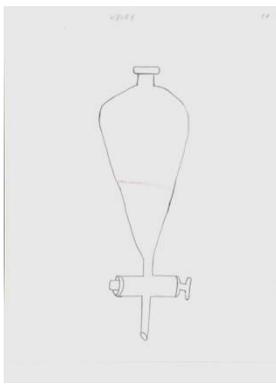
1



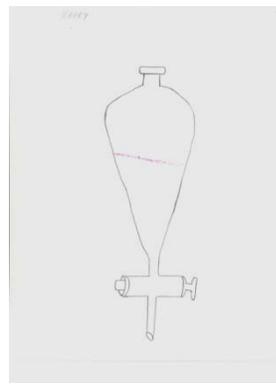
2



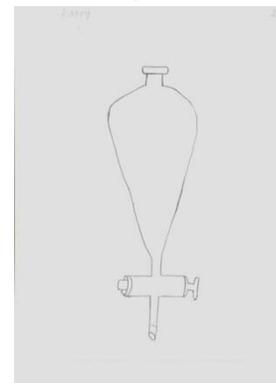
3



4



5



6

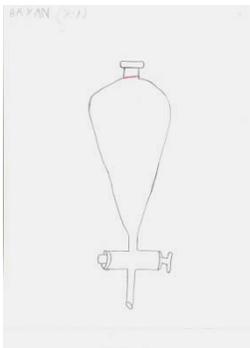
Kaory marca en los dibujos adecuadamente el descenso de la altura del líquido, al seriar no percibe el orden de los dibujos 3, 4 y 5 colocándolos 5, 4 y 3 esto puede deberse a las marcas realizadas en los dibujos 4 y 5 (la diferencia es mínima), en el tercer dibujo tampoco percibe la relación con 4 y 5 ya que va antes que éstos. En las preguntas sobre la explicación del descenso de la altura del líquido, la niña presenta dificultades de coordinación del movimiento del fluido ya que al preguntarle ¿te acuerdas que le pasó al agua? responde negativamente moviendo la cabeza indicando que no recuerda, a las preguntas ¿qué tenía el frasquito? responde “agua” y ¿después cuando se le fue saliendo? “quedó poquito” ¿puedes decir qué le sucedió al agua? no respondió. La niña percibe la variación que experimenta la altura del líquido en el momento mismo de su realización al marcar correctamente los dibujos, pero tiene dificultad para explicar verbalmente lo que le sucedió al líquido (no lo recuerda), le resulta difícil evocar cómo estaba al principio el líquido, después y al final. Al parecer la memoria juega un papel importante en este tipo de fenómenos y en la niña a esta edad se percibe que aún no se encuentra consolidada. Por lado es de mencionar que hubo momentos en que la niña se inhibió en algunas preguntas.

**BRYAN** (7 años, 1 mes).

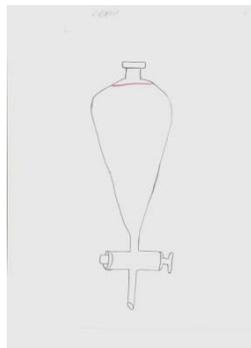
<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>BRYAN</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le presenta el embudo de separación lleno de agua de color rosa y se le proporciona un dibujo.
Lo vas hacer es marcar en tu dibujito hasta dónde está el agua rosita, ¿hasta dónde está el agua rosita?	(Marca la parte superior del dibujo).	
Ahora vamos hacer el otro dibujito, cuento cinco y vas a marcarle hasta dónde llega el agüita, ¿hasta dónde está el agüita?	(Marca la parte superior del dibujo un poquito abajo del dibujo anterior).	
Ahora en otro dibujito vas a marcarle después de contar cinco, ¿hasta dónde llegó?	(Marca la parte superior del dibujo un poquito abajo del dibujo anterior).	
En este otro dibujito igual después de contar, ¿hasta dónde llegó el agua rosita?	(Marca la parte superior del dibujo un poquito abajo del dibujo anterior).	
Ahora vamos con otro dibujito y contamos ¿hasta dónde está el agua rosita? Márcale ahí en el dibujito.	(Marca la parte superior del dibujo un poco abajo del dibujo anterior).	
Y este otro dibujito cuento, ¿hasta dónde llegó el agua rosita?	(Marca la parte inferior del dibujo).	
Ahora los dibujitos que acabas de marcar los vamos a revolver, los vamos a colocar para que los veas y me digas ¿cuál fue el primer dibujito que marcaste?	Éste (señala el primer dibujito que marcó).	
Y de éste ¿cuál fue el que le siguió?	(Observa los dibujos y señala el segundo que marcó).	
Y de éste ¿cuál fue el que le siguió?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
Y de éste que me diste ahorita ¿cuál fue el que le siguió?	Éste (observa los dibujos y señala el cuarto dibujo que marcó).	
¿Y de éste?	Éste (señala el quinto dibujo que marcó).	
¿Y cuál fue el último?	(Señala el último dibujo que	El niño se muestra seguro al

	marcó).	señalar los dibujos.
Ahora vamos hacerte unas preguntitas ¿te acuerdas cómo estaba al principio el frasquito?	Lleno.	
¿Y después que le pasó al agüita rosita?	Se fue bajando.	
¿Y cómo quedó al final?	Vacía.	
Puedes decirme con tus palabras ¿qué le pasó al agua?	Se acabó, se fue bajando pues.	
Entonces al principio ¿cómo estaba?	Lleno.	
¿Y después?	Se fue bajando.	
¿Y al final?	Ya estaba vacía	

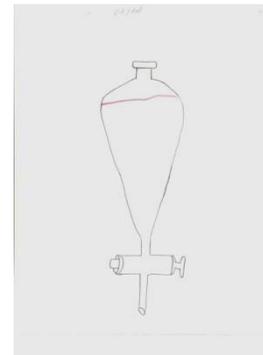
### ORDEN DE MARCACIÓN Y SERIACIÓN DE BRYAN



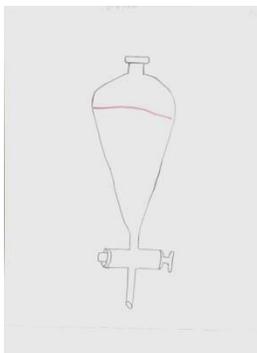
1



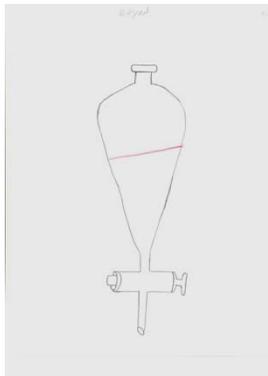
2



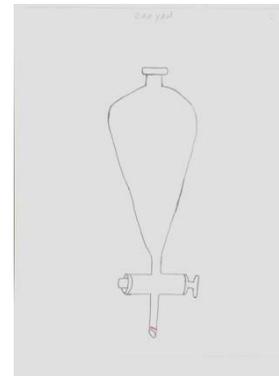
3



4



5



6

El niño marca y seria los dibujos del descenso del fluido sin dificultad, tiene presente el orden de sucesión de los intervalos, puesto que utiliza la memoria de manera exitosa al realizar la seriación. La idea de cambio (descenso de la altura del líquido) en el niño esta presente ya que al preguntarle ¿qué le pasó al agua? menciona “se acabó, se fue bajando pues”.

## SITUACIÓN EXPERIMENTAL 2

### “CONSTANTE Y ASCENSO DE LA ALTURA DE UN LÍQUIDO”

**OBJETIVO:** Investigar las percepciones en niños de 5 y 6 años en la estabilidad de un fenómeno (volumen constante) y un fenómeno variable (ascenso de la altura de un líquido) respecto al tiempo.

**MATERIAL:** Un embudo de separación, agua colorada (rosa), 7 fotocopias del embudo de separación, marcador rojo, cámara de video.

### DESARROLLO

Esta situación experimental de exploración se realizó en el Jardín de Niños “Antón Makarenko” en la comunidad semiurbana de Cumbres de Llano Largo, Mpio. de Acapulco, Gro. y se dividió en dos fases:

- a) Fase de la altura constante del volumen, consiste en presentarles a los niños el embudo de separación lleno de agua coloreada (rosa) en tres ocasiones, es decir se presenta el embudo y se oculta, dando un lapso de tiempo de 5 segundos aproximadamente en cada presentación, esto con la finalidad de observar si los niños perciben el volumen constante, al mismo tiempo se le proporcionan una fotocopia del embudo de separación para que marquen lo que observan (en total tres), posteriormente se le pide al niño que serie los dibujos marcados (presentados en desorden) y finalmente se le hacen preguntas tales como ¿podrías explicarme con tus propias palabras qué fue lo que viste? ¿qué fue lo que pasó? ¿qué tenía el frasco? ¿cómo estaba el frasco?, esto con la finalidad de observar el comportamiento de los niños ante el fenómeno de la altura constante del volumen del líquido.
- b) Fase del ascenso de la altura del líquido, se le presenta al niño el embudo de separación vacío, al mismo tiempo se le proporciona una fotocopia del embudo para que marquen lo que observa, a continuación se oculta el embudo y se le agrega un poco de agua coloreada (menos de la mitad del frasco), se le muestra al niño el embudo y se le da una fotocopia del embudo para que marque lo que observa, se vuelve a ocultar el embudo y se le agrega agua (un poco más de la mitad), se le presenta al niño y se le pide que marque lo que observa en otra fotocopia, luego se oculta el frasco y se llena, otra vez se le muestra al niño y se le da una fotocopia pidiéndole que marque lo que observa. Posteriormente se le exponen los dibujos marcados al niño en desorden para que los ordene, finalmente se le hacen algunas preguntas como ¿podrías explicarme con tus propias palabras qué fue lo que viste? ¿qué fue lo que pasó? ¿cómo estaba el frasquito al principio? ¿después que pasó? ¿y al final cómo estaba el frasquito?, esto con el propósito de observar si el niño aprecia el fenómeno de ascenso del líquido en el frasco.

El propósito de ocultar el embudo de separación en las dos fases es para observar el comportamiento del niño al no ver la acción de llenar el frasco como ocurría en la situación

experimental 1 acerca del descenso de la altura de un líquido. También es de mencionarse que estas fases se realizaron en este orden en los niños sin interrupciones, es decir terminada una empezaba la otra.

## RESULTADOS DE LA EXPLORACIÓN

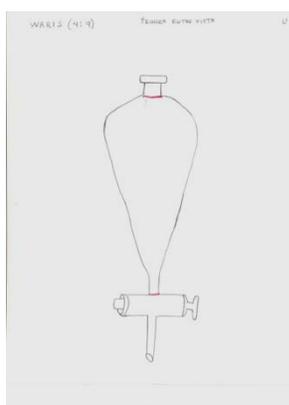
**WARIS** (4 años, 9 meses).

### *“Primera Fase”*

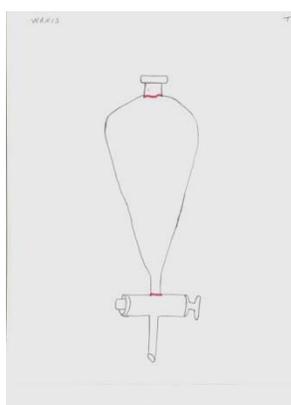
ENTREVISTADOR	WARIS	OBSERVACIONES
		Se le muestra a la niña el embudo de separación lleno de agua coloreada rosa y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Ves lo que hay?	Sí.	
¿Le puedes marcar aquí en tu dibujito? ¿hasta dónde ves que está?	Hasta aquí (señala abajo donde empieza el líquido en su dibujo y marca).	
¿Y nada más hasta ahí?	(Mueve la cabeza afirmativamente, después señala en su dibujo la parte superior y marca).	La niña titubea y posteriormente observa que el líquido llega hasta el cuello del frasco.
Ahora te doy otro dibujito, haber fijate ahora, márcale.	(Vuelve a marcar en su dibujo la parte inferior).	El embudo se oculto mientras se le proporcionaba el dibujo.
¿Nada más, hasta dónde está?	Hasta acá (marca en su dibujo la parte superior).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... y mira ¿hasta dónde ésta?	Hasta acá (marca en su dibujo la parte inferior).	Se le oculta el embudo.
¿Hasta ahí nada más?	(Marca en su dibujo la parte superior).	
Ahora estos son los dibujitos que hiciste ¿sabes cuál fue el primer dibujito que hiciste?	(Señala el primer dibujo que marcó).	Se desordenan los dibujos y se colocan a la vista.
Y después ¿cuál fue el que le siguió?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
¿Y después?	(Queda el segundo dibujo que marcó).	
¿Puedes decir qué pasó, puedes decir qué sucedió ahorita que te enseñe el frasquito?	Tiene una cosita rosa que alimento.	
¿Puedes decirme qué es lo		

que hiciste ahorita?	Le marqué.	
¿Qué le marcaste?	Unas rayitas.	
¿Y qué sucedió con estos tres dibujitos?	Le remarqué mucho.	
¿Nada más?	Sí.	
¿No pasó nada más, no hiciste otra cosa, qué sucedió entre cada dibujito?	No.	
¿No pasó nada?	No.	

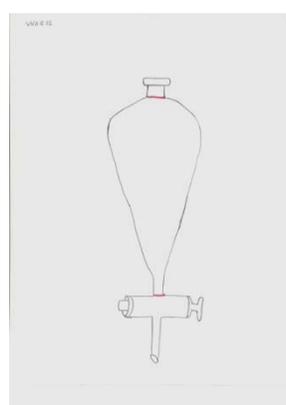
### SERIACIÓN DE WARIS



1



3



2

Waris marca en los dibujos solo la parte inferior del embudo que es el inicio del líquido, después con la intervención del entrevistador se da cuenta de la altura del líquido, al preguntarle ¿puedes decirme qué es lo que hiciste ahorita? responde “le marqué” (en los dibujos) ¿qué sucedió con estos tres dibujitos? “le remarqué mucho” no observa algún cambio, ¿no hiciste otra cosa, qué sucedió entre cada dibujito? “no” ¿no pasó nada? “no”, se puede suponer que al no haber cambio en la altura del líquido, para la niña no sucede nada, pudiendo existir una idea inicial de constante.

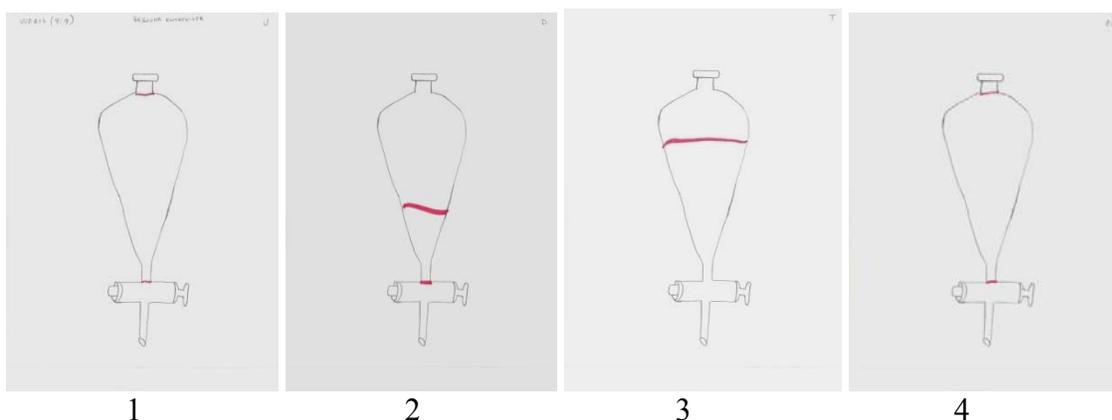
#### “Segunda Fase”

ENTREVISTADOR	WARIS	OBSERVACIONES
		Se le muestra a la niña el embudo de separación vacío, se le pide que lo observe y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Cómo está el frasquito?	Está redondo, es de vidrio.	
¿Qué tiene?	Tiene...este...	Pausa.
¿Tiene algo adentro?	No.	
¿Le puedes marcar ahí	(Marca abajo y arriba en el	Esta acción tal vez se deba

(dibujo) si tiene algo adentro?	dibujo como si estuviera lleno).	a la influencia de la fase anterior donde se le presentaba el embudo lleno.
¿Tiene algo adentro?	No.	
Entonces... ¿le marcaste si está lleno?	No.	
¿Entonces...?	Pausa.	Reflexiona que no está lleno pero no puede borrar.
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿le puedes marcar hasta dónde está?	(Marca solo la parte inferior donde empieza el líquido).	Se oculta el embudo mientras se le agrega un poco de agua de color rosa.
¿Hasta allí, hasta allí llega?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿No tiene más?	No (mueve la cabeza negativamente).	
¿Hasta dónde está el agüita, hasta ahí llega?	Si.	
¿No llega más arribita el agua?	No.	
¿Está lleno el frasquito?	No.	
¿Hasta dónde está?	Hasta la mitad (señalando el frasco).	
Haber, ¿le puedes marcar ahí en tu dibujito?	(Marca ahora en el dibujo la parte superior).	
Te voy a dar otro dibujito... y ahora ¿ya viste?	Está hasta acá (señalando la altura del líquido).	Se realiza la acción de ocultar el embudo y agregar un poco de agua.
Haber ¿le puedes marcar?	(Esta vez marca la parte superior del dibujo).	
¿Y hasta dónde llega?	Hasta acá (vuelve a señalar la parte superior del frasco).	No señala ni marca la parte inferior del líquido que era lo primero que hacia.
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿y ahora?	Hasta acá está (señala la altura del líquido en el frasco).	Se vuelve a ocultar y agregar un poco de agua al frasco.
Haber ¿le puedes marcar?	(Marca la parte superior e inferior en el dibujo).	
Ahora aquí tienes los dibujitos... ve vas a decir ¿cuál fue el primer dibujito que hiciste, te acuerdas cuál fue el primer dibujito?	Éste (señala el primer dibujo que marcó).	Los dibujos se le presentan a la vista en desorden.
¿Y después de éste cuál le siguió de estos tres?	Éste (señala el segundo dibujo que marcó).	
¿Y después de éste cuál	Éste (señala el tercer	

fue?	dibujo que marcó).	
¿Y después?	Éste (señala el último dibujo que marcó).	
Ahora ¿me puedes decir con tus palabritas que le sucedió al frasquito, te acuerdas?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Cómo estaba al principio?	Estaba lleno, un poquito al medio y otra vez lleno.	
Al principio ¿cómo estaba el frasquito?	Así (señalando con la mano que estaba hasta arriba).	
¿Hasta dónde?	Hasta arriba.	
¿Y después?	Después... así (señala con el marcador dando a entender que había menos)	Evoca la memoria.
¿Había mucho, poquito o... nada o... cómo estaba?	Nada, no tenía nada.	
¿Después qué le pasó cuando no tenía nada?	Se le subió (moviendo la mano hacia arriba).	
¿Mucho o poquito?	Mucho.	
¿Y al final cómo estaba, estaba lleno, tenía mucho, cómo estaba?	Estaba a la mitad.	
¿Y al final el último dibujito estaba a la mitad?	Si (mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Estaba a la mitad?	Sí.	

### SERIACIÓN DE WARIS



En esta fase la niña realiza la seriación sin problemas solo que en el primer dibujo (frasco vacío) coloca marcas abajo y arriba como si el frasco estuviera lleno, es posible que se deba a la influencia de la fase anterior donde se le presentaba el frasco lleno, con la intervención del entrevistador reflexiona como queriendo corregir la marca superior que había hecho. En las

preguntas la niña a esta edad percibe el cambio que experimenta el ascenso de la altura del volumen al mencionar cómo estaba al principio, después y al final “estaba lleno, un poquito al medio (en medio) y otra vez lleno”, de nuevo se le cuestiona y vuelve a reafirmar que al principio “estaba lleno”, después “nada, no tenía nada”, luego “se le subió” y al final “así” (señala hasta arriba con la mano), tal parece que relaciona las dos fases de la situación experimental; por último se contradice al decir que el último dibujo el líquido estaba a la mitad.

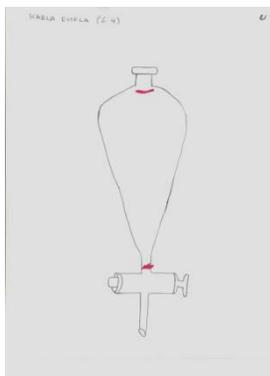
**KARLA ESTELA** (6 años, 4 meses).

*“Primera Fase”*

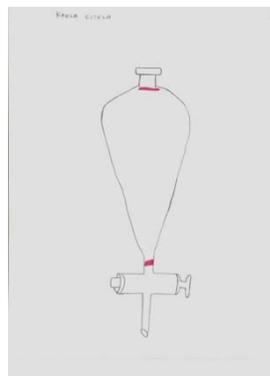
<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>KARLA</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le muestra a la niña el embudo de separación lleno de agua coloreada rosa y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Le puedes marcar hasta dónde está, lo que ves tú en el dibujito hasta dónde está el agua?	Hasta aquí (señala en el dibujo).	
Haber hazle la marquita.	(Marca en el dibujo la parte inferior).	
¿Hasta ahí nada más y hasta dónde está?	Hasta acá (marca en el dibujo la parte superior).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿hasta dónde está?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	Se oculta el frasco mientras se le proporciona otro dibujo.
¿Hasta ahí, y arriba no se ve nada?	(Marca en el dibujo la parte superior).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... para que vuelvas a marcar ¿ya viste?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	Se vuelve a ocultar el frasco y se le da otro dibujo.
¿Hasta ahí?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Hasta ahí es arriba o abajo?	Abajo.	
¿Y arriba, hasta dónde está?	Hasta aquí (Marca en el dibujo la parte superior).	
Ahora los vamos a revolver los tres dibujitos que hiciste, haber si te acuerdas ¿cuál fue el que hiciste primero?	(Señala el primer dibujo que marcó).	Se colocan los dibujos a la vista de la niña.
Y después ¿cuál le siguió a éste?	(Señala el segundo dibujo que marcó).	

¿Y después de éste?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
Ahora te voy hacer unas preguntitas ¿puedes decir qué pasó ahorita que te estuve enseñando el frasquito, qué viste, haber pláticame lo que viste?	Pausa, vi agua.	
¿Y cómo estaba?	Rosita.	
¿Y cómo estaba el agua, tenía poquita, como estaba?	Tenía mucha.	
¿Hasta dónde estaba el frasquito?	Hasta aquí (Señala en el dibujo la parte superior).	
¿Y cómo estaba después en los otros dibujitos?	Pausa.	
¿Había menos, había más?	Menos.	
¿Te acuerdas cómo estaban los tres dibujitos, había más o había menos o estaban iguales o cómo estaban?	Estaban iguales (contesta rápidamente).	
¿Estaban iguales, todos, sí, segura?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	

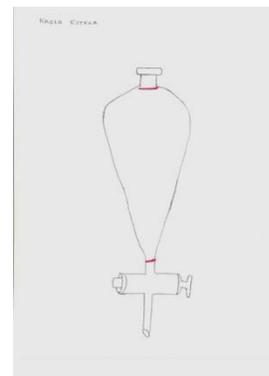
### SERIACIÓN DE KARLA ESTELA



1



2



3

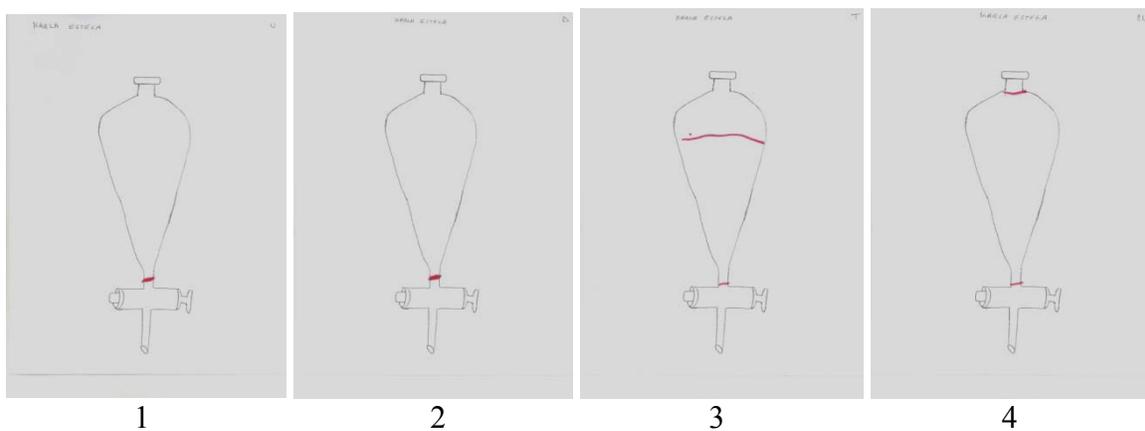
Karla Estela se da cuenta de que el embudo con líquido no sufrió algún cambio en las tres presentaciones al marcar sin dificultad los dibujos, seriarlos y mencionar que el agua en los frascos “estaban iguales”.

“Segunda Fase”

ENTREVISTADOR	KARLA	OBSERVACIONES
		Se le muestra a la niña el embudo de separación vacío, se le pide que lo observe y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Cómo está el frasquito?	Vacío.	
¿Puedes hacer una marquita ahí (dibujo) o no?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	
Ahora vamos con el segundo dibujito... ¿qué observas?	(Se adelanta a marcar la parte inferior del dibujo como en el primero)... poquito (ya lo había marcado y no podía borrar).	Se oculta el embudo por unos segundos mientras se le agrega un poco de líquido.
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿hasta dónde está?	Aquí (señala y marca en su dibujo la parte inferior	Se oculta el embudo y se le agrega un poco de líquido.
¿Y arriba, hasta dónde llega?	Hasta aquí (coloca un punto en la parte superior).	
Márcale hasta dónde llega.	(Marca con una línea la altura del líquido).	
Ahora va este otro dibujito... ¿hasta dónde está?	Hasta aquí (marca en el dibujo la parte inferior).	Se oculta el embudo y se le agrega un poco de líquido quedando lleno.
¿Y hasta dónde... llega?	Hasta aquí (marca en el dibujo la parte superior).	
Ahora vamos haber si recuerdas... ¿cuál fue el primer dibujito que hiciste?	(Señala el primer dibujo que marcó).	Se desordenan los dibujos y se colocan a la vista.
¿Cuál le siguió?	(Señala el segundo dibujo que marcó).	
¿Y cuál fue después de éste?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
¿Y después?	(Señala el último dibujo que marcó).	
Ahora me vas a decir ¿qué fue lo que tú viste, haber si tratas de decirme con tus palabritas qué fue lo que tú hiciste, te acuerdas cómo estaba el frasquito al principio?	Vacío.	
¿Y después qué le sucedió?	Pausa.	No recuerda.

¿Te acuerdas qué le sucedió?	(Mueve la cabeza negativamente).	
Primero ¿estaba?	Vacío.	
¿Y después?	Estaba lleno.	
¿Lleno, el segundo dibujito estaba lleno?	No estaba vacío.	
¿No tenía nada?	(Mueve la cabeza negativamente).	
¿O tenía... poquito, tenía mucho, tenía...?	No tenía nada.	
¿Y después el tercer dibujito?	Estaba hasta la mitad.	
¿Y el último dibujito?	Estaba lleno.	
Entonces ¿qué le sucedió al frasquito?	No contesta.	
Al principio ¿cómo estaba?	Vacío.	
¿Y al último?	Lleno.	
Entonces ¿qué le pasó al frasquito, qué le fue pasando al frasquito en cada dibujito?	Diferente.	
¿Qué fue lo diferente?	Porque es que estaba vacío y lleno.	

### SERIACIÓN DE KARLA ESTELA



Karla percibe el cambio que experimenta el ascenso del líquido en el embudo de separación ya que al principio contesta que “estaba vacío” y al final “estaba lleno”, es de mencionar que en los dibujos 1 y 2 marcados, Karla no percibe el ascenso del líquido, esto pueda que se deba al error de haberse adelantado al marcar el segundo dibujo y que no pudo corregir.

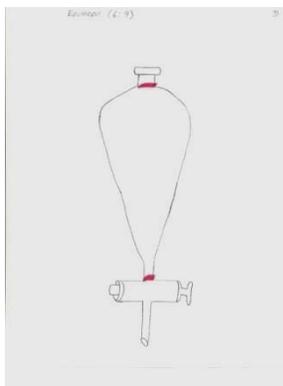
**EDUARDO** (6 años, 9 meses).

*“Primera Fase”*

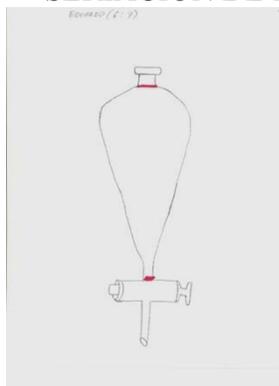
<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>EDUARDO</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le muestra al niño el embudo de separación lleno de agua coloreada rosa y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Le puedes marcar hasta dónde está aquí en el frasquito con este colorcito hasta dónde está?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	
¿Hasta ahí y arriba no hay nada... hasta dónde llega?	Si (marca en el dibujo la parte superior).	
Te voy a dar otro dibujito... ¿hasta dónde está?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	Se oculta el embudo por unos segundos mientras se proporciona otro dibujo.
¿Hasta allí... y arriba no hay nada?	(Marca la parte superior del dibujo).	
Te voy a dar otro dibujito el tercero... ahora le vas a marcar otra vez ¿hasta dónde está?	(Marca en el dibujo la parte inferior y superior).	Se oculta el embudo por unos segundos.
Ahora vamos hacer unas preguntitas... ¿te acuerdas cuál fue el primer dibujito hiciste?	(Señala el segundo dibujo que marcó).	Se desordenan los dibujos marcados y se colocan a la vista.
¿Y de éste cuál fue el siguiente dibujito que hiciste?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
¿Y después?	(Señala el primer dibujo que marcó).	
¿Puedes decirme con tus palabritas qué es lo que hiciste?	Pausa.	
Con tus palabritas ¿qué fue lo que hiciste ahorita, qué viste?	Pausa.	
¿Te acuerdas qué fue lo que viste?	Pausa.	
¿Si te acuerdas?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Qué fue lo que viste?	El frasco.	
¿Cómo estaba el frasco... qué tenía, cómo estaba?	Agua rosa.	

¿Y hasta dónde estaba, te acuerdas hasta dónde estaba, qué tenía, cómo estaba... te acuerdas... cómo estaba?	Grande.	
¿Y qué tenía, agua qué... de qué color	Rosa.	
¿Y hasta dónde llegaba la agüita?	(Señala la parte inferior del dibujo).	
¿Hasta ahí nada más?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y hasta arriba no llegaba... o hasta dónde estaba?	(Señala en el dibujo la parte superior).	
¿Estaba vacío o cómo estaba?	Lleno.	

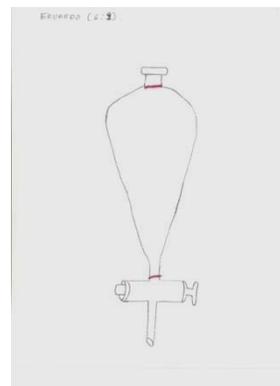
### SERIACIÓN DE EDUARDO



2



3



1

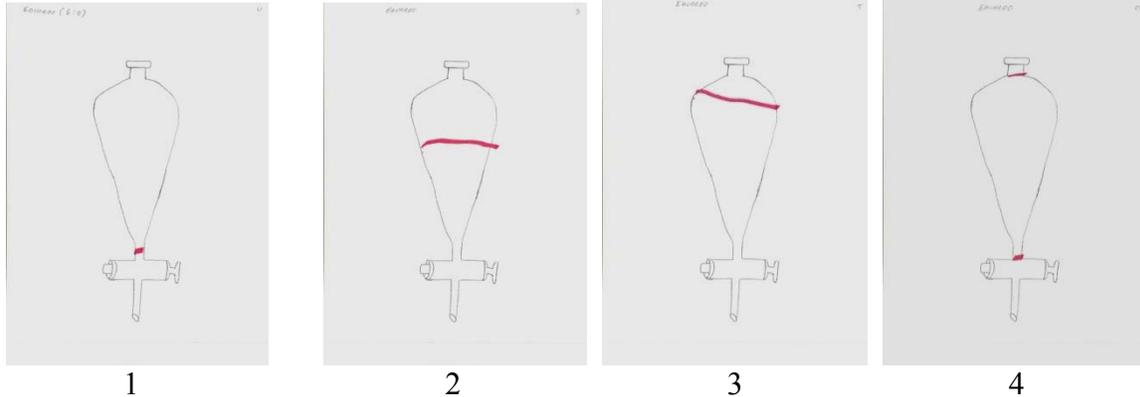
Eduardo marca adecuadamente los dibujos en el momento de la presentación del frasco lleno empezando por la parte inferior, observa que no sufre modificación el líquido, pero no recuerda el orden en que marcó los dibujos, es posible que esto se deba al parecido entre ellos. El niño se da cuenta de que el frasco lleno no presentó alguna modificación del líquido en las tres ocasiones ¿estaba vacío o cómo estaba? “lleno”.

#### “Segunda Fase”

ENTREVISTADOR	EDUARDO	OBSERVACIONES
		Se le muestra al niño el embudo de separación vacío, se le pide que lo observe y se le proporciona una fotocopia del embudo.
Este frasquito ¿hasta dónde está?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	

Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿qué le pasó, dibuja lo que le sucedió?	(Marca en el dibujo solamente la parte superior un poco arriba del anterior).	Se oculta el embudo mientras se le agrega un poco de líquido.
¿Hasta ahí nada más?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Bueno, ahora te voy a dar otro dibujito... haber ¿qué sucedió?	(Marca otra vez solo la parte superior en el dibujo un poco arriba del anterior).	Se oculta el embudo mientras se le agrega un poco de líquido.
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿qué crees que va a pasar, qué piensas que va hacer el dibujito siguiente... qué sucedió, hasta dónde?	(Marca la parte inferior del dibujo).	Se oculta el embudo mientras se llena.
¿Hasta ahí nada más?	(Marca en el dibujo la parte superior).	
Ahora te voy hacer unas preguntitas... ¿cuál fue el primer dibujito que tú hiciste... cuál fue el primer dibujito?	(Señala el primer dibujo que marcó).	Se desordenan los dibujos y se colocan a la vista.
Y después de éste ¿cuál le siguió?	(Señala el segundo dibujo que marcó).	
¿Y después de éste?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
¿Y cuál le siguió después de éste?	(Señala el último dibujo que marcó).	
Ahora unas preguntitas ¿qué le pasó al frasquito... qué le sucedió... te acuerdas que le pasó, cómo estaba el frasquito al principio... qué tenía el frasquito al principio?	Pausa... poca agua.	
Y después ¿qué le sucedió después que tenía poquita agua?	Pausa, no contesta.	
¿Cómo estuvo al final?	Lleno.	
Entonces ¿cómo estaba al principio?	Con poco agua.	
¿Y después?	Con muchito.	
¿Muchita agua?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	

## SERIACIÓN DE EDUARDO



Eduardo realiza la seriación de los dibujos sin dificultad, percibe la idea de cambio del ascenso de la altura del líquido al contestar que al principio estaba “con poco agua” y después “con muchito” y al final “lleno”.

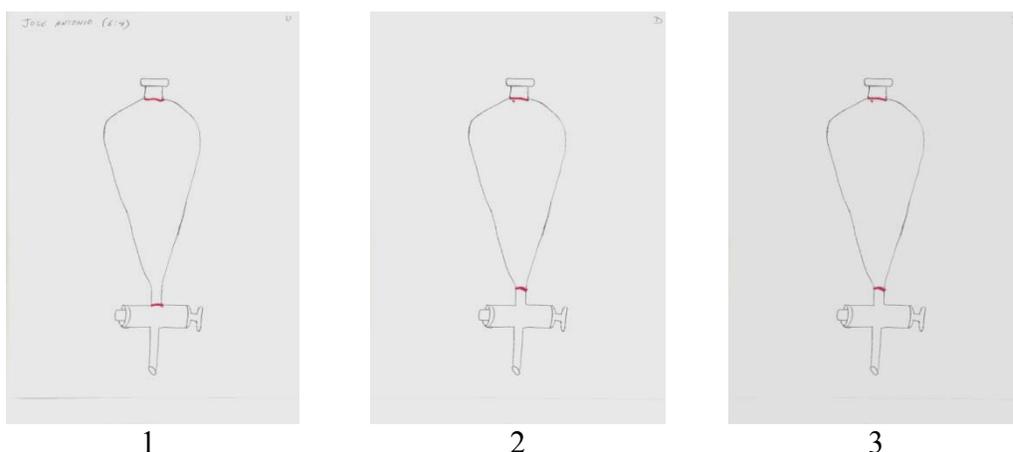
**JOSE ANTONIO** (6 años, 4 meses).

### “Primera Fase”

ENTREVISTADOR	JOSE ANTONIO	OBSERVACIONES
		Se le muestra al niño el embudo de separación lleno de agua coloreada rosa y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Le puedes marcar aquí (dibujo) hasta dónde está el frasquito, márcale hasta dónde tú veas que está?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	
¿Hasta ahí y hasta dónde llega?	(Señala y marca en el dibujo la parte superior).	
Te voy a dar otro dibujito... ahora ¿hasta dónde está? le vas a marcar ahí en el dibujito hasta dónde se encuentra el agüita, hasta dónde llega y hasta dónde está?	(Marca la parte inferior del dibujo).	Se oculta el embudo por unos segundos.
¿Hasta ahí... y arriba no hay nada? haber fíjate hasta ¿dónde llega?	(Marca en el dibujo la parte superior).	
Te voy a dar otro dibujito... ¿hasta dónde llega? márcale hasta donde	(Marca en el dibujo la parte inferior).	Se oculta el frasco por unos segundos.

veas que está el agüita.		
¿Hasta ahí?	(Marca en el dibujo la parte superior).	
Ahora te voy a enseñar los dibujitos que hiciste... de estos tres ¿cuál fue el primero que tú hiciste?	(Señala el primer dibujo que marcó).	Se desordenan los dibujos y se colocan a la vista.
Y después ¿cuál le siguió... cuál fue el que le siguió de éste?	Pausa.	
¿Te acuerdas cuál fue el que le siguió?	(Señala el segundo dibujo que marcó).	
¿Y después?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
Ahora con tus propias palabritas me puedes decir ¿qué fue lo que viste... lo que hayas visto que me lo puedas decir... qué es lo que viste?	El frasco.	
¿Qué más... qué tenía el frasco?	Agua.	
¿De qué color estaba el agua?	Rosita.	
¿Y cómo estaba el frasco... estaba qué?	Grandecito.	
Pero ¿hasta dónde estaba el agua... estaba... había poquito... estaba... cómo estaba el agua?	No contesta.	
¿Había qué... había poquita, estaba llena o cómo estaba?	Había poquita agua.	
¿Había poquita agua?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Si, había mucho agua o poca o no había agua o cómo estaba?	No contesta.	
¿Poca agua?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿En todos lo frasquitos había poca agua?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Seguro que había poca agua?	(Vuelve a mover la cabeza afirmativamente).	

## SERIACIÓN DE JOSÉ ANTONIO



Eduardo marca siempre la parte inferior de los dibujos después se da cuenta con la intervención del entrevistador hasta donde llega el líquido y marca la parte superior del dibujo, la seriación la hace bien solo que tiene que hacer un esfuerzo por recordar el orden en que marcó los dibujos. En las preguntas no puede explicar lo que observó, menciona que en los tres frascos había poca agua (afirmando con un movimiento de la cabeza), el niño se muestra callado, pareciera que le falta confianza para responder a las preguntas del entrevistador.

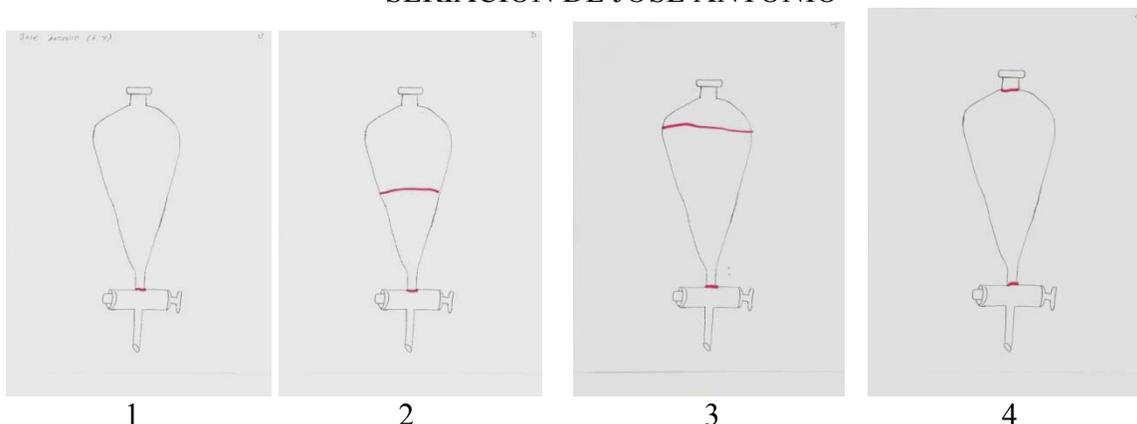
### “Segunda Fase”

ENTREVISTADOR	JOSÉ ANTONIO	OBSERVACIONES
		Se le muestra al niño el embudo de separación vacío, se le pide que lo observe y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Cómo está el frasquito... puedes marcar ahí hasta dónde está... lo que tú veas, qué es lo que ves?	(Señala en el frasco la parte superior de la válvula y marca en el dibujo la parte inferior).	
¿Hay mucha?	(Mueve la cabeza negativamente).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... dibuja lo que tú veas.	(Marca la parte superior del dibujo).	Se oculta el embudo mientras se le agrega un poco de líquido.
¿Hasta ahí?	(Marca en el dibujo la parte inferior).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... y tú le marcas.	(Marca en el dibujo la parte superior).	Se vuelve a ocultar el embudo mientras se le agrega un poco más de líquido.
	(Marca la parte inferior del	

¿Hasta ahí?	dibujo).	
Te voy a dar otro dibujito para que cuando lo veas... le marques.	(Marca la parte superior y después la parte inferior del dibujo).	Se le oculta otra vez el embudo mientras se llena.
Ahora vas a ver los dibujitos que hiciste... ¿cuál fue el dibujito que hiciste primero de éstos?	(Señala el primer dibujo que marcó).	Se desordenan los dibujos y se colocan a la vista.
¿Y después de éste... cuál le siguió?	Titubea.	
Haber dame el que le siguió.	(Señala el segundo dibujo que marcó).	
¿Y de éste cuál le siguió?	(Señala el tercer dibujo que marcó).	
¿Y después?	(Señala el último dibujo que marcó).	
Ahora unas preguntitas ¿te acuerdas cómo estaba al principio el frasquito?	Lleno.	
¿Estaba lleno el frasquito?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y después?	No contesta.	
¿Después... qué le fue pasando... al frasquito?	Se le quito agua.	
¿Se le quito agua?	Se le quito agua poco a poquito.	
¿Se le quito agua poco a poquito?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Al principio ¿cómo estaba el frasquito?	Lleno.	
¿Lleno?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y al último?	Pausa, no contesta.	
¿Y al último?	Pausa, no contesta.	
¿No tenía agua, si tenía o... si tenía o no tenía?	(Mueve la cabeza negativamente).	
¿No tenía al último, no tenía agua?	Duda, no contesta.	
Al principio ¿cómo estaba?	No contesta.	
¿Cómo estaba al principio?	Llena.	
¿Llena?	(Mueve apenas la cabeza afirmativamente).	
¿Y después?	No contesta.	
¿Qué le fue pasando al frasquito, después?	No responde, mueve las manos en señal de nerviosismo.	

¿Te acuerdas qué le fue pasando al frasquito después?	Se estaba yendo el agua.	
¿Se estaba yendo el agua?	(mueve la cabeza negativamente)	Se contradice.
¿No?	(Mueve la cabeza negativamente).	
¿Y al final te acuerdas, al final cómo estaba?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Cómo estaba?	No contesta.	
El último dibujito ¿cómo estaba?	Lleno.	
¿Lleno?	(Mueve apenas la cabeza afirmativamente).	
Entonces al principio ¿cómo estaba?	No responde.	
¿Cómo estaba al principio?	Pausa, no contesta, juega con los dedos en señal de nerviosismo.	
¿Te acuerdas cómo estaba al principio?	(Mueve la cabeza afirmativamente en señal de que recuerda).	
¿Cómo estaba?	No responde.	
¿Y al último, el último dibujito cómo estaba?	Pausa, no responde, juega con los dedos.	
¿Cómo estaba el último dibujito... lleno?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y en el segundo, en el tercer dibujito te acuerdas cómo estaba?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Cómo estaba?	No tenía agua.	
¿No tenía agua?	(Mueve la cabeza negativamente).	
¿Nada, poquita?	Poquita.	
¿Poquita?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	

## SERIACIÓN DE JOSÉ ANTONIO



José Antonio realiza la seriación de los dibujos marcados, pero tiene dificultades al tratar de explicar lo sucedido, se confunde diciendo que al principio estaba “lleno” y el último dibujo estaba “lleno”, menciona que los dibujos segundo y tercero “no tenía agua”. Es posible que el niño esté influenciado por la fase anterior al expresar que al principio estaba “lleno”, por otro lado el niño manifiesta nerviosismo e inhibición al no responder algunas preguntas, esto es probable que se deba a la falta de confianza entre el niño y el entrevistador.

**FABIÁN** (5 años, 7 meses).

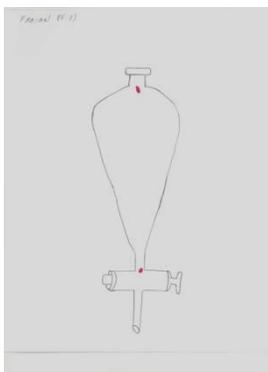
### “Primera Fase”

ENTREVISTADOR	FABIÁN	OBSERVACIONES
		Se le muestra al niño el embudo de separación lleno de agua coloreada rosa y se le proporciona una fotocopia del embudo.
¿Puedes marcarle con este colorcito hasta dónde está el agüita?	Hasta aquí (señala la parte inferior del frasco).	
Haber, márcale ahí en el dibujito hasta ¿dónde está?	(Trata de marcarle en el frasco de vidrio).	
	Hasta aquí (señala con un punto la parte inferior del dibujo).	
¿Hasta ahí, hasta dónde está y arriba no tiene... hasta dónde llega?	(Observa el frasco y señala con una marca la parte superior del frasco en el dibujo).	
Márcale hasta donde llega.	Hasta aquí.	
Ahora te voy a dar otro dibujito y... vas a decir hasta ¿dónde está? márcale	(Señala la parte inferior del frasco lleno).	Se oculta por unos segundos el embudo mientras se proporciona la

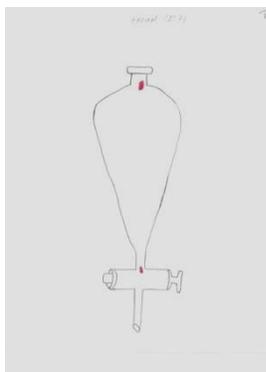
hasta donde está.		fotocopia.
Haber, márcale ahí en tu dibujito.	(Marca en el dibujo la parte inferior).	
¿Y acá arriba?	(Señala en el frasco de vidrio la parte superior).	
Haber, márcale hasta donde está.	(Pone una marca en el parte superior del dibujo).	
Te voy a dar otro dibujito para que le marques y... ¿hasta dónde está?	Hasta aquí (vuelve a señalar la parte inferior del frasco).	Se vuelve a ocultar el embudo lleno mientras se le proporciona un dibujo.
Haber, márcale en tu dibujito.	(Marca en el dibujo la parte inferior)	
¿Y...?	(Señala la parte superior del frasco, luego marca en su dibujo la parte superior).	
Te voy a enseñar los dibujitos y tu me vas a decir ¿cuál fue el primer dibujito que marcaste, cuál fue el primer dibujito que marcaste?	Éste (Señala con su mano derecha moviéndola continuamente el primer dibujo de derecha a izquierda, es el segundo dibujo que marcó ).	Se desordenan los dibujos y se le colocan en una hilera a la vista.
¿Y después?	Éste (señala el que sigue en la hilera, es el tercer dibujo que marcó).	
¿Y después de éste?	Éste (señala el último que queda que fue el primero que marcó).	
Ahora me puedes decir con tus palabritas ¿qué fue lo que viste en el frasquito... qué había?	Pausa.	
Haber pláticame lo que viste... ¿me puedes platicar cómo estaba el frasquito, qué tenía?	Tenía este...	
¿Qué tenía haber acuérdate, te acuerdas qué tenía?	Algo aquí abajo, aquí otro (señala el dibujo, se le dificulta explicar lo sucedido).	
¿Y qué tenía adentro del frasquito?	Este, tenía agua rosita.	
¿Agua rosita?	Sí.	
¿Y cómo estaba, había poquita, estaba vacío, estaba... cómo estaba?	Lleno.	
¿En los tres dibujos?	Sí.	

En los tres dibujitos ¿cómo estaban... estaban vacíos, había poquito o cómo estaban?	Llenitos.	
¿Los tres dibujitos?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	

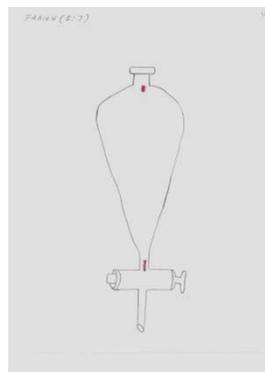
### SERIACIÓN DE FABIÁN



2



3



1

Fabián marca siempre la parte inferior de los dibujos al presentarle el frasco lleno, después mediante la intervención del entrevistador marca la parte superior, observa que el volumen del líquido en el frasco no sufre modificaciones en las tres presentaciones ¿cómo estaban los tres dibujitos? “Llenitos”. La seriación de los dibujos no la realiza adecuadamente colocando 2, 3 y 1 respectivamente, esto es posible que se deba al parecido de las marcas en los tres dibujos no habiendo diferencias notorias entre ellas.

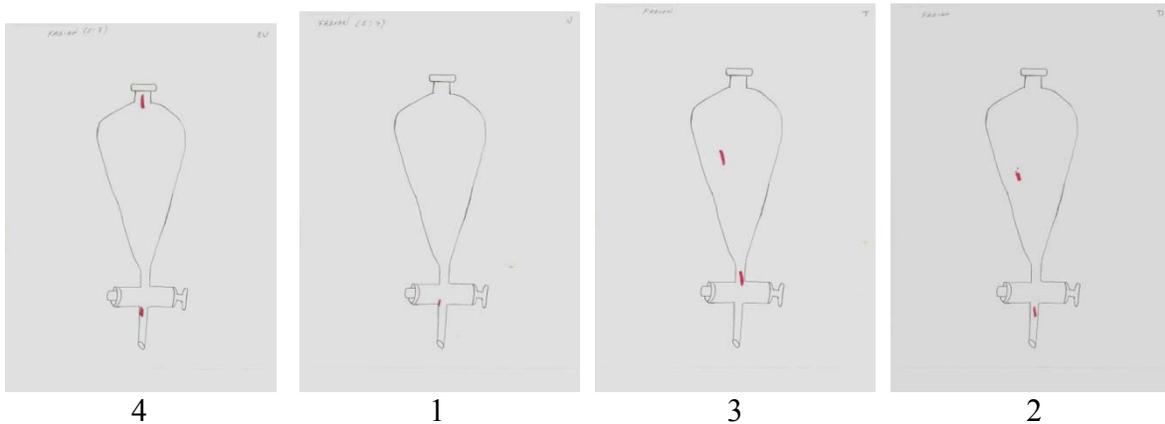
### “Segunda Fase”

ENTREVISTADOR	FABIÁN	OBSERVACIONES
		Se le muestra al niño el embudo de separación vacío, se le pide que lo observe y se le proporciona una fotocopia del embudo.
Ahora te voy a dar otro, me vas a decir ¿qué es lo que ves en el frasquito?	(Señala la válvula del embudo de vidrio).	
¿Qué ves en el frasquito... hay adentro algo en el frasquito, no hay nada... tiene algo, no tiene nada?	Está vacío (levantando la mano izquierda).	
¿Puedes marcar, si está vacío... el agüita?	Hasta aquí (señala en el dibujo con su dedo la parte de abajo).	
	(Marca la parte de debajo)	

Haber ¿puedes marcarle?	de la válvula que aún tiene residuos de agua).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿puedes marcar ahí en tu dibujito hasta dónde está?	Hasta aquí (marca en el dibujo la parte inferior).	Se oculta el embudo mientras que se le agrega un poco de líquido.
¿Hasta ahí, hasta dónde llega?	Hasta aquí (señala en el frasco la altura del agua).	
¿Puedes marcar hasta dónde llega?	(Hace una marca un poco más arriba de la válvula).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿y ahora... qué le pasó al frasquito?	Está este todo aquí (señala con su dedo hasta donde llegó el agua en el frasco)	Se vuelve a ocultar el embudo mientras se le agrega un poco más de líquido.
Haber, márcale.	(Marca en el dibujo la parte superior).	
¿Hasta dónde, hasta ahí, hasta ahí llega?	(Mueve la cabeza afirmativamente, luego señala la parte inferior del frasco y marca en su dibujo).	
Ahora te voy a dar otro dibujito... ¿qué le pasó al frasquito?	Se lleno más (señala con su dedo la altura del agua y marca en el dibujo la parte superior e inferior).	Otra vez se oculta el embudo mientras se llena.
Ahora vas a ver los dibujitos... y me dices ¿cuál fue el primer dibujito, te acuerdas cuál fue el primer dibujito?	(Señala con insistencia el primero de derecha a izquierda, es el cuarto dibujo que marcó).	Se desordenan los dibujos y se colocan en hilera a la vista.
Haber, obsérvalos bien todos, fijate bien en todos.	Éste fue (vuelve a señalar el cuarto dibujo que marcó).	
¿Y después de éste?	(Señala el siguiente de derecha a izquierda, es el primer dibujo que marcó).	
¿Después de éste?	(Señala el tercer dibujo que marcó que está a continuación del anterior).	
¿Y después?	(Señala el último que es el segundo que marcó).	
Ahora te voy hacer unas preguntitas ¿te acuerdas cómo estaba el frasquito, cómo estaba el frasquito?	Así (mueve la cabeza afirmativamente realizando con su dedo movimientos en la mesa).	
¿Tenía mucha, poquita,		

nada de agüita color rosita?	Poquita.	
¿Qué tenía?	Poquita.	
¿Había mucha, o no tenía, o casi poquita?	Mucha.	
¿Tenía mucha?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y después?	Poquita.	
¿Y al final?	Tenía poquitita.	
¿Al final tenía poquitita, seguro?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Entonces al principio ¿cómo estaba... cómo estaba al principio?	Se llenó.	
¿Y después... y después?	Poquitito.	
¿Y el último dibujito?	Pausa.	
¿Y el último dibujito... te acuerdas?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Cómo estaba el último dibujito, el agüita?	Así (junta dos dedos).	
¿Tenía mucha, poquita, nada o... estaba lleno?	No tenía nada.	
¿No tenía nada?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	

### SERIACIÓN DE FABIÁN



Es posible que Fabián confunda en las preguntas la primera y segunda fase, pues en esta fase menciona que al principio “se llenó”, después tenía “poquitito” y al final “no tenía nada”. Por otro lado el niño se da cuenta del fenómeno que está sucediendo (ascenso de la altura del líquido) en el momento mismo de la acción al señalar con su dedo el ascenso de la altura del líquido en el frasco y marcar los dibujos en forma correcta, es después cuando ya no está el fenómeno presente que al niño se le dificulta evocar y describir lo sucedido.

### SITUACIÓN EXPERIMENTAL 3

#### “ALARGAMIENTO DE UN RESORTE”

**OBJETIVO:** Analizar las percepciones de los niños en el alargamiento de un resorte (balanza) producto del peso de objetos redondos.

**MATERIAL:** Una balanza graduada, tres objetos redondos del mismo tamaño de colores y pesos diferentes (azul más pesada, roja menos pesada y amarillo no pesa), tres marcadores del color de los objetos, 4 fotocopias de la balanza incompleta (le falta el resorte y la charola) y abajo de la balanza un círculo dibujado, lápiz, cámara de video.

#### DESARROLLO

Se le presentan al niño la balanza y los tres objetos redondos (azul, rojo y amarillo), después se le proporciona una fotocopia del dibujo de la balanza incompleta (le falta el resorte y la tapa), se le indica que observe la balanza y complete lo que le falta al dibujo. En otro momento se le indica que coloque uno de los objetos redondos en la balanza y observe lo que ocurre, al mismo tiempo se le entrega la segunda fotocopia para completar lo que observa y rellene el círculo del color del objeto (se espera que haga el dibujo del alargamiento del resorte). Después coloca un segundo objeto redondo, se le proporciona otra fotocopia, se le pide que observe, dibuje lo que sucede y coloree el círculo del color correspondiente. La misma actividad se realiza con el tercer objeto (con la cuarta fotocopia). A continuación se le indica al niño que realice la seriación de los dibujos de acuerdo al orden en que los hizo. Después de esta actividad se le pide al niño que ordene los objetos redondos como pueda y los coloque en hilera (se espera que los ordene de manera ascendente o descendente según sea el peso), se le pregunta que explique cómo hizo su ordenación. Posteriormente se separan los dibujos de la balanza completados de los círculos coloreados, se le colocan en desorden los dibujos de la balanza por un lado y los dibujos de los colores por el otro y se le pide al niño que me entregue el primer dibujo que hizo de la balanza con el círculo del color del objeto correspondiente, después el segundo y así sucesivamente. Para finalizar con la actividad se le solicita al niño que explique con sus propias palabras lo que sucedió.

#### RESULTADOS DE LA EXPLORACIÓN

**MARIELLE** (8 años, 6 meses).

ENTREVISTADOR	MARIELLE	OBSERVACIONES
		Se le muestra a la niña la balanza graduada y los tres objetos redondos (azul rojo y amarillo), se le entrega una fotocopia de la balanza incompleta, se le indique que la observe.

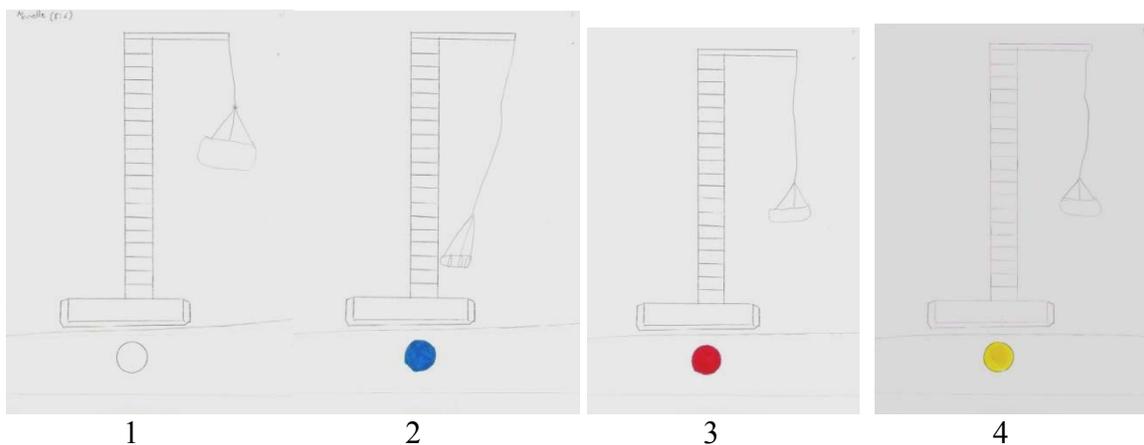
Pon en tu dibujo lo que veas que haga falta, dibuja lo que haga falta.	Ya terminé (Dibuja el resorte y la tapa sin colorear el círculo).	Se le presenta la balanza sin ningún peso.
Ahora te voy a dar otro dibujito, tú le vas a colocar aquí donde está la tapita una de éstas (pelotitas) la que tú quieras, escógela y fíjate ¿qué es lo que va a ocurrir, qué pasa?... ¿qué sucedió?	Se bajó para abajo (sonríe moviendo la mano izquierda hacia abajo).	Coloca la pelotita azul.
¿Puedes dibujar eso aquí en tu dibujito?	Sí (moviendo la cabeza afirmativamente).	
Haber hazlo, fíjate ¿qué sucedió?	(Observa detenidamente la graduación y cuenta mentalmente moviendo la cabeza, luego cuenta las marcas en el dibujo, dibuja cerca de la marca la tapa y después el resorte con una línea).	
¿De qué colorcito es la bolita?	Azul.	
¿Puedes rellenar ese circulito que está ahí?	Sí (rellena el círculo de azul).	
Ahora vas a quitar la bolita azulita y vas a poner otra diferente y vamos a ver qué ocurre.	(Coloca la bolita roja a la vez que se le proporciona una fotocopia).	
¿Qué sucedió?	Se bajo otro poco pero no tanto como la otra (haciendo movimientos hacia abajo con la mano izquierda)	
¿Puedes hacer ahí en tu dibujito, cómo puedes hacer?	(Observa, cuenta las marquitas que hay en la balanza mentalmente moviendo la cabeza, luego cuenta en la fotocopia y hace el dibujo), ya.	
Ahora ¿qué puedes hacer más te acuerdas?	Si.	
¿Qué vas hacer?	Rellenarle el circulito del color de la bolita (pinta el círculo de color rojo).	
Te falta ¿Cuál te falta?	La amarilla.	Se le proporciona otra

		fotocopia.
	(Toma la amarilla moviéndola con la mano izquierda). La más pesada es la...	Se da cuenta que las pelotitas tienen pesos diferentes.
Haber ponla ¿qué le sucedió?	No bajó nada.	
¿Puedes dibujarla ahí?	Uno, dos,... (otra vez cuenta las marquitas de la balanza, después las que tiene la copia finalizando con el dibujo)	
	Ya... ahora vamos a rellenar del color amarillo (rellena el círculo)	No se le dio indicación de esta acción.
Ahora vamos haber si te acuerdas... ¿cuál fue el primer dibujito que tú hiciste?	(Señala el primero y me lo entrega).	Se desordenan los dibujos y se le muestran en hilera.
¿Y de éste cuál fue...?	Siguió éste (me entrega el segundo dibujo que realizó).	
¿Y después de éste?	Después éste (entrega el tercer dibujo que hizo).	
¿Y al último?	Éste (me da el cuarto dibujo que hizo).	
Ahora vas a explicarme con tus propias palabritas ¿qué fue lo que hiciste?	Primero fui contando los cuadritos (señala las marcas de la balanza) hasta ver hasta donde llegaba la bolita y hasta ahí dibujaba la tapita).	
Pero ¿qué le pasó, qué es esto?	Un resorte.	
¿Y qué le sucedió?	Se bajó hasta abajo (toma la tapa y baja el resorte).	
¿Por qué?	Por lo pesado de la bolita.	
Primeramente ¿cómo estaba la balanza?	Así como está ahorita (sin peso).	
¿Y después que le sucedió al resortito?	Se estiró mucho (toma la tapa y la baja).	
¿Por qué se estiró?	Por el peso de las bolas.	
¿Puedes decir cuál es la bolita que pesa menos?	La amarilla (toma la amarilla).	
¿Y cuál es la que le sigue a la amarilla?	Pausa... la que... ésta (toma la bolita roja).	Reflexiona un instante.

¿Y cuál es la que pesa más?	La... azul.	
¿Puedes ordenar esas pelotitas, las puedes ordenar, cómo las pudieras ordenar, cuál iría primero, cuál iría después?	Primero empezaría con el que no pesa (coloca la bolita amarilla), luego con el que pesa un poco (coloca la bolita roja después de la amarilla), luego con el que pesa mucho (coloca la azul después de la roja quedando en una hilera las tres).	
Entonces ahí ¿ya las tendrías ordenadas?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Cómo las ordenaste?	Este, primero fui buscando la que pesa menos y luego al último la que pesa más.	
		A continuación se procede a separar las fotocopias de la balanza y del círculo que hizo la niña recortándolos, posteriormente se desordenan, por un lado se colocan en hilera los dibujos de la balanza y en otra los círculos.
Vamos haber si te acuerdas ¿Cuál fue el primer dibujito que hiciste de la balanza con la bolita?	Ésta, ésta fue la primera.	
¿Ésta fue la primera, segura?	(mueve la cabeza afirmativamente)	
¿Cómo estaba la balanza primero?	No pesaba nada (toma un dibujo del círculo y lo coloca con el de la balanza), este no ¡ya me equivoqué! (se lleva la mano derecha a la cabeza).	
Haber puedes corregir, ¿Cuál fue el primer dibujito?	(Observa los dibujos), ésta fue la primera (toma el dibujo de la balanza sin peso y el círculo blanco que indica que no hay objeto).	
Y después de ésta ¿cuál le siguió?	(Me entrega el círculo azul con el resorte más alargado)	

	que es el segundo dibujo que hizo).	
¿Y después de ésta?	(Me entrega el círculo rojo con el resorte menos alargado que es el tercer dibujo que hizo).	
¿Y al final?	(Me proporciona el círculo amarillo con el dibujo del resorte que no se alargó, que es el cuarto dibujo).	
Por último ¿te acuerdas qué le pasó al resortito?	Si.	
Me puedes decir con tus propias palabras ¿qué le pasó al resortito?	Se estiraba, se estiraba y se estiraba (estirando el resorte en tres tiempos hacia abajo).	
Pero ¿por qué se estiraba?	Por el peso de las bolas.	
Y te acuerdas ¿cuál fue la que no pesa mucho?	La amarilla.	
Y ¿cuál le siguió a la amarilla?	La roja.	
Y la azul ¿qué es?	La más pesada.	

### SERIACIÓN DE MARIELLE



Marielle hace las dos seriaciones adecuadamente, recuerda el orden en que realizó cada dibujo sin recortar y después recortados, además distingue la diferencia entre las bolitas al colocarlas en la balanza y observar la relación entre el peso y el alargamiento del resorte ¿qué le pasó al resortito? “se estiraba, se estiraba y se estiraba”, pero ¿por qué se estiraba? “por el peso de las bolas”, al darse cuenta de las diferencias de peso de los objetos redondos, realiza acertadamente el ordenamiento de manera ascendente “primero empezaría con el que no pesa, luego con el que pesa poco, luego con el que pesa mucho”.

**JESÚS** (8 años, 2 meses).

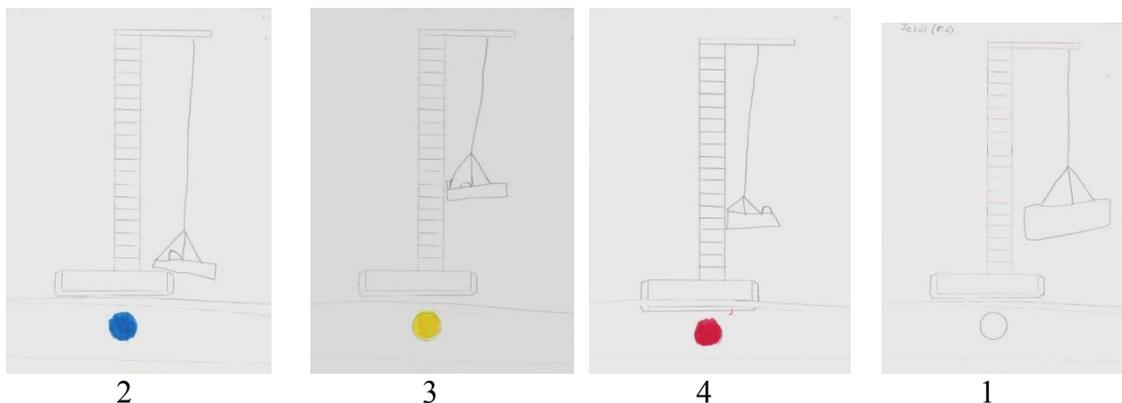
<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>JESÚS</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le muestra al niño la balanza graduada y los tres objetos redondos (azul rojo y amarillo), se le entrega una fotocopia de la balanza incompleta, se le indique que la observe.
¿Puedes hacer lo que le hace falta a este dibujito?, obsérvalo bien ¿qué le falta?	Esto (en voz baja señala la tapa).	Se le presenta la balanza sin ningún peso.
Dibújalo ahí (dibujo) lo que le haga falta.	(Observa la balanza, dibuja el resorte y la tapa sin contar las marquitas), ¡ya!	
Te voy a dar otro dibujito y vas a tomar una bolita y la colocas en la tapita haber ¿qué pasa... qué sucedió?	Se estiró (sonriendo).	Coloca la pelotita azul.
¿Puedes dibujar ahí (dibujo) qué le pasó?	(Dibuja el resorte y la tapa casi hasta la base de la balanza sin observar las marcas).	
Le dibujas el circulito del color de la pelotita, rellena el color que es.	(Toma el color azul y rellena el círculo).	
Ahora vamos hacer el siguiente dibujito, quita la pelotita y ponle otra que haga falta ponerla, la que tú quieras escoger... ¿qué es lo que le pasó?	Nada (sonriendo).	Coloca la pelotita amarilla.
¿Puedes dibujarlo?	(Dibuja el resorte y la tapa sin tomar en cuenta las graduaciones).	
¿Qué falta? Fíjate lo que haga falta y lo haces.	(Toma el color amarillo y rellena el círculo).	
Ahora ¿cuál es la que te hace falta?	El rojo.	
Haber cámbiala, te voy a dar ahorita otro dibujito... ¿qué le sucedió?	Se estiró (esta vez con movimiento de la cabeza cuenta las marcas de la balanza relacionándolas	

	con la fotocopia, dibuja el resorte y la tapa), ¡ya!	
¿Ya?	El color...	Recuerda que tiene que rellenar el círculo.
		Se desordenan los dibujos y se le muestran en hilera.
¿Cuál fue el primer dibujito que hiciste?	Éste (entrega el segundo dibujo que hizo)	
¿Ese fue el primer dibujito que hiciste... seguro?	Si... si.	
¿Y después... después de éste?	Pausa... (Entrega el tercer dibujo que realizó).	
¿Y después de éste?	(Entrega el cuarto dibujo que hizo).	
¿Y el último?	(Proporciona el primer dibujo que hizo).	
Ahora ¿puedes ordenar estas pelotitas, las puedes ordenar, cómo las pudieras ordenar?	Pausa.	Se queda pensando unos segundos.
¿Cómo las puedes ordenar?	No contesta.	Se observa que tiene dificultad de realizar este ordenamiento.
¿Las puedes ordenar, cómo las pudieras ordenar? ¡Tócalas si quieres!	(Toma las pelotitas, las manipula)	Parece que distingue el peso de cada una.
¿Cómo pudieran ir ordenadas esas pelotitas?	(Las coloca en hilera).	
¿Así ordenadas?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Cómo las ordenaste... cómo pudieras ordenarlas?	(Sonríe, se lleva la mano derecha a la barbilla).	
¿La que tiene más o... cómo pudieras ordenarlas?	(Cambia de posición la primera al final).	
¿Cuál iría primero de éstas?	La roja.	
¿Por qué?	Porque tiene más.	
¿Tiene más qué?	Piedritas.	
¿Tiene más... pesa más?	(Toma las dos pelotitas y las sostiene).	
¿Y después cuál le va a seguir... cuál iría... así?	(Coloca en hilera lo que corrigió).	
¿La roja tiene más?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y la azul... tiene menos?	Sí.	
Haber, agárrala la azul y la roja.	(Sonríe).	Parece que se da cuenta de cual pesa más.

¿Cuál tiene más?	Pausa, ssssh (levanta la pelotita roja con la mano izquierda).	
¿Esa tiene más?	Ésta (mueve la mano derecha sosteniendo la pelotita azul).	
Entonces ¿cómo podrías ordenar, cuál iría primero?	(Coloca la azul al final, en medio la amarilla y al principio la roja).	
¿Por qué la amarilla ahí?	Porque pesa menos.	
Y ¿cuál seguiría... de la amarilla cuál seguiría?	La roja.	
¿Por qué?	Porque pesa poquito.	
Y la azul ¿por qué?	Porque pesa más.	
		A continuación se procede a separar las fotocopias de la balanza y del círculo que hizo el niño recortándolos, posteriormente se desordenan, por un lado se colocan en hilera los dibujos de la balanza y en otra los círculos.
¿Cuál fue el primer dibujito que hiciste?	Ya se cual, ya se cual, es éste (entrega el segundo dibujo que hizo de la balanza).	Cuando colocó la pelotita azul.
¿Éste fue el primero?	Si.	
¿Con cuál	Con el azul (círculo azul).	
¿Y después... y después de éste?	Hum... el amarillo (entrega el tercer dibujo que hizo).	
Y después del amarillo ¿cuál le siguió?	El rojo (entrega el cuarto dibujo que hizo).	
¿Y después?	(Me proporciona el primer dibujo donde no relleno el círculo).	
Ahora me puedes decir ¿qué viste, qué le pasó, con tus propias palabritas qué viste que le pasó... qué sucedió?	Se estiró (señala el resorte moviendo su mano hacia abajo).	
¿Cuándo se estiró... o por qué se estiró... por qué se estiró?	Porque la azul pesa más.	
¿Y con las otras no se estiraron?	Con la roja.	

¿Y con la amarilla?	Se quedó así (señala la tapa de la balanza sin nada).	
Entonces ¿puedes decir qué le pasó al resortito, qué le sucedió?	Se estiró.	
¿Cómo se estiró?	Hasta abajo.	
¿Qué le pusiste para que se estirara hasta abajo?	La bolita azul.	
¿Nada más se estiró hasta abajo con esa?	Si.	
¿Y con la amarilla?	Quedó ahí en el mismo lugar (señala la balanza sin peso).	
¿Y con la roja?	Quedó hasta ésta (señala un poco debajo de la balanza sin peso).	
Entonces la que se estiró más ¿cuál fue?	La azul.	
¿Y la que no se estiró?	La amarilla.	
¿Y la que se estiró un poquito?	La roja.	

### SERIACIÓN DE JESÚS



Jesús hace la seriación considerando solo los tres objetos que fueron colocados en la tapa, se le olvida que el primer dibujo fue la balanza sin peso (2, 3, 4, 1), esto mismo ocurre al separar los dos dibujos y ordenarlos (se le fija la idea del peso). En la ordenación de las bolitas, después de unos momentos de manipularlas, al final se da cuenta de las diferencias de peso y las ordena de manera ascendente (amarilla, roja y azul). El niño establece la relación peso-alargamiento al mencionar que el resorte se estira más “porque la azul pesa más”, con la bolita amarilla “queda ahí en el mismo lugar”, con la bolita roja se le dificulta expresar el término medio entre dos estados inicial y final solo dice “quedó hasta esta” (señalando un poco abajo de la balanza sin peso).

## SITUACIÓN EXPERIMENTAL 4

### “EL ALARGAMIENTO DE UN RESORTE Y LA ORDENACIÓN DE CUERPOS REDONDOS”

**OBJETIVO:** Analizar las percepciones de niños de 5 y 7 años en el alargamiento de un resorte (balanza) producto del peso y la ordenación de objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes.

**MATERIAL:** Una balanza graduada, cuatro objetos redondos del mismo tamaño de colores y pesos diferentes (azul, roja, verde y amarillo), cuatro marcadores del color de los objetos, hojas blancas, lápiz, cámara de video.

### DESARROLLO

En un *primer momento* se le presentan al niño la balanza graduada y los cuatro objetos redondos (azul, rojo, verde y amarillo) de tamaños similares y pesos diferentes, se colocan en la balanza los objetos redondos en desorden de uno en uno y se le indica que observe lo que ocurre, posteriormente se le proporciona una hoja blanca y se le pide que dibuje lo que observó, después se le solicita que explique con sus propias palabras lo que sucedió. En un *segundo momento* se le vuelven a presentar los cuatro objetos redondos en desorden y se le pide al niño que los ordene como pueda (se intuye que con la actividad realizada el niño ya tiene una noción del peso de los objetos), se le entrega una hoja blanca y se le pide que dibuje su ordenación, luego se le indica que explique con sus propias palabras cómo realizó la ordenación.

### RESULTADOS DE LA EXPLORACIÓN

**BRYAN** (7 años, 2 meses).

#### “*Primer momento*”

ENTREVISTADOR	BRYAN	OBSERVACIONES
		Se le presenta el material (balanza, cuatro pelotitas de diferente color).
Voy a colocar estas pelotitas de una por una en la balanza y observa bien lo que pasa.		Se coloca la pelotita roja y el resorte se alarga un poco.
Ahora ésta.		Se coloca la pelotita amarilla, el resorte no se alarga.
Ahora ésta otra.... ¿viste?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	Se coloca la azul, el resorte se alarga más.
Ahora vamos a poner ésta otra, la que falta ¿cuál	La verde.	Se coloca la pelotita verde y el resorte se alarga un

falta?		poco menos que la roja.
¿Viste lo que sucedió?	Si.	
Ahora te voy a dar una hojita blanca y un lápiz para que me dibujes lo que vistes ¿qué fue lo que viste?... ahí dibújalo o me platicas ¿qué fue lo que vistes?	Te platico.	Parece que se le dificulta dibujar lo sucedido.
Haber trata de dibujar también.	No sé cómo se hace esto (señala la balanza).	
Pláticame ¿qué sucedió, qué vistes?	Que cuando ponías se bajaba ésta (señala la tapa de la balanza), pero la amarilla no se bajó ahí quedó.	
¿No se bajó?	No.	
¿Nada más?	Si.	
¿Cuál dices que no se bajó?	La amarilla.	
Y ¿cuál se bajó?	Se bajaron ésta, ésta y ésta (señalando las otras tres).	
Pero ¿se bajaron iguales?	No, se bajó más con la roja.	
¿Se bajó más con la roja?	Duda.	
Haber prueba si quieres.	(Coloca la pelota roja en la balanza y observa que el resorte se alarga).	
Ahora prueba con otra.	(Quita la roja y coloca la verde), creo que son iguales.	
	(Quita la verde y coloca la azul), no la azul, se bajó más la azul.	Se da cuenta de que la pelotita azul es la que pesa más.
Haber dibújame ahí (hoja blanca) lo que tú hayas visto así como te salga.	Todo esto (señala la balanza).	
Haz el dibujito como tú quieras, así como vistes... como hayas visto, ¿qué fue lo que vistes de las pelotitas?	(Dibuja la balanza con una pelotita sin colorear), ¡ya!	
¿Eso fue lo que vistes?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y aquí qué hay en ésta?	Una pelota.	Señalando la tapita del dibujo.
¿De qué color es?	De... roja.	

¿Me puedes decir otra vez qué es lo que vistes, qué sucedió, qué fue lo que viste aquí (balanza), qué sucedió, qué es lo que vistes con las pelotitas?	Que ponías una pelota y que se bajaba, que estaban bajando, pero pusiste la amarilla y entonces no se bajó.	
¿Por qué no se bajaría?	Por... que no pesa.	
Y la que se bajó ¿se bajaron iguales?	No.	
¿Cuál no se bajó?	La amarilla (la señala).	
¿Y cuál se bajó?	La azul (la señala).	
¿Cuál se bajó más de todas las que tienes ahí?	Ésta (señala la azul).	
¿Por qué se bajó?	Porque pesa mucho.	
¿Y las otras dos?	Porque... casi no pesan.	En referencia a las pelotas verde y roja.
Entonces la que no pesa ¿cuál es de las cuatro pelotitas?	La amarilla.	
Esa no se bajó ¿por qué dices que no se bajó?	Porque no pesa.	
Entonces el resortito, se estira ¿por qué se estirara el resortito, por qué se estira?	Porque... porque se baja esto con el peso (señala la tapa) y esto se estira (señala el resorte).	
Entonces si se alarga mucho ¿por qué se alargó?... si se estira mucho ¿por qué se estira mucho?	Porque le pusieron la pelota pesada, por ponerle pesado pues.	
¿Y si no se estira, si no se alarga?	Es porque le pusieron una pelota que no pesa.	

#### DIBUJO DE BRYAN



A Bryan se le dificulta materializar por medio de dibujos la relación de las variables alargamiento del resorte y peso (modelar el fenómeno) ¿qué fue lo que viste?...ahí dibújalo o me platicas qué fue lo que viste, “te platico”, haber, trata de dibujar también si quieres... “no sé cómo se hace esto (señala la balanza). Tiene duda en las pelotitas verde y roja ¿se bajó más la roja? duda, haber prueba si quieres (coloca la roja en la balanza y observa que el resorte se alarga), ahora prueba con la otra (quita la roja y coloca la verde) “creo que iguales”, esto sucede porque hay muy poca diferencia entre ellas en el peso. Bryan establece la relación entre las variables alargamiento-peso en forma verbal, entonces si se alarga mucho ¿por qué se alargó...“porque le pusieron la pelota pesada, por ponerle pesado pues” ¿y si no se estira, si no se alarga? “es que porque le pusieron una pelota que no pesa”.

**“Segundo Momento”**

<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>BRYAN</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se procede a mostrar otra vez las cuatro pelotitas.
¿Puedes ordenar estas pelotitas?, haber ordénalas como tú puedas, ¿cuál va primero... cómo las ordenarías?	Ésta primero (la amarilla), luego... (toma la verde, la azul, levanta la roja), ésta (coloca la roja después de la amarilla), luego ésta (pone la verde después de la roja) y luego ésta (coloca la azul al final después de la verde).	Se da cuenta que la amarilla no pesa y con las otras tres siente el peso de cada una con su mano.
Ahora ¿por qué las ordenaste así? pláticame ¿por qué las ordenas así de esa forma?	Porque vi que así las ordenaste.	
¿Y por qué primero la amarilla?	Porque yo vi que tú ordenaste la primera amarilla.	
¿Y tú cómo las ordenarías, cómo las puedes ordenar... haber tú cómo pudieras ordenarlas?	Así (coloca la verde en lugar de la roja y viceversa).	
¿Por qué ésta al último la azul?	Porque pesa más.	
¿Y por qué ésta primero la amarilla?	Porque pesa menos.	
¿Y la verde?	Porque pesa un poquito más.	
¿Y la roja?	Porque pesa un poco más también.	
¿Un poco más? entonces...	No porque pesa ésta un poco menos (señala la	

	verde) y ésta un poco más (señala la roja).	
Entonces tú ¿así las ordenarías?	Sí.	
¿Ésta porque pesa qué?	Menos.	Señalando la amarilla.
¿Y la última?	Porque pesa más.	
¿Ese sería el orden?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Le puedes dibujar aquí?, así como están ordenadas, puedes utilizar colores, así como están dibújamelos ahí, en ese orden como tú dices, si quieres escribir algo también puedes escribir.	(Dibuja el orden de las pelotitas, las colorea según su color y escribe el nombre del color debajo de cada pelotita), ¡ya!.	Se le proporciona una hoja blanca. El orden de las pelotitas fue amarilla, verde, roja y azul.
¿Quieres decir algo de lo que vistes... o ya no quieres decir nada?	Ya mejor.	

#### ORDENACIÓN DE BRYAN



Bryan distingue la relación que hay entre los diferentes pesos de los objetos de tamaños similares, realiza la seriación ascendente en forma horizontal de manera adecuada, sabe que la pelota amarilla es la menos pesada y la azul es la que más pesa, puesto que las coloca al principio y al final (esto se debe a la actividad anterior y a la sensación de peso que experimenta al agarrar las pelotitas), y ¿por qué ésta primero? (la amarilla) “porque pesa menos” ¿por qué ésta al último? (la azul) “porque pesa más”, después coloca la verde en segundo lugar y la roja en tercero, existe duda en estas dos ya que el peso es parecido. Cabe hacer notar que cuando los objetos en este caso redondos de tamaños parecidos y de peso diferentes, el niño distingue fácilmente los que son muy diferentes (no pesa y pesa mucho), se le dificulta distinguir los pesos intermedios ¿y la verde? “porque pesa un poquito más” ¿y la roja? “porque pesa un poco más también” ¿un poco más? entonces “no porque pesa ésta un poco menos (señala la verde) y ésta un poco más (señala la roja)”.

ANEL (5 años, 7 meses).

“Primer momento”

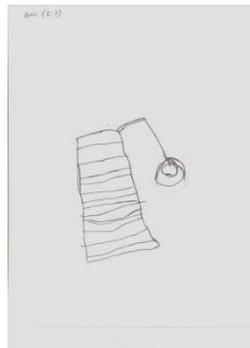
ENTREVISTADOR	ANEL	OBSERVACIONES
		Se le presenta el material (balanza, tres pelotitas de color rojo azul, amarillo). Decidí trabajar con tres cuerpos en lugar de los cuatro como estaba planeado, esto se debió a que en la actividad anterior, a Bryan se le dificultó establecer la diferencia entre pesos intermedios.
Voy a colocar estas pelotitas y tú vas a ver bien ¿qué le pasa, qué sucede cuando le pongo una pelotita?, después de la quito y pongo otra, fijate lo que le pasa, si.		Se coloca la pelotita amarilla el resorte no se alarga.
¿Ya viste?, ahora voy a quitar ésta y voy a poner otra pelotita, fijate lo que pasa, fijate ¿qué ves?		Se coloca la pelotita roja y el resorte se alarga un poco.
¿Ya viste?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Ahora voy a quitar esta pelotita y voy a poner la otra... fijate ¿qué es lo que ves?	Se fue hasta la loza.	Se coloca la pelotita azul y el resorte se alarga más que con las anteriores pelotitas.
Ahora platicame ¿qué vistes, qué fue lo que vistes, qué pasó?, haber cuéntame lo que pasó	Se fue para abajo.	
¿Se fue hasta abajo?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Con todas, con las tres pelotitas se fue hasta abajo?	Con la azul.	
¿Y con las otras dos?	No se fue abajo.	
¿Qué sucedió con esta pelotita, qué le pasó... te acuerdas qué le pasó... qué	Cayó hasta aquí (señala una marca en la balanza).	Señala la pelotita amarilla.

le pasó?		
¿Y con la roja?	Cayó aquí (señala un poco arriba de lo que antes había señalado en la balanza).	
¿Igual en las dos?	Una aquí y otra acá (señala un poco abajo y arriba en la balanza).	
¿Cuál fue la acá?	La roja.	Señala el nivel de la tapa sin objeto.
¿La roja fue hasta ahí?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Y la amarilla?	Aquii (señala un poco más abajo en la balanza).	
Este es un resortito ¿qué le pasó a este resortito?	Nada.	
¿No le pasó nada?, haber ¿no le pasa nada al resortito, si yo le pongo esta pelotita (azul) no le pasa nada?, haber fijate... ¿qué le pasa al resortito?	(Observa que el resorte se alarga), se fue hasta abajo.	Se coloca otra vez la pelotita azul.
¿Y qué le pasó al resortito?	Giró.	
¿Giró?	Sí.	
Si conoces las ligas ¿cómo se hace la liga cuando se hace para los dos lados, qué se hace la liga, sabes cómo se llama qué se hace, que se hace cuando se hace así?	Se, se... se gira	Moviendo las manos en señal de que se estira. Tiene dificultades para expresar verbalmente esta acción.
¿Se gira... o se estira?	Se gira.	
¿Y qué le pasó aquí en el resortito?	Se fue hasta abajo.	
¿Por qué se fue hasta abajo?	Porque estiró.	
¿Y por qué se estiró?	Porque por... por una pelota.	
¿Por cuál de las pelotitas de esas se estiró?	Con ésta (señala la azul).	
¿Y las otras?	La otra aquí cayó (señala un poco arriba de la balanza).	
¿Cuál?	La amarilla.	
Haber, pon la amarilla haber si ahí cayó como dices tú.		Coloca la pelotita amarilla en la balanza.

¿Ya viste, hasta dónde cayó?	Hasta aquí (señala en la balanza).	
¿Y la otra roja?, haber cámbiala y ponla.	Hasta aquí (señala un poco abajo en la balanza).	Coloca la pelotita roja.
Entonces ¿cuál cayó más?	Ésta (señala la roja).	
¿Y la azul?	También.	
¿Y cuál cayó más de todas?	Estas dos (señala la roja y la azul).	
Pero de esas dos ¿cuál cayó más?	Las dos.	No percibe aún el peso de los objetos.
¿Iguales?, ponlas de una por una haber si son iguales	Esa.	Coloca la azul.
¿La roja cae igual?	No.	Se da cuenta cuál ésa más.
¿Cuál cae más?	Ésta porque está pesada (agarrando la azul).	
¿Y si está pesada qué le pasa al resortito?	Se le va hasta acá (señala hasta la base de la balanza).	
¿Por qué se va hasta abajo?	Porque está pesada.	
¿Y la amarilla se va hasta abajo?	No.	
¿Por qué no se va hasta abajo?	Porque no está pesada.	
Entonces ¿cuál pesa más?	Ésta (agarrando la azul).	
¿Y cuál no pesa?	Estas dos (señalando la amarilla y la roja).	Tiene dificultad en hacer comparaciones entre tres pesos diferentes, compara de dos en dos.
¿Puedes dibujar aquí lo que vistes... lo que tú vistes puedes dibujar?	(Dibuja la balanza), ¡ya!	Se le proporciona una hoja blanca.
Éste es el dibujito ¿esto es lo que tú vistes?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Y cuando estaban las pelotitas ¿me podrías decir qué sucedió cuando le pusimos cada una de las pelotitas, con tus propias palabritas?	La amarilla se fue hasta aquí (señala en la balanza).	
¿Y la otra?	La roja cayó hasta aquí (señala un poco abajo),	
¿Y hasta dónde cayó la azul?	Hasta acá (señala más abajo).	
¿Hasta abajo?	Si.	
Entonces ¿por qué cayó		

hasta allá abajo la azul?	Porque está pesada.	
¿Y la amarilla?	No está pesada.	
¿Y qué le pasa aquí al resortito?	Se estira.	
¿Por qué se estira, si se estira hasta abajo, por qué se estira?	Porque esta pelota, la pelota... pesada.	
¿Y cuándo no se estira?	Se supone que no está pesada.	

#### DIBUJO DE ANEL



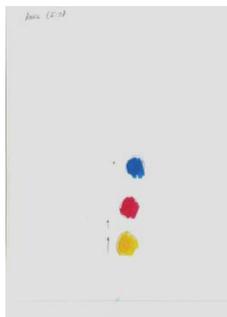
Anel tiene dificultad para recordar la relación entre dos pesos (cuál pesa más y cuál pesa menos), solo cuando coloca cada uno en la balanza encuentra esta distinción, al final establece la relación entre las variables alargamiento y peso ¿y qué le pasa aquí al resortito? (señalándolo) “se estira” ¿por qué se estira, si se estira hasta abajo, por qué se estira? “porque esta pelota, la pelota...pesada” ¿y cuando no se estira? “se supone que no está pesada”. Por otro lado también se le dificulta representar el fenómeno (alargamiento-peso) observado, pues únicamente dibuja la balanza como está, utiliza el lenguaje verbal para describir lo sucedido.

#### “Segundo Momento”

ENTREVISTADOR	ANEL	OBSERVACIONES
		Se procede a mostrar otra vez las tres pelotitas.
Ahora ¿puedes ordenar estas pelotitas, puedes ordenarlas... tú las puedes estas pelotitas?	¿A dónde?	
Aquí en la mesa, ¿cuál va primero, cuál va después, cuál crees que va primero?	Ésta (señala la amarilla).	
¿Por qué crees que va primero?	Porque no está pesada.	
¿Y cuál se sigue?	Ésta (señala la roja).	
¿Y después?	Ésta (señala la azul).	

¿Y esa (azul) detrás de quién va?	De la roja.	
¿Por qué va hasta atrás?	Porque está pesada.	
¿Y la que no está pesada cuál es?	Ésta (señala la amarilla).	
¿Por qué la amarilla primero?	Porque no está pesada.	
¿Y esta roja por qué?	Porque no está pesada.	
¿Y la azul?	Si está pesada.	
Entonces ¿estas dos no están pesadas?	No.	Señalando la amarilla y la roja.
¿Pesan igual?	No.	
¿Cuál pesa más de estas dos?	Ésta (señala la azul).	Señalando la amarilla y la roja.
Pero de estas dos nada más ¿cuál pesa más?	Pausa, la roja.	
¿Por qué pesa más?	Porque... tiene mucho papel.	
Bueno, ahora ¿puedes hacer los dibujitos aquí, cuál va primero, cuál va después?	(Dibuja la serie en forma vertical de abajo hacia arriba y colorea los círculos).	Se le proporciona una hoja blanca.
¿Cuál dijiste que va primero?	El amarillo.	
¿Por qué va primero el amarillo?	Porque no pesa.	
¿Y cuál le sigue?	La roja.	
¿Y cuál es la que va después al último?	La azul.	

### SERIACIÓN DE ANEL EN FORMA ASCENDENTE (amarilla, roja y azul)



Anel realiza la seriación de los tres objetos redondos de acuerdo a su peso en forma ascendente vertical, distingue la que va al principio *¿cuál dijiste que va primero?* “*el amarillo*” *¿por qué va primero el amarillo?* “*porque no pesa*”, y la azul que va al final *¿por qué va hasta atrás?* “*porque está pesada*”, tiene dificultades para expresar la relación de peso

que hay entre la roja y la amarilla, *entonces ¿éstas dos no están pesadas? (la amarilla y la roja) “no” ¿éstas pesan igual? “no” ¿cuál pesa más de éstas dos? “esta” (señala la azul)*, al final concluye que pesa más la roja *“porque tiene mucho papel”*, esto puede referirse a la cantidad de materia de que está constituido el objeto (masa) que hace que pese, ya que estos cuerpos están cubiertos de papel color amarillo, rojo y azul.

## SITUACIÓN EXPERIMENTAL 5

### “EL ALARGAMIENTO DE UN RESORTE Y LA ORDENACIÓN DE CUERPOS REDONDOS”

**OBJETIVO:** Analizar lo que los niños de 5 y 6 años notan entre el peso y alargamiento de un resorte (balanza) y la ordenación de objetos redondos de tamaños similares y pesos diferentes.

**MATERIAL:** Una balanza graduada, cuatro objetos redondos de tamaños similares, colores y pesos diferentes (azul, roja, verde y amarillo), cuatro marcadores del color de los objetos, cuatro fotocopias de la balanza, hojas blancas, lápiz, cámara de video.

### DESARROLLO

Esta situación experimental se realizó en el Jardín de Niños “Josefa Ortiz de Domínguez” de la colonia Emiliano Zapata, Mpio. de Acapulco, Gro. y se dividió en dos momentos.

En un *primer momento* se le presentan al niño la balanza graduada y los cuatro objetos redondos (azul, rojo, verde y amarillo) de tamaños similares y pesos diferentes, se coloca en la balanza un objeto redondo y se le indica que observe bien lo que sucede, se le proporciona una fotocopia de la balanza graduada sin el resorte y la tapa, se le pide que complete el dibujo de acuerdo a lo que observó (puede usar colores), después se le solicita que coloque otra pelotita diferente y haga su dibujo, ejecuta la misma acción con las demás pelotitas; luego se le pide que ordene sus dibujos tomando en cuenta lo sucedido, se realizan preguntas al respecto tales como: ¿por qué pusiste primero este dibujo?, ¿por qué va al final éste?, etc.. Posteriormente se le solicita que explique con sus propias palabras lo que sucedió. En un *segundo momento* se le vuelven a presentar los cuatro objetos redondos en desorden y se le pide al niño que los ordene como pueda, se le entrega una hoja blanca y se le pide que dibuje su ordenación, luego se le indica que explique con sus propias palabras cómo realizó la ordenación.

### RESULTADOS DE LA EXPLORACIÓN

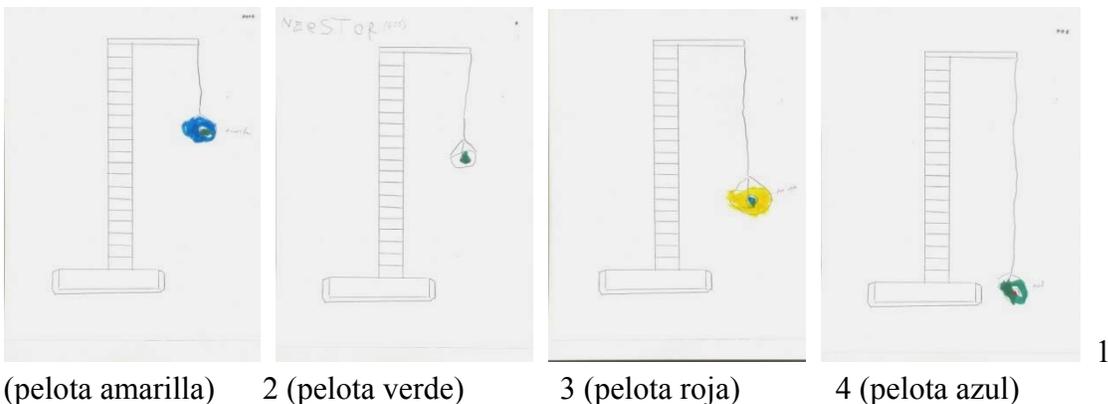
**NESTOR** (6 años, 5 meses) “*Primer momento*”

ENTREVISTADOR	NESTOR	OBSERVACIONES
		Se le presenta el material (balanza, cuatro pelotitas de diferente color).
Escoge una pelotita y ponla en la balanza... ¿viste lo que pasó?	(Mueve la cabeza afirmativamente en señal de haber observado).	Escoge la pelotita verde.
Ahora, haz el dibujito aquí (se le proporciona una fotocopia de la balanza), dibuja aquí lo que vistes que sucedió ¿qué sucedió?	Se bajó	Dibuja lo que le falta a la balanza (el resorte, la tapa y la pelotita verde).
Ahora, quita esta pelotita y		

pon otra y veas ¿qué le pasa, qué sucede?... ¿viste lo pasó?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	Escoge la pelotita roja y la coloca en la balanza.
Ahora haz otro dibujito (se le entrega otra fotocopia) para que veas qué le sucedió	¿Qué le falta?	No distingue lo que le hace falta a la fotocopia.
Fíjate lo que le hace falta, fíjate lo que pasó, dibuja lo que sucedió, lo que viste.	Estaba más alta, más baja, ¿verdad?	Tiene duda para dibujar el alargamiento respecto al anterior.
Dibuja lo que tú hayas visto ¿qué le sucedió?		Dibuja lo que falta y pinta de azul la pelota roja, se le interroga si es el color y contesta que si.
Ahora, quita esa pelotita y ponle otra... ¿viste lo que le sucedió?	Se bajó más.	Coloca la pelotita azul en la balanza.
Haz el dibujito aquí (fotocopia), haz lo que viste.		Dibuja el resorte más alargado y pinta de rojo la pelotita azul.
Pon la pelotita que falta... ¿qué le pasó?	Se quedó en el mismo lugar.	Coloca la última pelotita (amarilla) en la balanza.
Haber, haz tu dibujito.		Dibuja el resorte sin alargarse y pinta de verde la pelotita amarilla.
A continuación se le pide que ordene los dibujos, fíjate cómo están los dibujos ¿los puedes ordenar?... ¿cuál va primero?	Éste (el dibujo de la pelotita amarilla)	Se le presentan los dibujos en hilera, los observa e intercambia algunos lugares.
¿Y cuál es la que le sigue?	(Señala el dibujo de la pelotita verde).	
¿Y después de éste?	(Señala el dibujo de la pelotita roja).	
¿Y cuál va después?	(Señala el dibujo de la pelotita azul)	
Haber, pláticame ¿cómo los ordenastes?	Contándolos	Piensa que ordenar es contar.
¿Cómo... por qué está va primero?	Porque ésta más... está más chiquita	
¿Cuál está más chiquita?	(Señala el cuarto dibujo, el de la pelota amarilla).	
¿Cuál es lo que está más chiquito, señala cuál es lo que está más chiquito?	(Señala la pelotita amarilla)	

¿Y éste? (dibujo de la pelotita verde, segundo en su ordenación)	(Señala la pelotita verde)	
Éste va primero ¿por qué me dijiste que va primero? (pelotita amarilla)	Porque es el más chiquito	
¿Está más chiquito esto (la pelota) o cuál es lo que está más chiquito?	Porque está más chiquito esto de largo (señalando en el dibujo el resorte).	
¿Por qué va ésta después de la segunda? (verde y roja respectivamente).	Está al revés (pasa la tercera que es verde al segundo lugar donde estaba la roja).	Se da cuenta de su error.
¿Por qué ahora ésta va aquí? (la roja en tercer lugar).	Porque ésta (señala la roja) está más larga que ésta (señala la verde) y ésta (azul) está más larga que ésta (roja).	
¿Por qué ésta va al último? (la pelotita azul)	Porque es la más larga.	
¿Por qué ésta va primero? (la pelotita amarilla)	Porque es la más corta.	Nestor ordena los dibujos (de menor a mayor) de acuerdo al alargamiento del resorte producto del peso.

### SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS DE NESTOR

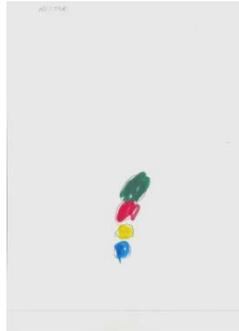


Néstor ordena los dibujos en forma ascendente tomando en cuenta el alargamiento del resorte producto del peso de las pelotitas “está más chiquito”, tiene problemas en la distinción de los colores amarillo, rojo y azul.

“Segundo momento”

ENTREVISTADOR	NESTOR	OBSERVACIONES
Ahora, estas bolitas que tienes aquí ¿las puedes ordenar, cómo las ordenarías?	En fila (amarilla, azul, roja y verde).	
¿Así, por qué las ordenastes así?	Porque así van derechas.	
¿Y por qué va la amarilla primero?	Porque tá, tá, porque está muy...chiquita.	Se le dificulta expresar lo que piensa.
¿Por qué la verde hasta atrás?	Porque es la más grande.	
¿Es la más grande, seguro que es la más grande?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Entonces ¿cómo las ordenastes?	Derecha.	
¿Y la azul por qué ahí? (segundo lugar)	Porque está...está un poquito más grande (agarra la amarilla y la azul).	
Haber, fijate si la amarilla está más grande que la azul	(Observa y cambia de posición, la azul en primero y la amarilla después).	Ordena las pelotitas de acuerdo al tamaño.
¿Puedes ordenarlas de otra forma, cómo las puedes ordenar?	(Pone las cuatro pelotitas juntas formando un rombo).	
Haber, explícame ¿cómo las ordenastes con tus propias palabras, por qué así en bolita?	Porque (pausa), este porque se pueden ordenar así.	
Ahí ¿cuál iría primero?	Ésta (azul, empieza por la más cercana)	
¿Y cuál le va a seguir?	Ésta (amarilla girando hacia la derecha)	
¿y después?	Señala la roja	
¿y después?	La verde (señalando)	
¿Puedes hacer otro ordenamiento?	(Mueve la cabeza negativamente).	
Dibuja aquí (hoja blanca) ¿cómo ordenastes, cuál fue lo que ordenaste primero?	En fila (las pone como las había colocado por tamaño, las dibuja y colorea).	

**SERIACIÓN DE LAS PELOTITAS DE NESTOR**  
(El color de las pelotitas de abajo hacia arriba es azul, amarillo, rojo y verde)



Nestor realiza la ordenación de las pelotitas en forma vertical de manera ascendente de acuerdo al tamaño de las pelotas (aunque tres son similares en su tamaño), hace otra ordenación juntando las pelotitas en forma de un rombo, sin considerar un criterio de comparación, lo justifica diciendo “porque se pueden ordenar así”.

**CARLA** (5 años, 6 meses) “*Primer momento*”

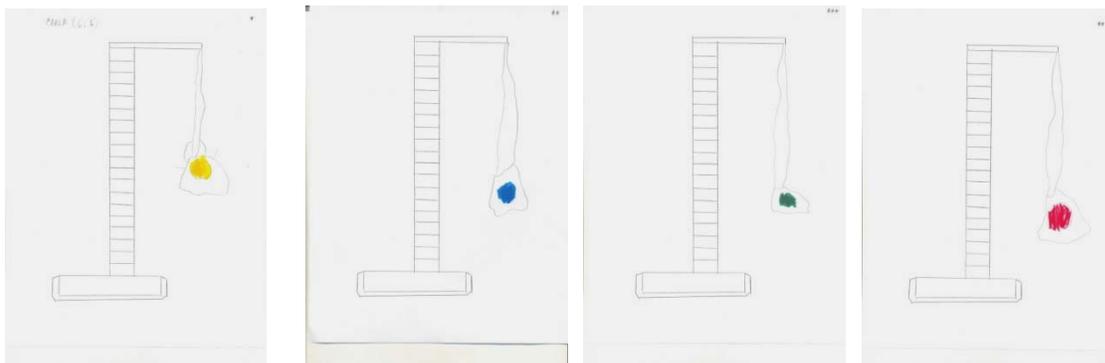
<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>CARLA</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le presenta la balanza y las cuatro pelotitas.
Escoge una pelotita en la tapita y vas a ver ¿qué sucede?... ¿vistes bien?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	Escoge la pelotita amarilla.
Vas a hacer un dibujito (se le entrega una fotocopia) y le completas ¿qué es lo que le hace falta?, fijate bien.	La desta. (señala el resorte).	Dibuja el resorte y la pelotita amarilla.
Ahora le vas a quitar esta pelotita para que coloques otra, la que tú quieras escoger... ¿qué le pasó?	Se cayó.	Escoge la pelotita azul, menciona se cayó para comunicar la acción de que se alargó el resorte.
Haber, haz el dibujito cuando le pusiste esa pelotita qué le sucedió		Dibuja el resorte y la pelotita azul un poco más abajo de la pelotita amarilla.
Ahora quita la pelotita y pon otra pelotita de las que hacen falta.		Escoge la verde y la coloca.
¿Vistes qué le pasó?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Dibuja ¿qué le sucedió?		Dibuja el resorte con la pelotita verde a la misma altura que la pelotita azul.

Ahora falta...una.		Quita la pelotita verde y coloca la pelotita roja en la balanza.
También el dibujito (fotocopia) de lo que le falta.	Ya. (ha terminado).	Dibuja el resorte con la pelotita roja a la misma altura que la verde.
¿Puedes ordenar los dibujitos, los puedes ordenar? (se colocan en hilera), ¿cuál crees que va primero?	Éste. (señala el dibujo con la pelotita roja que es el primero de izquierda a derecha)	
¿Recuerdas qué le sucedió a la tapita?	Sí, ya merito se iba a caer.	Se le hace esta pregunta para que recuerde lo sucedido y no señale al azar.
¿Con cuál pelotita se iba a caer?	Con la roja.	
¿Y te acuerdas cómo estaba con la amarilla?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Entonces de éstos (dibujos) ¿cuál va primero?	(Señala el dibujo con la pelotita amarilla).	
¿Y cuál va después de éste?	(Señala el dibujo con la pelotita azul).	
¿Y cuál va después?	(Señala el dibujo con la pelotita verde).	
¿Y cuál va después?	(Señala el último que es el dibujo con la pelotita roja).	Ahora, empezó señalando los dibujos de derecha a izquierda.
Me puedes decir con tus propias palabritas ¿qué fue lo que viste...te acuerdas qué fue lo que viste?	Que le puse una bolita...y se iba caer.	
¿Con todas pasó lo mismo?	No (mueve la cabeza negativamente).	
¿Con cuál pelotita te acuerdas que se bajó?	La amarilla.	
Ponla, haber si con esa se bajó	(Coloca la pelotita amarilla en la balanza y me regresa a ver).	Al parecer comprende su error.
¿Se bajó?	(Mueve la cabeza negativamente).	
¿Cuál fue la que se bajó?	Ésta (agarra la pelotita azul y la coloca en la balanza).	Se da cuenta que con esa pelotita se baja la tapa.
¿Con esa nada más se bajó?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Pon otra de las que faltan.	(Coloca la pelotita verde en	

	la balanza y regresa a verme).	
¿Cuál se bajó más?	(Señala la pelotita azul).	
¿Y cuál no se bajó?	(Señala la que está en la balanza, la verde).	
Coloca la amarilla, haber si se baja igual.	(Pone la amarilla en la balanza y mueve la cabeza negativamente).	Se da cuenta que la verde se baja más que la amarilla.
¿Cuál se bajó más la amarilla o la verde?	La verde (señalando).	
¿Y la roja?	(Coloca la roja en la balanza).	
¿Se bajó igual que la amarilla?	(Mueve la cabeza negativamente).	
Pon la amarilla.	(Coloca la pelotita amarilla en la balanza).	
¿Se bajaron igual?	(Mueve la cabeza negativamente).	Se da cuenta que la roja se baja más que la amarilla
¿Cuál se bajó más?	(Señala la pelotita roja).	
Entonces ¿cuál es la que se baja menos?	(Señala la amarilla).	
¿Y cuál es la que se baja más?	(Señala la azul).	Distingue comparando de en dos (se baja menos y se baja más).
¿Cuál es la que se baja un poquito?	(Señala la verde).	
¿Y la roja?	Duda.	
De estas dos (verde y roja) ¿Cuál se baja más?	(Señala la roja y la coloca en la balanza).	
¿Se bajó?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Ahora cambiala y pon la otra, haber cuál se baja más	(Coloca la verde).	
¿Cuál se baja más?	La roja.	
¿Por qué piensas tú que se baja?	Porque está pesada.	Establece la relación entre peso y alargamiento (se baja o se caiga).
Y de las pelotitas ¿cuál no está pesada?	(Señala la verde).	
¿Ésa no está pesada? Ponla en la balanza.	(Mueve la cabeza negativamente y la coloca en la balanza).	Observa que se cae y se da cuenta que está pesada.
	Sí.	
Pláticame ¿qué es lo que viste cuando pusiste las pelotitas?	Una se andaba cayendo...una pelotita se andaba cayendo para acá	

	(señala hacia abajo).	
¿Y cuál es la que no cae?	La amarilla.	
Me puedes decir ¿Por qué cae, por qué baja?	Porque está pesada.	

### SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS DE CARLA



1 (pelotita amarilla)

2 (pelotita azul)

3 (pelotita verde)

4 (pelotita roja)

Carla se da cuenta que es el peso lo que provoca que se alargue el resorte, ya que al preguntarle ¿por qué cae, por qué baja? “*porque está pesada*”, compara de dos en dos pelotitas colocándolas en la balanza para distinguir cual pesa más. Tiene dificultad al comparar el peso intermedio de las pelotitas (verde y roja).

#### “Segundo momento”

ENTREVISTADOR	CARLA	OBSERVACIONES
¿Puedes ordenar estas pelotitas, cómo las pudieras ordenar, cuál crees que va primero?	(Toma la amarilla).	
¿Y cuál es la que le sigue?	(Toma la roja).	
¿Y después?	(Toma la verde).	
¿Y después?	(Toma la azul).	
Pláticame ¿cómo las ordenastes, por qué las ordenastes así?	Porque así esta allí (señalando los dibujos que hizo)	
¿Por qué va primero la amarilla?	Porque se quedó ahí (señala la balanza sin peso).	
¿Por qué va al último la azul?	Porque...aquí (busca en los dibujos el lugar de la azul).	
Pero, la azul no va al último, ¿por qué aquí va al último la azul?	Pausa, (se queda dudando, me mira).	
	Porque aquí está primero	

¿Por qué va aquí la amarilla primero?	(señalando los dibujos realizados).	
Y si no estuviera ¿cómo iría, sin que veas tú aquí (los dibujos) cuál va primero, cómo las ordenarías, cuál crees que va primero?	(Pone la amarilla, luego la azul, después la verde y al final la roja).	
¿Por qué va primero la amarilla?	Porque ésta está primera.	
¿y por qué va la azul ahí? (segundo lugar)	Porque es la segunda.	
Pero ¿por qué?	Porque allí va de la amarilla (señalando los dibujos).	Queda influenciada por el orden en que realizó los dibujos.
Pon la azul y fíjate ¿qué le pasa?	Se bajó.	
Quítala y pon la roja.	(Realiza la acción).	Se pretende que establezca la comparación entre los pesos y con esto realizar la ordenación.
¿Crees que va al último la roja?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Por qué va al último?	Porque ésta es la primera (señalando amarilla), segunda (azul), tercero (verde) y cuarta (roja).	
Ponla donde va, en el lugar que va (señalando la roja que está en la balanza).	(La vuelve a colocar en el último lugar).	
Entonces ¿así las ordenarías?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
Ahora haz el dibujito como las ordenastes (se le proporciona una hoja blanca).	(Hace el dibujo de las pelotitas como las ordenó y las colorea).	

**SERIACIÓN DE LAS PELOTITAS DE CARLA**  
(El color de las pelotitas de izquierda a derecha son amarillo, azul, verde y rojo)



Carla realiza la seriación de las pelotitas sin un referente de comparación cuantitativo, se hizo un intento para que tomara como referente el peso, comparando en su ordenamiento la segunda pelotita (azul) con la última (roja), y pudiera establecer alguna diferencia cosa que no fue posible, ya que estaba influenciada por orden en que realizó los dibujos.

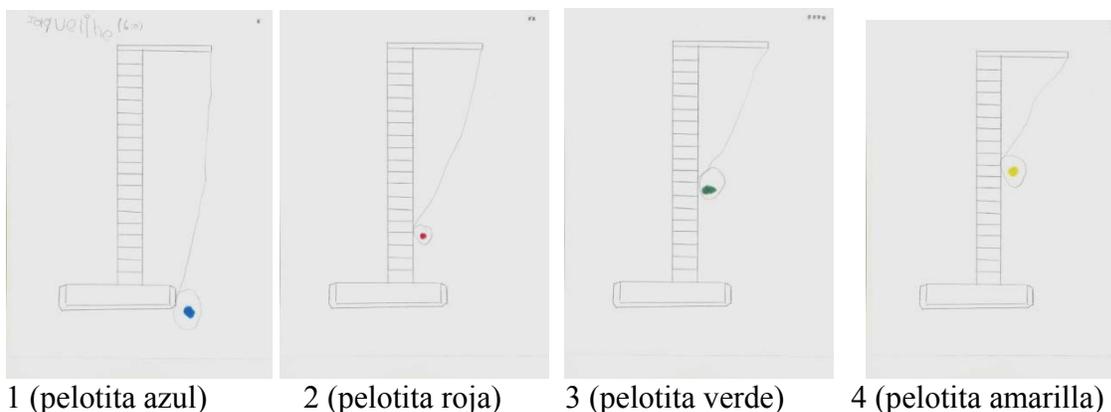
**JAQUELINE (6 años) “Primer momento”**

<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>JAQUELINE</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
		Se le presenta el material (balanza, cuatro pelotitas de diferente color).
Te vas a fijar bien qué pasa en esta balanza cuando tú le pongas una de las pelotitas que hay ahí, observa bien qué pasa, escoge una y ponla.	(Coloca la pelotita azul en la balanza) Se bajó.	
Aquí dibuja (fotocopia) lo que le hace falta.	El hilo.	
¿Qué sucedió? dibuja lo que le hace falta.	Se bajó (dibuja una línea larga y colorea la pelotita).	
Ahora quita la pelotita y ponle otra la que quieras.	(Pone la pelotita roja).	
¿Qué sucedió?	Se bajó tantito.	
Haber, dibuja hasta ¿dónde llegó?	(Pone el dedo al final donde se alarga el resorte y lo traslada al dibujo, esto lo hace en dos ocasiones, después recorre con sus dedos el resorte y traza una línea que se va acercando hasta llegar a la graduación, colorea la pelotita).	Realiza la medición del alargamiento del resorte relacionando, hasta donde llega el alargamiento y la graduación, trasladando esto al dibujo.
Ahora pon otra pelotita y fíjate ¿qué pasa?	(coloca la pelotita amarilla) No se bajó.	
Dibújale ahí (fotocopia) lo que vistes que sucedió.	(Hace el dibujo parecido al anterior junto a la graduación, pero la línea más corta, colorea la pelotita de amarillo).	
Ahora pon la que hace falta, la última.	(coloca la pelotita verde)	
¿Qué pasó?	Se bajó.	
Dibuja lo que vistes que se bajó.	(Hace una línea junto a la graduación un poco más	

	abajo que la anterior).	
Ahora, ¿me puedes ordenar los dibujitos? (se colocan en hilera), de acuerdo a lo que vistes ¿cuál va primero, cuál crees que va primero?	Se bajó.	
Pero, ¿cuál crees que va primero?	(Señala uno de los dibujos).	
¿Todos se bajaron iguales?	(Mueve la cabeza negativamente), éste, éste y éste se bajó (señalando los dibujos).	
¿Cuál iría primero?	(Señala el dibujo con la pelotita azul).	
¿Y después de éste?	Pausa, éste (señala el de la pelotita roja).	
¿Y después de éste?	(Señala el amarillo).	
¿Te acuerdas qué sucedió cuando le pusiste la pelotita amarilla y la pelotita verde?	Se bajaron, se bajaron tantito (corrige), éstos no se bajaron (señalando las dos que quedan, recorre las líneas que dibujó).	Duda, no recuerda cómo fue el alargamiento de las dos pelotitas.
¿Se bajaron iguales?	(Mueve la cabeza afirmativamente).	
¿Quieres ponerlas haber si se bajaron igual? Pon una y después la otra.	(Mueve la cabeza afirmativamente y coloca en la balanza la pelotita verde, después la amarilla).	
¿Se bajaron iguales?	(Mueve la cabeza negativamente).	Se da cuenta de su error.
¿Cuál se bajó más de las dos que pusiste?	(Toma la pelotita verde).	
¿Cuál le sigue de ésta (roja)? (regresando al ordenamiento).	(Señala el dibujo de la pelotita verde).	
¿Y después de la verde?	(Señala el dibujo de la pelotita amarilla)	
Ahora me puedes decir con tus propias palabritas lo que vistes ¿qué sucedió cuando le pusistes las pelotitas?	Se bajaron.	
Pero, ¿se bajaron iguales?	No (moviendo la cabeza negativamente).	
¿Cuál se bajó más, cuál	Estas tres (toma tres menos	Se dio cuenta que con esas

menos?	la amarilla).	pelotitas la balanza se baja.
¿Cuál de las cuatro se bajó más?	(Toma la pelotita roja y la coloca en la balanza, hace lo mismo con la verde y señala que la roja es la que se baja más).	Duda por un momento.
Haber, pon la azul...¿cuál se bajó más?	(Coloca la azul en la balanza)...La azul.	
¿Cuál se bajó menos?	La roja, la verde.	
¿Y cuál no se bajó?	(Coloca la amarilla en la balanza) ésta (sonriendo, toma la amarilla).	Coloca la pelotita amarilla para verificar si es la que no pesa.
¿Por qué se baja, por qué crees que se baje? (señalando el resorte).	Porque pesa ésta (tomando las pelotitas que pesan).	Nota que se baja (el resorte) por el peso.
Pero, de éstas ¿cuál está más pesada?	(Vuelve a colocar dos pelotitas entre ellas la azul y señala que ésta es la más pesada).	
¿Cuál está un poquito pesada?	(Coloca la pelotita verde en la balanza).	Verifica en la balanza para no equivocarse.
¿Y cuál está un poquito más pesada?	(Coloca la pelotita roja en la balanza).	Verifica.
¿Y cuál no está pesada?	(Toma la amarilla y la coloca en la balanza)	Verifica.
Entonces ¿cuál es la que pesa más?	(Toma la azul y la verde, se queda con la azul)	Se da cuenta por la percepción al agarrarlas que la azul pesa más.
¿Y cuál es la que no pesa?	La amarilla (agarrando la pelotita).	

### SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS EN FORMA DESCENDENTE DE JAQUELINE

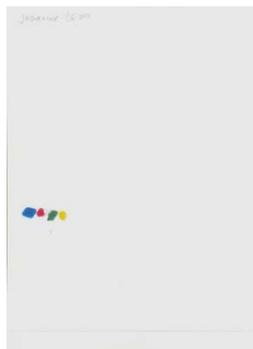


Jacqueline realiza la ordenación de los dibujos de manera descendente, se da cuenta que el resorte se alarga (baja) por el peso de los objetos (pelotitas), ya que al preguntarle ¿Por qué se baja, por qué crees que se baje?, responde “Porque pesa ésta” (tomando las pelotitas que pesan), además se le dificulta comparar dos pelotitas (no recuerda cuál pesa más o pesa menos), para ello vuelve a colocar en la balanza cada pelotita y así verificar, esta acción la realiza varias veces comparando de dos en dos.

*“Segundo momento”*

<b>ENTREVISTADOR</b>	<b>JAQUELINE</b>	<b>OBSERVACIONES</b>
De estas 4 pelotitas ¿cuál es la que crees que va primero, cuál va después, puedes ordenarlas?	(Toma la azul).	
¿Esa va primero?	(Mueve la cabeza afirmativamente)	
¿Y cuál le sigue?	(Toma la roja).	
¿Y después de la roja?	(Toma la verde).	
¿Y después de la verde?	(Toma la amarilla).	
¿Por qué las ordenastes así, pláticame por qué?	Porque así iban.	Recuerda la ordenación que realizó con los dibujos.
¿Cuál iba primero?	(Toma la azul).	
¿Por qué va primero?	Porque ella pesa más.	
¿Y por qué va al último la amarilla?	Porque no pesa.	
¿Puedes colocar todas las pelotitas como dijiste?	(Coloca las pelotitas en hilera la azul, la roja, la verde y la amarilla en ese orden).	Ordena de mayor a menor el peso las pelotitas.
Ahora vas a hacer un dibujito (hoja blanca) para que dibujes lo que hiciste.	(Dibuja las pelotitas en el orden en que las colocó).	
La última preguntita ¿Por qué se baja esto? (alargando el resorte).	Porque... (toma las pelotitas que pesan, dejando las que no pesan) está y ésta están pesadas.	Por medio de la sensación del peso toma las más pesadas.
Entonces ¿por qué se baja este resortito?	Porque están pesadas las bolas.	Establece la relación peso-alargamiento el resorte se baja porque están pesadas las bolas.

SERIACIÓN DE MAYOR A MENOR DE LAS PELOTITAS DE JAQUELINE  
(Los colores de las pelotitas son azul, rojo, verde y amarillo)



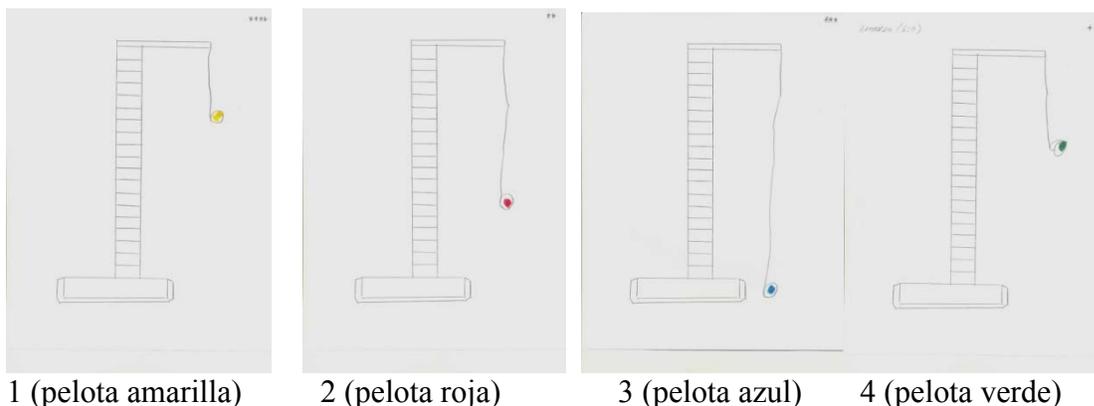
Jacqueline realiza la seriación de las pelotitas de mayor a menor, influenciada posiblemente de la ordenación de los dibujos anteriores, sabe que va primero la azul “Porque ella pesa más” y que la amarilla va al final “Porque no pesa”, además establece la relación peso-alargamiento el resorte se baja “Porque están pesadas las bolas”, es de comentar que utiliza en algunos momentos la percepción de peso agarrando las pelotitas “Porque... (toma las pelotitas que pesan, dejando las que no pesan) está y ésta están pesadas”.

**ARMANDO** (6 años) “*Primer momento*”

ENTREVISTADOR	ARMANDO	OBSERVACIONES
		Se le presenta el material (balanza, cuatro pelotitas de diferente color).
Vas a escoger una de estas pelotitas, la vas a poner en la tapita y vas a ver bien ¿qué es lo que le pasa?... ¿qué le sucedió?	(Escoge y coloca la pelotita verde) Se cayó.	El niño llama cayó a lo que ve que le sucede a la tapa al colocarle la pelotita (el resorte se alarga producto del peso).
Haz el dibujito (fotocopia) de lo que hace falta.	(Dibuja el resorte con la pelotita).	
Quita la pelotita y pon otra la que tú quieras, fíjate ¿qué le pasa?	(Coloca la pelotita roja).	Observa el alargamiento del resorte.
Dibuja lo que viste, dibuja ¿qué le sucedió?	Otra vez se cayó (dibuja el resorte un poco más abajo que el anterior y pinta la pelotita de rojo).	
Pon otra pelotita de las que faltan y fíjate ¿qué pasa?	(Coloca la pelotita azul).	
¿Vistes qué pasó, qué sucedió?	Sí, se cayó hasta abajo (dibuja el resorte hasta la base de la balanza y pinta la pelotita azul).	

Ahora pon la última pelotita.	(Coloca la pelotita amarilla).	
¿Viste lo que sucedió...qué sucedió?	(mueve la cabeza afirmativamente), no se cayó (hace el dibujo del resorte que es el menos alargado y pinta de amarillo la pelotita)	
De acuerdo a lo que tú vistes ¿qué dibujito crees que va primero? (colocados en hilera y en desorden).	Éste (señala el dibujo de la pelotita amarilla).	
Y después de éste ¿cuál le sigue?	(Señala el dibujo de la pelotita roja).	
¿Y después de la roja?	(Señala el dibujo de la pelotita azul).	
¿Y después de la azul?	(Señala el dibujo de la pelotita verde).	
Ahora me puedes decir con tus propias palabritas ¿qué fue lo que vistes?	Que se cayeron todas (haciendo el resorte hacia abajo con su mano)	
¿Todas se cayeron?	Pero una no.	Corrige.
¿Cuál no se cayó?	La amarilla (señalándola).	
¿Por qué crees que no se cayó la amarilla?	Porque era de papel.	
¿Y cuál de éstas pelotitas se cayó más?	El azul.	
¿Por qué?	Porque... está dura.	
¿Y qué le pasa a este resortito... cuando le pusiste la azul?	Se cae... se cayó hasta abajo (agarrando el resorte y bajándolo).	
¿Por qué se cayó hasta abajo?	Porque está dura la pelotita.	Para el niño dura significa pesada.
¿Y la amarilla?	No se cayó.	
¿Y de la verde y la roja?	Se cayeron.	
¿Iguales se cayeron?	No (moviendo la cabeza).	
Haber ponlas para ver cuál se cayó más, fijate.	(Coloca verde y después la roja).	
¿Cuál se cayó más?	La roja.	

## SERIACIÓN DE LOS DIBUJOS DE ARMANDO



Esta es la seriación que realizó Armando de los dibujos, en los tres primeros se puede observar una relación de orden de acuerdo al peso de la pelotita y el alargamiento del resorte, en el último no. El niño distingue la relación entre el peso y el alargamiento, ya que al preguntarle ¿Y qué le pasa a este resortito... cuando le pusiste la azul? menciona “*Se cae... se cayó hasta abajo*” (agarrando el resorte y bajándolo), y en la pregunta ¿Por qué se cayó hasta abajo? contesta “*porque está dura la pelotita*” (dura para el niño significa pesada), por el contrario al cuestionarle ¿por qué crees que no se cayó la amarilla? responde “*porque era de papel*”, el niño relaciona la constitución del objeto redondo con un material que casi no pesa para él, en este caso el papel.

### “Segundo momento”

ENTREVISTADOR	ARMANDO	OBSERVACIONES
Ahora me puedes ordenar estas pelotitas (todas juntas) ¿cuál va primero?	La verde.	
¿Por qué va la verde primero?	Porque es la que está ahí primero.	
Y tú ¿cómo las ordenarías?... ¿cuál crees que va primero?	La roja (toma la pelotita).	Escoge al azar.
¿Por qué?	Porque... la puse.	Duda.
Pero también pusiste las otras... haber ¿cuál de éstas crees que va primero?	Pausa, ésta (la roja que continua en su mano).	
¿Y después de ésta?	Ésta (toma la verde que está más cerca).	
¿Y después?	Ésta (agarra la azul).	
¿Y después?	Ésta (toma la amarilla, tiene todas en la mano izquierda).	

¿Cómo las ordenas, haber ordénalas...¿cuál va primero?	(Coloca las pelotitas en forma vertical primero la roja, después la verde, la azul y al final la amarilla).	Como va tomando las pelotitas de su mano, así las coloca.
¿Por qué va primero la roja?	Porque la puse primero.	
Y la verde ¿por qué le sigue?	Porque la puse segundo.	
Pero de acuerdo a lo que tú vistes... ¿así las ordenarías o cómo las ordenarías?	Así.	
Haz tu dibujito en esta hojita las pelotitas así como las pusistes	Ya. (Dibujó las pelotitas con su color respectivo en forma horizontal de derecha a izquierda)	Las pelotitas están en forma vertical y las dibuja horizontalmente.
Entonces ¿cuál va primero?	La roja.	
¿Cuál le sigue?	La verde.	
¿Y después de la verde?	La azul.	
Y al último ¿cuál va?	La amarilla.	

#### SERIACIÓN DE LAS PELOTITAS DE ARMANDO

(El orden es de derecha a izquierda, los colores de las pelotitas son rojo, verde, azul y amarillo respectivamente)



Armando ordena los cuerpos redondos al azar sin considerar alguna característica común entre ellos con la que pueda realizar una posible comparación, menciona que la roja va primero “*porque la puse primero*”, y la verde ¿por qué le sigue? “*porque la puse segundo*”, el niño colocó las pelotitas en forma vertical y después las dibujó en forma horizontal de derecha a izquierda.