Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del
IPN. Unidad Legaria

Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones.

Tesis que para obtener el grado de
Maestra en Ciencias
en Matemática Educativa

presenta:

Haydeé Blanco

Director de tesis:
Cecilia Rita Crespo Crespo

Codirector de tesis:
Gisela Montiel Espinosa

México, D.F., enero de 2009

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 11 del mes de diciembre de 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones"

Presentada por la alumna:

Blanco	Haydeé
Apellido paterno	nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	3	8	8

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Cecilia Rita Crespo Crespo

Director de tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día _28__ del mes _____enero___________ del año __2009___, el (la) que suscribe____Haydeé Blanco Cerchiara________________ alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro _ A050388_________, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de ___ Cecilia Rita Crespo Crespo y Gisela Montiel Espinosa__________y cede los derechos del trabajo intitulado __Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones________, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección ___fblanc@fibertel.com.ar__. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre y firma

Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones.

Índice

CAPÍTULO 2

ALGUNOS ELEMENTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS DE LAS REPRESENTACIONES DEL ESPACIO EN EL PLANO Y LA VISUALIZACIÓN

CAPÍTULO 3

LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN LA GEOMETRÍA Y EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Glosario

Emergente: Una propiedad emergente sería aquella que brota o surge de algún concepto o propiedad.

Escorzo: Reducción de la longitud de los objetos según las reglas de las perspectivas. Escorzo es el término usado para referirnos a un cuerpo en posición oblicua o perpendicular a nuestro nivel visual. El efecto de escorzo existe en todos los cuerpos con volumen.

Holístico: (del griego holos que significa todo, entero, total) es la idea de que todas las propiedades de un sistema (biológico, químico, social, económico, mental, lingüístico, etc.) no pueden ser determinadas o explicadas como la suma de sus componentes. El sistema completo se comporta de un modo distinto que la suma de sus partes.

Isometría: Aplicación entre dos espacios métricos que conserva las distancias entre los puntos.

Prototipo: ejemplos gráficos, visuales, que intentan incorporar una visión más o menos completa de las características del objeto geométrico, propiedades que lo hacen ser lo que es y no otra cosa).

Proyección en perspectiva: representa la visión real de los cubos, donde las líneas paralelas que se alejan son convergentes.

Proyección isométrica: es un caso particular de paralela, en la que los cubos se sitúan de forma que las tres aristas que salen de un vértice se dibujan con la misma longitud y forman ángulos de 120°.

Proyección ortogonal: está constituida por las proyecciones de los cuerpos sobre tres planos ortogonales.

Proyección ortogonal codificada*:* se le agrega algún tipo de código que brinda información adicional.

Proyección paralela: similar a la perspectiva pero las líneas paralelas se representan siempre como paralelas, por lo que esta representación distorsiona la visión real de los sólidos.

Socioepistemología: Acercamiento teórico-metodológico que plantea la necesidad de desarrollar investigación sistémica y situada. En una investigación socioepistemológica aparecen involucradas las componentes epistemológica, cognitiva, y didáctica y, la dimensión sociocultural que interactúa con las anteriores permanentemente. Explica la construcción del conocimiento como resultado de prácticas sociales histórica y temporalmente situadas.

Visualización: Proceso de formarse imágenes mentales, para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas. Opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.

Cuadros, diagramas e imágenes

Resumen

Se presenta en este trabajo una investigación acerca del análisis de las representaciones visuales que realizan los estudiantes de los cuerpos poliédricos en el plano realizando una propuesta de aplicación de geometría dinámica.

El objetivo de esta investigación es indagar de qué factores depende la representación de cuerpos geométricos y explorar la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

Se realizó en primer lugar, una recopilación de antecedentes e investigaciones orientadas a poner de manifiesto las falencias observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyan sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional y los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes en el momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren manejo geométrico.

Los resultados obtenidos muestran evidencias de un acercamiento a soluciones que permitan a los alumnos lograr estos objetivos y, respecto de los profesores, que comprendan la necesidad de enseñar geometría tridimensional basándose en aquellos conceptos que lleven al alumno a manejarse correctamente con los conocimientos matemáticos, evitando en lo posible las dificultades actuales.

Abstract

This work presents an investigation about the analysis of the visual representations of polyhedrons on the plane made by students, proposing the application of dynamic geometry.

The goal of this research is to explore which factors are important in the representation of geometric bodies and the influence of the study and application of perspective elements on visualization of 3-dimensional objects in secondary school students.

The investigation is based on visualization, in order to see the way in which different representations of geometric bodies on the plane (particularly polyhedrons), influence the students´ conceptions towards space.

In the beginning, it took place a recollection of antecedents and investigations tending to show the defects found in mathematic classroom regarding bidimensional representations of 3-dimensional configurations, which are supported by the knowledge of bidimensional geometry. In addition to this, it shows the reasons why these abilities have not been developed and they trigger many difficulties when they must be applied to situations involving geometric use.

The results show evidence of the need to approach to solutions which may allow students to achieve these objectives and, on the other hand, the need that teachers understand they should teach 3-dimensional geometry basing on those concepts that lead the students to handle mathematic knowledge, avoiding the difficulties found nowadays.

Introducción

Este trabajo se focaliza en un análisis de las representaciones visuales que realizan estudiantes de los cuerpos poliédricos en el plano.
En mi trayectoria docente he observado que los conocimientos geométricos han sido dejados de lado en la escuela por diversos motivos. Entre ellos:

- por considerarse que la parte algebraica es más importante dadas sus aplicaciones en toda la Matemática
- por el tiempo que insume la enseñanza de la Geometría en la escuela media y enseñar a razonar para que los alumnos puedan descubrir los conocimientos guiados por el profesor y no ser meros oyentes en clases expositivas
- pues se consideraba que no tenía influencia en los conocimientos posteriores de los alumnos
- por desconocimiento de la Geometría por parte de gran cantidad de profesores, que a su vez recibieron poca capacitación en este área y adolecen de metodologías para su enseñanza y se sienten poco seguros al abordarla en el aula.

En síntesis, los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes en el momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren manejo geométrico, nos lleva a indagar en estos temas para encontrar posibles soluciones.

Nos basamos en la visualización, pues se intenta ver si las distintas representaciones en el plano de cuerpos geométricos (poliedros en particular), influyen en las concepciones que tienen los alumnos en cuanto al espacio.
La investigación en el campo de la Matemática Educativa pretende influir positivamente en la marcha del Sistema Didáctico al proponer condiciones para un buen funcionamiento.

Debemos tener en cuenta que la Matemática Educativa, como disciplina científica, posee entre sus objetos de estudio al sistema didáctico, visto éste como la vinculación entre los elementos: docente, alumno, conocimiento; y las interrelaciones entre dichos sistemas dentro de una cultura y sociedad determinadas.

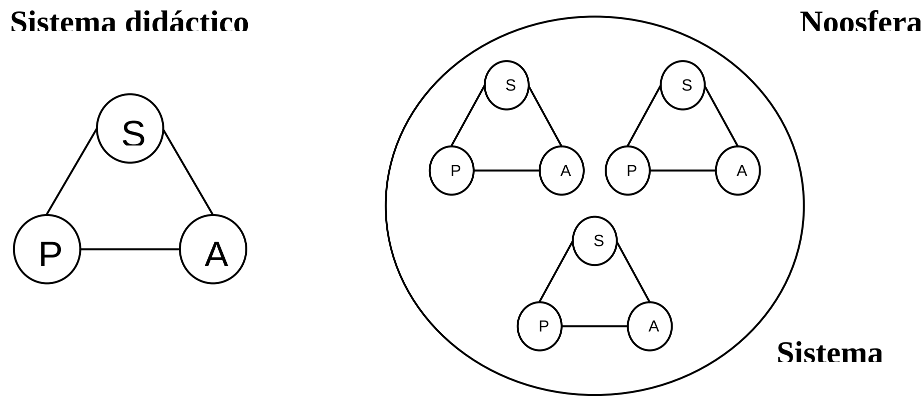


Figura 1 – Sistema educativo

Hasta tiempos no muy lejanos, se pensaba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, por lo tanto, no podía estar sujeta a reglas. El aprendizaje dependía sólo de la capacidad del profesor en el dominio de dicho arte.

En la actualidad, esta concepción de la enseñanza sigue aún teniendo influencia en la cultura escolar. Pero, desde los comienzos de la didáctica de las matemáticas como disciplina, fue afianzándose una visión *clásica* que rompe con la antigua visión y considera el aprendizaje de las matemáticas, como un *proceso psico-cognitivo.* (Gascón, 1997). El primer autor que habló del "enfoque clásico" en didáctica fue Guy Brousseau, tomando como centro de un hecho didáctico, la *actividad cognitiva del sujeto.* (Brousseau, 1986).

El punto de vista clásico en didáctica de las matemáticas considera:

- Como problemática didáctica una nueva formulación de las cuestiones que integran la problemática del profesor, las cuales están influenciadas por las ideas sobresalientes de la cultura escolar (Gascón, 1997).

Queda claro que uno de los principales objetivos de la matemática educativa es explicar cómo se construye el conocimiento matemático, o sea, indagar el papel que juega *lo social* en la construcción del conocimiento. Para la visión socioepistemológica, la matemática es vista como una construcción sociocultural, la matemática educativa estudia los fenómenos de su enseñanza y transmisión, pero también la manera en la que el sujeto que aprende construye los conceptos matemáticos dentro de una sociedad, confiriéndole características de la cultura de la que forma parte; esto constituye la construcción social del conocimiento matemático. Al respecto, para Cantoral (2002, p. 35), por ejemplo, "*el término socioepistemología, pretende plantear una distinción de origen con las perspectivas epistemológicas tradicionales*". La epistemología tradicional considera que el conocimiento es una consecuencia de la adecuación de las *explicaciones teóricas* con las *evidencias empíricas*. Por lo tanto, para esta visión, el ser humano, construía hipótesis sobre el mundo, razonaba sobre sus experiencias, se manejaba dentro de su entorno y producía estructuras de pensamiento cada vez más elaboradas. "*En el plano del conocimiento matemático esta explicación se ve reflejada en diversas investigaciones basadas en la epistemología genética piagetiana; que da cuenta de la construcción del conocimiento matemático a través de los procesos de abstracción reflexiva*". (Martínez Sierra, 2005, pp. 197)

Resulta cada vez más evidente el rol que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la explicación de un conocimiento abordado desde la matemática educativa.
Vemos así, que dentro de la *teoría de situaciones didácticas*, la noción de *contrato didáctico*, ha posibilitado la inclusión del contexto escolar dejando de lado el ideal de pureza científica de las epistemologías tradicionales. (Martínez Sierra, 2005).

Además, la teoría antropológica de lo didáctico resalta el papel de las instituciones, pues ubica la actividad matemática, en el conjunto de actividades humanas y de las instituciones sociales. (Chevallard, 1997a)

Teniendo en cuenta lo mencionado presentamos una articulación teórica de la influencia que el estudio y aplicación de elementos de perspectiva ha tenido sobre la visualización de objetos tridimensionales con la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Tomaremos las ideas básicas de la socioepistemología, que hacen hincapié en *lo social* en la construcción del conocimiento. Se parte del hecho de que los saberes matemáticos son un bien cultural. Sobre la base de la hipótesis del origen social del conocimiento, se arman los *nuevos* conocimientos emergentes en los procesos de síntesis de los *viejos* conocimientos (Martínez Sierra, 2005).
Desde nuestro punto de vista, como matemáticos educativos, tratamos de entender el desarrollo del pensamiento matemático en situación escolar, para lograr conocimientos funcionales.

El objetivo inicial de esta investigación es explorar la influencia del estudio y aplicación de ciertos elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

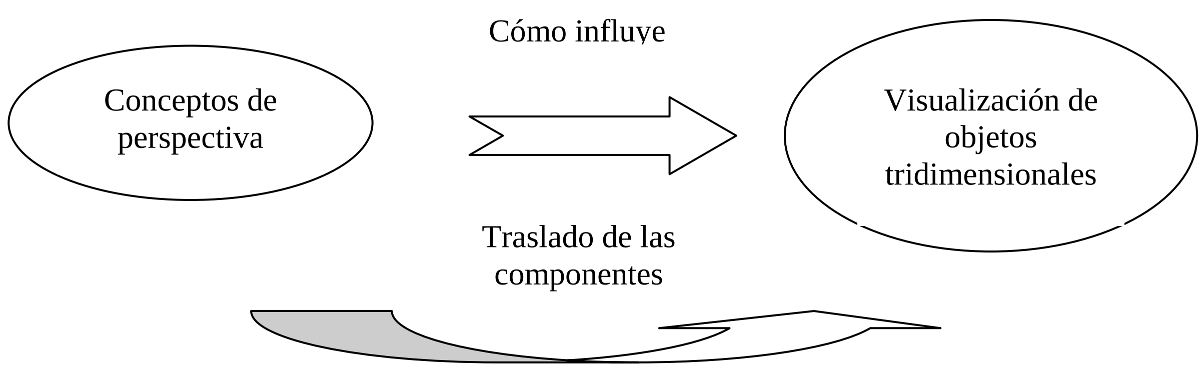


Figura 2 – Objetivo del proyecto

Algunas preguntas a responder por medio de esta investigación:

1.- ¿De qué manera visualizan los alumnos a través de las representaciones que realizan de cuerpos geométricos?

2.- ¿Influye en la concepción del espacio de los alumnos, la perspectiva? ¿De qué manera? ¿Cómo se pone en evidencia?

3.- ¿De qué manera la utilizan o no, en las representaciones de cuerpos geométricos los alumnos?

Nuestro trabajo consta de seis partes organizadas en capítulos de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1,** *Visualización y Matemática Educativa, abordamos los* antecedentes, teniendo en cuenta:

- Visualización y representaciones
- Algunos aspectos en el aprendizaje de la Geometría. El espacio en la escuela
- En la visión de la matemática educativa el enfoque socioepistemológico.
- Desarrollo del pensamiento geométrico y visualización
- Indagación de algunos conceptos en los estudiantes

En el **Capítulo 2,** *Algunos elementos histórico-epistemológicos de las representaciones del espacio en el plano y la visualización, se propone analizar:*

- historia de las representaciones geométricas en las distintas culturas. El proceso de comprensión y representación de los cuerpos geométricos
- Egipcios. Métodos de representación
- Babilonios. Métodos de representación
- Griegos. Métodos de representación
- Chinos. Métodos de representación

- India. Métodos de representación
- Arte canaco de Melanesia
- Pueblos precolombinos
- Renacimiento: la Geometría relacionada con el arte
- Reflexiones acerca de las representaciones en las distintas culturas

En el **Capítulo 3**, *Las representaciones gráficas en la geometría y en el aula de matemática,* analizamos:

- Las representaciones gráficas y la visualización a lo largo del tiempo
- La visualización en los orígenes
- Los clásicos modernos
- Siglos XVII, XVIII y XIX
- El formalismo en el siglo XX y la visualización
- Visualización, pensamiento matemático y ambientes informáticos en el aula
- Representaciones sentenciales y diagramáticas: palabras y gráficos
- Las representaciones planas y sus limitaciones
- Construcción utilizando la Proyección Paralela o Perspectiva Cavalieri
- Construcción utilizando la proyección en Perspectiva con Puntos de Fuga
- Cómo evoluciona la habilidad del dibujo en perspectiva
- La herramienta tecnológica como recurso para las representaciones gráficas
- Cambio de paradigma en la Geometría en el aula actual.

En el **Capítulo 4,** *Los alumnos y sus representaciones,* analizamos:

- influencia de los prototipos
- experiencia con alumnos
- resultados de la experimentación
- Conclusiones extraídas del trabajo realizado en el aula

En el **Capítulo 5**, *Los libros de texto y las representaciones,* analizamos:

- Poliedros. Representación actual en los libros de texto
- conclusiones.

En el **Capítulo 6**, *Representando poliedros en el aula,* analizamos:

- *Una experiencia en el inicio del estudio de los poliedros utilizando material concreto*
- *Una experiencia con alumnos, utilizando geometría dinámica para representar gráficamente poliedros*
- *Algunos comentarios de las experiencias realizadas*
- *Acerca de cubos y sus representaciones. Reporte de una entrevista a una estudiante*

En el **Capítulo 7**, *Consideraciones finales*

- Se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación.

Capítulo 1

Visualización y Matemática Educativa

Visualización y representaciones

Muchos investigadores han realizado reflexiones acerca de la visualización en el aula de matemática, como producto de investigaciones en las que se indagó sobre la manera en la que se forman imágenes mentales y a partir de ellas es posible construir conocimiento matemático. Estas investigaciones se han realizado desde diversos marcos teóricos y en relación a distintos contenidos de la matemática. En este trabajo, nos centraremos en las representaciones que se realizan de cuerpos geométricos tridimensionales y vamos a presentar algunas de ellas, teniendo en cuenta en el análisis de las distintas concepciones acerca de la visualización, la doble interpretación del concepto: como un proceso mental de formación de imágenes y como una competencia deseable para obtener conocimiento matemático.

Algunas investigaciones realizadas muestran distintas concepciones y elementos de la visualización que pueden ser tenidos en cuenta en el aula de geometría:

Presmeg (1986) sostiene:

"*El currículum escolar de matemáticas, en el que el logro es medido a través de los resultados de los exámenes, favorece al pensador no visual y, en la mayoría de los salones de clase, la enseñanza enfatiza los métodos no visuales*" (Presmeg, Vol 6; 3 pp. 32-46).

Actualmente, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el alumno no construye el conocimiento manejándose con figuras y construcciones que ayuden a la comprensión de un problema, sino con “recetas” que se aplican para obtener resultados. Las expectativas de logro están relacionadas con la adquisición de habilidades algorítmicas.

Los trabajos de Vinner (1989) y Eisenberg y Dreyfus (1990) hacen mención de la reticencia por parte de los estudiantes del uso de consideraciones visuales. Consideran que prevalece el pensamiento algorítmico sobre el visual.

Esto lo observamos en general, en las clases de matemática. Generalmente cuando estamos resolviendo problemas, los alumnos recurren al desarrollo algorítmico en detrimento del visual (gráficos, tablas, etc.), pues los profesores de matemáticas, suelen fomentar el este pensamiento sobre el visual.

Eisenberg y Dreyfus (1990) apuntan que las razones de los estudiantes para evadir la visualización son:

- Desde el punto de vista cognitivo: lo visual es más difícil de comprender.
- Desde el punto de vista sociológico: lo visual es más difícil de enseñar.
- De naturaleza de la matemática: lo visual no pertenece a la matemática.

Señalan que en la escuela actual hay un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas posibles es que pensar visualmente exige cognitivamente demandas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente.

Para Dreyfus (1991)

“*El razonamiento visual puede funcionar por sí mismo a fin de completar argumentos matemáticos rigurosos o combinado con otras clases de razonamientos, no necesariamente como algo preliminar*” (p. 5).

Aquí se observa la consideración del razonamiento visual no como un paso previo en el proceso de razonamiento sino como importante en sí mismo.

Miguel de Guzmán (1996), define de esta manera:

"*Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las áreas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo.*

Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven.

Mediante ellos son capaces de relacionar de modo muy versátil y variado, constelaciones de tales redes significativas, son capaces de escoger de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con que se encuentran. Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto develan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemática.

Que la visualización constituya un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática es algo totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática.

La matemática trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante ese tipo de manipulación especial que llamamos matematización, que se podría describir como sigue. Se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer de estas percepciones lo que es común, abstraíble, y someterlo a una elaboración racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones" (p. 15).

Se observa en esta definición la doble interpretación del concepto de visualización a la que hicimos referencia al comienzo de este capítulo: como un proceso mental (sin aclarar cómo funciona) y como una competencia deseable para obtener conocimiento matemático. Otorga al concepto de visualización relación con la efectividad para la comprensión de contenidos matemáticos. Además, menciona el término "intuitivamente" (*contenidos visuales representables intuitivamente*) como un factor importante, lo cual produce rechazo en algunos matemáticos que desprecian la intuición, considerando que la matemática sólo debe trabajar desde el rigor, la justificación, etc.

Núñez Urías J. (2002) define:

"*Hay que aprender a usar la visualización creativamente, como una herramienta para el entendimiento: la visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes efectivamente para descubrir matemáticas y comprenderlas*" (p. 2).

Esta definición plantea los instrumentos para utilizar en la visualización, por un lado las imágenes con lápiz y papel y, por otro lado, con ayuda de la tecnología. Se trata de imágenes estáticas o dinámicas. También otorga al concepto de visualización relación con la efectividad para la comprensión de contenidos matemáticos. En esta caracterización se pone de manifiesto una concepción platónica de la matemática que involucra el descubrimiento, y no la construcción como lo pensamos nosotros.

Observamos una concepción generalizada, ya que no diferencia entre imágenes mentales y materiales.

Bishop (1983) dice:

"En el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la Geometría se encuentra el aspecto de la visualización [...]

La noción total de ´ayudas visuales´ está basada en el conocimiento de que:

a) Tales representaciones visuales ofrecen una introducción poderosa a las abstracciones complejas de las matemáticas, y

b) *Las ´manipulaciones´, ´incorporaciones concretas´ y ´artificios de intuición´, son parte de los recursos actualizados de un maestro. [...] La computadora tiene aquí gran influencia en la visualización"* (p. 35).

Bishop habla de "ayudas visuales" no de imágenes visuales ya que la habilidad de interpretación de información aparece expresada en general y apartada del procesamiento visual. Observamos que no se indica la transformación de información obtenida en forma simbólica en alguna forma de información gráfica. Menciona a la computadora como importante en dicho proceso.

Douady (2001) trata la visualización de la siguiente forma:

"La habilidad para hacer representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales se apoya sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional. La habilidad para leer dibujos bidimensionales, planos o mapas, que representan configuraciones tridimensionales, para razonar en tres dimensiones usando estas representaciones bidimensionales requiere que todo lo anterior se tenga desarrollado a cierto nivel. Naturalmente, esta competencia es adquirida en una espiral dialéctica" (p. 1).

Marca la importancia de habilidades adquiridas para representar cuerpos tridimensionales en el plano, competencias relacionadas con la visualización. Es lo que queremos destacar en nuestra tesis, al trabajar su influencia en las representaciones gráficas y en las argumentaciones que ayuden a la comprensión de los conocimientos matemáticos.

Carrión Miranda (2000) distingue entre el uso común que se da al vocablo en psicología y el que se da en la matemática.

"El término visualización no es muy familiar en matemática y sus connotaciones pueden no ser obvias. El uso común en psicología se relaciona con la habilidad de los sujetos para formar y manipular imágenes mentales. Desde la perspectiva de

la matemática es inusual la restricción de que las imágenes deben ser manipuladas mentalmente" (p. 2).

Da su opinión dándole a la visualización categoría de "herramienta para", en la siguiente idea: *"La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento"*

Jones (1998) expresa al respecto:

Es el *"proceso de formación de imágenes (mentalmente o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso efectivo de esas imágenes para el descubrimiento matemático y el entendimiento"* (p.1)

Distingue entre lo que es un proceso de formación de imágenes mentales y la representación de esas imágenes, ya sea en forma manual o con la computadora. Confiere al concepto de visualización vinculación con la efectividad para la comprensión de contenidos matemáticos.

Las primeras explicaciones teóricas sobre las representaciones gráficas de cuerpos geométricos consistían de argumentos cognitivos resultado de las experiencias de aula. Vinner (1983) y Tall (1996) crearon los términos *imagen del concepto* y *definición del concepto* para explicar cómo el estudiante usaba dichas imágenes para resolver problemas. Tenemos tres elementos a considerar:

- *La imagen del concepto:* se refiere al conjunto de estructuras cognitivas que se relacionan con el concepto, que incluyen imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos asociados.
- *La definición del concepto:* se refiere al conjunto de palabras que se usan para especificar ese concepto. Su aprendizaje puede ser memorístico, construido por él, significativo o no.

  Dentro de los factores potenciales de conflicto se consideran aquellos en los cuales la imagen de un concepto contradice a la definición formal del concepto, lo que impide el aprendizaje formal, dado que es imposible formar una imagen del concepto asociada a esa definición.

- Un grupo de operaciones mentales o físicas como ciertas operaciones lógicas. O sea el alumno comprende e interpreta modelos visuales y, por otra parte, refleja en imagen visual información recibida en forma simbólica.

Duval (1998), menciona que en el razonamiento geométrico se distinguen tres tipos de procesos cognitivos, entre los que figura la visualización:

- *Procesos de visualización*

La representación visual de un enunciado geométrico o la explotación heurística de una situación geométrica compleja.

- *Procesos de construcción*

Usando distintas herramientas.

- *Procesos de razonamiento*

Los procesos de razonamiento tratan de procesos discursivos, para la extensión de conocimientos, para una mejor explicación, para introducir la prueba.

Pero, sin embargo, estos procesos están conectados y es muy necesario y conveniente para la geometría. Duval presenta el siguiente gráfico donde se muestra esta interconexión:

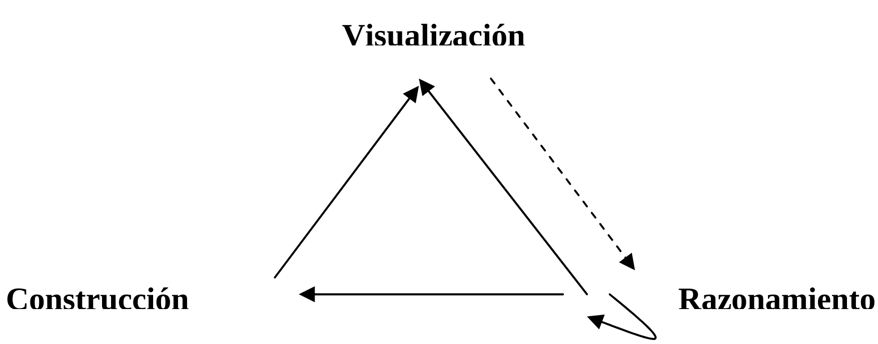


Figura 3 – Gráfico Duval (1998)

Estos tres procesos se pueden dar en forma autónoma. Advierte, no obstante, que la visualización puede colaborar con el razonamiento, pero también puede inducir al error (flecha punteada). La flecha circular, muestra que el razonamiento puede desarrollarse en forma independiente de los procesos de construcción o de visualización.

Por otro lado, Duval (1999) establece que se aprende en la medida que se abstrae un objeto de sus representaciones.

Un concepto matemático tiene varias representaciones (que les llama semióticas).

En general, la enseñanza de la matemática se efectúa como si el pasaje entre los distintos registros semióticos fuera natural. Debemos tener en cuenta:

- La coordinación de varios registros de representación semiótica resulta primordial para la asimilación conceptual de un objeto (en este caso, cuerpos geométricos).
- El objeto no debe ser confundido con sus representaciones, pero es necesario que sea reconocido en cada una de ellas.

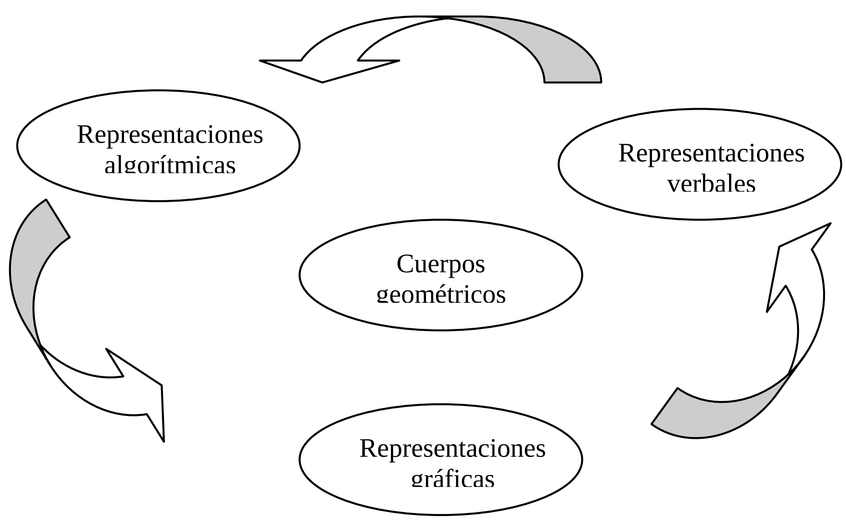


Figura 4 – Diagrama Duval (1999)

El distinguir entre un objeto y su representación determina un momento clave para el aprendizaje de la matemática, pues las representaciones no sólo son necesarias a los fines de la comunicación, sino también para la actividad cognitiva del pensamiento.

No puede haber comprensión en Matemática, si no se distingue un cuerpo geométrico de su representación, pues toda confusión entre el cuerpo y su representación provoca una falta de comprensión, ya que los conocimientos adquiridos no resultan útiles fuera del contexto de aprendizaje, permanecen como representaciones inaplicables. La posibilidad de efectuar transformaciones sobre los cuerpos geométricos depende del sistema de representación utilizado.
En nuestras aulas el problema es que el registro de representación en ocasiones está limitado al estudio de métodos algorítmicos y no se insiste demasiado en las descripciones y las argumentaciones respecto de las características de un determinado cuerpo geométrico y como podría obtenerse.

En la investigación realizada por Gutiérrez (1998) se refiere a los sólidos más utilizados en el aula: cubos, pirámides, prismas, etc., y el “módulo multicubo” (sólido formado por varios cubos iguales apoyados por sus caras).
Las formas de representación plana de cuerpos tridimensionales que se utilizan generalmente son:

- La *proyección en perspectiva* representa la visión real de los cubos, donde las líneas paralelas que se alejan son convergentes.
- La *proyección paralela*, similar a la perspectiva pero las líneas paralelas se representan siempre como paralelas, por lo que esta representación distorsiona la visión real de los sólidos.
- La *proyección isométrica* es un caso particular de paralela, en la que los cubos se sitúan de forma que las tres aristas que salen de un vértice se dibujan con la misma longitud y forman ángulos de 120°.

- La *proyección ortogonal* está constituida por las proyecciones de los cuerpos sobre tres planos ortogonales (como el rincón de un cuarto).
- La *proyección ortogonal codificada* es aquella a la que se le agrega algún tipo de código que brinda información adicional, en este caso la cantidad de cubos por fila.

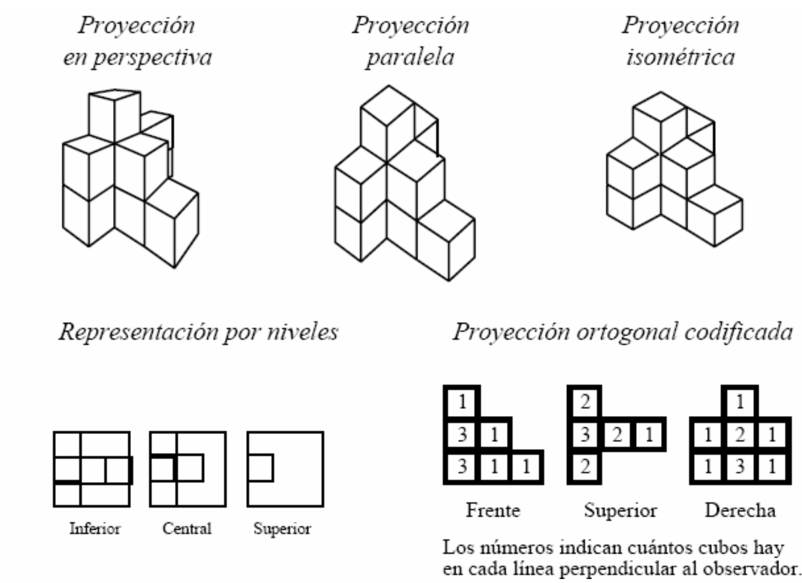


Figura 5.- Representaciones planas de un módulo multicubo

Se ha observado que la enseñanza específica aumenta la posibilidad de que los estudiantes manejen las relaciones entre los cuerpos geométricos y sus representaciones planas (Gutiérrez, 1998).

Otros autores sostienen que los resultados son mejores cuando se utilizan materiales manipulativos (Bishop, 1980; Clements y Battista, 1992).
Por lo tanto hay consenso bastante generalizado en la necesidad de desarrollar unidades de enseñanza con el objetivo de transferir a otros campos habilidades para la conexión entre los espacios de 2 y 3 dimensiones.
De acuerdo con esto es importante la habilidad de profesores y estudiantes para la obtención de representaciones planas adecuadas de cuerpos tridimensionales y viceversa, para la construcción de cuerpos geométricos a partir de sus

representaciones planas. Si bien la más problemática para los estudiantes es, sin duda, la realización de representaciones planas.

Algunos aspectos en el aprendizaje de la Geometría. El espacio en la escuela

Reflexionando sobre cómo aprende geometría un niño, vemos que lo hace experimentando e interactuando con su entorno.

Según Alsina (1992), el conocimiento del espacio geométrico considera dos instancias: la correspondiente a la intuición *etapa intuitiva* y la de naturaleza verbal *etapa lógica*.

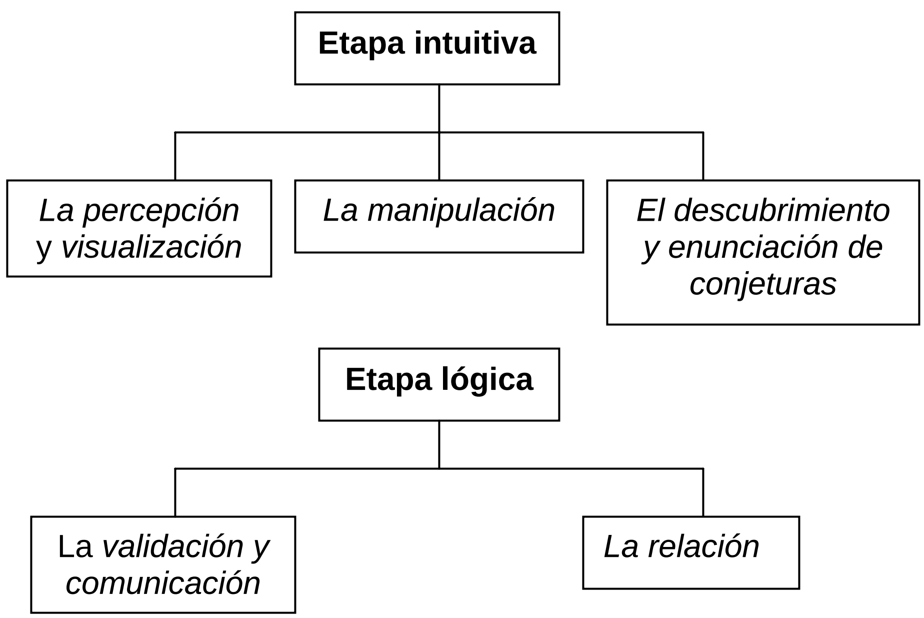


Figura 6.- Diagrama Espacio geométrico - Etapas

En la etapa intuitiva: se dan tres momentos:

La *percepción* y *visualización* a través de la construcción del espacio geométrico a partir de su entorno.
La *manipulación* a través de la modelización de percepciones con el manejo de materiales didácticos.
El *descubrimiento y enunciación de conjeturas,* a través de la apreciación de regularidades, propiedades.

En la etapa lógica: se dan dos momentos:
La *validación y comunicación*, a través de la demostración y comunicación de sus conjeturas.
La *relación*, a través de la posibilidad de expresar un mismo concepto de formas diferentes.
La etapa lógica no debe dejar de lado la etapa intuitiva sobre la cual se apoya. Ambas etapas son momentos del desarrollo del pensamiento. El primer momento, llamado percepción espacial, es el resultado de un proceso que va desde la percepción visual hasta la formación del concepto.

Por otro lado, Pallascio (1985), considera cinco niveles: *visualización, estructuración, traducción, determinación y clasificación.* El grado de dificultad se va incrementando al pasar de un nivel a otro. Las etapas son:

- **Visualización:** después de haber observado un objeto, la visualización radica en memorizar imágenes parciales a fin de reconocer objetos iguales o semejantes a través de un cambio de posición o de escala, entre un conjunto de objetos ante un mismo diagrama.
- **Estructuración:** una vez visualizado el objeto, la estructuración reside en el reconocimiento y reconstrucción del objeto partiendo de sus elementos básicos.
- **Traducción:** se basa en el reconocimiento de un objeto a partir de una descripción literaria y viceversa.

- **Determinación:** reside en el reconocimiento de su existencia partiendo de la descripción de sus relaciones métricas.
- **Clasificación:** reside en el reconocimiento de clases de objetos equivalentes de acuerdo a distintas pautas de clasificación.

Desde muy pequeños los niños se lanzan a la conquista del espacio gráfico. Las primeras formas figurativas están muy alejadas de la realidad visual del objeto, y se va produciendo un paulatino acercamiento entre la “forma percibida” y la “forma representada”.
En un primer momento se representan las propiedades de las formas que son más representativas para identificar el objeto. En momentos posteriores, además de representar la forma en sí se le adosa el de insertarla en un determinado espacio y se comienzan a utilizar referencias gráficas que aluden a la situación espacial, como las líneas de base para indicar el plano de apoyo. Con el tiempo se diversifican los trazados, aparecen nuevas formas, unas formas dentro de otras, y, más adelante todavía, además de la relación con el espacio que la rodea, la relación de una forma con otras formas presentes en la imagen.
Comienzan de a poco a considerar no sólo las características del objeto “tal como es” sino “tal como se lo ve desde determinado punto de vista”.

En la visión de la matemática educativa, el enfoque socioepistemológico

Se parte del hecho de que los saberes matemáticos son un bien cultural. En base a la hipótesis del origen social del conocimiento, se arman los *nuevos* conocimientos emergentes en los procesos de síntesis de los *viejos* conocimientos (Martínez Sierra, 2005). De acuerdo a este marco teórico, la visualización, puede inducir el conocimiento matemático como una construcción sociocultural. Esta perspectiva permite la interacción sistémica de las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social en el estudio y explicación de los fenómenos didácticos ligados a la exploración de la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

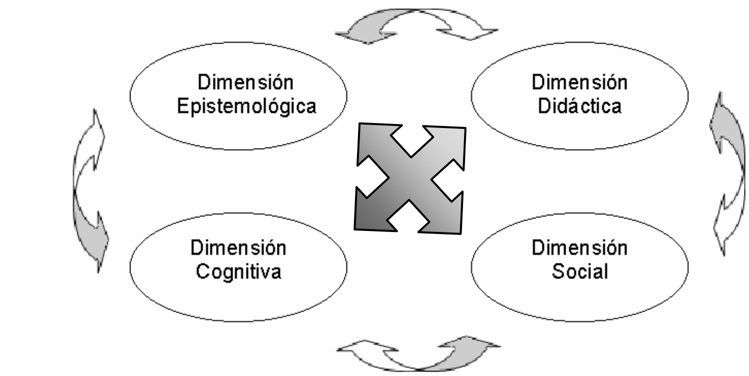


Figura 7 - Interacción sistémica de las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social

La *componente epistemológica* permite explorar la evolución que ha tenido un cierto conocimiento matemático, su devenir histórico y el proceso de transformación sufrido hasta llegar al aula (transposición didáctica), lo cual nos da la pauta para entender claramente la presencia de prototipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, como sucede con el cubo o la pirámide y la influencia de la perspectiva en las representaciones geométricas en el salón de clases, así como en los libros de texto escolares y en la currícula a través del tiempo. Un análisis de este tipo permite conocer la forma en cómo dicho conocimiento ha pasado de generación en generación y las modificaciones que ha sufrido como consecuencia de tales transformaciones.

La *componente didáctica* permite conocer y profundizar en las costumbres escolares al momento de tratar con determinada noción matemática (en nuestro caso la influencia de la perspectiva en la representación de cuerpos geométricos y las argumentaciones de los estudiantes). Además, cómo vive esta noción en la escuela a través de los programas de estudio y de los libros de texto (producto de dicha transposición didáctica) utilizados en los diferentes niveles educativos.

La *componente cognitiva* permite indagar en las concepciones de los estudiantes respecto de la representación de cuerpos geométricos y sus argumentaciones. Las mayores dificultades se presentaron al intentar describir y argumentar las características de los cuerpos y sus propiedades.

La *componente social*, influye y transforma a las otras tres componentes, de tal forma que amplía la explicación sobre el fenómeno en estudio. Dicha dimensión permite analizar qué influencia ha tenido la perspectiva en la representación de cuerpos tridimensionales en el plano.

Sin embargo, como se ve en las descripciones anteriores, no es posible aislar el estudio de cada una de esas componentes. Se trata de un enfoque sistémico, en el que las cuatro componentes interactúan sistémicamente en la construcción del conocimiento matemático.

En este capítulo, mostramos las aportaciones que han hecho otras investigaciones respecto del fenómeno didáctico ligado a las representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Abordamos los resultados desde la perspectiva cognitiva a los acercamientos sistémicos que reflexionan sobre quién aprende.

Desarrollo del pensamiento geométrico y visualización

Esta investigación propone relacionar el concepto de visualización y las representaciones gráficas en el plano de cuerpos geométricos.
La elección de este tema se basa en la observación del trabajo de los alumnos en las clases de geometría de escuela media. Los estudiantes presentan serias dificultades con las representaciones visuales de los cuerpos poliédricos en el

plano (por ejemplo: cubos o pirámides). Estas dificultades también se reflejan en actividades en las que deben poner en juego la visualización de propiedades geométricas de cuerpos representados o bien de cuerpos que deben imaginar.

Las primeras etapas para eliminar obstáculos en el aprendizaje de la Geometría consisten en actividades diseñadas para mejorar la comprensión que tienen de su mundo espacial. Si esta comprensión se da, será más fácil matematizar las ideas, será más fácil enseñar basándose en esas experiencias espaciales. (Bishop, 1992).

En lugar de aprender las definiciones de círculo, cuadrado y rectángulo, el alumno necesita desarrollar ideas acerca de la "circularidad", por ejemplo, lo que permite a los objetos rodar, y que tiene que ver con las esferas más que con una forma de dos dimensiones. Respecto del cuadrado, desarrollar ideas acerca de la "cuadratura", una forma muy "igual"; y acerca de la "rectangularidad", la forma de "caja" como la llama Freudenthal. (Freudenthal, 1983).
Estas propiedades se obtendrán mejor a partir de objetos "reales" (de recipientes, paquetes, etc.) tomados del medio ambiente que rodea al alumno.

Algunas estrategias que se pueden aplicar:

- Describir figuras que el alumno dibuje.
- Presentarles objetos y que el alumno los dibuje.
- Seleccionar objetos y que el alumno los describa.

Si bien las visualizaciones son útiles, algunas suelen presentarse en un marco negativo, relacionadas con los obstáculos. Por ejemplo, Hoz (1981) habla de la "rigidez geométrica", la que ocurre cuando el alumno no es capaz de "ver" un diagrama de una manera distinta (por ejemplo: triángulo rectángulo rotado).

Es también el caso del cubo de ´Necker' (la visualización del cubo más común) y el cubo visto desde arriba cuando sus caras parecen ser un rombo y no un cuadrado.

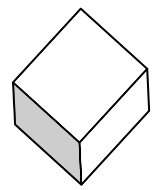


Figura 8 – Cubo de Nécker.

Recientemente, se tiene evidencia de que las imágenes generadas por la computadora pueden tener una gran influencia en las visualizaciones de los alumnos.

Actualmente se considera dar lugar a los aspectos visuales relacionados con los conceptos matemáticos, ya que a partir de los años '70, la reforma de las matemáticas modernas, dio prioridad al rigor lógico sobre los aspectos geométricos e intuitivos, descuidando las dificultades que su implementación pudiera acarrear. Si bien esta reforma fue pensada basándose en la creencia de que enseñando las estructuras en su forma más acabada, los estudiantes no tendrían dificultades para asimilarlas, esta situación nunca ocurrió.
Estudios recientes reconocen en nuestro país que es fundamental retornar a la comprensión de las propiedades geométricas y hacer hincapié en la visualización y en su utilización para la construcción de los conocimientos geométricos no limitando las actividades planteadas en el aula a la aplicación de algoritmos (Crespo Crespo et al, 2000).

Observamos que en los Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica, que se elaboraron para la reforma educativa llevada a cabo en Argentina en 1995, dentro del Bloque 4 que alude a Nociones geométricas podemos encontrar el siguiente párrafo:

"Dado que el alumno y la alumna no parten de una construcción intelectual teórica de la geometría, sino que llegan a la misma a través de una vinculación empírica con su entorno físico, las percepciones tales como las de figura-fondo, posición y movimiento, discriminación visual, memoria visual, constancia de la forma y del tamaño, etc., pueden ser estimuladas a través de actividades que tengan en cuenta los contenidos que se especifican en este bloque" (Ministerio de Educación, 1995, pp. 78-79).

La finalidad de introducir nociones geométricas en la EGB (Educación General Básica) es ayudar al estudiante a relacionarse con el espacio, a efectuar representaciones y descripciones racionales del mundo que los rodea, y a manejar los entes geométricos como modelizaciones de esa realidad, sin abandonar el tratamiento intuitivo de las nociones mencionadas.

Observamos que en los en los Contenidos Básicos para la Educación Polimodal podemos encontrar el siguiente párrafo:

"Un uso adecuado de los recursos audiovisuales e informáticos para el desarrollo de los temas geométricos, afianzará la percepción espacial de los alumnos y las alumnas, constituyendo también un instrumento de acceso al conocimiento" (Ministerio de Educación, 1995, pp. 101).

Observamos que construir conocimientos geométricos lleva mucho tiempo, y muchos profesores lo consideran tiempo desperdiciado pues no se utilizan a futuro en los programas de años posteriores, restándole importancia a habilidades necesarias para desarrollar competencias respecto del quehacer matemático.

El paradigma de la enseñanza que sigue el sistema educativo argentino, está centrado fundamentalmente en un enfoque axiomático deductivo y en la resolución de problemas que en muchas oportunidades se orientan a lo algorítmico.

En geometría, bajo un paradigma basado en el enfoque tradicional, se estudian primero las definiciones y propiedades de los cuerpos geométricos, sin haber tenido antes un acercamiento intuitivo que les permita dotar de significado a las definiciones y propiedades de los mismos, que se van a utilizar a posteriori en asignaturas como el Cálculo, la Geometría Analítica, etc.

Debemos buscar la forma más apropiada para el alumno, encontrar maneras de modificar no sólo las prácticas escolares, sino también buscar que los estudiantes se formen un concepto más completo de la disciplina.

"*Se considera conveniente usar la visualización creativamente, como una herramienta para el entendimiento. Teniendo en cuenta que la visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes en forma efectiva para descubrir conceptos matemáticos e interpretarlos*" (Cantoral & Montiel, 2003, p.8).

Actualmente, se puede advertir una cierta inclinación hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático, entre quienes se ocupan de la investigación en educación matemática. Hay indicios de esta revitalización de la visualización.

"Para realizar la labor de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual.

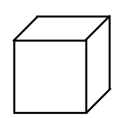
En consecuencia la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y que además intervienen en una determinada cultura". (Cantoral & Montiel, 2002, p. 24.).

Indagación de algunos conceptos en los estudiantes

Sobre la base de las aportaciones de los trabajos de investigación que hemos ido mencionando, tomamos en cuenta la exposición de las concepciones de los estudiantes respecto de las representaciones gráficas de cuerpos geométricos, que surgieron de algunas entrevistas (realizadas con alumnos de 1er año de la escuela media), como las siguientes:

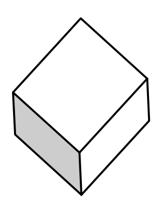
Entrevista 1

- Profesora: ¿Qué es un cubo?
- Alumna: [No sabe qué decir].
- Profesora: Te pido dibujes un cubo ¿Sabes hacerlo?
- Alumna: Sí



Entrevista 2

- Profesora: (Señalando un cubo visto desde arriba, entre un conjunto de cubos en distintas posiciones) ¿Es esto un cubo?
- Alumna: No, porque tiene una cara que es un rombo.



Rescatamos:

- La primera, las dificultades para expresar una definición personal del concepto de un poliedro conocido como es el cubo (Tall y Vinner, 1981), aunque se tenga por parte de la alumna un determinado componente del esquema conceptual (Tall y Vinner, 1981) y sea capaz de hacer un dibujo.

- La segunda, que la imagen prototípica que la alumna ha fijado en su mente le hace negar que la figura presentada sea un cubo (porque no se parece a lo que se le ha enseñado a identificar como tal), lo que sitúa a esta alumna en el nivel de reconocimiento o visual.

En estas breves entrevistas, se pusieron de manifiesto algunas ideas que fueron planteadas en investigaciones que hemos mencionado en relación a las dificultades que tienen los estudiantes en reconocer como representaciones aquellas que difieren de los prototipos que conocen y en relacionar objetos geométricos con sus relaciones, mostrando que no han logrado una visualización correcta de los mismos.

Capítulo 2

Algunos elementos histórico-epistemológicos de las representaciones del espacio en el plano

Historia de las representaciones del espacio en el plano en las distintas culturas. El proceso de comprensión y representación de los cuerpos geométricos

En el origen de una imagen está siempre la idea de la comunicación. Las imágenes son objetos que extienden su "materialidad" en el espacio, pueden ser figurativas o abstractas.

El espacio es un elemento constitutivo de una representación visual y es determinante, pues la "situación espacial" adoptada (bidimensional o tridimensional) creará posibilidades y limitaciones materiales y expresivas.

Teniendo en cuenta la representación visual, la forma y el espacio están siempre asociados, ya que la forma se extiende en el espacio y se intuye como "espacio ocupado". Recíprocamente, el espacio se intuye como "lo no ocupado por las formas".

Para obtener una representación visual debemos comprender las formas y sus propiedades, en una situación espacial específica.

Cuando se trabaja con una imagen en el **plano**, como el dibujo de un **cuerpo** geométrico, la representación y organización de las formas implica llevar al espacio bidimensional las características de volumen y las relaciones espaciales que son propias de lo **tridimensional**.

Hay diversas formas de plasmar en el **plano** las formas tridimensionales, correspondientes a diversas concepciones.

Diferentes sociedades y diferentes entornos culturales con sus respectivas concepciones del mundo, lograron de manera distinta la representación del espacio y la forma. No podemos decir que sean "correctas o incorrectas", sino diferentes e igualmente valederas.

En este capítulo, se realizará una recorrida a través de la historia de la humanidad en la que se analizarán las características de algunas de las formas en las que se representó el espacio en el plano, mostrando qué concepciones se pusieron de manifiesto mediante ellas. Algunas de estas representaciones tienen carácter artístico, otras son representaciones propias de la matemática, pero en todas ellas se trató de construcciones culturales en las que se intentó transmitir la idea de lo tridimensional a través del dibujo.

Egipcios. Métodos de representación

Los egipcios, cuya estilización ignoraba la tercera dimensión, para sustituir la visión en perspectiva, recurrían a un ardid gráfico. Ejemplo típico es el faraón que lleva una bandeja con ofrendas para sacrificios, que es de forma redonda. Se observa que mientras el conjunto está como de costumbre reproducido de perfil, por encima de la bandeja se encuentra un semicírculo donde las ofrendas aparecen como si fuesen vistas desde arriba.

Figura 9 - Faraón con ofrendas para sacrificios. Representación egipcia.

En contraste con el arte occidental y con los recursos ópticos de la fotografía y de la cinematografía, la representación egipcia no se apoya en ninguno de los dos principios fundamentales de la perspectiva, como son el empleo del escorzo (perspectiva que se utiliza en pintura para representar figuras perpendicularmente al lienzo o al papel) y la adopción de un punto de vista único para el conjunto de la pintura.

En lugar de eso, las figuras son más bien diagramas de lo que muestran, siendo su objetivo principal el de proporcionar información. La superficie del cuadro se trata de ordinario, como un elemento neutro, no como un plano imaginario. Los rasgos espaciales son más comunes en los pequeños grupos de figuras.

La perspectiva, en efecto, sólo llegó a convertirse en norma de la representación muy lentamente, y su adopción parece haberse debido casi en todas partes a una influencia griega.

Las pirámides tuvieron que construirlas tan altas y grandes y con esa forma tan peculiar (dos mil años antes de Jesucristo), ya que observando el cielo de noche, y buscando la Estrella Polar (a cuatro veces la distancia de la parte baja de la Osa Menor hacia la derecha) vemos que a su alrededor hay un grupo de estrellas que no desaparecen del firmamento durante toda la noche. Se llaman estrellas circumpolares (estrellas que se encuentran alrededor del polo). Como a los egipcios les gustaba mirar el cielo y estudiarlo, se les ocurrió la idea de que, cuando moría el faraón, su espíritu subía al cielo y se convertía en una de esas estrellas. Así el alma del faraón existiría para siempre. De ahí que inventaron las pirámides escalonadas como una manera de llegar al cielo (arquitecto Imhotep y el faraón Djoser durante la III Dinastía). Los faraones de las dinastías posteriores lo hicieron de manera más sofisticada.

Los nuevos faraones consideraron que el dios más importante era Ra y pensaron que resultaría más sencillo subir al cielo utilizando uno de sus rayos como medio de transporte. La forma de ese rayo de luz que atraviesa la nube parece un triángulo. Los triángulos de luz son planos y las pirámides tienen cuatro lados.

Además, hace miles de años cayó en el desierto egipcio un meteorito que chocó contra la tierra y que los sacerdotes egipcios recogieron y adoraron como si fuera un objeto procedente del propio dios sol. A ese meteorito, que tenía forma de cono le pusieron el nombre de Piedra benben. Los egipcios creían que era un objeto cargado con mucha magia, por lo que lo adoraban en el templo de Ra, situado en Heliópolis.

Los egipcios tenían un modo peculiar de hacer esculturas, son como un poco cuadradas. El motivo es que a los egipcios las hacían para que se vieran sólo desde los lados, desde delante o desde detrás. Para hacerlas dibujaban en cada lado del bloque el dibujo de cada uno de sus lados: de frente, de perfil y de espalda, y luego iban quitando trozos de piedra hasta terminarla.

Si nos preguntáramos: ¿cómo andaban los egipcios?, observando sus dibujos, responderíamos que de lado. No es que no sabían dibujar mejor, simplemente es que les gustaba representar así a las cosas. Y es que su sistema les permitía dibujarlas a su modo, es decir, ofreciendo a la persona que las ve las partes más importantes del objeto, aunque una esté delante y la otra detrás.

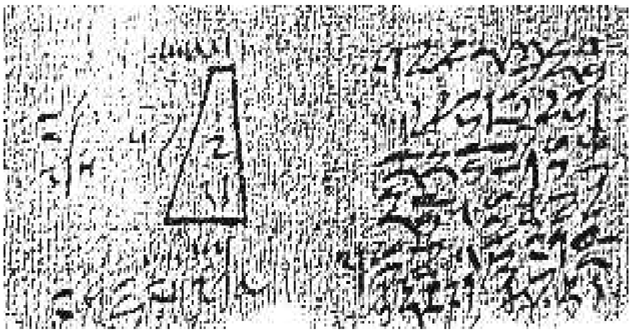
Figura 10 –Señora 1 y Señora 2 - Picasso

Es como en los cuadros de Picasso, en los que se puede ver a una señora de perfil, pero que tiene dibujada en la cara las dos orejas y los dos ojos, aunque todos sabemos que sólo se ve uno de cada.

Por lo tanto, los egipcios dibujaban un cono como un triángulo. Y lo hacían en las cuatro paredes de un bloque de piedra para hacer una escultura de la piedra Beben, al final acababan esculpiendo una pequeña pirámide: cuatro triángulos. De ahí que las tumbas reales tienen forma de pirámide.
Por lo tanto, las tumbas de los faraones tienen forma de pirámide porque representan a un rayo de sol petrificado (**de ahí** la forma triangular de sus caras) utilizado por el alma del faraón para subir al cielo (**de ahí** que sean tan altas) y que, además, es una escultura gigante de la piedra Benben (**de ahí** la forma de pirámide).

Sabemos que los conocimientos geométricos de los egipcios son vastos, poseen reglas exactas para el área de triángulos, rectángulos y trapecios, así como para el volumen de prismas y pirámides.
En un ejemplo observamos la determinación de la inclinación del plano oblicuo de una pirámide, se supone entendida más como factor de proporcionalidad que como medida angular.
Pero el principal logro de la geometría egipcia es la obtención correcta del volumen del tronco de pirámide de base cuadrada, mediante un cálculo de difícil interpretación. Lo encontramos en el Papiro de Moscú, es el problema número 14, que trata del volumen de una pirámide truncada. Además se debe al calculista egipcio una muy buena aproximación para la cuadratura del círculo. (Rey Pastor y Babini, 2000).

Describimos dicho problema.



En este problema se pide calcular el área de la figura, que parece ser un trapecio isósceles, pero realmente se refiere a un tronco de pirámide cuadrangular.

Figura 11 – Tronco de pirámide cuadrangular. Representación egipcia.

Alrededor de la figura pueden verse los signos hieráticos que definen las dimensiones. En la parte superior aparece un 2, en la inferior un 4 y dentro de la figura un 56 y un 6. Según se desarrolla el problema, parece ser que lo que se busca es calcular el volumen del tronco de pirámide cuadrangular de altura 6 y bases superior e inferior de 2 y 4. El desarrollo es el siguiente:

- Elevar al cuadrado 2 y 4
- Multiplicar 2 por 4
- Sumar los resultados anteriores
- Multiplicar el resultado anterior por un tercio de 6. El resultado es 56

El escriba finaliza diciendo "Ves, es 56; lo has calculado correctamente".
Analizando el desarrollo vemos que lo que se ha aplicado es la fórmula:

$$V = h.(a^2 + b^2 + ab)/3$$

que por supuesto no aparece escrita en el papiro. Si consideramos ahora b=0, como se hace en el cálculo del volumen que aparece representado en Edfú, entonces se obtiene el volumen de una pirámide.

En conclusión, hay que tener en cuenta que hasta la llegada de los griegos, al igual que en Babilonia, no existía una división entre la geometría y la aritmética, o la matemática en general, y todas las ramas se englobaban dentro de una misma, limitándose a aplicar la aritmética al cálculo de áreas, volúmenes y algún otro problema geométrico. A pesar de que la Geometría es quizás la aplicación más importante de la matemática egipcia, debido a la necesidad de los agrimensores o "tensadores de cuerda", como los llamó Herodoto (historiador griego nacido en el 480 a. C.), para recalcular las lindes de los campos tras la inundación anual del Nilo.

Sus arquitectos sabían realizar construcciones monumentales con un margen de error mínimo, y se solucionaban complicadas operaciones de cálculo mediante un sistema basado en fracciones.

Babilonios. Métodos de representación

En Babilonia no existía una división entre la geometría y la aritmética, o la matemática en general, como sucedía en Egipto, y todas las ramas se englobaban dentro de una misma, limitándose a aplicar la aritmética al cálculo de áreas, volúmenes y algún otro problema geométrico.

El conocimiento geométrico más interesante que revelan las tablillas babilónicas es el llamado "teorema de Pitágoras", un milenio antes de la existencia de su pretendido autor. La Tablilla de Plimpton 322, que se encuentra expuesta en la Universidad de Columbia (USA), es particularmente importante. En ella aparece explícita la utilización del Teorema de Pitágoras.

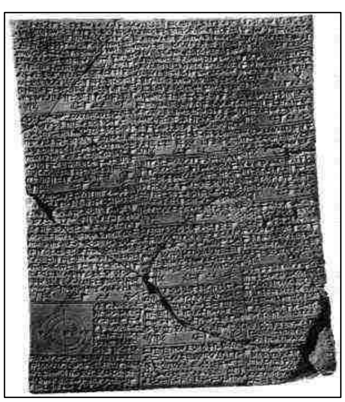


Figura 12 - Tablilla babilónica

Figura 13 - La Tablilla de Plimpton 322. Representación babilónica.

Los babilonios, si bien tenían una geometría muy similar a la desarrollada en Egipto, sin embargo no tenían esa necesidad de agrimensura.
Afirma Heródoto que habiéndose originado la geometría en Egipto, pasó después a Grecia. Hay evidencias históricas, también, de aplicaciones geométricas, algunos miles de años antes de nuestra era en regiones tales como la Mesopotamia (comprendida entre los ríos Tigris y Éufrates) y algunas regiones del centro, sur y este de Asia, en las cuales se desarrollaron grandes obras de ingeniería en la construcción de edificios y sistemas de canalización y drenaje.
La geometría babilónica y egipcia, como podemos apreciar, eran eminentemente prácticas. Se las utilizaba para resolver una serie de problemas de la vida cotidiana y no como una disciplina especial, metódica.
Las relaciones matemáticas de los babilonios y egipcios fueron esencialmente formuladas mediante el método de experimentación y error, de manera empírica, de ahí que muchas de ellas eran definitivamente erróneas.

Griegos. Métodos de representación

Cualquiera que sea la conexión entre las matemáticas griegas y las de Oriente, los griegos trasformaron la geometría en algo muy diferente del conjunto de conclusiones empíricas que usaron sus predecesores. Los griegos, propusieron que los hechos matemáticos deben ser establecidos por razonamientos deductivos. Las conclusiones matemáticas deben ser confirmadas mediante una demostración lógica, no por experimentación. No se sabe con certeza por qué los griegos decidieron alrededor de 600 años antes de nuestra era abandonar el método empírico de obtener conocimientos matemáticos y adoptar el de razonamiento deductivo. Tal vez una de las causas sea su estructura social, pues los filósofos, artistas y matemáticos pertenecían a una clase social privilegiada que desdeñaban los trabajos manuales y las ocupaciones prácticas que eran desempeñadas por las clases más bajas, lo cual permitía a las clases privilegiadas dedicar tiempo a pensar, pues por aquel tiempo los griegos eran muy dados a hacer grandes teorías para explicar el mundo.

Tres problemas clásicos de la matemática griega son: La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Estos problemas debían resolverse utilizando solamente regla sin marcas y compás, instrumentos que, al parecer son los que utiliza Euclides en su obra. Son problemas sin solución exacta usando regla y compás, cosa que se ha probado mucho después, aunque tienen solución por otros métodos. A continuación ilustro uno de ellos.

Consiste en construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo inicial. Para eso habría que construir un segmento de longitud igual a la raíz cúbica de 2. Y esto es imposible utilizando solamente regla y compás. Lindenman (1852-1939), un matemático alemán, demostró que era imposible construirlo exactamente con regla y compás.

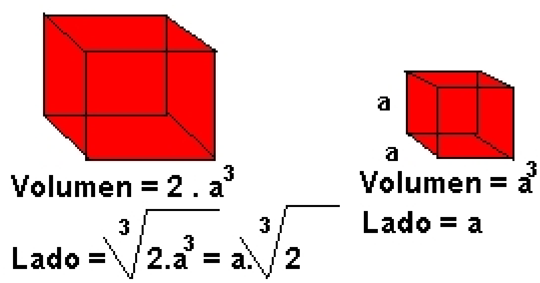


Figura 14 – Duplicación del cubo

No se sabe si los griegos conocían la perspectiva, pues nada de su pintura donde se vieran conceptos de perspectiva, ha llegado hasta nosotros.

En cuanto a los romanos, las pinturas murales de Pompeya, dan prueba de un cierto conocimiento de los problemas de la perspectiva pertenecientes a las convergencias, al horizonte, etc.; pero es probable que esto fuese debido más a un espíritu de observación unido a una viva intuición, que no a una verdadera codificación de reglas fijas.

Figura 15 – Calle de Pompeya. Mural romano.

Chinos. Métodos de representación

Por otra parte los chinos lograron dar una discreta idea de la profundidad en el espacio, adoptando la isometría (es una aplicación entre dos espacios métricos que conserva las distancias entre los puntos) y apropiados ardides de composición.

Figura 16 – Paisajes (grabados chinos)

Por ejemplo en sus refinados paisajes, las líneas que debían converger en lontananza vienen mantenidas paralelas, pero cortadas por follajes u otros elementos.

Los documentos más antiguos muestran que la matemática china no difiere, en cuanto al nivel de los conocimientos, de la matemática de los pueblos orientales: un sistema de numeración aditivo, el empleo del ábaco, fórmulas empíricas y aproximadas para áreas y volúmenes de figuras simples y la presencia de cuadrados mágicos. (Rey Pastor & Babini, 2000).

India. Métodos de representación

A la matemática en la India se le deben aportes originales e importantes. Los textos matemáticos se encuentran escritos en verso y redactados en un lenguaje místico, vinculados con cuestiones astronómicas y religiosas.
Sus contribuciones más importantes se ubican en la aritmética, el álgebra y la trigonometría. A pesar de que sus obras más antiguas están vinculadas a la geometría, reglas para la construcción de altares destinados a los sacrificios, para la construcción de cuadrados y rectángulos, ésta ya no se incluye en obras posteriores.
Los escritos más antiguos de este período son de carácter astronómico y de influencia griega. Su importancia matemática se basa en el hecho de que en esas obras aparecen por primera vez algunas de las hoy llamadas funciones circulares.

Observamos en la Figura 17 que el conjunto está como de costumbre reproducido de perfil, al igual que en las representaciones egipcias.

Por lo tanto, no se apoya en ninguno de los dos principios fundamentales de la perspectiva, como son el empleo del escorzo y la adopción de un punto de vista único para el conjunto de la pintura. (Rey Pastor & Babini, 2000).

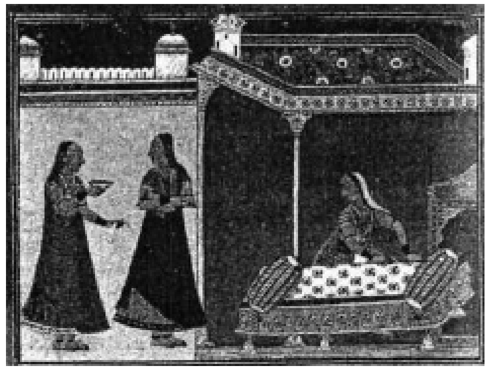


Figura 17 - Escuela de Basholi. "Ilustración del Chittarasamanjari". Pintura hindú.

Arte canaco de Melanesia

Se trata de una serie de observaciones sobre la cultura Melanesia que Leenhardt realizó durante veinticuatro años (1902 – 1926) de convivencia con los nativos entre quienes se ubicó como misionero evangelista; función que no quedó al margen de sus consideraciones y que desempeña un papel principal en la conclusión de sus investigaciones. (Leenhardt, 1997).

Do kamo, significa humano verdadero y es considerado así cualquier ser que tenga rasgos de bondad o de belleza. Este título no se le confiere especialmente al jefe que puede presentar o no, algunas de estas características. Lo esencial en la consagración de un jefe es su capacidad de poder repetir de memoria el legado cultural de la tribu.

Dicho legado puesto por él en palabras, tiene un valor muy importante para la tribu. Leenhardt llega a considerarlo como la encarnación del verbo.

EL dominio sobre la palabra determina quien, entre los primogénitos, será seleccionado.

De la estructura de esta cultura transmitida por este lenguaje, un gran número de observaciones pueden leerse como corolarios. El más impresionante de ellos es el descubrimiento que el autor hace, por vía del estudio del arte de la escultura: la visión de los nativos está estructurada en dos planos, no tienen noción de volumen, ni de profundidad ni de perspectiva es decir, no captan la tercera dimensión, perciben su existencia de manera cinematográfica, pero no como espectadores en una sala sino ubicados ellos mismos dentro de la película. En general, todo aquello que implique la dimensión del tercero les infunde un terror capaz de llevarlos al suicidio, denotando una concepción muy particular de hechos y circunstancias, como ha ocurrido con muchas culturas primitivas. (Leenhardt, 1997).

Vemos como diferentes entornos culturales con sus respectivas concepciones del mundo, resolvieron de diferente manera la representación del espacio tridimensional en el plano.

Pueblos precolombinos

Los conocimientos tuvieron para los Incas, una utilidad práctica, así la geometría fue desarrollada para medir los campos, trazar los caminos, edificar sus edificios, medir el tiempo y elaborar un calendario, menos preciso que el de los mayas, para determinar los tiempos de siembra y cosecha, la astronomía para sus festividades religiosas y labores agrícolas.

En el caso de los mayas, es posible observar en las pinturas de Bonampak, del período Clásico tardío, murales que se centran en la representación de la figura humana, intentando reproducir, con la mayor fidelidad posible, las formas con sus proporciones y su apariencia natural, utilizando escalas pictóricas menores a la natural. El arte fue esquematizado, cargado de simbolismo y aprovecha el espacio arquitectónico.

Figura 18- Mural de Bonampak

En las lenguas mayas el dibujo, la pintura y la escritura son representadas por una misma palabra, que es traducida como "arte". *Ah Chuen*, el dios mono, era el artesano supremo para los mayas, el artista y escriba, patrón de las "bellas artes".

"Por única vez en la plástica prehispánica, contraviniendo las reglas de su perspectiva, vemos que se rompe la bidimensionalidad por medio del escorzo en una figura magistral que nos muestra un prisionero desnudo que reclina su cuerpo en actitud desmayada (herido o muerto) entre dos escalones" (López, 2007).

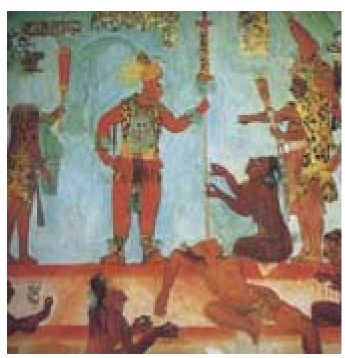


Figura 19- Mural de Bonampak (2)

Renacimiento: la Geometría relacionada con el arte

Brevemente nos vamos a referir a algunos de los principales desarrollos en la historia de la Geometría Proyectiva e indicar los hitos importantes desde el punto de vista didáctico para la enseñanza de esta disciplina.

Se asiste en el Renacimiento a un cambio de paradigma, ya que la Geometría Proyectiva tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento. Después en el siglo XVII se recobrarán las ideas de los matemáticos griegos, pero son los pintores renacentistas los que dan los pilares a esta rama de las matemáticas al lograr expresar en el plano, los objetos y las figuras tridimensionales, a diferencia de sus predecesores de la Edad Media.

En el Renacimiento se investiga la visión que tenemos de una escena cuando la vemos en distintas pantallas colocadas entre dicha escena y nuestro ojo. Nacen de esta manera la *perspectiva* y el estudio de las *proyecciones* y las *secciones.*

Los pintores del Renacimiento buscan representar la realidad; lo cual trae aparejado una serie de problemas pictóricos como despegar las figuras del fondo del cuadro y conseguir representar su volumen. Se necesitaba disponer las figuras en una composición, acomodándolas en un espacio físico concreto y tridimensional, lo que conlleva crear sistemas de representación que constituyen la perspectiva.

Buscan un método científico de representación de la realidad basado en leyes matemáticas: la perspectiva geométrica o lineal.

Este es uno de los principales aportes de la pintura renacentista, la construcción racional del espacio, mediante leyes que tienen su fundamento en la teoría de la perspectiva lineal.

Luego, en el siglo XVII se recuperarán ideas de los matemáticos griegos, pero son los pintores renacentistas los que dan fundamento a esta rama de las Matemáticas al lograr plasmar en lienzos planos los objetos y las figuras tridimensionales, a diferencia de sus antecesores de la Edad Media. Podemos mencionar a Leonardo da Vinci, Rafael Sanzio o Alberto Durero, entre otros.

Una de las pinturas más famosas, entre otras, de Leonardo da Vinci es *La última cena,* que describimos brevemente.

La última cena
Temple sobre pared, 460 x 880 m.
Milán, Refectorio de Santa María delle Grazie

Figura 20 – La última cena.

Dividiendo en tres partes la mitad inferior del lado mas corto del rectángulo y trazando dos rectas paralelas, Leonardo delimita la superficie de la mesa.

Finalmente, las figuras de los apóstoles están dispuestas, de tres en tres, en cada uno de los cuartos de la escena. Observamos además que las diagonales del rectángulo dan la perspectiva de las partes superiores de los paneles laterales, perspectiva que confluye en la cabeza de Cristo.

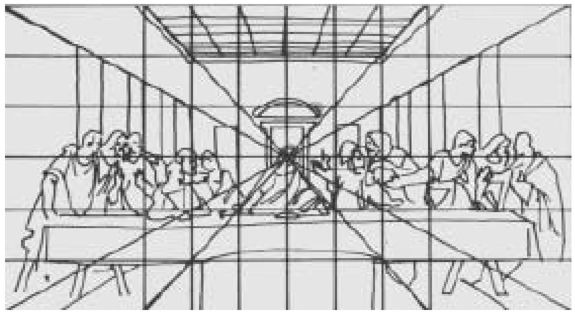


Figura 21 – La última cena – Análisis de al obra.

Podemos mencionar también a Piero della Francesca, pintor del período central del Quattrocento que fue el primero en intentar aplicar de manera sistemática la perspectiva geométrica a la pintura. Casi todas sus obras son de carácter religioso, básicamente altares y frescos para las iglesias. Piero della Francesca es un geómetra, igual que su discípulo Luca Pacioli. En él se superponen la pintura y las matemáticas o más exactamente la geometría. Esta obra, su última obra, ilustra bien la construcción racional del espacio, aportación de la pintura renacentista mediante el desarrollo y aplicación de la perspectiva lineal.

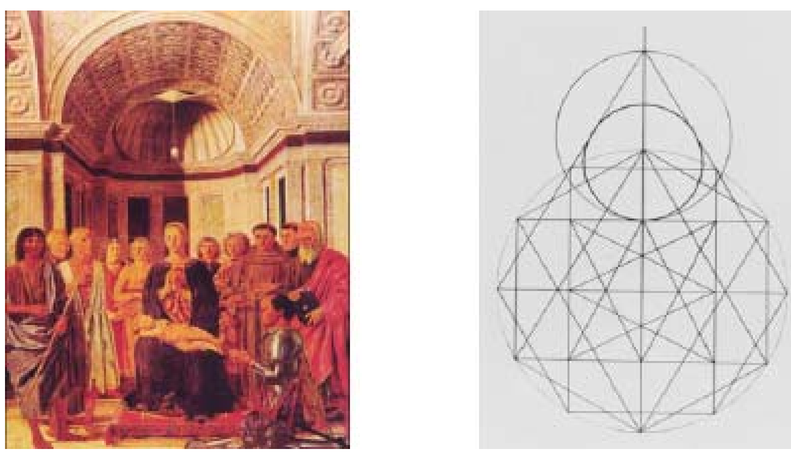


Figura 22 – Virgen con el niño y su análisis.

Piero della Francesca influyó en el pintor español Salvador Dalí.

Este cuadro de 1949 inicia la serie de cuadros religiosos de Dalí que anuncian su período crepuscular. La perfecta perspectiva dirige todas las líneas de fuga hacia el ojo derecho de la Virgen-Gala, según una concepción y una configuración arquitectónica renacentistas. Ciertamente parece que Dalí se inspirara en la *Virgen con el Niño y santos* de Piero della Francesca.

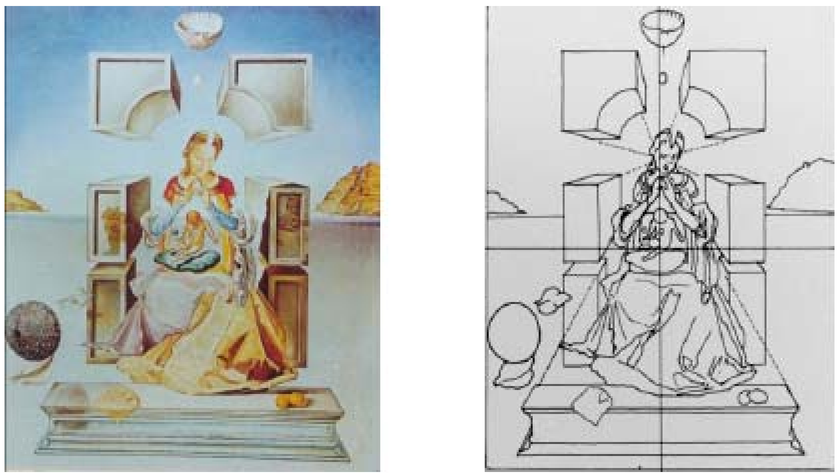


Figura 23 – Estudio para la Madona y su análisis.

De acuerdo a la doctrina de que la esencia de la naturaleza es una ley matemática, los pintores del Renacimiento, compenetrados en esa creencia, lucharon durante más de cien años por encontrar un esquema matemático que les permitiera pintar el auténtico mundo tridimensional en una tela bidimensional. De esta manera, a partir de necesidades sociales generadas por el arte, se desarrollaron conocimientos matemáticos. Claramente, se observa un ejemplo de construcción social de conocimientos matemáticos.

Los pintores que eran arquitectos e ingenieros y los mejores matemáticos del siglo XV, lograron expresar la distancia, el espacio, la masa, el volumen y los efectos visuales.

La esencia de la representación tridimensional se basaba en el principio de proyección y sección. Lo que se ve de la escena depende de la posición del observador. Imaginaron que la tela era una pantalla de cristal interpuesta entre la escena y el ojo.

Cada rayo de luz se originaba en cada punto de la escena dirigido al ojo. Esta colección de rayos de luz (líneas convergentes) la llamaron proyección. La colección de puntos, en donde las líneas de la proyección cortaban la pantalla de cristal, era una "sección". Para lograr realismo, el pintor tenía que reproducir en la tela, la sección que aparecía en la pantalla de cristal.

La sección dependía no sólo del lugar donde se situara el artista, sino también de donde se colocaba la pantalla de cristal entre el ojo y la escena.

El artista renacentista tenía que deducir teoremas, que le especificaran cómo iba a aparecer una escena en al pantalla de cristal imaginaria (situación, tamaños y formas de objetos) para que pudiera trasladarla a la tela. Estos teoremas forman parte de la Geometría euclidea, y figuran en los libros modernos sobre perspectiva, que utilizan los estudiantes de pintura.

Matemáticos profesionales se encargaron de la investigación de estas cuestiones y desarrollaron una geometría de gran generalidad, la Geometría Proyectiva.

Supongamos, por ejemplo, que el objeto que examinamos es un cuadrado.

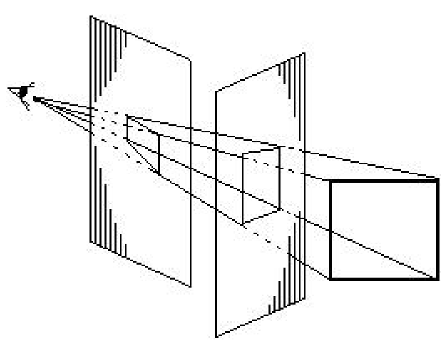


Figura 24 – Observación de un cuadrado a través de una pantalla.

Si se contempla desde un punto algo lateral al cuadrado, y si una pantalla de cristal se interpone entre el ojo y el objeto, la sección sobre la pantalla ya no será un cuadrado sino un cuadrilátero de forma irregular.

Por ejemplo, las baldosas del suelo en el cuadro de Rafael no son cuadrados, aunque las baldosas físicas lo fueran.

Los matemáticos buscaron propiedades geométricas comunes a todas las secciones de la misma proyección y a las secciones de dos proyecciones distintas de una escena dada.
Los geómetras proyectivos observaron que así como el contorno de un círculo o de un cuadrado varía en secciones distintas de una misma proyección, o en distintas proyecciones de la figura, variará de la misma forma la longitud de un segmento, la medida de un ángulo o de un área.
Observamos, por ejemplo, las líneas de las baldosas del suelo en la "Escuela de Atenas" de Rafael.

Figura 25 – Escuela de Atenas.

Por lo tanto, las propiedades comunes a dichas secciones distintas no incumben a la Geometría euclidea pero sí a la Geometría Proyectiva. (Blanco, 2005).

La perspectiva, técnica dominante de la representación occidental hasta finales del siglo XIX constituye por tanto un componente inevitable de la formación artística en el Renacimiento. No todos los artistas eran hábiles matemáticos y los subterfugios para su aprendizaje abundaban. La geometría prueba ahí su adaptación a necesidades específicas, y su asimilación por los no especialistas modifica su contenido y sus aplicaciones. Por su parte, los artistas que colaboraron con los matemáticos en otros proyectos no trataron de ilustrar ciertos conocimientos científicos: intentaron elaborar formas nuevas, que se nutren de saberes externos, reflejo de realidades e investigaciones específicas.

Debemos tener en cuenta que el porvenir material de la pintura no puede desligarse del porvenir económico, político y cultural del lugar donde se desenvuelve. De no tener en cuenta el origen social de la cultura es imposible llegar a una visión científica y real del futuro. Vemos que una actividad como la pintura artística aporta elementos para la representación de objetos matemáticos en un nuevo escenario (el espacio), por lo tanto, su carácter social es indiscutible.

Reflexiones acerca de las representaciones en las distintas culturas

Vemos, a través de esta recorrida por la historia, cómo distintas sociedades, distintos entornos culturales y sus respectivas concepciones del mundo, dieron lugar a diferentes maneras de resolver la representación del espacio y la forma. Del mismo modo, las distintas concepciones de cada persona en cada momento de su desarrollo, dan lugar a diversas formas de entender y resolver estos problemas.

Si pensamos cuál de esas representaciones del espacio en el plano es más parecida a la realidad, tal vez respondamos que la que utiliza proyectiva. El uso de la perspectiva como sistema de representación es una de las tantas formas que el hombre utilizó para representar tres dimensiones en un espacio bidimensional. No podemos decir que sea la única ni tampoco la más “correcta” en términos artísticos. Está mostrando una manera de interpretar la realidad.

Pero, cuando aparece la necesidad en los alumnos, de representar cuerpos geométricos en el plano, su resolución conduce al trabajo con perspectiva (perspectiva lineal), ya que lo que se busca es reproducir en el plano el cuerpo que tiene tres dimensiones de la manera más fiel, para utilizar esa representación con la finalidad de construir conocimiento geométrico o resolver un problema a través de ella.

Como apuntamos anteriormente, tanto desde la historia del arte como del desarrollo individual, no se trata de resoluciones “correctas” o “incorrectas”, sino de verdades plásticas distintas e igualmente valederas. Podemos decir que cada una de estas culturas percibían el espacio de manera diferente, sin embargo la capacidad visual del hombre es en todos los casos la misma... Claramente se ve cómo una obra de arte está reflejando una visión del mundo, una postura filosófica en la que a veces se pondera la importancia de un objeto, de una persona, o su relación con el entorno, por ejemplo. La coexistencia de lo diverso en el arte, está simplemente mostrando la manera en la que el hombre percibe e interpreta lo que tiene a su alrededor.

Capítulo 3

Las representaciones gráficas en la geometría y en el aula de matemática

Las representaciones gráficas y la visualización a lo largo del tiempo

Hemos visto que las representaciones pictóricas que el hombre realizó de escenas que lo rodeaban, tuvieron distintas características en las distintas culturas. Los escenarios socioculturales se vieron reflejados en el arte. Sin embargo, la visualización ayudó a la comprensión y abordaje de conceptos geométricos.

Debemos ubicar cada uno de los conceptos matemáticos en el escenario en el que se originó y desarrolló. La matemática educativa, a través del acercamiento socioepistemológico, nos permite dar nuevos enfoques a dichos conceptos y reflexionar respecto de su implementación en el aula. A través de un acercamiento a las representaciones de cuerpos tridimensionales en la matemática buscamos entender su evolución.

En la mayoría de las civilizaciones, se fueron desarrollando algunos aspectos de la geometría evidenciados a través del conocimiento de las propiedades de las figuras planas y de los cuerpos tridimensionales, con la finalidad de representar el espacio físico y de encontrar solución a los problemas que se les planteaban.

En el ámbito de las matemáticas el concepto de visualización ha ido desarrollándose con el paso del tiempo, tanto en su significado como en el grado de aceptación.

Vamos a considerar, a continuación, el papel de la visualización en Matemática y en particular su utilización con fines didácticos en las representaciones a lo largo del tiempo.

La visualización en los orígenes

La palabra griega θεωρια (teoría) significa contemplar y θεωρημα (teorema) es lo que se contempla (actualmente lo que se demuestra). En los tiempos de los pitagóricos, los números y las relaciones entre ellos se "pensaban" mediante diferentes métodos geométricos usando piedrecillas (cálculos).

Los pitagóricos no escribían sus teoremas. Ni siquiera los dibujaban. Los construían con piedrecillas, ¿Qué tipo de teoremas? Por ejemplo:

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

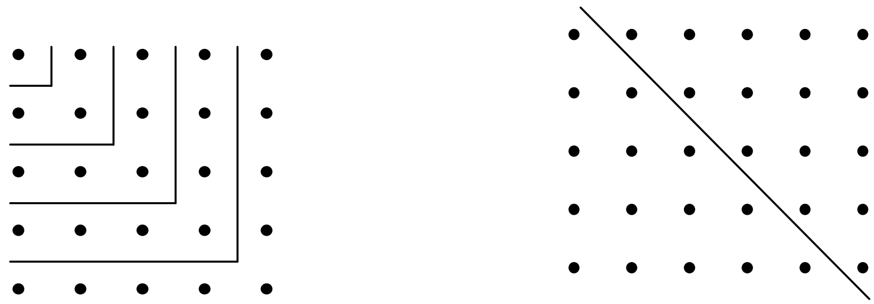
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

…………………………..

……………………………..

es decir, la suma de los **n** primeros impares es igual al cuadrado de **n**. La demostración del teorema era sencilla al ir construyendo con piedrecillas cuadrados sucesivos de dos, tres, cuatro piedrecillas en cada lado.

Al obtener éste y otros teoremas nada evidentes sobre números, debió surgir en Pitágoras la idea de un patrón que relacionara los dos objetos, la figura y el número. Aquí tenemos un esquema de dos de sus interesantes teoremas:



$\mathbf{1+3+5+\ldots.+(2n+1) = n^2}$ $\mathbf{2\,(1+2+3+\ldots.+n) = n\,(n+1)}$

Figura 26 – Teoremas pitagóricos

Platón hace hincapié en el papel de la imagen dentro de la construcción matemática. La imagen recuerda la idea, el cuadrado pintado no es la realidad del cuadrado, sino la idea. Por lo tanto, la imagen juega el papel de evocación de la idea. A través de la reseña a lo sensible, el matemático se acerca a lo inteligible.

Vemos que está relacionado con las teorías cognitivas en matemática educativa, las cuales nos dan información acerca de fenómenos vinculados al aprendizaje de la matemática.

En el caso de la teoría de la imagen del concepto, se considera a un estudiante que se enfrenta a la *definición de un concepto*, al interactuar con esta genera su *propia definición del concepto*, a esta le asocia *imágenes mentales* que en su conjunto son la *imagen del concepto*, etc. (Tall y Vinner, 1981).

Los libros de los matemáticos anteriores a Euclides debieron tener frecuentes alusiones a imágenes. En el libro de las Aporías de Euclides, que serviría de libro de texto utilizado con sus alumnos, la referencia a imágenes sería más importante todavía, pero lamentablemente este libro se ha perdido.

En *Los Elementos*, Euclides presenta argumentos donde observamos el uso de figuras. Observamos que el seguimiento de la presentación obliga a mirar esas figuras.

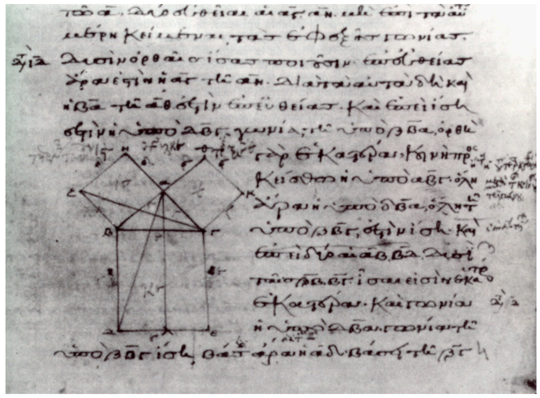


Figura 27 - Euclides. Elementos. Libro I, proposición 47. El teorema de Pitágoras. (Manuscrito griego 2344, siglo XII.)

Por ejemplo:

Euclides, en el Libro I de los Elementos proposición 47, demuestra el teorema de Pitágoras: En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el ángulo opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto.

Arquímedes, por su parte, utilizó su método analógico como herramienta fundamental para sus descubrimientos matemáticos.

Los clásicos modernos

Por otra parte, en la matemática, Descartes, fue el principal conector entre el lenguaje geométrico y el lenguaje algebraico, ya que permitió relacionar una ecuación con una curva (en el plano geométrico).

En sus *Reglas para la dirección del espíritu*, tiene varias reglas que tienen que ver muy directamente con la visualización, en ellas hace hincapié en el papel de las imágenes y figuras en lo que atañe al pensamiento matemático.

Como su nombre lo dice, nos ayudan a dirigir nuestro espíritu hacia la búsqueda del conocimiento y la verdad.

Las reglas más importantes son:

“Regla XII

> *Finalmente, es preciso utilizar todos los auxilios del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria, ya para la intuición distinta de las proposiciones simples, ya para la comparación debida de las cosas buscadas con las conocidas, a fin de descubrirlas, ya para el descubrimiento de aquellas cosas que deben ser comparadas entre sí, de suerte que no se omita ningún medio de los que están al alcance humano..”* (Descartes, 1935, pp. 90).

“Regla XIV

> *La misma cuestión debe ser referida a la extensión real de los cuerpos y representada totalmente a la imaginación por puras figuras; pues así será percibida por el entendimiento con mucha mayor distinción. .”* (Descartes, 1935, pp. 129).

“Regla XV

> *Es útil también, casi siempre, trazar estas figuras y presentarlas a los sentidos externos, a fin de que, por este medio, se mantenga más fácilmente la atención de nuestro pensamiento.”* (Descartes, 1935, pp. 150).

Vemos que dedica varias ideas a la visualización, haciendo especial hincapié en la importancia de las imágenes y de las figuras en el pensamiento matemático.

Se plasma en esta obra su intención de crear una ciencia universal de carácter matemático. Pero también se subrayan los aspectos metodológicos de su pensamiento.

Siglos XVII, XVIII y XIX

La fusión de la imagen, de la geometría sintética de los antiguos y el álgebra dio lugar a la Geometría Analítica. Y el Cálculo del siglo XVII nace con un ingrediente esencialmente visual y así perdura en acción recíproca con problemas geométricos y físicos.

La visualización ha sido la constante en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Siempre aparece una imagen acompañando todos sus trabajos en una multiplicidad mayor de lo que generalmente se cree, la cual ha desempeñado un papel importante en el desarrollo del pensamiento matemático.

El uso de diagramas fue aceptado durante el siglo XVIII, por ejemplo, Newton y Euler utilizaban diagramas y gráficos en todas sus presentaciones. (De Guzmán, 1996).

En el caso del Cálculo, estuvo sumergido desde el siglo XVII en oscuridad y confusión de las que no se liberó hasta finales del siglo XIX, con la aritmetización del análisis por Weierstrass.

A mediados del siglo XIX, el surgimiento de las geometrías no euclideanas, llevaron a desconfiar profundamente de la intuición. Se produjo un cambio en la evolución de las ideas de argumentaciones y deducciones matemáticas. El concepto de sistema axiomático se modificó desde ese momento, teniendo en cuenta la no exigencia de que los axiomas sean intuitivamente evidentes. Esto determinó un cambio de paradigma en el nexo entre la matemática y la realidad.

El formalismo en el siglo XX y la visualización

Las primeras discusiones sobre la teoría de conjuntos de Cantor, así como las paradojas acerca de los fundamentos de la matemática llevaron a los matemáticos a poner el acento en los aspectos formales de sus construcciones. Los resultados demostrados, falsos o incompletos (por ejemplo el teorema de los cuatro colores o el teorema de la curva de Jordan) basados en elementos intuitivos, contribuyeron a mirar con cierta aprensión dichos argumentos. Uno de los ejemplos más destacados fue la creencia de Newton de que cada función continua tiene al menos un vecindario en el cual es diferenciable, creencia que surge posiblemente como resultado de que es difícil imaginar una función visualmente.

El matemático Weierstrass, a fines del siglo XIX, elaboró un ejemplo de una función continua que no es diferenciable en ningún punto. Justificó la existencia de esta función empleando el simbolismo algebraico y no la utilización de gráficos. El triunfo de este modelo de razonamiento dio lugar a la valoración de la consistencia de la Matemática por encima de la visualización, pero a su vez provocó un rechazo por el uso de gráficos y diagramas (de Guzmán, 1996).

El modelo de razonamiento que dio lugar a la valoración de la consistencia de la Matemática por encima de la visualización, en el siglo XIX, provocó un rechazo por el uso de gráficos y diagramas. Esto contribuyó a inclinarse hacia la formalización en matemática, no sólo en lo que atañe a su fundamentación, sino también respecto del intercambio en el seno de la comunidad matemática, y en la educación matemática en todos los niveles.

La estructura de los libros de texto obedeció a esta corriente no sólo en la enseñanza superior, sino también a nivel secundario e incluso primario, poniéndose de manifiesto, en Argentina, a través de las ideas de la *matemática moderna*. Este movimiento (1960 -1975), que fue promovido con el objetivo de que los alumnos profundizaran en el acercamiento formal de la matemática, causó una gran cantidad de problemas de aprendizaje, una de las consecuencias fue el desalentar la visualización.

Se pueden leer un par de frases entresacadas de la introducción de la obra de Jean Dieudonné sobre “Algebra lineal y Geometría Elemental”: *"Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto"* (Dieudonné, 1964, p. 15). *"Es deseable liberar al alumno cuanto antes de la camisa de fuerza de las ´figuras´ tradicionales hablando lo menos posible de ellas (exceptuando, naturalmente, punto, recta y plano)...".* (Dieudonné, 1964, p. 16).

La idea fundamental de la reforma era promover en lugar del Sistema Axiomático de Euclides-Hilbert, la noción de Espacio Vectorial. El propio Dieudonné señala: ”*Me parece importante familiarizar al alumno lo antes posible con las nociones esenciales del álgebra lineal, enseñarle a ´pensar linealmente´”.* (Dieudonné, 1964, p. 12). A pesar de este rechazo se observó, que los matemáticos sí los utilizaban en sus trabajos de razonamiento.

En general cuando los matemáticos piensan, evitan no sólo el uso de palabras sino también el uso de lo algebraico y otros símbolos y tienen preferencia por las imágenes vagas. Hadamard (1947) cuenta que Einstein le escribió:
“*las palabras o el lenguaje, escrito o hablado, no creo que desempeñen ningún papel en el mecanismo de mi pensamiento. Los entes físicos que parecen servir de elementos al pensamiento son ciertos signos y ciertas imágenes, más o menos claras que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas*”. (Hadamard, 1947, Apéndice II, p. 228).

El modelo de la actividad científica universitaria en la enseñanza fue asimismo el modelo formalista por mucho tiempo, siendo aplicado en la enseñanza secundaria rápidamente. Esto ocurrió así dado que la Matemática Moderna abogaba por la profundización en el rigor lógico y no en la intuición ni en la visualización.

La llegada de la modernización de las matemáticas, le impregnó características a la Geometría y su enseñanza, la cual perdió su propio peso, pasando a ser considerada en la distancia como la “cenicienta de las matemáticas”.

Hoy se considera una necesidad ineludible, desde el punto de vista didáctico, científico e histórico, volver a recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la Matemática, no ya solo en lo que se refiere a la Geometría. (De Guzmán, 1993).
Consideramos que la enseñanza de la geometría no puede ser deductiva únicamente, debe basarse en la observación y su objetivo debe ser la elaboración de los conceptos fundamentales a partir de la experiencia. Además, la enseñanza debe asegurar las condiciones para que el alumno se eleve a un nivel superior de desarrollo cognitivo y debe reflejar las ideas y valores de la sociedad en la que está inserto. En estas condiciones el maestro realiza la función de dirección del aprendizaje, es decir, orienta, controla y evalúa; en una palabra, conduce el aprendizaje de los alumnos.

Finalmente, hacemos referencia a George Polya que trata la importancia que las imágenes visuales presentan en el trabajo de los matemáticos. Polya compiló una lista de sugerencias heurísticas para resolver problemas basada en su propia experiencia con matemáticos. Aconsejaba a sus alumnos que aún cuando un problema no fuera de geometría, debían tratar de dibujar una figura, pues esto era importante para llegar a la solución. (Polya, 1998).

Polya señala: *“El alumno debe considerar las principales partes del problema atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema, debe dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos.”* (Polya, 1998, pp. 29).

Recientes investigaciones, muestran que el uso de computadoras y gráficos computarizados ha aumentado, las representaciones visuales aparecen en las comunidades de matemáticos como una herramienta útil en la resolución de problemas.

Visualización, pensamiento matemático y ambientes informáticos en el aula

La visualización no podemos entenderla como el simple acto de ver, sino como *"la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende".* (Cantoral & Montiel, 2002, pp.24). En consecuencia la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además interviene en un entorno cultural determinado.

Las tradiciones cognoscitivistas (Dauterman, Dubinsky y Zazkis, 1996) desarrollan el modelo de "visualización y análisis", donde se van intercalando estrategias de visualización y de análisis, terminando finalmente en una síntesis. Se basa en una extensión del análisis piagetano de la percepción y de la inteligencia. Caracterizan a la visualización como procesos de interiorización y de encapsulación. Agrega Presmeg, que los métodos visuales tienen éxito cuando dan sostén a las generalizaciones analíticas. Esto surge de la idea de la "generalización de patrones" que se tiene de la matemática como materia. (Presmeg, 1986)

Actualmente la visualización se ha favorecido con las representaciones geométricas de conceptos matemáticos. Davis (1933) presenta un artículo que acentúa la importancia de los llamados "teoremas visuales", refiriéndose a los gráficos que el ojo percibe y organiza como un todo. No circunscribe la visualización a la percepción, sino que interpreta dichos teoremas mediante expresiones del lenguaje natural. Afirma que la raíz griega de la palabra significa "mirar a". (Davis, 1993).

Es indiscutible en nuestros días el uso de las nuevas tecnologías. El sistema educativo no puede mantenerse al margen si pretende una enseñanza de calidad, para ello es necesario que las incorpore. Además, estas tecnologías ofrecen interesantes posibilidades didácticas, que reúnen la capacidad de visualización gráfica con la interactividad inherente al proceso de enseñanza-aprendizaje**.**

Devlin y Levy (citado en Borba y Villarreal, 2005), consideran que en un proceso de trabajo con computadora, la posibilidad de observar los efectos de cambiar un parámetro en una ecuación y ver lo que sucede, puede dar lugar a nuevas conjeturas, transformando el razonamiento matemático.

Otros autores como Mumford (citado en Borba y Villarreal, 2005), son más duros.

Es un crítico de *"la comunidad matemática pura que considera a las computadoras como invasores, arruinadoras del campo sagrado".* (Borba y Villarreal, 2005, p.76).

A pesar de esto, hay autores como Francis (1996) (citado en Borba y Villarreal, 2005), que reconocen:

*"es menos importante debatir si una preocupación seria acerca de las computadoras es relevante para las matemáticas contemporáneas que el hecho de que el futuro de las matemáticas sea predicado sobre la obicuidad del paradigma computacional. Como la mecánica, óptica y dinámica newtoniana permanentemente alejaban las matemáticas de la geometría estática euclidea, para que la revolución de la información dominada por la computadora aporte a las matemáticas del formalismo estéril características de las décadas de Bourbaki, y que aún domina las matemáticas académicas" (*Francis *citado en* Borba y Villarreal, 2005).

Por otra parte agrega:
"*es absurdo esperar simulación y experimentación computacional, aún a un nivel de precisión infinita, para reemplazar el rigor que las matemáticas han alcanzado por su metodología en los últimos dos siglos. En lugar de cambiar la naturaleza de las matemáticas, la computadora cambiará el contenido de las mismas*". (Francis citado en Borba y Villarreal, 2005).

Afirmaciones de este tipo nos darán lugar a efectuar cambios en los contenidos de la matemática escolar y también en la pedagogía.
Consideramos que en la actualidad hay un acuerdo teórico del valor pedagógico de la visualización en matemática.

Dado el nuevo rol que tiene la visualización con la introducción de las nuevas tecnologías en la matemática educativa, algunos autores se han involucrado en la investigación y han discutido sobre el uso de las computadoras tratando de buscar un método más flexible de enseñanza, ya que el método tradicional nos lleva a una interpretación simbólica limitada, y el uso de las computadoras nos aporta un fuerte recurso visual.

Las referencias presentadas muestran diferentes posiciones asociadas con la visualización dentro de la comunidad educativa matemática. Observamos una clara tendencia a reconocer la relevancia de la visualización en situaciones de enseñanza–aprendizaje. No obstante notamos una cierta desconfianza hacia la visualización, que surge de la influencia de la práctica científica de matemáticos sobre la práctica pedagógica. En consecuencia, es necesario generar propuestas educativas teniendo en cuenta la organización del conocimiento y los cambios generados en el aula a que dio lugar el uso de la computadora.

Representaciones sentenciales y diagramáticas: palabras y gráficos

El uso del término visualización en psicología se vincula con la destreza de los alumnos para formar y manejar imágenes mentales. En cuanto a la Matemática, la visualización se considera como la destreza para trazar un diagrama con lápiz y papel o bien con ayuda de la calculadora o la computadora. El diagrama ayuda a entender conceptos y a resolver situaciones problemáticas, con lo cual la visualización es un medio para obtener la comprensión de conceptos. Visualizar un diagrama significa formar una imagen mental del diagrama o sea, visualizar un concepto.

A pesar de la importancia de las imágenes mentales en la actividad humana, a las imágenes visuales no se les ha dado en la Matemática el lugar que debieran ocupar.
En los últimos años, como hemos visto, se han preferido los desarrollos algorítmicos sobre los visuales. Para el alumno, estos desarrollos son más sencillos de aprender y luego aplicar a los ejercicios en forma mecánica (recetas). Para el profesor, es simple de enseñar ya que no tiene que construir una gráfica ni correr un programa. El conocimiento académico es complejo. Los elementos de este conocimiento deben tomarse aparte y ordenarse secuencialmente, lo cual deteriora la unidad del conocimiento, ya que destruye muchos vínculos y, por otro lado en la escuela el conocimiento se enseña separado de su contexto. La preparación didáctica del conocimiento da lugar a un texto lineal que le da estructura al conocimiento. El procesamiento analítico de la información se maneja con representaciones sentenciales dando lugar a una sucesión de expresiones; en cambio el procesamiento visual se maneja con representaciones diagramáticas. (Carrión Miranda**,** 2000). La representación diagramática es más útil pues aparece mostrando claramente sus partes importantes y los enlaces destacados a nivel

conceptual, si bien no son comprensibles en forma inmediata. En las representaciones sentenciales la información está contenida en fórmulas para establecer los conceptos matemáticos tácitamente.

Por ejemplo:

Representación Diagramática

Los diagramas obtenidos nos ayudan en nuestros procesos de razonamiento

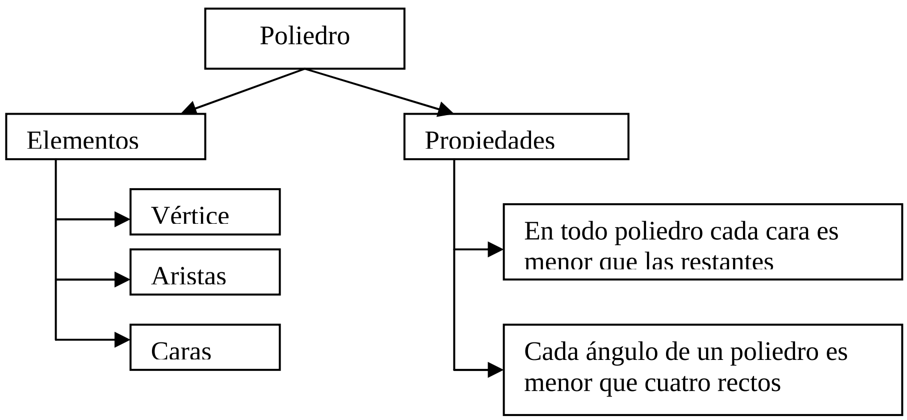


Figura 28 – Diagrama de ángulo poliedro.

Representación Sentencial

Poliedro:

- Todas sus caras son polígonos con un mismo número de lados.
- Todos sus vértices son vértices de ángulos poliédricos con un mismo número de aristas.
- Verifican la relación de Euler.

Cualquier modelo didáctico que se proponga ha de basarse en investigaciones previas acerca del razonamiento geométrico y en investigaciones didácticas acerca de la construcción de conceptos geométricos en la escuela.

Pero, a pesar del movimiento precedido por Dreyfus (1991), hay una cierta resistencia a reconocer la posición destacada que el razonamiento visual posee en

la investigación matemática. También hace hincapié en que las computadoras juegan un papel importante en las actividades matemáticas.
Observando nuestra actividad diaria podemos ver, actualmente, que pasamos mucho tiempo frente a la computadora, si bien siguen estando el papel y el lápiz. Ha cambiado fundamentalmente la forma de hacer matemática. La computadora no sólo ayuda al matemático en su trabajo sino que cambia la naturaleza de lo que se realiza.

Las representaciones planas y sus limitaciones

Como ninguna de estas representaciones corresponde por completo a la realidad, es útil que pueda manipular varias para utilizar la más conveniente en cada caso. Parszyz (1988) se refiere a la existencia de distintos niveles de representación de cuerpos geométricos, a los que les corresponden distintas cantidades de información perdida.

El *primer nivel* corresponde a la representación de cuerpos tridimensionales en madera, cartulina o varillas. En estos casos se pierde información.
Por ejemplo: en los modelos de madera no se pueden apreciar las diagonales interiores del cuerpo geométrico analizado.
En el caso de la diapositiva, Figura 29.- (cuerpo realizado con varillas), algunos estudiantes no pueden aceptar como atributo de los poliedros que las caras encierran un espacio. Es adecuado que el docente advierta que no es necesario que las caras estén materializadas siempre que quede delimitada la forma del sólido.

Figura 29 .- Cubo hecho con varillas.

El *segundo nivel,* según Parszyz, corresponde a las representaciones bidimensionales como las mostradas en la Figura 30. Algunas de estas representaciones (por ejemplo la perspectiva) mantienen la información visual de los cuerpos pero pierden la correspondiente a la parte oculta de los mismos.

Figura 30 - Proyección en perspectiva.

Otras, como la proyección ortogonal, mantienen la información sobre la estructura de los cuerpos (cantidad de elementos, posiciones relativas, etc.), pero pierden su aspecto visual.

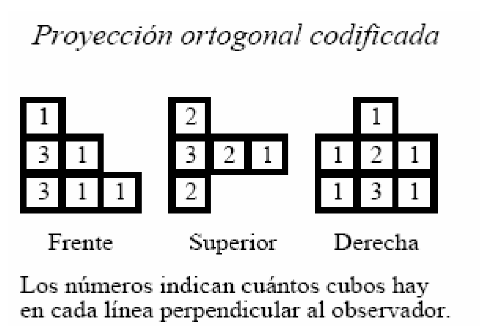


Figura 31.- Proyección ortogonal codificada

Debemos tener en cuenta que la información que se mantiene se debe al hecho de compartir determinados códigos, pues determinados datos objetivos se traducen siempre de la misma manera. Por ejemplo, el cuerpo corresponde a un cubo dibujado teniendo en cuenta una proyección paralela, pero corresponde a un tronco de pirámide si consideramos una proyección en perspectiva con un punto de fuga.

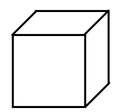


Figura 32.- Cubo - Proyección Paralela.

Parszyz (1988) lo denomina "restitución del significado". De no conocerse los códigos se tendría una lectura equivocada de las representaciones planas.

No obstante los alumnos ya poseen información extraescolar que los maestros no deben ignorar.

Sabemos, que de las diferentes formas de dibujar los cuerpos geométricos, la perspectiva es la más difícil de realizar correctamente. Cuando dibujamos cuerpos en perspectiva, utilizamos, generalmente la proyección paralela, o sea, el punto de fuga se sitúa en el infinito. Es la que aparece en los libros de texto y las que realizan los profesores en sus clases (Gutiérrez, 1998).

Construcción utilizando la Proyección Paralela o Perspectiva Cavalieri

Es habitual que los profesores enseñen a dibujar un cubo a partir de dos cuadrados iguales y uniendo los vértices correspondientes. Esta es la forma de representación que se encuentra presente en la mayoría de los textos escolares también.

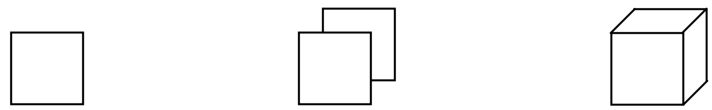


Figura 33.- Cubo – Pasos de la Proyección Paralela.

Construcción utilizando la proyección en Perspectiva con Puntos de Fuga

Esta representación llamada perspectiva, desarrollada por los artistas desde el siglo XIV para dar sensaciones espaciales a nivel visual, da ilusión óptica de profundidad lograda a través de líneas que llegan a un mismo punto. El principio básico se puede observar en la gráfica.

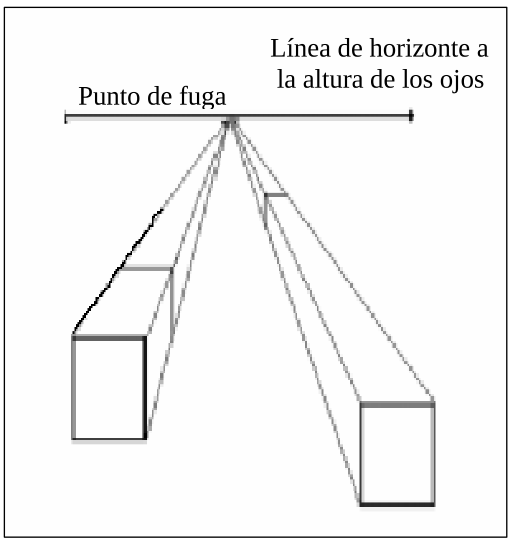


Figura 34.- Cubo - Proyección en Perspectiva con 1 punto de fuga.

Intentemos construir el ejercicio anterior:

- Elaboremos dos cuadrados, uno más grande que el otro.
- Pensemos en una línea de horizonte, recordemos que al hablar de línea de horizonte cuando estamos dibujando es como establecer una

relación con los objetos según la altura que tienen nuestros ojos con respecto a ellos.

- Dibujemos una línea en nuestro cuaderno, esa línea establecerá la idea de horizonte.
- La línea puede estar arriba o abajo de los cuadrados; en nuestro ejemplo está arriba, por lo tanto nos da la idea de que podemos observar esos cubos por encima, por eso vemos las tapas de los cubos.
- El punto de fuga que allí se señala, es el punto donde convergen las líneas de construcción de los cubos.
- Ubiquemos el punto de fuga sobre la línea de horizonte y lancemos hacia allá, líneas de cada esquina de los cuadrados. Ahora dibujemos con regla una línea horizontal y otra vertical que cierren el cubo.

Cómo evoluciona la habilidad del dibujo en perspectiva

Como se dijo anteriormente, la forma de representación que parece ser más fiel a la realidad y que por lo tanto es más utilizada en el diseño gráfico de cuerpos geométricos, es la representación en perspectiva. Esta forma de representación no es sencilla y así como en la historia de la humanidad llevó siglos el dominio de sus técnicas y necesitó de la construcción de conocimientos matemáticos de la geometría proyectiva, también requiere de habilidades para su utilización por parte de los estudiantes.

Mitchelmore (1976, 1980) describe el desarrollo de la habilidad de representación en perspectiva y propone cuatro etapas basándose en la teoría de Piaget.

***Etapa 1**: Esquemática plana.* Se representan las figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente.

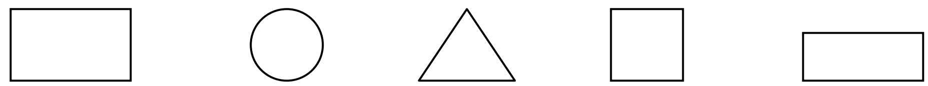


Figura 35.- Proyección en Perspectiva - Mitchelmore – Etapa 1

***Etapa 2**: Esquemática espacial.* Las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente y a veces incluyendo caras ocultas. Las representaciones no dan sensación de profundidad.

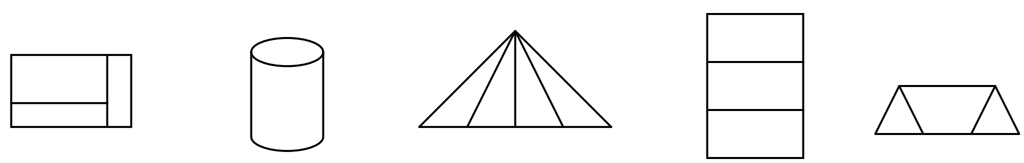
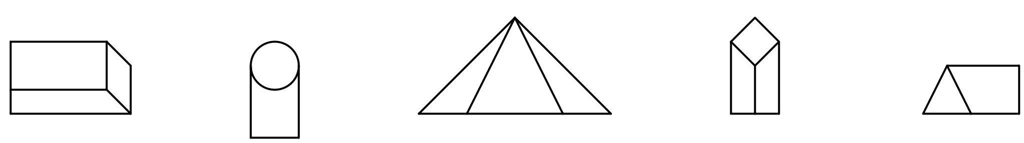


Figura 36.- Proyección en Perspectiva - Mitchelmore – Etapa 2

***Etapa 3**: Pre-realista.* Se muestran intentos de representar los cuerpos de una manera realista y dotarlos de profundidad, aunque sin lograrlo. Esta etapa está subdividida en dos subetapas, que difieren en la excelencia de los dibujos respecto de su tridimensionalidad.

a.-



b.-

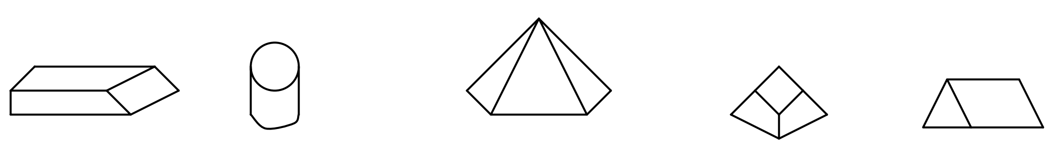


Figura 37.- Proyección en Perspectiva - Mitchelmore – Etapa 3

***Etapa 4**: Realista*. Los dibujos siguen aproximadamente las reglas del dibujo en perspectiva, en particular las que aluden a las líneas que convergen en un punto del infinito (Gutiérrez, 1998).

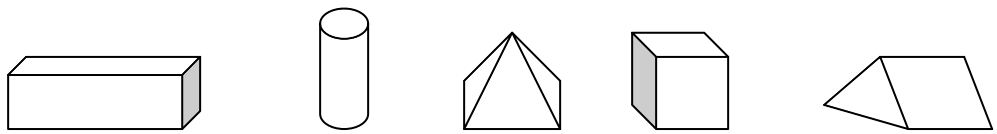


Figura 38.- Proyección en Perspectiva - Mitchelmore – Etapa 4

Hay investigaciones posteriores que han verificado los resultados obtenidos por Mtchelmore, entre ellos Gaulin (1985); Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989); Woodrow (1991); y Guillén et al. (1992), citados por (Gutiérrez, 1998).

Concluyen que generalmente los niños son conscientes de la “incorrección” de sus dibujos. Ya que los dibujos de poliedros están formados por un grupo de segmentos perpendiculares, paralelos y oblicuos que se cortan, unos segmentos pueden conducirse como *distractores* de otros.

Varios investigadores: Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner (1987), han remarcado la influencia que la posición de los objetos determina en su identificación. Ellos mencionan el concepto de *distractor*, clasificándolos en distractores de orientación y distractores de configuración.

Los *distractores de orientación* son los que permiten asumir a los prototipos como ejemplos preferibles respecto de otros. Por ejemplo: los cubos ubicados siempre en las posiciones clásicas.

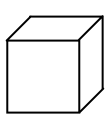


Figura 39.- Cubo clásico.

Los *distractores de configuración* se refieren a los casos que no son tomados como prototipos o modelos. Por ejemplo: para el concepto de altura de un triángulo nunca se utiliza un triángulo oblicuángulo porque la altura “queda” afuera del mismo.

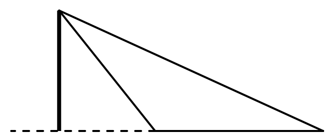


Figura 40.- Altura de un triángulo.

Los *distractores* debidos a la *representación en perspectiva* se refieren al caso de la representación en el plano con el agregado de información no relevante. Por ejemplo: en la representación bidimensional de un cubo observamos lados que se cruzan y no es así, o se cruzan en ángulos no rectos; caras que se superponen, lados no congruentes que sí lo son, ángulos no rectos que sí lo son, acarreado esto por el uso de la perspectiva.

Por otro lado Gutiérrez (1998), aclara que la habilidad para el dibujo es un factor importante que determina la capacidad de hacer representaciones de sólidos y ésta no crece espontáneamente sino que el profesor debe realizar tareas específicas en las clases, o sea, debe instruir sobre técnicas de dibujo en perspectiva.

Además debemos tener en cuenta la influencia de los factores culturales en la habilidad para realizar dibujos en perspectiva.
Existen investigaciones en diversos países de América, Asia y África registradas por Mitchelmore (1983) y Hershkowitz (1990) que así lo reportan.
Las diferencias se deben a los convenios o tradiciones sobre el modo de interpretar determinados símbolos o dibujos.

Esto reviste especial importancia al planificar la actividad del aula, pues los métodos de enseñanza exitosos en otros países pueden no serlo en el nuestro, ya que no están acordes con la enseñanza recibida y los conceptos registrados en los libros de texto.

Serio y Braccio (1998) muestran cómo los niños pequeños realizan estas construcciones, las analizadas por Mitchelmore, el cual describe el desarrollo de la habilidad de representación en perspectiva y propone cuatro etapas basándose en la teoría de Piaget.

Existen algunas técnicas que facilitan la obtención de distintas representaciones en perspectivas. Algunas de ellas utilizan ciertos tipos de papel, como el cuadriculado, en el que por estar trazadas ciertas líneas, el trazado se hace más sencillo. Analicemos algunas técnicas de representación del cubo en hoja cuadriculada:

Podemos representarlo en **Perspectiva Cavalieri**: el cuerpo es observado de frente con medidas reales y mitad de su medida en profundidad, con líneas a 45° que se logran tomando las diagonales.

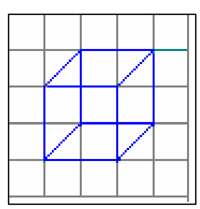


Figura 41.- Cubo en Perspectiva Cavalieri en hoja cuadriculada.

Si se busca lograr otro tipo de representación se toman ángulos diferentes, considerando la diagonal de un rectángulo de 2 x 1. Dicho ángulo se obtiene así: arctg a/b

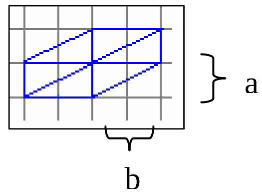


Figura 42.- Cubo en Perspectiva Cavalieri en hoja cuadriculada con diagonal 2 x 1.

Utilizando papel isométrico, se obtiene la **Perspectiva Isométrica**.

El papel isométrico es una forma más simplificada de la hoja cuadriculada. Las líneas no aparecen dibujadas pero se las puede percibir.
Permite trabajar la Perspectiva Cavalieri, y trabajar medida real en forma proyectada.

Otra forma de representación es con **uno o dos puntos de fuga**, como indicamos anteriormente en este capítulo.
Repetimos el esquema.

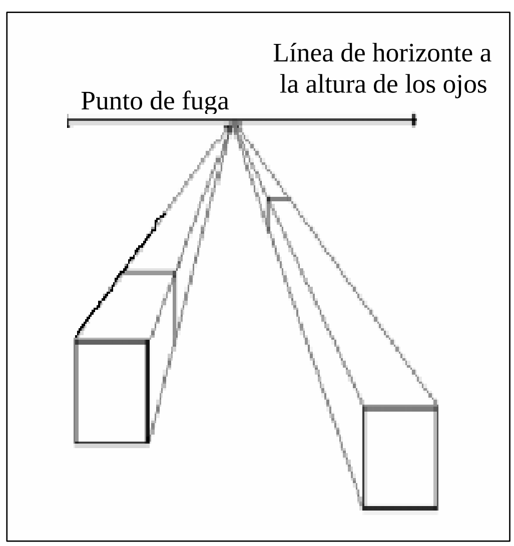


Figura 43.- Cubo - Proyección en Perspectiva con 1 punto de fuga.

¿Qué representación de los cuerpos conviene utilizar? Esta es una pregunta que podemos hacernos al tener que elegir para realizar en el aula durante una explicación. Va a depender del uso que queramos darle, para qué necesitemos esa perspectiva. Los alumnos debieran, a través de los distintos cursos de Geometría, poder apropiarse de todas para usarlas según las necesidades. Trabajar con la que se sientan cómodos pero poder interpretar las propiedades de los cuerpos a través de cualquiera de las representaciones mencionadas, que son las más utilizadas por los libros de texto y por los docentes en la pizarra.

De acuerdo con Fischbein (1993) el objeto geométrico posee dos componentes: la componente conceptual y la componente figural. La componente conceptual expresa propiedades que caracterizan una clase de objetos. La componente figural corresponde a la imagen mental que asociamos al concepto, y que en el caso de la Geometría, puede ser manipulada a través de movimientos, pero manteniendo invariantes las relaciones. La armonía entre estas dos componentes determina la noción correcta sobre el objeto geométrico.

La herramienta tecnológica como recurso para las representaciones gráficas

En el aula de matemática se intenta enseñar cómo las ideas pueden ser representadas simbólica, numérica o gráficamente y poder moverse entre esos registros interrelacionándolos. Sin duda, la tecnología ha tenido una gran influencia en el retorno a este tipo de consideraciones. Las herramientas informáticas brindan recursos que permiten favorecer la visualización en distintas temáticas de la matemática en el aula.

En el transcurso de la historia se han producido modificaciones en el ámbito educativo y también en el de los matemáticos profesionales. En este último, los cambios modifican la forma en que se constituye y valida un conocimiento, es decir, los cambios son epistemológicos (Trouche, 2005).

En opinión de Trouche (2005), se trata de mostrar dos asuntos:

- Primero, que a lo largo de la historia las herramientas han provocado modificaciones y cambios en el terreno educativo, e incluso en el de los matemáticos profesionales; en esta última área los cambios son incluso epistemológicos, ya que modifican la forma en que se constituye y valida cierto conocimiento.
- Segundo, que probablemente la aparición de las calculadoras y computadoras en la clase de matemática, no responden a una necesidad de este sector educativo, sino que forman parte de una evolución de las herramientas más general, una evolución que la sociedad está experimentando en la mayoría de sus sectores.

Borba y Villareal (2005), se refieren a la influencia que ha tenido la visualización dentro de la investigación matemática y en la enseñanza de la misma. Con el fin de lograr este objetivo se observan distintas definiciones del concepto. En algunos casos se considera a la visualización como la habilidad de traducir, interpretar y “ver” relaciones y conceptos de manera figurada, en imágenes ya sean mentales o físicas. Estas imágenes representan la base sobre la cual se apoyan estos conceptos y propiedades. Para otros autores, en cambio, la visualización es una simple representación de conceptos matemáticos ya conocidos, de acuerdo con esto pasa a tener un papel secundario, dado que no interviene en la construcción de saberes.

La visualización es considerada dentro de la matemática como una actividad de razonamiento, que permite resolver problemas y demostrar propiedades, acompañada por una expresión algebraica. De acuerdo a esta proposición, los softwares matemáticos no sólo apoyan al matemático en su trabajo sino que también modifican la matemática en su accionar. Para la matemática educativa es un proceso que permite el pasaje de los medios de representación externa a la comprensión.

En otro aspecto, la visualización se considera como un apoyo para poder lograr la abstracción. Desde este ángulo, el apoyo en imágenes es accesorio, el objetivo final es llegar a expresiones algebraicas. La computadora es rechazada en este sentido, debido a que esconde los procesos reales de la matemática, mostrando solamente los resultados.

Con respecto al uso de la tecnología en la enseñanza, se destaca el papel de la computadora como apoyo a la visualización, aunque se hace referencia también a sus limitaciones. Los problemas que se proponen para la enseñanza pueden ser trabajados conforme a las habilidades de los alumnos desde lo visual o desde lo algebraico, y generalmente con el ensamble de ambas habilidades. El desarrollo de este tipo de habilidades y la inclinación general de la segunda por sobre la primera se explica, pues tradicionalmente la escuela suele apoyarse más en lo algorítmico que en lo visual, teniendo en cuenta que lo visual es más trabajoso y basado en la creencia de la naturaleza no visual de la matemática. (Borba y Villarreal, 2005).

Consideramos que la visualización y las manipulaciones simbólicas deberían complementarse y los docentes generar propuestas educativas que involucren el uso de la computadora. Corresponde al docente crear dichas propuestas que incorporen las nuevas tecnologías enriqueciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El uso de la tecnología en la educación matemática obedece, no a una necesidad de la escuela en particular, sino que responde a un fenómeno social. Las primeras tecnologías utilizadas fueron el lápiz y el papel hasta que en el año 1975 esta situación cambió.

Los docentes por su parte, se niegan muchas veces a la incorporación de la tecnología en el aula. Justifican esta actitud debido al elevado costo de las calculadoras y a la idea de pérdida del formalismo matemático.

Debemos considerar que es ineludible la incorporación de las nuevas tecnologías, pero es un proceso que se va a ir gestando paulatinamente, a medida que las nuevas generaciones de profesores hayan manejado las mismas y los actuales profesores se animen a integrarlas.

Por otro lado, no debemos creer que la actualización se limite a la incorporación de instrumentos de última generación. Es necesario tener en cuenta otros parámetros. Su utilización es sólo instrumental.

"*Esto significa que nuestra enseñanza no debe vivir sobre la ficción de un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino sobre la imagen de un desarrollo más caótico donde no se excluyen las regresiones vinculadas con los desequilibrios*." (Artigue, 1995, pp. 135).

Existen trabajos (Mariotti, 2000), que reportan un experimento de enseñanza efectuado con estudiantes de una escuela secundaria (15-16 años) y orientado a introducir a los alumnos al pensamiento teórico, observando como se realiza este proceso.

Está enmarcado en la teoría de Vigotsky, teniendo en cuenta la construcción social del conocimiento. En el experimento se dan formas de interacción social y también, de interacción verbal en clase.

Se discute la influencia del software de geometría dinámico (Por ejemplo, Cabri Géomètre) al introducir a los alumnos al pensamiento teórico.

Podemos destacar tres componentes: contexto externo, contexto interno del estudiante y contexto interno del profesor.

El contexto externo está formado por los "objetos concretos" (lápiz y papel, computadora con el software Cabri Géomètre, signos). El desarrollo del campo de experiencia se basa en la práctica en el contexto Cabri Géomètre.

La geometría en los primeros años es intuitiva, mientras que en los siguientes es deductiva, lo cual es difícil de manejar; mientras que en el contexto Cabri Géomètre el movimiento que podemos proporcionarle a los cuerpos dibujados en perspectiva permite observar cuáles son sus elementos, características y propiedades. Se abre así la discusión que permite llegar a la justificación de determinada construcción y su análisis. Por lo tanto, el contexto interno del estudiante tiene que ver con el obstáculo que representa el pasaje de la justificación intuitiva a una justificación basada en el método deductivo.

El contexto interior del maestro resulta alterado por la tecnología que lo lleva a producir una nueva relación con el conocimiento matemático.

La geometría dinámica permite llevar a cabo dos tipos de acciones de carácter independiente:

- Tratamiento y control perceptivo basado en el reconocimiento de formas o de fenómenos como la alineación, la perpendicularidad, el paralelismo.
- Tratamiento y control por los conocimientos teóricos de geometría, que permiten explicar, predecir, producir.

Sabemos que el matemático no comunica sus resultados como los ha descubierto sino que les da una forma descontextualizada, despersonalizada. El docente efectúa el trabajo inverso, recontextualiza y repersonaliza el saber. El alumno para transformar sus conocimientos en saber deberá, finalmente, redespersonalizar y redescontextualizar el saber que ha elaborado, para poder reconocer en lo que ha hecho un conocimiento cultural que pueda reutilizar. (Brousseau, 1994).

En los cursos de enseñanza media y superiores, y también en la universidad, la Geometría es generalmente enseñada a través de un enfoque axiomático. Estos cursos pretenden que los estudiantes realicen demostraciones formales y adquieran un pensamiento deductivo, dejando de lado actividades de exploración, modelización, conjeturación, definición, argumentación y demostración, las cuales son de fundamental importancia para inducir descubrimientos.
De esta manera, los estudiantes tienen dificultades para aprender Geometría, y esas dificultades pueden tener su origen en la falta de madurez matemática para realizar las tareas y demostraciones que ese tipo de trabajo requiere y así observamos el fracaso y desinterés por el aprendizaje de esta rama de la Matemática.

Cambio de paradigma en la Geometría en el aula actual

La geometría es una de las ramas de la matemática que a lo largo de las últimas décadas ha ido perdiendo su lugar en la enseñanza. Con el transcurso de los años fue olvidada, rezagada al final de los programas de nivel primario y medio, unas veces, incluso reducida a la mínima expresión y otras, ignorada: en el mejor de los casos, sólo se trataban conceptos de geometría plana o se estudiaban las figuras y cuerpos geométricos como aplicaciones de cálculos aritméticos y ejercicios de reducción de unidades de magnitudes como longitud, superficie o volumen. Actualmente, esta tendencia parece estarse revirtiendo.

El espacio tridimensional, si bien es percibido, es una construcción a la que se llega después de algunas operaciones. La percepción espacial no es una simple actividad de copia de la realidad sino que es el resultado de actividades de organización y de codificación de informaciones sensoriales.

La construcción del espacio puede ser entendida como un proceso cognitivo de interacciones desde un espacio intuitivo o sensoriomotor que se manifiesta a través de la posibilidad de actuar, accionar en el espacio manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales... a un espacio conceptual relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas mediante sistemas de referencia, predicciones y manipulaciones mentales, tal como afirma Piaget. Esta construcción sigue un proceso tendiente a la comprensión de conceptos y el perfeccionamiento de las formas de razonamiento, por lo que el significado del verbo enseñar, en esta concepción didáctica, adquiere una dimensión distinta: se refiere a la enseñanza de nuevas formas de razonamiento, provenientes de unas estructuras mentales nuevas, más complejas que las anteriores, que no pueden ser construidas más que por el propio alumno a partir de su experiencia. Las representaciones en el plano de cuerpos tridimensionales no son sencillas y presentan a los alumnos serias dificultades, de la misma manera en que la representación plana del espacio en el arte no fue inmediata, sino que fue necesario lograr un escenario propicio para el surgimiento de la geometría proyectiva.

La Geometría es considerada como una herramienta para el entendimiento, tal vez la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Por otra parte, la geometría como una disciplina, se apoya en un proceso de formalización que se ha venido desarrollando por más de 2000 años creciendo en rigor, abstracción y generalidad.

En los últimos años, la investigación en geometría ha sido estimulada por nuevas ideas tanto desde el interior de las matemáticas como desde otras disciplinas, incluyendo la ciencia de la computación (Blanco, 2005).

Capítulo 4

Los alumnos y sus representaciones

En este capítulo se describe una serie de dificultades que un grupo de alumnos manifestó al intentar describir y argumentar acerca de las características de ciertos cuerpos geométricos.

Para ello, comenzaremos analizando la utilización de figuras prototípicas en el aula de geometría desde los primeros años de la escuela y posteriormente presentando la experiencia llevada a cabo con un grupo de estudiantes en relación a la representación de poliedros y la argumentación sobre las características de los mismos.

a.- Influencia de los prototipos

En un entorno geométrico existen muchas dificultades para la aprehensión de conceptos. Algunas debidas a la comprensión del lenguaje matemático mismo, otras debidas al uso de distintas notaciones, uso de símbolos y otras de tipo visual debidas a los prototipos que se utilizan recurrentemente en el aula de matemática a lo largo de las distintas etapas de la educación.

En las clases de Geometría, tratando de mejorar la comprensión de los conceptos enseñados, se dan ejemplos modelizadores de esos conceptos (figuras tipo o prototipos), que si bien son necesarios, tienen sus ventajas y desventajas.

Esos ejemplos presentados de manera recurrente se han incorporado en los estudiantes y muchas veces se transforman en obstáculos para construir apropiadamente el concepto.

En el momento que necesitamos que los estudiantes construyan un concepto geométrico, se recurre a esos ejemplos gráficos que contienen todas las características del concepto a enseñar, lo que Vinner ha definido como atributos relevantes. (Vinner, 1991). Los atributos relevantes son aquellas propiedades del objeto que les son propias y que lo definen como tal.

Por tener estas condiciones es que el profesor de Matemática recurre en sus clases a este tipo de ejemplos. Son los que Hershkowitz ha llamado *prototipos*. (Hershkowitz, 1990).

El problema con estos prototipos es que los alumnos consideren que son las únicas opciones válidas y que recurran a ellos cada vez que hacen alusión al objeto correspondiente.

En las clases de Geometría observamos algunas situaciones en las que se observan estas cuestiones.

En el caso del triángulo, por ejemplo, es prácticamente imposible encontrar en los libros, triángulos que no sean equiláteros o isósceles (en estos uno de sus lados actúa como base), salvo cuando definimos triángulos oblicuángulos o escalenos.

En los triángulos rectángulos la hipotenusa no actúa como base, generalmente es el cateto menor. Casi siempre existe una buena diferencia entre los catetos.

En el caso del cuadrado con un lado como base y en el caso del rectángulo apoyado sobre uno de los lados más grandes.

Para el caso del cubo siempre se utiliza este prototipo, apoyado sobre una de sus caras:

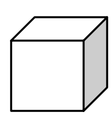


Figura 44 – Cubo.

El cubo de “Nécker”, generalmente, no se reconocerá como cubo:

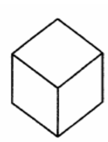


Figura 45 – Cubo de Nécker.

Para el caso de las pirámides son siempre rectas y con una de sus caras actuando como base y ésta generalmente cuadrada. Esta no se reconocerá como pirámide:

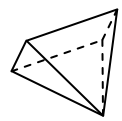


Figura 46 – Pirámide.

Observamos que estos prototipos funcionan como la *definición misma del cuerpo.* Desde ya que los prototipos presentan gran cantidad de ventajas, pues permiten identificar las propiedades de los cuerpos. Pero también surgen dificultades que provienen de la creencia de que los estudiantes consideren que los prototipos son las únicas opciones válidas.

Rey (2003), realiza una amplia investigación sobre materiales didácticos, los cuales son utilizados para enseñar a los alumnos formas y propiedades de los objetos geométricos. Concluye que estos materiales introducen a los alumnos a los objetos geométricos en general, de un modo rígido. Ya que, como apuntábamos antes, los triángulos presentados son, generalmente, isósceles o equiláteros y tienen bases horizontales.

Para el caso del cubo se utiliza el prototipo apoyado sobre una de sus caras siempre, y para el caso de las pirámides son siempre rectas y con una de sus caras actuando como base y ésta generalmente cuadrada, como mencionamos en párrafos anteriores.

La mayoría de los alumnos de grados intermedios, tienen dificultades al nombrar los cuerpos geométricos. Muchos de ellos piensan que son deformables o maleables. Por ejemplo, un prisma rectangular podría ser transformado en un cubo, *“sentándose en él“*. (Rey, 2003).

Debemos tener en cuenta que los objetos geométricos, figuras o cuerpos, son entes abstractos y por ello pueden ser comprendidos a partir de sus definiciones y su representación es la concretización de un objeto, o sea su imagen, pero no es en realidad ese objeto geométrico. La diferencia entre concepto y representación fue desarrollada por Douady (1986) a partir del doble status de los objetos geométricos.

"*El profesor puede entonces consolidar estos descubrimientos, formalizando los conceptos y haciendo una presentación estructurada. Estos conceptos, que se generaron con el carácter de `herramienta´, se consolidan con carácter de `objeto´, por medio de ejercicios que los requieren, consolidando así el conocimiento individual en un conocimiento social*." (Douady, 1986).

b.- Experiencia con alumnos

Dadas las dificultades observadas en cuanto a la representación gráfica de cuerpos geométricos en el plano, se realizó una experimentación con alumnos de 4° año Bachiller, para evidenciar los problemas existentes.

Pareció interesante elegir este grupo de alumnos pues habían trabajado en la materia Dibujo en primer año, nociones de perspectiva. La misma experiencia se llevó a cabo en otro 4° año de especialidad comercial que no había tenido nociones de perspectiva por no tener Dibujo como asignatura, con la finalidad de indagar si estos conocimientos previos eran importantes en el proceso de representación.

Llevamos a cabo la siguiente experiencia:

1.- Dibuja un cubo:

2.- Dibuja una pirámide:

3.- Un tapón para tres orificios

Ejemplo: En una tabla se han practicado tres orificios. De un material cualquiera se hizo un tapón que sirve para tapar los tres orificios, es el siguiente:

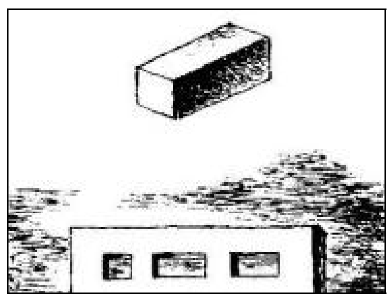


Figura 47 – Tabla con orificios y tapón.

Veamos ahora una tablilla con 3 agujeros: uno cuadrado, otro rectangular y otro con el formato indicado en la figura. La pregunta es:

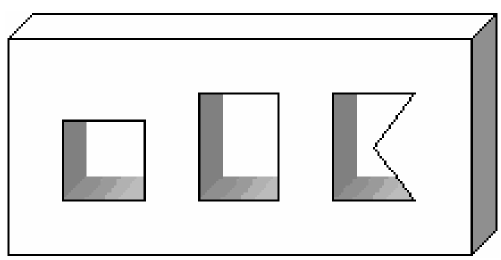


Figura 48 – Tabla con orificios.

¿Puede existir un tapón cuya forma sea tal que permita tapar estos tres agujeros? O sea, idea la forma de los tapones para esta tablilla. Se trata, en esencia, de hacer una pieza a partir de sus tres proyecciones.

Describe y dibuja.

Resultados de la experimentación

Los alumnos resolvieron la actividad presentada. Podemos observar algunas respuestas escaneadas que muestran la primera actividad:

1.-

Corresponde a la estudiante H, de 4to Bachiller.

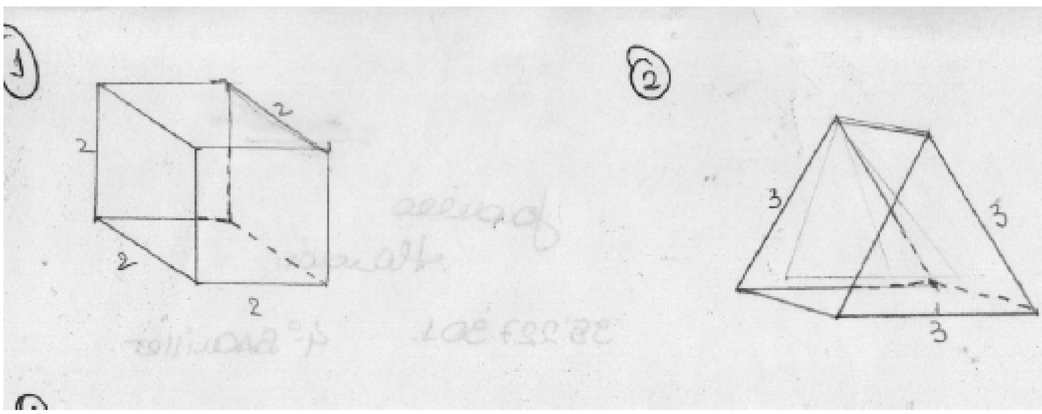


Figura 49 – Actividad 1 y 2, alumna H.

Observamos en la representación anterior algo que llamó nuestra atención: los alumnos zurdos dibujaron los cubos proyectados hacia la izquierda, contrariamente a las representaciones que presentaron los alumnos diestros. En este caso, la pirámide fue dibujada como una “carpa” en lugar del dibujo correspondiente a uno de los prototipos usuales, también dibujada en sentido contrario a lo que se encontró en alumnos diestros. Entrevistada la alumna indicó que la pirámide la realizaba igual que el cubo: un triángulo delante, otro atrás y luego unía los vértices.

Vemos que en el dibujo indica la igualdad de las aristas al poner las medidas. En este caso dibujaron los cuerpos transparentes, dando así idea de profundidad.

2.-

Corresponde a la estudiante C, de 4to Comercial.

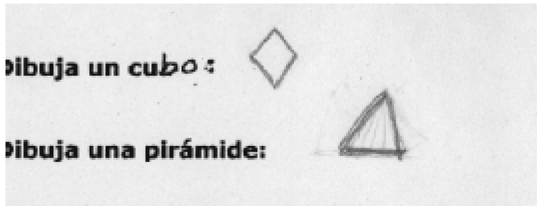


Figura 50 – Actividad 1 y 2, alumna C.

En este caso vemos que la estudiante dibuja figuras geométricas, no cuerpos geométricos, en lugar de un cubo un rombo y en lugar de una pirámide un triángulo. No diferencia cuerpos en el espacio de figuras en el plano.

Este tipo de representación fue obtenida en la totalidad de los estudiantes de este curso, o bien afirmaron que no podían realizar las representaciones solicitadas.

3.-

Corresponde a la estudiante M, 4to Bachiller.

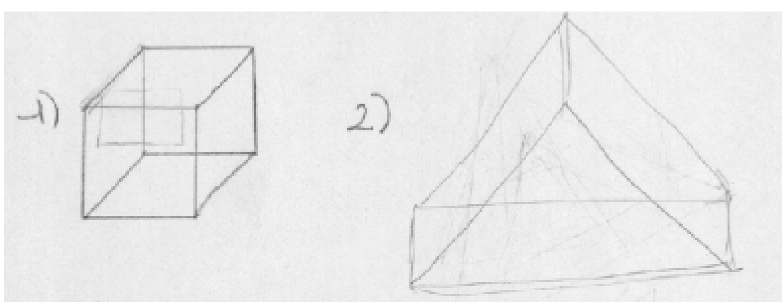


Figura 51 – Actividad 1 y 2, alumna M.

Aquí observamos el cubo bien dibujado pero no así la pirámide, aparece otra vez la “carpa”, o sea un prisma recto de base triangular, aunque su base no es la cara apoyada en el plano horizontal.

4.-

Corresponde a la estudiante A, 4to Bachiller.

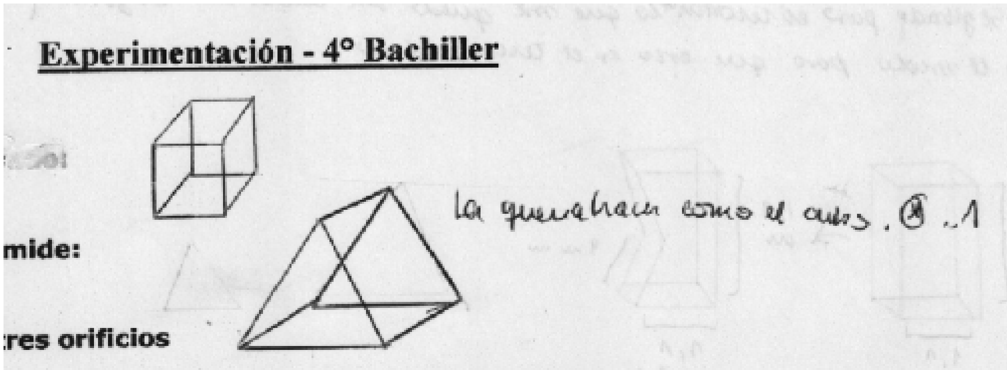


Figura 52 – Actividad 1 y 2, alumna A.

Igual que en el caso anterior, pero además la alumna aclara cómo realiza el dibujo de la supuesta "pirámide", afirmando "la quiero hacer como el cubo".

5.-
Corresponde a la estudiante L, 4to Bachiller.

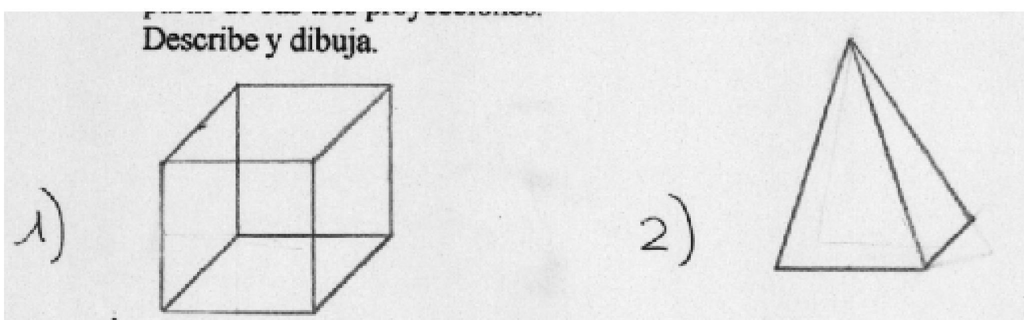


Figura 53 – Actividad 1 y 2, alumna L.

En este caso vemos bien dibujados los cuerpos, pero en el caso de la pirámide sin efecto de profundidad.

En las respuestas se encontraron ciertas regularidades que se resumen en el siguiente cuadro:

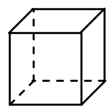
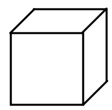
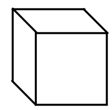
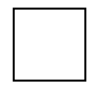
Actividad 1					Otros	Total
Cantidad de respuestas	9	12	4	5	10	40

Figura 54 – Cuadro de Actividad 1.

Resultó notable la presencia de cubos orientados de dos maneras. Preguntando a los alumnos, hicimos las siguientes observaciones: observamos que en el caso de alumnos zurdos, dibujaban el cubo con inclinación hacia la izquierda, mientras que los diestros realizaron el cubo con las mismas características que el prototipo usualmente utilizado en la escuela.

Posteriormente, solicitando a personas tanto diestras como zurdas el diseño de un cubo, se observó que en su mayoría la orientación de los cubos dada por los diestros fue:

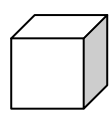


Figura 55 – Cubo diestro.

Mientras que los zurdos (4 de los 5 zurdos) presentaron el cubo de esta forma:

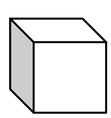


Figura 56 – Cubo zurdo.

En relación a la segunda actividad presentada, los resultados pueden resumirse de la siguiente manera:

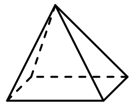
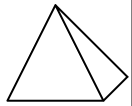
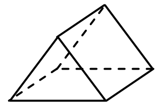
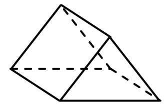
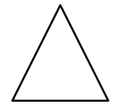
Actividad 2						Otros	Total
Cantidad de respuestas	7	17	4	3	5	4	40

Figura 57 – Cuadro de Actividad 2.

Observamos pirámides orientados de dos maneras, como figura en el cuadro, los alumnos zurdos dibujaban la pirámide con inclinación hacia la izquierda, mientras que los diestros realizaron la pirámide con las mismas características que el prototipo usualmente utilizado en la escuela.

Luego solicitamos a personas tanto diestras como zurdas el diseño de una pirámide, y también pudimos constatar que en su mayoría la orientación de las pirámides dada por los diestros fue:

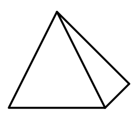


Figura 58 – Pirámide diestra.

Mientras que los zurdos, por lo general presentaron:

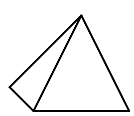


Figura 59 – Pirámide zurda.

Por otra parte, algunos alumnos confundieron cuerpos en el espacio con figuras en el plano. Este hecho se puso de manifiesto en las presentaciones de figuras planas como representaciones de cuerpos tridimensionales. Sin embargo la cantidad de estudiantes que tuvieron esta dificultad fue menor de la que se esperaba y se trató de aquellos que provenían de la especialidad comercial. Una de las causas de este resultado fue que estos alumnos, tal como manifestaron en las entrevistas que tuvieron lugar con posterioridad a la experimentación realizada, no han tenido como asignatura Dibujo, y nunca han abordado explícitamente las representaciones planas de cuerpos geométricos tridimensionales. A pesar de esto, se observa en los resultados de la experimentación que ciertas dificultades subsisten.

Llamó la atención y nos pareció muy interesante el hecho de que al dibujar la pirámide, de 40 alumnos 8 dibujaron “carpas” o sea, prismas rectos de base triangular, apoyados sobre una de sus caras laterales, y no pirámides como se observa en la tabla de la actividad 2. Esta representación surge como una extensión de la representación de un cubo, ya que los estudiantes "representaron" las caras delantera y trasera de la pirámide y luego unieron el vértice que no pertenece a la base. Se trata de la transferencia de un conocimiento construido previamente y que funciona satisfactoriamente (construcción del cubo), a la representación de otro poliedro (construcción de la pirámide). En esta transferencia, no se logra el resultado deseado, ya que este poliedro no presenta una arista paralela a la base y por lo tanto la estrategia de representación, fracasa.

Otra característica notable es que la totalidad de los estudiantes que intervinieron en la experimentación representaron pirámides de base cuadrada, no apareciendo ninguna pirámide cuya base sea otro polígono.

La presencia de prototipos se pone de manifiesto fuertemente en esta experimentación en la aparición de ciertas representaciones características de los libros de texto y de las aulas escolares, como las posiciones de los cubos o pirámides, con una base apoyada, y en la presencia de cubos y pirámides transparentes en algunos casos. Teniendo en cuenta este análisis, entre las dificultades que se presentan a los alumnos respecto de la comprensión de conceptos en un contexto geométrico, vemos que son debidas a la interpretación del lenguaje matemático mismo, así como también a aquellas cuestiones de tipo visual debidas entre otros factores a los prototipos o modelos.

Vemos que estos prototipos, cubos y pirámides, más allá de sus bondades, se tornan en dificultad de ser considerados como únicos ejemplos válidos del cuerpo a representar, impidiendo detectar cubos o pirámides en otras posiciones.

En el caso de la tercera actividad, lo que se buscó fue comparar de qué manera logran los estudiantes representar y describir cuerpos geométricos no estándares, o sea que no se trata de cuerpos que aparezcan explícitamente en los diseños curriculares, pero que pueden obtenerse de operar con otros conocidos.

A continuación podemos observar algunas respuestas escaneadas que muestran la tercera actividad:

1.-
Como para las actividades 1 y 2 corresponde a la estudiante H, 4to Bachiller.

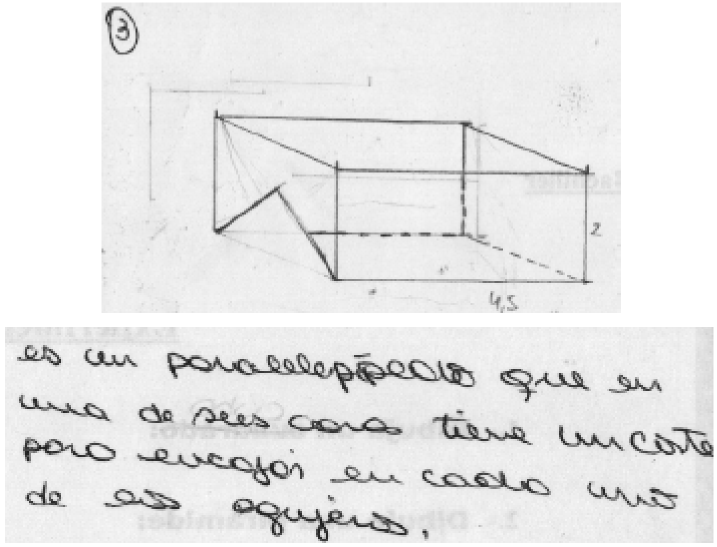


Figura 60 – Actividad 3, alumna A.

2.-

Corresponde a la estudiante E.

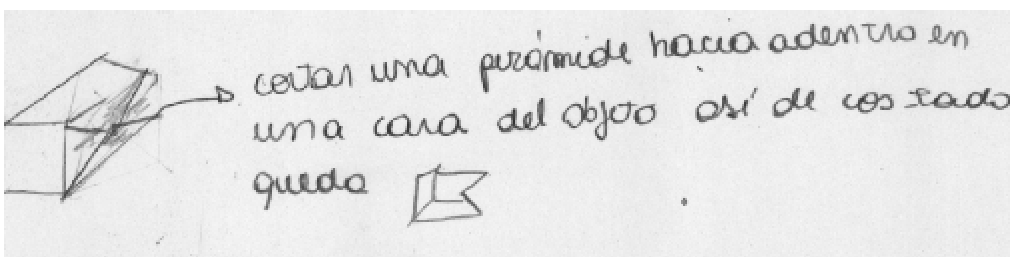


Figura 61 – Actividad 3, alumna E.

Esta alumna tiene idea de lo que va a hacer pero no lo puede dibujar ni expresar correctamente, pero lo intenta.

3.-

Corresponde a la estudiante B.

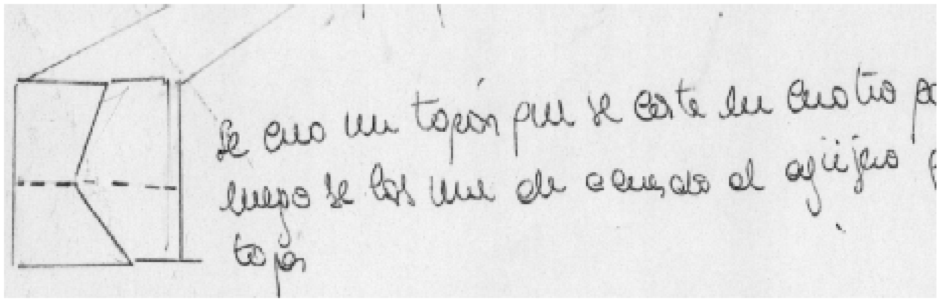


Figura 62 – Actividad 3, alumna B.

No se entiende que quiere hacer, ni puede dibujar correctamente.

4.-

Corresponde a la estudiante C.

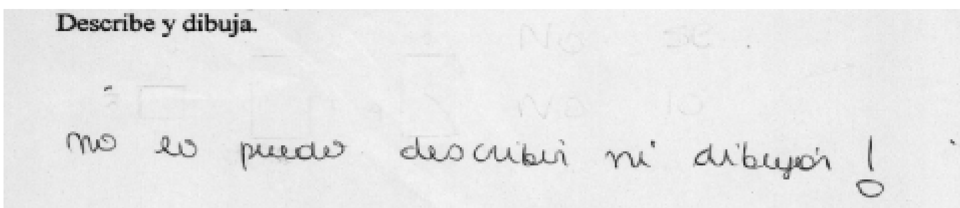


Figura 63 – Actividad 3, alumna C.

Está claro que faltan habilidades para el dibujo y la argumentación.

5.-

Corresponde a la estudiante M.

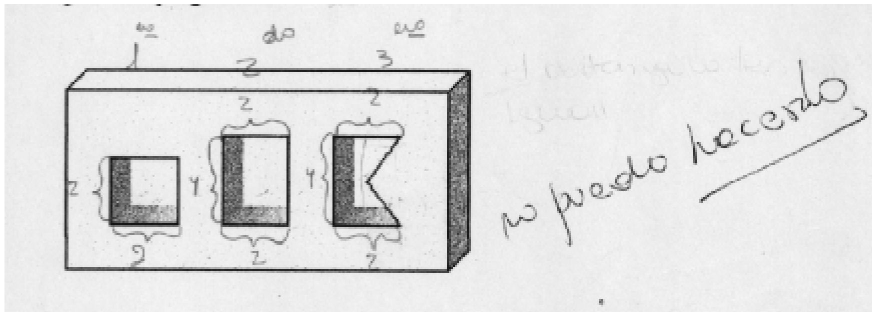


Figura 64 – Actividad 3, alumna M.

Observamos que no puede resolver el problema planteado como sucede en el caso anterior.

6.-

Corresponde a la estudiante J.

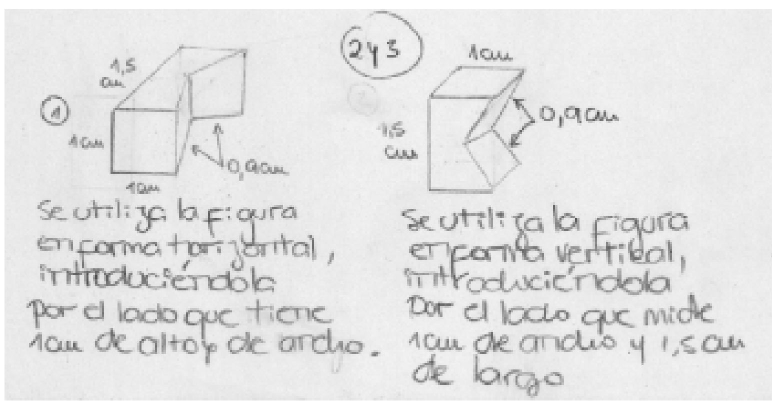


Figura 65 – Actividad 3, alumna J.

Vemos en este caso que resuelve perfectamente la situación presentada, efectuando el dibujo y la argumentación correspondiente.

7.-

Corresponde a la estudiante L.

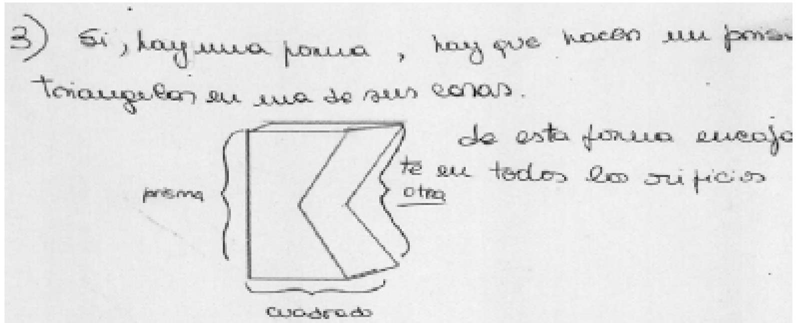


Figura 66 – Actividad 3, alumna L.

Otro ejemplo donde el dibujo y la argumentación son los adecuados.

Los alumnos resolvieron la actividad presentada. En las respuestas se encontraron ciertas regularidades que se resumen en el siguiente cuadro:

Actividad 3	Dibuja bien	Dibuja parcialmente bien	Dibuja mal	No dibuja	Total	% sobre total
Describe bien	2	1			3	8%
Describe parcialmente bien	8	4			12	30%
Describe mal	2	1	11		14	35%
No describe	3	4	1	3	11	27%
Total	15	10	12	3	40	100%
% sobre total	37%	25%	30%	8%	100%	

Figura 67 – Cuadro Actividad 3.

En este caso, se detectaron mayores dificultades en la representación, si se compara con los otros dos cuerpos con los que se trabajó en las actividades precedentes. Sin embargo, las mayores dificultades se presentaron al intentar describir y argumentar las características de ese cuerpo y cómo podría obtenerse.

Observamos que las argumentaciones son irrelevantes, no ofrecen ninguna aclaración importante, de modo que podrían suprimirse sin que se perdiera información.

Cuando se les preguntó por qué no describían comentaron que no sabían cómo expresarlo, como nombrar los elementos de los distintos cuerpos. El hecho de que no se tratara de un cuerpo conocido, que tuviera un nombre conocido por los estudiantes se constituyó en un obstáculo que muchos de los alumnos no pudieron superar.

Como nos aclara (D´Amore, 2005) refiriéndose a la interpretación de "contrato didáctico". En primer lugar la escuela es "directiva y evaluativa". En este caso le pedimos al alumno que dibuje y describa, y el alumno piensa que debe hacerlo con "rigor", de acuerdo a lo que supone espera el maestro. En segundo lugar el alumno estima que en Matemática debe hacer "cálculos", por lo tanto lo que se les pedía no era Matemática.

El fin de utilizar las entrevistas con los estudiantes, por lo tanto, es para averiguar, por una parte, sus creencias sobre su aprendizaje y, por otra, la más importante para nosotros, conseguir información sobre el nivel de comprensión matemática de los estudiantes y sobre la utilización de estrategias visuales en el proceso de solución de los problemas que le fueron planteados.

No hubiera sido posible, de no dialogar con los estudiantes, entender el motivo por el cual no eran capaces de argumentar, nombrar los elementos de los distintos cuerpos, distinguir las propiedades de los mismos.

Conclusiones extraídas del trabajo realizado en el aula

A partir de los resultados de la experimentación realizada, se detecta claramente la presencia de prototipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, como el cubo o la pirámide. También se notan influencias de prototipos "diestros" y "zurdos", dejando abierta la posibilidad de estudio y detección de estos.

Podemos mostrar pocas representaciones no clásicas que en los cuadros de resumen se colocaron en el ítem “otros”, observando que, en esos casos, los alumnos presentan dificultades para su reconocimiento como tales, mostrando que "aprenden" las representaciones prototípicas, pero no por eso logran una verdadera comprensión del espacio y de sus representaciones bidimensionales.

Otra característica notable que se puso de manifiesto en esta experimentación fue la manera en la que los estudiantes intentaron transferir la manera en la que representan un cubo a la representación de una pirámide. Dibujar la cara de adelante, luego la de atrás y finalmente unir los vértices de ambas por medio de trazos paralelos. Esta estrategia que había resultado exitosa en el caso del cubo, no lo fue en el caso de la pirámide, pero por no haber visualizado correctamente la misma, no fueron capaces de darse cuenta del error cometido.

Si bien las respuestas a las actividades planteadas no fueron satisfactorias en todos los casos, cabe destacar que el hecho de que los estudiantes tuvieran conocimientos previos de nociones de perspectiva, ayudó a la obtención de mejores resultados, ya que aquellos alumnos que no tenían dichas nociones previas dibujaron directamente figuras planas y no dibujos que correspondieran a representaciones en el plano de cuerpos tridimensionales, mostrando representaciones que según la clasificación de Mitchelmore presentada en el capítulo anterior, se encuentran en la etapa esquemática plana, o en el mejor de los casos en la etapa esquemática espacial. Los conocimientos previos de perspectiva, permitieron a los alumnos que participaron de esta experiencia realizar representaciones pre-realistas y realistas de los cuerpos geométricos solicitados.

En el trabajo con representaciones planas, deben tenerse en cuenta ciertas dificultades en el trazado e interpretación de las mismas. En el caso de un cuerpo tridimensional como el cubo, por ejemplo, debemos tener en cuenta que:

- los lados se cruzan en la representación y no es así en la realidad,
- las caras se superponen y esto no es real,
- los lados no parecen congruentes y sí lo son,
- los ángulos no son rectos y en la realidad lo son.

Es muy importante tener en cuenta que estos ejemplos son las *representaciones del objeto*. Y recordar que los objetos geométricos son entes abstractos y factibles de comprender a partir de sus definiciones y, sus representaciones, son la concretización de un objeto que no lo es y por lo tanto no cumple con las características totales del mismo.

Para modelizar conceptos de los cuerpos geométricos definidos es importante:

- trabajar sobre las definiciones de los mismos
- dar gran cantidad de representaciones (prototípicas o no)
- efectuar descripciones verbales de los cuerpos geométricos definidos
- explicitación de las diferencias entre el objeto abstracto (cuerpo geométrico) y las modelizaciones concretas del mismo (representaciones).

Capítulo 5

Los libros de texto y las representaciones

En este capítulo proponemos analizar el tratamiento que reciben las representaciones de poliedros en los libros de texto a los que acceden los estudiantes. Observamos que los dibujos estereotipados de estos cuerpos influyen en la valoración realizada por los jóvenes durante su reconocimiento.

a.- Poliedros. Representación actual en los libros de texto

El libro de texto representa para el docente una fuente de recursos, pues es una guía para sus explicaciones y presenta una lista de ejercicios que los alumnos pueden resolver en la clase o en la casa. Incluso posee autoevaluaciones que constituyen una guía para que el profesor arme sus propias evaluaciones. Esta es la visión que comúnmente se tiene de los libros de texto.

El tema cuerpos geométricos y su clasificación aparece en los programas de primer año. Se trabaja la superficie lateral, total y el volumen de los mismos, el desarrollo de los poliedros regulares y se realizan problemas de aplicación de fórmulas. Figura como último capítulo del programa.

En los libros de texto se refleja el enfoque dado a las representaciones de cuerpos tridimensionales listas para ser enseñadas y, por ende, una parte de lo que denominamos *matemática escolar*. El texto sigue un orden lógico que no tiene mucho que ver con los problemas a los que se enfrentaron los investigadores, con los sucesos vividos en la construcción de los conceptos, apareciendo éstos descontextualizados y distantes de los avatares de su génesis (Farfán, 1995).

Por ello, realizamos una ligera revisión de algunos de los más utilizados en Argentina, con el fin de observar la manera en la que éstos abordan el tema que nos preocupa.

Nuestra intención es obtener información sobre la existencia de elementos didácticos, ausentes o no en la currícula, que pudieran propiciar la construcción de cuerpos tridimensionales utilizando la perspectiva, que permitan salvar los inconvenientes que surgen de las dificultades observadas para representar y argumentar.

La idea consiste en proporcionar información relativa a la enseñanza de la representación y argumentación de cuerpos tridimensionales en nuestros días, eligiéndose para ello los manuales que se consideran los más utilizados.

Para el análisis de los contenidos de los libros de texto, seguimos las categorías propuestas por Ruiz Higueras (1998). Las variables analizadas han sido las siguientes:

- Forma de presentación de los conceptos teóricos, observando si éstos se presentan antes de los ejercicios y problemas quedando estos como aplicaciones de los conceptos o si, por el contrario, se inicia el tema planteando una serie de problemas para cuya solución se presentan los conceptos como herramientas.
- Ejemplos propuestos, prestando atención a si son netamente geométricos o se introducen otros contextos donde funcionan como aplicaciones a la vida cotidiana o a otras disciplinas.

- Ejercicios propuestos, en cuanto a tipo, observando por ejemplo, si se trata de ejercicios de índole geométrica, o para modelizar problemas de la vida cotidiana o de otras disciplinas.

El análisis se realizó para los dos textos que se utilizan en el colegio en el que se realizaron las experiencias que se reportan en esta tesis. En cada curso el docente recomienda un libro de texto y los alumnos lo utilizan tanto para la institucionalización de los temas vistos en clase y la realización de actividades propuestas por el docente.

El libro que se analiza a continuación es ***Carpeta de Matemática 8*** *de Garaventa – Legorburu – Rodas – Turano*, de Editorial Aique. Se utiliza para alumnos de último grado de la escuela primaria (12 años), y primer año de la escuela secundaria (13 años).

En primer lugar se hace una revisión de los problemas que vieron en la escuela primaria a manera de diagnóstico, a través de una variada ejercitación.
Cálculo de áreas, armado de una tabla con las características de cada cuerpo presentado para su análisis, presentación de desarrollos para que los alumnos indiquen a qué cuerpo pertenecen cada uno.
Luego se dan las definiciones haciéndose la distinción entre cuerpos poliedros, redondos y de revolución.
Respecto de la ejercitación se presentan a los alumnos una serie de cuerpos que ellos tienen que clasificar.
Observamos que los ejercicios y problemas quedan relegados a aplicaciones de los conceptos dados en primer lugar.

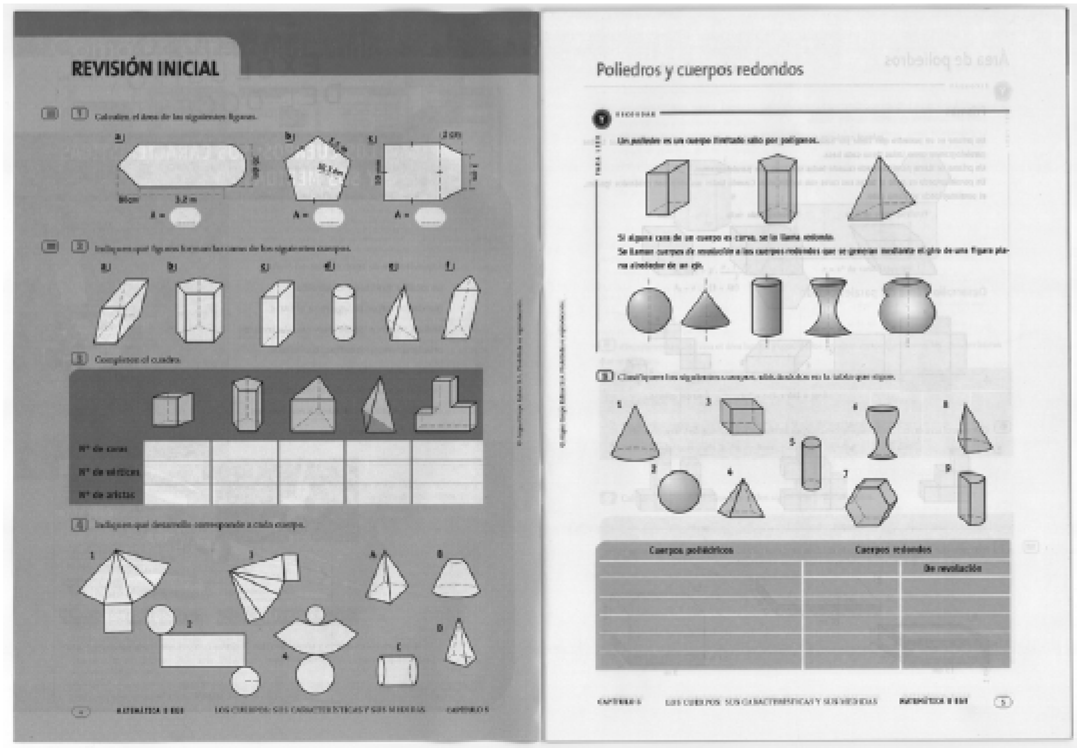


Figura 68 – Carpeta de Matemática 8 de Garaventa – Legorburu – Rodas – Turano.

A continuación se recuerdan definiciones de prisma, cubo, desarrollo y área lateral y total de un prisma regular.

Se observa también que la ejercitación se da después de los conceptos teóricos.

Toda la ejercitación está referida a los cuerpos geométricos, no presentando aplicaciones en esta parte a problemáticas no matemáticas.

Las representaciones de poliedros que presenta este libro de texto difieren de los textos tradicionales que se utilizaban en nuestro país y encontramos en él que se van incorporando representaciones que no son los prototipos usualmente presentados. En estos se ven las representaciones de proyección paralela y sus desarrollos planos. Sin embargo, a pesar de este cambio, llamó nuestra atención que todos los poliedros están apoyados sobre una de sus caras en un plano horizontal.

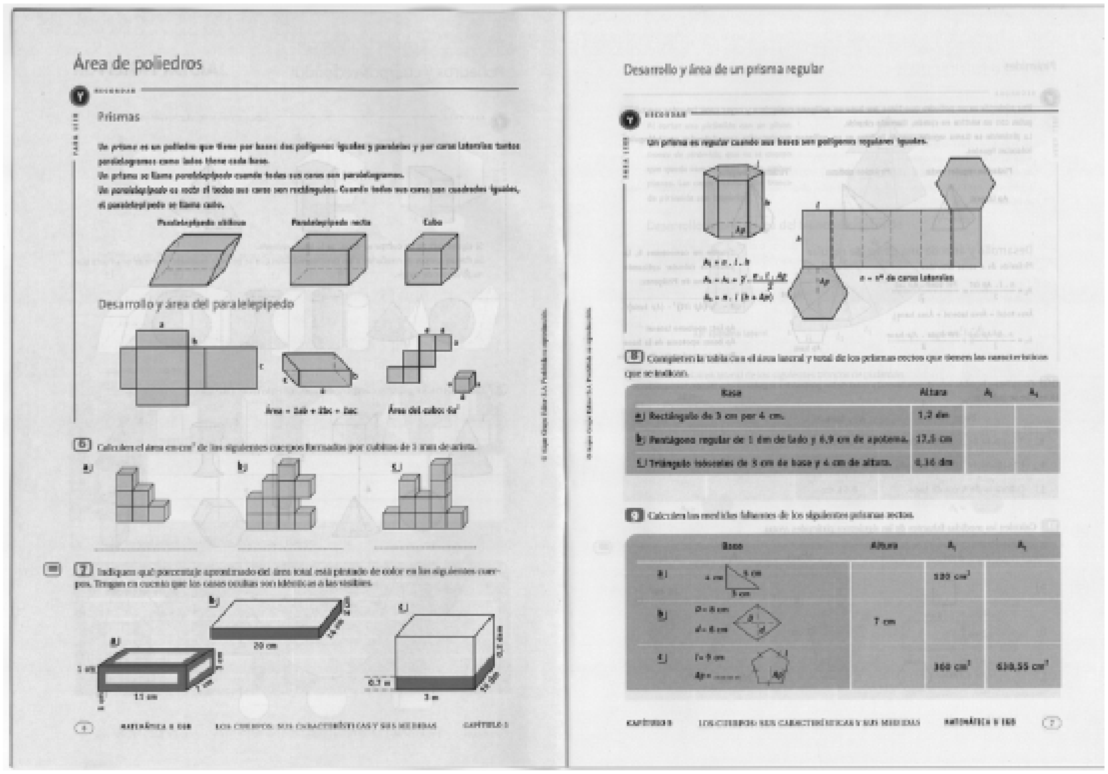


Figura 69 – Carpeta de Matemática 8 de Garaventa – Legorburu – Rodas – Turano.

Posteriormente, se define la pirámide, su desarrollo, área, tronco de pirámide, áreas lateral y total y ejercicios de aplicación, también a continuación de los conceptos teóricos.

Ya aquí aparecen, además de problemas aplicados a los cuerpos geométricos, otros problemas de modelización aplicados a la vida cotidiana.

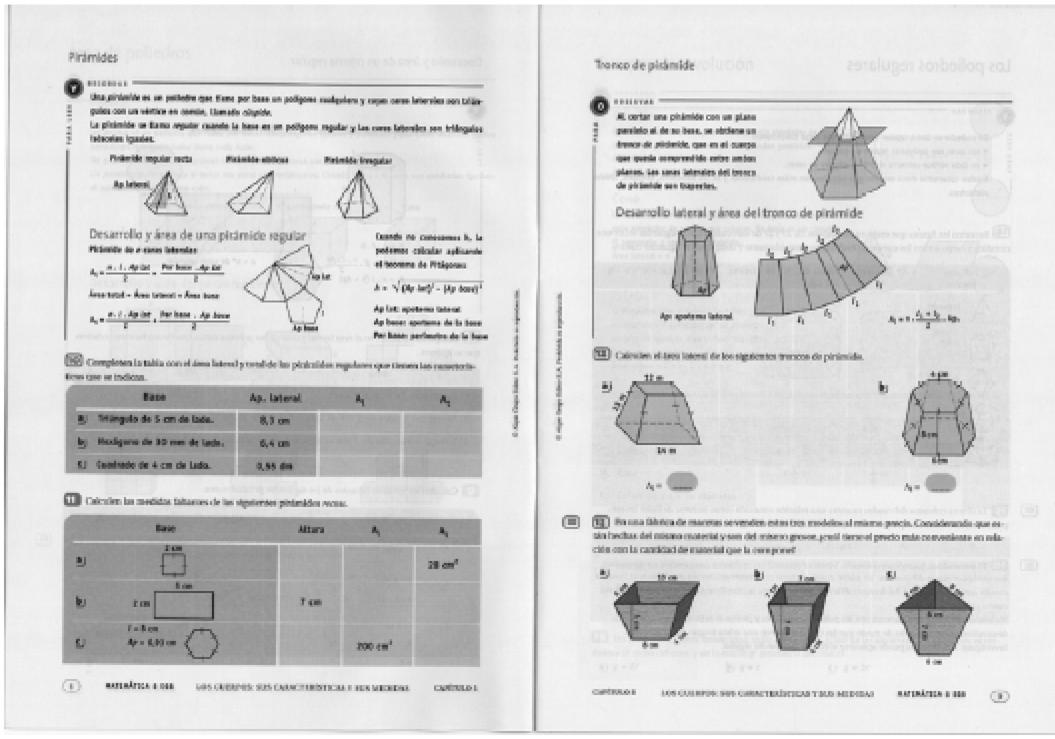


Figura 70 – Carpeta de Matemática 8 de Garaventa – Legorburu – Rodas – Turano.

Después se define el poliedro regular y las condiciones que cumple. En el libro que analizamos se presentan en un anexo los desarrollos de los poliedros regulares y se les pide que los armen, previo pegado en cartulina y observándolos detenidamente completen la tabla que figura en el texto.

Observamos que se les pide que investiguen sobre el teorema de Euler y la posible relación de los poliedros regulares con el teorema de los cuatro colores, a partir de sus desarrollos.

Esta aplicación es muy interesante ya que obliga al estudiante a investigar.

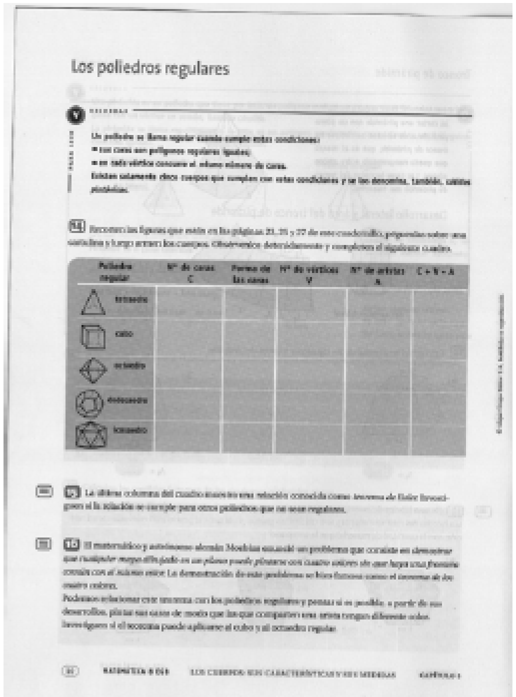


Figura 71 – Carpeta de Matemática 8 de Garaventa – Legorburu – Rodas – Turano.

Luego presenta ejercitación de volúmenes de poliedros, dando previamente las fórmulas del cubo, prisma y pirámide, para luego aplicarlas a problemas geométricos y a problemas de la vida cotidiana.

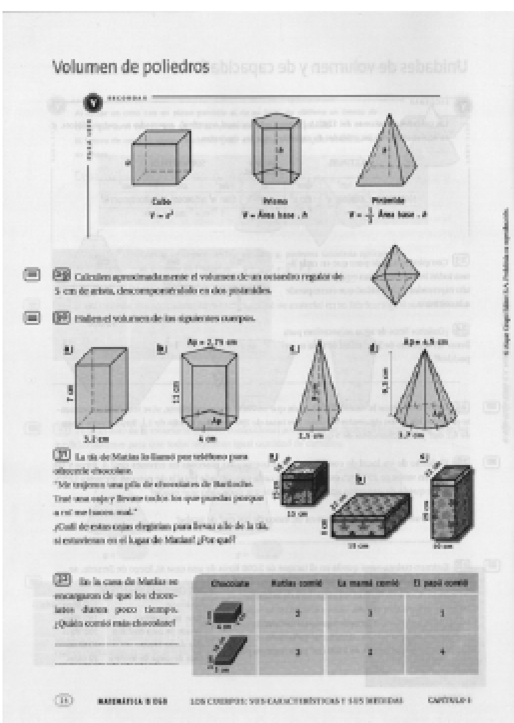


Figura 72 – Carpeta de Matemática 8 de Garaventa – Legorburu – Rodas – Turano.

A continuación analizamos el libro ***Matemática Activa 8*** de Puerto de Palos – Casa de Ediciones. También se utiliza para alumnos de último grado de la escuela primaria y primer año de la escuela secundaria.

En primer lugar hace una clasificación de los cuerpos geométricos, como el libro anterior, en cuerpos poliédricos y redondos. Luego clasifica los poliedros en prismas y pirámides.

Observamos que los ejercicios y problemas quedan relegados a aplicaciones de los conceptos presentados.

Aquí se presentan cuerpos geométricos y se pide al alumno que los identifique y nombre sus elementos. Luego observando el desarrollo de los poliedros regulares se les pide que armen un cuadro con los elementos de cada uno de los cuerpos.

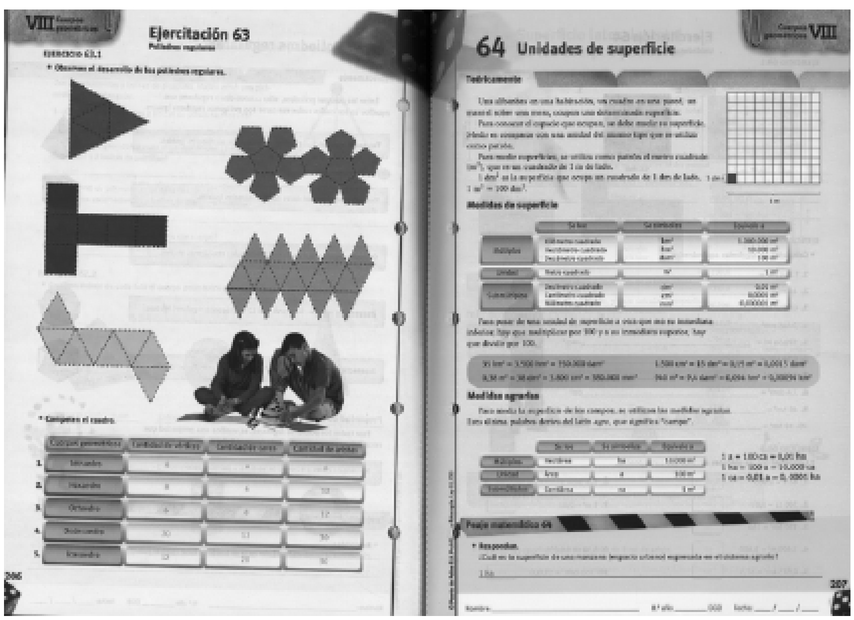


Figura 73 – Matemática Activa 8 de Puerto de Palos.

Posteriormente trabaja con medidas de superficie y resuelve ejercitación netamente matemática, de equivalencia de sistemas de medidas.

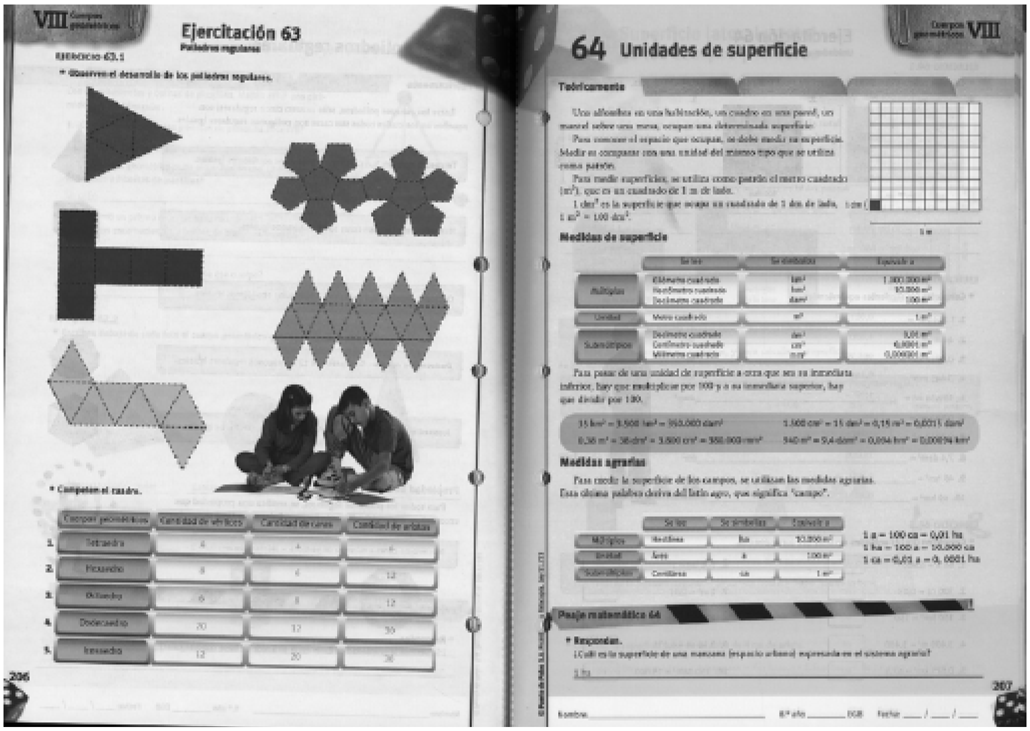


Figura 74 – Matemática Activa 8 de Puerto de Palos.

Luego da las definiciones de superficie lateral y total de los cuerpos poliédricos.

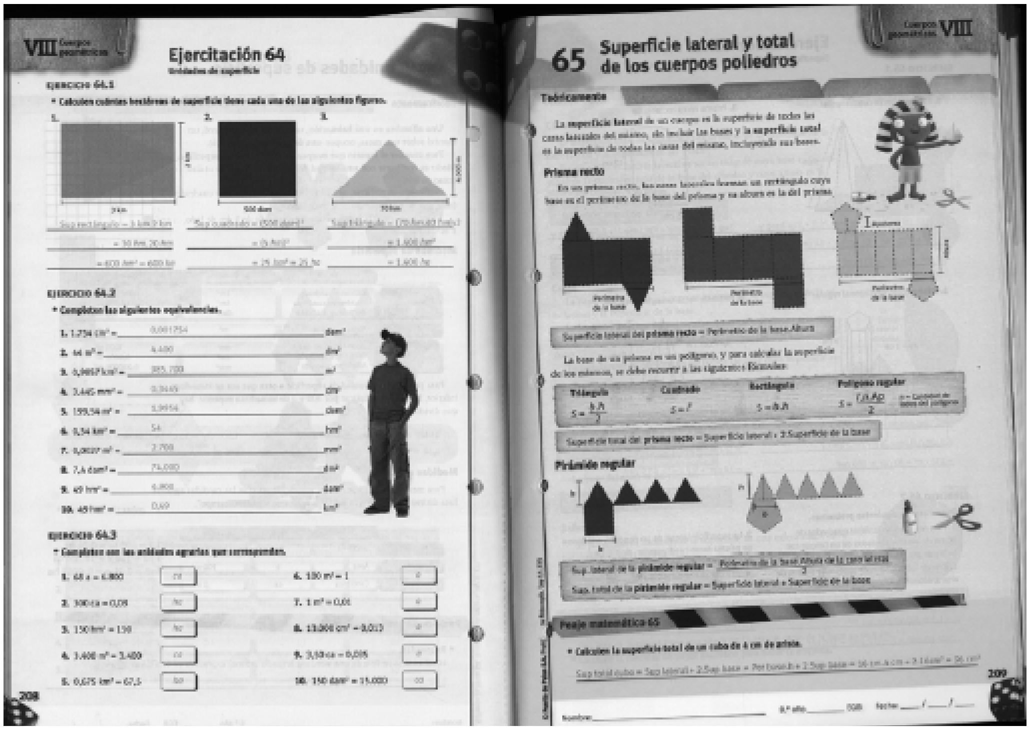
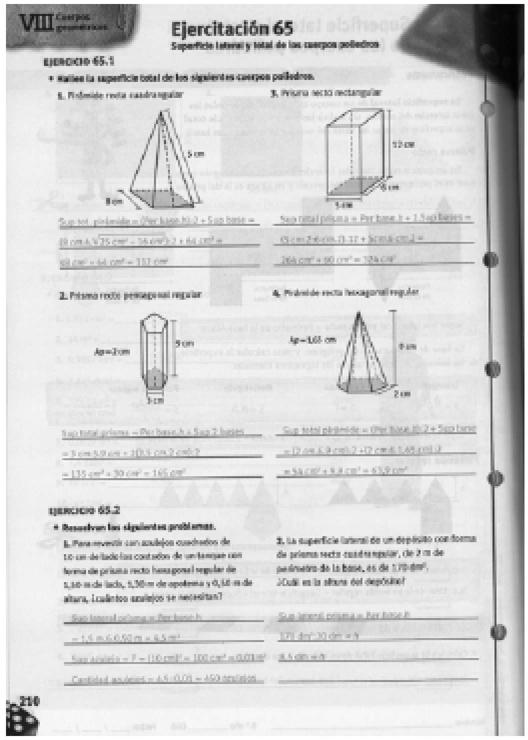


Figura 75 – Matemática Activa 8 de Puerto de Palos.

Los ejercicios propuestos, en cuanto a tipo, son de índole algebraica, esto es, requieren de calculadoras, y también aparecen ejercicios para modelizar fenómenos. Observamos que se utiliza el registro gráfico para interpretar los problemas.

Las construcciones usan la proyección paralela no la perspectiva con punto de fuga, como en todos los libros de Geometría y utilizan figuras geométricas estereotipadas (figuras geométricas empleadas con mucha frecuencia en los libros de texto). Poseen características visuales relacionadas con la posición, carentes de importancia para el concepto pero que influyen en la apreciación de los alumnos.



VIII Cuerpos geométricos

Ejercitación 65

Superficie lateral y total de los cuerpos poliedros

EJERCICIO 65.1

- **Hallen la superficie total de los siguientes cuerpos poliedros.**

1. Pirámide recta cuadrangular
2. Prisma recto pentagonal regular
3. Prisma recto rectangular
4. Pirámide recta hexagonal regular

EJERCICIO 65.2

- **Resuelvan los siguientes problemas.**

1. Para revestir con azulejos cuadrados de 10 cm de lado los costados de un tanque con forma de prisma recto hexagonal regular de 1,50 m de lado, 1,50 m de apotema y 0,50 m de altura, ¿cuántos azulejos se necesitan?

2. La superficie lateral de un depósito con forma de prisma recto cuadrangular, de 2 m de perímetro de la base, es de 170 dm². ¿Cuál es la altura del depósito?

210

Figura 76 – Matemática Activa 8 de Puerto de Palos.

Conclusiones

La presencia de prototipos se pone de manifiesto en la aparición de ciertas representaciones características de los libros de texto, como las posiciones de los cubos o pirámides, con una base apoyada, y en la presencia de cubos y pirámides transparentes en algunos casos.

Vemos que estos prototipos, cubos y pirámides, más allá de sus bondades, presentan la dificultad de ser considerados como únicos ejemplos válidos del cuerpo a representar, impidiendo detectar cubos o pirámides en otras posiciones.

A partir de los resultados de la experimentación realizada, se detecta claramente la presencia de prototipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, como el cubo o la pirámide. También se notan influencias de prototipos "diestros" y "zurdos", dejando abierta la posibilidad de estudio y detección de estos.

En general, observamos que la componente conceptual de los cuerpos está bien delimitada. Sin embargo, observamos que los dibujos estereotipados de estos cuerpos influyen en la valoración realizada por los alumnos durante sus observaciones. Esto fue analizado en el capítulo anterior.

De acuerdo con Fischbein (1993), la componente figural no permanece totalmente limitada por la conceptual. Algunos alumnos hacen referencia a la posición de los cuerpos (una característica de la componente figural) para justificar sus conceptos.

Sería conveniente que los alumnos apliquen sus conocimientos conceptuales de las figuras geométricas sobre dibujos no estereotipados de éstas. No está fallando el conocimiento de la componente conceptual de la figura, sino que observamos una mayor influencia (durante la valoración de las representaciones gráficas) de la componente figural.

Trataremos de analizar las características de algunas secuencias didácticas que proponemos pues consideramos que permitirán superar este tipo de inconvenientes.

Capítulo 6

Representando poliedros en el aula

Hemos dicho anteriormente que es muy importante la habilidad de profesores y estudiantes para la obtención de representaciones planas adecuadas de cuerpos tridimensionales y viceversa, para la construcción de cuerpos geométricos a partir de sus representaciones planas.

La más problemática para los estudiantes es, sin duda, la realización de representaciones planas. Debemos tener presente que para obtener una buena representación, ésta debe transmitir al que observa igual cantidad de información que el cuerpo tridimensional que representa (Gutiérrez, 1998).

Con el objetivo de intentar lograr en los estudiantes un mejor trabajo con cuerpos geométricos y sus representaciones en el plano, se diseñaron algunas actividades que se pusieron en práctica en el aula y que a continuación se describen y reportan.

Asimismo se reporta en este capítulo una entrevista que se llevó a cabo con una estudiante para indagar sus opiniones y experiencias en relación a las representaciones planas de cuerpos geométricos.

Una experiencia en el inicio del estudio de los poliedros utilizando material concreto

Los alumnos de 1º año de la escuela media, no poseen en general en nuestro país, experiencia previa en la representación de cuerpos geométricos en el plano. En los primeros años de la escuela, si bien se comienza trabajando con cuerpos geométricos sencillos (cubos, pirámides, paralelepípedos) en el preescolar, al comenzar a abordar la geometría formalmente, se centra en el trabajo con figuras planas y los cuerpos geométricos son abandonados. Los contactos que han tenido con cuerpos geométricos, son a través de material concreto, pero no realizado por ellos, sino entregados por sus maestros. Por estas causas, se eligió un aula de 1° año para la realización de esta experiencia.

La experiencia constó de siete etapas, que no se realizaron en el mismo módulo de clase, debido al tiempo que insumieron. La primera y segunda etapa corresponden al primer módulo, tercera y cuarta a otro módulo de la misma semana, la quinta y la sexta en los dos módulos de la semana siguiente y la séptima en el posterior.

Primera etapa

Se propuso al curso, separado en grupos de 4 o 5 integrantes, la construcción de figuras tridimensionales cerradas y limitadas por polígonos con distintos materiales: plastimasa, sorbetes, cartulina, maderitas, etc. En particular, se buscaba la construcción de distintos poliedros, pero los que se obtuvieron fueron cubos, paralelepípedos y pirámides de base cuadrada, por ser los poliedros más usuales y de más fácil construcción.

Cada grupo trabajó con distinto material y una vez lograda la construcción correspondiente, se les solicitó responder a las siguientes preguntas:

- *¿Cuáles son sus elementos?*
- *¿Qué características tienen?*
- *¿Qué dificultades encuentran para poder construirlos?*

Ante estas preguntas y con la utilización de materiales concretos, los estudiantes no presentaron dificultades en responder correctamente. Las mayores dificultades reportadas por los estudiantes se refirieron a la utilización de materiales concretos en relación al pegado o moldeado del mismo.

El primer nivel de Parsziz se logró correctamente, en relación a la construcción de los cuerpos geométricos, o sea la representación concreta de los mismos. En los casos en que se utilizó cartulina, fue más sencilla la identificación de las caras que en los modelos realizados con varillas, pero igualmente se lograron identificar al comparar unos modelos a otros.

Segunda etapa

En nuestra experiencia en el aula, al realizar en clase el cubo de la Figura 29, formado por varillas y pedirles a los alumnos una representación del mismo, uno de los estudiantes, espontáneamente utilizó su teléfono celular para fotografiarlo y así obtener la representación pedida. Inicialmente, pareció notable e inesperada esta actitud, ya que esperábamos que lo dibujaran. Sin embargo, reflexiones posteriores sobre este hecho nos hicieron comprender que en él se encontraba implícito algo importante: el grado de asimilación que poseen los jóvenes de los recursos tecnológicos y su utilización.

Figura 77 .- Cubo hecho con varillas.

La estrategia utilizada permitió obtener una representación plana que corresponde a una proyección en perspectiva y tal como afirma Parsziz, existe información que se pierde en ella. Sin embargo, para los estudiantes esta representación pareció acorde a la realidad ya que sus códigos corresponden a los que ellos manejan usualmente, permitiendo además solucionar el problema de la dificultad del dibujo correspondiente.

Una vez que se construyeron diversos poliedros y se obtuvo la representación fotográfica de ellos, estábamos en condiciones de dar una definición de poliedro. Para poder enunciarla se transitaron las etapas de visualización y estructuración descriptas por Pallascio, hasta llegar a la etapa de traducción.

El análisis de las construcciones realizadas anteriormente y la distinción del subconjunto de los cuerpos cerrados permiten la elaboración del concepto del poliedro. El docente a cargo del curso estuvo abierto a aceptar definiciones equivalentes de un mismo concepto.

Tercera etapa

Posteriormente, en la siguiente actividad propuesta en la semana posterior, se avanzó respecto de la visualización para trabajar la traducción y determinación. Es decir, se orientó a lograr comunicar y organizar las ideas; lo que habilitó el camino para lograr clasificaciones.

- *Describa un poliedro de diferentes maneras. Coteje su descripción con las de sus compañeros.*
- *Proponga una descripción de un poliedro y solicite a un compañero que lo construya.*

Primeramente, los alumnos discutieron grupalmente acerca de las consignas dadas. En un principio, en las descripciones aparecían elementos propios de la construcción que había realizado ese grupo. Al compartir descripciones, estos elementos se fueron debilitando hasta ir desapareciendo.

Cuarta etapa

A continuación, se les pidió a los alumnos que trataran de descubrir regularidades respecto de los elementos del poliedro: caras, vértices, aristas, etc. El descubrimiento de regularidades permitiría elaborar distintos criterios de clasificación de poliedros.

Los alumnos, si bien realizaron algunas hipótesis, no lograron enunciar ninguna regularidad, como se les solicito. Por ello, se les propuso la siguiente regularidad:

- *Existen poliedros convexos y poliedros no convexos.*

Y se les preguntó:

- *¿A partir de qué observaciones pueden descubrirse estas regularidades?*

Respondieron que los no convexos correspondían a poliedros deformados, en los que alguno de sus vértices había "entrado" en el poliedro, quizá por efecto de un golpe. Esta afirmación correspondía en realidad a afirmar que uno de sus vértices era interior. Pero como las caracterizaciones de los poliedros que habían obtenido, aunque no lo habían indicado, correspondían a poliedros convexos, se les hizo la observación de la importancia de contemplar en las definiciones condiciones que correspondieran a lo que se estaba caracterizando y que descartaran otros objetos.

Quinta etapa

Nuevamente se insistió en la elaboración de conjeturas a partir de regularidades. Nuestro objetivo era lograr trabajar la fórmula de Euler para poliedros convexos.

- *Cuente vértices, caras y aristas del poliedro que construyó y trate de relacionar estas cantidades.*
- *¿Cómo podría probar esa relación, que se denomina fórmula de Euler vinculada a los poliedros convexos?*

Los alumnos tras contar los vértices, aristas y caras de su poliedro, propusieron como forma de probar la fórmula de Euler, recurrir a contar las cantidades de estos elementos que tenían todos los poliedros presentes en el aula, construidos por los otros grupos, no llegando a esbozar la importancia de las demostraciones.

Sexta etapa

Sobre los logros obtenidos en esta etapa intuitiva se debe desarrollar la etapa lógica, según Alsina, caracterizada por la validación de conjeturas por parte del alumno a partir de la percepción espacial. Con el propósito de reflexionar sobre estas ideas se puede proponer más actividades relacionadas con regularidades presentes en los poliedros.

Nuevamente a partir de la etapa intuitiva se propuso la construcción de poliedros con caras regulares congruentes en los que en cada vértice concurrían el mismo número de aristas. Para ello se les dio a cada grupo plantillas para construir uno

de los cinco poliedros regulares. Se los dijo a los alumnos que recibían el nombre de poliedros regulares y se conjeturó que no era posible que existieran otros.
La demostración correspondiente fue realizada por la profesora del curso, que guió las reflexiones de los alumnos.

Figura 78 .- Poliedros regulares

.

Séptima etapa

En un intercambio con los alumnos de 4to Bachiller, los alumnos de 1º que estaban participando de la experiencia visitaron el laboratorio de informática en el que alumnos de 4º habían programado representaciones en perspectiva de cubos. Los alumnos de 4º les mostraron cubos en distintas posiciones.

Por ejemplo, una estudiante dudó al presentarle la siguiente figura, no reconocía un cubo en la misma.

Pero al mover la representación, reconoció al cubo. Al rotar este cuerpo en la computadora, esta posición junto con las siguientes, producto de las rotaciones pedidas, tomaron significado para ella.

Entre los de 1º, surgieron las siguientes observaciones por parte de ellos:

- *Vemos a los poliedros con más posiciones diferentes sobre la pantalla, que sobre los libros de texto.*
- *Es como tener muchas fotos de los cubos*
- *Vemos fotos de todas las partes, aún de lo que está atrás*

En otras palabras, reconocieron la posibilidad que les otorgaba la tecnología para formar imágenes dinámicas y reconocer en ellas las distintas visiones de los cubos.

En los intercambios de ambos cursos, reconocieron la presencia de ciertas representaciones que "no se ven bien" debido a los *distractores* que surgen en la *representación en perspectiva,* en la representación bidimensional de un cubo observamos lados que se cruzan y no es así, o se cruzan en ángulos no rectos; caras que se superponen, lados no congruentes que sí lo son, ángulos no rectos que sí lo son, acarreado esto por el uso de la perspectiva.

Esta etapa de la experiencia permite ver cómo la computadora puede resultar beneficiosa en la adquisición de habilidades de visualización en el entorno de la geometría tridimensional.

Una experiencia con alumnos, utilizando geometría dinámica para representar gráficamente poliedros

En esta experiencia se trabajó con un grupo de alumnos de 4° año Bachiller, fuera del horario de la asignatura matemática, en la clase de computación. El grupo estaba formado por 5 alumnos interesados en la realización de este tipo de actividades. Se trata del grupo que mencionamos en la séptima etapa de la secuencia de los alumnos de 1° año que acabamos de describir. Este grupo tiene buen manejo de las herramientas informáticas y habían recibido nociones de utilización del software Cabri Géomètre. En matemática habían desarrollado temas básicos de geometría del espacio, entre ellos reconocimiento de elementos de poliedros, propiedades y cálculo de áreas y volúmenes. No habían realizado representaciones de estos cuerpos geométricos y sólo conocían las que presentan los libros de texto.

Primera etapa

Comenzamos la experimentación, indicando a los alumnos que construyeran un cubo. Para ello se les indicó:

- Construye un cuadrado ABCD
- Por el vértice A traza una recta oblicua, y por B, C y D, rectas paralelas a ella.
- Sobre dichas rectas determina segmentos iguales.
- Píntalos y oculta las rectas. Queda determinado un cubo.

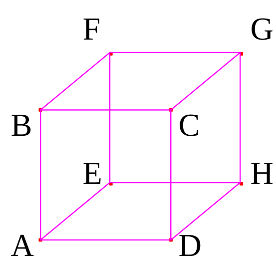


Figura 79.- Cubo en Cabri Géomètre.

Esta representación se encuentra en Perspectiva Cavalieri o Paralela, aunque no es la manera usual en que la hacemos con lápiz y papel.

Se le pidió a los estudiantes que efectuaran movimientos observando que no siempre el cuerpo representado parece un cubo, como sucede con el esquema de la izquierda de la figura 81.

Luego se movió dicha representación y se observaron en distintas posiciones: mirándolo de arriba, de costado, de frente enfocando una cara, de frente enfocando una arista, etc.

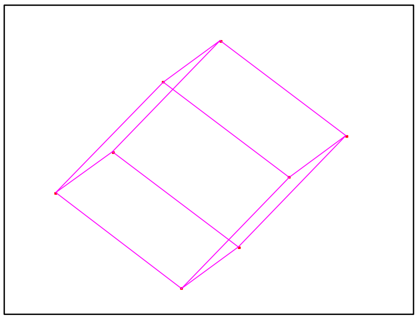
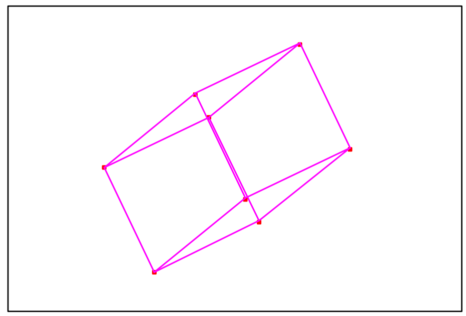



Figura 80.- Cubo en Cabri Géomètre con Perspectiva Paralela.

En los cuerpos graficados, se vio que en el de la derecha, algunas caras parecen rombos. Es importante que los alumnos aprendan a graficar guiados por el profesor para lograr una completa comprensión de los cuerpos geométricos y sus propiedades.

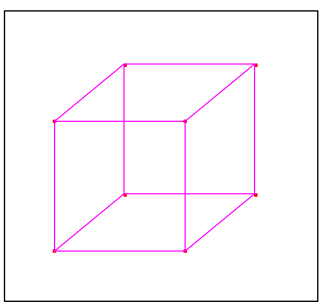
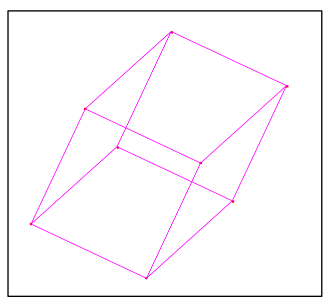



Figura 81.- Otros cubos en Cabri Géomètre con Perspectiva Paralela.

Segunda etapa

Comenzamos esta etapa, indicando a los alumnos que construyeran nuevamente un cuadrado:

- Construye un cuadrado ABCD
- Traza una recta horizontal exterior al cuadrado. La llamaremos horizonte
- Marca un punto en el horizonte
- Une ese ponto con cada uno de los vértices del cuadrado con rectas oblicuas
- Elige puntos sobre las rectas oblicuas de manera que determinen sobre ellas segmentos iguales cuyo otro extremo sea un punto del cuadrado anterior
- Une los cuatro puntos elegidos mediante segmentos determinando otro cuadrado-

Esta construcción corresponde a una Perspectiva con un punto de fuga.

Al mover el punto elegido sobre el horizonte, los alumnos observaron la manera en la que se transforma la representación del cubo.

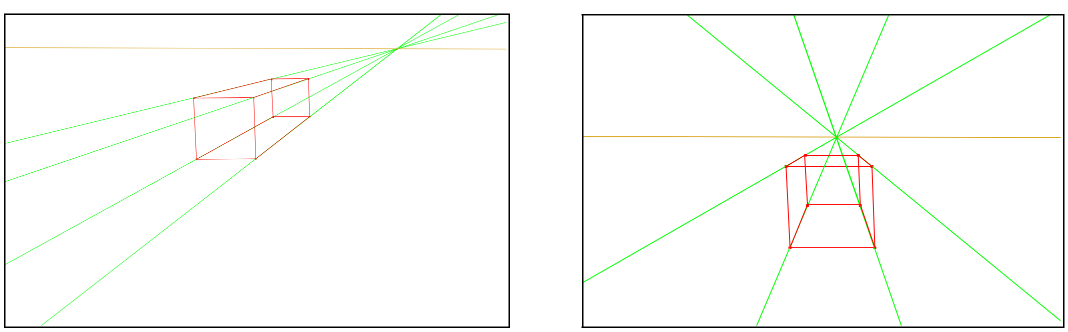


Figura 82.- Cubos en Cabri Géomètre con Perspectiva con un punto de fuga.

Tercera etapa

Con instrucciones similares a las anteriores, solicitamos a los alumnos que construyeran la representación de un cubo a partir de dos puntos sobre el horizonte. Se trata de una representación en Perspectiva con dos puntos de fuga.
Al solicitarles mover esos puntos, se observó las características de la figura transformada.

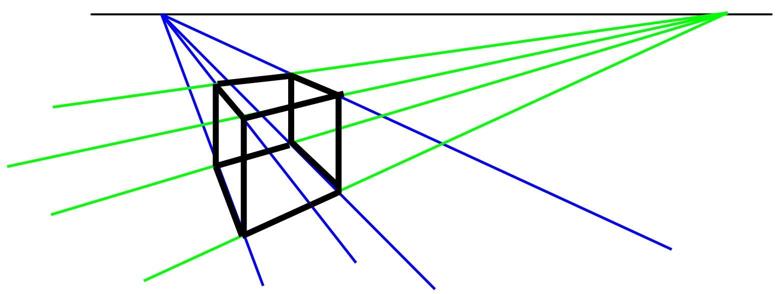


Figura 83.- Cubo en Cabri Géomètre con Perspectiva con dos puntos de fuga.

Al igual que en los casos anteriores, modificando (arrastrando) el/los puntos de fuga sobre la línea del horizonte, automáticamente, se redefinieron los valores y se obtuvo redibujado el nuevo cubo en perspectiva, con lo cual pudimos observar este cuerpo en distintas posiciones, sus características y propiedades.
Con estos movimientos, no sólo se obtuvieron prototipos, sino que fue posible observar el cubo en distintas posiciones, favoreciendo a un conocimiento real del mismo.

Algunos comentarios de las experiencias realizadas

Los destinatarios de las dos secuencias descriptas no fueron los mismos, ya que en el primer caso estábamos trabajando con alumnos que no habían abordado previamente el tema poliedros y en el segundo, sí. En el caso de los alumnos de 1° año, se partió del uso de material concreto y se transitaron los niveles de

Parsziz en relación a las representaciones de cuerpos geométricos, obteniéndose primero una representación concreta y posteriormente una representación bidimensional, que podría considerarse se logró construir en varias etapas. En la representación concreta, los alumnos debieron representar el objeto geométrico "cubo" por medio de una representación tridimensional realizada con material concreto. La Representación bidimensional se obtuvo en su primera etapa por medio de la fotografía, mostrando cómo los estudiantes actuales aprenden a utilizar la tecnología con fines para los cuales no ha sido diseñada. Esta representación tuvo para nosotros mucho valor, ya que nos enseña una vez más que si bien los avances tecnológicos no surgen en general en función de su aplicación en la enseñanza, pueden entrar en el aula y llegar a constituirse en herramientas valiosas. La utilización de una fotografía para realizar una representación gráfica de un cuerpo geométrico, solucionó para los alumnos de este curso las dificultades de sus técnicas de trazado. Posteriormente reconocieron las representaciones usuales en libros de texto y finalmente al tener contacto con las representaciones computacionales que les presentaron los alumnos de 4° año, comprendieron a través de su movimiento las ventajas de éstas, ya que reconocieron que podían acceder al cubo en sus distintas posiciones, pudiendo así "ver" muchas representaciones con facilidad. Esta posibilidad, si es aprovechada en el aula, permitirá lograr una mejor visualización de los cuerpos representados, ya que la manera de evocarlos no consistirá en volver al prototipo presentado en pizarrones y libros de texto, sino que permitirá incorporar una visión integral del cuerpo geométrico.

El recurso informático aquí actuó complementando los aportes de las representaciones tradicionales.

En el caso de los alumnos de 4° año, se buscó por una parte poner a su alcance las técnicas proyectivas de representación de cuerpos geométricos. Esto hubiera sido posible realizarlo a través de recursos de lápiz y papel, pero la potencialidad de la geometría dinámica les permitió acceder fácilmente no a una única representación del cuerpo, en este caso el cubo, sino a la posibilidad de poder acceder a su movimiento, buscando aquellas posiciones que les satisfacían más. Con Geometría dinámica podemos generar figuras y cuerpos utilizando la manipulación directa, definición de macros, etc. Por ejemplo, el caso del cubo en Perspectiva con un punto de fuga. Bastará con modificar (arrastrando) el punto de fuga sobre la línea del horizonte, para que automáticamente, se redefinan los valores y tengamos redibujado el nuevo cubo en perspectiva.

Desde el punto de vista afectivo, al término de esta experiencia, podemos realizar también algunos comentarios. Los estudiantes se entusiasmaron con el programa y las posibilidades que éste les brindaba. Algunos alumnos que tenían dificultades en la materia, expresaron que el programa les permitía "trabajar despacio" y entender lo que estaban haciendo, sin las presiones de los alumnos más aventajados. Cada uno tenía actividades adecuadas a sus habilidades.

También expresaron que trabajando a mano alzada, el repetir los procesos hasta obtener el resultado pedido "los aburría", y terminaban dejando la tarea inconclusa. Además consideraron interesante y "divertido" el poder generar otras figuras a partir de las "figuras base" como la del cuadrado, el poder crear applets de Java y colgarlas en la Web.

Creemos muy importante aprovechar los intereses de los alumnos por las nuevas tecnologías y aplicarlas en el aula de matemática.

Volviendo a la primera experiencia presentada, aunque no se refirieron específicamente a las representaciones planas de los poliedros, algunas de las etapas presentadas se orientaron a su utilización, ya que al tener que buscar regularidades, conjeturarlas, probarlas y demostrarlas, se hizo uso de las mismas, ya sea a través de sus representaciones concretas o bidimensionales o bien de las ideas que los alumnos iban visualizando.

Consideramos que a través de este tipo de actividades en las que el alumno combina representaciones con materiales concretos y geometría dinámica, es posible que el estudiante rompa los obstáculos clásicos del manejo de representaciones de cuerpos en el espacio, ya que puede lograr ampliar la manera en la que logra visualizarlos.

Acerca de cubos y sus representaciones. Reporte de una entrevista a una estudiante

Después de la experiencia anterior llevada a cabo con un grupo de estudiantes de escuela media, resolvimos realizar una entrevista a una estudiante adulta en la que intentaríamos reproducir una actividad similar, pero intentando indagar acerca de sus opiniones y visión acerca de las representaciones planas de los cuerpos geométricos.

La alumna que interviene en esta experiencia no posee conocimientos previos de geometría proyectiva. Es estudiante de un postítulo de Especialidad en Informática Educativa y su título de base es Profesora de Biología. Está aprendiendo a manejar ciertos elementos de geometría dinámica con Cabri en la asignatura Recursos tecnológicos aplicados a la enseñanza de las ciencias de esa carrera.

Se comienza la entrevista en la que participa la alumna A y su docente P con un diálogo acerca de las representaciones planas de figuras tridimensionales:

P: ¿Qué significa para vos representar un cuerpo geométrico en el plano?

A: Es dibujarlo, de forma que al mirar el dibujo, sepamos cómo es el cuerpo, es mostrar en el dibujo cómo se ve.

P: ¿Sólo podemos representar cuerpos geométricos?

A: No, podemos representar cualquier cosa que exista.

P: ¿Qué diferencia hay entre un objeto que representás y su representación? ¿es lo mismo?

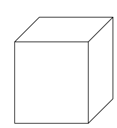
A: ... (piensa) *Bueno, es lo mismo en cuanto a que tengo que mostrar en la representación cómo es la cosa que dibujo, pero no es la misma cosa. Me pasa cuando dibujo una célula, el dibujo no es una célula.*

P: ¿Esa cosa sería el objeto y en la representación intentamos plasmar sus características? ¿Pero uno es el objeto y lo otro es cómo lo representamos? ¿a eso te referís?

A: Sí

P: Si querés representar un cubo, ¿cómo lo hacés?

A: (dibuja el clásico cubo)



P: ¿Por qué lo dibujás así? ¿No podrías mirarlo desde otro ángulo?

A: Sí, pero así me enseñaron a dibujarlo.

P: ¿Quién? ¿Alguna maestra o profesora? ¿Algún libro?

A: No me acuerdo, siempre lo vi así, en libros y en clase.

P: Bueno, voy a contarte algunas ideas de geometría proyectiva, que es una rama de la matemática que se desarrolló en el renacimiento para poder representar el espacio, la realidad, en cuadros. ¿Viste los cuadros renacentistas que tienen características distintas de los de la Edad Media?

> *Por ejemplo algún cuadro de Leonardo Da Vinci, de Miguel Ángel, de Durero, ...*
> *A: Son más reales, los de la Edad Media son chatos.*
> *P: Justamente, esa idea de profundidad se obtuvo a través de estudios de geometría proyectiva.*

(A continuación, la profesora explica a la alumna las ideas básicas de las representaciones proyectivas: puntos de fuga, línea del horizonte, proyecciones. Le describe cómo representar un piso embaldosado de baldosas cuadradas a través de proyecciones con un punto de fuga y con dos puntos de fuga. La profesora, mientras explica, va dibujando en el cuaderno de la alumna. Continúa la explicación representando un cubo utilizando cada uno de los dos tipos de representación mencionados. Los dibujos los realiza a mano alzada.

A continuación, le solicita a la estudiante que realice estas últimas representaciones utilizando el Cabri. La alumna comienza a trabajar y va preguntando a medida que realiza los dibujos, pues por ser la primera vez que realiza una representación proyectiva no se siente segura al hacerlo. Al cabo de media hora tiene ambas representaciones realizadas y la docente le pide que experimente un poco con las representaciones moviendo los puntos de fuga y la línea del horizonte. Lo hace y al cabo de unos minutos, el diálogo continúa:

> *P: ¿Qué te parecen las representaciones que hiciste?*
> *A: Esta no me gusta* (indica la de los dos puntos de fuga)
> *P: ¿Por qué?*
> *A: No se ve bien, se deforma mucho. Además muestra al cubo de punta. Es más linda la de un punto de fuga.*
> *P: ¿Por qué más linda?*

A: Se ve mejor. Tiene más aspecto de cubo. Si me la mostrás, te creo más que es un cubo.
P: ¿Con cualquier ubicación del punto de fuga?
A: No, en realidad es más cubo si lo pongo acá. (Mueve el punto de fuga hasta obtener lo más parecido que puede a una representación Cavalieri) *¿Ves? Esto sí es un cubo, si lo coloco muy cerca, es como si fuera con las bases con trapecios, no cuadrados.*
P: Pero si mirás al cubo real, en la mesa, por ejemplo. Pensemos que es este (toma un libro y lo acomoda sobre la mesa) *¿Ves la cara cuadrada o también se deforma? ¿No ves este segmento más corto que este otro? (señala dos lados opuestos de la tapa del libro).*
A: Sí, pero no si lo dibujo. Si lo dibujo, es "más cubo" si son iguales, si es como un paralelogramo lo que dibujo en la cara de arriba. Se ve mejor.

A partir de esta entrevista, es posible realizar algunos comentarios acerca de las características de las representaciones de los objetos tridimensionales en el plano. Primeramente, aclaremos que la elección de la estudiante para la entrevista fue realizada debido a que si bien está realizando estudios de informática educativa, posee pocos conocimientos matemáticos y reconoce que "no tiene buena mano para el dibujo". Por eso se la consideró idónea para llevar a cabo la entrevista e indagar sus ideas en relación a las representaciones de los cuerpos geométricos.

En el comienzo de la entrevista se pusieron de manifiesto las ideas de Fischbein al plantear la diferencia entre un objeto geométrico y su representación (Fischbein, 1993). La estudiante realiza una clara analogía en relación a la representación de una célula y ésta. Si bien en muchas oportunidades en la escuela no se tiene en cuenta esta diferenciación en la geometría plana, sí en la geometría tridimensional.

Al dibujar inicialmente un cubo, a través de las afirmaciones de la estudiante, podemos observar la presencia y peso en la enseñanza de los prototipos en la geometría escolar (Rey, 2004). La utilización de estos prototipos tiene en el aprendizaje de los alumnos, ya que van incorporando ciertas figuras como únicas, o casi únicas. La visualización de un objeto geométrico por parte de los estudiantes se une muy fuertemente a cuáles han sido las representaciones que realizaron en sus aulas. Los libros y los docentes, al hacer hincapié en ciertas representaciones prototípicas, consideramos que van generando que los alumnos unan cada objeto con su representación prototípica.

Esta alumna reconoce que no recuerda cuándo ni cómo generó esta forma de visualizar el cubo, pero afirma: *"siempre lo vi así"*. La influencia de libros y docentes no es solamente un factor didáctico, sino que también es social; a través de este diálogo se observa cómo influye en la construcción social de la forma de representar, muestra cómo para nuestra sociedad esa es la forma "instituida" en que se representa un cubo. Este hecho se pone de manifiesto nuevamente sobre el final de la entrevista cuando tras haber obtenido distintas representaciones proyectivas del cubo, la alumna afirma que la mejor es la que más se asemeja a la que corresponde al prototipo de representación del cubo que ha construido desde la infancia (*"es más cubo"*), aún cuando ésta no corresponde fielmente a la manera en la que ve un cuerpo cúbico en la realidad. Al decir que "tiene más aspecto de cubo", vemos cómo ella visualiza al cubo a partir de esa representación y no de otra, pues coincide con la imagen mental que se ha forjado de él.

El papel del Cabri en esta experimentación, si bien fue importante debido al aprovechamiento de la potencialidad de la geometría dinámica, se redujo a su uso como una herramienta. Reconocemos que la alumna utilizó esta potencialidad para observar las características de las distintas representaciones generadas por cambios de la posición de los focos. Estas modificaciones le permitieron analizar en poco tiempo y de manera dinámica las características de muchas representaciones y con este análisis, realizar afirmaciones que dejaron detectar con claridad el peso de las representaciones prototípicas y la fuerte influencia de su carácter social.

Capítulo 7

Consideraciones finales

En esta investigación, se detectaron inicialmente por parte de los alumnos grandes dificultades en la representación de cuerpos geométricos. Sin embargo, las mayores dificultades se presentaron al intentar describir y argumentar las características de los cuerpos y sus propiedades.

La experimentación llevada a cabo inicialmente, puso de manifiesto las falencias observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyan sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional *y* los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes en el momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren manejo geométrico. Las dificultades se manifestaron sobre todo en estudiantes que no habían tenido acceso previamente a nociones de perspectiva a través del dibujo técnico. En los resultados obtenidos, fue posible detectar la presencia de prototipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, tanto para cubo como para pirámides. También se notan influencias de prototipos "diestros" y "zurdos", dejando abierta la posibilidad de estudio y detección de estos.

También se evidenció en esta experimentación intentos de los estudiantes para transferir la manera en la que representan un cubo a la representación de pirámides. Estos intentos no fueron exitosos, ni pudieron los alumnos darse cuenta de sus errores al respecto por no poseer una buena imagen mental de las pirámides.

Los alumnos tienen problemas en el diseño e interpretación de representaciones planas de cuerpos geométricos tridimensionales. Esto podría estar reflejando la poca importancia que se da a la geometría, en particular a la tridimensional, en la escuela.

Se detectaron en los libros de texto utilizados la aparición de prototipos de representación de cuerpos geométricos, los que son reforzados por los docentes. En libros actuales, se ve cierta tendencia a no utilizar siempre la misma representación, lo que permite inferir que se está tomando conciencia de que el uso reiterado de determinadas representaciones se torna en una dificultad a la hora de visualizar. La denominada “rigidez geométrica” se ve reforzada con la utilización de los prototipos en las representaciones de los cuerpos Geométricos, ya que si siempre al pensar en un poliedro lo imaginamos en la misma posición, será difícil lograr pensarlo en otra posición.

Tenemos imágenes mentales incorporadas para la representación de cuerpos matemáticos en el plano. Al oír la palabra “cubo”, visualizamos una imagen que se une al prototipo que se utilizó en la escuela o en los libros de texto. Esa imagen mental es evocada por la palabra “cubo” y así se puede visualizar al mismo y sus características. Para lograr el concepto de “cubidad”, será necesario conocer y ser capaces de imaginar y visualizar al cubo en cualquier posición, pudiendo así conocer todas sus propiedades y siendo capaces de utilizar la visualización en sus dos interpretaciones, como proceso mental y como competencia para construir conocimiento.

En la forma en que se construyen las representaciones planas de poliedros, se pone de manifiesto la influencia de lo didáctico y lo social a través de las representaciones prototípicas que se realizan en la escuela. En cada escenario se van construyendo formas de representar que son asumidas por los actores del mismo.

En el uso de prototipos es posible identificar un aspecto didáctico a través de su utilización con el fin de transmitir conocimiento por parte de libros de texto y docentes, su carácter social se evidencia en que nuestra sociedad ha asumido el uso de algunos como correctos y estandarizados, por otra parte, su influencia cognitiva se manifiesta en la influencia que tiene en la formación de imágenes mentales.

Pensamos que es necesario que los estudiantes aprendan a dibujar y a leer las representaciones planas de cuerpos tridimensionales, para poder comprender la geometría espacial y facilitar la comprensión de materias como el Cálculo Diferencial e Integral, donde los alumnos encuentran serias dificultades no sólo en la escuela media sino también en la enseñanza superior. Observamos, como se muestra en las experiencias realizadas en esta investigación que resulta muy trabajoso este proceso no sólo con cuerpos que deben representar sino también con cuerpos que deben imaginar.

Tratamos con esta investigación de ir acercándonos a soluciones que permitan a los alumnos lograr estos objetivos y, respecto de los profesores, que comprendan la necesidad de enseñar geometría tridimensional basándose en aquellos conceptos que lleven al alumno a manejarse correctamente con los conocimientos matemáticos, evitando en lo posible las dificultades actuales.
Para lograr este objetivo pueden no sólo utilizar el dibujo manual, sino también el trabajo a partir de materiales concretos, la utilización de recursos tecnológicos

como las fotografías y programas con las potencialidades de la geometría dinámica.

Los estudiantes que aprenden formas de representar cuerpos geométricos a través de la geometría proyectiva, si bien pueden reconocer su importancia en relación a la proximidad con la manera en la que ven los objetos, muestran preferencias por aquellas que se asemejan a las que construyeron con anterioridad.

A partir de la entrevista presentada al final, podría respaldarse la idea de que las representaciones planas que surgieron a través de la historia del arte muestran también a las mismas como una construcción social. Por ejemplo, si aceptamos esto, las culturas que no tuvieron representaciones que permitieran ver la idea de profundidad, como los egipcios, los mayas o los chinos, no podrían verse como representaciones imperfectas de la realidad, como a veces se han considerado. Sino que podría pensarse que ellos fueron capaces de interpretar a través de las mismas la idea de profundidad y otras características tridimensionales pues respondían a prototipos de representación que habían construido. A nosotros nos parecen planas porque nuestras representaciones pictóricas ya han incorporado elementos proyectivos que nos permiten visualizar el espacio de manera distinta. Esta visión permitiría comprender a las representaciones planas de objetos tridimensionales como construcciones socioculturales.

En un escenario como el actual, en el que la tecnología ha cobrado cada vez un papel más central y en el que nuestros alumnos ven a la velocidad de los avances tecnológicos actuales como algo natural, consideramos que es imprescindible el aprovechamiento en el aula de todos los recursos a nuestro alcance para poder obtener mejores modos de visualización de los cuerpos geométricos.

Esto nos lleva a indagar en estos temas para encontrar posibles soluciones, dada la importancia que los estudiantes adquieran habilidades para representar cuerpos tridimensionales en el plano, competencias relacionadas con la visualización. Es lo que queremos destacar en nuestra tesis, al trabajar el estudio de la perspectiva, el análisis de las representaciones que se realizan desde el inicio de los años escolares, su influencia en las representaciones gráficas y en las argumentaciones que ayuden a la comprensión de los conocimientos geométricos.

A partir de la investigación realizada, es posible detectar algunas líneas en las que podría continuarse investigando. Algunas de ellas serían:

- Continuar profundizando la visualización de los cuerpos geométricos, centrándose en el análisis de textos y producciones de las distintas culturas, observando el tratamiento que hacían de los mismos. De esta manera, mediante un enfoque socioepistemológico de las representaciones tridimensionales, se podrá intentar identificar cuáles son los factores que permiten construir la comprensión espacial.
- Analizar la manera en la que las argumentaciones y los prototipos se transmitieron en la matemática a través de textos que hicieron llegar dicha tradición hasta nuestros días. Mediante el análisis de la manera en la que se construyen en nuestras aulas las distintas imágenes que son evocadas durante el proceso de visualización y la manera en que estas se plasman en las representaciones que realizan los alumnos en la clase de matemática, creemos que será posible mejorar el aprendizaje de los conceptos y relaciones geométricas.

- Analizar si existen otras características que diferencien las representaciones planas que realizan alumnos zurdos y diestros, intentando indagar si es posible, la existencia de factores cognitivos relacionados.
- Buscar estrategias para crear en los alumnos la necesidad de utilizar la perspectiva en sus trabajos ayudándose con el trabajo manual o con utilización de recursos tecnológicos, para visualizar los cuerpos geométricos desde cualquier posición y sus características y propiedades, aprovechando las potencialidades de los recursos tecnológicos para el diseño de actividades que permitan mejorar la manera en la que los estudiantes realizan sus representaciones planas de cuerpos geométricos.

Referencias Bibliográficas

- Alsina, C. (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura. En *Curso Interuniversitario Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas.*

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática,* (pp. 97-135). Bogotá: Editorial Iberoamérica.

- Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*. 3(3) 262-306.

- BISHOP A. (1985). *The social psychology of mathematics education*. Proceedings of the PME 9, Vol. 3, pp. 1 -13.

- Bishop, A. J. (1980). Spatial habilitéis and mathematics education – A review. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 257-269.

- Bishop, A. J. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización. *Antología en Educación Matemática*. México: Cinvestav. (pp. 29-42).

- Blanco, H. (2005). Un cambio de paradigma en la Geometría*. Premisa. 8 (28) 37-47.*

- Blanco, H. y Crespo Crespo, C. (2006). Una experiencia con representaciones y argumentaciones*. Premisa 9 (32) 15-23.*

- Borba, M. y Villareal, M. (2005). Visualization, mathematics education and computer environments. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation* (pp. 79-99). U. S. A.: Springer.

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 7.2, 33-115.

- Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas: aportes y reflexiones* (pp.65-72). México. Paidós.

- Brown, D. L.; Wheatley, G. H. (1990). The Role of Imagery in Mathematical reasoning*. Proceedings of the Fourteenth International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mexico: Oaxtepec.

- González Ulloa, M. (2006). *Solución de problemas de Optimización usando Geometría dinámica*. III Congreso Iberoamericano de Cabri. Iberocabri. Bogotá, Colombia.

- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Prentice Hall & Pearson.

- Cantoral, R. y Montiel, G. (2002). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números.* Revista Oficial de la Asociación Venezolana de Educación Matemática Vol. 11, 1, pp. 24..

- Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15 (pp. 35-42). México: Editorial Iberoamérica.

- Cantoral R. y Montiel, G. (2003) Una representación visual del polinomio de Lagrange. *Números. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*, 55, pp. 3-22.

- Carrión Miranda, V**.** (2000). Álgebra de funciones mediante procesos de visualización. *En Memorias IX Seminario nacional. Microcomputadoras en la educación matemática.* Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. Universidad Latina de América. México. [En línea] Disponible en: http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/carrion/carrion.htm.

- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.

- Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (1995). Geometría: Los problemas a lo largo de la historia. *Memorias de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (Vol.1, pp 383-387). La Habana (Cuba).

- Crespo Crespo, C. y Guasco, M. (1996). *Geometría: su enseñanza*. Buenos Aires: Prociencia.

- Crespo Crespo, C.; Ponteville, C. y Villella, J. (2000). *El proceso de visualización al rescate de la enseñanza de la Geometría.* Comunicación presentada en la II Conferencia Argentina de Educación Matemática II CAREM. Santa Fe (Argentina).

- Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA, México.

- Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado sin publicar. CICATA-IPN, México.

- Chevallard, Y. (1997a). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

- D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Reverté.

- Da Purificacao, I. y Carneiro Soares M. T*. (*1999*).* Cabrí Géométre e teoría de Van Hiele: posibilidades de avancos na construcao de conceitos geométricos. *Comunicaciones Científicas. Cabrí World. 99*. San Pablo. Brasil.

- Davis, P. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 333 - 444.

- De Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización*. *Ensayos de visualización en análisis matemático.* Madrid: Pirámide.

- Descartes, R. (1935). Reglas para la dirección del espíritu. Textos filosóficos dirigidos por José Gaos. *Revista de Occidente*. Madrid. pp. 90 – 150.

- Dieudonné, J. (1964). Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Enseignement des sciences.* Hermann, París. *(pp. 12-16).*

- Douady, A. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 7 (2) (pp 5-31).

- Douady, A. (2001). Espacio y plano. Traducción: Hernández, V. y Villalba, M. *PMME-UNISON.* Febrero 2001. (p. 1).

- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view*.* In C. Mammana and V. Villani (eds); *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study.* Dordrecht. Kluwer.

- Duval, R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En Antología en Educación Matemática (Ed. E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Restrepo. (Trabajo original publicado en 1995).

- Duval, R. (1999). *Algunas cuestiones relativas a la argumentación*. IUFM de Lille.

- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1990). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series. USA.

- *Dreyfus, T. (1991).* On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed). P*roceedings of the 15th Annual Conference of the International Group for the psychology of mathematics education.* Assissi, V*ol. 1, 33-48.*

- Dreyfus, T. (1992). Advanced Mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*; Mathematics Education library.

- Dubinski, E. y Tall, D. (1991) Advanced mathematical thinking and the computer. In D.Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers.

- Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 139-162.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Utretch: Reidet Publishing Co.

- Gascón, J. (1997). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.* Departamento de Matemáticas. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

- Glaeser, G. (1973). *Le livre du problème, I, Pédagogie de l'exercice et du problème.* Lyon: Cedic.

- Gómez Gabaldón, J. A. (2004). *Nuevos planteamientos metodológicos en la enseñanza de la Geometría. Geometría dinámica con Cabri*. Universidad de Alicante, España. Escuela Politécnica Superior. Departamento de Expresión Gráfica.

- Gómez Ulloa, M. (2006). *III Congreso Iberoamericano de Cabri*. IBEROCABRI. Bogotá – Colombia.

- Guillén Soler, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas,* 18 (1).

- Gutiérrez A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de al Geometría espacial. *Revista Ema.* Vol. 3, N° 3, 193-220.

- Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático. Historia de la Filosofía y de la Ciencia.* Traducción: L. A. Santaló. Espasa-Calpe Argentina, S. A. Buenos Aires-México. Apéndice II, pp.228.

- Horgan, J. (1993). Paul Karl Feyerabend: El peor enemigo de la ciencia. *Investigación y ciencia* 201, 36-37.

- Hershkowitz, R.; Bruckheimer, M. y Vinner, S. (1987). Activities with Teachers Based on Cognitive Research, en NCTM (1987): *Learning and Teaching Geometry,* K-12. pp. 222-235. Reston-VA: NCTM.

- Hershkowitz R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En Nasher, P. y Kilpatrick, J. (ads.). M*athematics and cognition: A research síntesis by the Internacional Group for the psychology of mathematics education;* pp. 70-95; Cambridge, Cambridge U.P.

- Hershkowitz R. (2001). *Acerca del razonamiento en Geometría*. Traducción de Hernández V. y Villalba M. PMME- UNISON.

- Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 18(1&2), 29-34.

- Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the Mind's Machine*. New York: W. W. Norton Co.

- Documento de discusión para un estudio ICMI. *Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI.* (2001). Traducción: Víctor Hernández y Martha Villalba. PMME-UNISON. Febrero.

- Laborde, C. y Capón, B. (1994). *Aprender a ver y manipular un objeto trazado con Cabrí geometre.* En Aberto, N° 62, Brasilia.

- Leenhardt, M. (1997). *Do Kamo.* Editorial Paidós.

- Levy Leblond J. y Jaubert A. (compiladores): (1980). *(Auto) Crítica de la Ciencia.* Editorial Nueva Imágen. México.

- López, J. (2007). *La Comunicación Visual antes de la Conquista. En Tiempo y escritura* (12). México: Universidad Autónoma Metropolitana. Disponible en: http://www.azc.uam.mx/publicaciones/tye/tye12/art_hist_03.html

- Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics* 44, 25 - 53.

- Martínez Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento*. Relime* Vol. 8 (2), 195 - 218.

- Ministerio de Cultura y Educación. (1995) *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires.

- Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures*. Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (2), 83-93.

- Ministerio de Cultura y Educación. (1995) *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires.

- Mitchelmore, M. C. (1983). Geometry and spatial learning: Some lessons from a Jamaican experience. *For the Learning of Mathematics*, 3 (3), 2-7.

- Núñez Urías, J. (2002) *Visualización y matemáticas*; Disponible en: http://www.ipicyt.edu.mx.

- Parzysz, B. (1988). Knowing vs. seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics,* 19, 79-92.

- Piaget, J. y Inhelder, B. (1971). *Mental Imagery and the Child*. Routledge and Kegan Paul, London.

- Piaget, J. y Garcia, R. (1991). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI.

- Piaget, J. y Inhelder B. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: P.U.F.

- Polya, G. (1998). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

- Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. En *For the learning of mathematics.* Vol 6; (3) pp. 42-46.

- Presmeg, N. C. (1997a). Generalization using imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres. (299-312)

- Presmeg, N. C. (1997b). Reasoning With Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres. (267-279)

- Rey, J. L. (2004). Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos. *Premisa 6 (*22). (3-12)

- Rey Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la Matemática.* Vol. 1. Buenos Aires: Gedisa.

- Kline, M. *Geometría Proyectiva.* Sigma, El mundo de la Matemática. Cap. 7. pp. 216-236.

- Serio, A. y Braccio, F. (1998). *Invadiendo el espacio desde el plano*. Geometría hoy. Rosario: Homo Sapiens.

- Davis (1993) en su artículo *Visual Theorems*, Educational Studies.

- Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept Image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

- Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. L. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer.

- Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into aMathematical Instrument* (pp. 9 - 39). New York, U.S.A.: Springer.

- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insigth. A theory of mathematics.* Academic Press, New York.

- Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. En A. Bishop K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.),. *International handbook of mathematics education* (pp. 112-115).

- Vigotsky, L. S. (1978). Mind in society. The development of higher psychological processes. Cambridge, Mass: Harvard University Press. Traducción al español, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematics education, science and technology* 14 (3), 293 – 305.

- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking;* Mathematics Education Library.

- Wheatley, G. H. (1990). *Spatial sense and Mathematics learning*. Aritmetic Teacher. 37, 6, 10-11.

- Wheatley, G. y Bebout H. (1990). *Mathematical Knowledge of Young Learners.* In Steffe, P. and Wood, T. (Eds.). T*ransforming Childrens's Mathematics.*

- http://www.cecm.sfu.ca/projects/PhilVisMath/vis96panel.html.