INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA

Un análisis de las interpretaciones, realizadas por los estudiantes, de enunciados matemáticos escolares considerando la estructura lógica y el contenido matemático de los mismos: una interpretación sociocultural.

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Rocco Cannizzaro

Director de Tesis:
Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

México, D. F., diciembre de 2008

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 20 del mes de noviembre de 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Un análisis de las interpretaciones realizadas por estudiantes, de enunciados matemáticos escolares, considerando la estructura lógica y el contenido matemático de los mismos. Una interpretación sociocultural."

Presentada por el alumno:

Cannizzaro	Rocco
Apellido paterno	nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	3	8	9

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dra. Gabriela Buendía Ábalos

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 26 del mes noviembre del año 2008, el que suscribe Rocco Cannizzaro alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A050389, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Francisco Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado *"Un análisis de las interpretaciones realizadas por estudiantes, de enunciados matemáticos escolares, considerando la estructura lógica y el contenido matemático de los mismos. Una interpretación sociocultural"*, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección rocco_cm@yahoo.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Rocco Cannizzaro

Índice

Glosario

Argumento Colección de enunciados de los cuales uno se sigue de los anteriores y sobre los cuales funda su verdad. Es la expresión de un raciocinio.

Conclusión Proposición final de un argumento.

Enunciado Cualquier frase de la que se puede decir si es verdadera o falsa. En este sentido se utiliza por lo tanto como sinónimo del término proposición.

Hipótesis En un teorema, es cualquier premisa del argumento correspondiente, es decir del argumento que ve el teorema como proposición final. Si el teorema es expresado a través de la forma "si… entonces…" hipótesis es la parte entre el "si" y el "entonces".

Lógica Disciplina que estudia las formas de razonamiento correcto. La lógica clásica debe sus principios básicos a Aristóteles. A partir del siglo XIX se desarrolla la lógica moderna, a veces llamada lógica matemática o simbólica.

Premisa Proposición que sirve como base para llegar a la conclusión de un argumento. Desde la verdad de las premisas, se desprende, en caso de argumento válido, la verdad de la conclusión.

Teorema Proposición que expresa una propiedad matemática para la cual se puede producir una demostración. En la demostración, el teorema constituye la proposición final.

Tesis Consecuencia final de las hipótesis en un teorema. Si el teorema es expresado a través de la forma "si… entonces…" hipótesis es la parte que sigue el "entonces".

Índice de Cuadros

Índice de tablas

Título:

Un análisis de las interpretaciones, realizadas por los estudiantes, de enunciados matemáticos escolares considerando la estructura lógica y el contenido matemático de los mismos: una interpretación sociocultural.

Resumen

La investigación tiene como objeto las dificultades de comprensión de parte de los alumnos del primer semestre de Carrera en Ingeniería de los enunciados escolares. Después de establecer como indicadores de comprensión de un enunciado la correcta explicación del contenido del enunciado y la correcta identificación de hipótesis y tesis, se elabora un cuestionario que permita medir la entidad del fenómeno y averigüe su dependencia del contenido matemático de los enunciados y de la complejidad lógica de los mismos.

Se halla que el fenómeno sí es consistente, que las dificultades sí dependen del contenido matemático, pero entre aritmética y geometría, ámbitos disciplinares considerados, no hay diferencia relevante cuanto a las dificultades de los alumnos. La complejidad lógica influye, al generar más dificultades los enunciados con un número más elevado de hipótesis.

Al profundizar el análisis, se halla que para la explicación de las interpretaciones de los enunciados de parte de los alumnos es necesario considerar elementos de naturaleza socio cultural, cuales el contexto social y cultural y en especial el lenguaje como elemento importante de dichos contextos; el ambiente escolar en su variedad de disciplinas enseñadas y en sus dinámicas propias; el maestro y su formación.

Abstract

The scope of this research is to identify reading comprehension challenges in scholarly enunciates that students of the first semester of engineering have. After establishing as indicators of an enunciate's comprehension the correct explanation of the enunciate's content and the correct identification of the hypothesis and thesis, follows a survey that allows to measure the relevancy of the phenomenon and tracks its dependence on the mathematical content of the enunciates and their complexity.

The finding is that the phenomenon is consistent, the challenges do depend on the mathematical content, but between the areas studied which are arithmetic and geometry, there is no relevant differences in their comprehension by the students. The logic complexity does have an effect in generating more challenges with enunciates with a higher number of hypothesis.

An in-depth analysis has found that in order to explain the interpretation of the enunciates by the students, it is necessary to consider other factors of socio-cultural nature like the social and cultural context as well as language skills as an important element of those contexts; the school environment with its variety of areas and their own dynamics; the instructors and their formation.

Introducción

Breve excursus sobre la evolución de la Matemática educativa.

No cabe duda que los estudios de los fenómenos que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, presentes obviamente desde el inicio de la enseñanza de las matemáticas, han aumentado de manera relevante a partir de la segunda mitad del siglo XX. En este período, al intentar abarcar siempre más los fenómenos sin explicar y los problemas sin resolver, la problemática didáctica se ha ampliado sucesivamente. Por consiguiente, se ha modificado el objeto de investigación del área de conocimiento denominada Educación matemática, o Matemática educativa, o Didáctica de la matemática[1].

Han surgido grupos de investigación, con intereses y enfoques diferentes, y la diversidad de puntos de vista, unida con la abundancia de publicaciones, hace extremadamente difícil tan solo intentar resumir la historia de esta disciplina a lo largo de las últimas décadas.

Se pueden señalar al respecto, a título de ejemplificación, los trabajos de (Gascón, 1998), que presenta una reconstrucción de la línea de desarrollo que ha llevado, en ambiente francés, a la génesis de la *didáctica fundamental*, de (Dubinsky, 2000) que al relatar su viaje personal de la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa presenta la génesis de la teoría APOE en ambiente norteamericano, y de (Cantoral & Farfán, 2003), que presentan las varias etapas de la evolución que ha generado, en ambiente latinoamericano, el enfoque socio epistemológico.

El mismo problema de la atribución de estatuto de disciplina científica a la Didáctica de la matemática es objeto de debate, y por esto se puede ver (Godino 1991).

Consideramos sin embargo necesario para el desarrollo de la tesis identificar, aunque sin tener absolutamente pretensión de abarcar toda la perspectiva del tema, algunos momentos de la evolución de la disciplina.

[1] Se puede considerar con (Godino, 1991) , que a pesar de que el término educación sea más amplio que el término didáctica, en el mundo anglosajón se utiliza la expresión “Mathematics Education” para referirse a la disciplina que en ambiente europeo se denomina “Didáctica de la matemática”. La expresión “Matemática educativa” es en cambio la más usada en ambiente latinoamericano.

Podemos identificar un primer período en el que la enseñanza de las matemáticas es considerada como un arte –véase (Gascón, 1998) y (D'Amore, 1999)-, difícilmente controlable, cuyos resultados dependen de manera sustancial de la genialidad del docente en hallar instrumentos que hicieran para los alumnos más interesante la matemática. En (Cantoral & Farfán, 2003) se define este período como el período de la "didáctica sin alumnos" subrayando con este nombre el hecho que el maestro se interesa al alumno, es sensible a él, pero su acción didáctica no es sobre el alumno, sino sobre el tema a enseñar. Esta fase, siendo que no es posible una verdadera investigación empírica, es considerada pre-científica en la historia de la Didáctica de la matemática.

Fue consolidándose luego un punto de vista, llamado clásico (Gascón 1998), o de la "Didáctica sin escuela" (Cantoral & Farfán, 2003), en el que se incluyó de manera relevante el estudio del aprendizaje del alumno. El aprendizaje en general es visto como un proceso psico-cognitivo, influenciado por factores motivacionales, afectivos y sociales. Fue la Psicología Educativa, madurada a través de la obra de muchos autores, como Piaget, Vigotsky y Bruner, a dar el fundamento científico a este punto de vista. En esta fase ciertamente se amplía la problemática didáctica al alumno con sus procesos de aprendizaje, y al profesor, con su pensamiento y su formación. (Gascón, 1998) pone sin embargo en evidencia las limitaciones de este punto de vista: por un lado se dejan como no cuestionables o se consideran transparentes las nociones de "enseñar matemáticas" y "aprender matemáticas", por otro lado los fenómenos psicológicos influencian tan fuertemente el enfoque, que los fenómenos didáctico-matemáticos quedan en segundo plano; por fin, se considera el saber didáctico como un saber técnico, cuyas motivaciones provienen de campos ajenos, y con esto renuncia a construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Una tercera fase se genera al darse cuenta de muchos fenómenos didácticos inexplicados por las teorías anteriormente elaboradas, específicamente de fenómenos didácticos conectados con la actividad matemática escolar. Para explicar los fenómenos que se presentan en la enseñanza de las matemáticas, no es suficiente un enfoque cognitivo, aunque este enfoque, juntamente con las sugerencias que la psicología puede proporcionar, es importante. El desempeño de los alumnos resulta influenciado por las concepciones que ellos se forman globalmente acerca de la actividad matemática y de la utilidad del aprendizaje matemático. Así mismo, también tiene que ver con su aprendizaje el pensamiento que ellos desarrollan por la pertenencia a varias instituciones (familia, clase, escuela, sistema educativo, ambiente social), o por la interacción con ellas. Toma forma la convicción que fuera necesario disponer de un modelo específico de la actividad matemática escolar, y por consiguiente de modelos específicos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que tomaran en cuenta la especificidad de la disciplina y del ambiente.

Con estas consideraciones se desarrollan enfoques sistémicos, que intentan tomar en cuenta, para explicar fenómenos didácticos, la complejidad del sistema en donde se desarrolla la actividad didáctica.

La escuela francesa es a este respecto la que más ha desarrollado y difundido su concepción, llamada "Didáctica fundamental". Se consideran por lo general como componentes del sistema el polo del saber a enseñar, el polo del alumno, el polo del maestro; existe el sistema del mundo externo, y una zona intermedia entre los dos sistemas (la noosfera). Otro subsistema (llamado medio) es constituido por todo lo que se refiere a la actividad del alumno (materiales, juegos etc.).

En este punto de vista, el objeto primario de estudio es la actividad matemática escolar. Para interpretar la matemática escolar y la actividad matemática escolar, es indispensable estudiar la reconstrucción escolar de las matemáticas y la producción de las obras matemáticas. Y este estudio debe conducirse dentro del estudio de las actividades matemáticas institucionales.

Este enfoque abarca toda la problemática didáctica clásica, y se ha revelado fértil de nuevos estudios. Algunas de las nociones nacidas en la escuela francesa, y acogidas y desarrolladas a nivel internacional, serán precisadas más adelante.

En ambiente latinoamericano, desprendiéndose de la escuela francesa se ha originado el enfoque socioepistemológico, que integra cuatro componentes fundamentales del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de la transmisión vía la enseñanza.

Matemática educativa: evolución de la disciplina y convicciones de los maestros

Al describir la evolución de la disciplina es fácil darse cuenta que ha crecido de manera relevante, en las últimas décadas, la conciencia de la complejidad de las causas de los fenómenos que se presentan en la enseñanza de las matemáticas, y también la profundidad de análisis de los mismos. Sin embargo, es lícito preguntarse cuánto de los avances de esta disciplina ha llegado a influir significativamente sobre la conciencia de los maestros de matemáticas, y más aún sobre sus comportamientos en el salón de clase. Mi experiencia personal, en Italia y en México, me indica que el comportamiento de los docentes en su trabajo está bien lejos de tomar en cuenta los recientes desarrollos de las investigaciones. Creo todavía muy difundida la idea que la enseñanza de las matemáticas sea un arte. Tommaseo, citado en (D'Amore, 1999, p.14) afirmaba que las normas de la didáctica no las enseñan los libros de método, sino el corazón, el ejemplo, la experiencia, y considero que muchos siguen con esta opinión. Por otra parte, los cursos de actualización por la mayoría comunican elementos de psicología y teorías del aprendizaje, integrando a veces, pero sólo como instrumentos útiles para el maestro, técnicas de enseñanza y nuevas tecnologías. Así, los maestros que más se actualizan, llegan a tener conocimiento de algo de lo que en Didáctica de las matemáticas se estudiaba hasta 1980 aproximadamente, y que se ha revelado, como vimos en el breve resumen arriba expuesto, incapaz de explicar muchos fenómenos didácticos.

Al considerar el trabajo hecho en ocasión de la elaboración de esta tesis, sale a flote la evolución de mi pensamiento sobre el fenómeno didáctico a estudiar. El planteamiento inicial, hecho a partir de mi experiencia de enseñanza y de mi formación tradicional (clásica, para decirla según el resumen anterior), cuestionada solo en parte por los cursos tomados en el transcurso de la maestría, intentaba, además de detectar el fenómeno didáctico, estudiarlo más que nada en el plano de lo cognitivo. Los hallazgos de la investigación me han demostrado con claridad que el enfoque anterior no era adecuado, que el fenómeno didáctico es mucho más complejo, y que se necesita un análisis sistémico, que tome en cuenta muchos más factores. Análisis que en esta sede inicio a delinear.

De alguna manera se puede decir que al realizar este trabajo de investigación, he tenido que hacer personalmente una parte significativa del camino de la disciplina que arriba he sintetizado.

Y, considerando interesante también esta evolución personal, he mantenido, en la redacción del trabajo, una estructura que permitiera vislumbrarla.

Estructura del trabajo

En el **primer capítulo**, se reportan y aclaran algunas nociones teóricas de referencia, utilizadas en el desarrollo del trabajo

En el **segundo capítulo** se reportan los antecedentes del trabajo, el origen del interés, la primera delimitación del tema de investigación, el planteamiento inicial de la investigación, el diseño del cuestionario, algunas notas críticas acerca de la coherencia del mismo, los datos acerca de la suministración.

En el **tercer capítulo**, se reportan las respuestas y se presenta una primera análisis y clasificación de las respuestas.

En el **cuarto capítulo** se analizan las respuestas a partir de las preguntas de investigación, trayendo las conclusiones al respecto.

En el **quinto capítulo** se pone la atención sobre algunas respuestas que obligan a ampliar la investigación en busca de una interpretación. Se hacen al respecto algunas conjeturas, a partir de las nociones teóricas mencionadas en el capítulo 1 y de otras investigaciones recientes en el campo de la Didáctica de las matemáticas.

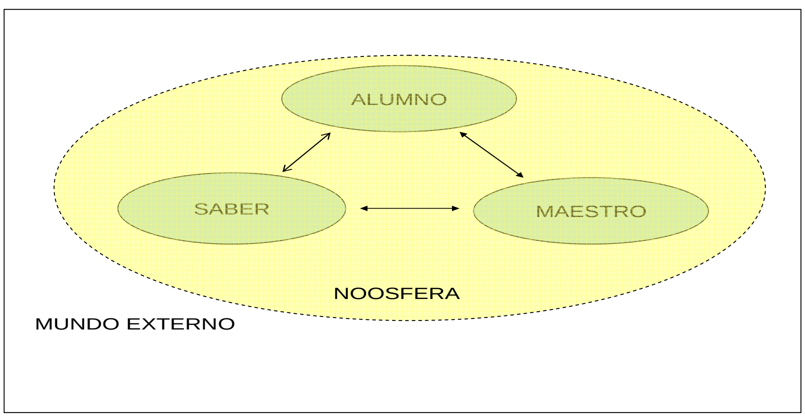
En el **sexto capítulo,** algunas conclusiones.

Capítulo 1 - Nociones teóricas de referencia

Precisamos brevemente a continuación el significado de algunas nociones teóricas que resultan importantes en algunas partes de este trabajo.

La teoría de sistemas, a partir de los trabajos de Berthalanffy[2], ha influenciado de manera muy relevante todo el mundo de la investigación. En el campo de la Didáctica de la matemática, ha sido más que nada la escuela francesa que ha difundido el **enfoque sistémico**. En este enfoque, las componentes que entran en el proceso de enseñanza-aprendizaje no son vistas y estudiadas cada una por separado, sino juntamente con sus interacciones, que de alguna manera entran en la misma concepción de las varias componentes.

En (Chevallard & Joshua, 1982) citado por (Godino, 1991), se describe un **sistema didáctico** en sentido estricto, como formado por tres subsistemas: el *profesor*, el *alumno*, el *saber enseñado* (componentes básicos del proceso de enseñanza-aprendizaje), entre ellos en relación. La relación didáctica es por lo tanto una relación entre estos tres subsistemas.



Cuadro 1

Este sistema está insertado en un *mundo exterior a la escuela*, en el que están entre otros la sociedad, los padres, los matemáticos, los políticos. Entre este mundo y el sistema didáctico existe una zona intermedia, la *noosfera*, que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de la enseñanza de

[2] Con respecto a las ideas de Berthalanffy, considerado el padre de la teoría de sistemas, se puede ver Berthalanffy, L.V. (1963). *General system theory*. Londres, Inglaterra: Penguin University Books.

las matemáticas. En esta esfera se desarrollan las relaciones entre sistema didáctico en sentido estricto y mundo externo. Noosfera y sistema didáctico en sentido estricto constituyen el sistema didáctico en sentido amplio. El sistema de materiales, juegos etc. con los cuales interactúa el alumno es definido *medio* o *ambiente*.

En el enfoque sistémico antes introducido, todo **fenómeno didáctico**, entendido tradicionalmente como fenómeno relativo a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, tiene que abordarse al tener en cuenta los múltiples elementos del sistema didáctico y sus interacciones.

El *saber enseñado* es determinado a partir del *saber sabio* a través de un proceso llamado **transposición didáctica**, que se puede definir (Chevallard, 1991) como el "trabajo" que transforma un objeto de saber sabio, a través de la definición del saber a enseñar, en un objeto de enseñanza, en función de las características del lugar, de los alumnos, de los fines de la enseñanza. Este proceso tiene como características, entre otras, la despersonalización y la descontextualización del conocimiento, es decir la eliminación de las historias personales y de los problemas particulares que han llevado al descubrimiento del conocimiento. Se trata de una verdadera transformación de los contenidos de saber en versiones más didácticas, y en este proceso se llega a crear objetos de saber y de enseñanza, considerados importantes para el funcionamiento didáctico. El maestro interviene en este proceso, pero solamente en la última fase.

En una perspectiva que remonta a Piaget, el conocimiento es una actividad de adaptación que se construye a través de la interacción constante entre sujeto y objeto, en la que se jerarquizan las estructuras mentales con respecto a los contenidos. Es la relación entre los dos subsistemas alumno y saber que realiza este proceso. El tercer subsistema, el maestro, gestiona esta interacción. Se pueden diferenciar (Brousseau, 1986) tres tipos de **situaciones**: situación didáctica, no-didáctica, a-didáctica. Situación *no-didáctica* es una situación en la que no hay ni de parte de los alumnos ni de parte del maestro una relación clara con y específica con el saber: el maestro no ha construido un ambiente finalizado al aprendizaje de un conocimiento. Situación *a-didáctica*: la situación provoca exigencias, los alumnos contestan, hacen tentativas, verifican y así aprenden algo relativo a la matemática. Es la situación más propicia a la construcción de conocimiento. **Situación didáctica** es un conjunto de relaciones, construidas

explícitamente o implícitamente entre el maestro, el alumno (o un grupo de alumnos) y el medio (materiales e instrumentos) que tienen la finalidad de hacer que los estudiantes construyan un preciso conocimiento. Importante en esta fase es la noción de *devolución*, que es la actividad con la que el maestro obtiene que el estudiante asuma el problema propuesto como problema personal. Se trata de un proceso en el que el alumno pasa de la situación didáctica a una *situación a-didáctica*, al eliminar todos los elementos no matemáticos, y especialmente los elementos didácticos. Hay varios tipos de situaciones, siendo varios los aspectos del conocimiento matemático: situaciones de acción, de comunicación, de validación, de institucionalización.
Tarea del didacta es en este contexto organizar situaciones para las que el concepto dado aparece como una solución optima, y Brousseau propone a este nivel que sea el estudio epistemológico del concepto a sugerir situaciones didácticas que permitan la génesis artificial del concepto.

El proceso de adaptación que en este enfoque constituye el aprendizaje se realiza a través de rupturas cognitivas, asimilación y acomodación de imágenes y conceptos, modificación de modelos, lenguajes, sistemas cognitivos. En este proceso, se forman ideas nuevas, que podrán revelarse temporales, que habrá que superar para llegar a ideas más completas y estables, pero que resistirán a la necesidad de superación.
Se llega así a la noción de **obstáculo**, es decir una idea que en el momento de la formación de un concepto se ha revelado eficaz para resolver o explicar problemas, pero que no resulta eficaz al aplicarla a un problema nuevo. El individuo tiende a conservar la idea antigua, siendo que se ha revelado eficaz, pero esta se vuelve un obstáculo al aprendizaje sucesivo.
Brousseau, reportado en (D'Amore, 1999, p.210) describe algunas características de los obstáculos:

- un obstáculo no es falta de conocimiento, sino un conocimiento
- el alumno utiliza este conocimiento para dar respuestas en un contexto conocido
- al intentar dar respuestas en un contexto diferente, se generan respuestas incorrectas.
- Frente a las contradicciones que así se generan, el alumno se resiste, y es necesario un conocimiento general, más profundo, que explique las situaciones resueltas y las situaciones que han generado la contradicción. Y es necesario que se explicite el obstáculo.

- El obstáculo reaparece, de manera ocasional, aunque ya haya sido superado

En la profundización de la noción de obstáculo, se distinguen *obstáculos ontogenéticos* (dependientes del desarrollo de la inteligencia, de los sentidos y de los sistemas perceptivos), *didácticos* (debidos a la interpretación personal del maestro de la transposición didáctica, interpretación que puede generar problemas a los estudiantes), *epistemológicos* (provocados por la evolución del concepto en el cuadro de las matemáticas).

La idea de obstáculo fue introducida por Brousseau. Sin embargo, lo que él describe con el término obstáculo, resulta cercano a lo que en otros marcos teóricos se llama misconcepto (el término misconcepto se utiliza en realidad para describir muchos fenómenos, y esto hace menos preciso su significado y algo criticado su uso. Véase, para una rápida reseña de los significados y usos de este término, (Zan, 2007)).

En el estudio de la relación entre maestro y alumno reviste importancia relevante el concepto de **contrato didáctico.** También esta noción tuvo su desarrollo más significativo en el ambiente de la escuela francesa de Didáctica de las matemáticas, a partir de los años ochenta, llevando a madurez estudios anteriores de varios autores. En la actualidad, se habla de contrato didáctico en una muy grande variedad de situaciones y con matices diferentes. Para revisar los estudios que introdujeron dicha noción, para ver algunos ejemplos significativos y también para conocer los varios enfoques con los cuales se puede hablar de contrato didáctico, se puede ver (D'Amore, 1999), que dedica un capítulo a este tema.

Citando (Brousseau, 1980, p.127), mencionado en (D'Amore, 1999), "*En una situación de enseñanza, preparada y realizada por un maestro, el alumno tiene por lo general la tarea de resolver el problema (matemático) que se le presenta, pero el acceso a esta tarea acontece a través de la interpretación de las preguntas, de las informaciones proporcionadas, de las obligaciones impuestas que son constantes del modo de enseñar del maestro. Estas costumbres específicas del maestro, esperadas por el alumno, y los comportamientos del alumno esperados por el maestro constituyen el contrato didáctico"* (traducción del autor de la tesis).

Estas expectativas, muchas veces, no se deben a acuerdos declarados, sino a la concepción de escuela y de matemática que prevalece, comunicada quizás por la repetición de modalidades.

Sintéticamente y en sentido amplio, podemos referirnos al contrato didáctico como a un conjunto de reglas, a veces no declaradas explícitamente ni fijadas intencionalmente, a veces ni siquiera existentes en realidad, sino construidas por los individuos involucrados en las prácticas escolares para alguna exigencia de coherencia, que ordenan las relaciones entre contenido a enseñar, los alumnos y el maestro y determinan las expectativas en la clase de matemáticas.

Las relaciones entre los polos del triángulo didáctico son complejas, y son de manera muy fuerte influenciadas por el ambiente sociocultural en el que alumno, maestro y el mismo saber (de acuerdo con Chevallard) por quien todo conocimiento es conocimiento de una institución (Sierpinska & Lerman, 1996)) están inmergidos.

En nuestra investigación es de interés también el papel del lenguaje común, como elemento del ambiente en el que es puesto el sistema didáctico, en las relaciones entre los polos del sistema, y específicamente entre maestro y alumno y entre alumno y saber. Se trata de una problemática muy amplia y aún no bien aclarada en didáctica de las matemáticas, por lo tanto sólo menciono algunos aspectos. El **lenguaje común y el lenguaje matemático** aparecen a menudo tener características diferentes y a veces contrapuestas. El lenguaje en el que se habla de los conceptos matemáticos tiene un código semiológico específico, con convenios a veces explícitos a veces implícitos, diferentes al del lenguaje común. El mismo término es a veces usado en ambos lenguajes, el lenguaje común y el lenguaje matemático, con significado diferente, y esto provoca confusión e inseguridad.

Estudios significativos sobre estos aspectos son los de (Laborde, 1995), (Maier, 1989), (Duval, 1993).

Capítulo 2 – Diseño de la investigación.

2.1 – Antecedentes y planteamiento inicial

2.1.1 Problemática general.

Es parte de la experiencia de cada maestro de escuela preparatoria o de los primeros años de universidad la observación de varios comportamientos de parte de los estudiantes que pueden sintéticamente expresarse en términos de falta de claridad en el interpretar y rigor en el argumentar sobre objetos matemáticos y sus propiedades. Para mencionar algunos de estos comportamientos:

- los estudiantes entienden con dificultad las demostraciones que los maestros les proporcionan
- invitados a demostrar alguna propiedad o a reproponer demostraciones ya vistas por el maestro, tienden a proponer solamente ejemplos particulares.
- no pueden reproponer los enunciados de los teoremas en sus elementos esenciales
- no identifican fácilmente hipótesis y tesis
- cuestionan a menudo la necesidad de dichas demostraciones;

Los maestros que se topan con estos comportamientos, en realidad distintos entre ellos y cada uno de los cuales podría ser visto como un fenómeno didáctico específico, los reconducen por lo general a un mismo problema, que identifican con una genérica dificultad en la demostración y en la argumentación en matemática, y que más genéricamente aún explican con las expresiones: “falta de rigor lógico”, “falta de capacidad de razonamiento”, u otras expresiones equivalentes.

Esta referencia a la lógica es por lo general muy vaga y genérica: los términos “rigor lógico”, “razonamiento” y “capacidad de razonamiento” no se precisan en su significado, casi dejándolos a nivel de conceptos primitivos, pertenecientes, para decirla con (Fischbein, 1983) al nivel de la intuición. Así que la observación de la supuesta falta de rigor lógico y de capacidad de razonamiento, no da al maestro ninguna indicación útil para una intervención al respecto. Los maestros y las instituciones que se mueven por el afán de intervenir al respecto, proponen y realizan iniciativas y actividades de mucho compromiso pero de escasa utilidad. En mi escuela por ejemplo, hace varios años una discusión en la que se observaba la poca capacidad de razonamiento y rigor lógico, generó la propuesta, realizada luego por tres años seguidos, de un curso breve de introducción a la lógica simbólica, para alumnos de nuevo ingreso[3].

Por otro lado, esta referencia a la lógica no solamente resulta tan vaga que termina por resultar estéril, sino resulta delimitar a un nivel, exactamente el nivel lógico, las dificultades de los alumnos. Se ignoran así, o por lo menos se consideran de poca importancia, otros factores que podrían entrar en la generación de los comportamientos arriba mencionados. Me refiero a factores que podrían genéricamente ser llamados disciplinares, didácticos, sociales y culturales, factores cuyo peso ha sido puesto en evidencia por el desarrollo reciente de la matemática educativa.

2.1.2 Identificación del fenómeno didáctico.

Teniendo interés en abordar de alguna manera la problemática arriba mencionada, se impuso rápidamente la necesidad de identificar el fenómeno didáctico a analizar.

Considerando demasiado amplia para nuestro estudio la consideración, como fenómeno didáctico, de la dificultad de los alumnos en la actividad escolar de argumentar, razonar o demostrar[4], nos enfocamos en uno de los fenómenos didácticos que se presentan en dicha actividad: *la dificultad de comprensión, de parte de los alumnos, del enunciado de un teorema, propuesto por el maestro o reportado en un libro de texto*.[5]

Al observar que el uso de los enunciados en la actividad matemática escolar no se limita al caso de la demostración de teoremas, sino es fundamental en muchos otros momentos de dicha actividad, hemos redefinido el fenómeno didáctico a estudiar en términos de *las dificultades de comprensión de parte de los alumnos de los enunciados escolares*

---

[3] Sobre la utilidad de la enseñanza de la lógica formal para aumentar la capacidad de razonamiento hay opiniones muy diferentes. Me limito a reportar dos, como documentación de la pluralidad de posiciones al respecto. (Copi & Cohen, 2008) comparan la utilidad para un estudiante del conocimiento de la lógica matemática a fines de razonar de manera correcta al conocimiento para un atleta de la anatomía o fisiología humanas a fines de obtener buenas prestaciones, y concluye que como para el atleta el conocimiento de anatomía y fisiología humanas no es condición para que alguien se convierta en buen atleta, pero este conocimiento puede mejorar las prestaciones de un buen atleta, así para un estudiante el conocimiento de la lógica simbólica no es suficiente para la capacidad de argumentar correctamente, pero sí puede mejorar la capacidad de razonamiento correcto. (Manara, 1992) opina que las disciplinas científicas, y de manera especial las matemáticas, no se pueden considerar como las solas responsables de la formación de una adecuada capacidad lógica. Todas las disciplinas pueden cooperar al proceso de educación a la lógica a través de la educación al uso conciente del lenguaje y de la educación a la búsqueda de la verdad.

[4] Los mismos términos argumentación, razonamiento y demostración, aquí mencionados en términos generales, necesitarían ser precisados. Véase para esto (Duval, 1995)

[5] Con respecto al papel de la comprensión del enunciado en la actividad demostrativa en el aula, se puede mencionar (Crespo, 2005), quien diferencia, al considerar las actividades fundamentales relativas a las demostraciones en el aula, dos actividades: la de entender demostraciones y la de hacer demostraciones. La actividad de *comprender el enunciado* es considerada la primera etapa de la comprensión de una demostración ligada a la trascripción, e incluye aspectos matemáticos y lógicos.

.

2.1.3 *El enunciado en la lógica y en la práctica escolar.*

Damos en este párrafo una idea, necesariamente sumaria, del enunciado en la lógica, y hacemos algún comentario acerca del enunciado en la práctica escolar[6].

(Copi & Cohen, 2008) al inicio de su obra “Introducción a la lógica”, al abordar la lógica de una manera por decir así general, no simbólica se refieren, con el término *proposición*, a cualquier afirmación de la que se puede decir sin duda si es verdadera o falsa. Distinguen entre proposiciones y *oraciones*, al decir que dos oraciones pueden ser diferentes por constar de palabras diferentes, pero pueden tener el mismo significado y expresar por lo tanto la misma proposición. Aclaran luego que la misma proposición puede expresar enunciados diferentes, al ser verdadera o falsa en contextos diferentes. Atribuyen por lo tanto al término *enunciado* el significado de proposición que tiene asociado un cierto valor de verdad. En realidad los mismos autores afirman que otros identifican los términos proposición y enunciado, lo que también nosotros haremos en este trabajo, refiriéndonos en ambos casos a una frase de la que se puede decir si es verdadera o falsa.

Argumento es, en sentido lógico, una colección de enunciados de los cuales uno se sigue de los otros, que de alguna manera fundamentan su verdad. Se trata por lo tanto de una colección de enunciados con una estructura, y en esta estructura se describen algunas proposiciones como *premisas* y otra como *conclusión*. La conclusión de un argumento es la proposición que se afirma con base en las otras proposiciones del mismo argumento, que son supuestas como apoyo para aceptar las conclusiones, y que por lo tanto son consideradas premisas.

Al pasar a la *lógica simbólica*, cada enunciado se representa con símbolos (letras mayúsculas), y se le asocia un valor de verdad; se distinguen enunciados simples y enunciados compuestos a través de conectivos, cuya definición se puede hacer a través de tablas de verdad. Al considerar los enunciados como estructuras sin depender de su aspecto particular, se habla de *forma enunciativa*. En dichas formas se usan variables enunciativas, representadas con letras minúsculas. Asimismo, al considerar los argumentos con interés más en su forma que en argumentos particulares, se habla de *formas argumentales.* Una forma argumental es cualquier arreglo de símbolos que

[6] Los términos relacionados con el proceso demostrativo y argumentativo, no son en la actualidad utilizados por todos los autores con el mismo significado. En estas notas nos referimos al significado que nos parece más difundido, y que se puede reconducir en general a la visión formalista. Para un análisis de las varias posiciones, véase (Crespo, 2005).

contiene variables enunciativas, de tal modo que al sustituir las variables enunciativas por enunciados, se obtiene como resultado un argumento. Para las formas argumentales reviste importancia el concepto de validez, que formaliza el concepto intuitivo de razonamiento correcto: una forma argumental es válida si al sustituir a las variables enunciativas enunciados específicos de manera homogénea, en todos los casos en los cuales las premisas son verdaderas resulta verdadera la conclusión. Obviamente al interesar solo los valores de verdad de los enunciados, no se trata de averiguar que sea verdadera la conclusión por los infinitos casos posibles de enunciados particulares que se pueden sustituir en la forma argumental, sino que sea verdadera la conclusión por los finitos casos posibles de valores de verdad de las variables enunciativas. La validez de una forma argumental se puede concluir de manera formal, a través de un verdadero proceso demostrativo.

En el cálculo de los predicados con cuantificadores, los enunciados se pueden obtener del predicado p(x), en el que comparece una variable x, cuyo valor varía en un cierto universo U, al sustituir x con un valor particular *a* en U, obteniendo p(a), o al intervenir con cuantificadores universal o existencial, obteniendo

$\forall x[p(x)]$

$\exists x[p(x)]$

Los argumentos y sus procesos de validación en este cálculo son análogos, obviamente *mutatis mutandis*, a los del cálculo de los enunciados. Más adelante en este mismo capítulo, se pueden hallar varios ejemplos de enunciados en el cálculo de los predicados y su formalización.

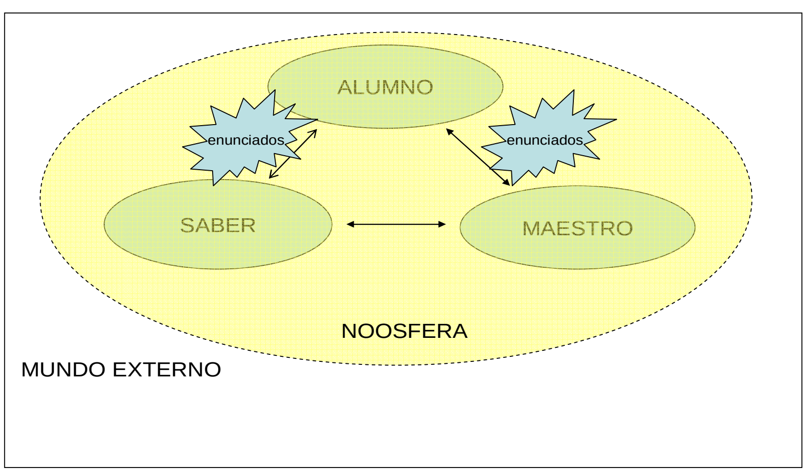
No podemos adentrarnos en los detalles del tema, sólo aclaramos que en la tradición más estrictamente matemática, a un enunciado que exprese una propiedad matemática, que se derive por medio de un argumento (la *demostración*), se le llama *teorema.* Más bien teorema es el último enunciado de una prueba o demostración (Crespo, 2005, p.30 y p.33; véase también Supples &Hill, 2004, p. 248). En el caso de un teorema, las premisas suelen también llamarse *hipótesis* y la conclusión suele también llamarse *tesis* (Crespo, 2005 p.106).[7]

[7] Puede servir considerar a título de ejemplo de uso de los términos teorema, hipótesis y conclusión (tesis) en el ambiente matemático (por lo menos escolar), la definición siguiente, que se encuentra en un conocido texto de cálculo a nivel universitario: "Las propiedades que se pueden demostrar como consecuencias lógicas de los axiomas se denominan **teoremas**. En el enunciado de la mayoría de los teoremas existen dos partes: la parte "si" conocida como **hipótesis**, y la parte "entonces", denominada **conclusión**. El razonamiento o argumento que se emplea para comprobar un teorema se llama

Para llegar al papel del enunciado en la práctica escolar, consideramos que el enunciado, definido como anteriormente, entra en cada proceso de comunicación escolar sobre temas matemáticos entre alumno y maestro, en cada proceso de argumentación y en cada proceso de organización del conocimiento. Obviamente no nos referimos al enunciado en la lógica simbólica, siendo que en el nivel de escuela secundaria y preparatoria no se utiliza ninguna formalización lógica, sino al enunciado en el lenguaje común, o en aquel particular lenguaje común, quizás aún no suficientemente estudiado, con el que se habla de argumentos matemáticos. En los libros de texto por otra parte, siendo la necesidad de orden, exactitud y de claridad aún más grande, el uso de los enunciados, a un nivel, además, más formal que en la práctica didáctica cotidiana en el aula de matemáticas, es aún más relevante.

Exactamente por esta relevancia del uso del enunciado, el fenómeno didáctico de la falta de comprensión de los enunciados matemáticos escolares afecta de manera consistente la actividad matemática escolar.

Puede servir ubicar el fenómeno a estudiar en el triángulo didáctico mencionado con anterioridad. En nuestra opinión dicho fenómeno afecta las relaciones entre el maestro y el alumno, y entre el alumno y el saber, al pensar en una posible actividad de estudio directa del alumno, por ejemplo con el uso de los libros de texto.



Cuadro 2

demostración. Una demostración consiste en probar que la conclusión se deduce de la supuesta verdad de la hipótesis." (Leithold, L., 1992, p. 2).

2.1.4 Elección del cuestionario como instrumento de investigación y población a la que aplicarlo.

La misma naturaleza del fenómeno didáctico en estudio - las dificultades de comprensión de parte de los alumnos de los enunciados matemáticos escolares - nos han sugerido el instrumento de investigación: un cuestionario, que propusiera a un grupo de alumnos unos enunciados y algunas preguntas aptas para averiguar la comprensión de los mismos.

Pensando en el nivel en el que se desarrolla mi trabajo de enseñanza, en el afán de poder aplicar los resultados de la investigación a mi trabajo diario y en el mismo tiempo de poder tener acceso con facilidad a datos, limitamos el ámbito de investigación al comportamiento de los alumnos del primer semestre de la escuela de Ingeniería de la Universidad Anáhuac de Oaxaca.

2.1.5 Acercamiento operativo a la noción de comprensión de un enunciado.

Nos pareció enseguida evidente la necesidad de precisar qué se entiende con *comprensión de un enunciado* y *cuándo se pueda concluir que un enunciado es comprendido*.

Por lo que se refiere a la primera cuestión, precisamos, siendo que el término *comprensión* se presta a imprecisiones y vaguedades, que con este término entendemos más bien la *correcta interpretación* del enunciado en los términos propios del saber enseñado.

Por lo que se refiere a la segunda cuestión, nos ha ayudado metodológicamente el trabajo de (Gallardo & González, 2007), en el que los autores, frente a la necesidad de estudiar la comprensión del conocimiento matemático, consideran tan complejo el tema que deciden por un acercamiento operativo[8]. En esta línea, dentro de los muchos indicadores posibles de comprensión de un enunciado, al menos tan numerosos cuanto numerosos son los aspectos involucrados en el proceso, se escogieron dos indicadores:

a) Saber explicar de manera esencialmente correcta el mismo enunciado

b) Saber identificar con claridad hipótesis y tesis

[8] Más específicamente Gallardo y González en su investigación precisan que por comprensión de un conocimiento se puede entender “responder o elaborar una respuesta adaptada” en relación a un problema propuesto

2.1.6 Hipótesis de explicación del fenómeno

Al investigar un fenómeno didáctico, no es interesante solamente averiguar la consistencia del fenómeno, sino también identificar las posibles causas. Por lo que se refiere al fenómeno a estudiar en nuestro caso, a partir de nuestra formación y de nuestra experiencia didáctica, pensamos, al momento de diseñar la investigación, que dos podían ser los elementos importantes para la comprensión o la no comprensión de los enunciados: el *contenido disciplinar* y la *complejidad lógica* de los enunciados. Pensamos por lo tanto obtener a través del cuestionario, datos para averiguar la consistencia de esta conjetura.

2.1.7 Posibles problemas de uso de formas lingüísticas.

Al intentar identificar el peso de la complejidad lógica de los enunciados en la comprensión, nos dimos cuenta de la posibilidad de confundir los problemas lógicos con problemas que más bien son inherentes al uso de particulares formas lingüísticas.

En efecto, un mismo enunciado puede ser expresado, desde el punto de vista lingüístico, de varias maneras, y su comprensión, especialmente con respecto a la identificación de hipótesis y tesis, puede ser facilitada o obstaculizada por el uso de particulares formas lingüísticas. El enunciado “La suma de los ángulos internos de un triángulo es un ángulo llano” tiene la misma complejidad lógica que el enunciado : “Si ABC es un triángulo, entonces la suma de sus ángulos internos es un ángulo llano”. Y sin embargo uno de los dos podría resultar para algún alumno de más fácil comprensión que el otro.

Aunque esta problemática nos pareció compleja y de difícil abordaje en la tesis, optamos por tomarla en cuenta insertando en el cuestionario una parte que, al proporcionar datos sobre la utilidad del uso de la forma “si…entonces” para la comprensión de los enunciados escolares, corroborara los demás datos.

2.1.8 Preguntas de investigación

Las reflexiones anteriores llevaron a la formalización de algunas preguntas de investigación. Estas preguntas son *sustancialmente operativas* y se refieren a las cuestiones identificadas en los puntos anteriores.

a) Las primeras dos preguntas pretenden *averiguar si hay dificultades* en los alumnos del primer semestre de ingeniería de la Universidad Anahuac de Oaxaca en comprender, es decir interpretar correctamente, los enunciados escolares. Son las siguientes:

1) ¿Pueden los alumnos explicar de manera no formal pero sustancialmente correcta los enunciados escolares en sus elementos esenciales?

2) ¿Tienen los alumnos dificultades en identificar con claridad hipótesis y tesis en un enunciado que se les propone?

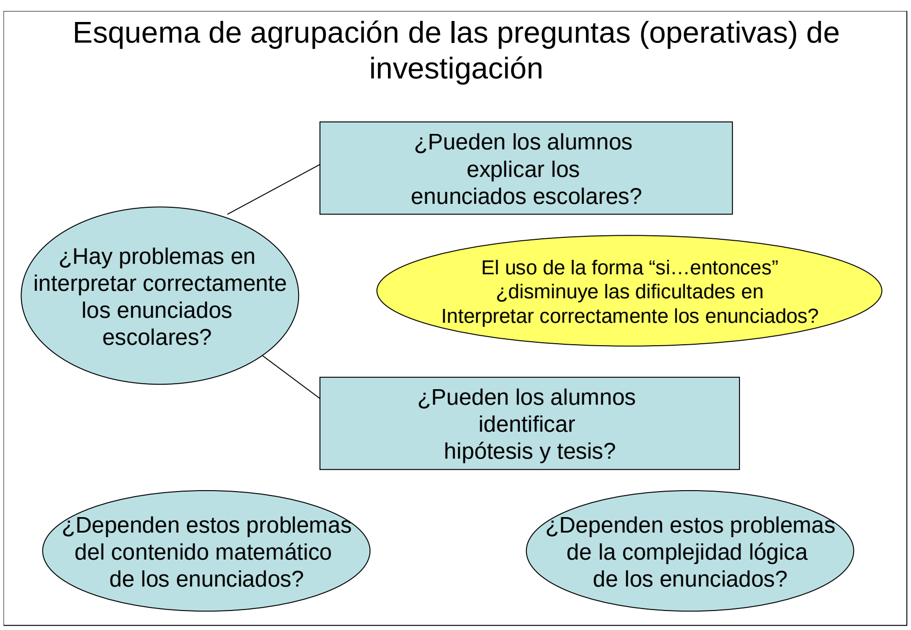
b) La tercera y cuarta pregunta pretenden *averiguar la conjetura que elementos importantes en explicar la dificultad de los alumnos sean el contenido matemático de los enunciados y su complejidad lógica*, y son las siguientes:

3) ¿Dependen, las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, del contenido matemático de los enunciados?

4) ¿Dependen, las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, de la estructura lógica del teorema (número de hipótesis, uso de cuantificadores)?

c) La quinta pregunta, como dijimos, pretende solo corroborar los resultados de las demás preguntas, al explorar el peso de otra posible variable, es decir el uso de particulares formas lingüísticas, y solamente por sencillez operativa ha sido desincorporada.

5) ¿Las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, ¿son inferiores si el maestro utiliza al presentar los enunciados la forma "si…entonces"?



Cuadro 3

2.2 El cuestionario: texto

El cuestionario producido es por lo tanto el siguiente.

Considera el siguiente enunciado:

1. Cada número impar es el sucesivo de un número par

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

2. Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

3. Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

4. Cada triángulo se puede inscribir en un círculo

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

5. Por cada par de números enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del menor que supere el mayor.

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

6. Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía.

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

7. Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos y los cuatro lados iguales, también tienen las diagonales perpendiculares

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

8. Los números enteros que son en el mismo tiempo múltiplos de 3 y de 2, también son múltiplos de 6

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

9. Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana.

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

10.	Si a,b,c son alturas de un triángulo, entonces se encuentran en un mismo punto

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

11.	Si a es un múltiplo de 6, entonces también es múltiplo de 3

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

Considera el siguiente enunciado:

12.	Si una persona es italiana, también es europea

Explica con tus palabras la afirmación.
…………………….
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?
…………..
Cuál es (o son) la(s) tesis?
…………..
Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?
……………………………

2.3 – El cuestionario: diseño

Explicamos ahora cómo se elaboró el cuestionario a partir de las preguntas de investigación.

Pregunta de investigación 1. Para poder recolectar elementos para contestar la primera pregunta de investigación *(¿Pueden los alumnos de nuevo ingreso en las carreras de ingeniería de la UAO explicar de manera no formal pero sustancialmente correcta los enunciados escolares en sus elementos esenciales?)* hemos formulado la consigna:

"Explica con tus palabras la afirmación:" :

Con esta consigna se pretendía averiguar la capacidad de reformular, en un lenguaje diferente (lenguaje natural), el enunciado propuesto, manteniendo la conexión lógica entre las partes en juego, comportamiento esto considerado buen índice de comprensión del enunciado. Se optó por considerar aceptables las respuestas que mantuvieran el sentido de las afirmaciones propuestas, sin importar la exactitud de las palabras usadas, ya sea que mantuvieran la formulación originaria, ya sea que formularan el enunciado de manera lógicamente equivalente.

Pregunta de investigación 2. Para poder recolectar elementos para contestar la segunda pregunta de investigación *(¿Tienen los alumnos dificultades en identificar con claridad hipótesis y tesis en un enunciado que se les propone?)* se formularon las preguntas:
¿Cuál o cuáles son las hipótesis?
¿Cuál o cuáles son las tesis?
Estas preguntas pretendían investigar si el alumno sabe distinguir, en un enunciado, los elementos más importantes: el conjunto de premisas y la conclusión.
Con la inquietud de entender si los alumnos, aún sin conocer los términos hipótesis y tesis, supieran identificar la conexión lógica entre premisa y conclusión, se añadió una cuarta pregunta:
En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Pregunta de investigación 3. Para poder recolectar elementos para contestar la tercera pregunta de investigación *(¿Dependen, las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, del contenido matemático de los enunciados?)* se escogieron enunciados de contenido matemático diferente: contenido aritmético (teoría de números), contenido geométrico (geometría elemental), contenido no matemático (lenguaje ordinario). Decidimos por otro lado limitarnos a enunciados que involucraran solamente contenidos matemáticos básicos, eso es, aritmética y geometría elemental, por el hecho que estos contenidos son por lo general claros para los alumnos al término de los estudios preparatorios.

Pregunta de investigación 4. Para poder recolectar elementos para contestar la cuarta pregunta de investigación *(¿Dependen, las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, de la estructura lógica del teorema (número de hipótesis, uso de cuantificadores)?*, propusimos enunciados con diferente complejidad lógica, cuanto a presencia de cuantificadores en el enunciado y número de premisas o hipótesis. Se decidió proporcionar enunciados en tres bloques de tres enunciados cada uno, con características diferentes, y por cada bloque se puso un enunciado de contenido aritmético, un enunciado de contenido geométrico, un enunciado de contenido no matemático.

Más explícitamente, con respecto a la complejidad lógica, se produjo lo siguiente:

Primer bloque: los enunciados tienen la forma lógica $\forall x \in U[A(x) \to B(x)]$, y además tienen un cuantificador universal en la primera parte, mientras no tienen, o tienen solamente implícito, el cuantificador existencial

Segundo bloque: los enunciados tienen la forma lógica $\forall x \in U[A(x)]$, y tienen un cuantificador universal en la primera parte, mientras en la segunda tienen explícito un cuantificador existencial.

Hay que decir que en la práctica el enunciado 4 no resultó coherente siendo que el cuantificador existencial es demasiado escondido, mientras tenía que ser explícito.

Tercer bloque: los enunciados tienen la forma $\forall x \in U[P(x) \wedge I(x) \to D(x)]$, es decir dos enunciados en conjunción como antecedentes, cuantificador universal y no tienen cuantificador existencial. Este bloque se configuró como el de mayor complejidad lógica, por el número de premisas que presentan sus enunciados.

Pregunta de investigación 5. Para poder recolectar informaciones acerca de la utilidad de la forma "si…entonces" para la comprensión del enunciado, como expresado en la quinta pregunta de investigación *(¿Las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, ¿son inferiores si el maestro utiliza al presentar los enunciados la forma "si…entonces"?)* añadimos un cuarto bloque, constituido por enunciados del tipo $\forall x \in U[A(x) \rightarrow B(x)]$, es decir de la misma complejidad lógica que el primer bloque, pero en los cuales se utiliza la forma "si…entonces". Esto al pensar que la comparación de los resultados del cuarto bloque con los resultados del primer bloque diera indicaciones acerca de la utilidad de la forma "si…entonces".

Observación crítica. Al conducir un análisis más profundo de los enunciados desde el punto de vista lógico (véase el párrafo sucesivo), nos dimos cuenta de algunas dificultades en diferenciar claramente los enunciados del test desde este punto de vista. Dichas dificultades nos parecen sustancialmente las siguientes.

- La primera se refiere a los cuantificadores. Al utilizar un lenguaje no formalizado, un enunciado se puede expresar de varias maneras, equivalentes cuanto a significado, pero diferentes cuanto a cuantificadores usados. Esto hace más débil la caracterización arriba evidenciada de los enunciados a partir del número y tipo de cuantificadores. Una claridad mayor desde este punto de vista sólo se alcanzaría al usar un lenguaje formalizado, cosa imposible en este caso
- La segunda se refiere al número de premisas de cada enunciado. Al buscar y escoger los enunciados, lo que teníamos como referencia era una formalización que utilizara algún conjunto general de referencia, lo que por lo general se denomina como *conjunto universo*. Ahora bien, dicho conjunto puede ser determinado de varias maneras, no es unívocamente establecido. Esto conlleva a un número de premisas diferente dependiendo de la elección efectuada. Si se quieren caracterizar los enunciados por el número de premisas o hipótesis, parece mejor considerar el conjunto universo como un conjunto de premisas o hipótesis, previas o generales, pero que hay que considerar para evaluar la complejidad de cada enunciado que dio origen a la división en bloques.
- La tercera se refiere al uso de los predicados binarios y ternarios. Los enunciados 5 y 10, pueden ser expresados a través de predicados binarios (en.5) y

ternarios (en.10). Esta circunstancia añade otro factor de complejidad lógica para estos dos enunciados.

Nos parece por lo tanto que *la parte del test que se refiere a la complejidad lógica de los enunciados, puede ser mejorada*. Esto no significa que los datos recolectados no sean significativos, pero que sí hay que evaluar con cuidado lo que estos datos indican con respecto a la cuarta pregunta de investigación.

El análisis de cada enunciado, en el párrafo 2.4, proporcionará ejemplos de varias formalizaciones posibles del mismo enunciado.

Nota acerca del uso de los términos hipótesis y tesis en las preguntas del cuestionario. En la elaboración del cuestionario, al formular las preguntas 2 y 3, hemos utilizado los términos hipótesis y tesis. Como observado en el párrafo 2.1.3, los términos hipótesis y tesis se refieren específicamente a los enunciados de los teoremas, no a todos los enunciados. Su uso en el caso de los enunciados en lenguaje común, podría ser considerado por lo tanto, y con razón desde el punto de vista riguroso, impropio. La decisión de utilizar dichos términos en todos los casos, se debe al hecho que nos pareció la manera más comprensible para los alumnos de formulación de la pregunta.

2.4 El cuestionario: análisis de cada enunciado

Analizamos a seguir cada enunciado, proporcionando por cada uno *una posible* formalización lógica. Esta parte, cuyo tecnicismo puede parecer excesivo, tiene la finalidad de darnos cuenta de la naturaleza lógica de los enunciados y, como será evidente en el capítulo siguiente, identificar con más claridad el tipo de respuestas de los alumnos.

Decidimos utilizar el lenguaje escolar de la lógica de los predicados con cuantificadores, por ser suficientemente preciso sin ser demasiado técnico. *No se debe entender este análisis como exhaustiva,* siendo que nuestro objeto de estudio no es la estructura lógica de los enunciados escolares.

Como ya observado con anterioridad, dicha formalización no es unívocamente determinada, siendo posibles más elecciones sea con respecto a los cuantificadores, sea con respecto a la elección del conjunto universo. En algunos casos, se proporcionan varias posibles formalizaciones, cuando pueden corresponder a razonamientos diferentes de parte de los alumnos.

Proporcionamos también por cada enunciado una lista de conceptos logico-matemáticos involucrados en los enunciados, cuyo conocimiento se debe considerar necesario para la comprensión del enunciado en los que comparecen.

1. Cada número impar es el sucesivo de un número par

Formalización lógica:
U={números enteros}=Z
I(x): ”x es impar”
S(x): ”x es sucesivo de un número par”
$\forall x \in U[I(x) \rightarrow S(x)]$

Obs: El predicado S(x) puede ser expresado de manera diferente, más formal:
$\exists p \in P : x$ es sucesivo de p, siendo P el conjunto de los enteros pares
o, para evitar el término "sucesivo":
$\exists p \in P : x = p+1$, siendo P el conjunto de los enteros pares
También se puede expresar en símbolos el conjunto P, etc.

Conceptos necesarios: número par, número impar, sucesivo de un número, cuantificación universal (presente con el término “cada”), cuantificación existencial (implícita en el enunciado).

2. Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

Formalización lógica:
U={triángulos}
I(x): “x es isósceles”
A(x): “x tiene dos ángulos iguales”
$\forall x \in U[I(x) \rightarrow A(x)]$

Obs: El predicado A(x) puede ser expresado de manera diferente: “existen dos ángulos internos del triángulo que son iguales”.

Conceptos necesarios: triángulo, triángulo isósceles (entendido como triángulo que tiene 2 lados iguales), ángulo, igualdad entre ángulos, cuantificación universal (presente con el término “cada”), cuantificación existencial (implícita en el enunciado).

3. Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos

Formalización lógica:
U={personas}
M(x): "x es maestro del Instituto Italiano de Cultura"
I(x): "x es italiano"
$\forall x \in U[M(x) \rightarrow I(x)]$

Conceptos necesarios: cuantificación universal (expresada con el término "todos").

4. Cada triángulo se puede inscribir en un círculo

Formalización lógica
U={triángulos}
I(x): "x se puede inscribir en un círculo"
$\forall x \in U[I(x)]$
El predicado I(x) también puede ser expresado de la manera siguiente: "existe un círculo que pase por todos los vértices de x".

Otra formalización notable podría ser la siguiente:
U={polígonos}
T(x): "x es un triángulo"
I(x): "x se puede inscribir en un círculo"
$\forall x \in U[T(x) \rightarrow I(x)]$

Conceptos necesarios: triángulo, círculo, inscribir un triángulo en un círculo, cuantificación universal (expresada con el término "cada", cuantificación existencial (implícita)

5. Por cada par de números enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del menor que supere el mayor.

Formalización lógica:
Una formalización lógica en armonía con los enunciados 4 y 6, es la siguiente:
U={pares de enteros positivos diferentes entre ellos}
M(x): "siendo x un par de enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del entero menor que supere el mayor"
$\forall x \in U[M(x)]$

Otra formalización posible es la siguiente:
U={enteros positivos}=Z+
D(x,y): "x es diferente a y"
m(x,y): "x es menor a y"
M(x,y): "y es múltiplo de x"

$\forall x, y \in U \exists z \in U[D(x, y) \wedge m(x, y) \rightarrow M(x, z) \wedge m(y, z)]$

En realidad esta formalización utiliza predicados binarios. Sin embargo quizás sea la más cercana a la primera comprensión de parte de los alumnos.

Conceptos necesarios: número entero positivo, números diferentes, múltiplo, menor, mayor, cuantificador existencial, cuantificador universal.

6. Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía.

Formalización lógica:
U={calles del centro de la ciudad de Oaxaca}
A(x): "x tiene alguna tienda de artesanía"
$\forall x \in U[A(x)]$
El enunciado A(x) se puede también interpretar de la manera siguiente: "existe en x alguna tienda de artesanía".

Conceptos necesarios: cuantificación universal ("cada"), cuantificación existencial ("tiene al menos").

7. Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos y los cuatro lados iguales, también tienen las diagonales perpendiculares

Formalización lógica
U={cuadriláteros}
P(x): "x tiene los lados opuestos paralelos"
I(x): "x tiene los cuatro lados iguales"
D(x): "x tiene las diagonales perpendiculares"
$\forall x \in U[P(x) \wedge I(x) \rightarrow D(x)]$

Obs: las hipótesis son redundantes, siendo que al tener un cuadrilátero los cuatro lados iguales, los lados opuestos son paralelos.

Conceptos necesarios: cuadrilátero, lados, lados opuestos, lados iguales, diagonal, perpendicularidad, cuantificación universal (implícita en el enunciado).

8. Los números enteros que son en el mismo tiempo múltiplos de 3 y de 2, también son múltiplos de 6

Formalización lógica
U={números enteros}=Z
M2(x): "x es múltiplo de 2"

M3(x): “x es múltiplo de 3”
M6(x): “x es múltiplo de 6”
$\forall x \in U[M3(x) \wedge M2(x) \rightarrow M6(x)]$

Conceptos necesarios: número entero, múltiplo, cuantificación universal (implícita en el texto).

9. Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana.

Formalización lógica
U={pintores}
O(x): “x es oaxaqueño”
E(x): “x tiene éxito en el exterior del país”
P(x): “x proviene de una tradición popular y artesana”
$\forall x \in U[O(x) \wedge E(x) \rightarrow P(x)]$

Conceptos necesarios: cuantificación universal (implícita en el texto).

Otra formalización posible:
U={pintores oaxaqueños}
E(x): “x tiene éxito en el exterior del país”
P(x): “x proviene de una tradición popular y artesana”
$\forall x \in U[E(x) \rightarrow P(x)]$

10. Si a,b,c son alturas de un triángulo, entonces se encuentran en un mismo punto

Formalización lógica:
U={segmentos}
A(x,y,z): “x,y,z son alturas de un mismo triángulo”
C(x,y,z): “x,y,z se encuentran en un mismo punto”
$\forall x, y, z \in U[A(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)]$

Conceptos necesarios: triángulo, altura, punto común entre rectas.

Obs. El predicado A(x,y,z) se puede también expresar “existe un triángulo del cual x, y, z son alturas”
Obs. La formulación del enunciado puede inducir a confusión, al suponer claro que en el caso de alturas de un triángulo, decir que las alturas (segmentos) se encuentran en un mismo punto se entiende que son las prolongaciones (rectas) que se encuentran en un mismo punto. Una formulación más clara podría ser: si a,b,c son alturas de un triángulo, entonces sus prolongaciones se encuentran en un mismo punto.

11. Si a es un múltiplo de 6, entonces también es múltiplo de 3

Formalización lógica:
U={números enteros}=Z
M6(x): "x es múltiplo de 6"
M3(x): "x es múltiplo de 3"
$\forall x \in U[M6(x) \rightarrow M3(x)]$
Conceptos necesarios: números enteros, múltiplo.

12. Si una persona es italiana, también es europea

Formalización lógica:
U={personas}
I(x): "x es italiano"
E(x): "x es europeo"
$\forall x \in U[I(x) \rightarrow E(x)]$
Conceptos necesarios: cuantificación universal (implícita en el texto).

2.5 Aplicación del cuestionario

El cuestionario ha sido propuesto a 6 alumnos de nuevo ingreso en la carrera de Ingeniería Industrial para la Dirección y a 18 alumnos de nuevo ingreso en la carrera de Ingeniería en Tecnología de la Información y de la Telecomunicación en la Universidad Anáhuac de Oaxaca. De todos los alumnos de nuevo ingreso de las dos carreras, han sido seleccionados los alumnos que provenían de las escuelas preparatorias, descartando todos los alumnos que llegaran de otras universidades o repetidores. Esto para que se tuvieran datos homogéneos y referidos a la situación de los alumnos al salir del nivel preparatoria.

La fecha de aplicación ha sido elegida en la primera semana de clase del primer semestre de la carrera (fecha exacta 12 de agosto de 2006), para que el posible desarrollo en las clases del semestre de temas de matemáticas u otras disciplinas no modificara las respuestas.

El tiempo dejado para la elaboración de las respuestas ha sido de aproximadamente una hora ocupando la parte final de la clase de Fundamentos de matemáticas modernas, clase cuya duración global es de una hora y media.

Capítulo 3 – Primer nivel de análisis

Diferentes niveles de análisis de las respuestas al cuestionario

En los capítulos 3, 4 y 5 se analizan las respuestas obtenidas al suministrar el cuestionario.

Como ya dicho, a los 24 alumnos del grupo se propusieron 12 enunciados, y por cada enunciado se pusieron cuatro preguntas:

- *Primera pregunta: Explica con tus palabras la afirmación:*
- *Segunda pregunta:¿Cuál es (o son) la (s) hipótesis?*
- *Tercera pregunta: ¿Cuál es (o son) la(s) tesis?*
- *Cuarta pregunta:¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? ¿Cuáles?*

El análisis de las respuestas se efectuó a tres niveles diferentes.

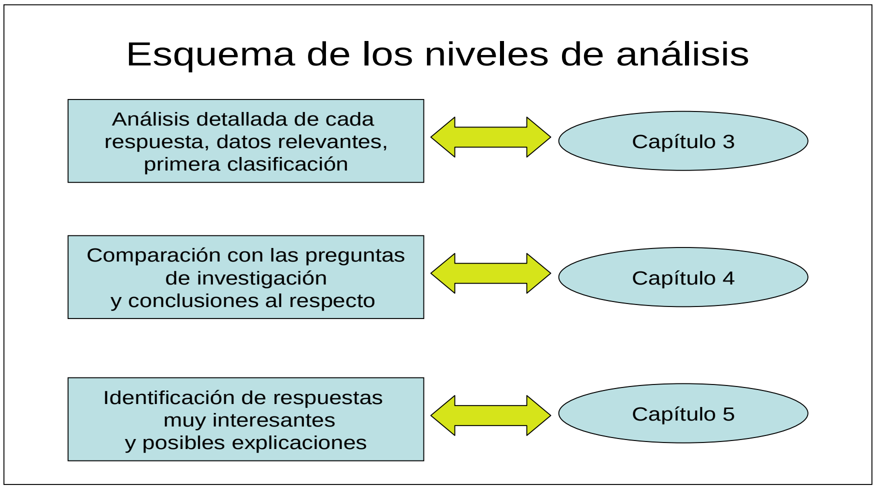
a) En el **primer nivel de análisis**, reportado en el **capítulo 3**, se analizaron una por una las respuestas de cada alumno a cada pregunta referida a cada uno de los doce enunciados, haciendo observaciones sobre sus características sobresalientes y llegando a una primera clasificación.

b) En el **segundo nivel de análisis,** reportado en el **capítulo 4, se** comparan los resultados del cuestionario con las preguntas de investigación.

Siendo que partes diferentes del cuestionario se pueden referir a la misma pregunta de investigación, este análisis fue más complejo. La conexión entre las partes del cuestionario y las preguntas de investigación se reportará al inicio del capítulo 4.

c) El **tercer nivel de análisis,** reportado en el **capítulo 5,** se refiere a algunas respuestas que por sus características nos han llamado más la atención. De estas respuestas se hace un comentario y se discuten las posibles explicaciones**.**

En el siguiente esquema se representan los tres niveles de análisis



Cuadro 4

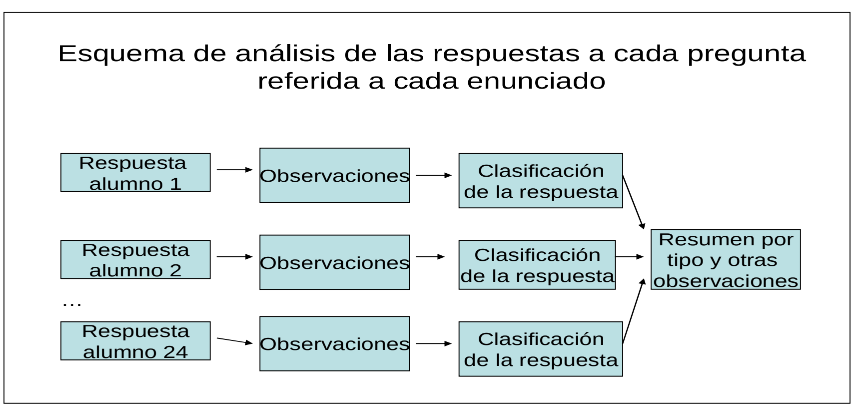
Análisis de los resultados. Primer nivel.

En este capítulo, como explicado anteriormente, se reportan las respuestas al cuestionario y la primera clasificación y agrupación.

Por cada respuesta de cada alumno a dichas preguntas referidas a cada enunciado, se intentó primero identificar el aspecto más relevante, con especial atención al nivel lógico, pero también anotando aspectos de otra naturaleza presentes en las respuestas.

Se intentó luego clasificar cada respuesta por tipo. Siendo las respuestas muy variadas, no se ha adoptado un esquema rígido de clasificación por tipo, sino se han identificado, por cada enunciado, los tipos recurrentes.

Se hizo por fin un resumen de los tipos presentes en las respuestas a cada enunciado, y se anotaron en una sección "otras observaciones" por cada enunciado los otros elementos salidos.



Cuadro 5

Para comparar y agrupar las respuestas, se utilizó el formato que a continuación se reporta.

Formato para comparar las respuestas a la misma pregunta por cada enunciado

Pregunta: ….
Enunciado: …

Alumno	Respuesta	Observaciones	Tipología de la respuesta
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

Resumen por tipo de respuesta:
…
Otras observaciones:
…

Cuadro 6

El capítulo resulta por lo tanto dividido de la siguiente manera:

Párrafo 3.1: reporta las respuestas de todos los alumnos a la primera consigna:
"Explica con tus palabras la afirmación: …"
Por cada enunciado se ha proporcionado el formato arriba reportado, con su resumen y sus otras observaciones. El párrafo 3.1 tiene por lo tanto 12 subpárrafos, uno por cada enunciado.

Párrafo 3.2: reporta las respuestas de todos los alumnos a la segunda pregunta:
"¿Cuál es (o son) la (s) hipótesis?".
Por cada uno de los **primeros tres enunciados** se proporciona un formato, con su resumen y sus otras observaciones. **No hemos reportado los formatos relativos a los demás enunciados, siendo que en nuestra opinión no añaden información relevante**.
El párrafo 3.2 tiene por lo tanto 3 subpárrafos, uno por cada uno de los primeros tres enunciados.

Párrafo 3.3: reporta las respuestas de todos los alumnos a la tercera pregunta:
"¿Cuál es (o son) la (s) tesis?".

Por cada uno de los **primeros tres enunciados** se proporciona un formato, con su resumen y sus otras observaciones. **No hemos reportado los formatos relativos a los demás enunciados, siendo que en nuestra opinión no añaden información relevante**.

El párrafo 3.3 tiene por lo tanto 3 subpárrafos, uno por cada uno de los primeros tres enunciados.

Párrafo 3.4: reporta las respuestas de todos los alumnos a la cuarta pregunta:

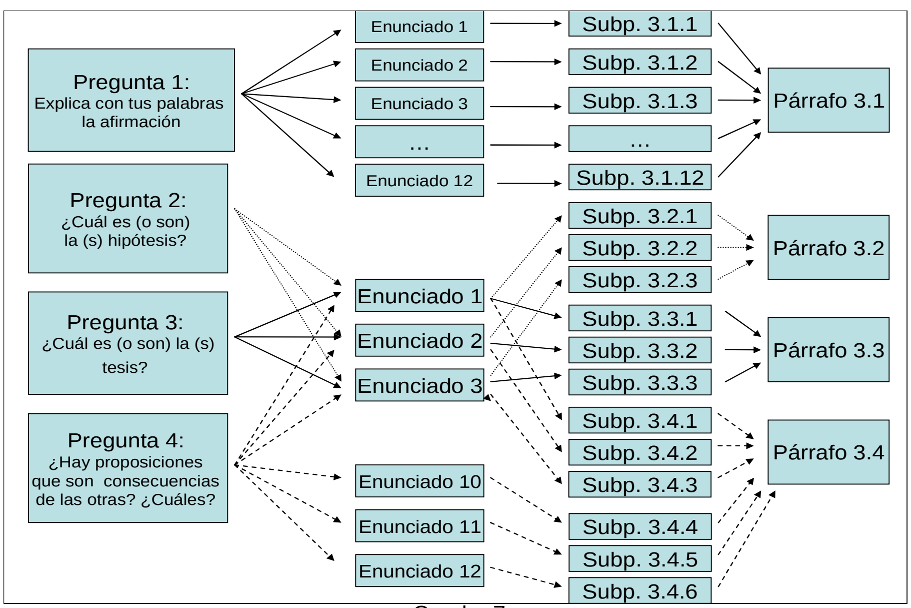
“¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? ¿Cuáles?”.

Por cada uno de los **primeros tres enunciados** se proporciona un formato, con su resumen y sus otras observaciones**.** En el mismo párrafo se proporcionan luego los formatos relativos a las respuestas a la cuarta pregunta por cada uno de los **últimos 3 enunciados** (10, 11, 12). Se hará referencia a estas respuestas en el párrafo 4.1.5, para completar el análisis de los datos relativamente a la quinta pregunta de investigación.

No hemos reportado los formatos relativos a los demás enunciados, siendo que en nuestra opinión no añaden información relevante.

El párrafo 3.4 tiene por lo tanto 6 subpárrafos, uno por cada uno de los primeros tres y de los últimos tres enunciados.

Esquema de composición del capítulo:



Cuadro 7

Cada subpárrafo contiene, con pocas variaciones, el formato de clasificación que se ha reportado anteriormente, que aquí reproducimos. Solamente hemos reportado, por comodidad de lectura, en los subpárrafos del primer párrafo, la formalización lógica del enunciado al que se refieren las respuestas.

Estructura de cada subpárrafo

Pregunta: ….
Enunciado: …
Una posible formalización lógica es… (en el párrafo 3.1)

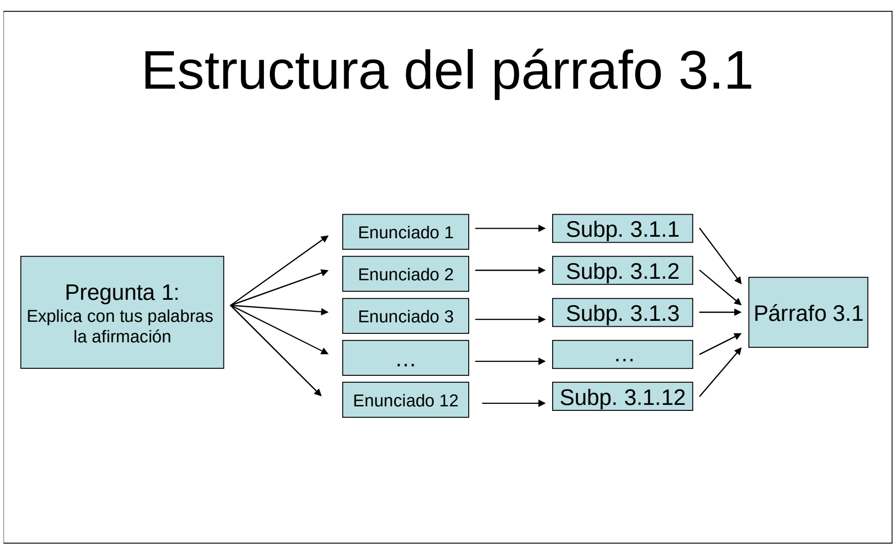
Alumno	Respuesta	Observaciones	Tipología de la respuesta
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

Resumen por tipo de respuesta:
…
Otras observaciones:
…

Cuadro 8

3.1 Respuestas a la pregunta 1 y resúmenes correspondientes

Se reportan aquí las respuestas con observaciones y clasificación, a la pregunta 1 referida a cada uno de los 12 enunciados, por alumno numerado de 1 a 24.



Cuadro 9

3.1.1 Pregunta 1, enunciado 1

Explica con tus palabras la afirmación:
Cada número impar es el sucesivo de un número par

Reportamos una de las posibles representaciones lógicas:
U={números enteros}=Z
I(x): ”x es impar”
S(x): ”x es sucesivo de un número par”
$\forall x \in U[I(x) \rightarrow S(x)]$

Al.	Respuestas	Observaciones	Tipología
1	Que el consecutivo (el n° que le sigue) de todo número par, siempre es un número (im)par	La formulación del alumno se puede reconducir a $\forall x \in U[S(x) \rightarrow I(x)]$. Se trata pues de una inversión entre hipótesis y tesis (1)	Invierte hipótesis y tesis
2	Que por ejemplo el número 2 es número par y el que le sucede es el número 3 el cual es número impar, al contar el número que le sigue a un número par es un impar	(1)	Invierte hipótesis y tesis
3	Esto quiere decir que dado un número par ejemplo 2 se le tiene que sumar dos unidades para poder obtener el segundo número par, 4. Por lo tanto entre cada número quedará un impar. Los números pares son múltiplos de 2	(1) Intenta demostración	Invierte hipótesis y tesis.
4	En una sucesión de números, por ejemplo 3,4,5,6 etc, todo número que le sigue al número impar en este caso 3 será un número par en este caso sería 4	Su afirmación es “El sucesivo de un número impar es par”	Propone un enunciado sustancialmente diferente
5	Para que un número sea par debe ser un múltiplo de 2 y el 2 es el segundo número de la numeración por lo consiguiente cada que pase un número el siguiente será par	Su afirmación parece ser: “El sucesivo de un número impar es par”	Propone un enunciado sustancialmente diferente
6	Que los números impares van intercalados con los pares	Su afirmación es que “en la secuencia de los enteros, los impares se alternan con los pares”	Propone un enunciado más general que el propuesto, que lo implica
7	Después de un número par sigue un impar	(1)	Invierte hipótesis y tesis
8	Que si tenemos un conjunto de números en orden cuando uno es impar el siguiente será par	Su afirmación es “El sucesivo de un número impar es par”	Propone un enunciado sustancialmente diferente
9	La afirmación se refiere a que el siguiente	(1)	Invierte

	número de un número par es un número cuyo residuo al dividirse entre 2 es diferente de 0.		hipótesis y tesis
10	Que en una serie de números consecutivos no todos pueden ser pares o impares si no que uno es sucesivo del otro o sea que el impar va enseguida de un par por ejemplo: 2,3,4,5 el 3 es impar y sucede al 2 que es par	Inicia con la afirmación "en la secuencia de los enteros, los impares se alternan con los pares", luego formula correctamente el concepto propuesto	Correcto
11	Quiere decir que después de un número par le sigue un número impar	(1)	Invierte hipótesis y tesis
12	Quiere decir que después de in número impar le sigue uno par	Su afirmación es "El sucesivo de un número impar es par"	Propone un enunciado sustancialmente diferente
13	A cada número impar le sigue un número par	Su afirmación es "El sucesivo de un número impar es par"	Propone un enunciado sustancialmente diferente
14	Esto quiere decir que después de cada número par sigue uno impar, es decir después de un número par que tenga mitad exacta le sigue un número impar el cual no tiene mitad exacta	(1)	Invierte hipótesis y tesis
15	Que un número impar (1,3,5,7) siempre va después de un número par (2, 4, 6)	Utiliza ejemplos	Correcto
16	Todo número par al ser dividido entre 2 arroja como resultado un número entero. Todo número sucesivo de un par no arroja números enteros al ser dividido entre 2 por lo tanto es impar	(1)	Invierte hipótesis y tesis
17	Si tenemos una serie de números enteros 0,1,2,3...10 y son sucesivos, que va uno seguido del otro, encontramos los números pares que son divisibles entre 2 y después los números impares que son los que no se pueden dividir, en todo caso si se puede pero no se obtienen números enteros	Su afirmación es que "en la secuencia de los enteros, los impares se alternan con los pares"	Propone un enunciado más general que el propuesto, que lo implica
18	Nos quiere decir que los números impares necesariamente le siguen a uno par, y así sucede con todos los números. Ej. el 3 es impar y le sigue al 2 que es par, así como el 71 le sigue al 70	Utiliza ejemplos	Correcto
19	Que un número impar siempre va antes de un número par	Su afirmación es "El sucesivo de un número impar es par"	Propone un enunciado sustancialmente diferente

20	Un impar es el sucesivo de un par	Correcto	Correcto
21	Que siempre que pasa un número par, el siguiente número será impar	(1)	Invierte hipótesis y tesis
22	Después de un número impar sigue un par y luego otro impar esto porque para tener tu sucesión debes ir sumando un uno	Su afirmación es que "en la secuencia de los enteros, los impares se alternan con los pares"	Propone un enunciado más general que el propuesto, que lo implica
23	Un número impar (que no se puede dividir entre 2) le sigue de un par (compuesto por varios factores primos incluyendo la unidad y sí mismo)	Correcto. Interferencia: descomposición en factores primos	Correcto.
24	Es correcto porque sabemos que después de un impar forzosamente le sigue un par	Su afirmación es "El sucesivo de un número impar es par"	Propone un enunciado sustancialmente diferente.

Tabla 1

Resumen de las respuestas.

Las respuestas son de 4 tipos:

a) Respuesta correcta (5 alumnos)
b) Se expresa el hecho que en la secuencia de los enteros los impares y los pares se presentan de manera alterna. Esta propiedad implica la propiedad descrita del enunciado. Se puede considerar que el alumno ha expresado conocimientos mayores a los requeridos, pero sin enfocar bien el enunciado (3 alumnos)
c) Se expresa de alguna forma el enunciado "el sucesivo de un número impar es par", que es diferente al enunciado propuesto (7 alumnos). En este caso no se trata de una inversión entre hipótesis y tesis, aunque algunos términos se invierten entre ellos.
d) Se invierte la premisa con la conclusión (9 alumnos)

En síntesis, solamente 5 alumnos interpretan correctamente el enunciado, y un número consistente (9) invierte hipótesis con tesis.

Otras observaciones

1) Dos personas de alguna manera intentan una justificación.
2) Dos personas ilustran con ejemplos el enunciado
3) En un caso, se presenta como interferencia la descomposición en factores primos.

.

3.1.2 Pregunta 1, enunciado 2

Explica con tus palabras la afirmación: Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={triángulos}
I(x): "x es isósceles"
A(x): "x tiene dos ángulos iguales"
$\forall x \in U[I(x) \rightarrow A(x)]$

Al.	Respuestas	Observaciones	Tipología
1	Una característica de los triángulos isósceles es que dos de sus tres ángulos siempre son iguales		Correcto
2	Que un triángulo isósceles es un triángulo con dos ángulos iguales y uno desigual	Menciona el tercer ángulo, que tiene que ser desigual (problema de definición de triángulo isósceles.)	Correcto.
3	El tipo de triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual por tanto tiene que tener dos ángulos iguales y uno desigual de tal forma que los tres ángulos sumen 180°	Reporta la definición y expresa que la proposición dada es consecuencia de la def. Añade la parte de la suma de los tres ángulos, que se presenta como interferencia	Correcto
4	En un triángulo isósceles se tienen siempre dos ángulos iguales, si no lo tuviera no sería triángulo isósceles	Formulación de la proposición contrapositiva	Correcto
5	Que triángulo isósceles se le llama al que tiene 2 ángulos iguales	Reporta una definición de triángulo isósceles a partir de los ángulos y no de los lados	Correcto
6	*(hace un dibujo representando un triángulo y llamando a, b, c a los tres ángulos).* Angulo a y ángulo b son iguales porque el triángulo también tiene dos lados iguales	Expresa una justificación a partir de la definición	Correcto
7	Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales	Entiende otra cosa o se confunde en usar las palabras	Propone un enunciado diferente al dado
8	El triángulo isósceles al tener dos lados iguales, tiene dos ángulos iguales también	Expresa una justificación	Correcto
9	Que cada figura geométrica de tres lados con	Cambia hipótesis	Cambia

	dos ángulos iguales es denominado triángulo isósceles	con tesis.	hipótesis y tesis
10	En un triángulo isósceles hay dos lados iguales y uno desigual. El ángulo formado por los dos lados iguales es diferente al que forma cada extremo de los lados iguales con el desigual que estos ángulos si son iguales	Describe los ángulos del triángulo isósceles. Cuestión de la definición	Correcto
11	Que en un triángulo con dos lados iguales y uno desigual existen dos ángulos iguales o de la misma magnitud	Menciona el tercer lado, cuestión de la definición	Correcto
12	Dice que cada triángulo isósceles tiene dos vértices cuyo ángulo mide exactamente lo mismo		Correcto
13	Los triángulos isósceles tienen dos ángulos iguales y uno desigual	Menciona el tercer ángulo, cuestión de la definición	Correcto
14	Es decir todos los triángulos isósceles tienen dos ángulos iguales		Correcto
15	Quiere decir que al tener dos de sus tres lados iguales también tiene dos ángulos iguales		Correcto
16	Todos los triángulos que tienen dos ángulos iguales sin importar las medidas, son triángulos isósceles	Invierte hipótesis y tesis	Invierte hipótesis y tesis
17	Existen diversos tipos de triángulos que se diferencian de acuerdo a sus ángulos es decir a la medida de sus lados, uno de ellos es el isósceles que cuenta con dos ángulos iguales y dos de sus lados son iguales	Describe el triángulo isósceles con el conjunto de sus propiedades. En realidad afirma una propiedad más amplia	Afirma una propiedad más amplia
18	Cada triángulo del tipo isósceles tiene dos ángulos iguales, pues tiene dos lados iguales y uno desigual y la forma en la que el lado desigual une a los otros dos lados hace que se formen esas esquinas o ángulos iguales	Cuestión de la definición, intenta justificar	Correcto
19	Que la formación de un triángulo isósceles está formado por dos ángulos iguales		Correcto
20	Que los triángulos isósceles tienen dos ángulos iguales		Correcto
21	Que para que todo triángulo sea isósceles necesita tener dos ángulos iguales	Expresa como condición necesaria	Correcto
22	El triángulo tiene tres ángulos y de estos dos son iguales y uno es desigual	Cuestión de la definición	Correcto
23	Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales (*proporciona dibujo*)		Correcto
24	Se cumple una regla	La respuesta deja pensar que el que tenga dos ángulos iguales, es parte de	Respuesta no clara

		la definición del triángulo isósceles. De todos modos la respuesta no es clara	

Tabla 2

Resumen de las respuestas:

1) 19 respuestas son correctas.
2) 2 alumnos cambian hipótesis y tesis
3) 1 alumno proporciona una respuesta no clara (alumno 24)
4) 1 alumno proporciona un enunciado más amplio, que incluye el enunciado dado
5) 1 alumno proporciona un enunciado diferente al dado

Observamos que queda presente, aunque en medida más limitada, el error de cambiar hipótesis y tesis

Otras observaciones:

1) Muchos alumnos (7) dan claramente a entender que su concepto de triángulo isósceles es él de un triángulo que tiene dos lados iguales y *uno diferente*. Un alumno da a entender que para él el triángulos isósceles por definición tiene dos *ángulos* iguales
   Estas circunstancias hacen vislumbrar una no claridad a nivel de definición de triángulo isósceles
2) Un alumno menciona la suma de los ángulos internos de un triángulo, que se presenta por lo tanto como una interferencia
3) Dos alumnos proponen una justificación, y uno de ellos proporciona un dibujo.

3.1.3 Pregunta 1, enunciado 3

Explica con tus palabras la afirmación: Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son Italianos

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={personas}
M(x): “x es maestro del Instituto Italiano de Cultura”
I(x): “x es italiano”
$\forall x \in U[M(x) \rightarrow I(x)]$

Al.	**Respuestas**	**Observaciones**	**Tipología**
1	Los maestros del Instituto Italiano en su totalidad nacieron en Italia		Correcto
2	Que en el Instituto Italiano de Cultura todos los maestros que imparten cátedra son de Italia		Correcto
3	Nos trata de decir que del total de maestros que laboran en esta institución todos son Italianos		Correcto
4	Los trabajadores de la educación en el Instituto Italiano de Cultura son Italianos porque ellos vienen de Italia con su Cultura	Añade justificación	Correcto
5	Que en una escuela italiana sólo permiten personas de su misma nacionalidad		Correcto
6	Que al estar en un Instituto Italiano los maestros son Italianos porque conocen de la Cultura italiana	Añade justificación	Correcto
7	Que todos los maestros de un Instituto de Cultura italiana son Italianos		Correcto
8	Que no hay ningún maestro de ese Instituto que no sea Italiano	Doble negación	Correcto
9	Que absolutamente todas las personas que se encargan de transmitir conocimiento dentro del Instituto Italiano de Cultura, son precisamente de nacionalidad italiana		Correcto
10	Que no hay profesores de otra nacionalidad en el Instituto Italiano	Doble negación	Correcto
11	Dice que los profesores del Instituto Italiano de Cultura son de nacionalidad italiana		Correcto
12	Afirma que todos los maestros del IIC son de Italia		Correcto
13	Los maestros Italianos forman parte del Instituto Italiano de Cultura	Invierte hipótesis y tesis	Invierte hipótesis y tesis
14	Esto quiere decir que los maestros del Instituto Italiano de Cultura son de Italia “de Europa”		Correcto

15	Que todos los maestros del Instituto son Italianos		Correcto
16	Para ser maestro en el Instituto Italiano de Cultura se debe ser Italiano	Condición necesaria	Correcto
17	Que el Instituto al ser Italiano y al tratarse de la Cultura deben se ser Italianos o al menos deben conocer bien la Cultura	Añade justificación. Condición necesaria	Correcto
18	Que los profesores del Instituto Italiano de Cultura son todos de nacionalidad italiana		Correcto
19	Que en la institución italiana de Cultura todos los maestros son de origen Italiano		Correcto
20	Que para enseñar la Cultura (italiana) deben ser Italianos	Condición necesaria	Correcto
21	Los maestros que laboran en el Instituto de Cultura son de nacionalidad italiana		Correcto
22	En el Instituto Italiano de Cultura todos los maestros son Italianos		Correcto
23	En el Instituto Italiano de Cultura en su totalidad hay maestros Italianos		Correcto
24	Esto quiere decir que en el Instituto Italiano de Cultura solo hay maestros Italianos		Correcto

Tabla 3

Resumen de las respuestas:

1) 23 personas proporcionan la respuesta correcta
2) 1 persona equivoca hipótesis y tesis.

Otras observaciones:

1) 3 personas añaden explicaciones u otras observaciones que se supone justifican la afirmación.
2) tres personas expresan la afirmación como condición necesaria
3) dos personas utilizan dos negaciones para expresar de manera diferente y equivalente la afirmación

3.1.4 Pregunta 1, enunciado 4

Explica con tus palabras la afirmación:
Cada triángulo se puede inscribir en un círculo

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={triángulos}
I(x): "x se puede inscribir en un círculo"
$\forall x \in U[I(x)]$
El predicado I(x) también puede ser expresado de la manera siguiente: "existe un círculo que pase por todos los vértices de x".

Otra formalización notable podría ser la siguiente:
U={polígonos}
T(x): "x es un triángulo"
I(x): "x se puede inscribir en un círculo"
$\forall x \in U[T(x) \rightarrow I(x)]$

Al.	**Respuesta**	**Observaciones**	**Tipología**
1	Que todo triángulo, no importando sus características, cabe dentro de una circunferencia, además de que sus tres vértices deben tocar la circunferencia	Menciona el hecho que los vértices deben estar sobre la circunferencia	Correcto
2	Al dibujar un triángulo y partiendo del centro de este, se pueden marcar con un transportador 3 diferentes ángulos uniéndolos para inscribir un triángulo	En sí la respuesta no es comprensible. Opino que se entiende lo que quiere decir, al sustituir la expresión "al dibujar un triángulo" con la expresión "al dibujar un círculo". En este caso, se trataría de la afirmación: "en cada círculo se puede inscribir un triángulo".	Enunciado diferente, invirtiendo partes del enunciado original
3			No contestó
4	De todos los tipos de triángulos cada uno de ellos se pueden inscribir en un círculo, claro dependiendo del tamaño del triángulo	Referencia al tamaño	Correcto
5	Que se puede formar un triángulo adentro de un círculo	Enunciado "en cada círculo se puede inscribir un triángulo"	Enunciado diferente, invirtiendo partes del enunciado original
6	Que sea el tamaño que sea siempre va a caber un triángulo en un círculo	Referencia al tamaño	Correcto
7	Que dentro de un círculo puede hacerse un triángulo	Enunciado "en cada círculo se puede	Enunciado diferente,

		inscribir un triángulo”	invirtiendo partes del enunciado original
8	Que alrededor de todo triángulo se puede trazar un círculo		Correcto
9	Cada triángulo se puede originar a partir de un círculo	Hace referencia a la construcción	Correcto
10	Que cualquier triángulo puede estar inscrito en un círculo sin importar la medida de cada uno	Referencia al tamaño	Correcto
11	Que cada tipo de triángulo se puede dibujar dentro de un círculo		Correcto
12	Afirma que dentro de el área de un círculo se puede inscribir cualquier tipo de triángulo	Enunciado “en cada círculo se puede inscribir cualquier triángulo”	Enunciado diferente, invirtiendo partes del enunciado original
13	Los triángulos pueden ser graficados dentro de un círculo		Correcto
14			No contestó
15	Que cada triángulo cabe adentro de un círculo		Correcto
16	Cualquier triángulo sin importar el tipo puede ser inscrito en un círculo		Correcto
17	Sí se puede inscribir pero no necesariamente cada triángulo tiene que inscribirse en un círculo		Correcto
18	Que en un círculo podemos trazar un triángulo y no necesariamente tiene que salirse de la circunferencia del círculo	Enunciado “en cada círculo se puede inscribir un triángulo”	Enunciado diferente, invirtiendo partes del enunciado original
19	Que al dibujar un círculo, en ese mismo se puede trazar un triángulo	Enunciado “en cada círculo se puede inscribir un triángulo”	Enunciado diferente, invirtiendo partes del enunciado original
20	Que se puede inscribir		Respuesta incompleta, no se considera contestada la pregunta
21	En un círculo puede ser dibujado un triángulo	Enunciado “en cada círculo se puede inscribir un triángulo”	Enunciado diferente, invirtiendo partes del

			enunciado original
22	Todos los triángulos pueden estar adentro de un círculo		Correcto
23	Un triángulo puede estar contenido en un círculo		Correcto
24			No contestó

Tabla 4

Resumen de las respuestas:

Las respuestas son de 3 tipos:

a) respuesta correcta (13)
b) proporciona otro enunciado: “en cada círculo se puede inscribir un triángulo”(7). *Este tipo de respuesta no constituye propiamente un caso de inversión entre hipótesis y tesis*, pero de alguna manera *es una forma de inversión del enunciado*, siendo que intercambia de hecho lo que se tiene como dato (un triángulo) con lo que se tiene que construir o averiguar que existe (el círculo). Obviamente el enunciado que así se genera ciertamente es verdadero, pero no es la propuesta del enunciado original.
c) respuesta incompleta, incomprensible, no contestó (4)

Otras observaciones:

1) Muchas respuestas inducen la sospecha que el alumno no tenga el concepto de triángulo inscrito en una circunferencia, distinto del concepto de triángulo interior a una circunferencia. De hecho solo una respuesta, la 1, menciona el hecho que los vértices deben estar sobre la circunferencia, mientras muchos alumnos utilizan la expresión: “triángulo dentro de una circunferencia” y esta formulación puede valer por los dos casos. A pesar de esta ambigüedad he considerado validas respuestas con esta formulación, siendo que la estructura lógica de la frase es respetada. En caso de reformular el cuestionario hay que tomar en cuenta la ambigüedad y tomar decisiones al respecto.
2) Algunas respuestas se ponen el problema del tamaño del triángulo, que resulta así subrayado como interferencia.

3.1.5 Pregunta 1, enunciado 5

Explica con tus palabras la afirmación: Por cada par de números enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del menor que supera el mayor

Una formalización lógica en armonía con los enunciados 4 y 6, es la siguiente:
U={pares de enteros positivos diferentes entre ellos}
M(x): "siendo x un par de enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del entero menor que supere el mayor"
$\forall x \in U[M(x)]$

Otra formalización posible es la siguiente:
U={enteros positivos}=Z+
D(x,y): "x es diferente a y"
m(x,y): "x es menor a y"
M(x,y): "y es múltiplo de x"
$\forall x, y \in U \exists z \in U[D(x, y) \wedge m(x, y) \rightarrow M(x, z) \wedge m(y, z)]$

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Al tener un par de números positivos , uno menor que el otro, siempre el menor tendrá un múltiplo que sea mayor a ese 2° número que es el mayor en el par de números		Correcto
2	Que al poner un par de números enteros positivos diferentes, uno de los dos debe ser el menor, el cual al sacar sus múltiplos de este menor superará al otro número de la pareja		Correcto
3	Nos dice que cada par de números enteros positivos que sean diferentes entre sí existe un múltiplo del número menor el cual superara al mayor ya que el múltiplo de ambos debe ser divisible entre los dos	En la explicación, entra como interferencia el concepto de mínimo común múltiplo	Correcto
4	Que por cada par de números enteros positivos no iguales entre ellos, se tendrá un número que sea múltiplo del menor que tendrá mayor valor que el número mayor		Correcto
5	(no contestó)		No contestó
6	Por ejemplo, 5 y 3, el menor es 3 y un múltiplo puede ser 6, por consiguiente vemos que 6 (múltiplo de 3) es más grande que 5	Proporciona un ejemplo, evidenciando que no se fija en la generalidad de la afirmación	Proporciona ejemplo
7	Por cada par de números positivos diferentes existe un múltiplo (del menor) que supere al mayor	Respuesta incompleta, sin embargo se puede considerar que entendió de manera correcta.	Correcto

8	Tenemos dos números enteros positivos diferentes, siempre el menor va a tener múltiplos que supere al mayor que sea más grande		Correcto
9	Que por cada dos números enteros positivos diferentes entre sí, existe un número que multiplicado por otro da como resultado el menor número de los 2 enteros positivos pero que este número es mayor al mayor entero positivo	Parece no tener claro el concepto de múltiplo de un número	Proporciona otro enunciado
10	Que algún múltiplo del número menor es mayor que el otro número		Correcto
11	Que por cada pareja de números positivos y enteros, algún múltiplo del número menor supera al número mayor de la pareja de números		Correcto
12	Dice que cuando tomamos dos números enteros positivos, un múltiplo del menor de los dos números es mayor al número más grande del primer par.		Correcto
13	Cada par de números enteros tiene un múltiplo del menor que supera al mayor		Correcto
14	(no contestó)		No contestó
15	Que cada dos números enteros (2,4,6) existe un múltiplo menor que supere el mayor	Ejemplifica sólo con números pares. Parece limitar el enunciado a los puros números pares, que resultan confundidos con el concepto de “par de números”	Correcto
16	Para cada par de números, siempre el número menor multiplicado por sí mismo supera al mayor. Cuando los dos números son sucesivos	Entra el concepto de cuadrado de un número (que sustituye el término “múltiplo”), y el concepto de sucesivo, (que sustituye el término diferentes). Correcta la estructura lógica de la frase.	Proporciona otro enunciado
17	Si tenemos un par de números que sean positivos, que no tengan punto decimal y que sean diferentes al tomar una cifra y buscamos uno de sus múltiplos notamos que es mayor que la otra cifra	Entra la representación decimal, al considerar número entero un “número que no tenga punto decimal”	Correcto

18	Cuando se tiene un par de números enteros positivos de diferente valor, siempre el menor tiene un múltiplo que será mayor que el número par de más valor	... número par de más valor. Entra como interferencia en concepto de número par, confundido con el concepto de "par de números".	Correcto lógicamente
19	Por cada par de números enteros positivos diferentes, se puede encontrar un múltiplo del menor que sea superior al mayor		Correcto
20	Que los números enteros positivos tienen un múltiplo del menor		Respuesta incompleta
21	Entre un par de números enteros positivos diferentes existe un múltiplo del menor que supere el mayor		Correcto
22	Un número se puede multiplicar por cualquier otro y este es un múltiplo del número inicial por lo cual si hay otro número siempre un múltiplo de otro puede ser mayor		Correcto
23	Que si tenemos 2 números positivos que sean diferentes el menor tendrá un múltiplo (n° que multiplicado por otro nos da el primero) supera al mayor	La explicación de múltiplo resulta confundida	Correcto
24	(no contestó)		No contestó

Tabla 5

Resumen de las respuestas:

Las respuestas son de los tipos siguientes

a) respuesta correcta (17)
b) proporciona un ejemplo (1)
c) proporciona otro enunciado (2)
d) Respuesta incompleta o no contestó (4)

Otras observaciones:

1) en las respuestas 15 y 18, se limita el enunciado a los puros números pares. opino en este caso que se trate de una confusión entre "par de números" y "números pares"
2) en la respuesta 16, se confunde el término "múltiplo" con el término "cuadrado", y el término "diferente" con el término "sucesivo".
3) en las respuestas 9 y 23 parece no estar claro el término "múltiplo"
4) en la respuesta 17, la representación decimal es avocada para explicar en concepto de número entero
5) en la respuesta 3 entra como interferencia el concepto de "múltiplo común "

3.1.6 Pregunta 1, enunciado 6

Explica con tus palabras la afirmación: Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={calles del centro de la ciudad de Oaxaca}
A(x): “x tiene alguna tienda de artesanía”
$\forall x \in U[A(x)]$

El enunciado A(x) se puede también interpretar de la manera siguiente: “existe en x alguna tienda de artesanía”.

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Que todas las calles que conforman el centro de la ciudad de Oaxaca, como mínimo está conformada por una tienda de artesanías		Correcto
2	Al menos en las calles del centro de Oaxaca tiene por lo menos una tienda de artesanías		Correcto
3	Que en cada una de las calles hay mínimamente una tienda en donde se venden artesanías		Correcto
4	Que toda calle del centro de Oaxaca por donde sea que se camine se topará uno con una tienda de artesanías		Correcto
5	Que en todas las calles de Oaxaca hay artesanías por lo menos una o más		Correcto
6	Que Oaxaca es una ciudad colonial y muy rica de cultura, por lo que casi donde sea se encuentran artesanías	Propone una explicación	Correcto
7	En cada cuadra en el centro de Oaxaca al menos hay artesanías sobre cultura de Oaxaca		Correcto
8	En cada calle del centro de Oaxaca hay tiendas artesanales al menos 1		Correcto
9	Que por una calle del centro de la ciudad de Oaxaca hay una o más tiendas de artesanía		Correcto
10	Que existe al menos una tienda de artesanía por cada calle del centro de Oaxaca		Correcto
11	Que cada una de las calles de la ciudad de Oaxaca tiene una tienda donde se encuentran artesanías		Correcto
12	Dice que por cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca existe también una tienda de artesanías		Correcto
13	Hay una o más tiendas de artesanías en cada una de las calles del centro de Oaxaca		Correcto
14	Que en el centro de la ciudad de Oaxaca en sus calles hay tiendas de artesanías	Reduce la afirmación	Propone otro enunciado

15	Que en las calles más cercanas a Oaxaca tienen al menos una tienda de artesanía		Correcto
16	No hay calle en el centro de Oaxaca que no tenga por lo menos una tienda artesanal		Correcto
17	Que casi todas las calles del centro de Oaxaca tienen al menos una tienda de artesanía pero no necesariamente todas tienen y bueno la verdad no sé si todas tienen	Reduce la afirmación. Intenta concluir si es verdadero o falso.	Propone otro enunciado
18	Que en todas las que son las calles del centro del E.do de Oaxaca , siempre tendrán al menos una tienda de artesanía		Correcto
19	Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca podrás encontrar al menos una tienda de artesanía		Correcto
20	Que Oaxaca es una ciudad turística	Muy interesante	Propone otro enunciado.
21	En todas las calles de la ciudad de Oaxaca existe una tienda de artesanías (en cada calle)		Correcto
22	Por cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca hay una o más tiendas de artesanía		Correcto
23	En las calles de la ciudad de Oaxaca es muy probable que exista una tienda de artesanías	Reduce la afirmación	Propone otro enunciado
24	(no contestó)		No contesta

Tabla 6

Resumen de las respuestas:

1) 19 alumnos entendieron correctamente la afirmación, aunque algunos la enriquecieron
2) cuatro alumnos proponen un enunciado diferente.
4) un alumno no contestó

Otras observaciones:

En realidad resulta muy interesante el análisis de las respuestas de los cuatro alumnos que proporcionan un enunciado diferente:

a) tres alumnos reducen la afirmación. Esto significa que se preguntan si es verdadera o falsa, concluyen que es exagerada y la reducen. Se podría hablar de una confusión entre el nivel formal (lo que afirma el enunciado) y el nivel de la realidad (si la afirmación corresponde o no corresponde a la realidad)
b) un alumno (respuesta 20) trae una conclusión, o quizás intenta una demostración, al afirmar que Oaxaca es una ciudad turística.

3.1.7 Pregunta 1, enunciado 7

Explica con tus palabras la afirmación:
Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos y los cuatros lados iguales, también tienen las diagonales perpendiculares

Una posible formalización lógica es la siguiente:
U={cuadriláteros}
P(x): “x tiene los lados opuestos paralelos”
I(x): “x tiene los cuatro lados iguales”
D(x): “x tiene las diagonales perpendiculares”
$\forall x \in U[P(x) \wedge I(x) \rightarrow D(x)]$

Obs: las hipótesis son redundantes, siendo que al tener un cuadrilátero los cuatro lados iguales, por consiguiente los lados opuestos son paralelos.

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Cuando un cuadrilátero tiene todos sus lados de la misma medida y sus lados opuestos son paralelos, las rectas que atraviesan los lados formando los vértices son perpendiculares	Describe las diagonales de manera no clara	Lógicamente correcto
2	El cuadrado tiene sus cuatro lados iguales y de esos 4 lados ninguno se intercepta, por lo tanto son paralelos y tienen diagonales perpendiculares	Vuelve tesis una parte de la hipótesis. Se refiere al cuadrado	Cambia el enunciado. Inversión parcial.
3	Que toda figura, cuadrilátero (tiene cuatro lados) que tenga sus lados opuestos paralelos e iguales tienen las diagonales perpendiculares	Reduce una hipótesis al pedir que sólo los lados opuestos sean iguales.	Cambia el enunciado
4	Que todo cuadrilátero refiriéndose a un cuadrado tendrá sus cuatro lados paralelos e iguales	Cambia el enunciado, expresando una propiedad del cuadrado. Ni menciona las diagonales. Vuelve tesis una parte las hipótesis	Cambia el enunciado. Inversión parcial
5	Que el cuadrado tiene dos lados perpendiculares y dos paralelos y sus cuatro lados iguales	Cambia el enunciado, expresando una propiedad del cuadrado. Ni menciona las diagonales. Vuelve tesis una parte las hipótesis	Cambia el enunciado. Inversión parcial
6	Un cuadrado tiene todos sus lados iguales y sus ángulos son rectos o sea de 90° (*y dibuja un rectángulo)*	Cambia el enunciado, expresando una propiedad del cuadrado Vuelve tesis una parte las hipótesis	Cambia el enunciado. Inversión parcial
7	Los cuadriláteros que tienen los lados		Correcto

	opuestos paralelos y los cuatro iguales, también tienen las diagonales perpendiculares		
8	Que los 4 lados son iguales, y las perpendiculares se cruzan formando ángulos de 90°	Cambia el enunciado, no identifica la estructura lógica. Vuelve tesis una parte las hipótesis	Cambia el enunciado. Inversión parcial
9	Las figuras geométricas que tienen los lados contrarios paralelos y sus 4 lados sean iguales, deben tener las diagonales perpendiculares	Sustituye "opuestos" con "contrarios"	Lógicamente correcto
10	No contesta		No contesta
11	Que todos los cuadriláteros tienen los lados opuestos y sus diagonales son perpendiculares u ortogonales	Cambia el enunciado. Vuelve tesis una parte las hipótesis	Cambia el enunciado. Inversión parcial
12	Dice que en un cuadrado de lados iguales las diagonales al interceptarse lo hacen de forma perpendicular u ortogonal	Utiliza el término cuadrado, pero la especificación sucesiva deja pensar que quiere decir cuadrilátero. No habla del paralelismo de los lados opuestos, es decir elimina una hipótesis	Cambia el enunciado
13	Los cuadriláteros siempre tienen diagonales perpendiculares mientras tengan los dos lados opuestos paralelos y sus cuatro lados iguales		Correcto
14	Es verdad lo que dice el enunciado	En lugar que explicar el enunciado, se preocupa de su verdad.	Afirma la verdad del enunciado
15	Los cuadriláteros que tienen los lados diferentes que no se tocan y cuatro lados iguales, también tienen las diagonales perpendiculares	Sustituye "opuestos" con "diferentes".	Lógicamente correcto
16	Los cuadriláteros que tienen los 4 lados iguales, siempre van a ser paralelos y opuestos	Cambia el enunciado, expresando como tesis a una hipótesis; ni menciona las diagonales	Cambia el enunciado. inversión parcial
17	Al ser los cuatro lados iguales y tener los lados opuestos paralelos sus diagonales se cruzan y por eso son perpendiculares	Cambia el enunciado al decir que las diagonales se cruzan y "por eso" son perpendiculares	Cambia el enunciado
18	Que los cuadriláteros con los lados iguales tienen en forma perpendicular sus	Omite la hipótesis de paralelismo. En	Cambia el enunciado

	diagonales	realidad dicha hipótesis es redundante, pero no hay que omitirla	
19	Que todos los cuadriláteros están formados por lados opuestos y los cuatro lados iguales y las diagonales perpendiculares	Cambia el enunciado. Vuelve tesis una parte las hipótesis	Cambia el enunciado. Inversión parcial
20	Que los cuadriláteros no tienen diagonales perpendiculares	Cambia el enunciado. Parece afirmar que "los cuadriláteros *no siempre* tienen las diagonales perpendiculares", o sea que los cuadriláteros puede tener diagonales no perpendiculares.	Cambia el enunciado
21	Todos los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos y los 4 lados iguales tienen diagonales perpendiculares		Correcto
22	Todas las diagonales de los cuadrados son perpendiculares	Cambia el enunciado, refiriéndose al cuadrado	Cambia el enunciado
23	Las diagonales de los cuadriláteros con los lados opuestos paralelos y los cuatro lados iguales tienen las diagonales perpendiculares		Correcto
24	No contesta		No contesta

Tabla 7

Resumen de las respuestas:

1) 4 alumnos reportan el enunciado de manera correcta.
2) 3 alumnos reportan de manera inexacta unos términos, sustituyendo "opuestos" con "contrarios" o "diferentes", o sin usar el término "diagonales". Se puede de todos modos considerar correctas, al menos lógicamente, estas respuestas.
3) 14 alumnos cambian el enunciado, demostrando que no han entendido la afirmación. Resulta evidente que algunos (8 alumnos) no han captado la estructura lógica de la proposición, siendo que traspasan a tesis elementos de las hipótesis
4) 2 alumnos no contestan
5) un alumno (14) proporciona un juicio de verdad y… nada más.

Otras observaciones:

1) Impacta observar que solamente 7 alumnos proporcionan una respuesta satisfactoria, es decir demuestran entender claramente el enunciado
2) la respuesta del alumno 20 es original. En lugar que explicar el enunciado en el sentido de explicar lo que afirma, parece más bien fijar otros elementos del contexto.
3) La respuesta del alumno 14 también es interesante, siendo que se preocupa de verificar si la afirmación es cierta o no lo es. También en las respuestas a otros enunciados se observó lo mismo (p.e. en el enunciado 6).

3.1.8 Pregunta 1, enunciado 8

Explica con tus palabras la afirmación: Los números enteros que son en el mismo tiempo múltiplos de 3 y de 2, son también múltiplos de 6

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={números enteros}=Z
M2(x): “x es múltiplo de 2”
M3(x): “x es múltiplo de 3”
M6(x): “x es múltiplo de 6”
$\forall x \in U[M3(x) \wedge M2(x) \rightarrow M6(x)]$

Al.	**Respuesta**	**Observaciones**	**Tipología**
1	Que cuando algún número sea múltiplo de 2 y 3 al mismo tiempo, siempre este número será múltiplo de 6 también		Correcto
2	Que un número entero que es múltiplo de 3 y 2 también lo es de 6		Correcto
3			No contesta
4	Que el número 6, 3 y 2 son múltiplos porque son comunes	No queda clara la interpretación	Cambia el enunciado con otro incomprensible
5	Aquí dicen que 3 y 2 sumándolos varias veces da 6		Cambia el enunciado
6	Que todo número que se pueda dividir entre 2 y 3 (12, 18, 24) también se puede dividir entre 6 porque 6 se puede dividir entre 2 y 3	Intenta una justificación del enunciado. La interpretación es correcta, la justificación no	Correcto
7	Que el múltiplo de 3 y de 2 al mismo tiempo es también 6	El enunciado es diferente al dado, puede ser que sólo se trate de una omisión de las palabras “múltiplo de”	Cambia el enunciado
8	Que todo número divisible entre 3 y al mismo tiempo entre 2, será divisible entre 6		Correcto
9	Los números enteros que son múltiplos de 3 y de 2 deben ser también múltiplos de 6		Correcto
10	Que hay múltiplos de 3 y de 2 que son comunes con todos los múltiplos de 6	Sustituye el cuantificador universal con el existencial	Cambia el enunciado
11	Que los múltiplos de 3, de 2 y de 6 son los mismos		Cambia el enunciado
12	Dice que todos los números múltiplos de 2 y de 3 son múltiplos de 6		Correcto

13			No contesta
14	Que el 3 y el 2 son múltiplos del 6		Cambia el enunciado
15			No contesta
16	Los números enteros que son múltiplos de 3 y de 2 son múltiplos de 6 ya que 6 es múltiplo de 3 y de 2	Intenta una justificación del enunciado. La interpretación es correcta, la justificación no	Correcto
17			No contesta
18	Que todos los múltiplos de 3 y de 2 también son múltiplos de 6		Correcto
19	Los números 3 y de 2 son igualmente múltiplos también múltiplos de 6		Correcto
20			No contesta
21	Los números que son múltiplos de 3 y de 2 también lo son de 6		Correcto
22	Los múltiplos de 6 son múltiplos de 2 y de 3		Invierte hipótesis con tesis
23	Los múltiplos de 3 y 2 son múltiplos de 6		Correcto
24	Por que los dos números (3 y 2) son divisibles entre 6 y todos múltiplos 6 a su vez serán múltiplos de 3 y 2	Intenta justificación	Invierte hipótesis y tesis

Tabla 8

Resumen de las respuestas:

a) 11 alumnos responden correctamente
b) 6 alumnos cambian el enunciado con otro diferente
c) 2 alumnos invierten hipótesis y tesis expresando “cada múltiplo de 6 también es múltiplo de 2 y de 3.
d) 5 alumnos no contestan.

Otras observaciones:

a) Tres alumnos añaden a la explicación del enunciado con sus palabras una tentativa de justificación.
b) Un alumno (al. 10) transforma el enunciado sustituyendo el cuantificador universal con el cuantificador existencial

3.1.9 Pregunta 1, enunciado 9.

Explica con tus palabras la afirmación: Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={pintores}
O(x): “x es oaxaqueño”
E(x): “x tiene éxito en el exterior del país”
P(x): “x proviene de una tradición popular y artesana”
$\forall x \in U[O(x) \wedge E(x) \rightarrow P(x)]$

Otra formalización posible:
U={pintores oaxaqueños}
E(x): “x tiene éxito en el exterior del país”
P(x): “x proviene de una tradición popular y artesana”
$\forall x \in U[E(x) \rightarrow P(x)]$

Al.	**Respuesta**	**Observaciones**	**Tipología**
1	Que todos los pintores de Oaxaca que además son exitosos en todo el mundo deben su éxito a su formación popular y artesana	Reformula: el éxito de los pintores oaxaqueños *se debe* a su tradición.	Expresa el enunciado de manera más eficaz (condición necesaria)
2	Los pintores oaxaqueños que son exitosos fuera de México provienen de una tradición popular y artesana		Correcto
3	Que pintores oaxaqueños que se van al exterior a probar y logran tener éxito es porque provienen de una tradición popular y artesana como lo es Oaxaca	Reformula: el éxito de los pintores oaxaqueños *se debe* a su tradición.	Expresa el enunciado de manera más eficaz (condición necesaria)
4	Que todo pintor oaxaqueño con éxito en el exterior del país proviene de un pueblo con riqueza popular y artesana donde fluye la cultura		Correcto
5	Que los padres de algunos pintores famosos que tuvieron éxito en el exterior sus padres o familiares son artesanos		Correcto
6	Que las personas que son pintores y de Oaxaca tienen una gran altura porque no han sido influenciados por el exterior y por eso triunfan	Cambia el enunciado, afirmando que los pintores oaxaqueños ciertamente triunfan. En realidad así pone una parte de la hipótesis como tesis. En la segunda parte afirma que	Invierte parcialmente hipótesis con tesis

		el éxito de los pintores oaxaqueños *se debe* a su tradición.	
7	Los pintores de Oaxaca tienen un éxito internacional porque provienen del pueblo y guardan sus tradiciones	Cambia el enunciado, afirmando que los pintores oaxaqueños ciertamente tienen éxito. En realidad así pone una parte de la hipótesis como tesis. En la segunda parte afirma que el éxito de los pintores oaxaqueños *se debe* a su tradición.	Invierte parcialmente hipótesis con tesis
8	El éxito de los pintores de Oaxaca proviene de una tradición	Reformula: el éxito de los pintores oaxaqueños se debe a su tradición.	Expresa el enunciado de manera más eficaz (condición necesaria)
9	Los pintores originarios de Oaxaca que triunfan internacionalmente son consecuencia de una tradición popular y artesana		Correcto
10	Que los pintores exitosos han tenido una muy buena preparación además de tener contacto las cosas que plasman en sus pinturas	Intenta describir qué significa una tradición popular y artesana, lógicamente correcto	Correcto
11	Que los pintores oaxaqueños que provienen de un lugar de tradición popular y artesanal obtienen el éxito en el extranjero	Corresponde a una formalización del tipo: $\forall x \in U[P(x) \rightarrow E(x)]$	Invierte hipótesis y tesis
12	Afirma que los pintores de Oaxaca que tienen éxito provienen de una tradición popular y normalmente de una tradición de arte		Correcto
13	Los pintores oaxaqueños que tienen éxito fuera del país son de una tradición popular y artesanal.		Correcto
14	Que los oaxaqueños pintores que tienen éxito provienen de una tradición popular y artesanal		Correcto
15	Que todos los pintores oaxaqueños que tiene éxito vienen de una tradición popular y artesana		Correcto
16	Todos los pintores oaxaqueños que provienen de una tradición popular y artesana son los que tienen éxito en el exterior del país	Proporciona una interpretación: los pintores oaxaqueños que provienen de una tradición popular son	Cambia el enunciado

		todos y solos los que tienen éxito. Es decir la interpreta como una doble implicación. En realidad corresponde a la formalización: $\forall x \in U[P(x) \leftrightarrow E(x)]$	
17	Que los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior tienen su cultura muy en cuenta y no se olvidan de ella	Lógicamente correcto, interpreta la tesis...	Correcto
18	Que los pintores oaxaqueños exitosos respetan tradiciones populares	Lógicamente correcto, interpreta la tesis...	Correcto
19	Todos los pintores oaxaqueños que triunfan en el extranjero descienden de tradiciones populares y artesanas		Correcto
20			No contestó
21	Los pintores oaxaqueños exitosos en el exterior del país tienen una tradición popular y artesana		Correcto
22	Los pintores oaxaqueños famosos a nivel internacional se han formado por una tradición popular y artesana		Correcto
23	Dice que la mayoría de los pintores exitosos son los provenientes de una tradición popular	No expresa el cuantificador universal (todos los pintores) sustituyéndolo con “la mayoría”. Al hacer así reduce la afirmación por considerarla exagerada.	Cambia el enunciado
24	Que Oaxaca es una cuna de excelentes artistas	Trae una conclusión sin preocuparse de lo que afirma exactamente el enunciado	Cambia el enunciado

Tabla 9

Resumen de las respuestas:

Las respuestas son de 5 tipos:

a) respuesta correcta (14)

b) Condición necesaria (3). Denomino de esta manera aquellas formulaciones del tipo:”los pintores oaxaqueños que tienen éxito deben su éxito a su tradición popular y artesana”. En esta afirmación se dice que la tradición popular y artesana es un elemento importante para el éxito. Esta afirmación parece más fuerte que la original. En realidad son equivalentes. Es posible darse cuenta de la equivalencia por el hecho que decir que “la tradición popular y artesana es importante” significa decir que “sin tradición popular y artesana no hay éxito”, que se formaliza lógicamente de la manera siguiente: $\forall x \in U[\neg P(x) \rightarrow \neg E(x)]$, que siendo contrapositiva del enunciado, resulta equivalente. En otros términos, la tradición popular y artesana es una condición necesaria, pero no suficiente para el éxito. *Este es un caso que merece atención y sobre el cual se regresará en el capítulo 5.*

En realidad, aunque la formulación parece diferente, es correcta. Es más: es más eficaz.

c) cambia el enunciado (3): hay dos casos de este tipo. En un caso, se afirma la co-implicación entre éxito y tradición popular y artesana (respuesta 16). En los otros casos se trae una conclusión diferente por completo (respuestas 23 y 24)

d) invierte hipótesis con tesis (3) ya sea por completo (un caso, respuesta 11), ya sea parcialmente (respuestas 6 y 7).

e) Un alumno no contesta

Otras observaciones.

1) La respuesta 24 es interesante, siendo que el alumno intenta traer una conclusión sin preocuparse tanto de la estructura lógica de la frase, cuanto más bien del sentido.

2) también la respuesta 23, se preocupa del sentido de la frase, en este caso de su verdad, y al considerarla exagerada, la reduce arbitrariamente.

3.1.10 Pregunta 1, enunciado 10

Explica con tus palabras la afirmación:
Si a, b, c son alturas de un triángulo, entonces se encuentran en un mismo punto

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={segmentos}
A(x,y,z): “x,y,z son alturas de un mismo triángulo”
C(x,y,z): “x,y,z se encuentran en un mismo punto”
$\forall x,y,z \in U[A(x,y,z) \rightarrow C(x,y,z)]$

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Tenemos tres puntos que representan la altura de un triángulo por lo tanto están ubicadas en el mismo punto o tienen el mismo valor porque todas son la altura y el triángulo sólo tiene la misma altura	Suma imprecisión terminológica. Concepto equivocado: un triángulo solo tiene una altura	Lógicamente correcto.
2	Que en un punto se encuentran las alturas de un triángulo (a, b, c*) (a parte en la hoja hace un dibujo y traza las alturas perpendiculares a los lados pero no pasantes por los vértices)*	Concepto equivocado: la altura es perpendicular al lado pero no pasa necesariamente por el vértice	Lógicamente correcto.
3	Al marcar la altura de un triángulo se le pueden dar diferentes nombres (a, b, c) entonces esto quiere decir que la altura del triángulo se encuentra seccionada por lo que se le han asignado tres nombres (a, b, c) que en consecuencia se encuentran en el mismo punto	Concepto equivocado: unicidad de la altura	Cambia el enunciado
4	Todo depende de donde están los puntos A,B,C porque no siempre tres puntos mal ubicados te formarán un triángulo	Intenta analizar la verdad del enunciado	No contesta
5	No contesta		No contesta
6	Las alturas de un triángulo (a, b, c) siempre se encuentran en un punto en común *(proporciona un dibujo en el que traza perpendiculares a los lados que no pasan por los vértices)*	Concepto equivocado: la altura es perpendicular al lado pero no pasa necesariamente por el vértice	Lógicamente correcto.
7	Si a,b,c son alturas de un triángulo se encuentran en el mismo punto		Correcto
8	No contesta		No contesta
9	Si las 3 alturas de un triángulo son una incógnita entonces se encuentran en un mismo lugar en el espacio	Suma imprecisión terminológica	Lógicamente correcto
10	Que en un triángulo que tiene lados diferentes tiene tres alturas y que esas en algún momento se interceptan	Añade una hipótesis (lados diferentes)	Lógicamente correcto

11	Que al trazar las alturas de un triángulo se interceptan en un mismo punto		Correcto
12	No contesta		No contesta
13	Si a, b, c son alturas de un triángulo entonces se encuentran en un mismo punto		Correcto
14	Esto quiere decir que es una figura geométrica y que en un solo punto hay o está la altura y para saberlo necesitas tres alturas	Interpretación no clara	Cambia el enunciado
15	No contesta		No contesta
16	No contesta		No contesta
17	Como nos dan diferentes variables me imagino que no se encuentran en el mismo punto	Interpretación no clara	No contesta
18	Que si tres alturas son de un triángulo, deben estar a la misma altura, deben medir lo mismo	Concepto equivocado: las alturas miden lo mismo	Cambia el enunciado
19	Si con a, b, c se forman alturas de un triángulo entonces están en un mismo punto		Correcto
20	No contesta		No contesta
21	No contesta		No contesta
22	La altura de un triángulo es de un solo tamaño por lo tanto todas las alturas van a estar en el mismo punto	Intenta una explicación. Concepto equivocado: las alturas miden lo mismo	Lógicamente correcto
23	a, b, c son las alturas de un triángulo y por lo tanto se encuentran en un mismo punto		Correcto
24	No contesta		No contesta

Tabla 10

Resumen de las respuestas

a) 10 alumnos no contestan
b) 5 alumnos contestan correctamente
c) 5 alumnos, a pesar de que sus respuestas manifiestan inexactitudes acerca del concepto y de las propiedades de las alturas de un triángulo, proporcionan una respuesta lógicamente correcta.
d) 4 alumnos cambian el enunciado

Otras observaciones

1) Un alumno (10) añade una hipótesis, proporcionando de todos modos una respuesta lógicamente correcta
2) Varias respuestas manifiestan que el concepto de altura de un triángulo es equivocado: en algunos casos se piensa que las alturas midan lo mismo, en otros que las alturas son perpendiculares a algún lado pero no pasan por el vértice opuesto, en otros que cada triángulo sólo tiene una altura.
3) El alumno 4 intenta concluir si es verdadero o falso el enunciado.

3.1.11 Pregunta 1, enunciado 11

Explica con tus palabras la afirmación:
Si a es un número múltiplo de 6, entonces es también múltiplo de 3

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={números enteros}=Z
M6(x): ”x es múltiplo de 6”
M3(x): ”x es múltiplo de 3”
$\forall x \in U[M6(x) \rightarrow M3(x)]$

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Que todo múltiplo de 6 al igual es múltiplo de 3		Respuesta correcta
2	Si a fuera un múltiplo de 6 también es múltiplo de 3		Respuesta correcta
3	Nos dice que cualquier número múltiplo de 6 también es múltiplo de 3		Respuesta correcta
4	Dice que teniendo número a como múltiplo de 6 se puede decir que ese número a será múltiplo de 3 todo depende de ese número	La frase “todo depende de ese número” deja pensar que está pensando en una justificación y opina que el enunciado sea falso	Correcto
5	Que la suma de 3+3=6 por lo consiguiente es múltiplo	Entiende: 6 es múltiplo de 3	Cambia el enunciado
6	Cualquier número múltiplo de 6, se puede dividir entre de 3 porque 6 es múltiplo de 3	Proporciona una justificación	Respuesta correcta
7	Si x número múltiplo de 6, también es múltiplo de 3		Respuesta correcta
8	El resultado de multiplicar a 6 con otro número será divisible entre 3, ya que 6 es duplo de 3	Proporciona una justificación	Respuesta correcta
9	Si un número desconocido es múltiplo de 6 por consecuencia debe ser también múltiplo de 3		Respuesta correcta
10	Sí por que hay múltiplos de 6 que son múltiplos de 3 por ejemplo 12 es múltiplo de 6 y de 3	Proporciona una justificación, pero al proporcionarla demuestra haber entendido : algún múltiplo de 6 también es múltiplo de 3	Cambia el enunciado
11	Que si a es un múltiplo del número es por lo tanto un múltiplo del número 3		Respuesta correcta
12	Dice que para un número A que sea múltiplo de 6 también los es de 3		Respuesta correcta
13	No contesta		No contesta

14	No contesta		No contesta
15	Que si a es número múltiplo de 6 también a es número múltiplo de 3		Respuesta correcta
16	No contesta		No contesta
17	No contesta		No contesta
18	Que cualquier múltiplo de 6 también es múltiplo de 3 pues el 6 es múltiplo de 3	Proporciona una explicación	Respuesta correcta
19	Si a es un número que sea múltiplo de 6 también lo debe de ser con 3		Respuesta correcta
20	Que el múltiplo de 6 es 3		Cambia el enunciado
21	No contesta		No contesta
22	Los múltiplos de 6 son múltiplos de 3		Respuesta correcta
23	A es un número desconocido múltiplo de 6 y por lo tanto múltiplo de 3	Quizás esté pensando en una explicación	Respuesta correcta
24	No contesta		No contesta

Tabla 11

Resumen de las respuestas:

a) 6 personas no contestan
b) 15 personas contestan correctamente. De estas, varias proporcionan una explicación.
c) Tres respuestas demuestran que no se entendió el enunciado, interpretándolo como si fuera otro (especificado arriba en los comentarios específicos)

Otras observaciones:

1) La respuesta 4 es de difícil interpretación: “Dice que teniendo número a como múltiplo de 6 se puede decir que ese número a será múltiplo de 3 todo depende de ese número”. Al añadir “todo depende de este número” puede ser que el alumno no haya entendido que el enunciado afirma que no depende del número el hecho que sea múltiplo de 3, siempre que sea múltiplo de 6. También es posible que haya entendido el enunciado y añadió la frase como una afirmación de falsedad del enunciado. El alumno 4 en las respuestas a otros aciertos se comporta de manera parecida.
2) La respuesta 10 también pone problemas de interpretación: al no decir que es lo que el enunciado significa, proporcionando en cambio una demostración equivocada (algunos casos particulares para comprobar una afirmación general) no nos permite entender si tomó el enunciado como específico (algunos múltiplos de 6 también lo son de tres) o pensó poder demostrar una afirmación general con un ejemplo específico

3.1.12 Pregunta 1, enunciado 12

Explica con tus palabras la afirmación:
Si una persona es italiana, también es europea

Una posible formalización lógica correcta es la siguiente:
U={personas}
I(x): ”x es italiano”
E(x): ”x es europeo”
$\forall x \in U[I(x) \rightarrow E(x)]$

Al.	**Respuesta**	**Observaciones**	**Tipología**
1	Que toda persona que haya nacido en Italia, al igual es europeo porque nació en Europa	Proporciona justificación	Correcto
2	Que si una persona es de Italia, por lo tanto es europea ya que Italia está en el continente europeo	Proporciona justificación	Correcto
3	Nos dice que toda persona italiana es europea, porque Italia está en el continente europeo y a ellos se les denomina o nombra europeos	Proporciona justificación	Correcto
4	Italia está en el continente europeo, así que toda persona nacida en Italia será europea	Proporciona justificación	Correcto
5	Que toda persona que nace en Italia es europea		Correcto
6	Italia pertenece al continente europeo, entonces un italiano es europeo, pero un europeo no siempre es un italiano	Proporciona justificación, analiza la inversa	Correcto
7	Si una persona es italiana es del continente europeo		Correcto
8	Italia está en Europa, por lo tanto italianos son europeos	Proporciona justificación	Correcto
9	Si una persona es de nacionalidad italiana también es europea		Correcto
10	Porque el país de Italia pertenece a un continente que es Europa	Proporciona justificación	Correcto
11	Que una persona que es de nacionalidad italiana también es europea	Proporciona justificación	Correcto
12	Dice que una persona que es oriunda de italia es europea por ser Italia parte de Europa	Proporciona justificación	Correcto
13	Los italianos son europeos		Correcto
14	Esto quiere decir que todas las personas italianas son del continente europeo		Correcto
15	Que si una persona es italiana también pertenece o que sea de Europa ya que Italia pertenece a Europa	Proporciona justificación	Correcto
16	Una persona que es italiana también es europea por el hecho que Italia es parte de	Proporciona justificación	Correcto

	Europa		
17	No contesta		
18	Que un europeo incluye todas las nacionalidades de los países que conforman a Europa, en este caso Italia	Proporciona justificación	Correcto
19	Si naces en Italia eres europeo		Correcto
20	Si porque Italia está en Europa	Proporciona justificación	Correcto
21	Toda persona que sea italiana también es europea ya que Italia se encuentra en Europa	Proporciona justificación	Correcto
22	Los italianos son europeos		Correcto
23	Una persona que vive en Italia también es europea		Correcto
24	Si sabemos que Italia está en Europa se sabe que los italianos son europeos	Proporciona justificación	Correcto

Tabla 12

Resumen de las respuestas

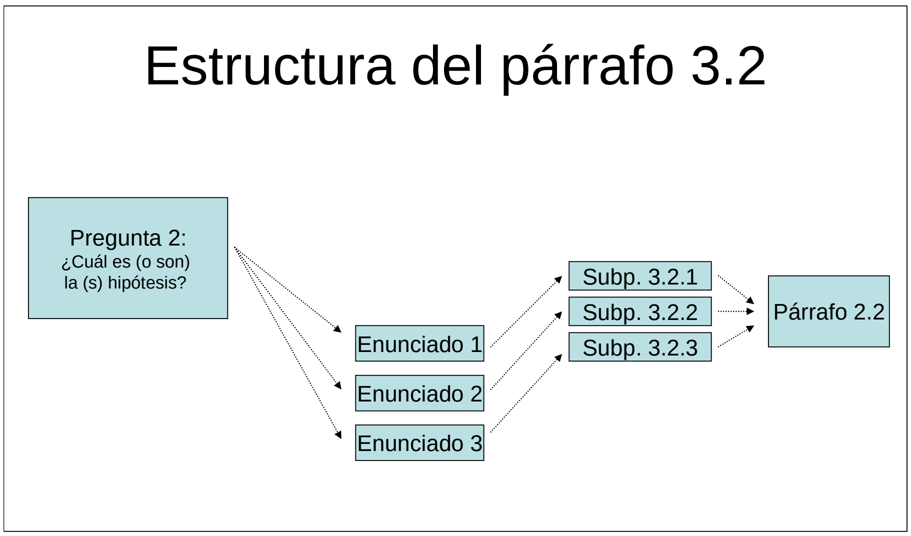
a) Respuestas correctas: 23. Proporcionan una justificación o demostración sumaria: 15 de los 23 que contestan correctamente
b) No contestaron: 1

Observaciones

1) 15 alumnos proporcionan una explicación o justificación.

3.2 *Respuestas a la pregunta 2, enunciados 1, 2, 3 y resúmenes correspondientes*

Se reportan aquí las respuestas, relativas a la pregunta 2 referida a los **primeros tres enunciados**, por alumno numerado de 1 a 24, con sus observaciones y su tipo.
La estructura del párrafo en el esquema a continuación.



Cuadro 10

3.2.1 Pregunta 2, enunciado 1

Cada número impar es el sucesivo de un número par
Cuál es (o son) la (s) hipótesis?

Al.	**Respuesta**	**Observaciones**	**Tipología**
1	En el consecutivo de los números, después de todo número par siempre nos encontraremos un número impar	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
2	La hipótesis en este enunciado es que después de un número par sigue un número impar	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
3	Cada número impar es el sucesivo de un número par	Repite el enunciado completo	Repite el enunciado
4	El sucesivo de un número impar en una secuencia de números será par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
5	Que cada dos números hay un par si se inicia del número 2 por lo consiguiente el de en medio será impar	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
6	Que los números son impares cuando un número es únicamente divisible entre sí mismo 21=3*7, y también que no se pueden dividir entre números pares	Intenta definir los impares. Interferencia: primos	Proporciona una definición
7	Por ejemplo 2 es número par y 3 es impar	Proporciona un ejemplo	Proporciona un ejemplo
8	El número impar es el sucesivo de un par	Proporciona el enunciado	Repite el enunciado
9	Un número impar es el sucesivo de un par en el segmento de la recta real	Repropone un enunciado completo. Interferencia: representación geométrica de números sobre la recta	Repite el enunciado
10	Que en la serie de números hay un par seguido de un impar	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
11	Se supone que antes de un número impar está un número par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado. La expresión “se supone” revela que el alumno está pensando en una conjetura	Repite el enunciado
12	Se presume que antes de un impar hay un par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado. La expresión “se presume” revela que el alumno está pensando en una conjetura	Repite el enunciado
13	En una numeración consecutiva no puede haber dos números pares seguidos o dos números impares seguidos	Reformula el enunciado completo	Repite el enunciado
14	Una hipótesis es crear una idea sobre	Explicita su concepción de	Dice qué es

	algún tema la cual la idea no está comprobada o está respaldada y se busca comprobar	hipótesis como conjetura	hipótesis
15	Que 1,2,3,5,7 empieza 1 sigue 2	Ejemplo	Proporciona un ejemplo
16	Todo número par se divide entre 2 y da un número entero. Todo número que es sucesivo a un número par al dividirse entre 2 arroja un número fraccionario	Proporciona una caracterización de par e intenta una argumentación	Define par
17	Por qué son números pares? Por qué son impares? Por qué se dice que son sucesivos?	Quiere explicitar el significado de los términos. Se puede pensar que advierte la necesidad de explicitar las hipótesis implícitas	Respuesta no clara
18	Que un número impar siempre va después de un número que es par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
19	Si un numero impar siempre es sucesivo a un par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
20	Que primero es el par y después el impar	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
21	Después de un número par existe un número impar	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
22	a) después de un número impar sigue un número par b) un número impar no es múltiplo de 2 c) un número par es múltiplo de 2	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado. Aclara los términos (se puede pensar que las considera hipótesis implícitas?)	Aclara términos
23	Un número impar es sucesivo de un número par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
24	No contesta		No contesta

Tabla 13

Resumen de las respuestas:

a) 17 alumnos repiten el enunciado completo, ya sea él que ya habían puesto en respuesta a la pregunta 1, ya sea otro
b) 2 alumnos proporcionan un ejemplo.
c) 2 alumnos redefinen o quieren aclarar términos.
d) No queda clara la intención de la respuesta del alumno 17. Se puede pensar que se dé cuenta del hecho que hay que explicitar hipótesis implícitas.
e) un alumno (el núm. 14) da una definición de lo que es hipótesis, proponiendo una concepción de hipótesis conectada más a las ciencias experimentales, y que en matemática corresponde al concepto de conjetura.
f) Un alumno no contesta

Otras observaciones

1) emergen interferencias: el concepto de número primo (al.6) y la representación de los números sobre la recta (al.9)

3.2.2 *Pregunta 2, enunciado 2*

Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales
¿Cuál es (o son) la (s) hipótesis?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Cuando el triángulo es isósceles (dos lados iguales) siempre dos de sus ángulos son iguales		Repite el enunciado
2	La hipótesis es de que un triángulo isósceles es un triángulo con dos ángulos iguales		Repite el enunciado
3	Que el triángulo isósceles tenga dos ángulos iguales		Repite el enunciado
4	en un triángulo isósceles siempre se tendrán dos ángulos iguales		Repite el enunciado
5	Para que sean dos ángulos iguales y sea triángulo deben de ser menor a 45° para que sus lados sean iguales y entre los tres ángulos que sumen 180°	Interferencias: suma de los ángulos de un triángulo	Propone otro enunciado
6	Que al ser un triángulo isósceles, es común saber que tiene dos lados iguales y uno desigual, lo que pasa con los ángulos		Propone justificación
7	No sé		No contesta
8	El triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales		Repite el enunciado
9	Que hay dos ángulos iguales en un triángulo isósceles		Repite el enunciado
10	Que el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales		Repite el enunciado
11	Se supone que dos ángulos de un triángulo isósceles son iguales	Repite el enunciado como suposición	Repite el enunciado como suposición
12	Que un triángulo isósceles al tener dos lados iguales forzosamente dos de sus ángulos son iguales		Repite el enunciado
13	Al tener dos ángulos iguales, tiene también dos lados iguales y por consiguiente uno desigual	Invierte hipótesis con tesis	Afirma otro enunciado
14	No creo que exista una hipótesis en este enunciado ya que está comprobado que el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales	Idea de hipótesis como algo que no está comprobado	
15	Que teniendo dos lados iguales tiene dos ángulos iguales		Repite el enunciado
16	Los triángulos que tienen dos ángulos agudos iguales son isósceles	Inversión de hipótesis y tesis, como ya había	Repite el enunciado

		hecho en la respuesta al acierto 1	
17	Cómo debe ser sus ángulos para que sea isósceles? Qué es un triángulo?	Quiere explicitar el significado de los términos. Se puede pensar que advierte la necesidad de explicitar las hipótesis implícitas	Respuesta no clara
18	Que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales		Repite el enunciado
19	Si un triángulo tiene ángulos iguales entonces es un triángulo isósceles	Invierte hipótesis con tesis, lo que no había hecho en la respuesta al acierto 1	Propone enunciado diferente
20	Que todos los triángulos isósceles tienen dos ángulos iguales		Repite el enunciado
21	Un triángulo isósceles está compuesto por dos lados iguales y uno desigual	Expresa la característica fundamental del triángulo isósceles	Correcto
22	Si tiene dos ángulos iguales un triángulo, tiene dos lados iguales	Invierte hipótesis con tesis, lo que no había hecho en la respuesta al acierto 1	Propone enunciado diferente
23	El triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales porque tiene dos lados iguales		Repite enunciado
24	No contesta		No contesta

Tabla 14

Resumen de las respuestas

a) 14 alumnos repiten el enunciado
b) 4 alumnos repiten otro enunciado, de todos modos completo
c) un alumno propone una comprobación
d) dos alumnos no contestan.
e) de un alumno (el 17) no se puede reconstruir el razonamiento con claridas, como también en el caso del enunciado anterior
f) un alumno, al afirmar que no hay hipótesis porque la propiedad resulta obvia, expresa una concepción de hipótesis como una propiedad por comprobarse
g) un alumno identifica exactamente la hipótesis

Otras observaciones

1) interesante la respuesta del alumno 11, que al usar la palabra “se supone” en el caso del acierto 2, y “se comprueba” en el caso del acierto 3, expresa claramente la idea de hipótesis y tesis que tiene.
2) emergen interferencias: la suma de los ángulos internos de un triángulo (al. 5)

3.2.3 Pregunta 2, enunciado 3

Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos
¿Cuál es (o son) la (s) hipótesis?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Un maestro al formar parte del instituto italiano de cultura debe de haber nacido en Italia	Idea de la suposición (debe de haber)	Repite el enunciado
2	La hipótesis es de que todos los maestros del instituto italiano de cultura son de origen italiano		Repite el enunciado
3	Que todos los maestros son italianos		Repite el enunciado
4	Los maestros del instituto italiano son italianos		Repite el enunciado
5	Que todos los maestros del instituto son italianos		Repite el enunciado
6	Que para enseñar cultura italiana es necesario conocer sobre lo mismo	Interpreta	Propone otro enunciado
7	Pues por que es un instituto italiano y ellos deben de saber todo sobre su cultura. Ni modos que hay mexicanos en el instituto de cultura italiana	Interpreta	Interpreta
8	Todos los maestros del IIC son italianos		Repite el enunciado
9	Todos los maestros del Instituto Italiano de cultura son italianos		Repite el enunciado
10	Que los maestros del instituto italiano provienen de Italia		Repite enunciado
11	Se supone que los maestros del instituto italiano son italianos	Idea de suposición asociada a hipótesis	Repite enunciado
12	Que todos los maestros son oriundos de Italia		Repite enunciado
13	Que el instituto italiano de cultura solo son maestros italiano		Repite el enunciado
14	La hipótesis del enunciado es que todos los maestros del instituto son italianos		Repite el enunciado
15	Que el instituto pudo haber contratado de otros países		Propone otro enunciado
16	Todos los maestros del instituto italiano de cultura son de esa nacionalidad		Repite enunciado
17	¿todos los maestros del instituto son italianos?¿todos conocen su cultura?	Repite en forma de pregunta. Idea de suposición asociada a la tesis. Elementos de interpretación	Transforma en pregunta el enunciado
18	Que los maestros del instituto italiano		Repite enunciado

	de cultura son de Italia		
19	Los maestros italianos están en el instituto italiano de cultura. En el instituto italiano de cultura todos los maestros son italianos	Interpreta y repite enunciado	Repite enunciado
20	Porque los maestros italianos deben ser italianos	Interpreta	Propone otro enunciado
21	todo maestro que labora en el instituto italiano de cultura es italiano		Repite enunciado
22	En el instituto italiano de cultura hay sólo maestros italianos	Forma equivalente de enunciado	Repite el enunciado
23	¿pueden ser en su totalidad italianos los maestros del instituto italiano?	Idea de suposición asociada a la hipótesis	Transforma en pregunta
24	Que el instituto italiano de cultura está en Italia	Interpreta	Propone otro enunciado

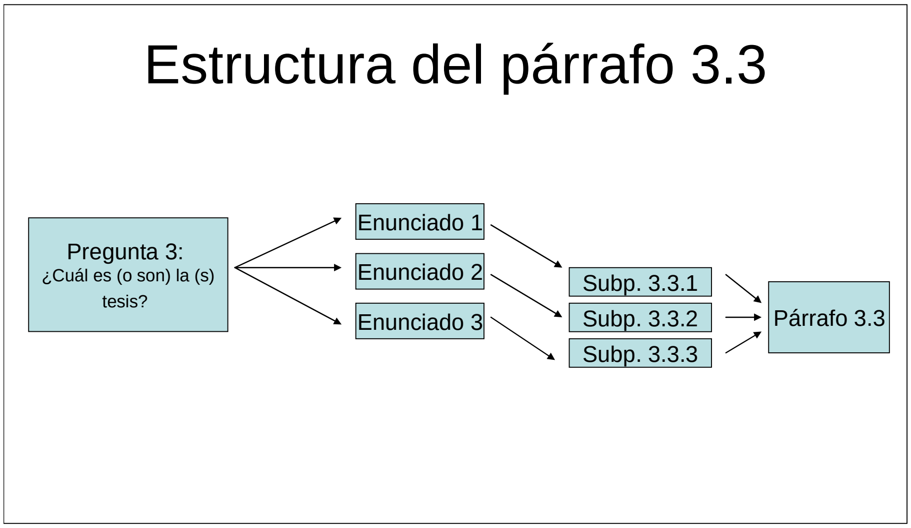
Tabla 15

Resumen de las respuestas:

1) 17 alumnos repiten el enunciado. De estos, 2 comunican una idea de suposición al repetirlo, poniéndole expresiones en este sentido.
2) 2 transforman el enunciado en pregunta, asociando de tal manera a la hipótesis una idea de suposición
3) 5 alumnos interpretan el enunciado, proponiendo de hecho una interpretación personal como hipótesis

3.3 *Respuestas a la pregunta 3, enunciados 1, 2, 3 y resúmenes correspondientes*

Se reportan aquí las respuestas, relativas a la pregunta 3 referida a los primeros tres enunciados, por alumno numerado de 1 a 24, las observaciones y el tipo.



Cuadro 11

3.3.1 *Pregunta 3, enunciado 1:*

Cada número impar es el sucesivo de un número par
¿Cuál es (o son) la(s) tesis?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Todo número que le sigue a un número par es un impar	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
2	Ejemplo 2 par 3 impar 4 par 5 impar e par 7 impar	Proporciona un ejemplo. Quiere comprobar?	Proporciona un ejemplo
3	La hipótesis se comprueba ya que los números pares son múltiplos de 2	Proporciona una razón que permita verificar el teorema	Comprueba el enunciado
4	Todo número que sea impar en una secuencia de números es el que le antecede será un número par	Repite el enunciado como lo había reformulado	Repite el enunciado
5	Que la unidad mas otra unidad será un par y lo que resulte es el primer número par y al sumar en secuencia ese número saldrán los números pares	Proporciona un enunciado diferente	Proporciona otro enunciado
6	Los números primos son los que no se pueden dividir entre números pares	Intenta conectar primos con pares. Interferencia: primos	Proporciona otro enunciado
7	Entonces 2 par 3 impar 4 par 5 impar	Proporciona un ejemplo	Proporciona un ejemplo
8	Verdadera: 1 es impar, 2 par, 3 impar y así sucesivamente	Sugiere una comprobación por ejemplo	Idea de la comprobación
9	Que un número (impar) si es el sucesivo de un par en el segmento de números enteros	Probablemente falta una palabra. Tiene la idea de la comprobación	Repite el enunciado. Idea de la comprobación
10	Que cada número impar es el sucesivo de un número par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
11	Es verdad que un número impar es el sucesivo de un número par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado. La expresión “es verdad que” revela que ya se considera certeza la conjetura.	Repite el enunciado Idea de la certeza
12	El enunciado mismo	Hace referencia al enunciado completo	Repite el enunciado
13	Un ejemplo 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10…100, 101,102,…127, 128…comprobable	Proporciona un ejemplo	Proporciona un ejemplo
14	Son trabajos de investigación, los cuales se utilizan para titularse, se investiga un tema en específico y se imprime para elaborar un libro	Explicita el significado de tesis según él	Dice lo que es tesis
15	Que siempre va primero el número	Reformula el enunciado	Repite el

	impar y luego le sigue el número par.	completo	enunciado
16	Los números pares son aquellos que al ser divididos entre 2 dan como resultado un número entero, el sucesivo de este no arroja número entero al ser dividido entre 2, por lo tanto es impar	Proporciona una caracterización de par e intenta una argumentación	Idea de la comprobación
17	Pares cuando son divisibles entre 2 Impares cuando al dividirlos entre 2 no obtienes resultados enteros Sucesivos porque uno va después del otro	Quiere explicitar el significado de los términos. Se puede pensar que advierte la necesidad de explicitar las hipótesis implícitas	Define términos
18	Que es verdad siempre un impar va después de uno par, con excepción del 0 y el 9	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado. Interferencia: cifra. La presencia de la frase "es verdad que" indica que atribuye al término tesis un matiz de certeza	Repite el enunciado. Idea de la comprobación
19	No sé lo que quiere decir la palabra y la relación que tiene con el teorema, y no lo vi en la prepa	No conoce el término	Admite su ignorancia
20	Los números naturales	Parece entender que se genera la estructura de los números naturales	Afirma otra cosa
21	Escribir la numeración del 1 al 5 y se comprobará que es cierto	Sugiere una comprobación, con un ejemplo	Ejemplo
22	a) En una sucesión con números enteros después de un número impar sigue un número par b) Un número impar es el que al dividirse entre 2 no da un número entero c) Un número par es el que al dividirse entre 2 da un número entero	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado. Aclara los términos (hipótesis?)	Repite el enunciado y aclara términos
23	Los números sucesivos se pueden expresar así: n, n+1, n+1+1 etc. Los ns. Impares: 2n+1 Los ns. Pares: 2n	Aclara simbólicamente los términos sucesivo, par, impar	Proporciona otro enunciado, aclarando términos
24	No contesta		No contesta

Tabla 16

Resumen de las respuestas:

1) Seis alumnos repiten el enunciado completo.
2) Tres alumnos repiten el enunciado completo pero dando un matiz de certeza, o de comprobación, o de verificación al enunciado al reportarlo en respuesta a la pregunta 3.

3) Un alumno (núm. 14) expresa lo que entiende con tesis, afirmando que es el *producto final de un trabajo de investigación y sirve para titularse* …
4) Un alumno (núm.19) declara su ignorancia sobre el asunto
5) Un alumno no contesta
6) Cuatro alumnos proporcionan un ejemplo, dando un matiz de comprobación al ejemplo que proporcionan
7) Cinco alumnos intentan comprobar el enunciado o explicar que sí es verdad
8) Un alumno (el 23) intenta introducir formalmente los números sucesivo, par e impar.
9) Dos alumnos expresan otro enunciado, cuya conexión con el enunciado propuesto no queda claro

3.3.2 Pregunta 3, enunciado 2

Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales
¿Cuál es (o son) la(s) tesis?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Dos de los tres ángulos del triángulo isósceles son iguales		Correcto
2	Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales		Repite el enunciado
3	Que la afirmación es correcta ya que los triángulos llamados isósceles tienen dos ángulos iguales, por tener dos lados iguales		Repite el enunciado y afirma su certeza
4	En todo triángulo isósceles se tienen dos ángulos iguales que determinan que es un triángulo isósceles		Repite el enunciado
5	Que el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales		Repite el enunciado
6	Todo triángulo tiene en total 180° sumando sus ángulos internos. Y al tener dos lados y uno desigual, esto repercutirá de igual manera en los ángulos. Por lo que queda dentro de la clasificación de un triángulo isósceles	Intenta algo de demostración informal	Propone justificación
7	No sé		No contesta
8	Verdadera, se puede comprobar dibujando el triángulo		Propone justificación, afirma certeza
9	Que cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales y uno desigual		Repite el enunciado
10	Que efectivamente el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales que son formados por los extremos del lado desigual con el extremo de cada lado igual		Afirma certeza, al describir la figura
11	Al medir los ángulos se comprueba la hipótesis	Afirma la comprobación	Afirma certeza
12	No contesta		No contesta
13	Es comprobable x=x’ y a=b (proporciona un dibujo en el que x y x’ son ángulos y ay b son lados)		Afirma certeza
14	No contesta		No contesta
15	Que siempre dos lados iguales y uno desigual tendrá dos ángulos iguales		Repite el enunciado
16	Siempre que un triángulo tenga dos ángulos iguales es isósceles	Repite también la inversión de hipótesis y tesis	Repite el enunciado
17	Un triángulo es una figura geométrica que tiene tres lados y es isósceles sólo cuando dos de sus lados son iguales	Son las respuestas a los planteamientos	No puede decirse nada

		anteriores	
18	Es cierto, pues tiene dos ángulos iguales y uno desigual		Afirma certeza
19	No se que quiere decir la palabra y no lo vi en la prepa		Afirma ignorancia
20	Características triángulos		No puede decirse nada
21	Dibujar un triángulo isósceles y medir sus tres ángulos	Da una idea de la posible demostración	Da una idea de la demostración
22	Existen triángulos equiláteros escalenos e isósceles (estos son los que tienen dos ángulos y dos lados iguales)	Parece tener alguna idea de las premisas, entendidas como propiedades previas al teorema específico	Propone otro enunciado
23	Si tuviera tres ángulos iguales, tendría tres lados iguales y sería equilátero, si tuviera los tres ángulos desiguales, tendría los tres lados desiguales y sería escaleno. Todo es proporcional	Expresa la correspondencia entre relaciones entre lados y relaciones entre ángulos	Proporciona algo parecido a una comprobación
24	No contesta		No contesta

Tabla 17

Resumen de las respuestas

1) 5 alumnos repiten el enunciado (uno repite hasta la inversión de hipótesis con tesis)
2) 8 alumnos repiten el enunciado dando a la afirmación un matiz de certeza o de comprobación efectuada
3) un alumno, aun sin reafirmar positivamente el enunciado, indica una posible línea de comprobación
4) 1 alumno identifica correctamente la tesis
5) 5 alumnos no responden
6) 2 alumnos proporcionan otro enunciado no conectado con la tesis
7) un alumno proporciona una respuesta incomprensible
8) un alumno contesta las preguntas por sí mismo puestas

3.3.3 Pregunta 3, enunciado 3

Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos
¿Cuál es (o son) la(s) tesis?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Todos los maestros del instituto italiano de cultura son italianos	Ya no hay idea de suposición, sino de afirmación	Repite el enunciado
2	Los maestros que imparten clase en el instituto italiano son italianos		Repite el enunciado
3	Que esto no se puede comprobar ya que no por ser un instituto italiano todos los maestros deban ser italianos	Asocia tesis con afirmación comprobada	Afirma que no se puede comprobar
4	Todo maestro del instituto italiano tan solo por ser italiano el instituto los maestros lo son.	Intenta una comprobación	Repite el enunciado
5	Que solo maestros italianos pueden impartir clase allí	Elementos de interpretación	Interpreta
6	Para poder hablar o enseñar algo se debe de tener un conocimiento amplio del tema	Interpreta	Repite el enunciado interpretado
7	No sé	No contesta	No contesta
8	Nos es comprobable sólo con el enunciado	Idea de comprobación asociada a tesis	No es comprobable
9	Desconozco la información ya que para mí una tesis es algo comprobado pero yo no sé nada del instituto italiano de cultura.	Idea de comprobación asociada a tesis	No es comprobable
10	Que no porque puede haber maestros de diferentes partes que pueden trabajar en ese instituto	Idea de comprobación	No es comprobable
11	Que no todos los maestros son italianos		Niega el enunciado
12	No contesta		No contesta
13	No hay maestros de otros países en el instituto italiano de cultura (no está comprobada)	Idea de comprobación	No es comprobable
14	No		No contesta
15	Que no se puede saber si todos los maestros del instituto sean italianos	Idea de comprobación	No es comprobable
16	Un maestro para pertenecer al instituto italiano de cultura debe ser italiano	Interpreta	Interpreta
17	Todos los maestros deben conocer su cultura	Interpreta	Interpreta
18	Sí es cierto, pues el instituto es italiano y debería haber maestros	Idea de comprobación	Repite el enunciado

	italianos		“comprobado”
19	No sé qué quiera decir la palabra y su concordancia con el enunciado y no lo vi.	Admite su ignorancia	No contesta
20	Cultura italiana	Interpreta. Respuesta no clara	Interpreta
21	Cuestionar a cada maestro su nacionalidad	Idea de comprobación	Propone método de averiguación
22	En el instituto italiano de cultura todos son italianos para poder enseñar cultura italiana	Idea de explicación	Repite enunciado
23	Sí son en su totalidad del instituto italiano de cultura maestros italianos	Idea de comprobación asociada a la tesis	Repite el enunciado
24	No contesta		No contesta

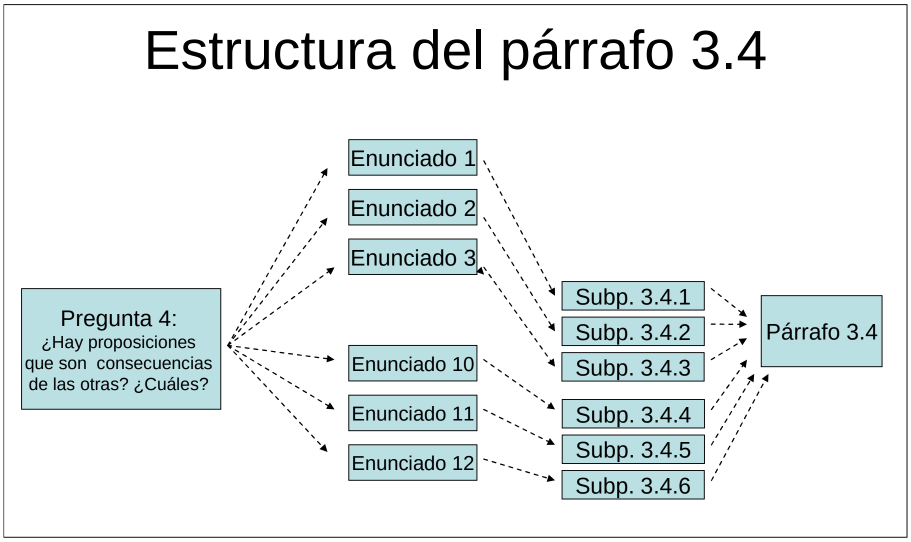
Tabla 18

Resumen de las respuestas

1) 6 alumnos repiten el enunciado. De estos, 3 asocian, con expresiones oportunas, una idea de certeza.
2) 6 alumnos afirman que no se puede comprobar el enunciado, de hecho confirmando que asocian a la tesis la idea de comprobación
3) 4 alumnos proponen otro enunciado, interpretando el original
4) un alumno niega el enunciado original, también en este caso asociando a la tesis la idea de comprobación
5) un alumno propone un método de comprobación
6) 6 alumnos no contestan

3.4 Respuestas a la pregunta 4 y resúmenes correspondientes

Se reportan aquí las respuestas, a la pregunta 4 referida a los enunciados 1, 2, 3, 10, 11, 12 por alumno numerado de 1 a 24, las observaciones y el tipo.



Cuadro 12

3.4.1 Pregunta 4, enunciado 1:

Cada número impar es el sucesivo de un número par
¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Sí, en el sucesivo de números después de un par hay un impar, por lo tanto al encontrar un par, el número siguiente es impar		Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
2	Si ya que al nombrar un numero par y seguir contando le sucede un número par		Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
3	Sí, al haber números pares surgen los números impares		Los impares son consecuencia de los pares
4	En una secuencia de números el que le antecede a un número impar será un número par		Repite el enunciado como lo había reformulado
5	Que todo número por tan grande que sea si tiene la terminación 2,4,6,8,0 será par	Proporciona una consecuencia diferente	Proporciona otro enunciado
6	Si porque si un número no es impar por consiguiente el que sigue es par, ya que están intercalados uno y uno		Parece sí identificar la consecuencia lógica
7	Sí porque si 2 no fuera 2 entonces no se sabría si fuera par o impar y eso afectaría a la serie	Afirmación no clara	Proporciona otro enunciado
8	El número par es consecuente del impar	Parece confundir "consecuencia" con "consecuente" y lo atribuye a los números	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
9	El número impar es secuencia del número par	Parece confundir "consecuencia" con "secuencia"	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
10	Si el impar es consecuencia porque en la serie va después del par	Atribuye la palabra consecuencia a los números e interpreta que los impares son consecuencia de los pares	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
11	Si, que si hay un número par por consecuencia el número que le sigue es impar	Atribuye la palabra consecuencia a los números e interpreta que los impares son consecuencia de los pares	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
12	Yo creo que no porque son números	No claro	Parece confundir

	consecutivos.		"consecuencia" con "el que sigue"
13	Sucesivo	Interpreta consecuencia asociado a sucesivo, es decir lo refiere a los números	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
14	Ej. 2,3,4 es decir que después de cada número par hay un número impar. Las consecuencia del enunciado: número impar después número par.	Parece interpretar consecuencia como enunciado demostrado	Repite todo el enunciado
15	Sucesivo	Interpreta consecuencia asociado a sucesivo, es decir lo refiere a los números	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
16	Las tesis son estudios para afirmar o verificar las hipótesis. La afirmación es la conclusión a la que se llega después de comprobar algo.	Concepción de tesis como estudio	Explica que significan tesis y afirmación
17	Por medio de la palabra sucesivo notamos que cada número impar es consecuencia del número par	Interpreta consecuencia asociado a sucesivo, es decir lo refiere a los números	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
18	Sí, como la palabra sucesivo que nos lleva a entender que de un impar le sigue o que aparecerá un número par	Interpreta consecuencia asociado a sucesivo, es decir lo refiere a los números	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
19	La de cada número es consecuencia al un número impar de un par	Los impares son consecuencia de los pares	Parece confundir "consecuencia" con "el que sigue"
20	Los números	Parece entender que se genera la estructura de los números naturales	Propone otro enunciado
21	Sí, el número impar es consecuencia del número par	Los impares son consecuencia de los pares	
22	Después de un impar sigue un par	Repite el enunciado completo, como lo había reformulado	Repite el enunciado
23	De la secuencia de números se derivan las fórmulas de los números pares y los impares	Parece identificar las fórmulas como consecuencia de la secuencia de los números.	
24	No contesta		No contesta

Tabla 19

Resumen de las respuestas:

a) 12 alumnos conectan el término "consecuencia", que comparece en la pregunta, con el término "siguiente" o "sucesivo" referido a los números, afirmando que sí, los impares son consecuencia de los pares.
b) 6 alumnos proporcionan un enunciado diferente al dado.
c) 3 alumnos reproponen el mismo enunciado
d) un alumno (el 6) parece expresar que la tesis sí es consecuencia lógica de la hipótesis. Su respuesta de todos modos no es clara.
e) un alumno (el 16) expresa qué significa para él "tesis" y "afirmación"
f) un alumno no responde

3.*4.2* ***Pregunta 4, enunciado 2:***

Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales
¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Al decirnos el enunciado que es un triángulo isósceles, se entiende que tiene dos lados iguales, por lo tanto obviamente al igual tendrá dos ángulos iguales		Intenta una explicación
2	No contesta		
3	No contesta		
4	Que en todo triángulo para que sea isósceles debe tener dos ángulos iguales		Repite el enunciado
5	Que la suma de todos los ángulos suman 180°	Interferencias: suma de los ángulos de un triángulo	Propone otro enunciado
6	Si porque al ser isósceles tiene que tener los dos ángulos iguales		Propone justificación
7	No		No contesta
8	El triángulo isósceles como consecuencia de tener dos lados iguales tiene dos ángulos iguales		Correcto
9	Cada triángulo isósceles es secuencia de dos ángulos iguales	Confunde consecuencia con secuencia	Otro enunciado
10	No contesta		
11	No, porque nos habla sólo de un simple triángulo	Razonamiento no claro	No puede decirse nada
12	Considero que es importante recordar que los isósceles tienen también dos lados iguales	Razonamiento no claro	No puede decirse nada
13	Dos ángulos iguales		Correcto
14	No contesta		No contesta
15	Ángulos iguales		Correcto
16	No contesta		No contesta
17	Dos ángulos iguales es consecuencia de triángulo isósceles		Correcto
18	No		No puede decirse nada
19	La de el triángulo isósceles a ángulos iguales		Correcto con respecto a su enunciado que intercambia hipótesis y tesis
20	No contesta		
21	No		No puede decirse

			nada
22	Si porque para que un triángulo sea isósceles debe tener dos ángulos iguales	De acuerdo con la inversión de hipótesis y tesis, contesta de manera correcta	Correcto con respecto a su enunciado que intercambia hipótesis y tesis
23	Sí: si hay tres lados iguales hay tres ángulos iguales		Propone otro enunciado
24	No contesta		No contesta

Tabla 20

Resumen de las respuestas

1) 7 alumnos no contestan
2) 5 alumnos identifican correctamente. De estos, en realidad 3 no proporcionan la respuesta correcta, sino una respuesta coherente con la interpretación del enunciado que se vislumbra en la respuesta a las preguntas 1, 2, 3 (en las cuales se invierte hipótesis con tesis)
3) 1 alumno repite el enunciado
4) 2 alumnos proponen una explicación o comprobación (positiva) del enunciado
5) 3 alumnos proponen otro enunciado
6) 3 alumnos afirman que no (que ninguna parte es consecuencia de otra)
7) 3 alumnos proporciona una respuesta no clara

3.4.3 *Pregunta 4, enunciado 3:*

Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos
¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Sí, porque al ser maestro del Instituto Italiano de cultura, ya con que el instituto sea italiano te da a entender que quienes imparten cátedra en el lugar deben de ser italianos.		Explica o comprueba la afirmación
2	Quizá que por pertenecer a un instituto italiano los maestros deben de ser italianos		Explica o comprueba la afirmación
3	No contesta		No contesta
4	Que los maestros italianos enseñan cultura italiana		Propone otro enunciado
5	No contesta		No contesta
6	No porque no se necesita ser italiano para saber cultura italiana		Niega la afirmación
7	Por lógica si es una institución italiana la dirigen italianos. Si fuera una institución mexicana entonces ya no la dirigirían los italianos sino los mexicanos.		Explica o comprueba la afirmación
8	No		Afirma que no
9	Todos los maestros del instituto italiano de cultura son por consecuencia italianos.		Explica o comprueba la afirmación
10	Por que los maestros dependen de su nacionalidad		Explica o comprueba la afirmación
11	Que sí porque si se habla del instituto italiano los maestros tendrían que ser italianos		Explica o comprueba la afirmación
12	No		Afirma que no
13	Todos son italianos		Correcto
14	No		Afirma que no
15	Todos los maestros son italianos		Respuesta correcta
16	No contesta		No contesta
17	No hay		Afirma que no
18	Sí, que los maestros del instituto italiano de cultura son todos de Italia		Repite el enunciado
19	Los maestros del inst. it. de cult., italianos		Respuesta no clara
20	Que son maestros italianos y son de Italia		Respuesta correcta
21	No		Afirma que no
22	Para poder ser maestro del instituto italiano de cultura debe ser italiano		Propone otro enunciado

			interpretado
23	No		Afirma que no
24	Que es posible que el instituto no esté en Italia		Propone otro enunciado

Tabla 21

Resumen de las respuestas

a) 3 alumnos no contestan
b) 3 alumnos identifican correctamente
c) 1 alumno repite el enunciado
d) 6 alumnos proponen una explicación o comprobación (positiva) del enunciado
e) 3 alumnos proponen otro enunciado (en realidad interpretan el enunciado inicial y reproponen esta interpretación
f) 7 alumnos afirman que no (que ninguna parte es consecuencia de otra)
g) 1 alumno proporciona una respuesta no clara

3.4.4 Pregunta 4, enunciado 10

Si a,b,c son alturas de un triángulo, entonces se encuentran en un mismo punto
¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?

Al.	Respuesta	Observaciones	Tipología
1	Sí, ya que al indicarnos que los tres puntos representan la altura de un triángulo, por ende sabemos que estos están ubicados en el plano en el mismo lugar	Interpreta las alturas como puntos, pero identifica la estructura lógica correctamente	Correcto lógicamente
2			No contesta
3			No contesta
4	a, b, c son alturas de un triángulo, y los tres se encuentran en un mismo punto		Repite el enunciado
5			No contesta
6			No contesta
7	No		Afirma que no hay partes que son consecuencia de otras
8			No contesta
9	a, b, c son alturas de un triángulo Entonces se encuentran en un mismo punto		Repite el enunciado
10	No hay		Afirma que no hay partes que son consecuencia de otras
11	No hay		Afirma que no hay partes que son consecuencia de otras
12			No contesta
13	Son alturas se encuentran en el mismos		Repite el enunciado
14	No		Afirma que no hay partes que son consecuencia de otras
15			No contesta
16			No contesta
17			No contesta
18	No, no hay		Afirma que no hay partes que son consecuencia de otras
19	Son alturas, se encuentran en el mismo punto		Repite el enunciado
20			No contesta
21			No contesta
22	Un triángulo bien trazado tiene sus alturas perpendiculares y estas		Repite el enunciado

	llegan a un mismo punto		
23	Las alturas		Respuesta no clara
24			No contesta

Tabla 22

Resumen de las respuestas:

1) Un alumno proporciona una respuesta correcta
2) Cinco alumnos repiten el enunciado
3) Trece alumnos no contestan o proporcionan una respuesta no clara
4) Cinco alumnos afirman que no hay partes que son consecuencia de otra

3.4.5 *Pregunta 4, enunciado 11*

Si a es un número múltiplo de 6, entonces es también múltiplo de 3
¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?

Al.	**Respuesta**	**Obs.**	**Tipología**
1	Sí, al determinar que un número es múltiplo de 6 obviamente este número será múltiplo de 3, ya que 3 es divisor de 6		Matiz de comprobación
2			No contesta
3			No contesta
4	A es múltiplo de 6 y de 3		Propone otro enunciado
5			No contesta
6	Sí, porque al ser a múltiplo de 6, en consecuencia es múltiplo de 3 porque si no lo fuera no habría consecuencia		Matiz de comprobación
7	No		Afirma que no
8	Al ser 6 duplo de 3, todos los múltiplos de 6 serán múltiplos de 3 también		Matiz de comprobación
9	Un múltiplo de 6 es en consecuencia un múltiplo de 3		Repite enunciado
10	Que comprobando matemáticamente es cierto ya que 6 es un múltiplo de 3		Matiz de comprobación
11	Sí que como a es múltiplo de 6en consecuencia es también múltiplo de 3		Matiz de comprobación
12	Si un factores de los números		Respuesta no clara
13			No contesta
14			No contesta
15			No contesta
16			No contesta
17			No contesta
18	Sí, que el tres tiene de múltiplo al 6, y por esto el 3 y 6 tienen los mismos múltiplos		Matiz de comprobación
19	Si a es un múltiplo de 6 tambien		Respuesta no clara
20			No contesta
21			No contesta
22	Un múltiplo tiene otro múltiplo		Respuesta no clara
23	Sí, los múltiplos y divisores		Respuesta no lcara
24			No contesta

Tabla 23

Resumen de las respuestas:

1) Ningún alumno proporciona una respuesta correcta
2) Un alumno repite el enunciado
3) Un alumno proporciona otro enunciado
4) Seis alumnos proporcionan una convicción o un matiz de exactitud o comprobación del enunciado
5) Quince alumnos no contestan
6) Un alumno afirma que no hay partes que son consecuencia de otras

3.4.6 Pregunta 4, enunciado 12

Si una persona es italiana, también es europea
¿Hay proposiciones que son consecuencias de las otras? Cuáles?

Al.	**Respuesta**	**Observaciones**	**Tipología**
1	Sí, porque al decirnos que una persona es nacida en Italia, este país pertenece al continente europeo, por lo tanto al igual es europeo		Matiz de comprobación
2	Al ser italiano eres automáticamente europeo		Repite enunciado
3			No contesta
4	Una persona italiana es europea porque Italia está en Europa		Matiz de comprobación
5			No contesta
6	Sí porque Italia pertenece a Europa		Matiz de comprobación
7	Sí		Matiz de comprobación
8	Como consecuente de italiano, es el ser europeo		Correcto
9	Ser europeo es consecuencia de ser italiano		Correcto
10	Sí porque pertenece a un grupo por lo cual existen más integrantes		Matiz de comprobación
11	Sí que como Italia está en Europa un italiano es también europeo		Matiz de comprobación
12	Sí el lugar donde está Italia		Respuesta no clara
13	Italiano también europeo		Respuesta no clara
14			No contesta
15			No contesta
16			No contesta
17			No contesta
18	Sí, que un italiano puede ser europeo y un europeo puede ser italiano		Otro enunciado
19	Italiana, europea		Respuesta no clara
20	Los europeos		Respuesta no clara
21	Toda persona que es italiana es europea		Repite enunciado
22	Debes de ser de un país europeo como Italia para poder ser europeo		Otro enunciado
23	Sí, si la persona es italiana, por tanto también es europea, porque Italia pertenece a Europa		Matiz de comprobación
24	Sí porque el ser italiano se sabe que es europeo		Matiz de comprobación

Tabla 24

Resumen de las respuestas:

1) dos alumnos proporcionan una respuesta correcta
2) dos alumnos repiten el enunciado
3) dos alumnos proporcionan otro enunciado

4) ocho alumnos proporcionan una convicción o un matiz de exactitud o comprobación del enunciado
5) diez alumnos no contestan

Capítulo 4 – Segundo nivel de análisis

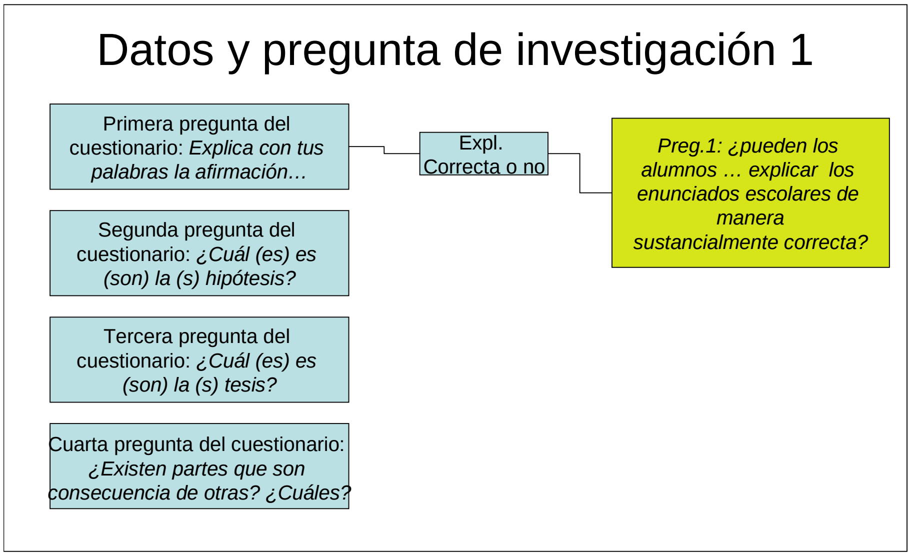
En el capítulo 4 se comparan los resultados obtenidos con las preguntas de investigación.
Más específicamente:
En el **párrafo 4.1** se analizan, a partir de las preguntas de investigación, los resultados recolectados. A cada pregunta de investigación es dedicado un subpárrafo, a su vez dividido en otras partes en caso que el análisis lo requiera . El párrafo 4.1 tiene por lo tanto cinco subpárrafos. Algunos esquemas se espera faciliten la lectura.
En el **párrafo 4.2** se proporciona una tabla sintética de los resultados obtenidos.
En **el párrafo 4.3** se resumen los resultados por cada pregunta de investigación.

4.1 Análisis de los datos recolectados a partir de las preguntas de investigación.

Retomaremos ahora las preguntas de investigación, considerando las contribuciones que las respuestas al cuestionario proporcionan al respecto.

4.1.1 Primera pregunta de investigación

La primera pregunta fue la siguiente:
¿Pueden los alumnos de nuevo ingreso en las carreras de ingeniería de la UAO explicar de manera no formal pero sustancialmente correcta los enunciados escolares en sus elementos esenciales?
Como ya se comentó en el capítulo 2, para poder recolectar elementos para contestar esta pregunta, se diseñó la primera pregunta del cuestionario *("Explica con tus palabras la afirmación:")*. Se consideraron aceptables las respuestas que mantuvieran el sentido de las afirmaciones propuestas, sin importar la exactitud de las palabras usadas, ya sea que mantuvieran la formulación originaria, ya sea que formularan el enunciado de manera lógicamente equivalente.



Cuadro 13

En la tabla siguiente, se reporta el número de alumnos que han proporcionado una respuesta sustancialmente correcta, incorrecta, o que no han contestado a la pregunta 1.

Enunciado	Ámbito temático	Respuestas correctas	Respuestas no correctas	No respondió o respuesta no clara	Porcentaje respuestas correctas
1	Aritmética	5	19	0	20.8%
2	Geometría	19	4	1	79.2%
3	LC	23	1	0	95.8%
4	Geometría	13	7	4	54.2%
5		18	2	4	75%
6	LC	19	4	1	79.2%
7	Geometría	7	14	3	29.2%
8	Aritmética	11	8	5	45.8%
9	LC	17	6	1	70.8%
10	Geometría	10	4	10	41.7%
11	Aritmética	15	3	6	62.5%
12	LC	23	0	1	95.8%
Totales		180	72	36	62.5%

Tabla 25

El resultado global es de 180 respuestas correctas sobre 288, es decir el 62.5%. Sin embargo destaca que el 37.5% de las respuestas son equivocadas. En 4 casos las respuestas correctas no llegan al 50%.

Los resultados confirman que a nivel universitario hay de parte de los alumnos serias dificultades en interpretar de manera correcta enunciados escolares.

4.1.2 Segunda pregunta de investigación

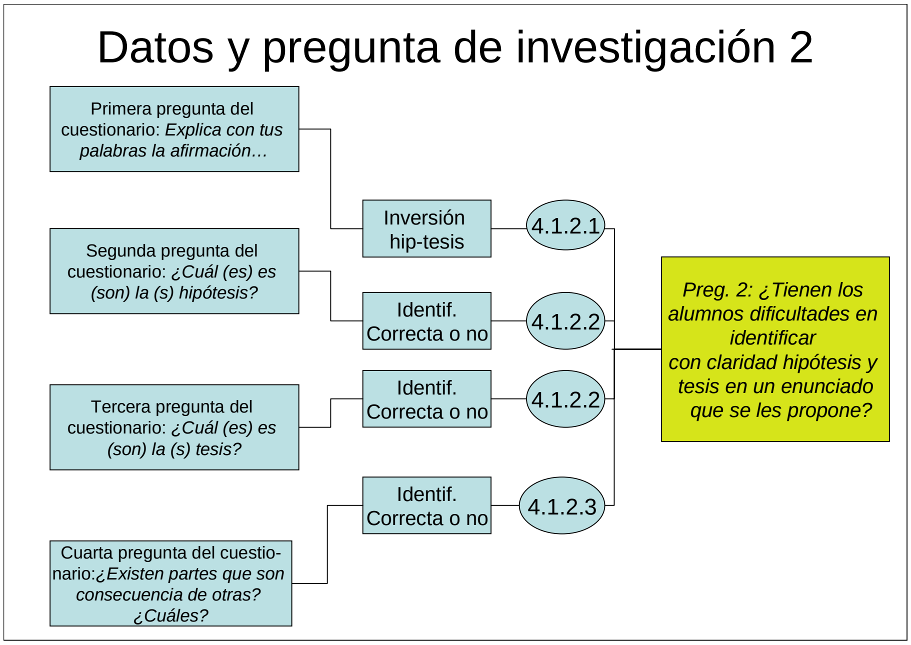
La segunda pregunta de investigación fue la siguiente:

¿Tienen los alumnos dificultades en identificar con claridad hipótesis y tesis en un enunciado que se les propone?

Los elementos del cuestionario que dan indicaciones al respecto son varios.

Por un lado, las preguntas 2 y 3 del cuestionario (*¿Cuál o cuáles son las hipótesis? ¿Cuál o cuáles son las tesis?)* fueron diseñadas, como se comentó en el párrafo 2.3, para esta específica finalidad. Además, con la inquietud de entender si los alumnos, aún sin conocer los términos hipótesis y tesis, supieran identificar la conexión lógica entre premisa y conclusión, se añadió la cuarta pregunta: *(En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?).* Por otro lado, también las respuestas a la primera pregunta del cuestionario *(¿Pueden los alumnos … explicar de manera no formal pero sustancialmente correcta los enunciados escolares en sus elementos esenciales?)* proporciona indicaciones, siendo que varios alumnos, al no entender con claridad la conexión lógica entre los elementos de los enunciados, al intentar explicar los enunciados invierten hipótesis y tesis, por completo o parcialmente.

El presente párrafo será dividido por lo tanto en cuatro apartados, el primero para las indicaciones que dan las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario, el segundo para las indicaciones que dan las respuestas a las preguntas 2 y 3, el tercero para las indicaciones que dan lar respuestas a la pregunta 4 del cuestionario, y el cuarto para una síntesis sobre la segunda pregunta de investigación. En el siguiente esquema se ilustra lo dicho, y se indican los apartados de referencia.



Cuadro 14

4.1.2.1 *Hipótesis y tesis: indicaciones de las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario.*

Al responder la pregunta 1 del cuestionario varios alumnos, como ya mencionamos, han proporcionado respuestas en las cuales resultaban intercambiadas, totalmente o parcialmente, hipótesis y tesis.

En la tabla siguiente se proporcionan las respuestas correctas, las respuestas no proporcionadas y las respuestas incorrectas desincorporando los casos de inversión entre hipótesis y tesis (en la tabla del párrafo 4.1.1 este tipo de error no resultaba desincorporado).

En.	*Ámbito temático*	*Respuestas. correctas*	*Respuestas. incorrectas totales*	*Respuestas incorrectas que invierten hipótesis y tesis*	*No respondió o respuesta no clara*	*Porcentaje respuestas que invierten. hipótesis y tesis*
1	Aritmética	5	19	9	0	37.5%
2	Geometría	19	4	2	1	8.3%
3	LC	23	1	1	0	4.2%
4	Geometría	13	7	7	4	29.2%
5	Aritmética	18	2	0	4	0%
6	LC	19	4	0	1	0%
7	Geometría	7	14	8	3	33.3%
8	Aritmética	11	8	2	5	8.3%

9	LC	17	6	3	1	12.5%
10	Geometría	10	4	0	10	0%
11	Aritmética	15	3	0	6	0%
12	LC	23	0	0	1	0%
	Totales	180	72	32	36	11.1%

Tabla 26

Los resultados indican claramente que el fenómeno de inversión entre hipótesis y tesis es bien presente, aunque no es generalmente difundido. Destacan por el número de casos de inversión o asimilables, tres enunciados, el 1, el 4 y el 7, y los resultados al respecto se comentarán en el capítulo siguiente.

4.1.2.2 Hipótesis y tesis: indicaciones de las respuestas a las preguntas 2 y 3 del cuestionario.

Las preguntas 2 y 3 del cuestionario (*¿Cuál o cuáles son las hipótesis?¿Cuál o cuáles son las tesis?)* son específicas sobre hipótesis y tesis. En los párrafos 3.2 y 3.3 se reportaron las respuestas en el caso de los primeros tres enunciados. Presentamos aquí una tabla de resumen al respecto.

Pregunta 2	**En. 1**	**En. 2**	**En. 3**
Repiten el enunciado completo	17	14	15
Repite el enunciado con matiz de suposición o en forma de pregunta		1	4
Afirma que no hay hipótesis por ser obvia la propiedad (hipótesis como conjetura)		1	
Propone otro enunciado (completo)		4	5
Proporcionan ejemplo	2		
Redefinen términos	3		
Define lo que es hipótesis (=conjetura)	1		
No contesta o respuesta no clara	1	3	
Responde correctamente	0	1	
Pregunta 3			
Repite el enunciado completo	6	5	3
Repite el enunciado con matiz de certeza	3	8	3
Proporciona un ejemplo con matiz de comprobación	4		
Intenta la comprobación o la no comprobación	5	1	8
Redefine términos	1	1	
Define lo que es tesis (producto final de un trabajo de investigación…)	1		
No contesta o respuesta incomprensible	2	6	6
Expresa otro enunciado cuya conexión no es clara	2	2	4
Responde correctamente		1	

Tabla 27

Los resultados son impactantes: **ningún alumno identifica correctamente hipótesis y tesis de los enunciados 1 y 3, y solamente 1 alumno identifica correctamente hipótesis y tesis en el enunciado 2.**

Más aún: los resultados, observados globalmente, son muy claros en su indicación cuanto al **significado que los alumnos dan a los términos hipótesis y tesis.**

En efecto, con respecto a la **identificación de la hipótesis**, se observa que en el primer enunciado 17 alumnos repiten como hipótesis el mismo enunciado. En el segundo enunciado, 14 alumnos repiten el mismo enunciado, otros 4 proporcionan otro enunciado completo, y otros 2 con su respuesta dejan pensar que ellos asocian al término hipótesis un significado de conjetura. En el tercer enunciado, 19 alumnos repiten el enunciado completo, y de ellos cuatro dan al enunciado un matiz de suposición, mientras que los demás cinco alumnos proporcionan otro enunciado, pero de todos modos de forma completa.

Con respecto a la **identificación de la tesis**, queda aún mas clara la idea de certeza, comprobación o demostración efectuada que al término tesis se atribuye: en el primer enunciado 9 alumnos repiten el enunciado completo, y de ellos 3 le dan un matiz de certeza; otros 7 intentan una comprobación o un ejemplo con fines de comprobación. En el segundo enunciado, 13 alumnos repiten el enunciado y de ellos 8 lo repiten con matiz de comprobación. En el tercer enunciado, 6 alumnos repiten el enunciado y de ellos 3 lo repiten con matiz de comprobación, mientras 8 alumnos intentan una comprobación o explicación.

Se puede por lo tanto en nuestra opinión concluir que para la gran mayoría de los alumnos sea la hipótesis, sea la tesis son *la propiedad* en su sentido global, y al hablar de hipótesis los alumnos se refieren a la propiedad *antes que sea demostrada*, es decir con un matiz de suposición (lo que en matemática se llamaría conjetura), mientras al hablar de tesis se refieren a una propiedad *ya demostrada*, cierta, cuya verdad ya se ha averiguado.

4.1.2.3 Hipótesis y tesis: indicaciones de las respuestas a la pregunta 4 del cuestionario.

También la cuarta pregunta del cuestionario (*En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?)* está conectada con la identificación de hipótesis y tesis. Acordamos que fue al pensar que las dificultades en identificar hipótesis y tesis dependan de un insuficiente conocimiento del significado de estos términos, que añadimos esta pregunta para averiguar si, aunque no conozcan los términos hipótesis y tesis, los alumnos pueden identificar la conexión lógica entre las partes del mismo enunciado.

Los resultados son los siguientes:

	En.1	**En.2**	**En 3**
Confunde *consecuencia* con *siguiente* o *sucesivo*	12		
Proporciona otro enunciado	6	3	3
Repropone el mismo enunciado	3	1	1
No responde o respuesta no clara	2	10	4
Expresa qué significa tesis	1		
Responde correctamente		5	3
Propone una explicación o comprobación		2	6
Niega la verdad del enunciado		3	7

Tabla 28

Se puede observar que es cierto que hay algún resultado positivo (5 respuestas correctas en el segundo enunciado, 3 respuestas correctas en el tercer enunciado), sin embargo el éxito no es muy relevante. Con respecto al primer enunciado destaca el hecho que doce alumnos, al confundir el término "consecuencia" con los términos "siguiente" o "sucesivo", demuestran no entender la pregunta. Concluyendo, **al formular la pregunta evitando los términos "hipótesis" y "tesis" y utilizando en cambio el término "consecuencia" es más fácil para algunos de los alumnos identificar la relación lógica entre las partes de un enunciado, pero permanecen para la mayoría de los alumnos fuertes dificultades**.

4.1.2.4 Hipótesis y tesis, conclusiones.

Comparando las indicaciones que las varias partes del cuestionario nos dan acerca de la segunda pregunta de investigación (*¿Tienen los alumnos dificultades en identificar con claridad hipótesis y tesis en un enunciado que se les propone*?), podemos concluir lo siguiente:

Los alumnos sí tienen dificultad en identificar hipótesis y tesis (premisas y conclusiones). Prueba esto la presencia consistente (11.1% de las respuestas totales) de los casos de inversión entre hipótesis y tesis o casos asimilables al explicar los enunciados.

Por otra parte, casi ningún alumno tiene idea del significado matemático de los términos *hipótesis* y *tesis*. Los alumnos interpretan estos términos con significados

que derivan del uso que de ellos se hace en las ciencias experimentales o en el lenguaje común.

También el término *consecuencia* entendido en sentido lógico resulta ajeno a la formación de la gran mayoría de los alumnos.

En el capítulo 5 regresaremos sobre estos resultados.

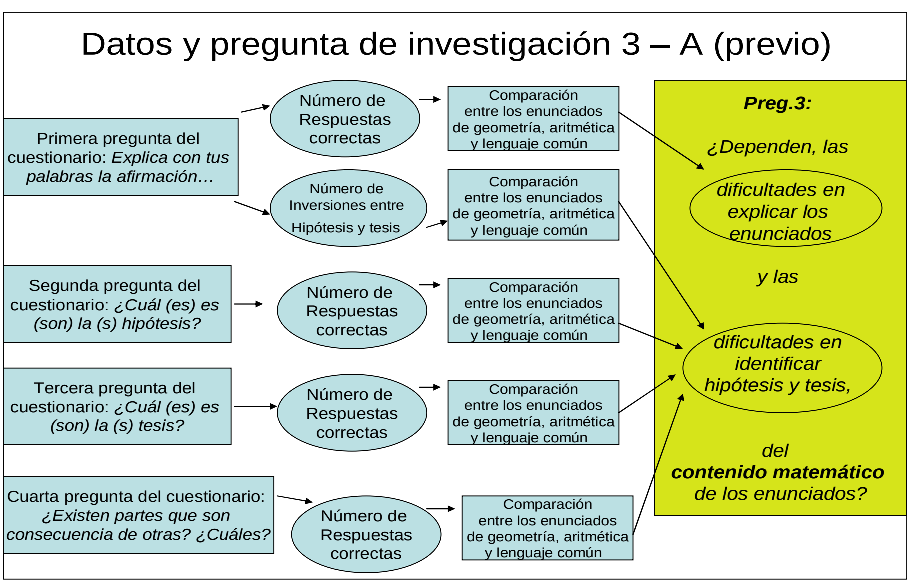
4.1.3 Tercera pregunta de investigación.

La tercera pregunta de investigación fue:

¿Dependen, las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, del contenido matemático de los enunciados?

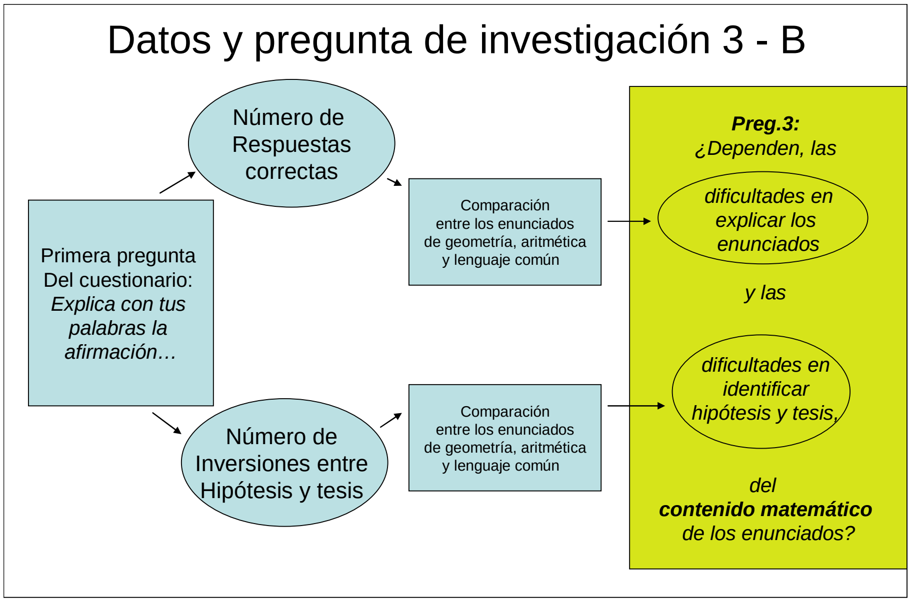
Para recolectar elementos sobre este punto, pusimos en el cuestionario enunciados de álgebra, aritmética, y en lenguaje común.

Lo que puede dar indicaciones acerca de la incidencia del contenido matemático sobre las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, es la comparación entre los resultados de los alumnos en los enunciados de los tres tipos. Siendo que son las respuestas a las cuatro preguntas del cuestionario que dan indicaciones sobre las dificultades en explicar (primera pregunta) y en identificar hipótesis y tesis (las cuatro preguntas), son las respuestas a las cuatro preguntas que habría que analizar, como resulta al observar el esquema siguiente.



Cuadro 15

Sin embargo, ya vimos en el subpárrafo anterior que solamente la primera pregunta dio indicaciones efectivas al respecto, por la ignorancia sustancial de parte de los alumnos de los términos hipótesis y tesis y en medida menor también del término consecuencia. Por lo tanto, compararemos solamente las respuestas de los alumnos a la primera pregunta del cuestionario, según el siguiente esquema.



Cuadro 16

La tabla aquí abajo reporta el número de respuestas correctas, el número total de respuestas incorrectas, el número de respuestas incorrectas que intercambian hipótesis y tesis, y el número de respuestas no claras o preguntas no contestadas, a la pregunta 1 (*explica con tus palabras el enunciado*), divididas por ámbito disciplinar.

	Total preguntas	Respuestas correctas	Respuestas no correctas	Respuestas no correctas que invierten hipótesis y tesis	No respondió o respuestas no claras	% respuestas correctas
Aritmética	96	49	32	11	15	51%
Geometría	96	49	29	17	18	51%
Lenguaje común	96	82	11	4	3	85.4%

Tabla 29

Al ver los resultados, se observa fácilmente que con respecto a la *dificultad en explicar*, los enunciados de geometría y de aritmética presentan las mismas dificultades para los alumnos (49 respuestas correctas en ambos casos), mientras los enunciados en lenguaje común resultan presentar menos dificultad (82 respuestas correctas).

Con respecto a la *inversión entre hipótesis y tesis*, hay un número un poco más elevado de casos en geometría: aritmética presenta 11 casos, geometría 17 y lenguaje común 4. Sin embargo, la tabla de los resultados por enunciado, sugiere que más que un problema de ámbito disciplinar en general, hay algunos enunciados que tienen casos muy elevados. Se trata, como mencionado, de los enunciados 1, 4, 7.

	Enunciado 1er bloque	Enunciado 2do bloque	Enunciado 3er bloque	Enunciado 4to bloque	Total
Aritmética	9	0	2	0	11
Geometría	2	7	8	0	17
Lenguaje común	1	0	3	0	4

Tabla 30

Se puede decir por lo tanto que **las dificultades en explicar de manera correcta los enunciados y en identificar hipótesis y tesis sí dependen del contenido matemático, en el sentido que los enunciados de aritmética y geometría provocan más dificultades con respecto al lenguaje común. No hay fuertes diferencias entre los dos ámbitos temáticos específicamente matemáticos, sin embargo resulta que en los enunciados de geometría hay más casos de inversión entre hipótesis y tesis.**

4.1.4 Cuarta pregunta de investigación

La cuarta pregunta fue la siguiente:

¿Dependen, las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, de la estructura lógica del teorema (número de hipótesis, uso de cuantificadores)?

Recordamos que para recolectar elementos acerca de esta pregunta, se elaboró un cuestionario dividido en bloques, de diferente estructura lógica:

Primer bloque: los enunciados tienen la forma lógica $\forall x \in U[A(x) \rightarrow B(x)]$, y además tienen un cuantificador universal en la primera parte, mientras no tienen, o tienen solamente implícito, el cuantificador existencial.

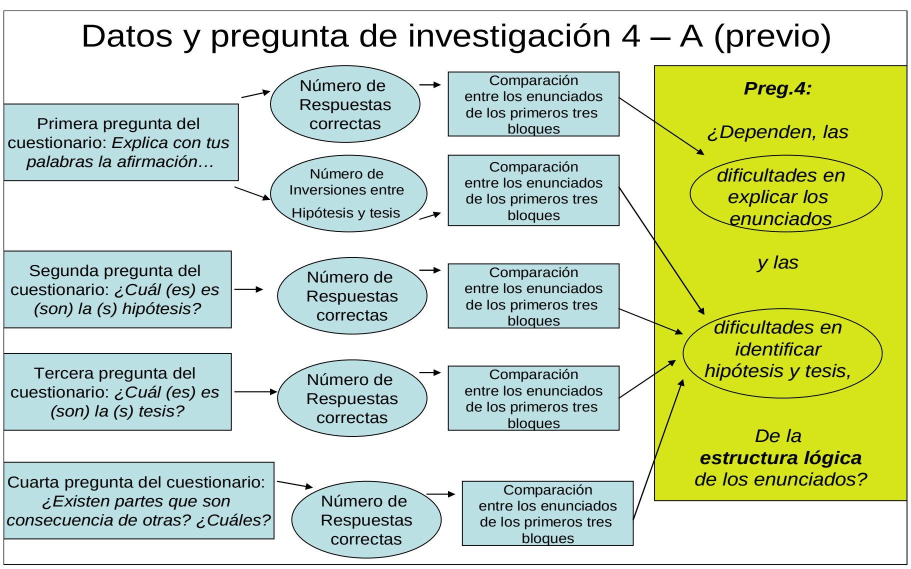
Segundo bloque: los enunciados tienen la forma lógica $\forall x \in U[A(x)]$, y tienen un cuantificador universal en la primera parte, mientras en la segunda tienen explícito un cuantificador existencial.

Tercer bloque: los enunciados tienen la forma $\forall x \in U[P(x) \wedge I(x) \rightarrow D(x)]$, es decir dos enunciados en conjunción como antecedentes, cuantificador universal y no tienen cuantificador existencial. Es este el bloque de mayor complejidad lógica, por el número de premisas.

Cuarto bloque: los enunciados son del tipo $\forall x \in U[A(x) \rightarrow B(x)]$, es decir tienen la misma estructura lógica que los enunciados del primer bloque, sin embargo utilizan la forma si...entonces. Estos enunciados por lo tanto se distinguen de los del primer bloque no tanto por su estructura lógica cuanto por su formulación lingüística, y fueron introducidos en el cuestionario para recolectar datos para la quinta pregunta de investigación.

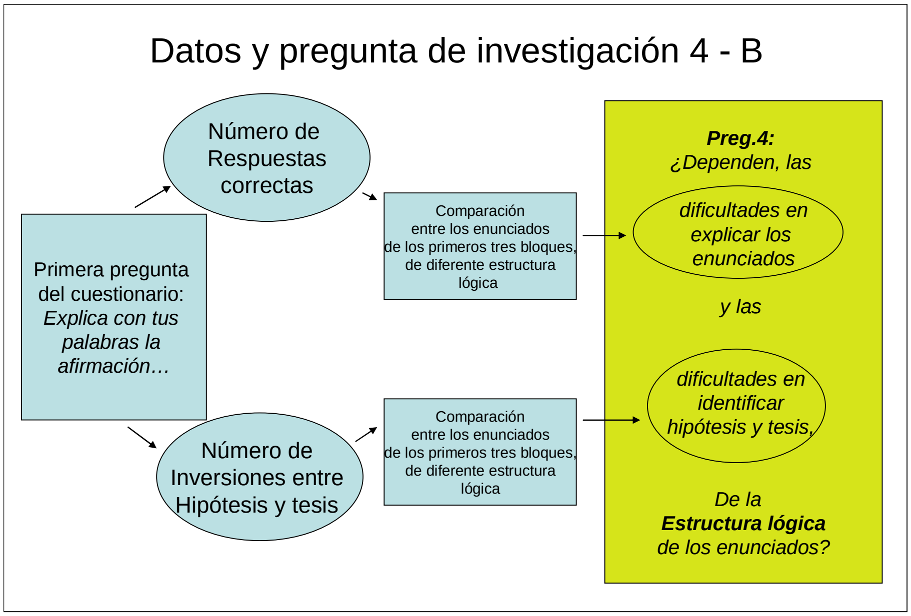
Acordamos que ya criticamos la división en bloques, afirmando que tal división no es únicamente definida y podría ser discutida. Sin embargo, a ella nos atendremos en este párrafo.

Con respecto a los datos significativos para la cuarta pregunta de investigación, la situación es parecida a la situación con respecto a la tercera pregunta de investigación: lo que puede dar indicaciones acerca de la incidencia de la estructura lógica sobre las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, es la comparación entre los resultados de los alumnos en los enunciados de los cuatro bloques, o por lo menos de los primeros tres. Siendo que son las respuestas a las cuatro preguntas del cuestionario que dan indicaciones sobre las dificultades en explicar (primera pregunta) y en identificar hipótesis y tesis (las cuatro preguntas), son las respuestas a las cuatro preguntas que habría que analizar, como resulta al observar el esquema siguiente.



Cuadro 17

Sin embargo, ya vimos que solamente la primera pregunta dio indicaciones efectivas al respecto, por la ignorancia sustancial de parte de los alumnos de los términos hipótesis y tesis. *Por lo tanto, compararemos solamente las respuestas de los alumnos a la primera pregunta del cuestionario*, según el siguiente esquema.



Cuadro 18

Analicemos los resultados obtenidos con el cuestionario. Dividimos este análisis en dos partes, siendo que se habla de dificultad en interpretar correctamente los enunciados y de dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis.

4.1.4.1 Influencia de la estructura lógica sobre las dificultades en explicar el enunciado

Con respecto a las dificultades en interpretar correctamente el enunciado propuesto, están resumidos en la tabla siguiente los resultados a la primera pregunta, agrupados por bloques de enunciados.

En.	Ámbito temático	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	Respuestas incorrectas que invierten hipótesis y tesis	No respondió o respuesta no clara	Porcentaje respuestas correctas
1	Aritmética	5	19	9	0	20.8%
2	Geometría	19	4	2	1	79.2%
3	LC	23	1	1	0	95.8%
	Total 1er bloque	**47**	**24**	**12**	**1**	**65.3%**

4	Geometría	13	7	7	4	54.2%
5	Aritmética	18	2	0	4	75%
6	LC	19	4	0	1	79.2%
	Total 2do bloque	**50**	**13**	**7**	**9**	**69.4%**
7	Geometría	7	14	8	3	29.2%
8	Aritmética	11	8	2	5	45.8%
9	LC	17	6	3	1	70.8%
	Total 3er bloque	**35**	**28**	**13**	**9**	**48.6%**
10	Geometría	10	4	0	10	41.7%
11	Aritmética	15	3	0	6	62.5%
12	LC	23	0	0	1	95.8%
	Total 4to bloque	**48**	**7**	**0**	**17**	**66.7%**

Tabla 31

Destaca que los resultados relativos a los enunciados del tercer bloque son significativamente más bajos que los resultados relativos a los enunciados de los demás bloques, los cuales son entre ellos homogéneos.

Tomando en cuenta que el tercer bloque contiene enunciados de complejidad mayor, del tipo $\forall x \in U[P(x) \wedge I(x) \rightarrow D(x)]$, con dos premisas, se puede concluir que **las dificultades de los alumnos en interpretar los enunciados sí dependen de la complejidad lógica de los mismos enunciados, y se puede suponer que es el mayor número de premisas (elemento que hace la diferencia entre los enunciados del tercer bloque y los enunciados de los demás bloques) a provocar más dificultades.**

4.1.4.2 Influencia de la estructura lógica sobre las dificultades en identificar correctamente hipótesis y tesis

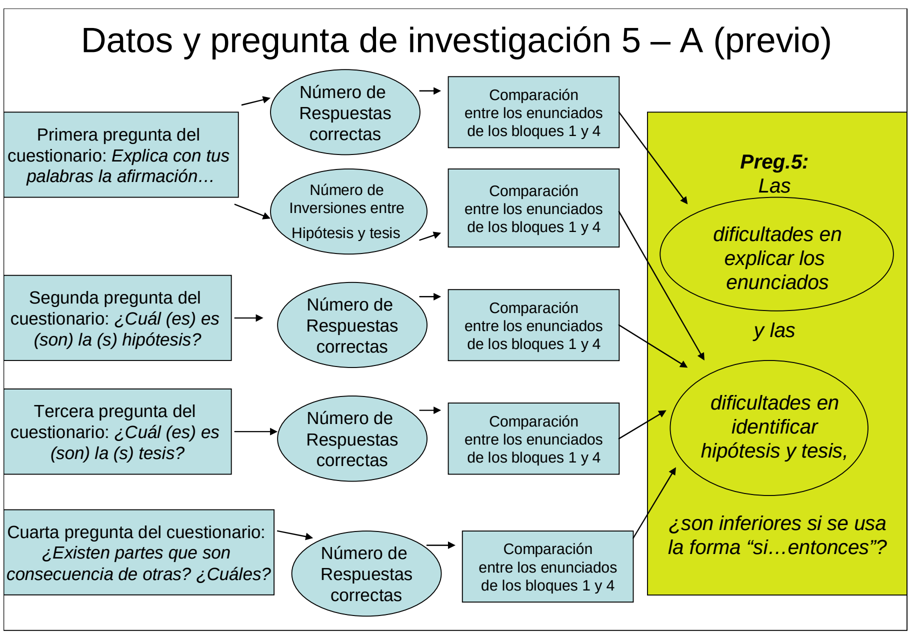
Observando la tabla anterior de resumen de los resultados por bloques de enunciados, y específicamente la columna de respuestas equivocadas por inversión de hipótesis y tesis, se observa que en el mismo bloque hay resultados muy diferentes. **No parece, por lo tanto, que sea la complejidad lógica el elemento que pone in dificultad los alumnos en identificar hipótesis y tesis**. Emerge en cambio que hay algunos enunciados que inducen al error los alumnos, precisamente el enunciado 1, con nueve casos de inversión, el enunciado 4, con siete casos de inversión y el enunciado 7, con 8 casos de inversión. Retomaremos la cuestión en el capítulo siguiente.

4.1.5 Quinta pregunta de investigación

La quinta pregunta de investigación fue la siguiente*: Las dificultades en explicar los enunciados y en identificar hipótesis y tesis, ¿son inferiores si el maestro utiliza al presentar los enunciados la forma "si…entonces"?*

Como hemos observado con anterioridad, para contestar esta pregunta se formuló el cuarto bloque de enunciados, que tiene la misma complejidad lógica que los enunciados del primer bloque, pero que utilizan la forma lingüística "si…entonces".

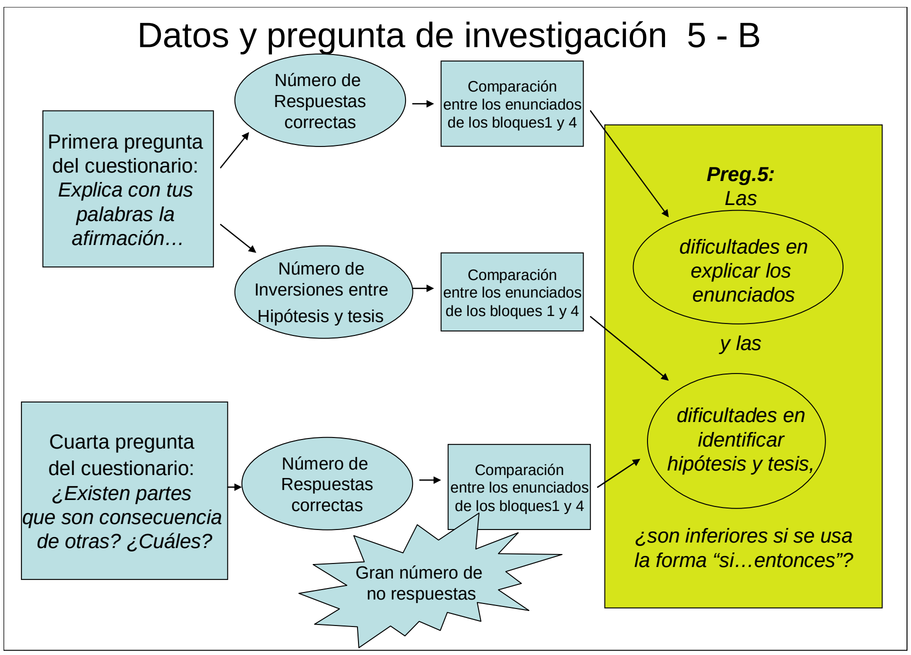
Se trata por lo tanto de comparar los resultados del cuestionario en los enunciados del cuarto bloque con los resultados del cuestionario en los enunciados del primer bloque. Como ya comentamos, las indicaciones acerca de las dificultades en explicar los enunciados llegan de las respuestas a la primera pregunta del cuestionario, mientras las indicaciones acerca de las dificultades en identificar correctamente hipótesis y tesis llegan de las respuestas a las cuatro preguntas. El esquema siguiente intenta explicar la conexión.



Cuadro 19

En los casos anteriores (preguntas de investigación 3 y 4) nos limitamos a considerar las respuestas a la primera pregunta del cuestionario, siendo que la sustancial ignorancia del significado de los términos hipótesis y tesis y la fuerte, aunque no total, ignorancia del término consecuencia impiden de hallar indicaciones en las respuestas a las preguntas 2, 3 y 4 del cuestionario.

En este caso (pregunta de investigación n° 5), la pertinencia de la cuarta pregunta del cuestionario con la quinta pregunta de investigación hace de especial interés el análisis de las respuestas a dicha cuarta pregunta del cuestionario referida a los enunciados del cuarto bloque. Es esta la razón por la que hemos reportado, en el párrafo 3.4, dichas respuestas, y por la que en este párrafo las comentaremos. Sin embargo como veremos la relevancia de las no-respuestas, debidas, supuestamente, a la falta de tiempo o al cansancio de los alumnos, quitan significado a los datos. Comentaremos mejor más adelante esta circunstancia.



Cuadro 20

4.1.5.1 Influencia de la forma "si…entonces" en la correcta explicación de los enunciados.

Con respecto a la capacidad de explicar correctamente el contenido de los enunciados, queda claro, al observar la tabla expuesta en el apartado 4.1.4.1, que el número de las respuestas exactas del cuarto bloque (47) no es significativamente diferente al número de las respuestas exactas del primer bloque (48). **No hay por lo tanto evidencia que el uso de la forma "si…entonces" facilite la correcta explicación de los enunciados.**

También se observa que en este cuarto bloque, hay 17 casos de respuestas no dadas, contra un solo caso en el primer bloque. Esto se debe a que el bloque cuarto, siendo al final de un cuestionario largo, no ha sido completado por varios alumnos.

4.1.5.2 Influencia de la forma “si…entonces” en la correcta identificación de hipótesis y tesis.

Con respecto a la identificación de hipótesis y tesis, se observa lo siguiente.

- con respecto a la pregunta 1 del cuestionario, la tabla anterior (apartado 4.1.4.1) indica que *los enunciados del cuarto bloque no presentan ningún caso de inversión entre hipótesis y tesis*. Parecería por lo tanto razonable suponer que **el uso de la forma “si… entonces” facilita efectivamente el alumno en no confundir hipótesis y tesis**.
- con respecto a las preguntas 2 y 3, vale lo observado con anterioridad: los estudiantes interpretan los términos hipótesis y tesis en sentido no matemático. Por lo tanto las respuestas a las preguntas 2 y 3 en los enunciados del bloque 4 no presentan diferencias significativas con las respuestas a las mismas preguntas en los enunciados de los demás bloques y del bloque 1 en especial.
- con respecto a la pregunta 4, la tabla aquí abajo proporciona una síntesis de las respuestas relativas a los enunciados del cuarto bloque, reportadas en el capítulo 3.

…hay partes que son consecuencia de otras?	En.10	En.11	En. 12
Respuestas correctas	1		2
Repite el enunciado	5	1	2
Proporciona otro enunciado		1	2
Respuestas que expresan una aserción de exactitud del enunciado		6	8
No responde o respuesta no clara	13	15	10
Afirma que no	5	1	

Tabla 32

Se observa que solo 3 son las respuestas correctas, mientras que en los enunciados 1,2,3 las respuestas correctas a la pregunta 4 fueron 8. Sin embargo, como comentamos antes, se impone el número muy elevado de respuestas no claras o no proporcionadas, debido supuestamente a la falta de tiempo o al cansancio de los alumnos.

Concluyendo el punto 4.1.5.2, nos parece que **el uso de la forma “si…entonces” facilita efectivamente el alumno en identificar correctamente hipótesis y tesis,** siendo que en los enunciados del cuarto bloque no se presentan casos de inversión entre hipótesis y tesis al explicar los alumnos los enunciados. **Sin embargo, el número elevado de respuestas no claras o no proporcionadas sugiere la oportunidad de otras comprobaciones.**

4.2 Tabla sintética

Se sintetiza en la tabla siguiente el análisis de los resultados de la aplicación del cuestionario con respecto a las preguntas de investigación.

Pregunta de investigación	**Elemento significativo en el cuestionario**	**Resumen de los resultados**	**Conclusión**
¿Pueden los alumnos de nuevo ingreso en las carreras de ingeniería de la UAO explicar de manera no formal pero sustancialmente correcta los enunciados escolares en sus elementos esenciales?	Respuestas a la pregunta 1 de cada enunciado (“Explica con tus palabras la afirmación…”)	180 respuestas sobre 288 resultan correctas (62.5%). 108 respuestas sobre 288 resultan equivocadas o no proporcionadas (37.5%). En 4 casos las respuestas correctas no llegan al 50%.	Los resultados indican que **hay de parte de los alumnos serias dificultades en explicar de manera correcta enunciados escolares.**
¿Tienen los alumnos dificultades en identificar con claridad hipótesis y tesis en un enunciado que se les propone?	Inversión de hipótesis y tesis en la respuesta a la pregunta 1	Este tipo de error es presente en muchos enunciados, aunque en porcentaje no alto (globalmente el 11% de las respuestas totales y el 44.4% de las respuestas equivocadas). En los enunciados 1, 4 y 7 el porcentaje es muy relevante	**El fenómeno de inversión entre hipótesis y tesis es bien presente, aunque no es generalmente difundido, en el grupo de los alumnos**
	Respuestas a la pregunta 2 (¿Cuál o cuáles son las hipótesis) y 3 (¿Cuál o cuáles son las tesis?)	Se analizaron las respuestas en los primeros tres enunciados: ningún alumno identifica correctamente hipótesis y tesis en los enunciados 1 y 3, y solamente 1 en el enunciado 2. En su gran mayoría los alumnos repiten el enunciado global, con matiz de suposición en el caso de la hipótesis, y con matiz de comprobación en el caso de la tesis.	**Casi ningún alumno tiene idea del significado matemático de los términos hipótesis y tesis**. Interpretan estos términos con significados que derivan del uso que de ellos se hace en las ciencias experimentales o en el lenguaje común.

	Respuestas a la pregunta 4 (En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?)	Ningún alumno en el enunciado 1, 5 alumnos en el enunciado 2, 3 alumnos en el enunciado 3 responden correctamente	Al formular la pregunta evitando los términos “hipótesis” y “tesis” y utilizando en cambio el término “consecuencia” **es más fácil para algunos de los alumnos identificar la relación lógica entre las partes de un enunciado, pero permanecen para la mayoría de los alumnos dificultades.** El término “consecuencia” entendido en sentido lógico es ajeno a la formación de la gran mayoría de los alumnos
¿Dependen estas dificultades del contenido matemático de los enunciados?	Con respecto a la *dificultad en explicar* enunciados de manera correcta : Respuestas a la primera pregunta, agrupadas por disciplina (aritmética, geometría, lenguaje común) de los enunciados	Las respuestas correctas son el 51% en los enunciados de aritmética, el 51% en los enunciados de geometría, el 85% en los enunciados en lenguaje común.	**Las dificultades sí parecen depender del contenido matemático en el sentido que los enunciados de aritmética y geometría provocan más dificultades con respecto al lenguaje común, pero no hay diferencias significativas entre aritmética y geometría**
	Con respecto a la *dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis*: Presencia de inversión entre hipótesis y tesis en las respuestas a la primera pregunta, agrupadas por bloques según la estructura lógica	Las respuestas que invierten hipótesis y tesis son el 11.5% en los enunciados de aritmética , el 17.7% en los de geometría y el 4% en los en lenguaje común	**Las dificultades sí parecen depender del contenido matemático, en el sentido que los enunciados de aritmética y geometría provocan más dificultades con respecto al lenguaje común, pero no hay diferencia relevante entre aritmética y geometría.**
	Con respecto a la *dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis*: Respuestas a las preguntas 2 y 3 del cuestionario, agrupadas por bloques según la estructura lógica	Los alumnos no conocen el significado matemático de los términos hipótesis y tesis	El cuestionario no proporciona datos significativos
	Con respecto a la *dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis*: Respuestas a la pregunta 4 del cuestionario, agrupadas por bloques según la estructura lógica	También el término consecuencia es poco conocido	El cuestionario no proporciona datos significativos

¿Dependen estas dificultades de la estructura lógica del teorema (número de hipótesis, uso de cuantificadores)?	Con respecto a la *dificultad en explicar* enunciados de manera correcta: Respuestas a la primera pregunta del cuestionario agrupadas por bloques según la estructura lógica	El bloque 3 (con más premisas) tiene un número menor de respuestas exactas que los demás bloques (48.6% contra 65.3%, 69.8%, 66.7%)	Las dificultades de los alumnos sí parecen depender de la complejidad lógica de los mismos enunciados, en el sentido que **parece ser el mayor número de premisas a provocar más dificultades**
	Con respecto a la *dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis*: Presencia de inversión entre hipótesis y tesis en las respuestas a la primera pregunta, agrupadas por bloques según la estructura lógica	En el mismo bloque hay resultados diferentes dependiendo de los enunciados.	La inversión entre hipótesis y tesis **no parece depender de la complejidad lógica de los enunciados**
	Con respecto a la *dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis*: Respuestas a las preguntas 2 y 3 del cuestionario, agrupadas por bloques según la estructura lógica	Los alumnos no conocen el significado matemático de los términos hipótesis y tesis	El cuestionario no proporciona datos significativos
	Con respecto a la *dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis*: Respuestas a la pregunta 4 del cuestionario, agrupadas por bloques según la estructura lógica	También el término consecuencia es poco conocido	El cuestionario no proporciona datos significativos
¿Las dificultades en explicar los enunciados y las dificultades en identificar hipótesis y tesis, ¿son inferiores si el maestro utiliza al presentar los enunciados la forma "si…entonces"?	Con respecto a *la dificultad en explicar los enunciados*: Respuestas a la primera pregunta relativas a los enunciados del cuarto bloque con respecto a los enunciados del primer bloque	No hay diferencias significativas, muchos alumnos no han contestado	No hay evidencia que el uso de la forma "si…entonces" facilite al alumno en la actividad de explicar el enunciado.
	Con respecto a *la dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis:* Casos de inversión entre hipótesis y tesis en las respuestas a la pregunta 1 en el cuarto bloque con respecto a los enunciados del primer bloque	No hay ningún caso de inversión	El hecho que no haya en el cuarto bloque ningún caso de inversión entre hipótesis y tesis hace pensar que **el uso de la forma "si…entonces" hace más difícil equivocarse.** **Sin embargo se necesitarían otras comprobaciones**, por el elevado número de no respuestas

	Con respecto a *la dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis:* Respuestas a las preguntas 2 y 3 en los enunciados del cuarto bloque con respecto a los enunciados del primer bloque	Los alumnos no conocen el significado matemático de los términos hipótesis y tesis	El cuestionario no proporciona datos significativos
	Con respecto a la *dificultad en identificar correctamente hipótesis y tesis:* Respuestas a la pregunta 4 en los enunciados del cuarto bloque con respecto a los enunciados del primer bloque	También el término consecuencia es poco conocido Muchos alumnos no han contestado Sólo tres son las respuestas exactas	El cuestionario no proporciona datos significativos

Tabla 33

4.3 Conclusiones sobre las preguntas de investigación.

Resumiendo brevemente las indicaciones que las respuestas dan acerca de cada una de las preguntas de investigación, podemos expresar lo siguiente:

1) En el grupo de alumnos a los cuales ha sido suministrado el test hay serias dificultades en explicar de manera correcta enunciados escolares.

2) El fenómeno de inversión entre hipótesis y tesis es bien presente, aunque no es generalmente difundido

Casi ningún alumno tiene idea del significado matemático de los términos hipótesis y tesis. Interpretan estos términos con significados que derivan del uso que de ellos se hace en las ciencias experimentales o en el lenguaje común.

Al formular la pregunta evitando los términos “hipótesis” y “tesis” y utilizando en cambio el término “consecuencia” es más fácil para algunos de los alumnos identificar la relación lógica entre las partes de un enunciado, pero permanecen para la mayoría de los alumnos dificultades. El término “consecuencia” entendido en sentido lógico es ajeno a la formación de la gran mayoría de los alumnos

3) Las dificultades en explicar los enunciados y en identificar hipótesis y tesis sí parecen estar conectadas con el contenido matemático, pero no hay diferencia relevante entre aritmética y geometría.

4) Las dificultades en explicar los enunciados sí parecen estar conectadas con la complejidad lógica de los mismos enunciados, y exactamente parece que es el mayor número de premisas a provocar más dificultades. La dificultad en identificar hipótesis y tesis no parece depender de la complejidad lógica de los enunciados.

5) El uso de la forma “si…entonces” parece favorecer la correcta identificación de hipótesis y tesis. Sin embargo se necesitarían otras comprobaciones, siendo muy alto el número de alumnos que no han contestado.

Para otras consideraciones se remite a las conclusiones en el capítulo 6.

Capítulo 5. Tercer nivel de análisis

Retomamos en este capítulo algunos elementos, salidos a flote en las respuestas al cuestionario, que nos parecen dignos de especial consideración. El interés que provocan deriva del hecho que abren escenarios que enriquecen de manera consistente el estudio del fenómeno didáctico en objeto y permiten verlo bajo nuevas luces.
Hemos agrupado estas respuestas en seis categorías. Por cada categoría mencionamos sumariamente la problemática que ponen y presentamos los escenarios que en nuestra opinión abren.

5.1 Acerca del contenido matemático: conceptos equivocados

a) El enunciado 2 menciona el ***triángulo isósceles***. Las respuestas a la pregunta 1 manifiestan que mientras algunos alumnos opinan que un triángulo isósceles es un *triángulo con dos lados iguales sin importar como sea el tercero,* otros alumnos afirman que un triángulo isósceles es un *triángulo con dos lados iguales y uno desigual*.

b) El enunciado 7 menciona los ***cuadriláteros con los cuatro lados iguales y los lados opuestos paralelos,*** y varios alumnos en la respuesta a la pregunta 1 hablan directamente de *cuadrado*. Esta circunstancia induce a pensar que para estos alumnos las propiedades de tener los lados iguales y los lados opuestos paralelos identifican los cuadrados. El caso de los *rombos* no resulta por lo tanto considerado.

c) El enunciado 10 menciona las ***alturas de un triángulo***. Varias respuestas a la pregunta 1 manifiestan que el concepto de altura de un triángulo resulta equivocado: algunos alumnos piensan que las alturas midan lo mismo, otros alumnos piensan que las alturas son perpendiculares a algún lado pero no pasan por el vértice opuesto, otros alumnos mencionan que cada triángulo sólo tiene una altura.

d) En el enunciado 5 se menciona el concepto de ***múltiplo de un número***. Algunos alumnos (3, 9, 16, 23) demuestran no tenerlo claro: unos utilizan el término cuadrado en lugar que múltiplo, otros confunden el término múltiplo con mínimo común múltiplo, otros lo expresan de manera confundida.

La pregunta de investigación 3 se ocupaba del papel del contenido matemático en provocar dificultades de comprensión de los enunciados en los alumnos. Con el análisis conducido en los capítulos anteriores, concluimos que el contenido matemático sí influye, en el sentido que globalmente los enunciados de contenido matemático provocan más dificultades que los enunciados no matemáticos. En este párrafo y en el sucesivo ponemos en evidencia otros elementos conectados con el contenido matemático.

Específicamente en el párrafo presente se intenta interpretar la presencia, en algunas respuestas, de. errores y confusiones sobre algunos conceptos básicos específicos de geometría y aritmética.

De manera especial llama la atención que los comportamientos arriba mencionados se observen a nivel carrera, es decir en alumnos supuestamente ya muy avanzados en su iter formativo.

Algunas nociones teóricas de la matemática educativa pueden ayudar a interpretarlos.

Hemos mencionado y resumido en el capítulo 1 la noción de *obstáculo*, propuesta por Brousseau y desarrollada especialmente en la escuela francesa, y a la clasificación de los obstáculos en epistemológicos, didácticos y ontogenéticos.

Los comportamientos de los alumnos que estamos analizando podrían interpretarse como emergencia de obstáculos, es decir de conocimientos que habiendo demostrado su efectividad en la resolución de algún tipo de problema o situación, tienden a conservarse en situaciones diferentes y se interponen a un conocimiento más profundo.

En el caso de los conceptos de triángulo isósceles, de paralelogramo con lados iguales, de altura de un triángulo el obstáculo más que debido a la definición formal quizás es debido a la imagen visual asociada, y sería atribuible a la actividad del maestro. Se trataría, es decir, de obstáculos didácticos: el maestro, en las actividades didácticas correspondientes, decidiría, en el afán de hacer más clara la explicación, utilizar imágenes de triángulos isósceles solamente no equiláteros, de paralelogramos con lados iguales que solamente son cuadrados, y trazar solamente una altura del triángulo, y claramente en posición estándar. Estas costumbres del maestro generan conceptos en el alumno. (Fischbein, 1989) hablaría de "modelos implícitos" (*tacit model* en inglés), que se vuelven la referencia fundamental del alumno para este concepto, y que tienen las características que Brousseau atribuye a los obstáculos. Con respecto a la permanencia a nivel carrera de los comportamientos arriba mencionados, se puede observar que un obstáculo, aunque de alguna manera resuelto en un conocimiento más amplio, reaparece a veces, a distancia de tiempo y en manera inesperada.

También la noción de *currículo oculto*, utilizando el nombre que le da (Silver, 1985), citado por (Zan, 2007, p.85) nos dice algo acerca de la permanencia a nivel carrera de los comportamientos equivocados.

Silver pone en evidencia que mientras el maestro desarrolla en su clase un currículo, por decir así el oficial, y lo tiene bien claro, en realidad cada alumno desarrolla su particular currículo, hecho por conceptos y nociones y relaciones entre conceptos que él desarrolla por su cuenta, y el maestro por lo general no lo conoce y no logra corregirlo en su partes equivocadas.

De hecho, con respecto a cada uno de los conceptos arriba mencionados –triángulo isósceles, cuadrado y rombo, altura(s) de un triángulo, múltiplo de un número- estamos de frente a la circunstancia que hay entre los alumnos varias concepciones y diferentes entre ellas, como a indicar que cada alumno se ha formado su currículo personal.

5.2 Acerca del contenido matemático: inserción de elementos que, en la apariencia, no tienen que ver

Mencionamos directamente algunas respuestas.

a) Al responder la pregunta 1 en el caso del enunciado 1:

Explica con tus palabras la afirmación:

Cada número impar es el sucesivo de un número par

El alumno 23 responde:

Un número impar (que no se puede dividir entre 2) le sigue de un par <u>(compuesto por varios factores primos incluyendo la unidad y sí mismo</u>).

b) Al responder la pregunta 1 en el caso del enunciado 2

Explica con tus palabras la afirmación:

Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

El alumno 3 responde:

El tipo de triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual por tanto tiene que tener dos ángulos iguales y uno desigual <u>de tal forma que los tres ángulos sumen 180°</u>

c) Al responder la pregunta 1 en el caso del enunciado 5

Explica con tus palabras la afirmación:

Por cada par de números enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del menor que supera el mayor.

El alumno 3 responde:

Nos dice que cada par de números enteros positivos que sean diferentes entre sí existe un múltiplo del número menor el cual superara al <u>*mayor ya que el múltiplo de ambos debe ser divisible entre los dos*</u>

El fenómeno al que asistimos en este caso, siempre conectado con la influencia del contenido matemático sobre la interpretación de los enunciados, es la inserción , en la explicación de un enunciado de parte de los alumnos, de conceptos que al menos aparentemente no tienen que ver con el enunciado mismo.

A una primera análisis, se puede diferenciar este fenómeno con respecto al fenómeno del párrafo anterior (párrafo 5.1) por el hecho que no se trata, en apariencia, de conceptos equivocados o confundidos en sí, cuanto más bien de conceptos cuya inserción en la explicación del enunciado al que el alumno los refiere es equivocada.

Así, en el caso a) la descomposición en factores primos, en el caso b) la propiedad que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°, en el caso c) el concepto de múltiplo común son conceptos y propiedades mencionadas por los estudiantes sin evidente razón. Sin embargo, las propiedades mencionadas podrían ser en sí bien claras para los alumnos.

Dos nociones teóricas pueden dar explicación de este comportamiento.

Por una parte todavía la noción de *obstáculo,* ya mencionada en el párrafo anterior. En efecto, los conceptos que los alumnos mencionan pueden ser conceptos que se han revelado útiles en otros contextos en la experiencia del alumno, que por esto se consideran de importancia sobresaliente, y que se mencionan también en este contexto nuevo como posible elemento importante o resolutorio. Se trataría en este caso de obstáculos en el sentido de Brousseau.

Por otra parte, y es la noción que en nuestra opinión más explica los comportamientos a examinar, la noción de *contrato didáctico*. Ya hemos mencionado y aclarado también esta noción en el capítulo 1, expresando que el contrato didáctico es un conjunto de reglas implícitas o explícitas que ordenan la relación entre contenido a enseñar, alumnos y maestros en la clase de matemáticas.

En el caso de nuestros alumnos, nos parece que la noción de contrato didáctico puede explicar su comportamiento, en el sentido que puede ser que los alumnos pretendan demostrar al maestro que sus conocimientos son más amplios que los que la respuesta estrictamente requiere.

Este intento nos parece poder ser la consecuencia de una repetición, de parte de los maestros, de una modalidad de evaluación de los resultados de los alumnos que recompensa la abundancia de los conocimientos más que la pertinencia de las argumentaciones. Esta modalidad de evaluación no es infrecuente en las prácticas didácticas a nivel de secundaria y preparatoria Y, de todos modos, esta puede ser la regla que, aunque la intención del maestro no fuera esta, los alumnos han identificado.

5.3 Hipótesis y tesis: acerca del significado de los términos

Siendo uno de los puntos medulares de la primera parte de la investigación, ya se comentó con abundancia de detalles el comportamiento de los estudiantes acerca de la correcta identificación de hipótesis y tesis en un enunciado.

La observación que aquí nos interesa retomar es que para la gran mayoría de los alumnos hipótesis y tesis son la misma propiedad en su sentido global, y la diferencia que se vislumbra en sus respuestas está en la circunstancia que al hablar de hipótesis se refieren a la propiedad antes que sea demostrada, es decir con un matiz de suposición (lo que en matemáticas se llamaría *conjetura*), mientras al hablar de tesis se refieren a una propiedad ya demostrada, cierta, cuya verdad ya se ha averiguado.

Dicho de otra forma, los alumnos parecen ignorar el sentido matemático de estos dos términos, y sólo los utilizan con el significado que les dan las disciplinas experimentales o el lenguaje común[9].

Así por ejemplo, el alumno 3 afirma que en el *enunciado "Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales"* la hipótesis es *"Que el triángulo isósceles tenga dos ángulos iguales"* , mientras la tesis es *"Que la afirmación es correcta ya que los triángulos llamados isósceles tienen dos ángulos iguales, por tener dos lados iguales."*

---

[9] (Zan, 2007, p.84) en la parte de comento al caso de Alice, que regularmente llama hipótesis a la tesis, llega a la misma conclusión.

El resultado hallado en la investigación con respecto al significado que los alumnos dan a estos términos ha sido definitivamente sorpresivo para nosotros. Imaginábamos que algunos estudiantes no conocieran el significado matemático de los términos, pero no que nadie lo conociera.

Por otro lado, no imaginábamos que todos los alumnos dieran el significado que he llamado experimental a estos términos.

Este hallazgo nos ha convencido de la necesidad de tener, al analizar los fenómenos didácticos, un enfoque sistémico.

Más específicamente nos parece que se desprendan dos indicaciones.

La primera va en la dirección de *tomar en cuenta, al intentar explicar fenómenos didácticos, no solamente la clase de matemática, sino también las demás clases y el ambiente sociocultural en el que los alumnos viven.*

Cada contexto tiene su lenguaje, y hay palabras que resultan utilizadas en contextos diferentes con sentidos diferentes, como es el caso de hipótesis y tesis. En el caso que las palabras sean utilizadas en sentidos diferentes, el alumno puede vivir un conflicto, del que el maestro debe estar consciente.

La noción de *obstáculo* puede servirnos también en esta circunstancia, sin embargo nos parece que este tipo de obstáculo no se pueda reconducir propiamente a ninguna de las tres tipologías que Brousseau menciona. Su origen en nuestra opinión está en la pluralidad de contextos didácticos y socioculturales en los cuales el alumno se encuentra. Si queremos, el obstáculo puede ser didáctico, pero en el sentido que se revela en la escuela, y que es el maestro quien al utilizar una palabra con un sentido diferente al ya conocido por el alumno, sin supuestamente aclarar el asunto, no efectúa de manera adecuada el proceso de transposición didáctica. .

La segunda observación va en la dirección de considerar, para explicar el no conocimiento del sentido matemático de los términos hipótesis y tesis y en cambio el conocimiento generalizado del significado experimental y del lenguaje común, la *formación cultural de los maestros de matemáticas de México.*

De hecho en las escuelas mexicanas, y más a nivel de preparatoria, los maestros de matemáticas son en gran mayoría ingenieros, y la formación matemática de los ingenieros en el país tradicionalmente no es teórica sino aplicativa. Se puede decir que en la formación de un ingeniero en México tienen más peso las disciplinas técnicas y experimentales que las matemáticas teóricas. Se puede conjeturar por lo tanto que es la formación cultural de los maestros que induce la falta, en la formación matemática de los alumnos, del sentido matemático de los términos hipótesis y tesis. Esta conjetura es sugerida también por mi experiencia de enseñanza, en Italia y en México: en Italia, donde los maestros de formación estrictamente matemática que dan clase en la preparatoria son muchos más, el conocimiento del significado matemático de los términos hipótesis y tesis es por lo general mayor. Obviamente, reiteramos, se trata solo de una conjetura, que requiere obviamente de todas las averiguaciones del caso.

Ambas las observaciones anteriores indican de todos modos que es necesario, al estudiar fenómenos didácticos, considerar el ambiente escolar general y el ambiente socio cultural. En las conclusiones retomaremos esta afirmación.

5.4 Hipótesis y tesis. Acerca del elevado número de inversiones entre hipótesis y tesis (y fenómenos asimilables) en el caso de dos enunciados en especial.

Hemos observado en el apartado 4.1.4.2 que los casos de inversión entre hipótesis y tesis, o de otras partes del enunciado, evidenciados al contestar los alumnos a la pregunta 1 del cuestionario, resultan muy numerosos con respecto a tres enunciados: el enunciado 1, el enunciado 4 y el enunciado 7. Mientras en el caso del enunciado 7 las respuestas son muy variadas y entran muchos elementos como posibles causas de errores, nos parece que los enunciados 1 y 4 abren perspectivas más claras.
Analizamos un poco más en el detalle los dos casos

Enunciado 1:
A la pregunta: "Explica con tus palabras la afirmación: *Cada número impar es el sucesivo de un número par*", nueve alumnos responden con la afirmación: *"Que el consecutivo (el n° que le sigue) de todo número par, siempre es un número (im)par"* (alumno 1) o formas equivalentes.
Otros 7 alumnos responden con la afirmación: *"Quiere decir que después de un número impar le sigue uno par"* (alumno 12) o formas equivalentes.
Y otros 3 alumnos responden con la afirmación: *"Que los números impares van intercalados con los pares"* (alumno 6) o formas equivalentes.

Al clasificar en el párrafo 3.1.1 los tres tipos de respuesta, hemos llamado *inversión entre hipótesis y tesis el primer tipo*, *enunciado sustancialmente diferente* el segundo tipo, y *enunciado más general* el tercer tipo. Cinco alumnos han proporcionado una respuesta correcta.

El conjunto de respuestas nos parece interesante. El enunciado tiene esta característica: existen varios enunciados, todos verdaderos, que son parecidos al enunciado propuesto, pero diferentes. De hecho todas las respuestas proponen enunciados verdaderos, pero solamente cinco alumnos se atienen con fidelidad al enunciado propuesto.

Al conjeturar una explicación para el comportamiento de los alumnos, considero que su preocupación primaria haya sido exactamente la de proporcionar una respuesta correcta en el sentido del significado, sin fijarse demasiado sobre la coherencia con el enunciado original. Como si no importara mucho la coherencia de la respuesta con el enunciado propuesto, sino que solo importara llegar a una respuesta verdadera. Si la conjetura se revelara exacta, estaríamos también en este caso frente a un comportamiento debido probablemente a la costumbre a prácticas didácticas en las cuales no es la consistencia ni la coherencia de las afirmaciones a ser requerida y valorada, sino una genérica sensatez.

Enunciado 4

El caso del enunciado 4 es prácticamente análogo: existen varios enunciados, todos verdaderos, que son parecidos al enunciado propuesto, pero diferentes. Así, a la pregunta: “Explica con tus palabras la afirmación: *cada triángulo se puede inscribir en un círculo*”, mientras trece alumnos responden de manera correcta, siete alumnos responden con la afirmación: “*En cada círculo se puede inscribir un triángulo*”. Consideramos que también en este caso la explicación de este comportamiento puede ser la misma: el afán de parte de los alumnos de proporcionar una respuesta correcta en el sentido del significado, sin fijarse demasiado sobre la coherencia con el enunciado original.

5.5 Acerca de algunas respuestas a la pregunta 1 en el enunciado 9: atribución forzosa de un sentido causal al enunciado

Retomamos aquí una observación, ya hecha en el capítulo 3, sobre algunas respuestas a la pregunta 1 en el caso del enunciado 9.

A la pregunta:

Explica con tus palabras la afirmación:

Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana

Varios alumnos responden de la siguiente manera:

- *Que todos los pintores de Oaxaca que además son exitosos en todo el mundo <u>deben su éxito</u> a su formación popular y artesana* (al.1)
- *Que pintores oaxaqueños que se van al exterior a probar y logran tener éxito <u>es porque</u> provienen de una tradición popular y artesana como lo es Oaxaca* (al.3)
- *Que las personas que son pintores y de Oaxaca tienen una gran altura porque no han sido influenciados por el exterior <u>y por eso triunfan</u>* (al.6)
- *Los pintores de Oaxaca tienen un éxito internacional <u>porque provienen</u> del pueblo y guardan sus tradiciones* (al.7)
- *<u>El éxito</u> de los pintores de Oaxaca <u>proviene de</u> una tradición* (al.8)

En todas estas respuestas, que como hemos puesto en evidencia en el análisis detallado del párrafo 3.1.9 no son exactamente idénticas entre ellas desde el punto de vista lógico (a este análisis reenviamos los lectores que quieren profundizar los detalles lógicos de dichas formulaciones de los alumnos), se asiste sin embargo al mismo fenómeno, que podríamos describir como **la interpretación del enunciado en términos de causa y efecto.** Son las expresiones en negrito en cada frase que dan el particular matiz causal a los enunciados de los alumnos. Además, es interesante observar que la formulación utilizada por los alumnos, aunque da un matiz diferente al enunciado, en realidad genera enunciados lógicamente equivalentes al enunciado propuesto[10].

[10] Se puede decir que en los casos mencionados hay una respuesta correcta a la pregunta 1 de parte de los alumnos 1, 3,8 mientras los alumnos 6 y 7 se equivocan porque invierten al menos parcialmente hipótesis y tesis.

¿Qué significan estas respuestas? ¿Por qué los alumnos sobre interpretan este enunciado?

Una posible explicación de estos resultados es sugerida por los estudios sobre el contexto. En (Zan, 2007 p.48), en un capítulo dedicado al aprendizaje como actividad constructiva, se mencionan los experimentos de (Wason, 1966), (Griggs & Cox, 1982), (Legrenzi, 1998) sobre el razonamiento condicional, con la finalidad de poner en evidencia la importancia del contexto en el razonamiento en general, y por lo tanto en el caso de la enseñanza de las matemáticas.[11]

Estos experimentos demuestran cómo las respuestas en los casos de razonamiento condicional son influenciadas de manera relevante por el contexto. Si el ambiente de ubicación del contenido de un test es concreto y cercano a la experiencia diaria de los sujetos a quienes se les propone, los resultados son mejores. En este enfoque, el contexto oaxaqueño, en el que el orgullo para la tradición artesana es muy fuerte, determinaría la sobre interpretación del enunciado propuesto en términos de causa y efecto.

---

[11] El clásico test de las cartas de (Wason, 1966) consiste en proponer al sujeto (adulto) cuatro cartas, en las qué hay en una la letra A, en otra la letra R, en otra el número 4, en la última el número 7, con la información que "si en una carta está una vocal en una cara, en la otra cara está un número par". La pregunta es: ¿Cuál de las cuatro cartas voltearías para averiguar la información es correcta? Las respuestas correctas son cerca del 10%.

En la versión de (Griggs & Cox, 1982), se pide a los sujetos (estudiantes de Florida) de ensimismarse en un policía que tiene que controlar el respeto de la ley sobre el uso de alcohol en los bares de Florida, así formulada: "Si una persona toma cerveza, tiene que tener más que 16 años". Sobre la mesa se ponen cuatro cartas, que representan cuatro clientes de un bar, y cada carta tiene una información sobre el cliente que representa:

- Primera carta: "TOMA CERVEZA"
- Segunda carta: "TOMA AGUA"

  Tercera carta: "TIENE MÁS QUE 16 AÑOS"

  Cuarta carta:" TIENE MENOS QUE 16 AÑOS"

Se pide al sujeto entrevistado cuál carta tiene que voltear el policía para averiguar que en el salón se respete la ley. En este caso, las respuestas correctas son muchas más.

La tercera versión del test, realizada en 1972 y mencionada por (Legrenzi, 1998), consiste en proporcionar al sujeto cuatro sobres, dos abiertos y dos cerrados, dos con timbre de Lit.750 y dos con timbre de Lit.500. La regla es: "Si un sobre está cerrado, tiene que tener el timbre de Lit 750". Los sobres son propuestos al sujeto de la manera siguiente:

- Sobre con visible el timbre, con timbre de Lit 750 y con no visible el cierre
- Sobre con visible el timbre, con timbre de Lit.500 y con no visible el cierre
- Sobre con visible el lado del cierre, que resulta abierto, y con el timbre, no visible, del otro lado.
- Sobre con visible el lado del cierre, que resulta cerrado, y con el timbre, no visible, del otro lado.

Obviamente se pide que el sujeto indique el sobre que hay que voltear para controlar el respeto de la regla.

También en este caso, las respuestas correctas son muchas más que en el caso del test de Wason.

Hay otro enfoque en nuestra opinión que al profundizar la importancia del contexto en el desarrollo del lenguaje, explica aún más claramente los comportamientos de los alumnos al responder nuestro cuestionario. Se trata del enfoque típico de la *Pragmática*[12], cuyas contribuciones al estudio del uso de la forma "si…entonces", son reportadas en (Zan, 2007).

(Cheng & Holyoak, 1985, 1989) citados en (Zan, 2007. p.53), observan que la forma "si…entonces" es la misma para tres esquemas comunicativos (y tres funciones, en el enfoque de la pragmática) diferentes: el esquema de permiso, el esquema de obligación, el esquema de causa y efecto. Cuanto más desde cerca un test recuerda uno de estos esquemas, tanto más fácil será para los sujetos interpretar correctamente el enunciado y contestar correctamente[13].

En este enfoque, la interpretación del enunciado 9 de nuestro cuestionario de parte de los alumnos en término de causa y efecto se debería al hecho que *el ambiente que el enunciado propuesto evoca hace más fácil la referencia al esquema comunicativo de causa y efecto.*

La diferencia entre la interpretación en términos generales de importancia del contexto, y en términos de esquema de causa y efecto (típico de la pragmática) seguramente es sutil, pero es significativa: el enfoque de la pragmática es sobre el lenguaje en sus conexiones con el ambiente, y no directamente sobre el ambiente.

Cualquiera que sea la interpretación, nos parece que las observaciones anteriores, aunque quizás necesitando de mayor verificación experimental, pueden ya en sí reafirmar lo dicho con anterioridad: la comunicación en ambiente escolar, la enseñanza en general, y de la matemática en particular, no pueden no tomar en cuenta el ambiente de vida de los alumnos, las convicciones que dicho ambiente determina en los mismos alumnos, y el ambiente en el que se desarrollan la prácticas didácticas. Retomaremos este orden de consideraciones en las conclusiones.

---

[12] La pragmática se ocupa, en general, de estudiar los modos en los cuales un lenguaje es utilizado para la comunicación, y pone en el centro de su atención el contexto y las finalidades. Nociones importantes de esta disciplina son la de implicación conversacional, de principio de cooperación, de deixis, de acto lingüístico. Un acuerdo sobre la definición de esta disciplina todavía no ha sido alcanzado por los investigadores de esta área. Para una reseña crítica de las posibles definiciones de Pragmática, y para una presentación general de su enfoque y nociones, véase (Levinson, 1993). Para una aplicación de las nociones de la pragmática a la didáctica de las matemáticas, véase (Ferrari, 2004).

[13] Desde este punto de vista, el resultado del test de Griggs y Cox, mencionado en la nota 3, sería tan mejor, con respecto al de Wason, no por una general referencia a un contexto conocido, sino porque el contexto específico de dicho test recuerda más de cerca el esquema de permiso.

5.6 Algunas respuestas del alumno 20 y del alumno 24: reinterpretación global

a) Al responder la pregunta 1 en el caso del enunciado 6

Explica con tus palabras la afirmación:

Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía

El alumno 20 responde

Que Oaxaca es una ciudad turística

b) Al responder la pregunta 1 en el caso del enunciado 9:

Explica con tus palabras la afirmación:

Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana

El alumno 24 contesta:

Que Oaxaca es una cuna de excelentes artistas

Estas dos respuestas llaman la atención, por el hecho que son los únicos dos casos en los cuales en lugar de estar apegados, de varias maneras, a la formulación del enunciado original, los alumnos se desapegan de dicha formulación e identifican, casi reconstruyen, el contexto físico en el que se inserta la afirmación del enunciado y que de alguna manera lo justifica.

Estas respuestas podrían ser consideradas sencillamente sin sentido, o no racionales. No cabe duda que muchos maestros explicarían las respuestas diciendo que los alumnos no han entendido la pregunta, y nosotros mismos no podemos evitar una sensación de maravilla y casi desesperación.

Nuevamente (Zan, 2007) nos abre otra perspectiva. En un capítulo dedicado al aprendizaje como actividad constructiva, reporta la posición de varios investigadores, de diferentes disciplinas de referencia, entre los cuales (Cobb, 1986), citado en (Zan, 2007 p.56) por lo que se refiere a la matemática educativa y (Goodman, 1988), citado en (Zan, 2007, p.57) por lo que se refiere a la filosofía, los cuales consideran que la racionalidad de los comportamientos hay que leerla tomando en cuenta el contexto en el que el sujeto se pone y las finalidades que caracterizan el contexto.

En este enfoque, comportamientos en la apariencia irracionales pueden tener sentido al considerar los contextos en los cuales los sujetos estaban insertando su acción y los objetivos que tenían. En este sentido, puede haber cuadros de referencia mental diferentes para entender las situaciones, y un comportamiento que parece irracional en uno, no lo es en otro. Muchos ejemplos se pueden hacer al respecto, hasta en el campo de la anecdótica. Me gusta mencionar un caso que seguramente es conocido por todos: el caso del reconocimiento del dichoso dibujo del Principito: ¿sombrero? o ¿serpiente boa después de comerse un elefante?

Con respecto a la actividad didáctica, una misma tarea puede evocar contextos diferentes, y activar en el alumno procesos que en el contexto de referencia del maestro son irracionales, mientras que en el contexto identificado por el alumno son perfectamente racionales.

De aquí se desprende una posible interpretación de las respuestas de nuestros alumnos: el maestro al proponer la pregunta, se había puesto un objetivo en un contexto lógico, y pensaba por lo tanto en una resolución lógica, mientras que los dos alumnos, quizás por el contexto social que los enunciados evocaban, dieron una resolución coloquial, diríamos en términos de sentido común.

Un desarrollo de alguna manera conectado a este enfoque tiende a diferenciar dos tipos de pensamiento del individuo: el *pensamiento lógico-científico y el pensamiento narrativo*. Algunos investigadores, como (Zukier, 1986), siempre mencionado por (Zan, 2007 p.60) reconducen las dificultades en el razonamiento lógico al prevalecer de otra forma de racionalidad, la forma narrativa. Pensamiento lógico-científico y pensamiento narrativo serían entre ellos irreducibles y complementarios (Bruner, 1986, citado en Zan, 2007 p.61). El pensamiento lógico-científico se ocuparía de categorizar la realidad, buscar causas generales, mientras que el pensamiento narrativo interpreta los hechos humanos y busca conexiones entre acciones e intenciones, convicciones y sentimientos.

Con respecto a las posibles dificultades en aplicar el pensamiento lógico-científico, habría en este sentido dos posibilidades: la primera es que el contexto tiene importancia en dirigir el pensamiento hacia la dirección narrativa en lugar que hacia la dirección lógico-científica; la segunda es que haya personas más lógicas y otras más narrativas.

Interpretando lo dicho en nuestro caso, se pueden interpretar las dos respuestas como un caso de aplicación del pensamiento narrativo, y las explicaciones al comportamiento de los alumnos pueden ser el hecho que el contexto (enunciado en lenguaje común, comentando una situación oaxaqueña) sugiere el uso del pensamiento narrativo; o que los dos alumnos tienen una propensión al pensamiento narrativo.
El plano del que brotan las consideraciones anteriores es definitivamente cognitivo, y se puede vislumbrar claramente el peso de los estudios psicológicos sobre el desarrollo de los estudios arriba mencionados.

Mientras hay que reconocer que estas consideraciones pueden ayudar a entender varios fenómenos didácticos, sin embargo en nuestra opinión, *en un enfoque más sistémico,* hay que añadir por lo menos dos órdenes de consideraciones.

Por una parte el *ambiente familiar y social* influye en nuestra opinión sobre el desarrollo de una u otra forma de pensamiento en el alumno. El alumno no desarrolla de manera solamente espontánea la actitud a usar una u otra forma de pensamiento, sino este desarrollo acontece en relación con ambientes que pueden dirigirlo en una u otra dirección.
Por otra parte, el mismo *ambiente escolar y en lo especial el maestro* influyen en la formación del alumno. El maestro en especial es importante ya sea para que el alumno desarrolle las varias formas de pensamiento, ya sea para que pueda identificar las situaciones que requieren un tipo de pensamiento y las situaciones que requieren otro tipo de pensamiento.

El comportamiento de los alumnos podría por lo tanto tener un origen sociocultural, y/o un origen didáctico.

Una última pequeña observación, aún sobre el contexto, que conecta el caso 6 con el caso 5: el tipo de respuesta que dan los alumnos, de alguna manera refleja las convicciones del ambiente cultural en el que ellos viven. La población oaxaqueña, de hecho, es justamente conciente y orgullosa ya sea del desarrollo turístico de la ciudad, ya sea de la propensión artística de sus habitantes.

5.7 *Observación final sobre los dos últimos párrafos*.

Podrían surgir perplejidades y críticas acerca de la pertinencia del análisis de los últimos dos tipos de respuestas en esta tesis, por el hecho que la tesis se refiere al estudio de un fenómeno en el ámbito de la didáctica de la matemática, mientras las respuestas de los dos últimos tipos parecen abrir cuestiones relativas al uso del lenguaje común.

En efecto, los fenómenos que hemos evidenciado en los últimos dos párrafos no se han presentado al contestar las preguntas relativas a los enunciados de contenido matemático, sino al contestar las preguntas relativas al los enunciados formulados en lenguaje común. Y no cabe duda que la introducción de los enunciados en lenguaje común en el cuestionario, respondía, en el enfoque inicial del trabajo, a finalidades de estudio específicas del lenguaje común, sino a una exigencia de contrastar el comportamiento de los estudiantes frente a los enunciados de matemáticas, más aún, de dos ramas de las matemáticas, con en comportamiento de los estudiantes frente a los enunciados sin contenido matemático, para entender si fuera el específico contexto disciplinar a poner en dificultad a los alumnos.

Sin embargo, consideramos pertinente el análisis de estas respuestas si pensamos en la importancia del lenguaje común en las actividades en el salón de clase.
La actividad matemática se vale no solamente de lenguajes específicos, sino también del lenguaje común, y los comportamientos de los estudiantes a este respecto condicionan de manera relevante las mismas prestaciones matemáticas. Véase a este respecto (Ferrari, 2004), que reporta un análisis amplio de las posiciones acerca de las relaciones entre lenguajes y aprendizaje de las matemáticas.
Por otro lado, al considerar el lenguaje común en el aprendizaje de las matemáticas, nos insertamos en la línea de los grupos de investigadores en matemática educativa que reconocen la ubicación de la actividad matemática escolar en los más amplios ambientes escolar y sociocultural.
De hecho, como hemos puesto en evidencia en la introducción a esta tesis, las más recientes líneas de investigación utilizan un enfoque sistémico, y uno de los puntos cuya introducción ha sido novedosa de este enfoque con respecto a los anteriores ha sido exactamente la consideración del ambiente. El enfoque socio epistemológico, en lo

específico, pone atención al aspecto sociocultural y a los modos de comunicación vía la enseñanza, ambas dimensiones reconocidas importantes para la interpretación de los fenómenos didácticos.

Resulta por otro lado evidente que las problemáticas mencionadas en los últimos párrafos son de tal importancia y amplitud que sería imposible abordarlas en este trabajo, en el cual, por lo tanto, nos hemos limitado a señalarlas.

Capítulo 6. Conclusiones

Proponemos en este breve capítulo algunas conclusiones.

6.1 *Acerca del planteamiento inicial*

En el momento de concluir, retomemos brevemente el enfoque inicial. En el capítulo dos, declaramos como intención de nuestro trabajo de investigación el estudio del fenómeno didáctico constituido por las dificultades de comprensión, de parte de los alumnos, de los enunciados de los teoremas propuestos por los maestros o leídos en los libros escolares.

La identificación de dos indicadores de comprensión –saber explicar de manera esencialmente correcta un enunciado, y saber identificar con claridad hipótesis y tesis- nos ha permitido diseñar una investigación que nos proporcionara datos al respecto.

Nos interesaba en primera instancia entender la consistencia del fenómeno, para sustentar con datos la impresión, fundamentada sobre la experiencia nuestra y de muchos maestros, de estar frente a un fenómeno relevante. Los resultados hallados nos dicen que el fenómeno es consistente, al no poder explicar correctamente los alumnos entrevistados el 37.5% de los enunciados, y al invertir en el 11.1% de los casos hipótesis y tesis.

Por otro lado, queríamos adentrarnos en la explicación del fenómeno, con estudiar su dependencia del contenido disciplinar y de la complejidad lógica de los enunciados, considerando estos dos elementos importantes en cualquier enunciado matemático. Los resultados hallados nos dicen que la dificultad en comprender los enunciados parece depender del contenido matemático de los mismos, pero entre aritmética y geometría no hay diferencia relevante; y depende también del nivel de complejidad lógica, al generar más respuestas incorrectas los enunciados que presentan un número más elevado de hipótesis.

También teníamos la idea que el uso de la forma “si…entonces” en formalizar el enunciado, facilitara la comprensión. Los datos recolectados parecen confirmar esta conjetura, siendo que el uso de esta forma expresiva elimina los errores de inversión entre hipótesis y tesis, y por lo tanto mejora la comprensión de parte de los alumnos.

Al observar, agrupar, clasificar e interpretar las respuestas de los alumnos, nos dimos cuenta de los que se podrían llamar *los matices de la no comprensión* -es decir la variedad de formas con las cuales los alumnos interpretan los enunciados- y de los elementos que influyen sobre la interpretación.

Así nos dimos cuenta, entre otras observaciones, que ningún alumno conoce el significado matemático de los términos hipótesis y tesis, que permanecen ambigüedades en el conocimiento de conceptos básicos de geometría y álgebra – tales como triángulo isósceles, rombo y cuadrado, altura de un triángulo, múltiplo de un número-, que hay una tendencia a añadir informaciones no pertinentes en los anunciados, que hay casos de sobre interpretación, y casos de reinterpretación global.

Cada uno de estos casos ha sido analizado. Por cada uno hemos intentado esbozar alguna conjetura explicativa, y este trabajo nos ha llevado inexorablemente hacia una comprensión en términos socioculturales de algunos aspectos del fenómeno.

6.2 Acerca de la comprensión del fenómeno didáctico

Considerando insuficiente para explicar algunas respuestas de los alumnos la consideración del puro contenido disciplinar o de la complejidad lógica de los enunciados, tomamos en cuenta otros elementos:

- El contexto sociocultural, como determinante del significado de los términos que inevitablemente se utilizan en el ambiente escolar y por lo tanto como influyente en la comprensión de los enunciados.
- El lenguaje, como elemento importante del ambiente sociocultural.
- El ambiente escolar en su variedad de disciplinas enseñadas, al poner dicha variedad problemas de conflictos de significado para ciertos términos.
- El ambiente escolar limitado a la clase de matemáticas, al establecerse en dicho ambiente el contrato didáctico, y al ser lugar, este ambiente, de dinámicas sociales que influyen sobre el aprendizaje.
- El papel del maestro como artífice no único, pero sí importante, de la transposición didáctica y por lo tanto responsable de los posibles obstáculos didácticos.

- La formación de los maestros de matemática, al influir dicha formación sobre la transposición didáctica y por lo tanto la comunicación del saber.

Al respecto, nos parece que nuestra investigación proporciona evidencias, o por lo menos indicaciones acerca de la importancia del contexto sociocultural, del ambiente escolar en sentido amplio (variedad de disciplinas) y en sentido estricto (clase de matemáticas), y del maestro y de su formación, en el fenómeno didáctico en estudio. Todos estos elementos permiten situar mejor el fenómeno didáctico estudiado en el sistema escolar y en el más amplio sistema socio cultural. Más aún: hemos madurado la convicción, al desarrollar nuestro trabajo, que no se entienden los comportamientos de los estudiantes sin considerar los elementos socio culturales arriba mencionados.
Cabe aclarar que en esta tesis, solo hemos identificado elementos del sistema que influyen sobre el fenómeno, y queda a futuro la investigación sobre el peso de cada uno de estos elementos.

6.3 Acerca de posibles intervenciones didácticas

Aunque no entre en las temáticas de esta tesis, no queremos terminar el trabajo sin hacer algunas consideraciones acerca de la oportunidad de planear actividades que faciliten la comprensión de los enunciados matemáticos escolares.

- El uso de los enunciados matemáticos, siendo elemento importante de la comunicación del saber, es básico en la enseñanza.
- La comprensión de los enunciados escolares es importante, siendo que es condición previa al estudio de la disciplina.
- El trabajo investigativo ha evidenciado que el problema de la comprensión de los enunciados matemáticos escolares es consistente, tan consistente que puede afectar de manera relevante el aprendizaje de los alumnos.
- Es evidente por lo tanto que hay que cuidar el uso del enunciado y su comprensión.
- Se puede evidentemente pensar en actividades específicas que ayuden los alumnos en la identificación de los elementos importantes de los enunciados.
- Sin embargo, opinamos que la intervención más efectiva sea la que el maestro puede efectuar en la práctica escolar cotidiana, al tener bien presentes los matices del

fenómeno y sus posibles causas, buscando las formas comunicativas más claras y en el mismo tiempo interviniendo sobre las situaciones que pueden inducir a interpretaciones incorrectas de parte de los alumnos.

Creemos que nuestro trabajo, al evidenciar posibles causas del fenómeno, constituya una contribución en este sentido.

6.4 Posibles desarrollos del trabajo

Son evidentemente muchísimos. Solamente fijamos algunos, los que más, en el momento actual, nos llaman la atención.

- Revisión de la división de los enunciados en bloques diferentes desde el punto de vista lógico, con base en un análisis más riguroso de la estructura lógica de los mismos.
- Realización de experimentos que corroboren la utilidad, ya identificada en el presente trabajo, del uso de la forma "si…entonces" para expresar los enunciados.
- Estudio del peso de la formación del maestro sobre el uso del enunciado escolar y su comprensión. Más en general, estudio del peso de la formación del maestro en el proceso de transposición didáctica.
- Problemas que generan en el proceso didáctico la variedad de disciplinas en el ambiente escolar.
- Diseño de actividades escolares que favorezcan la correcta interpretación de los enunciados matemáticos escolares.
- Estudio de los conflictos entre lenguaje matemático y lenguaje común, y más en general estudio del peso del lenguaje común, con sus formas y significados, en los procesos didácticos.
- Estudio de los obstáculos generados por el ambiente social y cultural.

Bibliografía

Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques á l'école élementaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*, 101(3-4), 107-131.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Métodes de la Didactique del Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

Cantoral R. & Farfán R.M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista latinoamericana de Investigación en matemática educativa*, 6(1), 27-40.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y. & Johsua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 159-239.

Cobb, P. (1986). Contexts, Goals, Beliefs, and learning mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 2-9.

Copi, I. & Cohen, C. (2008). *Introducción a la lógica*. México: Limusa-Noriega Ed.

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de reducción al absurdo*. Tesis de maestría no publicada. Cicata-IPN. México.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*, Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista latinoamericana de Investigación en matemática educativa*, 3(1),47-70.

Duval, R. (1993). Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (1998). *Argomentare, dimostrare, spiegare: continuitá o rottura cognitiva*? Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

Ferrari, P.L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica.* Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

Fischbein, E. (1983-1992). Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, 3(2), novembre 1983, 9-24, trad. it. de Lucia Copercini. En Fischbein, E. & Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna, Italia. Pitagora Editrice

Fischbein, E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matemático. En Fischbein E. & Vergnaud G. (Eds.), *Matematica a scuola : teoria ed esperienze*. Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

Fischbein, E. (1998). *Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attivitá matematica.* Bologna, Italia: Pitagora Editrice

Gallardo, J. & González, J.L. (2006). Una aproximación operativa al diagnóstico y a la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31. Consulta electrónica www.pna.es Consultado el 6/10/2008.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 52, 7-33.

Godino, J.D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En Gutierrez, A. (Ed.), *Área del conocimiento: Didáctica de la Matemática*, pp.105-148. Madrid, España: Síntesis.

Goodman N. (1988). *Vedere e costruire il mondo*. Bari, Italia: Laterza [Traducción de : *Ways of worldmaking*. Indianapolis, IN : Hackett Publishing Company].

Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matemática? *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.

Leithold, L. (1992). *El cálculo con geometría analítica*. 6ta ed. México: Harla .

Levinson, S.C. (1993). *La pragmatica*. 2da ed. Bologna, Italia: Societá Editrice Il Mulino.

Maier, H. (1998). Conflit entre langue mathématique et langue cotidienne pour les éléves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86-118. [también como vol. 2 de la serie Bologna-Querétaro, Bologna, Italia: Pitagora Editrice]

Manara, R. (1992). Chi insegna la logica? *Libertá di educazione*. 5, 49-51. Milano, Italia: Ed. CUSL.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A.J.Bishop et al. (Eds.), *International handbook of Mathematics Education* (pp.827-876). Dortrecht,HL: Kluwer, A.P.

Silver, E.A. (1985) Research on Teaching Mathematical Problem Solving: some underrepresented Themes and Needed Directions. En Silver E.A (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Reaserch Perspectives*. (247-266) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Supples, P. & Hill, S. (2004). *Introducción a la lógica matemática*. México: Reverté Ediciones.

Zan, R. (2007). *Difficoltá in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Italia: Springer-Verlag.

Anexo A1

Se anexa copia de los cuestionarios contestados por tres alumnos (alumnos 3, 17, 23)

3

Prueba sobre la comprensión de teoremas

Nombre.............. Diana

Carrera....ITIT....................

Semestre....1er semestre....................

②3④5 ⑥

1) Considera el siguiente enunciado:

Cada número impar es el sucesivo de un número par

Explica con tus palabras la afirmación.
Esto quiere decir que dado un numero par ejemplo ②
se le tiene que sumar dos unidades para poder obtener
el segundo numero par = ④. Por lo tanto entre
cada número quedara un impar. Los numeros pares
son multiplos de ②.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

- cada número impar es el sucesivo de un
número par.

¿Cuál o cuáles son las tesis?
La hipotesis se comprueba ya que los
numeros pares son multiplos de dos.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?
Si, al haber números pares
surgen los números impares.

2) Considera el siguiente enunciado

Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

Explica con tus palabras la afirmación.
El tipo de triangulo isoceles tiene dos lados iguales y uno
desigual por tanto tiene que tener dos angulos iguales
y uno desigual de tal forma que los 3 angulos somen
180°.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Que el triangulo isoceles tenga dos
angulos iguales.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Que la afirmacion es correcta ya que los
triangulos llamados isoceles tienen dos angulos
igudles, por tener dos lados iguales.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

3) Considera el siguiente enunciado:

Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos

Explica con tus palabras la afirmación.

Nos trata de decir que del total de maestros que laboran en esta institucion todos son italianos.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Que todos los maestros son italianos.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Que esto no se puede comprobar ya que no por ser un instituto italiano todos los maestros deban ser Italianos

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

4) Considera el siguiente enunciado:

Cada triángulo se puede inscribir en un círculo

Explica con tus palabras la afirmación.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

5) Considera el siguiente enunciado:

Por cada par de números enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del menor que supere el mayor

12

Explica con tus palabras la afirmación.

Nos dice que cada par de numeros enteros positivos que sean diferentes entre si existe un múltiplo del numero menor el cual superara al mayor ya que el multiplo de ambos debe ser divisible entre los dos.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Que el menor de los multiplos de dos numeros diferentes positivos deba ser mayor que el otro.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

6) Considera el siguiente enunciado:

Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía

Explica con tus palabras la afirmación.

Que en cada una de las calles hay minimamente una tienda en donde se vendan artesanias

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Que en todas las calles hay tiendas de artesanias

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Que no es posible ya que no se especifica la zona de las calles y la ciudad es demasiado grande, no se dan datos suficientes.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

7) Considera el siguiente enunciado:

\# * y los cuatro lados iguales

Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos ~~iguales~~ también tienen las diagonales perpendiculares

Explica con tus palabras la afirmación.

Que toda figura, (cuadrilatero (tiene cuatro lados) que tenga sus lados opuestos y paralelos e iguales tienen las diagonales perpendiculares

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Que todos los cuadrilateros con lados iguales y lados opuestos paralelos tienen diagonales perpendiculares

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Que esto si se aplica pero solo en cuadrilateros con lados iguales

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

8) Considera el siguiente enunciado:

Los números enteros que son en el mismo tiempo múltiplos de 3 y de 2, son también múltiplos de 6

C

Explica con tus palabras la afirmación.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

9) Considera el siguiente enunciado:

Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana

Explica con tus palabras la afirmación.

Que pintores Oaxaqueños que se van al exterior a probar y logran tener exito es porque provienen de una tradicion popular y artesana como lo es Oaxaca.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Que todos los pintores Oaxaqueños tienen exito en el exterior.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Que no se puede comprobar ya que no por el simple hecho de provenir de un ambiente artesanal tendras exito, esto no es un factor determinante.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

10) Considera el siguiente enunciado:

Si a, b, c son alturas de un triángulo, entonces se encuentran en un mismo punto

Explica con tus palabras la afirmación.

Al marcar la altura de un triangulo se le pueden dar diferentes nombres (a, b, c) entonces esto quiere decir que la altura del triangulo se encuentra seccionada por lo que se le han asignado tres nombres (a, b, c) que en consecuencia se encuentran en el mismo punto

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Que abc se encuentran en el mismo punto y son la altura de un triangulo

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Para comprobar necesitamos saber la posicion de a, b, c o si forman parte de un mismo elemento.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

11) Considera el siguiente enunciado:

Si a es un número múltiplo de 6, entonces es también múltiplo de 3

Explica con tus palabras la afirmación.

Nos dice que cualquier numero multiplo de 6 tambien es multiplo de 3.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Todo multiplo de 6 es multiplo de 3

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Se cumple ya que todo multiplo de 6 tambien es moltiplo de tres, pero no es reciproca la regla.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

---

12) Considera el siguiente enunciado:

Si una persona es italiana, también es europea

Explica con tus palabras la afirmación.

Nos dice que toda persona Italiana es Europea, por que Italia esta en el continente Europeo. y a ellos se les denomina ó nombra Europeos.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Todo Italiano es Europeo.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Esto se cumple ya que el pais de Italia se encuentra dentro del continente Europeo.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

17

Prueba sobre la comprensión de teoremas

Nombre: KiNDY I

Carrera: IID

Semestre: 1er

R1

1) Considera el siguiente enunciado:

Cada número impar es el sucesivo de un número par

Explica con tus palabras la afirmación.

Si tenemos una serie de numeros es decir 0-1-2...10 y son sucesivos, que va uno seguido del otro encontramos los numeros pares que son los divisibles entre 2 y despues los números impares que son los que no se pueden dividir, en todo caso si se puede pero no se obtienen numeros enteros

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿porque son números pares?
¿porque impares?
¿por que se dice que son sucesivos?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

pares cuando son divisibles entre 2
impares cuando al dividirlos entre 2 no obtienes resultados enteros
sucesivos porque uno va después del otro

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

por medio de la palabra sucesivo notamos que cada número impar es consecuencia del número par

---

2) Considera el siguiente enunciado

Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

Explica con tus palabras la afirmación.

Existen diversos tipos de triángulos que se diferencian de acuerdo a sus ángulos es decir a la medida de sus lados, uno de ellos es el isósceles que cuenta con dos ángulos iguales y dos de sus lados son iguales

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Cómo debe ser sus ángulos para que sea isósceles?
¿Que es un triángulo?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Un triángulo es una figura geometrica que tiene 3 lados
y es isósceles sólo cuando dos de sus lados son iguales

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Dos ángulos iguales es consecuencia de triángulo isósceles

3) Considera el siguiente enunciado:

Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos

Explica con tus palabras la afirmación.

Que el instituto al ser italiano y al tratarse de la cultura deben de ser italianos o al menos deben conocer bien la cultura

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿todos los maestros del instituto son italianos?
¿todos conocen su cultura?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Todos los maestros deben conocer su cultura

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

No hay

4) Considera el siguiente enunciado:

Cada triángulo se puede inscribir en un círculo

Explica con tus palabras la afirmación.

Si se puede inscribir pero no necesariamente cada triángulo tiene que inscribirse en un círculo

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Cada triángulo puede ser inscrito en un círculo

¿Cuál o cuáles son las tesis?

No precisamente puede ser inscrito ya que no todos son de la mismo medida

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

No es necesario

5) Considera el siguiente enunciado:

Por cada par de números enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del menor que supere el mayor

Explica con tus palabras la afirmación.

Si tenemos un par de numeros que sean positivos, que no tengan punto decimal y que sean diferentes al tomar una cifra y buscamos uno de sus multiplos notamos que es mayor que la otra cifra

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Porqué es mayor el múltiplo que el otro número?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Al tener sólo dos cifras y comparar una con la otra pues una es menor que el otro porque son diferentes entre sí, pero al buscar su múltiplo obviamente que va a ser más grande que el mayor

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Al comparar los números y buscar el múltiplo del menor

6) Considera el siguiente enunciado:

Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía

Explica con tus palabras la afirmación.

Que casi todas las calles del centro de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía pero no necesariamente todas tienen y bueno la verdad no sé si todas tienen

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

El centro de Oaxaca tiene muchas tiendas de artesanía

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Si por cada calle hay una tienda deben de haber muchas no

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

No

7) Considera el siguiente enunciado:

y los 4 lados

Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos e iguales, también tienen las diagonales perpendiculares

Explica con tus palabras la afirmación.

Al ser los cuatro lados iguales y tener los lados opuestos //
sus diagonales se cruzan y por eso son perpendiculares

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿por qué sus diagonales son perpendiculares?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

¿por que al trazarlas se cruzan entre sí?

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

los diagonales son perpendiculares porque sus lados opuestos
son paralelos e iguales

---

8) Considera el siguiente enunciado:

Los números enteros que son en el mismo tiempo múltiplos de 3 y de 2, son también múltiplos de 6

Explica con tus palabras la afirmación.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

9) Considera el siguiente enunciado:

Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana

Explica con tus palabras la afirmación.

Que los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior tienen su cultura muy en cuenta y no se olvidan de ella

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿porqué tienen éxito los pintores oaxaqueños?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

porque su tradición es popular y artesana y quieren a su cultura

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

los pintores tienen éxito porque tienen una tradición popular

10) Considera el siguiente enunciado:

Si a, b, c son alturas de un triángulo, entonces se encuentran en un mismo punto

Explica con tus palabras la afirmación.

Como nos dan diferentes variables me imagino que no se encuentran en el mismo punto

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Si tienes tres puntos diferentes se encuentran en el mismo lugar

¿Cuál o cuáles son las tesis?

No porque son diferentes

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

11) Considera el siguiente enunciado:

Si a es un número múltiplo de 6, entonces es también múltiplo de 3

Explica con tus palabras la afirmación.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuales?

---

12) Considera el siguiente enunciado:

Si una persona es italiana, también es europea

Explica con tus palabras la afirmación.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

23

Prueba sobre la comprensión de teoremas

Nombre...Lizbeth

Carrera......ITIT...

Semestre.....1º..

R1

1) Considera el siguiente enunciado:

Cada número impar es el sucesivo de un número par

Explica con tus palabras la afirmación.
Si tenemos una serie de numeros enteros 0-1-2...10 y son sucesivos, que va uno seguido del otro encontramos los numeros pares que son los divisibles entre 2 y despues los números impares que son los que no se pueden dividir, en todo caso si se puede pero no se obtienen numeros enteros.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?
¿porque son números pares?
¿porque impares?
¿por que se dice que son sucesivos?

¿Cuál o cuáles son las tesis?
pares cuando son divisibles entre 2
impares cuando al dividirlos entre 2 no obtienes resultados enteros
sucesivos porque uno va después del otro

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?
por medio de la palabra sucesivo notamos que cada número impar es consecuencia del número par

2) Considera el siguiente enunciado

Cada triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

Explica con tus palabras la afirmación.
Existen diversos tipos de triángulos que se diferencian de acuerdo a sus ángulos es decir a la medida de sus lados, uno de ellos es el isósceles que cuenta con dos ángulos iguales y dos de sus lados son iguales

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?
¿Cómo debe ser sus ángulos para que sea isósceles?
¿Que es un triángulo?

¿Cuál o cuáles son las tesis?
Un triángulo es una figura geometrica que tiene 3 lados y es isósceles sólo cuando dos de sus lados son iguales

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?
Dos ángulos iguales es consecuencia de triángulo isósceles

3) Considera el siguiente enunciado:

Todos los maestros del Instituto Italiano de Cultura son italianos

Explica con tus palabras la afirmación.

En el istituto italiano de cultura en su totalidad hay maestros Italianos.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿ Pueden ser en su totalidad Italianos los maestros del instituto Italiano?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Si son en su totalidad del Instituto italiano de cultura maestros Italianos.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

NO

---

4) Considera el siguiente enunciado:

Cada triángulo se puede inscribir en un círculo

Explica con tus palabras la afirmación.

Un triangulo puede estar contenido en un circulo.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Sacando las bisectrices de los 3 angulos de un △ se puede inscribir un triangulo dentro de un circulo

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Se obtiene el baricentro.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Sí las bisectrices, mediatrices, alturas, medianas

5) Considera el siguiente enunciado:

Por cada par de números enteros positivos diferentes entre ellos, existe un múltiplo del menor que supere el mayor

Explica con tus palabras la afirmación.

Que si tenemos 2 números positivos que sean diferentes el menor tendrá un múltiplo (nº que multiplicado por otro nos de el primero) supera al mayor.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Supera al numero mayor

¿Cual o cuáles son las tesis?

a = 2 por que el múltiplo del 2, es el 2,4,6,8,
b = 3 10 etc, y son mayores al 3 es solo un ejemplo.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

El mínimo común múltiplo, los nºs divisores el máximo común divisor etc.

6) Considera el siguiente enunciado:

Cada calle del centro de la ciudad de Oaxaca tiene al menos una tienda de artesanía

Explica con tus palabras la afirmación.

En las calles de la Cd de Oaxaca es muy probable que exista una tienda de artesanías.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Existen muchas tiendas de Artesaníos en oaxaca.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Existen muchas tiendas de Artesanias en Oaxaca debido a su riqueza cultural del estado

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Si Oaxaca es rico en diversidad cultural por tanto tiene muchos turistas y por tanto existe un gran comercio y por tanto una mayor demanda de artesanías, por tanto existen las tiendas de Artesanías

7) Considera el siguiente enunciado:

y los 4 lados

Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos y iguales, también tienen las diagonales perpendiculares

Explica con tus palabras la afirmación.

Las diagonales de los cuadriláteros con los lados opuestos paralelos. y los 4 lados iguales tienen las diagonales perpendiculares

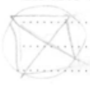
¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Las diagonales de los cuadriláteros con los lados opuestos y los 4 lados iguales, son diagonales perpendiculares.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Si son cuadriláteros y tienen 4 lados iguales y paralelos. entonces es un cuadrado (Una Figura Regular) si a un □ le trazamos las diagonales sus ∢ son Rectos y por tanto son perpendiculares.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?



Si sus 4 Lados son = y paralelos es un cuadrado el cuadrado es proporcional o si trazamos un circulo a su alrededor se puede dar mas cuenta de que las diagonales Forman ∢ de 90° y por tanto son perpendiculares

8) Considera el siguiente enunciado:

Los números enteros que son en el mismo tiempo múltiplos de 3 y de 2, son también múltiplos de 6

Explica con tus palabras la afirmación.

Los multiplos de 3 y 2 son multiplos de 6.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

¿Los multiplos de 3 y 2 son multiplos de 6?

¿Cuál o cuáles son las tesis?

como el 6 es divisible entre 3 y 2 entonces sus multiplos de 3 y 2 son multiplos de 6.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

multiplos son multiplos de sus numeros mayores.

9) Considera el siguiente enunciado:

Los pintores oaxaqueños que tienen éxito en el exterior del país provienen de una tradición popular y artesana

Explica con tus palabras la afirmación.

Dice que: la mayoria de los pintores exitosos son los provenientes de una tradición popular

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Yo pienso que sí, los pintores oaxaqueños más exitosos en el exterior del pais son los que provienen de una tradicion popular y artesana

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Por que estan más en contacto con la verdadera cultura y crecieron con ella, por lo tanto conocen la pintura desde una perspectiva más a fondo.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

El que los pintores provengan de una familia con una dinastía de pintores → será de gran apoyo y servirá de mucho para el exito del pintor

---

10) Considera el siguiente enunciado:

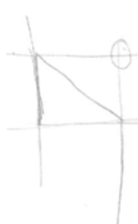
Si a, b, c son alturas de un triángulo, entonces se encuentran en un mismo punto

Explica con tus palabras la afirmación.

a, b, c son las alturas de un triángulo y por tanto se encuentran en un mismo punto.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

las alturas es la paralela a la prolongación del lado opuesto de un triángulo.



¿Cuál o cuáles son las tesis?

si se cruzan porque las paralelas forman un ∡ Recto. entonces se llegan a cruzar.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Las Alturas.

11) Considera el siguiente enunciado:

Si a es un número múltiplo de 6, entonces es también múltiplo de 3

Explica con tus palabras la afirmación.

a es un numero descanocido múltiplo de 6 y por lo tanto múltiplo de3

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

El 6 es divisible entre el número 3, por tanto los múltiplos del 6 son también múltiplos del 3.

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Por ejemplo: si tenemos que a es 12 y es multiplo de 6. entonces tambien lo es del 3. por que 12 es divisible entre 6 y 3.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Si, los Múltiplos y divisores.

12) Considera el siguiente enunciado:

Si una persona es italiana, también es europea

Explica con tus palabras la afirmación.

Una persona que vive en Italia es tambien Europea.

¿Cuál o cuáles son las hipótesis?

Las personas Italianas son Europeas

¿Cuál o cuáles son las tesis?

Son europeas por que Italia pertenece al continente Europeo.

En este enunciado ¿hay partes que son consecuencia de otras? ¿Cuáles?

Sí, si la persona es Italiana, por tanto tambien es Europea, por que Italia pertenece a Europa.