Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada yTecnología Avanzada

Unidad Legaria

La Transposición Didáctica del Álgebra en las Ingenierías. El Caso de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Tesis, que para obtener el grado de
Doctorado en Matemática Educativa,
presenta:

Silvia Elena Ibarra Olmos

Director de Tesis:
Dr. Ramiro Ávila Godoy

Codirectora de Tesis:
Dra. Gisela Montiel Espinoza

México, D.F., noviembre de 2008

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 18 del mes de septiembre del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"La transposición didáctica del álgebra en las ingenierías. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales"

Presentada por el alumno:

IBARRA	OLMOS	SILVIA ELENA
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 4 | 1 | 5 | 4 | 0 |

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Codirectora de tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Apolo Castañeda Alonso

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Juan Díaz Godino

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F., el día 18 del mes Noviembre del año 2008, el (la) que suscribe Silvia Elena Ibarra Olmos alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A041540, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Ramiro Ávila Godoy y cede los derechos del trabajo intitulado "La transposición didáctica del álgebra en las ingenierías. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección sibarra@gauss.mat.uson.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Silvia Elena Ibarra Olmos

Índice

Glosario

Configuración Docente. Un segmento de la trayectoria docente, referida al accionar del docente alrededor de una situación-problema.

Configuración Epistémica. Redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas institucionales, esto es, cómo van apareciendo y relacionándose los seis objetos matemáticos primarios reconocidos en el EOS: situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, argumentos y proposiciones.

Curriculum. Entenderemos como curriculum a la estrategia más general de formación de un egresado, independientemente del nivel educativo del cual se trate.

Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática. Enfoque teórico y de investigación en matemática educativa, que parte de una ontología de los objetos matemáticos que toma en consideración el triple aspecto de la actividad matemática (resolución de problemas socialmente compartida, lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado). En este enfoque se asigna un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos matemáticos que intervienen al enfrentar una determinada situación.

Práctica matemática. Toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.

Objeto Matemático. Todo lo que es indicado, señalado, o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas.

Significado Implementado. Entenderemos como significado institucional implementado al sistema de prácticas efectivas del docente, durante un proceso de estudio determinado; esto es, lo que en realidad hizo y dijo el profesor en el aula, en su carácter de representante de la institución “escuela”.

Significado Personal /Institucional. Entenderemos por significado personal/significado institucional de un objeto matemático al sistema de prácticas operativas y discursivas que hace una persona o una institución para resolver un campo de problemas.

Significado Pretendido. Está constituido por el sistema de prácticas actuativas y discursivas que surgen de la planeación del profesor, por la red de significados que ha seleccionado, secuenciado y organizado para planificar su clase, una vez que ha estudiado el significado referencial. Se trata de un significado institucional pretendido, puesto que el profesor, en el papel de representante de la institución escuela, lo llevará al aula, espacio en el cual realizará las actividades que considere pertinentes para que dicho significado sea construido por los estudiantes.

Significado Referencial. Entendemos por significado referencial el sistema de prácticas usadas como marco para elaborar el significado pretendido.

Transposición Didáctica. Es el proceso de transformación de un conocimiento matemático cuando pasa de una institución a otra.

Trayectoria Docente. Nos da cuenta de las sucesivas acciones que el maestro va realizando durante el desarrollo de un proceso de estudio.

Trayectoria Epistémica. Consiste en la distribución, a lo largo del tiempo, de las diferentes componentes del significado institucional implementado.

Relación de Gráficas y Tablas

La Transposición Didáctica del Álgebra en las Ingenierías. El Caso de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Resumen

En este trabajo se expone un estudio de las transformaciones que sufre un conocimiento algebraico, el referente a los sistemas de ecuaciones lineales, a partir de que es incluido en un plan de estudios de ingeniería, hasta que es puesto en escena en el aula.

Este proceso de cambio es un ejemplo del fenómeno conocido en Matemática Educativa como Transposición Didáctica, y que consiste, de manera general, en la serie de transformaciones a las que es sometido un conocimiento matemático al pasar de una institución a otra.

Partiendo entonces de la aceptación de la existencia de la transposición, nos interesamos en poder caracterizarla a nivel micro, para lo cual usamos algunos de los planteamientos que forman parte del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática: las nociones de Significado Referencial, Significado Pretendido y Significado Implementado, cada uno de los cuales es descrito a través de las trayectorias y configuraciones epistémicas y docentes.

Este acercamiento nos permitió percibir cuáles y en qué sentido, fueron los cambios que se dieron a los sistemas de ecuaciones lineales, además de su impacto en el curriculum algebraico de estudiantes de ingeniería de una universidad pública mexicana.

Abstract

In this work we show a study about the changes and transformations of an algebraic knowledge, specifically the linear equations systems, when it passes from an engineering syllabus to the classroom.

This process is known in Mathematics Education like Didactic Transposition and it consists, in a general form, in the set of transformations that a mathematical knowledge suffers when it passes from an institution to other one.

Our principal goal was to describe the micro characteristics of the Didactic Transposition, and for grasping it we used some of the theoretical notions of the Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education: Referential, Pretended an Implemented Meaning. Each one of them, were described by mean of the epistemic and educational paths and configurations.

These elements were studied in order to realize which and in what sense were the changes of the linear equations systems, and its impact in the algebraic curriculum of some engineering students in a Mexican public university.

Presentación

En este documento presentamos los resultados de una investigación que tuvo como objetivo principal la descripción y análisis de la transformación que va sufriendo un conocimiento matemático, cuando va pasando de una institución a otra. En Matemática Educativa, dicho fenómeno es genéricamente conocido como transposición didáctica, siendo su existencia aceptada actualmente en el ámbito educativo general. En la literatura especializada en educación no es raro encontrar estudios de transposición didáctica realizadas en áreas tan ajenas a la matemática como la historia y la educación física, por citar ejemplos en otras disciplinas.

Regresando a Matemática Educativa, los enfoques teóricos más consolidados en el área, aceptan e incorporan esta noción teórica en sus planteamientos, diferenciándose, en todo caso, en la manera en cómo la describen e interpretan a nivel microscópico, siendo esto último lo que se constituyó en el reto mayor en esta investigación.

En nuestro caso particular, el estudio se circunscribió al caso de los sistemas de ecuaciones lineales, cuando éstos son trabajados en la formación de ingenieros en la Universidad de Sonora, institución pública de nivel superior ubicada en el noroeste de la República Mexicana. Tomamos como punto de partida el momento en el que los sistemas de ecuaciones lineales son aceptados como parte de los saberes que un ingeniero debe conocer y manejar en su ejercicio profesional, concretizado esto en un plan de estudios y un programa de materia, hasta la etapa en la que ese conocimiento es puesto en escena por un profesor en un salón de clases.

El reporte está organizado en cinco capítulos, cada uno de los cuales se describe a continuación:

En el Capítulo I, que se denominó “El problema de investigación e investigaciones relacionadas”, empezamos por situar el problema que nos interesó abordar, en el contexto que viven las instituciones universitarias públicas en este país. Esto lo hicimos por nuestro convencimiento personal de que no debemos perder de vista el entorno social al que pertenece la educación pública superior nacional, así como las exigencias y presiones a las que actualmente está sometida la formación de profesionales en general, y de la ingeniería en particular.

En ese sentido, conscientes de que el Tratado de Libre Comercio (TLC), firmado con los Estados Unidos de América y Canadá ha impactado en diversas áreas la vida nacional, nos interesó conocer si los compromisos ahí suscritos involucraban o no, y en caso de que la respuesta fuese afirmativa, en qué sentido, a los programas de formación de profesionales nacionales. Encontramos evidencia documental de que efectivamente, nuestro país firmó algunos compromisos que se han traducido, entre otras cosas, en esa política de restricción presupuestal hacia las universidades públicas, que condiciona los subsidios gubernamentales al alcance de ciertos indicadores de calidad, los cuales deberán ser certificados por instancias acreditadas para tal efecto.

Las evaluaciones y certificaciones se hacen tanto a nivel de la institución educativa, como en los programas docentes, y son realizadas por instancias gubernamentales formadas para tal fin, por pares, o por colegios de profesionistas. Las observaciones hechas a universidades y programas académicos, se han traducido en cambios en los modelos curriculares de las instituciones universitarias, así como en los planes y programas de las profesiones, llegando ese impacto, como era de esperarse, hasta la formación matemática.

Este proceso que acabamos de describir, lo documentamos para el caso que investigamos, de tal manera que nos sirvió como una especie de marco contextual para enunciar nuestro problema de investigación, así como los objetivos general y específicos. Éstos últimos los enunciamos a continuación.

Como objetivo general declaramos:
Describir el proceso de transformación del conocimiento algebraico, desde su inclusión en una propuesta curricular institucional para ingeniería, hasta su puesta en escena en el aula.

El cual se alcanzó mediante la determinación de los siguientes objetivos específicos:

1) Identificar los elementos que entran en juego en la construcción del significado institucional de referencia para el álgebra en las ingenierías y describir en qué consiste éste.
2) Describir cuáles son las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que el profesor hace de dichas propuestas institucionales.
3) Describir el proceso de concreción de las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que hace un profesor cuando pone en escena un conocimiento algebraico.

Al ser ésta una investigación individual hicimos algunas acotaciones, sobre todo para conservar su viabilidad. Por ello se seleccionó solamente uno de los temas que contempla el currículo algebraico en ingeniería, el de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL).

Como continuación natural, nos pareció pertinente hacer una búsqueda de investigaciones hechas en el campo de la Matemática Educativa, que tuviesen alguna relación con la que nosotros abordamos. Esto es, ubicar el estado del arte sobre el particular, considerando trabajos que tuviesen alguna relación, desde algún punto de vista, con la que aquí se presenta.

Esta iniciativa tuvo como principal motivación, el dar argumentos de que la problemática que se estudió está vigente en el campo disciplinar que trabajamos, mostrando coincidencias, pero sobre todo las diferencias que hicieran notar la originalidad de esta investigación. Nos interesó destacar que aunque el fenómeno de transposición didáctica ya ha sido estudiado, no lo ha sido en el caso de la temática matemática que seleccionamos, ni tampoco abordado con las herramientas teóricas con las cuales aquí se hizo, siendo en esos ámbitos en los cuales situamos la aportación del mismo.

Sobre esto último que acabamos de mencionar, en el Capítulo II, titulado “Consideraciones Teóricas y Metodológicas”, desarrollamos en la primera parte, la fundamentación teórica en la que nos apoyamos para interpretar el fenómeno de interés. Toda vez que este estudio tiene como propósito central conocer y describir las modificaciones que una institución determinada hace a un cierto conocimiento algebraico, para poder, a su vez, conocer la influencia y modificaciones que tales adaptaciones tienen en el curriculum, consideramos importante fijar nuestra postura respecto a lo que entendemos por curriculum, concepción que va más allá de entenderlo como una lista de materias, pues nosotros lo ubicamos como la estrategia más general de formación de un profesional de la ingeniería.

Posteriormente, declaramos al Enfoque Ontosemiótico sobre el Conocimiento y la Instrucción Matemática, mejor conocido como EOS, el enfoque teórico en Matemática Educativa que soporta el presente trabajo. Lo primordial de una teoría es que sea funcional en cuanto a la interpretación y explicación de una cierta fenomenología, característica que encontramos en el EOS para el estudio del fenómeno que nos interesaba, así es que en esta sección nos dedicamos a presentar las nociones teóricas útiles para nuestros propósitos.

La relectura de la transposición didáctica que pudimos hacer con el EOS, se basó fundamentalmente en las nociones de significado institucional, su tipología, así como en las configuraciones y trayectorias epistémicas y docentes. El poder dar una respuesta a la pregunta qué es lo que se transpone de institución en institución, con base en los objetos matemáticos primarios, fue de bastante utilidad para hacer operativa y darle una cara al fenómeno de transposición.

En la segunda parte del Capítulo, se describe la estrategia metodológica seguida para estructurar la investigación. Por las características del problema, sus objetivos general y específicos, se trata de una investigación de corte cualitativo, que siguió el esquema de Latorre et al, citado en Sandín (2003). La razón fundamental de situarla bajo el paradigma cualitativo es que fundamentalmente el foco está puesto en la descripción detallada de situaciones, eventos, personas y sus interacciones, además de los comportamientos observables. Se incorporan así mismo las voces de los participantes, sus experiencias, pensamientos, reflexiones y acciones.

En cuanto al diseño de la investigación, globalmente delineamos las fases de exploración, planificación, entrada en el escenario, recogida y análisis de información, retirada del escenario, y finalmente la de elaboración del informe. Para cada una de ellas, se definieron las acciones específicas correspondientes.

Vale hacer la aclaración de que en correspondencia a los objetivos específicos se precisaron tres etapas, una por cada objetivo específico. De tal manera que pudimos subdividir la investigación original en tres estudios, uno por cada una de las etapas; en concordancia con nuestro marco teórico, esos estudios fueron denominados: “El Significado referencial”, “El Significado pretendido”, y “El Significado Implementado”; para cada uno de ellos volvimos a poner en práctica el esquema que mencionamos en el párrafo anterior.

Previo a la exposición de cada uno de los estudios citados, nos pareció importante dar a conocer las características de la institución educativa en la que fue llevada a cabo la investigación, que como ya mencionamos fue la Universidad de Sonora, México, así como del conglomerado social particular en el que dimos concreción a la investigación: un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas pertenecientes a dicha Universidad. Con esta información, constituimos el Capítulo III, el que en consecuencia se denominó “Contexto y sujetos de investigación”.

Después de esto, entramos de lleno a la parte medular de este reporte, formada por los Capítulos IV, V y VI, donde están consignados los tres estudios ya citados. El Capítulo IV, titulado “El Significado Referencial”, contiene los elementos que desde nuestra perspectiva nos permitieron conocer cuáles son las prácticas operativas y discursivas, que para los sistemas de ecuaciones lineales, son promovidos por la institución educativa en cuestión para ser tratados en sus carreras de ingeniería. En ese sentido hicimos un análisis del programa de la materia y de uno de los textos que se sugieren como apoyo, tomando como lentes las herramientas que nuestro marco teórico nos proporcionó. Los elementos que fueron mostrados en la primera parte del Capítulo I, y principalmente los que aparecen en el Capítulo IV, son los que desde nuestra óptica nos permitieron alcanzar el primero de los objetivos específicos.

Era de suma importancia para nuestros propósitos tener una versión del significado referencial, porque fue el que sirvió como base para construir el significado pretendido, del cual hablamos en el Capítulo V. En esta sección del reporte estudiamos cómo un grupo de profesores nombrado para tal efecto, toma el programa de la materia en cuestión, y empieza a desglosarlo, estudiarlo, transformarlo, reinterpretarlo, hasta llegar a construir una serie de consensos de qué, cómo y por cuánto tiempo, es lo que se va a enseñar. Esta versión es la que teóricamente se conoce como el significado pretendido, y con ella dimos satisfacción al segundo de los objetivos específicos.

Esta etapa resultó muy interesante pues permitió observar la convivencia académica de un conjunto de profesores, donde sin cortapisas se pudieron expresar opiniones, sugerencias, críticas, interpretaciones y, finalmente, se establecieron acuerdos sobre la temática de interés.

Después de que el grupo de profesores construyó el significado pretendido, faltaba uno de los momentos esperados con mayor expectación por nosotros. Nos referimos al momento en el cual los profesores llegarían al aula y pondrían en escena el significado pretendido, dando con ello surgimiento al significado implementado. Con las observaciones y análisis de esta fase, se constituyó el Capítulo VI, que es el más extenso de la tesis, precisamente por la riqueza y variedad de las actuaciones de los sujetos cuya actividad estuvimos observando, y donde se encontró abundante evidencia de que independientemente de los compromisos previamente contraídos, las concepciones individuales de los profesores siempre permearán, de una u otra manera su actuación en el salón de clases. Consideramos que con lo hecho en este Capítulo se alcanzó el tercero de los objetivos específicos.

Finalmente, en el Capítulo VII, correspondiente a las Conclusiones, engarzamos los resultados particulares para poder argumentar por qué creemos que se cumplió con el objetivo general propuesto al inicio de la investigación y en qué sentido las aportaciones de la misma dan respuesta al problema de investigación del cual partimos.

Capítulo I. El problema de investigación e investigaciones relacionadas

I.1 El problema de investigación y su justificación

I.1.1 Introducción

Tenemos el convencimiento de la importancia que tiene el ubicar cualquier investigación, independientemente de la disciplina de que se trate, en algún nivel de la problemática social en la cual esté inmersa. En ese sentido, si bien estamos presentando una investigación realizada en el campo de la matemática educativa, estamos conscientes de que hay un entorno social y económico que de algún modo permea lo que sucede al interior de las aulas de matemáticas.

Por tal razón, en este capítulo iniciaremos introduciendo algunos elementos que impactan la educación superior mexicana, para posteriormente ir acotando nuestro campo de interés, hablando de la formación de profesionales e ingeniería, del papel que juega la matemática en ella, el rol que le corresponde a la formación algebraica, hasta llegar al enunciado de nuestro problema de investigación.

I.1.2 El contexto nacional en la educación superior mexicana

Presionadas por las exigencias de una sociedad en donde la palabra calidad es el status por alcanzar, las instituciones educativas modifican y/o cambian sus estrategias de formación de egresados, con la expectativa de lograr los parámetros y calificaciones necesarios para ser consideradas "escuelas de calidad" y tener, en consecuencia, una mayor demanda de estudiantes y acceso a mejores recursos económicos.

Actualmente, el nivel de exigencia hacia este tipo de instituciones es cada vez mayor, de manera que el financiamiento público que se les otorga, depende de las certificaciones y reconocimientos que los diferentes programas académicos que oferta la institución puedan obtener. Dichas certificaciones están, por un lado, relacionadas con los requerimientos de un mercado profesional exigente, en constante cambio, debido a las también constantes y vertiginosas innovaciones en ciencia y tecnología que impactan en mayor o menor medida los sistemas de producción del país.

Pero, fundamentalmente, un hecho que impacta el rumbo que toma la formación de profesionales en este país tiene que ver con los compromisos contraídos dentro del Tratado de Libre Comercio (TLC) entre México, Estados Unidos y Canadá. Dicho Tratado, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 20 de diciembre de 1993, y que entró en vigor el primero de enero de 1994, ha tenido una considerable influencia en las políticas educativas mexicanas, a pesar de que específicamente no existe un apartado sobre educación en el mismo.

De manera paralela a las negociaciones que culminaron con la firma del TLC, se llevaron a cabo una serie de reuniones, en las cuales los aspectos centrales tenían que ver con la formación de recursos humanos, y, por ende, con la educación superior. Esta serie de reuniones entre representantes de los tres países firmantes del TLC inició en Washington, DC, en febrero de 1992 y cerró en Cancún, Quintana Roo, durante mayo de 1994. Sin embargo, las que se consideran más importantes por la naturaleza de los temas tratados y los compromisos ahí desprendidos, son las efectuadas en Winspread, Wisconsin, Estados Unidos (septiembre de 1992); Vancouver, Canadá (septiembre de 1993) y Quintana Roo, México, (mayo de 1994).

Por ejemplo, en Winspread, uno de los objetivos giró alrededor de encontrar una “dimensión norteamericana a la educación superior”, entendiéndose ésta como la determinación de cuáles serían las características uniformes que debería tener la educación superior en América del Norte. En Quintana Roo, en la llamada "Reunión Trilateral sobre la Globalización de la Educación Superior y las Profesiones. El caso de América del Norte", se discutió la formación profesional en áreas como Actuaría, Agronomía, Arquitectura, Contaduría, Enfermería, Farmacia, Ingeniería, Leyes, Medicina, Odontología, Psicología y Veterinaria. Uno de los objetivos fue el proporcionar un espacio para que grupos académicos y profesionales de los tres países pudiesen determinar los estándares de calidad para la formación profesional en las carreras mencionadas.

Elia Marúm Espinosa, (1997) profesora-investigadora de la Universidad de Guadalajara, expone de manera muy clara, las que desde su punto de vista son las implicaciones del TLC en la educación superior mexicana.

Una de las preguntas que la mencionada investigadora se plantea es por qué un tratado de naturaleza comercial y económica impacta a la formación de profesionales y a las instituciones de educación superior. Su primera respuesta la sostiene en los artículos 76, 89 y 133 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, los cuales confieren al Senado facultades para aprobar tratados internacionales. Este hecho eleva dichos tratados a la categoría de leyes federales, lo cual los superpone jerárquicamente a las constituciones estatales, a las leyes orgánicas de las universidades y a las leyes de profesiones. De esta manera, cualquier modificación que se proponga en estas últimas, deberá adecuarse a lo estipulado en el TLC.

Otro aspecto importante que Marúm señala como respuesta a su cuestionamiento es lo contemplado en los artículos 12 (comercio fronterizo de servicios), 16 (entrada temporal de personas de negocios) y 17 (propiedad intelectual) del TLC. De dichos artículos se derivan Principios, Acuerdos, Reservas y Compromisos en donde se contemplan diferentes aspectos relativos al ejercicio de las profesiones. En los Principios está, por ejemplo, el hecho de que los tres países se comprometen a darles a los profesionistas extranjeros el mismo trato que les dan a sus connacionales, es decir, no solicitar ningún requisito extra para su ejercicio profesional. En el rubro de Reservas se plasman los requisitos que permiten ofrecer servicios educacionales a ciudadanos de un país en los otros.

Finalmente, en los Compromisos encontramos elementos que son de particular importancia para el trabajo que nos ocupa. Nos referimos a la formación de un grupo de trabajo cuya agenda consistió entre otras cosas, en la determinación de los requisitos de escolaridad para el reconocimiento de títulos y grados, los exámenes que deben presentar los profesionales para la acreditación de su nivel de actualización en su área de conocimiento así como la forma y periodicidad en la que debiera hacerse la certificación necesaria para el ejercicio profesional.

Las prácticas de acreditación son empleadas en varios países del mundo desde hace mucho tiempo. En Canadá y Estados Unidos se realizan desde el siglo pasado sobre la base de que la sociedad requiere tener confianza en la calidad ya sea del profesional, de la institución o del plan de estudios con el cual se formó. En cambio, en México ésta es una práctica relativamente nueva, que se ha venido impulsando en vista del contexto que acabamos de exponer.

Institucionalmente la evaluación de la educación superior inició con el Programa para la Modernización Educativa 1989-1994 impulsado por el Gobierno Federal. Las acciones prioritarias eran tanto la evaluación interna como la evaluación externa de las instituciones educativas, realizadas de manera permanente; esto con el fin de impulsar el mejoramiento de la calidad de los programas educativos y servicios ofrecidos. Además se planeaba la creación de una instancia integradora que articulara un proceso nacional de la evaluación de la educación superior.

Así pues, la Coordinación Nacional para la Planeación de la Educación Superior (CONPES), creó, en 1989, la Comisión Nacional de Evaluación de la Educación Superior (CONAEVA), al seno de la cual se diseñó y puso en marcha el Sistema Nacional de Evaluación de la Educación Superior, cuyos ejes fundamentales son:

i) La evaluación institucional, realizada por las propias instituciones, como un ejercicio de auto evaluación

ii) La evaluación del sistema y los subsistemas de educación superior, que queda como responsabilidad de las Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica, la Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológica (SEIT), y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

iii) La evaluación interinstitucional de programas académicos y funciones de las instituciones, donde surge la llamada evaluación por pares, es decir la integración de miembros distinguidos de las diferentes comunidades académicas a las tareas de evaluación.

En este último rubro, y como fruto de un acuerdo de colaboración entre las instituciones de educación superior y el gobierno federal, en el seno de la CONPES, surgen en 1991 los llamados Comités Interinstitucionales para la Evaluación de la Educación Superior, también llamados CIEES o Comités por pares, los cuales declaran como sus principales funciones la evaluación diagnóstica de programas académicos y funciones institucionales y la acreditación de programas y unidades académicas.

A partir de su creación los CIEES han tenido una actividad intensa. De acuerdo con los datos mostrados en su página de Internet, http://www.ciees.edu.mx, a la fecha se han evaluado alrededor de tres mil programas académicos y funciones institucionales, empleando metodologías y marcos de evaluación que incorporan criterios y estándares internacionales.

Existen nueve comités en los CIEES: Arquitectura Diseño y Urbanismo; Ciencias Naturales y Exactas; Ciencias Agropecuarias; Ciencias de la Salud; Ciencias Sociales y Administrativas; Artes, Educación y Humanidades; Ingeniería y Tecnología; Difusión, Vinculación, y Extensión de la Cultura y Administración y Gestión Institucional

Como ya mencionamos antes, los CIEES hacen evaluación diagnóstica, no contemplando en sus orígenes la acreditación de programas; sin embargo, a petición de la Secretaría de Educación Pública iniciaron, en 2001, una clasificación de los programas evaluados con miras a impulsar su acreditación y actualmente este proceso se efectúa a través de órganos especializados donde los participantes son las instituciones educativas, los colegios de profesionistas y otras agrupaciones de profesionales. Ejemplo de este último caso es el Consejo para la Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería, CACEI, la cual es una asociación civil, encargada de la Evaluación y Acreditación de Planes de Estudio del área de ingeniería.

Este ambiente, descrito grosso modo, es en el que se desarrolla la educación superior en nuestro país, México. Como ya mencionábamos al inicio del capítulo, gran parte de los esfuerzos de las universidades e instituciones de nivel superior están orientadas a alcanzar los parámetros de calidad, so riesgo de no alcanzar niveles presupuestales aceptables para su permanencia y crecimiento.

Lo expuesto hasta aquí da algunas evidencias de la relación de las universidades públicas con su entorno. Pero, ¿cómo impactan al interior de la vida académica estas presiones? ¿En qué sentido se concretan? ¿Cuál es la influencia de este escenario en la que puede considerarse una de las actividades fundamentales de las instituciones de educación superior, es decir, la formación de profesionales?

En la parte que sigue vamos a dar algunos elementos que nos pueden auxiliar a responder estas interrogantes, tomando como caso particular la formación de profesionales de la ingeniería.

I.1.3 La formación de profesionales en Ingeniería

La importancia social de la ingeniería es innegable, mucho más en un país con las características como el nuestro. Esta aseveración toma fuerza si tomamos en consideración lo expuesto por la Academia Nacional de Ingeniería, (hoy Academia de Ingeniería, A.C.), citado por Navarrete (2006), y en donde se caracteriza a la ingeniería como:

> *(…) la disciplina en cuya actividad profesional se utilizan, modifican y combinan materiales, energía e información, con apoyo de máquinas, recursos financieros y trabajo humano, a fin de realizar lo físicamente nuevo y operar y administrar lo existente. Su accionar profesional consiste en solucionar problemas concretos permitiendo satisfacer necesidades, requerimientos o iniciativas, procurando la mayor utilidad y economía, y contribuyendo así a sostener y mejorar las condiciones de vida de personas y comunidades y a facilitar e impulsar la seguridad, la equidad social y la sustentatibilidad ambiental* (p.6)

La práctica profesional de los ingenieros consiste en el:

> *(…) diseño, construcción y manufactura de la mayoría de los dispositivos, sistemas y estructuras que caracterizan a la civilización. Los ingenieros tienen que ver, virtualmente, con cada actividad humana que se desarrolla en la sociedad industrial, desde la manufactura de computadoras, vehículos espaciales, comunicación por satélite, lásers, hasta la construcción de edificios, caminos, puertos, sistemas de alcantarillado, empaque de comida o manufactura de papel. En cierto grado, la historia de la ingeniería se relaciona con la historia del progreso de la humanidad y de cómo se han utilizado herramientas con el propósito de superar las limitaciones físicas y para modificar y controlar el medio ambiente natural. La ingeniería es una profesión en continua transición. La historia revela que la actividad del ingeniero ha evolucionado para adaptarse a los cambios tecnológicos y sociales* (p.6).

Otro punto de vista sobre esta temática lo encontramos Covarrubias, J. (2002), quien en su trabajo cita el documento titulado “Tecnología y Economía-La Relación Clave”, elaborado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). En este documento se señala que:

> *Las ciencias de la transferencia, en donde se incluyen las diferentes ramas de la ingeniería (...) comparten con las ciencias puras una preocupación por la ciencia productiva, pero por otra parte tienen características bastantes diferentes: su actividad está dirigida principalmente a resolver problemas que surgen de las actividades sociales y económicas; sus graduados son normalmente empleados por la industria. Ellas persiguen asuntos o problemas ampliamente vinculados con objetivos o fenómenos hechos artificialmente y sus comunidades científicas activas en investigación en esas áreas están estrechamente vinculados con profesiones más preocupadas por la aplicación de sus resultados. Las ciencias de la transferencia juegan un papel esencial en proporcionar una interfase entre el mundo de la "ciencia pura" y el mundo de la industria o la problemática social. Investigan problemas concretos surgidos en todos los campos del entorno humano, vistas como campos o disciplinas (pp.3, 4)*

La preocupación general sobre cómo debe ser un egresado de una institución del nivel superior del siglo XXI es compartida por las diferentes asociaciones, colegios y sociedades de ingenieros mexicanos. Este hecho se manifiesta en los coloquios, congresos, foros y cualquier evento de la especialidad, los cuales siempre incluyen en sus programas temáticas sobre ese particular.

En cuanto a los contenidos disciplinares que una persona interesada en estudiar ingeniería en cualquiera de sus especialidades, debe cursar, hay consenso. Está establecido por CACEI, el cual agrupa los contenidos a estudiar de la siguiente manera, sugiriendo asimismo la carga horaria mínima:

- i) Ciencias Básicas y Matemáticas: 800 horas
- ii) Ciencias de la Ingeniería: 900 horas
- iii) Ingeniería Aplicada: 400 horas
- iv) Ciencias Sociales y Humanidades: 300 horas
- v) Otros cursos: 200 horas

Por otro lado, si pensamos en los atributos del profesional de la ingeniería, se destaca lo que aparece en Covarrubias (2002), quien en su artículo hace referencia a las memorias de un congreso realizado por UNESCO sobre la formación de ingenieros. De acuerdo con dicho artículo, en las participaciones provenientes de prácticamente todos los rincones del mundo, se espera que un ingeniero posea y desarrolle

i) Creatividad y espíritu innovador
ii) Sentido de la competitividad
iii) Hábito permanente del autoaprendizaje
iv) Capacidad de comunicación
v) Espíritu crítico
vi) Formación multi e interdisciplinaria
vii) Formación ética manifestada en el respeto a valores y códigos de ética y en el respecto al medio ambiente en general

Introducirse en los terrenos de la problemática curricular significa entrar en un terreno vasto, pero dada la naturaleza de los temas que estamos tocando, consideramos pertinente fijar nuestra postura respecto a lo que entendemos por currículo.

Para nosotros el currículo es la estrategia global de formación de un egresado. Cuando una institución del nivel superior recibe a un egresado del bachillerato, éste llega en cierta condición, con ciertas características, y es entonces responsabilidad del organismo que lo recibe realizar las acciones que considere necesarias para transformarlo en un profesional del área escogida, en este caso, la ingeniería.

En esta transformación el currículo matemático juega también su parte, y cada una de las áreas matemáticas que estudia un ingeniero, debe responder a sus intereses de formación más generales, que desde nuestra óptica consisten en estar en condiciones de resolver problemas de la ingeniería. Reafirmamos entonces que por currículo no entendemos el plan de estudios de las carreras de ingeniería, ni la lista de materias con sus respectivos programas.

En este orden de ideas, pasaremos ahora a exponer algunas reflexiones sobre el papel de la matemática en la formación de un profesional de la ingeniería.

I.1.4 La matemática en la formación de un profesional de la ingeniería

La relación matemáticas-ingeniería siempre ha sido muy estrecha, desde los orígenes de ambas se han retroalimentado. Existen muchos ejemplos de problemas de ingeniería cuya búsqueda de solución dio pie a la creación de nuevo conocimiento dentro de la matemática; de la misma manera hay consenso respecto a que no es posible concebir un ingeniero que no tenga una buena formación matemática, independientemente de cuál sea la interpretación que se dé a dicha expresión.

En lo que definitivamente no existe una visión homogénea es en el enfoque con el cual se debe enseñar la matemática en esta área. Encontramos en las escuelas y facultades de ingeniería discrepancias sobre los enfoques y formas metodológicas en las cuales la matemática se ha venido enseñando. Hay grupos de ingenieros, sobre todo los formados antes de la década de los setentas, que sostienen que un ingeniero requiere de una matemática formal y que por tanto, los profesores de dichos cursos deberán trabajar con el rigor propio de la disciplina; otros, por su parte, exigen que los cursos de matemáticas se trabajen haciendo énfasis en la aplicabilidad de los objetos matemáticos en problemas de ingeniería y dejando de lado demostraciones inútiles que solamente consumen el tiempo asignado.

De igual manera, en los conglomerados de profesores de matemáticas existen la misma preocupación y las mismas discrepancias. Encontramos grupos de profesores que comulgan con la idea de que la matemática es lo que es, con su rigor, sus métodos, sus contenidos, independientemente del campo donde se estudie. Basta entonces con "saber matemáticas", su uso en otras ciencias se da "de manera natural".

En el otro sentido, hay grupos de maestros que reconocen la existencia de una problemática alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en áreas de conocimiento diferentes, en nuestro caso, la ingeniería y que admiten la posibilidad de seguir otros caminos distintos al tradicional.

Retomamos en esta dirección las referencias citadas por Hernández (2000):

> *(…) los estudios de Grattan-Guinness (1989) para el caso de las matemáticas aplicadas en Francia en el siglo XIX; y las investigaciones del historiador alemán Gert Shubring (1989) para el caso de Alemania durante la época de Felix Klein. Durante este periodo hubo un gran debate en torno al entrenamiento matemático*

que deberían recibir los ingenieros. Así, por ejemplo, tenemos las siguientes recomendaciones hechas por Stäckel en 1913: Los ingenieros deberán obtener su educación matemática en las escuelas técnicas; los cursos de matemáticas deberán ser enseñados por profesores de matemáticas quienes estén favorablemente dispuestos hacia la tecnología (Shubring, 1989; p.191). Esta última propuesta, de algún modo, es retomada por algunos autores de libros de textos en donde se rechaza el rigor de la matemática y se enfatiza el papel de la matemática como un medio para hacer ingeniería (…) (p.69).

Otras referencias pertinentes, del mismo Hernández (2000), dicen:

(...) no se habrán de buscar en él (texto) acrobatismos de rigor ni disquisiciones abstractas, perfectamente inútiles para todo aquel que estudia matemáticas como un medio y no como un fin… (Rose, 1924, prefacio)

(…) Los conceptos y las imágenes físicas son para el matemático por lo menos tan importantes y fecundos como los conceptos matemáticos para los estudiantes de ciencias físicas. Sin embargo, como el libro está dedicado principalmente a los alumnos de Física e Ingeniería, ha sido preciso en muchos casos, por motivos pedagógicos y de orden práctico, restringir la generalización y el rigorismo matemáticos… (Baule, 1949, prólogo).

¿Puedo yo rechazar mi desayuno porque no entiendo completamente el proceso de digestión? No, si yo estoy satisfecho con el resultado. (O. Heaviside, fines del siglo pasado) (p.69).

Habiendo expuesto estas argumentaciones, pasaremos ahora a conocer lo establecido por CACEI en su página electrónica http:// www.cacei.org/Manual en relación a los contenidos matemáticos que cualquier egresado de ingeniería debe manejar. Éstos son:

Álgebra:

1. Números reales y complejos. 2. Polinomios. 3. Sistemas de ecuaciones lineales. 4. Matrices y determinantes. 5. Estructuras algebraicas. 6. Espacios vectoriales. 7. Espacios con producto interno. 8. Transformaciones lineales,

Cálculo:

1. Funciones. 2. Límites y continuidad. 3. Derivación y aplicaciones físicas y geométricas 4. Diferenciación. 5. Sucesiones y series. 6. Las integrales definida e indefinida. 7. Métodos de integración. 8. Funciones logaritmo y exponencial. 9. Funciones escalares de varias variables. 10. Derivación y diferencias de funciones de varias variables. 11. Extremos para funciones de varias variables. 12. Funciones vectoriales. 13. Integral de línea. 14. Integrales múltiples. 15. Funciones de variable compleja. 16. Análisis de Fourier.

Geometría Analítica:

1. Sistemas de referencia. 2. Algebra vectorial. 3. La recta y el plano en el espacio. 4. Curvas en el espacio. 5. Superficies.

Ecuaciones Diferenciales:

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden. 2. Ecuaciones diferenciales lineales. 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales. 4. Transformada de Laplace. 5. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales.

Probabilidad y Estadística:

1. Fundamentos de la teoría de la probabilidad. 2. Variable aleatoria. 3. Variables aleatorias conjuntas. 4. Modelos analíticos de fenómenos aleatorios discretos. 5. Modelos analíticos de fenómenos aleatorios continuos. 6. Técnicas de muestreo. 7. Estadística descriptiva. 8. Inferencia estadística. 9. Distribuciones muéstrales. 10. Estimaciones puntuales y por intervalos de confianza. 11. Prueba de hipótesis. 12. Regresión y correlación.

Métodos Numéricos:

1. Solución numérica de ecuaciones algebraicas y transcendentes. 2. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales. 3. Interpolación, derivación e integración numéricas. 4. Solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

CACEI señala las temáticas matemáticas anteriores, pero no hace señalamientos sobre como cuál es el papel que juega el currículo matemático en la formación de un ingeniero, sus objetivos, qué habilidades se busca desarrollar, las estrategias metodológicas más adecuadas, cuál es la función de los profesores, por citar algunos. Dicho de otra manera, no se hacen declaraciones sobre en qué consiste y qué papel jugará el currículo matemático dentro de la estrategia general de formación de un egresado de ingeniería.

Para estos aspectos el debate está abierto, tanto para las comunidades de profesores (de matemáticas e ingeniería), de ingenieros, así como para las comunidades de investigadores en matemática educativa. Todo ello constituye una problemática compleja y en ella ubicamos la presente investigación.

I.1.5 El álgebra y el pensamiento algebraico en Ingeniería

En lo escrito hasta este momento se han hecho consideraciones respecto al papel de la matemática en ingeniería, y la problemática que de ello se deriva; sin embargo, para los propósitos de este documento, requerimos hacer otro tipo de precisiones.

Una de ellas tiene que ver con la selección de los objetos matemáticos que se estudiarán. Generalmente, los contenidos matemáticos que se manejan en los planes de estudio de las ingenierías están agrupados atendiendo la organización típica que la matemática tiene como ciencia. Así, hablamos de álgebra, cálculo diferencial e integral de una y varias variables, ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, geometría, probabilidad y estadística, tal y como ya vimos en el apartado anterior.

Nosotros tomaremos como campo de referencia el álgebra y a continuación expondremos algunas ideas sobre el particular. ¿Por qué creemos que es importante que los ingenieros aprendan álgebra? ¿Qué significado le damos a la frase *saber álgebra?* Líneas arriba recogimos las declaraciones sobre las actividades que desarrolla un ingeniero: es el profesional que estudia y aplica la ciencia a la resolución de problemas concretos surgidos en todos los campos del entorno humano. En su práctica profesional deberá realizar actividades como investigar, desarrollar, calcular, proyectar, controlar, operar, predecir, interpretar, etc.

Esto último requiere de manera directa o indirecta de alguna de las habilidades proporcionadas por el pensamiento algebraico. Notemos que hemos empleado la expresión pensamiento algebraico. Es importante destacar que cuando nos referimos a aprender álgebra no nos estamos refiriendo al dominio de una lista de conceptos, técnicas y algoritmos. Para nosotros resultaría mucho más trascendente y útil la posibilidad de que mediante el estudio de ciertas situaciones didácticas pueda ser desarrollado por los estudiantes un tipo de pensamiento que les permita, al verse enfrentados a una situación problemática, construir modelos matemáticos que resuelvan dicha situación, que estén en condiciones de operar con dichos modelos, y finalmente, que interpreten los resultados obtenidos a la luz de la situación problemática original.

Muchos autores han escrito sobre el valor y utilidad que tiene la actividad de modelación matemática. Para la construcción de un modelo entran en juego una serie de factores alrededor de la situación origen; por ejemplo se requiere identificar a los principales elementos implicados y a las relaciones que se pueden establecer entre dichos elementos, cuáles son las operaciones que reflejan estas relaciones, cuál es la mejor manera de representarlas (las relaciones), si es posible hacer transformaciones de dichas representaciones, etc., hasta llegar a tener candidatos a solución para luego estar en posibilidades de decidir la viabilidad y pertinencia de la solución que se está proponiendo. Como podemos ver, la modelación es intelectualmente hablando, una actividad bastante compleja, pero que se ubica como muy necesaria dentro de la actividad profesional del ingeniero.

En Mena, (2005), se hace una recopilación de las caracterizaciones que destacados investigadores en Matemática Educativa hacen sobre lo que es el pensamiento algebraico. De ahí retomamos los siguientes:

a) G. Kaput: El pensamiento algebraico involucra la construcción y representación de patrones, la generalización, y lo más importante, la acción de explorar y hacer conjeturas.

b) Louis Charbonneau: El pensamiento algebraico involucra operaciones aritméticas entre símbolos y números; preocupación por las relaciones matemáticas en lugar de la preocupación por el objeto matemático. Pensar algebraicamente está basado en buscar relaciones, en lugar de enfocarse en predicciones lógicas.

c) Battista y Brown: El pensamiento algebraico es pensar acerca de los procedimientos, es pensar, reflexionar hasta el punto de poder expresar esos procedimientos en el símbolo algebraico. El pensamiento o razonamiento algebraico le da sentido al uso del álgebra.

d) L. Radford: El estudio del álgebra permite desarrollar algunas características del pensamiento algebraico, de las cuales las más importantes son formar y resolver ecuaciones, generalizar y trabajar con funciones y fórmulas.

e) Driscoll: El pensamiento algebraico involucra uno o más de los aspectos siguientes presentes durante la resolución de problemas: reconocimiento de métodos generales, encontrar y comprobar generalizaciones, reconocer y utilizar propiedades de sistemas numéricos y sus operaciones, saber reconocer, denotar, representar y utilizar funciones y, finalmente, emplear un lenguaje simbólico en todo lo anterior.

f) Estándares de la Secretaría de Educación Pública (México): el álgebra de hoy es un álgebra que nos enseña a expresar fenómenos cotidianos para poder plantearlos como problemas en nuestro propio contexto y resolverlos. Aprender álgebra hoy implica que se nos enseñe a razonar, a conjeturar, a preguntar, a demostrar y argumentar. .. Lo que deben saber de álgebra los estudiantes se encuentra interiorizado en las características del pensamiento algebraico, las cuales desarrollan habilidades, ya que aprender álgebra hoy es aprender a pensar a través de procesos como son la resolución de problemas, la comunicación, el razonamiento, las relaciones y el uso de representaciones.

Con lo expuesto en este apartado, creemos que se justifica la importancia del currículo algebraico en ingeniería y se advierte también un campo propicio para la investigación en nuestra área, matemática educativa.

I.1.6 Enunciado del problema, preguntas de investigación y objetivos

Todo lo que se ha dicho en los dos últimos apartados recoge planteamientos de diversos conglomerados: consejos, asociaciones, sociedades y academias de ingenieros, así como investigadores en matemática educativa.

Pero, ¿quiénes son los actores que determinarán en gran medida el giro que tomen esas ideas? ¿Cuáles son los espacios en los cuales se les da concreción? ¿Qué negociaciones se dan en esos espacios? ¿Cuáles son las transformaciones que sufre el conocimiento algebraico producto de esas negociaciones?

Podemos intentar dar respuestas desde la óptica de la investigación educativa. Un acercamiento posible es mediante la teoría general del diseño curricular, de la cual existen muchos exponentes y resultados destacados en nuestro país. Sin embargo, uno de los retos que asumimos aquí es hacer nuestra investigación fundamentándola teóricamente en resultados de nuestra disciplina, la Matemática Educativa.

De hecho, el diseño curricular en matemáticas es señalado por Freudenthal (1988) como el décimo primer problema de entre sus famosos "Problemas Mayores de la Educación Matemática"; ahí habla incluso de atacarlo desde una perspectiva de desarrollo educacional como estrategia para el cambio...(pp. 23,24)

En este sentido, Chevallard, Bosch y Gascón, (1998) apuntan:

> *Desde el punto de vista de la enseñanza, y una vez seleccionados los contenidos de la educación obligatoria, se tiende a considerar "el problema del currículo" únicamente como una cuestión de secuenciación y temporalización de los mismos, que desemboca en el problema de la metodología de la enseñanza (p.122).*
>
> (…)
>
> *El punto de vista de la didáctica propone que el problema de la elaboración del currículo, que tradicionalmente había sido considerado como un problema esencialmente pedagógico, tiene un componente matemático esencial. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra con base en las cuestiones a las que ésta responde. Se trata en definitiva, de una verdadera reconstrucción creativa de las obras que forman el currículo (p.127).*

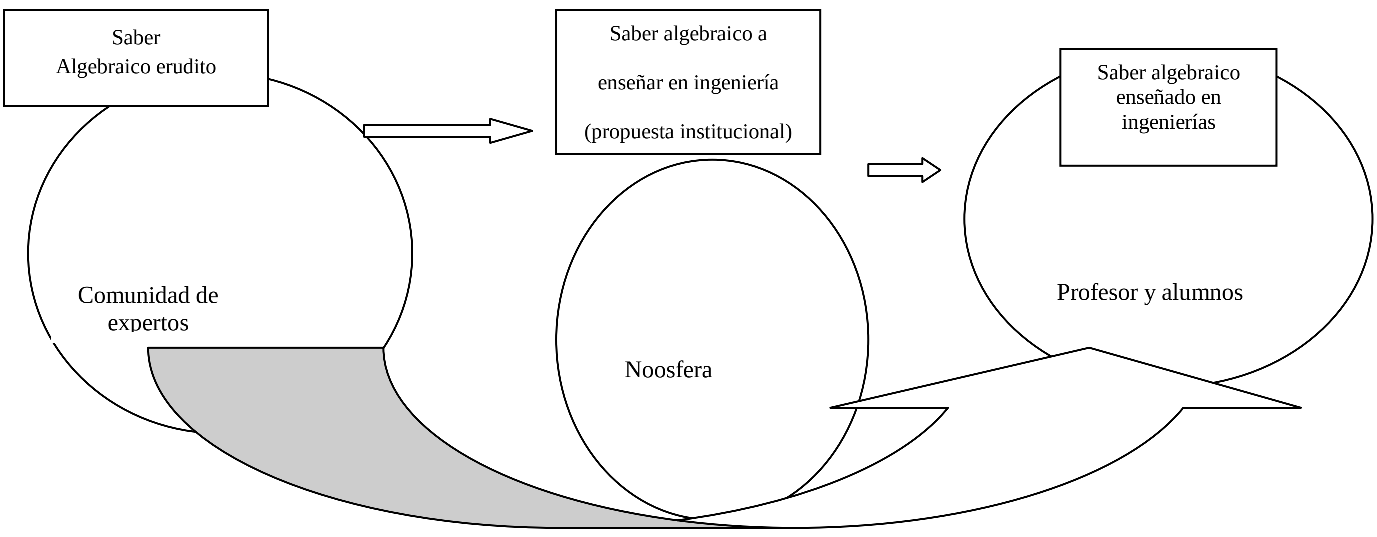
Chevallard (1991) construyó el término transposición didáctica para identificar con él a la serie de cambios y transformaciones que sufre un conocimiento matemático cuando es trasplantado de la institución que le dio origen a otra, con la finalidad de que sea enseñado. Sostiene que detrás del surgimiento de dicho conocimiento hay una serie de situaciones, motivaciones, argumentaciones e intereses, los cuales quedan oscurecidos cuando llega a tener un status en una cierta comunidad científica; es decir, el saber ha sido despersonalizado, atemporalizado y descontextualizado. Los problemas que le dieron origen son ignorados, se le relaciona con otros y se le inserta en un cuerpo sistematizado, lo que le confiere la denominación de *saber erudito*.

El *saber erudito*, para ser considerado como un saber apto para su enseñanza, debe a su vez sufrir una serie de modificaciones y adaptaciones. Serán entonces los interesados en ello (autoridades e instituciones educativas, especialistas en enseñanza, expertos en currículo, profesores, investigadores interesados en la enseñanza, etc., los cuales forman parte de la *noosfera*), los que deberán ahora construir una serie de relaciones, motivaciones, argumentaciones, selecciones, etc., dado que los problemas que ahora debe resolver son otros, diferentes a aquellos de los cuales surgió. De esta manera el saber erudito será transformado en *saber a enseñar*.

Todavía hay otra fase dentro del fenómeno de transposición didáctica. Ésta inicia cuando el profesor retoma el *saber a enseñar* y lo lleva al aula; ahí él debe iniciar un proceso de adaptación pues de la misma manera que la institución escolar ha modificado el saber de los expertos, el profesor tomará dicho conocimiento, construyéndole también un contexto, un modus vivendi en el aula, un sistema de relaciones intra y extra-algebraico. Se habrá realizado entonces la transformación del *saber a enseñar* en *saber enseñado*.

Si adaptamos lo anterior al conocimiento algebraico, esquemáticamente representamos la discusión anterior así:

Figura I.1 La transposición didáctica del álgebra en las ingenierías



La versión de transposición didáctica que se acaba de exponer es la que podríamos llamar en algún sentido clásica. En el caso de la investigación que aquí se presenta, hacemos uso del término transposición didáctica en un sentido más amplio, es decir, entenderemos como transposición didáctica el proceso de transformación de un conocimiento matemático al pasar de una institución a otra. Concretamente, partimos del momento en el que una institución determinada, bajo ciertos circunstancias, acepta la importancia de incluir un conocimiento algebraico en la estrategia de formación de un egresado de ingeniería y estudiamos cómo se van dando las modificaciones del mismo en su devenir por diferentes instituciones, hasta el momento en el que llega al aula al ser presentado por un profesor.

El término institución también lo usamos en un sentido amplio: se trata de un conglomerado de personas interesadas en una determinada problemática; así, una institución puede ser una institución educativa o un grupo de profesores, por citar algunos ejemplos.

Con estos antecedentes, declaramos como la pregunta general que guía esta investigación la siguiente:

Una vez establecido el plan general de formación de un ingeniero,

¿Cuáles son los efectos de la transposición didáctica en el currículo algebraico?

Nos parece que uno de los problemas de la escuela radica en que al currículo matemático para ingeniería, (y esta visión incluye lo algebraico), lo rigen criterios de formalismo, con una búsqueda de altos niveles de abstracción, que responden más a la organización de la disciplina y a las prácticas de los investigadores. Hay la creencia de que a los estudiantes debemos encaminarlos para su incorporación a ese universo formal que caracteriza a la matemática.

En la estrategia de formación de un ingeniero, a la formación algebraica se le asigna la función de sostén, de proveedor de conocimientos básicos sobre los cuales se irán construyendo otros pertenecientes tanto a la matemática como a otras ciencias. Y que además en ese proceso de construcción, las concepciones que tienen los profesores sobre lo que es el currículo, y lo que son los procesos de enseñanza y aprendizaje permean fuertemente su práctica.

La contribución de un trabajo de investigación con estas características consiste en poner en evidencia las transformaciones que sufre el currículo algebraico producto del proceso de escolarización y llamar la atención sobre el papel que juegan los sujetos en ese hecho.

Así pues, consideramos pertinentes las siguientes preguntas de investigación:

- ***¿Cuáles son los elementos que entran en juego en la construcción del significado institucional de referencia para el álgebra en las ingenierías y en qué consiste éste?***
- ***Una vez presente, ¿cuáles son las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que un colegiado de profesores, como representante de la institución escuela, hace de las propuestas institucionales?***
- ***¿Cuáles son las prácticas de los profesores al enseñar álgebra?***

Y declaramos como

Objetivo general:

Describir el proceso de transformación del conocimiento algebraico, desde su inclusión en una propuesta curricular institucional para ingeniería, hasta su puesta en escena en el aula.

De donde desprendemos los siguientes

Objetivos específicos:

1) Identificar los elementos que entran en juego en la construcción del significado institucional de referencia para el álgebra en las ingenierías y describir en qué consiste éste.

2) Describir cuáles son las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que un colegiado de profesores, como representante institucional, hace de dichas propuestas institucionales.

3) Describir el proceso de concreción de las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que hace un profesor cuando pone en escena un conocimiento algebraico.

El que ésta sea una investigación individual nos obligó a hacer algunas acotaciones, sobre todo para conservar su viabilidad. Por ello tuvimos que seleccionar solamente uno de los temas que contempla el currículo algebraico en ingeniería, el de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL).

Los argumentos que avalan nuestra selección son:

La investigación es un estudio descriptivo de la forma en cómo se diseña y se implementa un currículo algebraico para ingeniería, tomando como referente teórico una versión diferente de la tradicional de currículo y la noción de transposición didáctica. Estamos entendiendo como versión tradicional de currículo a aquella que lo ubica como una lista de temas a tratar.

Expresado de esta manera, realizar esta investigación resulta una tarea demasiado amplia, más si pensamos en las dimensiones incluidas en el estudio; así es que decidimos escoger un tema que fuese representativo del conocimiento algebraico que un egresado de ingeniería debe conocer.

En el caso de institución educativa en la cual se realizó la investigación que ahora se reporta, el álgebra en ingeniería está prácticamente reducida a un curso introductorio de álgebra lineal, el cual perfectamente se puede organizar alrededor del problema de resolución de un SEL; lo que queremos decir con esto es que al plantear éste como problema inicial, se pueden derivar de él las otras temáticas que el programa del curso contempla.

Por otro lado, buena parte de los saberes que después se organizaron bajo la denominación de Álgebra Lineal tiene como antecedente el problema de la resolución de SEL, lo cual nos hace suponer que tiene una riqueza epistemológica importante.

Pensando en términos del álgebra que se enseña a un ingeniero, los SEL tienen la ventaja de que son un objeto matemático con amplia utilización en el área, y son un buen ejemplo de las herramientas matemáticas que se pueden aplicar en la modelación de problemas de su especialidad: flujo de tráfico, dietas, circuitos eléctricos, mezclas, balanceo de ecuaciones químicas, inversiones, etc.

El trabajo con SEL en el aula puede desarrollarse de manera tal que permita poner en práctica y desarrollar formas importantes del pensamiento algebraico que ya estuvimos tratando con anterioridad, además del uso de diferentes sistemas de representación.

Por otro lado, a diferencia de otros temas del programa, los estudiantes tienen antecedentes respecto a lo que es un SEL y lo que significa resolverlo, aunque sus experiencias son fundamentalmente en la solución de sistemas cuadrados, pequeños y que generalmente tienen única solución. De ahí que en términos cognitivos se debe dar un salto importante para poder admitir la existencia de sistemas que no son cuadrados y de tamaño mayor a los de 3x3, o el que haya sistemas con infinitas soluciones, de las cuales se tengan que discriminar las soluciones óptimas dependiendo de la naturaleza del problema particular tratado.

Finalmente, señalamos el hecho de que la irrupción de las calculadoras programables y de software especialmente diseñado para el estudio del Álgebra Lineal, ha venido a transformar el tipo de problemas que se pueden resolver en el aula, particularmente el de SEL. Ahora, por ejemplo, el tiempo que se dedicaba a los cálculos numéricos, puede emplearse en otros aspectos, como la conceptualización o el análisis de resultados. Los SEL que se trabajan en las aulas cuando se usa software especializado, permite trabajar con problemas más cercanos a los del ejercicio profesional del ingeniero.

I.2 Investigaciones relacionadas

El objetivo de este apartado es hacer una revisión del estado del arte en cuanto al problema que nos interesa. Además buscamos ofrecer evidencias de investigación de que tal problemática está vigente y mostrar en qué se diferencia nuestro trabajo de otros ya realizados.

Casi todas las referencias que se presentan tienen como coincidencia con la presente investigación el que son estudios de transposición didáctica, aunque no necesariamente sus autores los reconocen así. Después de ese hecho, las similitudes se dan desde otros ángulos: por ejemplo, una de las investigaciones aborda también la transposición de los sistemas de ecuaciones lineales, pero está situado en la escuela secundaria. Con otra más compartimos el marco teórico, pero aún así, no usamos las mismas nociones.

Resulta interesante percatarnos de que la noción de transposición didáctica ha rebasado el ámbito en el cual se originó, siendo en la actualidad un fenómeno universalmente reconocido, al punto que inclusive en otras áreas fuera de la matemática también es aceptada su existencia. En la búsqueda de investigaciones relacionadas encontramos reportes que nos hablan de estudios de transposición didácticas del lenguaje, Vázquez (2006), o de la educación física, Gómez (2004), por citar algunos ejemplos.

En nuestra área de estudio, la matemática, como primera referencia tenemos el trabajo de Mena (2005), quien realizó un estudio de casos sobre la forma en la cual maestros de secundaria de matemáticas interpretan la propuesta curricular oficial de álgebra y cómo llevan al aula las indicaciones metodológicas presentes en el plan y programas oficiales. El tema escogido fue la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas 2x2 por el método gráfico.

En el Plan y Programas de Estudio vigente en el Sistema de Educación Básica (por las fechas en las cuales se realizó esta investigación, se refiere a los de 1993), se marca como uno de los objetivos el desarrollo del pensamiento algebraico y como metodología de enseñanza la resolución de problemas. En esos términos, la autora utiliza como categorías para su análisis el uso que los profesores le dan a los problemas, las formas de organización del trabajo en el aula y las acciones del profesor para guiar a los estudiantes durante los procesos de solución de problemas; este último rubro se centra en el papel que juegan las preguntas que hace el maestro.

Los resultados de la investigación llevaron a concluir:

> *(…) que un cambio tan significativo en el sistema educativo requiere un cambio integral del profesor, pues para interpretar bien los cambios en los planes y programas, necesita tiempo para construir su propio entendimiento de los cambios, trabajar sobre sus esquemas cognitivos producto de experiencias anteriores exitosas que no le dejan tomar decisiones sobre cómo responder a las sugerencias de la reforma* (p.75).

Aunque la autora no declara que el suyo sea un estudio de transposición didáctica, las preguntas de investigación que se plantea, sus objetivos, estrategia de investigación y conclusiones nos permiten asegurar que sí lo es. Además del nivel educativo en el que está situado, este trabajo difiere del nuestro en cuanto al soporte teórico que tiene, pues en él se toma como referente la caracterización del pensamiento algebraico establecido en los Planes y Programas oficiales, enriquecida con las aportaciones de otros teóricos.

Ávila (1999) presentó los resultados de un estudio sobre dificultades, obstáculos y efectos de una transposición al enseñar a través de la resolución de problemas. Esta labor surgió a raíz del interés en conocer la forma en que el currículo matemático de primaria (introducido en 1993), se estaba implementando. La idea básica de la propuesta oficial es que los niños aprendan matemáticas resolviendo problemas, argumentándose que se deben generar en el aula nuevas relaciones didácticas, nuevas formas de vincular profesores-alumnos-saber matemático, de manera tal que los conocimientos construidos por los estudiantes estuviesen dotados de un mayor significado que el que se lograba con lo planteado hasta antes de la reforma del 1993.

El estudio, realizado durante tres años, consistió en una serie de observaciones que se hicieron en escuelas públicas de diversas características y con profesores de diferentes perfiles. En él se concluye que la reforma no es una reforma asumida por todos, ni siquiera por la mayoría. Los profesores conservan formas de enseñanza que han trabajado previamente, bajo los argumentos de que les han sido exitosas y, que por otro lado, el tiempo invertido al trabajar con la resolución de problemas no compensa el tiempo que se le invierte.

Aún en aquellos casos en los cuales los profesores impulsan que sus alumnos aprendan resolviendo problemas, existen dificultades y efectos de transposición, algunos de los cuales son:

a) En la propuesta oficial se sugiere “Plantear problemas que en realidad sean un problema para los alumnos”. Según los resultados de las observaciones, este punto resulta muy difícil de llevar a la práctica, pues es frecuente escuchar a profesores diciendo:

> *He tratado de aplicar el nuevo enfoque, pero mis alumnos no pueden resolver los problemas que les planteo si no les digo cómo hacerlo. Tal vez es porque vienen muy atrasados. Por lo pronto, voy a trabajar con ellos como yo acostumbro para que se emparejen, y ya que se hayan emparejado les plantearé problemas sin decirles previamente cómo resolverlos* (p.203).

b) Otro planteamiento es “Dar a los alumnos los recursos necesarios para resolver los problemas”. Esto se refiere a que al tratar de seguir esta recomendación, los profesores se convierten en narradores de su propia experiencia, en demostradores de cómo deben abordarse los problemas, invirtiéndose así el proceso; son los maestros los que piensan y proponen y los niños los que siguen su pensamiento y participación.

c) Encontramos otro aspecto interesante en relación a la sugerencia “Hacer explícito el aprendizaje logrado a través de la interacción con el objeto de enseñanza”. De acuerdo a la propuesta curricular, se deben proponer juegos o actividades en las cuales esté presente un determinado conocimiento matemático; casos típicos son los juegos con fichas que llevan como objetivo que los niños aprendan el sistema decimal. Lo que la observación realizada arrojó es que tanto profesores como niños centran la atención en el juego, dejando sin explicitar el conocimiento en juego.

También se señala como otro resultado importante de la investigación el que los profesores convierten en objeto de enseñanza, lo que es solamente un recurso incorporado, el papel de las estrategias espontáneas en el proceso de aprendizaje. En el reporte se equipara este hecho a lo sucedido durante la reforma de los años setenta, en donde los diagramas de Venn, que originalmente su usaron como apoyo para resolver cierto tipo de problemas, terminaron siendo incorporados al currículo como objeto de enseñanza.

La investigación de Ávila tiene diferencias respecto a la nuestra en varios aspectos: se realizó con profesores de primaria, siendo el marco que guió la investigación las recomendaciones metodológicas específicas para la enseñanza de las matemáticas presentes en los Planes y Programas oficiales de 1993. Desafortunadamente no pudimos conseguir el reporte complejo de la investigación, solamente tuvimos en nuestras manos algunos reportes parciales a partir de los cuales conocimos este trabajo.

En el nivel superior encontramos la tesis de Ramos (2005), quien realizó una investigación centrada en conocer el papel que juegan las concepciones y creencias del profesorado en el cambio hacia una enseñanza contextualizada de las funciones, tomando como base resultados previos que ponen de manifiesto que es imposible desligar cualquier cambio de esos elementos. Este trabajo se diferencia de dichos resultados en el sentido de que las primeras investigaciones realizadas sobre el particular, han tomado como punto de partida las perspectivas personales de los maestros; esto es, las formas subjetivas de entendimiento sobre lo que son la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; basarse únicamente en las perspectivas personales limita la opción de considerar también la perspectiva institucional.

Desde nuestro punto de vista este es un estudio de transposición didáctica, fundamentado en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, selección que se hizo, de acuerdo con la autora, partiendo del supuesto de que toda reflexión sobre creencias y concepciones debe contemplar las dimensiones personal e institucional.

Se declaran tres objetivos en el reporte descrito, uno de carácter teórico, en el cual se pretende profundizar en la dimensión dual "personal-institucional", reflexionar sobre el "contexto" y sobre el "cambio" en las instituciones escolares, con la intención de afrontar la problemática que representa el encaje de estos términos en el actual desarrollo del enfoque teórico seleccionado. El segundo objetivo consiste en analizar el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura "Introducción a la Matemática" impartida en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FaCES) de Carabobo (Venezuela). El tercer y último de los objetivos fue elaborar una metodología para diseñar cursos de formación de profesores susceptibles de implementarse en otras instituciones.

Las coincidencias entre el trabajo nuestro y el de Ramos son el que ambos están situados en el nivel superior y están realizados bajo el mismo enfoque teórico, el EOS, aunque las nociones teóricas específicas que se emplean no necesariamente son las mismas, ni se tienen objetivos similares,

Otra referencia para nuestra investigación es el trabajo realizado por Camarena (2001, 2002, 2003, 2004), quien desde 1982 abordó lo que ahora podemos considerar como un programa de investigación cuyo interés central es el currículo matemático en ingeniería. Publicaciones recientes de Camarena muestran las etapas o fases en las cuales está organizado el programa de investigación que se ha denominado "La matemática en el contexto de las ciencias"; cabe aclarar que la autora ha ido integrando los resultados y aportes teóricos de los diferentes proyectos de investigación efectuados, para ir conformando lo que ella llama un marco teórico-metodológico que tienen el nombre ya mencionado. Éste es el que guía las actividades que actualmente desarrolla el grupo de investigadores a su cargo.

"La matemática en el contexto de las ciencias" parte de la preocupación por conocer cuál es la vinculación que debe existir entre las matemáticas y las ciencias que la requieran, fundamentando su accionar en las siguientes hipótesis:

- La matemática es una herramienta de apoyo y materia formativa
- La matemática tiene una función específica en el nivel superior
- Los conocimientos nacen integrados

Y declarando como su fundamento filosófico educativo *"que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas*."(Camarena, 2003, p.2).
Las fases que se declaran como constituyentes de la teoría son:

- La Curricular, nacida en 1984
- La Didáctica, iniciada desde 1987
- La Epistemológica, abordada en 1988
- La de Formación Docente, surgida en 1990
- La Cognitiva, cuyos primeros estudios se realizaron a partir de 1992

La Fase Curricular se constituyó a partir de plantearse cómo construir una metodología para el diseño de programas de estudio de las ciencia básicas en ingeniería (física, química y matemáticas). Así, se buscaba que los profesores tuviesen claro por qué determinado tema es incluido en el programa de su curso a impartir, y por otro lado, que los estudiantes pudieran motivarse cuando el profesor mostrase las relaciones física-química-ingeniería, así como aplicaciones de la matemática a la ingeniería.

Se parte de aceptar que *"con los cursos de la ciencias básicas el estudiante poseerá los elementos cognoscitivos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera; es decir, las asignaturas de las ciencias básicas son el cimiento de la ingeniería, pero no son una meta por sí mismas, sin dejar a un lado el hecho de que estas ciencias son formativas para el alumno."*(*Camarena* 2002).

La estrategia de investigación se organizó por tres etapas a las cuales se les denominó central, precedente y consecuente. La central consistió en un análisis de textos de los cursos específicos de ingeniería, buscando identificar contenidos básicos implícitos y explícitos; la antecedente tuvo por objetivo diagnosticar el nivel de conocimientos (física, química y matemáticas) de los estudiantes al ingresar a la carrera de su elección; finalmente la consecuente buscaba conocer el uso que tienen las ciencias básicas en el ejercicio profesional de un ingeniero.

Los resultados de la primera etapa permiten establecer *la vinculación curricular entre las materias de cada área básica y las materias de las ciencias básicas de la ingeniería, así como entre cada área básica y las especialidades de la ingeniería.* Con los resultados de la segunda etapa se estará en condiciones de establecer *la vinculación entre el nivel superior y el nivel medio superior en las ciencias básicas.* Por último con la información proporcionada por la tercera fase, se determinará la *vinculación entre el nivel superior y el de posgrado en las ciencias básicas, así como la existente entre las áreas básicas de la ingeniería y la industria.*

La integración de toda esta información permite, de acuerdo con la investigadora, conocer el número de asignaturas a impartirse en el área básica, su ubicación y seriación intra y extra matemática. Puntos importantes son también la extensión, tiempo y profundidad con que se deben tratar las temáticas seleccionados, y de igual manera el enfoque, notación y aplicaciones.

Esta metodología fue llamada Dipcing y se consideró en su momento, que para que el impacto en el proceso educativo fuese exitoso, se debería garantizar su implementación adecuada, lo cual significa cuidar los aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje, impulsar la formación de docentes en esta línea, desarrollar materiales didácticos de apoyo bajo este enfoque. Estos elementos han sido retomados como proyectos por separado y constituyen las otras fases que mencionamos líneas arriba.

La Fase Didáctica, también llamada *matemáticas en contexto*, consiste en presentar los contenidos matemáticos al estudiante no en la versión simplista de ilustrar su uso con aplicaciones, sino en tratar de ir desarrollando en los cursos la teoría matemática de acuerdo a las necesidades de los cursos de ingeniería. Es decir, incorporar a la resolución de problemas contextualizados como una componente fundamental del trabajo en el aula.

Para que esto sea posible, se requiere conocer problemáticas específicas de la ingeniería, así como la forma de abordarlos en clase, pero esto no será posible, tal y como ya se señalaba arriba, si no se cuenta con profesores preparados en esta línea. Así es que mediante otro proyecto de investigación se encontraron cuáles son los lineamientos de la práctica docente que deben ser contemplados dentro de un programa de de formación y actualización para profesores de las ciencias básicas en carreras de ingeniería. Lo que se ha realizado en esta línea es lo que constituye la Fase de Formación Docente.

Por otro lado, cuando en la fase didáctica se establece que a través de la matemática en contexto se resuelven problemas contextualizados en otras disciplinas, surge la necesidad de incorporar la teoría acerca de la resolución de problemas, así como realizar investigación sobre los elementos que entran en juego a la hora en que un estudiante resuelve problemas. Con esto se conforma la llamada Fase Cognitiva.

Camarena ha desarrollado lo que es, desde su punto de vista, una teoría que incluye elementos tanto teóricos como metodológicos para estudiar el currículo matemático en ingeniería. Por lo que se ha reseñado, se puede observar que en esta línea de investigación se contemplan los tres elementos de la llamada terna dorada en la educación: el contenido, los profesores y los estudiantes.

Otro aspecto relevante es que se ha buscado impactar el sistema educativo, cerrando el círculo investigación-uso de resultados. En este sentido señalamos que a la fecha no pudimos obtener ningún reporte sobre algún proceso de evaluación de los cursos diseñados bajo esta perspectiva ni sobre si existe producción bibliográfica más allá de los reportes de investigación presentados en diferentes eventos.

Evidentemente que los alcances del programa de investigación de Camarena van muchísimo más allá que el de la investigación que nosotros estamos reportando. El trabajo de Camarena es ambicioso en muchos sentidos, no únicamente por la gran cantidad de componentes que paulatinamente ha ido incorporando, sino también por el impacto que ha tenido en el ámbito educativo en el que labora. De sus investigaciones ha derivado sus propios resultados teóricos, aunque desconocemos si éstos han sido retomados por otros investigadores, o usados en otros proyectos que no sean los que ella misma ha dirigido; cualquiera que sea el caso, nosotros compartimos con esa autora el interés por la misma problemática, aunque la hemos abordado desde diferentes enfoques.

Para terminar esta sección, vamos a hablar de dos investigaciones doctorales que son estudios de transposición didáctica, pero que fueron soportados teóricamente por la socioepistemología. En primer lugar tenemos el caso de Pulido (1998), quien se interesó por hacer un estudio teórico sobre cómo se articula un saber matemático en el discurso escolar, tomando como caso de interés a la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar

El autor desprende de una situación muy general, como podría ser el funcionamiento poco adecuado del sistema educativo mexicano en relación a la enseñanza del cálculo y su articulación con saberes de la física, una problemática particular: la que tiene que ver con la manera en la que el sistema educativo mexicano trabaja la enseñanza del concepto de diferencial en el cálculo y el uso que se hace del mismo cuando se trabaja en la física escolar.

Este análisis no es fortuito; se realiza toda vez que se argumenta que la poca articulación que se hace en los tratamientos del diferencial en ambos campos provoca dificultades en su aprendizaje. Es en esta dirección que, tomando como base su postura teórica, y el seguimiento metodológico que dio a su problema, organiza una discusión alrededor de cómo reconstruir el cálculo escolar.

Aunque el problema no está expresado como una interrogante, (recurso muy utilizado en algunas áreas de investigación), el trabajo está dirigido hacia la búsqueda y muestra de argumentos que soporten las tesis que el autor sostiene, y que describen de manera completa la intención de la investigación; ellas son tres:

1) Probar el por qué del arraigo de un estilo de matematizar en la física escolar basado en los diferenciales.
2) En el caso específico del diferencial, el cálculo escolar no es el soporte adecuado al estilo de enseñanza de la física,
3) Aportar elementos que permitan realizar una reconstrucción del cálculo escolar.

El autor declara que toma como fundamentación a la Teoría de la Transposición Didáctica, reconociendo en este sentido la existencia de una doble transposición: la de la enseñanza del diferencial en la física, así como la correspondiente a la enseñanza del diferencial en el cálculo. Sin embargo, retoma ciertas precisiones realizadas en una investigación previa por Michel Artigue, y que consisten en el reconocimiento de un saber de utilización, además de los ya consignados por Yves Chevallard (saber especializado y saber enseñado), y un cuestionamiento que desde mi punto de vista es clave en el trabajo de Pulido, y que transcribo textualmente: *"¿No podría ser que para el estudio de ciertas áreas, la referencia a este tipo de conocimiento sea más pertinente que la del saber especializado?".* (Pulido, 1998, p.3).

Así pues, como el mismo Pulido (1998) apunta: *"(...) nos fundamentaremos en la transposición didáctica utilizando como saberes de referencia ciertos saberes de utilización ubicados dentro de los conocimientos especializados en un momento de la evolución matemática y física."*(p.4). De igual manera utiliza otras nociones teóricas como discurso matemático escolar, reconstrucción del discurso matemático escolar y obstáculo epistemológico.

Congruente con sus propósitos, Pulido formula su estrategia de investigación:

- Realiza un recorrido sobre una línea histórica, consistente en un estudio profundo tanto de la obra de Leibnitz como de la obra de Newton; este estudio lleva un doble propósito: determinar porqué en un conjunto de libros de texto (designados CALITECA), confluyen elementos de las escuelas newtoniana y leibniziana en el tratamiento del diferencial y porqué en la física escolar está arraigado el enfoque de Leibniz.

- Para fundamentar su tesis respecto a que el cálculo escolar no es el apoyo adecuado al tratamiento del diferencial en la física, hace un análisis de textos de física y cálculo, mostrando las diferencias en ambos enfoques; todavía va mas allá, pues llega a concluir que el enfoque que adoptan los textos matemáticos sobre el diferencial induce un obstáculo de carácter epistemológico en quienes aprenden física. Esto último lo sostiene a partir de las respuestas a cuestionarios que aplica entre estudiantes universitarios.
- Para responder al problema de la reconstrucción del cálculo escolar, retoma los resultados de un estudio francés, y hace aportaciones sobre el particular.

En estos términos, consideramos que este trabajo es fundamentalmente de carácter teórico, y que aunque el autor no lo declara explícitamente, pudiéramos ubicarlo dentro del enfoque socio epistemológico.

En el problema que Pulido se plantea, ubica los elementos teóricos declarados previamente haciendo la identificación siguiente: CALITECA constituye el saber especializado del diferencial, el enfoque de la física escolar lo identifica como el saber de utilización; como una de sus conclusiones importantes, prueba que este saber de utilización tiene sus orígenes en un saber especializado antiguo y que este hecho es lo que permitió su transposición al saber enseñado en la física, razón mas que suficiente para que Pulido legitime su existencia y arraigo.

Por otro lado, el seguimiento histórico que hizo de las aportaciones de Newton y Leibniz le llevó a concluir las dificultades en la coherencia que presenta CALITECA respecto a los diferenciales y el impacto que dicha falta de coherencia tiene para el currículo y las consecuencias en el aprendizaje de los estudiantes universitarios.

Este hecho lo lleva a plantear la necesidad de reconstruir el saber matemático escolar y su aportación al respecto es que ha mostrado la viabilidad de partir de una base epistemológica para su construcción; en otras palabras, debemos volver los ojos hacia los saberes especializados de antaño, sin despreciar los actuales.

Mas allá de ser un estudio de transposición didáctica, no vemos mayor coincidencia entre la investigación de Pulido y la nuestra. Los enfoques teóricos que los sostienen son diferentes, y en el caso de Pulido, su necesidad de conocer el saber de referencia lo llevó a hacer un seguimiento histórico de las aportaciones de Newton y Leibniz.

Otro estudio de transposición realizado bajo el enfoque socioepistemológico es el que realizó Castañeda (2004). Este investigador se interesó por hacer análisis del punto de inflexión, desde las prácticas asociadas con su estudio (en diferentes situaciones contextuales), los elementos conceptuales que le caracterizan en múltiples escenarios, los métodos para su estudio y los aportes que ofrece la didáctica de antaño. Y como propósito de la investigación, declara "*la búsqueda de elementos conceptuales del punto de inflexión y las segundas derivadas, a través de una investigación socioepistemológica con el fin de recuperar y agregar significados, involucrar nuevas estrategias de estudio y en general, redimensionar su conceptualización"* (p.39).

Como elementos de justificación, se documentan diferentes dificultades para expresar información entre la primitiva y la primera y segunda derivadas, surgidas por la ausencia de reconocimiento de las características de las curvas de distinto orden, provenientes de una práctica escolar centrada en la algoritmia. En el caso particular del punto de inflexión, se menciona el tratamiento escolar limitado que tiene, el cual restringe su definición a un punto en una curva que responde a cierta condición de las segundas derivadas. Este hecho favorece la formulación de teoremas factuales, y la generación, en los estudiantes, de significaciones poco robustas para el objeto matemático de interés.

Dadas las características del problema de investigación, Castañeda toma como marco teórico general el enfoque *socioepistemológico;* justifica su elección argumentando que dicho enfoque centra su atención en determinar la naturaleza sociocultural de los objetos matemáticos, los escenarios donde tienen significado, así como los usos que tiene un saber en determinado contexto.

El acercamiento socioepistemológico es el que va guiando metodológicamente esta investigación, pero es la Transposición Didáctica la lente teórica que Castañeda emplea para analizar e interpretar lo que va encontrando durante el desarrollo de su investigación, y que posteriormente le servirá para establecer las conclusiones de su investigación. De la teoría de la Transposición Didáctica, se rescatan *elementos para la transposición* (desincretización, despersonalización, textualización, programabilidad)

En la estrategia de investigación seguida por Castañeda, se identifican las siguientes acciones principales:

-Revisión de textos que tengan fines didácticos, para caracterizar las formas de comunicación de ideas matemáticas.

- Revisión de textos que estudien el punto de inflexión desde la matemática misma (Análisis del artículo "Derivatives in Calculo").
- Revisión de textos que permitan conocer y analizar la sociogénesis del tratamiento didáctico del punto de inflexión.
- Análisis epistemológico de los trabajos de L'Hospital y de Agnesi, consideradas obras didácticas de difusión, para identificar aquellas ideas que aparecen en estos libros pero que ya no están vigentes. Con ello se pretende caracterizar la evolución de tales ideas de un saber erudito en un saber para la difusión, y después cómo ese saber dio pie a una evolución conceptual hacia teorías analíticas del cálculo, pertenecientes a un ámbito erudito.
- Construcción de un mapa de caracterizaciones de ideas matemáticas de las obras de Agnesi y L´Hospital
- Se cierra el círculo con la construcción de una secuencia didáctica para el estudio del punto de inflexión, que tiene como fundamento los resultados de las actividades anteriores.

Castañeda organiza sus conclusiones mediante los siguientes hilos conductores:

- Reflexiones de la investigación histórico-epistemológica. Varias ideas interesantes se exponen aquí, entre ellas: a) el pensamiento geométrico actúa como escenario para la significación de ideas en la versión didáctica del cálculo; b) las obras de Agnesi y L´Hospital contienen ejemplos comentados, problemas resueltos y otros aspectos que permiten identificar un discurso con fines didácticos y un esfuerzo por organizar el saber; c) también tuvieron la virtud de hacer accesible el saber a más personas, de lugares lejanos y con intenciones diversas.
- Una crítica a la naturaleza de los infinitesimales.- Es a partir del tratamiento del cálculo que se hace en los trabajos de L´Hospital y Agnesi, que surge la necesidad de

fundamentar el cálculo. Las nuevas ideas infinitesimales se agregaron al discurso geométrico, lo que llevó a redefinir nociones como proximidad, distancia entre dos puntos, entre otras.

- Sobre las caracterizaciones del punto de inflexión.- Al analizar las múltiples caracterizaciones del punto de inflexión, se llega a la conclusión de que el discurso matemático se articula a partir del estudio de las regularidades del concepto; es decir el punto de inflexión se determina al identificar el comportamiento de la variación en las diferencias de una curva contigua con concavidades encontradas.

Termina su trabajo exponiendo los que podríamos considerar como una aportación teórica original: la idea de Transposición Didáctica Inversa. Ésta consiste no en una tercera etapa de la Transposición Didáctica original, sino en un argumento que explica el proceso mediante el cual la obra matemática, generada en un ambiente no erudito, regresa como fuente de ampliación de la obra realizada en el ámbito erudito.

Para el caso que le ocupa, el estudio del punto de inflexión, se acepta que las obras de L´Hospital y Agnesi surgieron a partir de la transposición de las ideas de Newton y Leibnitz. Pero en un segundo momento, estas obras de carácter didáctico permiten formular nuevos trabajos, ya sea organizando contenidos, ofreciendo explicaciones matemáticas, y proporcionando también una visión del cálculo en cuanto a su presentación y organización.

Con temáticas, estrategias de investigación y enfoque teórico distinto, la única coincidencia con este trabajo radica en que se estudia en ambos un fenómeno de transposición didáctica.

Capítulo II. Consideraciones teóricas y metodológicas

II.1 Introducción

En este capítulo desarrollamos las fundamentaciones teórica y metodológica que dan soporte a nuestra investigación. Está dividido en dos secciones, en la primera de ellas exponemos los elementos teóricos que nos guiaron para estudiar e interpretar el fenómeno de transposición didáctica. En la segunda sección, mostramos la estrategia metodológica que seguimos para realizar cada una de las fases en las cuales se organizó la investigación.

II.2 Consideraciones teóricas

II.2.1 El curriculum como estrategia global de formación de un egresado universitario

La especie humana, desde sus orígenes hasta la actualidad, ha estado inmersa en continuos procesos de organización y reorganización social, indispensables para enfrentar problemáticas tan complejas, como por ejemplo, las que atañen a su propia supervivencia. En esa actividad constante de encarar, resolver y al mismo tiempo generar nuevos problemas, se van creando una serie de saberes, los cuales, por el propio beneficio de la humanidad o del grupo social que se trate, deben ser preservados y transmitidos.

En este sentido, el papel de la educación, entendida en un sentido amplio, es trascendente. La propia comunidad debe tomar la responsabilidad de crear las instituciones que garanticen la conservación de su cultura: familia, escuela e iglesia, son algunos ejemplos de este tipo de instituciones.

En el caso de la escuela, encontramos que su relación con la sociedad no ha sido fácil; la institución escolar debe satisfacer una serie de necesidades y requerimientos que van más allá de la preservación y transmisión de los saberes; desde el punto de vista sociológico, en el sistema escolar se vierten las ideas e intereses de las organizaciones cultural y económicamente dominantes. Paradójicamente, es en el seno de las escuelas donde con frecuencia surgen las ideas e individuos que inducen cambios en un conglomerado social.

La concepción de la escuela como preservadora de los saberes de una comunidad, como entidad socializadora de sus valores y como elemento de integración, trajo consigo la necesidad de establecer la estrategia con la cual esos saberes serían conservados y transmitidos de generación en generación. La herencia cultural que la humanidad va acumulando a lo largo de su historia es enorme, y teniendo la escuela un periodo finito para educar a un individuo, deben seleccionarse cuáles de esos bienes culturales son susceptibles de incorporarse en la formación de las diversas generaciones.

Por ejemplo, algo que se estudia en todas las culturas y países es la lengua materna; nadie cuestiona la necesidad de que una persona conozca y maneje de manera apropiada su idioma, a pesar de que el aprendizaje inicial del mismo se da en el entorno más inmediato de los seres humanos, en su interacción con los miembros más cercanos de su comunidad.

Se reconoce la importancia de incorporar en el currículo escolar un estudio más profundo del funcionamiento del idioma, pues su valor como vehículo de comunicación es muy grande; no es suficiente con hablarlo, también debe aprenderse cómo se le representa, cuáles son las reglas que dicha representación sigue, por citar algunos aspectos.

En el caso del español, el currículo escolar mexicano contempla su enseñanza desde preescolar hasta el bachillerato, y en todo caso lo que se ha ido modificando son los aspectos a los cuales se les presta mayor atención. Todavía hace alrededor de veinte años el énfasis estaba puesto en aprender gramática española, y esto significaba hacer un estudio estructural de las partes que la conforman: prosodia, ortografía, sintaxis y morfología, abordados desde métodos fundamentalmente memorísticos. Hoy en día, se sigue reconociendo la trascendencia del manejo de la lengua materna, pero la escuela tiene otro tipo de objetivos, ubicados esencialmente en lograr una comunicación efectiva.

Pudiera pensarse entonces, que lo que ahora vemos como contenidos escolares siempre han estado ahí; la realidad es diferente. En el caso de la matemática, fue hasta el siglo

XIX que la mayoría de las sociedades del mundo empiezan a considerar fundamental el que un individuo reciba una educación matemática.

Esto no significa que la matemática no tuviera un lugar preponderante en las organizaciones sociales; el asunto es que un saber se instala en la escuela cuando se decide que es importante estudiarlo, que es valioso que esté incluido en lo que constituye la educación de un individuo. Actualmente la educación matemática se considera básica, en algunos niveles educativos, por ejemplo la primaria, tiene la misma jerarquía que el estudio de la lengua.

Retomemos una idea importante que mencionamos un poco antes, ¿Qué papel juega la escuela en la formación de un miembro de la sociedad? Ya dimos algunas respuestas al plantearnos esta interrogante; nos falta agregar que desde el punto de vista individual, la escuela prepara a una persona para que esté en condiciones de dar respuesta a los requerimientos que la misma sociedad le impone, es decir, se traza una estrategia global para forjar un individuo con cierto tipo de competencias y es en el sistema escolar donde se le da concreción. Podemos hablar, desde nuestro punto de vista, de la existencia de un currículo cuyo objetivo es moldear individuos que puedan desenvolverse exitosamente como parte de un conglomerado social.

La selección y organización de los conocimientos, habilidades y actitudes que deberán enseñarse, cómo se enseñarán, qué medios se utilizarán, etc., van quedando plasmados en el sistema educativo y van estructurando sus diferentes niveles. Esto es, para cada uno de los niveles educativos, preescolar, primaria, secundaria, etc., se van definiendo las correspondientes estrategias globales de formación, se van definiendo sus currículos.

Con el paso del tiempo, cuando la escuela y el proceso educativo que en ella vive se vuelven a su vez objeto de estudio, nacen campos de investigación y áreas de conocimiento, entre los cuales podemos mencionar a la investigación educativa, el diseño curricular y las didácticas específicas. Qué enseñar, para qué enseñar, cómo hacerlo y qué medios utilizar, preguntas clásicas para el diseño de una propuesta curricular, se han ido desglosando en cuestionamientos más refinados, complementándose al integrar elementos nuevos a esos análisis y obteniéndose respuestas que evolucionan conforme avanzan y se desarrollan las áreas de conocimiento implicadas en el estudio del fenómeno didáctico.

Es prácticamente imposible saber cuántas acepciones existen sobre el currículo. Estévez (1998), señala que:

> *Es en el contexto de educación escolar o escuela en el que se puede empezar a dar un significado más pleno y preciso al concepto de currículo. A partir de Gimeno Sacristán, (1989), puede entenderse la compleja relación entre lo social, lo cultural, lo educativo, lo escolar y el currículo como un proceso de sedimentación que se inicia en un gran recipiente (la sociedad, su cultura y educación) y que a través de un embudo (la educación escolar) separa aquellas partículas que habrán de constituir el currículo. El currículo, dice Gimeno, en su contenido y en sus formas, es una opción históricamente configurada, que se ha establecido dentro de un determinado entramado cultural, político, social y escolar.*
>
> *Este proceso de sedimentación que lleva a la configuración de un currículo, no es algo espontáneo ni natural. Más bien es un proceso cargado de valores y supuestos, es un proceso altamente conflictivo en el que se confrontan los intereses de una sociedad y se imponen los valores dominantes… Es a través del currículo entendido como una "selección particular de cultura" (Gimeno 1989), que se realiza la función básica de la escuela como institución: la socialización cultural* (p.18)

De acuerdo con la misma autora, la existencia de una amplia gama de definiciones y modalidades de currículos se debe en esencia a que en ellos se concretan teorías y principios que muestran la orientación general del sistema educativo. En su caso, explica que *"currículo puede entenderse como el conjunto de acciones desarrolladas por la escuela con el fin de brindar oportunidades para el aprendizaje*". (Estévez ,1998, p.20).

Considera que esta noción de currículo es amplia, pues integra "*las experiencias programadas por la escuela, el propio proceso seguido para lograr la planificación, así como el conjunto de experiencias vividas por el alumno y los profesores en el contexto escolar"* (Estévez, 1998, p. 20).

Desde su postura, Ese debe otorgar a los profesores participación amplia como diseñadores y evaluadores y no exclusivamente como ejecutores de una propuesta, lo cual expresa de la siguiente manera:

> *La consideración del currículo ofrece al docente la posibilidad de definir su trabajo en términos del proyecto global en el que está incluida la actividad que desempeña; su aportación es una porción del conjunto. (…) hay una gran diferencia entre un profesor que actúa en clase sabiendo por qué hace todo aquello, a qué está contribuyendo con ello de cara al desarrollo global del alumno, de cara a su progreso en el conjunto de las materias, y otro maestro que simplemente "da" su asignatura* (Estévez, 1998, p.22).

Una referencia obligada en cuestiones curriculares en México es Díaz Barriga (1991), explica la existencia de dos vertientes en el campo del currículo: la vinculada al proyecto educativo de un sistema o una institución escolar, perspectiva expresada vía las propuestas para elaborar planes y programas de estudio; la otra vertiente que privilegia conceptos como *vida cotidiana*, *currículo como práctica educativa* y *realidad curricular*, los cuales ponen la luz sobre lo que acontece en el ámbito educativo, especialmente en el aula.

En relación a ambos puntos de vista, Díaz Barriga (1991) apunta:

> (…) *Por un lado, quienes consideran que la problemática curricular surgió para promover los procesos de selección y organización del contenido atendiendo los requerimientos de la sociedad y del sistema educativo, piensan que los especialistas en el currículo en vida cotidiana muestran un escepticismo frente a esta actividad y han perdido la perspectiva curricular por considerar que sus planteamientos se acercan más a ámbitos de la didáctica, las teorías instruccionales y la antropología.*
>
> *Por otra parte, quienes interpretan el campo curricular desde las diversas perspectivas de la vida cotidiana, descubren una insospechada riqueza en la vida escolar que reclama ser conocida. Sus diversos instrumentos de aproximación les*

permiten dar cuenta de una serie de acontecimientos sobre los cuáles no se ha reflexionado.

Otro aspecto importante señalado por este autor es que cada vez son más tenues las fronteras del estudio del currículo; como ejemplo de este hecho cita estudios que se hacen desde el currículo sobre el desempeño laboral de los egresados; sobre necesidades ocupacionales para ejercer una profesión; sobre comportamientos de grupos de maestros o estudiantes frente a determinados contenidos o programa, invadiendo de esta manera otras disciplinas. En el caso específico del último ejemplo opina que el campo del currículo se ha fusionado con la didáctica.

Nos llama la atención este último señalamiento, porque es precisamente lo que Chevallard y cols. (1997), utilizan como uno de sus más fuertes argumentos para defender la necesidad de la existencia de las didácticas específicas, en concreto de la didáctica de las matemáticas y el que ella atienda, entre otras cosas, el estudio del currículo matemático, porque solamente desde ahí es posible darle un sentido real.

II.2.2 La transposición didáctica y su impacto en Matemática Educativa

Señala Chevallard, en relación a la teoría clásica del currículo, que ésta se centra en lo referente a la secuenciación, temporalización y presentación de contenidos supuestamente trasparentes y predeterminados. Esta forma de entender el currículo es relativamente ajena a las disciplinas escolares, y en particular al proceso de estudio de las matemáticas. Es decir, se asume que la adaptación de las obras matemáticas a la escuela da como resultado una copia fiel del original; nadie se cuestiona la posibilidad de que exista distancia entre ellas, pero esa distancia existe y es la que Chevallard puso en evidencia al asumir que se lleva a cabo un proceso de adaptación entre lo que él llama el saber de los expertos (matemáticos) y el saber enseñado, al que denominó *transposición didáctica*.

Más ampliamente caracterizado de la manera siguiente:

La transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica stricto sensu". Pero el estudio científico del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la didáctica de las matemáticas)

> *supone tener en cuenta la transposición didáctica sensu lato, representada por el esquema*
>
> $\rightarrow$ *objeto de saber* $\rightarrow$ *objeto a enseñar* $\rightarrow$ *objeto de enseñanza*
>
> *en el que el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido* (Chevallard, 1991, p.46).

Esta noción teórica ha sido asumida no solamente por la Didáctica de las Matemáticas, identificada así para referirnos a la escuela francesa en Matemática Educativa, sino también por otras disciplinas y ha dado origen a las llamadas didácticas específicas. Resulta sorprendente encontrar reportes de trabajos en áreas de conocimiento tan diferentes a la nuestra, como son la lingüística e incluso la educación física, en donde se asume la transposición didáctica como una de las construcciones teóricas básicas usadas.

En el caso de Matemática Educativa podemos afirmar que prácticamente todos los paradigmas teóricos y de investigación de la disciplina reconocen su existencia y la integran en sus planteamientos, algunos modificándola, haciendo cortes más finos, complementándola, etc. Otros han ido más allá todavía, pues han tomado como base la teoría de la Transposición Didáctica para desarrollar sus propios enfoques teóricos.

En México, un ejemplo de este hecho es el Enfoque Socioepistemológico (ES). Sus creadores, Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., entre otros, han desarrollado un paradigma de investigación que les permite abordar fenómenos en Matemática Educativa y con cuyos resultados hacen propuestas para modificar el discurso matemático escolar. Como muestra de la funcionalidad y robustez de su enfoque, han realizado y dirigido varias investigaciones que se han concretado en tesis de maestría y doctorado, disponibles en la página del Programa de Doctorado en Matemática Educativa de CICATA-IPN. http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis1.htm. Los resultados de esas investigaciones permitieron que las ideas germinales ya mencionadas, evolucionaran hasta constituir lo que hoy en la literatura de la disciplina se reconoce como el ya mencionado ES.

Una de las características principales del ES es que se trata de un enfoque sistémico, donde se reconocen tres subsistemas: aquél que enseña, otro que aprende y lo que se aprende, es decir, el saber en juego. En esta dirección se percibe influencia de la Didáctica de la Matemática francesa, pues además de lo anterior, se retoma la ingeniería didáctica para el diseño de situaciones didácticas, que son usadas en las investigaciones como instrumento de constrastación. ¿En qué se diferencia entonces el ES de la escuela francesa? En la declaración que se hace respecto a la necesidad de considerar también las condiciones sociales en las cuales se construye el conocimiento, esto es, a las tres componentes ya identificadas, la epistemológica, la cognitiva y la didáctica, se añade otra que en algún sentido actúa como un marco referencial y a la que se subordinan las tres primeras: la componente social.

El ES parte de reconocer la existencia del fenómeno de la Transposición Didáctica, y centra entonces su atención en conocer cómo es que se construyó el saber sabio. En esa búsqueda tiene un lugar básico la noción de práctica social, identificada "*no como lo que hace el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen*" (Covián, 2005, c..p. Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez Sierra, 2006, p. 85).

Como señala Martínez (2003):

> *(…) Más específicamente, hacemos estudios de transposición didáctica y sobre los modos de transmisión del conocimiento vía la enseñanza; para entender a profundidad los mecanismos en que los saberes están inmersos y viven en la escuela. Diseñamos situaciones didácticas utilizando la metodología que proporciona la ingeniería didáctica para contrastar empíricamente nuestras hipótesis epistemológicas y cognitivas;(…) Todo ello con el objetivo de que la enseñanza produzca efectivamente aprendizaje* (p.34).

Pensamos que una de las aportaciones más relevantes del ES es, hasta el momento, el abordaje serio y riguroso que han hecho en sus estudios de la componente epistemológica, lo cual los ha llevado a poner al descubierto un campo muy fértil y productivo para el diseño de situaciones didácticas puestas en escena. Con esos resultados se está en condiciones de proponer modificaciones o reconstrucciones del discurso matemático escolar, lo cual finalmente es su objetivo primordial.

La búsqueda de las regularidades que les permitan explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del conocimiento, concretadas en la noción de *práctica social*, permite sacar del centro de la discusión al objeto matemático y colocar ahí la actividad humana, lo cual evidencia su postura constructivista social. Este aspecto, declarado como su sello distintivo (la práctica social), al mismo tiempo que es un polo de desarrollo, ha limitado en algún sentido su fortalecimiento.

El esfuerzo de clarificación de lo que es la práctica social, en el sentido en el que el ES pretende, ha opacado la posibilidad de incluir en la discusión otro tipo de elementos que enriquecería el enfoque. Concretamente, un aspecto a incluir sería, desde nuestra opinión, el esclarecimiento de lo que se entiende por objeto matemático.

De cualquier manera, como ya dijimos antes, reconocemos en el ES aportaciones teóricas importantes que ya lo han llevado a ocupar un lugar destacado en las mesas de discusión sobre nuestra disciplina. En la sección correspondiente a Investigaciones relacionadas, describimos algunas de las investigaciones realizadas bajo el ES, por considerarla como un antecedente importante al trabajo que estamos reportando, sobre todo por la manera en cómo se concibe la Transposición Didáctica y cómo encaja en el paradigma de investigación que acabamos de tratar.

Ahora vamos a referirnos a una de las conclusiones expuestas en la tesis doctoral de Castañeda (2004), de cuyo reporte retomamos los siguientes párrafos, donde introduce la idea de Transposición Didáctica Inversa. Comentaremos algunos aspectos sobre lo que a continuación transcribimos:

> *La Trasposición Didáctica posiciona al conocimiento matemático en el centro del proceso, todo gira en torno a un conocimiento que se transpone, de hecho la noosfera se mantiene atenta al conocimiento que se transpone.*
>
> *Sin embargo, desde la perspectiva socioepistemológica, asumimos que existen elementos de carácter metamatemático, que se transponen junto con los conceptos matemáticos, elementos que –siendo no explícitos intervienen como organizadores en el discurso matemático.*

Esta explicación se distingue del argumento que menciona Chevallard en su libro Estudiar Matemáticas, pues él hace mención de una extensión de la Transposición Didáctica caracterizada por una tercer etapa que se desarrolla en el proceso didáctico mismo, que puede originar transformaciones en la obra matemática en cuestión. No obstante, la explicación que ofrecemos a partir de este estudio, manifiesta que los objetos de transposición no necesariamente tienen que ser matemáticos.

La denominación de Transposición Didáctica Inversa, no es una tercera etapa de la Transposición; es un argumento que explica el proceso por el que la obra matemática, que se genera en un ámbito <<no erudito>>, regresa como fuente de ampliación de la obra realizada en el <<ámbito erudito>>. Esto implica más que un tránsito inverso de un ámbito al otro (en el sentido de la Transposición Didáctica). Pone especial atención en describir las condiciones que posibilitan este <<regreso>> y explica además los procedimientos por lo que ocurre (Castañeda, 2004, pp. 244-235).

Las reflexiones de Castañeda son muy interesantes, no sólo en cuanto a su aportación teórica de la Transposición Didáctica Inversa, sino porque establece que además del conocimiento matemático, también se transponen las nociones metamatemáticas, entre las cuales se encuentran las prácticas sociales. Otro aspecto que rescatamos de su discurso, aunque expuesto de manera implícita, es su caracterización de lo que es el conocimiento matemático. Desde nuestro punto de vista, conocimiento, objeto y obra matemáticos son usados como sinónimos, y no se entra en caracterizaciones de ningún tipo respecto a la naturaleza de esos objetos, un punto de partida que para nosotros es básico y que marca una diferencia respecto a los planteamientos teóricos que nosotros asumimos y sobre los cuales abundaremos un poco más adelante.

La versión original de transposición didáctica de Chevallard, que citamos líneas arriba, presupone la existencia de un conocimiento matemático identificable, el denominado "saber sabio", que sería el ideal por alcanzar para el "saber que se enseña". Aunque se reconoce la distancia entre ambos, de ahí el reconocimiento de la transposición didáctica, el establecimiento de ese ente ideal ha recibido críticas, tal y como señalan Ruiz, Chavarría y Alpízar (2004):

"La teoría de la transposición didáctica ha sido criticada debido, entre otros motivos, por la vaguedad de la noción de 'saber sabio matemático' (Freudenthal, 1986). Una respuesta a esta crítica (encontrada en Arsac, 1992) reveló el carácter sociocultural de la noción: la sociedad reconoce la existencia de un cierto grupo de profesionales que producen conocimiento el cual, en la cultura, se considera 'cognoscible' ('knowledgeable') (sabio) o 'científico' (en el sentido amplio que no reduce la ciencia sólo a la ciencia natural). Esta interpretación del conocimiento está próxima a la que Vygotsky consideró tácitamente (y no cuestionó) y quizás incluso más a la epistemología inherente a la aproximación de Bruner respecto de la adquisición del lenguaje. (Sierpinska y Lerman, 1996)"

Los señalamientos se refieren a la necesidad de afinar lo que se debe asumir como conocimiento matemático y por otra parte lo que sería el derivado de realizar la transposición (p.13).

Lo expuesto por Ruiz en el último párrafo de la cita anterior, nos lleva a cuestionarnos cuál es la postura que nosotros asumiremos en relación a lo que es el conocimiento matemático. Este no es un posicionamiento trivial, pues conlleva de fondo lo que D´Amore (2006), ubica como la "premisa filosófica de base: realismo versus pragmatismo".

Se puede sobrevivir muy bien haciendo matemática sin adoptar una ontología explícita, esto es, una teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Es por eso que es casi imposible inferir de un artículo teórico en matemáticas la posición ontológica de su autor. (...) La situación es profundamente diferente cuando hablamos del saber matemático. (...) Cuestiones teóricas acerca del contenido de ese saber y de la manera como dicho contenido es transmitido, adquirido o construido nos ha llevado a un punto en el que no podemos seguir evitando hablar seriamente de ontología (Radford, 2006, c.p. D´Amore, 2006, p.179).

El dilema ontológico es concomitante a la actividad en Matemática Educativa; asumir una postura respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos tiene consecuencias, por ejemplo en sus actividades de enseñanza y aprendizaje, pero sobre todo, en la manera en como se aborda el estudio de los fenómenos didácticos. Puesto que la postura realista asume la existencia de los objetos matemáticos fuera de los individuos, como un conglomerado de verdades absolutas, inmutables, en estos términos el significado de, por ejemplo, un sistema de ecuaciones lineales vendría dado por su definición matemática.

En cambio, la postura pragmática asume que esos objetos surgen como un producto de la actividad de los seres humanos que resuelven determinados problemas, y puesto que los tipos de prácticas en uso no son necesariamente iguales en todas las comunidades, los objetos que emergen de tales prácticas no necesariamente son coincidentes. En el ejemplo que mencionamos anteriormente, bajo el posicionamiento pragmático, el objeto sistema de ecuaciones lineales será el emergente del sistema de prácticas de una institución determinada. Si en esa institución se trabajan solamente problemas con sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, para ellos el arreglo de dos ecuaciones con dos incógnitas será el objeto "sistema de ecuaciones lineales". Continuando con el ejemplo, en México, durante el paso por la secundaria y el bachillerato, los estudiantes solamente trabajan con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas o con sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas; con ese sistema de prácticas los que llegan al nivel universitario se sorprenden cuando se les plantea la posibilidad de que existan sistemas de mayor tamaño o con un número de ecuaciones diferente del número de incógnitas.

II.2. 3 El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática

Retomando la discusión realismo versus pragmatismo, el posicionamiento pragmático en cuanto a la disyuntiva ontológica del conocimiento matemático es el punto de partida sobre el cual se ha construido el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, al cual de ahora en delante denotaremos como EOS, y que es la perspectiva teórica que asumimos para realizar la investigación que estamos reportando. El EOS no es tajante en cuanto a rechazar la postura realista, pues reconoce la existencia de significados no epistémicos, a las cuales llama significados institucionales en cuya objetivación el lenguaje juega un papel fundamental.

Admitir la existencia de la dualidad personal-institucional, permite al EOS superar la dicotomía realismo-pragmatismo así como ampliar la visión de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, (Chevallard, Y., Gascón, J., Bosch, M.), a la cual se reconoce como fuente primaria. La ampliación radica en que ese enfoque, en tanto antropológico, privilegia los significados institucionales por sobre los individuales, oscureciendo estos últimos; a diferencia de lo que sucede en el EOS, en el cual no se privilegian unos por sobre los otros. Por otro lado se han construido una serie de nociones que permiten operativizar lo teorizado por Chevallard y sus colegas, como por ejemplo la tipología de los significados, los objetos matemáticos, las configuraciones didácticas, entre otras; dichas nociones teóricas en nuestro caso particular resultan de gran utilidad, pues son las que nos permitirán hacer una lectura de la transposición.

A nosotros nos interesa incorporar la dicotomía personal-institucional, debido a que en la problemática que abordamos, ambos tipos de significado juegan un papel básico. Si entendemos como institución al conjunto de personas que atienden la misma clase de situaciones problemáticas alrededor de un conocimiento matemático, los significados institucionales son primordiales; nos permite caracterizar al objeto "sistema de ecuaciones lineales" que surge de la institución "ingenieros", al objeto "sistema de ecuaciones lineales que surge de la institución "profesores de matemáticas", por citar algunos ejemplos.

De la misma manera, cuando el profesor, representante de la institución "escuela" y exponente del significado institucional sobre los sistemas de ecuaciones lineales, pone en juego sus elaboraciones personales cuando llega al aula e interacciona con los estudiantes. ¿Es su significado personal o el institucional el que entra en escena? Esta aparente contradicción, se resuelve en el EOS mediante la introducción de una tipología de los significados, pero antes de entrar en esa discusión, expondremos una breve semblanza del EOS y de las nociones teóricas que asumimos en este trabajo.

II.2.3.1 Nociones teóricas básicas del EOS asumidas en esta investigación

En términos estructurales, en el Enfoque Ontosemiótico identificamos actualmente tres componentes fundamentales: La Teoría de las Funciones Semióticas, el Análisis Sistémico de los Objetos Matemáticos y de sus Significados y la Teoría de las Configuraciones Didácticas. Esta organización es consecuencia del desarrollo que ha tenido a partir de su aparición en la disciplina.

Una de las preocupaciones declarada desde las primeras publicaciones por el grupo que ha desarrollado el EOS, es la necesidad de construir un enfoque teórico que unificara los ya existentes, y que permitiera, por otro lado, tener consensos sobre las nociones primarias básicas que con mucha libertad se habían venido empleando y se emplean en nuestra área, Matemática Educativa; por ejemplo objeto y concepto son usados como sinónimos; se habla de construir significados pero no se dice qué es lo que se entenderá por ello, en la mayoría de las teorías no se clarifica lo que es un objeto matemático, etc.

Aunque el primero de los asuntos mencionados, (la construcción de un enfoque teórico unificador), pudiera sonar un tanto ambicioso, sobre todo si se asume que esa unificación surgirá de los esfuerzos de uno solo de los grupos involucrados en el estudio de nuestra disciplina, lo cierto es que las acciones de intercambio de puntos de vista y la disposición que se ha mostrado para debatir, modificar y ampliar las consideraciones teóricas asumidas por el EOS, han tenido como resultado un gran impacto en la investigación, al menos en los países de habla hispana, especialmente en países latinoamericanos. Además de lo anterior, las investigaciones reportadas al momento muestran la operatividad y funcionalidad de sus construcciones teóricas.

En cuanto a la necesidad de establecer consensos sobre las nociones primarias, el EOS parte de cuestionarse qué son los objetos matemáticos, siguiendo el razonamiento de que si en Matemática Educativa nos interesan los problemas ligados a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, el punto de partida debiera ser el preguntarse cuál es la naturaleza de los objetos con los cuales vamos a trabajar, es decir, debe asumirse una postura sobre la ontología de los objetos matemáticos. Como ya dijimos en párrafos anteriores, en este sentido el EOS manifiesta una concepción pragmática de los significados, ligada a las prácticas matemáticas desarrolladas por los individuos y las instituciones cuando resuelven situaciones problemáticas; esta formulación toma en consideración a la matemática en una triple acepción con la cual coincidimos: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado.

Entenderemos por significado personal/significado institucional de un objeto matemático al *sistema de prácticas operativas y discursivas que hace una persona o una institución para resolver un campo de problemas*, (Godino y Batanero, 1994, p.340). Y como práctica matemática *consideramos a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas* (Godino, Batanero y Font, 2007, p.127).

Del desarrollo de esos sistemas de prácticas surgen otros elementos, a los cuales identificamos como los objetos matemáticos; así pues, designaremos como un *objeto matemático a todo lo que es indicado, señalado, o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas*, (Godino, 2002). De la misma manera en la cual se identifican los significados, si los objetos son propios de un individuo, los denominaremos objetos personales; en caso contrario, si son compartidos en el seno de una institución o comunidad, serán objetos matemáticos institucionales.

Recientemente, durante un curso ofrecido a profesores de matemáticas de secundaria, se preguntó a tres de ellos si conocían otro tipo de sistemas de ecuaciones lineales que no fueran de dos ecuaciones con dos incógnitas. Los tres coincidieron en que no podrían existir sistemas en donde las ecuaciones tuviesen más de dos incógnitas, puesto que no habría manera de representarlos gráficamente; en cuanto a la posibilidad de aumentar el número de ecuaciones dejando fijo el número de incógnitas, la aceptaron, aunque reconocieron que nunca habían trabajado un sistema con tales características. Al profundizar sobre el particular, comentaron que durante su paso por la escuela normal superior en matemáticas, (que es la institución educativa que en México prepara a los futuros maestros de secundaria), sus profesores siempre trabajaron situaciones que requerían de ese tipo de sistemas, y que en su planteamiento siempre debían incluir la representación gráfica de los mismos, más como una especie de comprobación de los resultados conseguidos algebraicamente. Estas respuestas y sus argumentaciones nos llevan a suponer que el significado institucionalmente promovido por esa escuela, respecto de los sistemas de ecuaciones lineales, incluye solamente a los de 2x2, ubicando la representación gráfica como parte inseparable de su estudio. Al menos en este caso, pareciera que los significados institucionales coinciden con los personales, y que las prácticas desarrolladas por los maestros los llevaron a construir su versión del objeto sistemas de ecuaciones lineales.

Para realizar análisis didáctico, se introduce la siguiente clasificación de los significados institucionales:
a) Implementado, consistente en el sistema de prácticas efectivas del docente durante un proceso de estudio determinado.
b) Evaluado, el cual, como su nombre indica, consiste en el subsistema de prácticas que el docente emplea para evaluar los aprendizajes de sus estudiantes.
c) Pretendido, formado por el sistema de prácticas contenidas en la planeación de un proceso de estudio.
d) Referencial, el cual consiste en el sistema de prácticas usadas como referencia para elaborar el significado pretendido.

Y para el significado personal, tenemos la siguiente tipología:
a) Global, formado por todo el sistema de prácticas personales, relativas a un objeto matemático, que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto.
b) Declarado, consistente en todas las prácticas manifestadas en los instrumentos de evaluación propuestos institucionalmente, sean éstas correctas o incorrectas.
c) Logrado, el cual se corresponde con las prácticas expresadas por los estudiantes que son coincidentes con las pautas institucionalmente propuestas.

Así pues, la enseñanza, desde el punto de vista de una institución escolar, será más efectiva en la medida en que la distancia entre los significados institucionales y los personales sea lo más pequeña posible.

En cuanto a los tipos de objetos matemáticos primarios que se reconocen en el EOS están los siguientes:

a) Lenguaje. Son todas aquellos términos, expresiones, notaciones, gráficos, en sus diversos registros (escrito, oral, gráfico, gestual, etc).
b) Situaciones. Son los problemas, ejercicios, aplicaciones extramatemáticas, etc.
c) Procedimientos. Aquí son considerados las operaciones, los algoritmos, las técnicas de cálculo, etc.
d) Conceptos. Son todos aquellos introducidos mediante una definición, descripción o mediante una o varias de sus propiedades. Estamos considerando a los conceptos en un sentido amplio, es decir no los estamos restringiendo a

aquello que se dice de un objeto. Como ejemplos podemos citar recta, punto, función, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, vector, etc.

e) Propiedades o atributos de los objetos, o más recientemente llamadas proposiciones. Son los enunciados sobre los conceptos, por ejemplo al decir que las diagonales en un cuadrado son perpendiculares, estamos enunciando un atributo de estas figuras. En un momento dado, por medio de las propiedades también podemos introducir a los conceptos.

f) Argumentos. Son las aseveraciones que usamos para validar o explicar los enunciados deducidos de otros, o derivados de ellos en cualquier otra forma.

Hay que remarcar que estos elementos están relacionados entre sí; por ejemplo, mediante el lenguaje describimos a las situaciones-problemas, con él representamos a los conceptos, a las propiedades y a los procedimientos, expresamos argumentos; empleamos argumentos para validar las propiedades, para decidir cuál es el procedimiento que más conviene en tal o cual caso; las proposiciones relacionan conceptos; los procedimientos involucran propiedades, etc.

Es en esta caracterización de los objetos matemáticos donde se refleja la incorporación, en una visión integradora, de la terna matemática (actividad de resolución de problemas socialmente compartida, lenguaje simbólico, sistema conceptual lógicamente organizado). Además, al considerar como noción primitiva a la situación problemática, y definir práctica, objetos personales e institucionales y el significado en la forma como se ha hecho, se pone de manifiesto el origen personal e institucional del conocimiento matemático.

Retomando estas ideas desde el marco de nuestro problema de investigación, si queremos describir el proceso de transformación que han sufrido los sistemas de ecuaciones lineales cuando han sido llevados desde una propuesta institucional al aula, debemos identificar cuáles son los elementos constituyentes más importantes de dicho proceso. Desde el EOS, nuestra respuesta a la pregunta ¿qué es lo que se transpone?, es: algún, algunos o todos los objetos matemáticos primarios o componentes del significado que hemos mencionado. Por ejemplo, suponiendo que en diferentes instituciones fueran abordadas las mismas situaciones problémicas, el hacerlo a partir de un lenguaje o con procedimientos diferentes conduciría a construcciones diferentes del saber.

Podemos formularnos preguntas como las siguientes: ¿cuáles son las situaciones problemáticas que se abordan para estudiar los sistemas de ecuaciones lineales en distintas instituciones? ¿El lenguaje, los conceptos, los procedimientos y los argumentos son los mismos? En caso de que no sea así, ¿en qué se diferencian?, ¿cuáles son las consecuencias de esa distancia?

En Font y Godino (2006), se señala:

> *En el currículo de algunos países, los tipos de objetos matemáticos que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos: Se trata de una ontología demasiada simplista para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática, sea profesional o escolar* (p.67).

En síntesis, lo que estamos proponiendo es hacer una lectura del fenómeno de la transposición didáctica considerando como tesis fundamental, la idea de que son los significados institucionales los que en cada fase del proceso se van modificando. El análisis más fino de las modificaciones para cada una de las componentes del significado, nos mostrarán en qué dirección se dan las variaciones.

Con base en lo anteriormente expuesto, nuestro estudio de transposición está basado en el estudio de los significados referencial, pretendido e implementado de los sistemas de ecuaciones lineales. En cada caso, identificaremos las redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas institucionales, esto es, cómo van apareciendo y relacionándose las seis entidades primarias que se mencionaron con anterioridad: situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, argumentos y proposiciones. Dichas redes son las que denominaremos configuraciones epistémicas.

El conjunto de configuraciones epistémicas, secuenciadas en el tiempo didáctico, se denomina trayectoria epistémica y ella es la que describe integralmente la ruta que siguió la construcción de los significados institucionales que nos interesan. Se distinguen en una trayectoria epistémica seis estados posibles:

a) Situacional: en el cual se propone una situación-problema.

b) Actuativo: es aquel estado en el que se aborda la situación problema presentada.

c) Lingüístico: se refiere a los momentos en los cuales se introducen notaciones, representaciones, gráficas, diagramas, etc.

d) Conceptual: es el estado de la trayectoria en el que aparecen definiciones o descripciones de los objetos emergentes en el estudio de la situación.

e) Proposicional: en el cual surgen propiedades o teoremas.

h) Argumentativo: se refiere al estado en el que se dan explicaciones, argumentos, justificaciones, validaciones, etc., a las acciones realizadas o a las propiedades empleadas.

Para el estudio del significado implementado, nos auxiliaremos también de la noción de trayectoria docente, entendida ésta como la secuencia de actividades que va efectuando el profesor durante un proceso de estudio. Un segmento de la trayectoria docente, referida al accionar del docente alrededor de una situación-problema, la denominamos configuración docente.

Las acciones identificadas del profesor están categorizadas de la siguiente manera:

a) Planificación: Son acciones mediante las cuales se diseña el proceso de estudio, se seleccionan los contenidos y significados a estudiar

b) Motivación: Con ellas se pretende crear un clima apropiado para abordar las situaciones propuestas; van desde actitudes de amabilidad y respeto hacia los estudiantes, hasta recursos para su motivación e integración a la actividad en el aula.

c) Asignación de tareas: Son las prácticas de dirección y control del proceso de estudio, la asignación de los tiempos para una tarea determinada, la modificación de las tareas, así como las orientaciones y estímulos a la actividad estudiantil.

d) Evaluación: Se refiere a la observación y valoración del estado del aprendizaje en momentos específicos, pudiera ser al inicio, durante el proceso y al final del mismo; también se consideran funciones de evaluación la resolución de las dificultades individuales del alumno.

e) Regulación: Son las acciones que tienen que ver con la fijación de definiciones, enunciados, justificaciones, ejemplificaciones, recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para el abordaje de una situación problema, etc.

f) Investigación: Son las funciones docentes referidas a la reflexión y análisis del desarrollo del proceso de estudio, realizadas con la intención de introducir cambios en futuras implementaciones del mismo.

Las nociones teóricas que hemos mostrado hasta aquí, son las que utilizaremos en los capítulos subsecuentes con la intención de alcanzar los objetivos de investigación ya mencionados.

II.3 Consideraciones metodológicas

Esta es una investigación realizada bajo el paradigma de investigación cualitativo, el cual se seleccionó porque el foco de atención de una investigación cualitativa está puesto en la realización de: *"descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresados por ellos mismos".* (Sandín, 2003, p. 121). Nuestro estudio tiene como propósito central conocer y describir las adaptaciones que una institución determinada hace a un conocimiento algebraico, para poder, a su vez, conocer y entender la influencia y modificaciones que tales adaptaciones tienen en el currículo.

En términos generales seguimos básicamente el esquema propuesto por Latorre y cols., citado en Sandín (2003), en el cual se identifican seis fases en el proceso general de investigación cualitativa. Se enunciarán cada una de las fases, comentando el tipo de actividades que se hicieron para esta investigación específica:

1) Fase exploratoria/de reflexión, en la cual se

a) Identificó el problema

b) Plantearon las preguntas de investigación

c) Realizó investigación documental

d) Revisaron perspectivas teóricas

2) Fase de planificación, donde se:

a) Redefinió el problema y las preguntas de investigación

b) Hizo la selección del escenario de investigación

c) Seleccionó la estrategia de investigación

3) Fase de entrada en el escenario; aquí se desarrollaron las siguientes acciones:
a) Se negoció el acceso al escenario
b) Se seleccionó a los participantes
c) Se definió el papel del investigador

4) Fase de recogida y análisis de información, en la cual se decidieron
a) Las estrategias para recolección de la información
b) Las técnicas para el análisis de la información
c) El rigor del análisis

5) Fase de retirada del escenario, donde:
a) Finalizó la recogida de información
b) Se negoció la retirada
c) Se hizo un análisis intensivo de la información y se establecieron conclusiones

6) Fase de elaboración del informe, donde se estructuró el tipo de informe a presentar y se efectuó la redacción del mismo.

Una de las preocupaciones iniciales de cualquier investigación es la identificación de una problemática en el campo disciplinario de interés, en nuestro caso la Matemática Educativa. Cuando esto estuvo hecho, establecimos con la mayor precisión posible preguntas, objetivos de investigación y la fundamentación teórica que soporta el estudio. Para alcanzar este propósito revisamos documentos de variada naturaleza (tesis de maestría y doctorado, reportes de investigación, publicaciones de la especialidad, entre otros), lo cual nos permitió también conocer el estado del arte de la problemática de interés.

Conocer el estado del arte fue importante, nos dio una visión del contexto de investigación en el cual está inmerso nuestro trabajo, ubicamos antecedentes y cuál sería el aporte hecho por esta obra al campo de la Matemática Educativa y a la problemática de la institución educativa particularmente estudiada. También se hizo una revisión y análisis sobre paradigmas en Matemática Educativa para, como ya se dijo, seleccionar las herramientas teóricas con las cuales se interpretó el fenómeno estudiado.

El marco teórico puede modificar, como sucedió en nuestro caso, las versiones iniciales tanto del problema como de las preguntas. Sin embargo, las particularidades de la institución escolar escogida como escenario para la investigación (una universidad pública del norte de México), también tuvieron ingerencia en la determinación de las preguntas y objetivos de la investigación, la cuales, a su vez, nos llevaron a organizar el proceso de investigación global en de tres fases.
Como ya se dijo antes, los objetivos, que ahora denotamos O1, O2 y O3 son:

O1) Identificar los elementos que entran en juego para decidir la inclusión de un contenido algebraico en una propuesta curricular institucional para ingeniería.
O2) Describir cuáles son las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que colegiadamente hacen los profesores de dichas propuestas institucionales.
O3) Describir el proceso de concreción de las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que hace un profesor cuando pone en escena un conocimiento algebraico.

Para O1, hicimos una revisión documental de fuentes tanto primarias como secundarias entre las cuales están libros de texto, artículos, informes técnicos, monografías, reportes de conferencias, seminarios, congresos, simposiums y reuniones de especialistas en ingeniería y profesores de matemáticas, así como modelo curricular, planes de estudio y programas de materias vigentes en la universidad seleccionada. Cabe decir que ésta recientemente había modificado su modelo curricular, lo cual había tenido como consecuencia la modificación de los planes de estudio para las carreras de ingeniería y de los programas de los cursos que constituyen la currícula matemática, entre ellos el álgebra.

Para satisfacer O2, participamos durante año y medio en reuniones de un grupo de profesores de álgebra que atienden a los estudiantes de ingeniería, a quienes se había encomendado la tarea de que colegiadamente dieran seguimiento al curso a su cargo, de tal manera que se atendiesen las especificaciones que el modelo curricular planteaba. De este trabajo surgieron una serie de decisiones, recomendaciones metodológicas, de evaluación y producción de materiales didácticos de apoyo al curso, las cuales, en teoría, debían ponerse en práctica en las aulas.

En esta fase, la información se consiguió vía la observación participante, auxiliándose con notas de campo, pues una condición que los maestros pusieron para permitir el acceso a la investigadora, fue el que ésta se involucrase a la par que ellos en las discusiones y tareas que surgieran. Esta decisión tuvo sus ventajas, pues dio oportunidad a la investigadora de profundizar en algunas de las reflexiones que los profesores hacían, al mismo tiempo que oscureció la incomodidad que los maestros pudiesen haber tenido al sentirse observados.

En algún momento se consideró pertinente realizar entrevistas con algunos de los profesores, para conocer sus versiones particulares de los acuerdos tomados colectivamente. Estas entrevistas fueron semiestructuradas, es decir, si bien se preparó una serie de preguntas, se contaba con la flexibilidad suficiente para modificar aquéllas que fuesen necesarias o para incluir otras dependiendo de la profundización buscada. Las entrevistas fueron grabadas, para no distraer al entrevistado y para contar con información fiel.

Para alcanzar O3, la técnica para la recolección de la información fue la observación no participante, manteniéndose al observador totalmente al margen de las actuaciones de los sujetos involucrados. Esta parte de la investigación inició una vez que los maestros decidieron que ya tenían materiales y una nueva visión para trabajar en el salón de clases el tema de los sistemas de ecuaciones lineales, que fue el que más ampliamente trataron en el periodo de observación previo.

Inicialmente se clasificaron a los integrantes del grupo de maestros en tres subgrupos, atendiendo a su formación y experiencia, y negociándose con un representante de cada uno de ellos la anuencia para asistir a sus sesiones en el aula durante el tiempo que tomara el tratamiento del tema ya escogido. La negociación fue un tanto difícil, pero finalmente se consiguieron los permisos necesarios. La actividad no tuvo la misma duración en los tres casos, ya que cada uno de los maestros empleó tiempos diferentes para el tratamiento del tema seleccionado, dependiendo de sus circunstancias y creencias particulares, a pesar de que el programa del curso asigna un lapso definido para cada tema.

Los datos fueron registrados mediante dos instrumentos: la video grabación de las sesiones, realizada por un ayudante de investigación, y la toma de notas de campo hecha por la investigadora-observadora; posteriormente se complementaron ambos instrumentos. Cabe hacer la aclaración de que al llegar al aula también se solicitó la anuencia de los estudiantes tanto para estar presentes en el aula como para realizar la grabación. En todos los casos aceptaron y después de la primera o segunda sesión aceptaban la presencia de los externos con naturalidad.

Como puede notarse de lo escrito hasta ahora, en cada una de las fases se obtuvo información que se organizó, definiéndose los criterios para su análisis. Para la determinación de dichos criterios o categorías de análisis, usamos las herramientas teóricas que ya declaramos en el primer apartado de este capítulo. Una vez que se contó con conclusiones en cada uno de los ciclos señalados, se triangularon con el propósito de dar respuesta al problema abordado.

Capítulo III. Contexto y sujetos de la investigación

III.1. Introducción

En este capítulo daremos información concerniente a la institución de educación superior en la cual fue realizada la investigación. Como se verá con los datos que se muestran, se trata de una universidad pública que se puede ubicar entre las de mayor adelanto en el noroeste del país, una de las zonas de mayor desarrollo económico.

Con la intención de contextualizar el problema a nivel institucional, se incorporan elementos sobre el modelo curricular vigente, sobre el departamento encargado de operar el servicio que se presta en matemáticas, hasta llegar a las características de los sujetos participantes.

III.2. La Universidad de Sonora y su modelo curricular

En el capítulo anterior se mencionó que la investigación se realizó en una institución de educación superior ubicada en el Estado Mexicano de Sonora: la Universidad de Sonora (UNISON). Ésta es una universidad pública con 65 años de antigüedad, con reconocido prestigio a nivel regional y nacional, de acuerdo con algunos organismos evaluadores y autoridades educativas locales y nacionales.

Al inicio del semestre 2007-2 se reporta que cuenta con una población estudiantil de alrededor de 31000 alumnos, de los cuales 650 cursan algún posgrado, 22179 una licenciatura, 758 talleres en artes y 7146 cursos en idiomas. Su oferta educativa consta de 77 opciones, de las cuales 27 son de posgrado, 4 de academias de arte, 9 cursos de idiomas y 37 programas de licenciatura.

Cuarenta programas, de los cuarenta y tres susceptibles de evaluación, han sido ubicados en el nivel I, máximo otorgado por los Comités Interinstitucionales para la Evaluación de la Educación Superior. Además, el Consejo para la Acreditación de la Educación Superior ha certificado trece programas de licenciatura.

Está integrada por cinco unidades regionales, ubicadas en Hermosillo, Nogales, Santa Ana, Caborca y Navojoa, todas ellas ciudades del Estado de Sonora. Cada unidad regional está dirigida por un vicerrector y organizada en divisiones; éstas a su vez se conforman por departamentos. Nuestro estudio se llevó a cabo en la Unidad Regional Centro, con sede en Hermosillo y que es la más grande de todas; trabajamos con profesores pertenecientes al Departamento de Matemáticas que ejercen sus funciones docentes en los distintos departamentos que constituyen la División de Ingeniería.

En la Universidad de Sonora, al igual que en muchas instituciones públicas de educación superior en México, se han dado cambios de diversa naturaleza que han tenido repercusiones en el ámbito académico. Entre ellos destacamos la aprobación en julio de 2003, del documento titulado Lineamientos Generales para un Modelo Curricular, en el cual están sentadas las bases para construir un modelo curricular donde la enseñanza sea desarrollada en función del aprendizaje de los estudiantes. Se declara que se busca formar un estudiante que cuente con sentido de actualización y actitud de autoaprendizaje, capaz, competente, que guste del trabajo interdisciplinario y por equipo, responsable, consciente de sus deberes y exigente en compartir actitudes, habilidades y conocimientos-

Los Lineamientos están estructurados en cuatro capítulos. Sintetizamos el contenido de cada uno de ellos:

a) El primer capítulo señala que los planes de estudio estarán organizados en cinco ejes formativos: de formación común, formación básica, formación profesional, formación especializante y eje integrador.

b) El segundo, indica quiénes participan en la elaboración y modificación de los ejes formativos, y en la elaboración de los programas de las asignaturas de los planes de estudio.

c) El tercero contiene lineamientos que proporcionan elementos de pertinencia y flexibilidad a los planes y programas académicos de la Universidad de Sonora. Estos lineamientos pretenden que los planes y programas de estudio ofrecidos por la Institución posean las siguientes características generales:

- **Formación Básica Sólida**. En la actualidad las IES deben proporcionar preferentemente métodos de aprendizaje, ya que los volúmenes y flujos de información son de tal magnitud que pierde sentido saturar a los estudiantes con altas cantidades de información. De esta manera, la formación del alumno debe ser balanceada, con conocimientos generales y básicos muy sólidos que les permitan adaptarse a los cambios en los perfiles laborales. No se recomienda un alto nivel de especialización, ya que el conocimiento contemporáneo crece rápidamente y con esa misma rapidez se vuelve obsoleto. En este sentido, los estudios de nivel postgrado y el Sistema de Educación Continua deben ser fortalecidos para dar respuesta a las necesidades de especialización de la sociedad en general, y de los profesionistas y técnicos en particular.

-**Flexibles**. La flexibilidad en los planes de estudio da oportunidad a que el alumno pueda alcanzar los objetivos de aprendizaje de la forma y en el espacio que considere más conveniente. Las actuales corrientes educativas son conscientes de la imposibilidad de seguir reduciendo la educación al margen rígido del aula. Las exigencias sociales del presente y del futuro requieren de una preparación para la cual los medios y las modalidades educativas tradicionales resultan insuficientes en la capacitación de los alumnos. En este sentido, la incorporación a los planes de estudio de métodos y de modalidades de enseñanza modernos, como lo es la educación a distancia y virtual, es sumamente útil. Se plantea iniciar este tipo de enseñanza con el ofrecimiento de materias en línea a través de la red electrónica, para, en un futuro, estar en posibilidad de ofrecer programas completos. También se incluyen otros elementos importantes de flexibilidad curricular, como son: el número mínimo de créditos optativos que se deben cubrir; las diferentes opciones o bloques de créditos optativos que se ofrezcan en el eje especializante; la posibilidad de cursar créditos en otros programas tanto de la misma Universidad como de otras IES nacionales o extranjeras; la opción de aprobar asignaturas a través del Sistema de Acreditación, así como la introducción de requisitos co curriculares.

-**Comprometidos con la realidad social del país**. Uno de los principales propósitos de la Universidad de Sonora es la formación de profesionistas con vocación social y humanista, promotores de la justicia y la democracia, la equidad social y la igualdad de oportunidades. Sus egresados deben estar atentos a los retos y oportunidades de la globalización, pero manteniendo un compromiso con los valores culturales del país, a fin de mantener nuestra tradición cultural e identidad nacional. Por esto, todos los planes de estudio deben incluir experiencias de aprendizaje en actividades de las ciencias sociales y las humanidades mediante las cuales el estudiante se relacione con su entorno, la problemática social y los valores y las tradiciones de la cultura en la que vive.

-**Vinculados de manera directa a los sectores productivo y social**. En los países con mayor desarrollo social, cada vez se establecen más acuerdos entre la Universidad, las empresas y otras entidades sociales. En estas instituciones los estudiantes realizan prácticas e intervienen en proyectos de investigación, de tal forma que al egresar, ya tienen experiencia y un mejor conocimiento del medio profesional donde deberán desenvolverse. Por esta razón, los planes de estudio deben considerar actividades en los sectores productivo y social con valor en créditos.

Por otra parte, los planes de estudio deben tomar en cuenta los criterios de los procesos de acreditación y certificación, a los cuales habrán de enfrentar nuestros egresados en el medio profesional.

-**Centrados en el autoaprendizaje de los alumnos**. La necesidad de desarrollar la capacidad de autoaprendizaje en los alumnos se debe, principalmente, a uno de los nuevos paradigmas educativos de inicios del siglo XXI: educación permanente. Como se indicó en líneas anteriores, si el graduado no continúa preparándose y actualizándose de manera continua, tendrá problemas en su desempeño profesional. De hecho, uno de los principales retos que ya enfrentan seriamente los profesionistas de países industrializados, y que ya se empieza a sentir en los países en desarrollo, es que los perfiles profesionales están cambiando cada vez con mayor rapidez. En Europa, por ejemplo, se calcula que un profesional debe estar preparado para cambiar su perfil cuatro o cinco veces durante el ejercicio de su profesión.

-Se propone entonces un **proceso educativo activo**, en donde se impulse la participación de los alumnos, en contraposición a aquel proceso en el que el profesor imparte la enseñanza y el estudiante se limita a ser receptor de sus exposiciones. En el método activo, en cambio, el alumno toma parte directa y significativa en su propio aprendizaje y resuelve problemas por sí mismo, realizando tareas relacionadas con los temas de estudio. De esta manera, parte fundamental de los planes de estudios será el impulso a actividades de investigación en laboratorios, talleres y prácticas de campo, a fin de fomentar una actitud dinámica y participativa de los alumnos.

-Comprometidos con el estudiante. Los estudiantes son el centro y la razón de la actividad docente. Parte fundamental del compromiso institucional hacia ellos es el funcionamiento, en todos los programas docentes, de un sistema de tutoría individualizada que oriente a los alumnos en su vida académica y los ayude a superar los obstáculos que enfrentan. Además, es evidente que la institución deberá mejorar el ambiente académico donde el estudiante participa, elevando la calidad de los servicios y de los diferentes elementos que intervienen en el proceso de su formación (planta académica, plan de estudios, laboratorios, centros de cómputo, bibliotecas, sistema de becas, sistema de estímulos, etc.), con el fin de mantener la dinámica de superación.

d) El cuarto capítulo toma en cuenta la formación pedagógica y didáctica del personal docente, haciendo hincapié en el papel fundamental del maestro para el éxito en la implementación del modelo curricular, dada su responsabilidad en la promoción y orientación de los aprendizajes de los estudiantes.

De acuerdo a lo establecido en el capítulo I, los nuevos planes de estudio (o cualquier modificación de los ya existentes), se ajustarán a la siguiente estructura:
16 créditos de materias del Eje de Formación Común
Al menos 35 % en materias del Eje de Formación Básica
Un máximo de 40 % en materias del Eje de Formación Profesional
Un máximo de 15 % en materias del Eje de Formación Especializante y
Al menos un 5 % en materias del Eje de Integración

El Eje Común recibe ese nombre porque contiene aquellos cursos que son comunes a todos los planes de estudio universitarios. A su vez el Eje Básico contiene las materias que, dentro de una cierta área aportan los conceptos, conocimientos y habilidades básicas comunes a varias áreas o disciplinas (las ingenierías, por ejemplo).

Para las carreras de ingeniería, el currículo matemático básico está contemplado en el llamado Eje Básico, que incluye no sólo materias de esta área, sino también de física y de cualquier otra disciplina que los responsables ubiquen en ese rubro.

Como ya se señaló, la aprobación y posterior implementación de los Lineamientos Generales para un Modelo Curricular ha impactado a todos los niveles en nuestra

Institución. Toda vez que ésta tiene una organización Departamental, iniciada desde 1978 y completada en 1991, los departamentos de matemáticas de las diferentes Unidades Regionales (o sus equivalentes), han enfrentado la responsabilidad de determinar el curriculum matemático de cada uno de los Ejes Básicos de las distintas carreras a las cuales se presta servicio.

III.3. El Departamento de Matemáticas y sus profesores

Un antecedente importante del Departamento de Matemáticas lo ubicamos en la creación de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Sonora, en 1964. Esta carrera surgió con el objetivo de formar personal calificado que atendiera la demanda de profesores de matemáticas del Estado y la región, en los niveles medio superior y superior. Además, se pretendía preparar personal con una sólida formación en la disciplina, que pudiera dedicarse a la investigación con el propósito de apoyar en la solución de los problemas que los sectores productivo y social de la región demandaban.

En ese tiempo la Universidad estaba organizada con base en escuelas. Así, la Licenciatura en Matemáticas y las Licenciaturas en Física y Letras, constituían la llamada Escuela de Altos Estudios.

En enero de 1978 la Comisión de Planeación y Desarrollo de la Universidad de Sonora presenta el proyecto de Departamentalización de nuestra Institución, el cual fue aprobado en noviembre de ese mismo año. Con esta medida nace oficialmente el Departamento de Matemáticas y, con la desaparición de la Escuela de Altos Estudios en 1983, se crea una organización híbrida Departamento-Escuela, en la que se atiende a una licenciatura y, por otra parte, los servicios docentes al resto de los departamentos y escuelas de la institución.

Cuando la Universidad asume el modelo departamental, la planta docente de la Escuela de Altos Estudios, responsable de atender los cursos de matemáticas de las Licenciaturas en Matemáticas y Física, pasa paulatinamente a ser personal del Departamento de Matemáticas. Para el personal académico y el Departamento en su conjunto, se generan nuevos retos, uno de ellos fue asumir la responsabilidad de atender los cursos de matemáticas que formaban parte de los planes y programas de estudio de los programas docentes que ofrece la Universidad.

Lo anterior genera varias necesidades, por una parte la planta de profesores tiene que atender estudiantes de áreas con requerimientos tan diferentes como Ingeniería, Económico-Administrativas, Ciencias Sociales, etc.; por otra, parte, se tiene que contratar más personal que pueda hacer frente a la nueva demanda, y para cubrir esta necesidad se contrataron egresados de la Licenciatura en Matemáticas y profesionistas de áreas afines.

La implantación de la Ley 4, Orgánica de la Universidad, el 26 de noviembre de 1991, viene a cambiar nuevamente el esquema organizacional de la Universidad de Sonora, al crearse las divisiones y nuevos órganos de gobierno. En este sentido, los Departamentos de Física, Investigación en Física, Geología y Matemáticas se agruparon para formar la División de Ciencias Exactas y Naturales. Aunque por ley los programas académicos dependen de las divisiones, sus profesores están adscritos a los departamentos que la conforman y sus prácticas se corresponden con la versión previa de funcionamiento por escuelas.

Hay cuatro programas docentes: Licenciatura en Matemáticas, Maestría en Matemática Educativa, Licenciatura en Ciencias de la Computación y el Programa de Posgrado en Matemáticas, el cual ofrece Maestría y Doctorado.

El servicio que presta el Departamento de Matemáticas a la Universidad es muy numeroso. Independientemente de la atención a los programas de licenciatura y posgrado ya mencionados, el número de cursos atendidos en programas académicos en las diferentes Divisiones de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora es grande (248 para el semestre 2007-2).

Actualmente laboran en el Departamento 137 profesores, 61 con contratación como maestro de tiempo completo, 76 de asignatura y un técnico académico. Respecto al nivel de habilitación de la planta docente, en este momento se tiene que de los 61 maestros de tiempo completo, 20 tienen grado de doctor y 33 tienen maestría, es decir el

87 % tiene estudios de postgrado; de los profesores de asignatura uno tiene doctorado, 24 están titulados de maestría y 9 son pasantes de maestría; 13 profesores realizan estudios de postgrado, 11 de doctorado y 2 de maestría.

III.4 Los cambios en el curriculum matemático

Como un ejemplo de las tendencias que han seguido los cambios realizados a la fecha, tenemos que, de acuerdo a la organización departamental vigente, las carreras de ingeniería deben cursar 11 materias de matemáticas, las cuales son Álgebra Superior, Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica, Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral II, Programación de Computadoras, Análisis Numérico, Ecuaciones Diferenciales, Cálculo Diferencial e Integral III, Probabilidad y Estadística. Por lo que se mencionó párrafos arriba, esto será así en tanto alguna de esas carreras no modifique su plan de estudios, en cuyo caso éste deberá tomar la matemática de aquellos cursos contenidos en el eje básico previamente determinado.

Aprobado en agosto de 2005, el multicitado Eje Básico aprobado para las carreras de ingeniería consta de los siguientes cursos: Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral II, Cálculo Diferencial e Integral III, Geometría, Ecuaciones Diferenciales, además de Probabilidad y Estadística (ambas constituyen un solo curso).

Como puede observarse, a pesar de que se reconoce y declara la importancia de la formación matemática de cualquier ingeniero, el currículo matemático ha disminuido de once materias a solamente siete. Las justificaciones para esta reducción recaen fundamentalmente en criterios dictados por organismos externos de evaluación existentes en México (CENEVAL, asociaciones de egresados, entre otros), así como en las inconformidades de los responsables de los programas de ingeniería respecto a la manera en como se ha trabajo el currículo matemático en sus profesiones, esencialmente la orientación que se da a los cursos de matemáticas. En diferentes foros han expresado que:

- Algunos cursos y temas son repetitivos de lo ya estudiado durante el bachillerato;
- Existe desvinculación de los cursos de matemáticas respecto del campo de aplicación propio de la ingeniería, (aunque se reconoce que se cubren los temas de su interés, esto no necesariamente se refleja en la capacidad y habilidad de los

estudiantes para usar la matemática en la resolución de problemas y el análisis de fenómenos científicos e ingenieriles)

- La matemática se orienta hacia aspectos demasiado formales en detrimento de la revisión de técnicas, algoritmos y sus correspondientes aplicaciones.

Esta situación se ha discutido también en el Departamento de Matemáticas, y de alguna manera ha dado lugar a cambios en el currículo matemático de ingeniería, así como de las prácticas de los profesores.

III.5. Los sujetos en estudio

Establecido el nuevo plan de estudios para los ingenieros, las instancias responsables convocan a los encargados de impartir los cursos de matemáticas para que conozcan la nueva propuesta curricular y hagan las adaptaciones pertinentes. Esta última instancia convoca a sus profesores de álgebra, dándoles instrucciones para que, de manera colegiada, discutan la iniciativa oficial y hagan las modificaciones de su práctica docente así como el diseño de materiales de apoyo y los instrumentos de evaluación en el curso que a ellos compete.

Oficialmente, esta iniciativa se denominó *"Proyecto de Seguimiento de la Impartición de los Cursos de Álgebra bajo el esquema del Nuevo Modelo Curricular en la División de Ingeniería"*, y sus actividades iniciaron a principios del semestre 2005-2, manteniéndose hasta al menos fines del semestre 2007-2.. Nos interesó incorporarnos a este grupo de trabajo por considerar que sus intereses estaban justamente en la óptica de la investigación que nos encontrábamos realizando.

El conjunto de profesores sujetos de investigación fueron inicialmente dieciocho, aunque el número estuvo variando; los que se mantuvieron constantes a lo largo de todo el proceso fueron diez. Su característica común es que todos son licenciados en matemáticas egresados de la misma universidad, con una experiencia docente en álgebra que varía entre dos y treinta y cinco años.

De los dieciocho miembros originales, ocho tienen posgrado en matemática educativa, dos han cursado diplomados en docencia y uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas y cinco tienen posgrados en otras áreas de la matemática y ningún tipo de estudio formal en cuestiones de docencia.

Solamente en la segunda de las fases de la investigación consideramos la interacción con los diez participantes constantes. Para la tercera fase, donde como ya se señaló se realizó observación directa, se seleccionaron a tres de ellos, con las siguientes características:

a) Profesor A, licenciado en matemáticas, maestría en matemática educativa, 20 años de experiencia como profesor universitario de matemáticas, diez años como profesor de álgebra en ingeniería.

b) Profesor B, licenciado en matemáticas, estudiante del primer semestre de la maestría en matemática educativa, 11 años como profesor de matemáticas en el bachillerato y dos como profesor universitario de álgebra en ingeniería

c) Profesor C, licenciado en matemáticas, maestría en computación, dos diplomados en uso de recursos computacionales en educación matemática, 17 años como profesor de matemáticas en universidades y tres como profesor de álgebra en ingeniería.

Capítulo IV. El significado referencial

IV.1 Introducción

A partir de este capítulo desarrollaremos el análisis de la información generada en cada una de las fases de la investigación. Iniciaremos esta discusión planteando cuál es el significado referencial para los sistemas de ecuaciones lineales, tomando como base, para su descripción y análisis, las nociones teóricas del EOS que ya referimos en nuestro marco teórico.

IV.2 Cómo determinamos el significado referencial para los sistemas de ecuaciones lineales

Entendemos por significado referencial el sistema de prácticas usadas como marco para elaborar el significado pretendido. En una determinada institución de enseñanza, el significado referencial forma parte del significado holístico del objeto matemático; para construir una versión de este último, requerimos un estudio histórico epistemológico, (con el cual conoceríamos el origen y evolución del objeto de interés), así como el estudio de los diferentes contextos donde es usado. Para los fines de nuestra investigación, nos parece suficiente conocer el significado que se toma como referencia cuando se enseñan SEL en las escuelas de ingeniería en la institución que nos ocupa, la Universidad de Sonora.

En este sentido ubicamos dos fuentes fundamentales: el programa de la materia y los textos sugeridos como apoyo. El primero de ellos porque contiene la posición institucional de un centro de enseñanza, es el documento que se entrega a un profesor cuando se le asigna la tarea de impartir un curso, y que contiene la información de los qué, cómo, en cuanto tiempo, para qué, por qué, etc. El programa de la materia constituye la primera referencia con la que cuenta el maestro a la hora de planificar el proceso de enseñanza; es lo que los expertos le están indicando que sus alumnos deberán de saber hacer y decir cuando se les enfrente a las situaciones y problemas en los que aparezcan los SEL. En el programa se manifiestan, implícita o explícitamente, lenguaje, argumentos, propiedades, conceptos, procedimientos y situaciones-problemas, es decir la serie de objetos matemáticos, articulados en una trayectoria epistémica, que debe ser construida para lograr el objetivo de enseñanza planteado.

Los textos son otra vertiente indispensable para tener una versión del significado referencial, pues contienen también propuestas sobre procesos planificados de instrucción. Generalmente los autores de los libros de texto declaran que los han escrito teniendo como preocupación fundamental ayudar a profesores y estudiantes a hacer accesibles la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; sin negar la existencia de esa intención, desde nuestra posición creemos que lo que en un texto de álgebra, cálculo, geometría, etc., se concreta, es lo que el autor piensa que es el álgebra, el cálculo, la geometría, etc., y lo que significa enseñar y aprender la disciplina de que se trate. Y entonces es en ese sentido en el que presenta en su texto las configuraciones y trayectorias que reflejan sus concepciones y creencias.

¿Qué relación guardan los textos de matemáticas con sus programas? En México, cuando en 1993 fueron modificados los planes y programas para la educación básica, la siguiente tarea que se abordó fue la elaboración de textos que fueran acordes a los planteamientos curriculares recién aprobados. se formó una comisión encargada de trabajar en el diseño de libro y materiales didácticos de apoyo; podría pensarse que al ser materiales de uso generalizado y obligatorio para todos los profesores y estudiantes de primaria, estaba garantizado su empleo. Sin embargo, diversos factores llevaron a que esto no sucediera, al menos no en el nivel que teóricamente podría asegurarse dadas las circunstancias de gratuidad y obligatoriedad.

Para la secundaria, se deja en libertad a los Estados de decidir cuáles son los libros que usarán en sus escuelas, para lo cual éstos abren las convocatorias respectivas. En el Estado de Sonora, México, experiencia que conocimos de cerca, fueron las academias de profesores de matemáticas los que acordaban qué textos usarían, y aunque se suponía que todos ellos estaban escritos tomando como base los planes y programas, lo cierto es que la realidad mostró otra cosa. Las interpretaciones de los planes y programas variaban de un texto a otro. Como dato adicional, apuntamos el que en esta época, mediados de los años noventa, empiezan a incursionar en la escritura de libros de texto matemáticos mexicanos, y muy pocos matemáticos educativos.

En el bachillerato hay subsistemas como el tecnológico y los colegios de bachilleres, que lanzan convocatorias entre sus profesores para la elaboración de libros y materiales didácticos, los cuales son de adquisición obligatoria para los estudiantes, aunque en ocasiones nunca sean realmente utilizados. Esto último no es exclusivo del bachillerato, puesto que la decisión del uso real de los libros está en manos de los profesores, y si ellos no comparten o no entienden la manera en la que están diseñados, no los utilizarán, o lo harán parcialmente.

Dejando de lado el aspecto de su uso, lo que resaltamos de las situaciones anteriores, es el hecho de que los textos fueron diseñados tomando como base lo establecido en los planes y programas de los correspondientes niveles educativos, a diferencia de lo que sucede en el nivel profesional. Ahí encontramos al menos alguna de las dos posibilidades siguientes: hay instituciones educativas que promueven entre sus profesores la escritura de notas y material didáctico para los cursos que ellos ofrecen y que son editados por la misma institución; hay otros centros educativos que prefieren recomendar el uso de material producido por editoriales de tradición en el medio académico, la mayor parte de las cuales trabajan con autores de origen norteamericano.

La influencia que puede tener una obra editorial no se limita a los aspectos ya mencionados, puede llegar más allá, pues en medio es muy frecuente encontrar programas de materia que coinciden con los índices de los textos, hecho que se origina cuando la tarea del diseño de los programas de las materias es encomendada a los profesores encargados de impartirlas, cuyas herramientas para asumir esta tarea son la experiencia docente y el conocimiento disciplinar. Transponer un índice de un libro a un programa de materia conlleva la transposición de toda una serie de concepciones y creencias, y nos atrevemos a asegurar que al realizar esta práctica, no se es consciente de sus posibles implicaciones.

Las argumentaciones que hemos expresado hasta el momento, son las que nos permiten justificar la elección que hicimos de las fuentes a considerar para analizar el significado referencial, aspecto que desarrollaremos con detalle en las secciones que siguen.

IV.2.1 El programa oficial del curso

A continuación mostramos cuál es el programa oficial del curso de Álgebra, que se imparte a las carreras de la División de Ingeniería en la Universidad de Sonora. Está disponible en http://www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/progalgebra.htm .

Dicho curso resultó de la fusión de los cursos Álgebra Superior I y Álgebra Lineal I, de cada uno de los cuales se rescataron los contenidos matemáticos que fueron considerados importantes para la formación de un ingeniero en los tres aspectos siguientes: que fuesen requeridos en cursos posteriores de matemáticas, en cursos posteriores de ingeniería y que tuviesen aplicabilidad en la resolución de problemas de ingeniería. Esto fue determinado por una comisión bilateral (profesores de los Departamentos de Ingeniería y Matemáticas), en la cual tuvieron mucho peso las exigencias de las evaluaciones de CACEI y CIIES, así como los señalamientos del Modelo Curricular de la Universidad de Sonora. Estas particularidades ya fueron comentadas en otros apartados del presente trabajo.

Tabla IV.1 Programa de la Materia de Álgebra en la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora

<table>
<tr><td colspan="4">NOMBRE: ÁLGEBRA</td></tr>
<tr><td>UNIDAD: REGIONAL CENTRO</td><td colspan="3">EJE BÁSICO, DIVISIÓN DE INGENIERIA</td></tr>
<tr><td>DEPARTAMENTO: MATEMATICAS</td><td>ACADEMIA:
(SERVICIO)</td><td colspan="2">HORAS DE CATEDRA
80</td></tr>
<tr><td>CARACTER: OBLIGATORIA</td><td>CREDITOS: 08</td><td>TEORICA:
06</td><td>TALLER:
02</td></tr>
<tr><td>REQUISITO: Ninguno</td><td colspan="3">SERIACION POSTERIOR: Geometría Analítica</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVO GENERAL: Analizar los conceptos básicos de la teoría de ecuaciones y del álgebra lineal y su aplicación en los diversos problemas de las ciencias y técnicas relacionadas con la ingeniería.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Establecer el número y la naturaleza de las raíces de una ecuación de grado n en una incógnita, en un ambiente algebraico y gráfico.
Familiarizarse con los conceptos básicos del álgebra lineal y utilizarlos para explicar el funcionamiento de sus métodos y algoritmos.
Resolver problemas de la ciencia y la ingeniería cuyos modelos son extraídos de la teoría de ecuaciones y del álgebra lineal.</td></tr>
</table>

CONTENIDO	OBJETIVOS TEMÁTICOS	HABILIDADES ESPECIFICAS
1. Números complejos. a) Representación gráfica de los números reales y complejos. b) Operaciones c) Potencias d) Raíces. 10 horas	Conocer el sistema de los números complejos y sus operaciones en un ambiente numérico y gráfico	Operar con números complejos algebraica y gráficamente.
2. Resolución algebraica de ecuaciones de segundo y tercer grado. 5 horas	Mostrar las limitaciones de los métodos algebraicos cuando se resuelven ecuaciones de grado mayor que dos.	

NOMBRE: ÁLGEBRA

3. Polinomios de grado *n* en una variable a) Raíces reales. b) Raíces complejas. c) Derivada de un polinomio y multiplicidad de raíces. d) Construcción de un polinomio de grado n a partir de sus raíces. 10 horas	Entender las definiciones básicas relacionadas con polinomios de grado n.	
4. Representación gráfica de un polinomio y sus raíces reales. a) Raíces simples b) Raíces múltiple 5 horas	Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio, enfatizando la noción de raíz.	Calcular las raíces reales y complejas de ecuaciones de grado dos y tres.
5. Representación gráfica de las raíces complejas de un polinomio. 3 horas	Establecer la relación existente entre el número total de raíces de un polinomio y su grado	
6. Teorema Fundamental del álgebra. 2 horas	Formular el Teorema Fundamental del Álgebra, para polinomios con coeficientes complejos	Aplicar las definiciones básicas relacionadas con polinomios de grado *n* a problemas relacionados con raíces de polinomios.
7. Regla de Descartes para la separación de raíces. 3 horas	Deducir la manera como se relacionan las variaciones de signo de los coeficientes de un polinomio con el número de raíces reales	
8. Método de bisección para aproximar raíces. 2 horas	Conocer y aplicar un método sencillo para aproximar las raíces reales de un polinomio.	Graficar polinomios como funciones reales de variable real y estimar gráficamente cada una de sus raíces reales.
9. Conceptos básicos del Álgebra Lineal. a) Combinación lineal	Entender los conceptos básicos del Álgebra Lineal en un ambiente algebraico y gráfico.	Graficar con software todas las raíces de un polinomio.

NOMBRE: ÁLGEBRA

b) Dependencia e independencia lineal. c) Generación d) Base y Dimensión 10 horas		Sintetizar los resultados obtenidos anteriormente sobre la relación entre el número total de raíces de un polinomio y su grado
10. Sistemas de ecuaciones lineales. a) Representación matricial. b) Método de Gauss-Jordán c) Sistemas consistentes e inconsistentes 10 horas	Conocer y aplicar un método que resuelva un sistema de ecuaciones lineales de cualquier tamaño. Modelar problemas sencillos de Ingeniería, cuya solución exija resolver un sistema de ecuaciones lineales.	Estimar el número total de raíces positivas y negativas de un polinomio a partir de sus variaciones de signo. Aproximar las raíces reales de un polinomio
11. Matrices y operaciones. a) Suma y multiplicación de matrices. b) Tipos de matrices. c) Determinantes d) Inversa de una matriz. 7 horas	Conocer las operaciones entre matrices y su aplicación en la resolución de problemas. Modelar problemas sencillos de Ingeniería, cuya solución exige de la noción de matriz como herramienta.	Aplicar los conceptos básicos del Álgebra Lineal a problemas sobre vectores en dos y tres dimensiones.
12. Transformaciones lineales 5 horas	Conocer las definiciones de las nociones básicas sobre transformaciones lineales en R^2 y R^3 y articular las representaciones gráfica y matricial de estas nociones.	
13. Valores y vectores propios 8 horas	Entender las nociones de valor y vector propio de una matriz en los ambientes algebraico y gráfico y aplicar estas nociones en problemas sencillos de ingeniería	Resolver problemas de ingeniería cuyos modelos matemáticos sean sistemas de ecuaciones lineales. Resolver problemas sencillos de ingeniería que se modelan matricialmente.

NOMBRE: ÁLGEBRA

		Identificar los efectos de una transformación lineal de R^2 en R^2 y de R^3 en R^3 con las propiedades de la matriz que la define. Calcular los valores y vectores propios de una matriz gráfica y algebraicamente. Resolver problemas cuyos modelos involucren las nociones de valor y vector propio de una matriz.

METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El profesor empleará dinámicas que promuevan el trabajo en equipo. Promoverá la participación activa de los estudiantes poniendo especial atención al desarrollo de habilidades de carácter general, como aquellas relacionadas con la resolución de problemas, así como específicas de los métodos algebraicos cuando se resuelven problemas de ingeniería. Incorporará los recursos tecnológicos en la actividad cotidiana de los alumnos e incentivará el desarrollo de actividades fuera del aula.

POLÍTICAS DE ACREDITACION Y EVALUACIÓN SUGERIDAS

El profesor evaluará por separado cada una de las unidades del curso, tomando en cuenta los siguientes criterios:

En la evaluación de cada una de las unidades, el examen parcial tendrá un peso del 60%, las prácticas de laboratorio (elaboradas por equipo) tendrán un peso del 20% y el restante 20% se calificará con las tareas y la participación en clase del estudiante.

BIBLIOGRAFÍA, DOCUMENTACIÓN Y MATERIALES DE APOYO

Bernard Kolman (1999). Álgebra Lineal con Aplicaciones y MATLAB. Pearson Educación de México

David C. Lay (2001) Álgebra Lineal y sus Aplicaciones 2ª Edición. Pearson Educación de México

Fernando Hitt (2002). Álgebra Lineal. Pearson Educación de México

George Nakos y David Joyner. (1999). Algebra Lineal con Aplicaciones. International Thomson Editores.

Howard Anton. (2003) Introducción al Álgebra Lineal 3ª Edición. Limusa Wiley.

José L. Soto (2002). Números Complejos: una presentación gráfica. Material didáctico No. 1. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora.

José L. Soto (2003). Polinomios y raíces: una presentación gráfica. Material didáctico No. 1. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. (En prensa).

PERFIL ACADÉMICO DESEABLE DEL RESPONSABLE DE IMPARTIR LA ASIGNATURA

La División de Ciencias Exactas y Naturales, buscará el perfil más propicio del maestro para impartir esta asignatura a la División de Ingeniería. Se recomienda que el profesor tenga las siguientes características:

- Cuente con una formación matemática sólida en el área a impartir
- Posea conocimientos acerca de la utilización de herramientas matemáticas en problemas de ingeniería
- Tenga disposición para incorporar el empleo de recursos computacionales en la enseñanza de este curso.

Como podemos observar, el programa de la materia es bastante esquemático, y los tres aspectos que se desglosan para cada uno de los temas, (Contenido, Objetivos temáticos y Habilidades específicas), están también presentados de manera muy escueta. Resaltamos los siguientes hechos:

a) El estudio que se propone para números complejos y ecuaciones polinomiales no contempla explícitamente el tratamiento de problemas en ingeniería, lo cual solamente sucede en los casos de los sistemas de ecuaciones lineales, matrices y valores y vectores propios.

b) Se plantea el uso de representaciones gráficas para el estudio de diferentes temáticas

c) Se sugiere el uso de dinámicas que promuevan la participación activa de los estudiantes, poniendo especial atención al desarrollo de habilidades de carácter general, como aquellas relacionadas con la resolución de problemas, así como específicas de los métodos algebraicos cuando se resuelven problemas de ingeniería. Además se recomienda la inclusión de los recursos tecnológicos modernos en la actividad cotidiana de los alumnos así como incentivar el desarrollo de actividades fuera del aula. Con lo expresado en este apartado se incorporan las recomendaciones expresadas en el Modelo Curricular de la Institución.

En cuanto a la selección de los contenidos, todo indica que la referencia fue CACEI, quien como ya dijimos estableció los contenidos algebraicos que un ingeniero debe conocer. Recordemos que éstos son:

1. Números reales y complejos. 2. Polinomios. 3. Sistemas de ecuaciones lineales. 4. Matrices y determinantes. 5. Estructuras algebraicas. 6. Espacios vectoriales. 7. Espacios con producto interno. 8. Transformaciones lineales.

Al compararlos con los del programa institucional, están ausentes dos de ellos, Estructuras algebraicas y Espacios con producto interno.

Como se ha mostrado, los diseñadores de este programa tomaron en consideración al menos dos elementos para formularlo: CACEI y el modelo curricular de la institución. También, de manera implícita, aparecen las consideraciones personales de los participantes en esta tarea: la versión curricular que se desprende es la tradicional, pues se limita a incluir el qué se va a enseñar (expresado mediante una seriación de temas), para qué se enseñará (el análisis de los conceptos básicas de la teoría de ecuaciones y del álgebra lineal para aplicarlos en los diversos problemas de las ciencias y técnicas relacionadas con la ingeniería), y el cómo se realizará la enseñanza (medios).

Respecto a la sección asignada a los SEL, vamos a mostrar primero cuál es el tratamiento propuesto para ellos en los programas de materia de álgebra de diversas ingenierías en algunas de las principales universidades de México. Concentramos la información en la Tabla IV.1.

Tabla IV.2 Tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales en diversas instituciones educativas mexicanas

Institución, facultad, carrera	**Qué se estudia de los SEL/total de horas aula**	**Objetivos /*Sugerencias Didácticas***	**Bibliografía sugerida**
Univ. Autónoma de Baja California Facultad de Ingeniería, Mexicali. Carreras: Ing. en Computación, Civil, Industrial y Electrónica	1. Matrices 2. Sistemas de ecuaciones lineales 3. Eliminación de Gauss-Jordan 4. Sistemas Homogéneos **6 horas**	Emplear el álgebra lineal como una herramienta para la solución de problemas de ciencias e ingeniería representados mediante sistemas de ecuaciones en forma ordenada y creativa. *No hay sugerencias didácticas.*	No hay
Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería, México, D.F. Carreras: Ing. Civil, Química	1. El sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático de problemas. Definición de ecuación lineal y de su solución. Definición de sistema de ecuaciones lineales y de su solución. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales en cuanto a la existencia y al número de soluciones 2. Sistemas homogéneos y soluciones triviales 3. Sistemas equivalentes y transformaciones elementales 4. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss **12 horas**	El alumno formulará, como modelo matemático de problemas, sistemas de ecuaciones lineales y los resolverá aplicando el método de Gauss. *Exposición ora.l Lecturas obligatorias. Exposición audiovisual. Trabajos de investigación. Ejercicios dentro de clase. Ejercicios fuera del aula empleo de nuevas tecnologías.*	1.Solar G., Eduardo y Speziale de G., Leda Apuntes de Álgebra Lineal 2. Godínez C., Héctor y Herrera C., Abel *Álgebra Lineal. Teoría y Ejercicios* 3. Williams, Gareth, *Linear Algebra With Applications*
Univ. Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, México, D.F. Carrera: Ingeniería Química	1) Solución de sistemas de ecuaciones lineales. Ejemplos. Matriz asociada a un sistema de ecuaciones. Operaciones elementales. Eliminación gaussiana 2) Consistencia de sistemas de ecuaciones lineales. Descripción del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 3) Sistemas homogéneos: propiedades del conjunto de soluciones. Motivación de los conceptos de generadores e independencia lineal **6horas**	El alumno descubrirá la necesidad de plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales en problemas que surgen al modelar un problema real en diversas áreas tanto científicas como humanísticas, así como la importancia que tiene una buena representación matricial del mismo, se familiarizará con sus conceptos, terminología y manejo. *Se recomienda motivar los conceptos y métodos a partir de ejemplos sencillos de sistemas de ecuaciones lineales, elevando paulatinamente el grado de dificultad de los mismos. Es importante considerar ejemplos provenientes de las ciencias e ingeniería. Para las proposiciones requeridas se recomienda motivarlas adecuadamente, esbozando su demostración y enfatizando las ideas involucradas.*	1. Anton, Howard Introducción al álgebra lineal. 2. Cullen*, Charles G. Linear Algebra with Applications, 3. Grossman, Stanley I. Álgebra lineal. 4. Hill Jr, Richard O. Álgebra lineal elemental con aplicaciones. 5. Johnson, L.W., J. T. Arnold y R. D. Riess. Introduction to Linear Algebra. 6. Kolman*, B. Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab 7. Lay*, David C. Álgebra lineal y sus aplicaciones, 8. Noble, Ben y J. W. Daniel. Álgebra lineal aplicada. 9. Strang, Gilbert. Álgebra lineal y sus aplicaciones.
Universidad de Guadalajara.	1.1 Introducción (dos horas)	Que el alumno sea capaz de resolver sistemas	BIBLIOGRAFÍA BÁSICA:

Centro Universitario de Ciencias e Ingeniería. Guadalajara, Jalisco. Carreras: Ingeniería Civil, Química, Computación, Industrial	1.2 Método de Gauss y Gauss-Jordan 1.2.1 Método de Gauss (3 hrs.) 1.2.2 Método de Gauss-Jordan (3 hrs.) 1.3 Interpretación Geométrica (1 hr.) 1.4 Existencia y unicidad de la solución de ecuaciones lineales (1 hr.) **10 horas**	lineales de ecuaciones, aplicándolos a las diferentes áreas del conocimiento, buscando de esta forma el aprendizaje significativo, utilizando diferentes herramientas de trabajo. *No aparecen sugerencias didácticas*	S. I. Grossman, Álgebra Lineal BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA: 1. G. Williams, Algebra Lineal con Aplicaciones, 2. G. Nakos, D. Joyner, Algebra Lineal con Aplicaciones, 3. B. Kolman, Algebra Lineal con Aplicaciones y Matlab, 4. D. C. Lay, Algebra Lineal con Aplicaciones, Prentice Hall, 5. F. Hitt, Algebra Lineal
Instituto Politécnico Nacional. Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas. México, D.F. Carrera: Ingeniería Industrial	1. Definición de un sistema de ecuaciones Lineales (media hora) 2. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas, consistentes e inconsistentes (hora y media) 3. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales (media hora) 4. Método de eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan (hora y media) 5. Solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante la inversa de la matriz (hora y media) 6. Regla de Cramer (hora y media) **7 horas**	Al finalizar la unidad el alumno · Diferenciará los sistemas lineales homogéneos, no homogéneos, consistentes e inconsistentes · Resolverá problemas específicos con sistemas de ecuaciones lineales *El tema se estudia de lo general a lo particular* · *Exposición del tema por parte del profesor* · *Presentación de ejemplos ilustrativos* · *Solución de ejercicios por parte de los alumnos, asesorados por el profesor dentro y fuera delase.* *Apoyo didáctico:* · *Pizarrón y gis* · *Libros de texto y consulta* · *Ejercicios de tarea complementarios* · *Fotocopiado* · *Acetatos y filminas* · *Uso de paquetería* · *Uso de la microcomputadora*	1. Howard Anton, Introducción al Algebra Lineal. 2. Stanley I. Grossman, Algebra Lineal. 3. Fraleigh y Bearegard, Algebra Lineal. 4. Ben Noble y J. M. Daniel, Algebra Lineal Aplicada. 5. F. E. Hohn, Algebra de Matrices. F. 6. Ayres, Matrices (teoría y problemas), 7. L. I. Ceja, Algebra Lineal con Aplicaciones. 8. J. Mortera S y G. Mercado Algebra Lineal.

Como ya se mostró, en la Universidad de Sonora se tienen asignadas diez horas para el desarrollo de los SEL en el aula, y los temas contemplados son:

a) Representación matricial.

b) Método de Gauss-Jordan

c) Sistemas consistentes e inconsistentes

Los objetivos asociados son conocer y aplicar un método que resuelva un sistema de ecuaciones lineales de cualquier tamaño, así como modelar problemas sencillos de Ingeniería, cuya solución exija resolver un sistema de ecuaciones lineales. La habilidad específica a desarrollar es resolver problemas de ingeniería cuyos modelos matemáticos sean sistemas de ecuaciones lineales.

Las sugerencias metodológicas consisten en sugerir al profesor que promueva el trabajo en equipo, la participación activa de los estudiantes poniendo especial atención al desarrollo de habilidades de carácter general, como aquellas relacionadas con la resolución de problemas, así como específicas de los métodos algebraicos cuando se resuelven problemas de ingeniería. Incorporará los recursos tecnológicos en la actividad cotidiana de los alumnos e incentivará el desarrollo de actividades fuera del aula.

Los datos de la Tabla IV.1 y los posteriores, fueron extraídos de los programas del curso de Álgebra de cada institución mostrada, disponibles en las correspondientes direcciones electrónicas que se muestran a continuación.

http://ingenieria.mxl.uabc.mx/

http://www.ingenieria.unam.mx/revplanes/planes2006/Civil/01/algebra.pdf

http://www.usc.es/estaticos/conectate/conectate_programas/901/13600_1.htm

http://mate.cucei.udg.mx/depto/materias/MT102_Algebra.html

http://www.upiicsa.ipn.mx/Carreras%20UPIICSA/Ingenieria%20Industrial/5pdf/5%20IMAG%20ALGEBRA%20LINEAL.pdf

Esto lo hicimos porque nos pareció importante tener una panorámica de qué es lo que se hace en otras universidades públicas del país, así como las similitudes y diferencias que pudieran encontrarse entre lo propuesto en ellas y la Universidad de Sonora; del noroeste del país seleccionamos a la Universidad Autónoma de Baja California por la influencia y reconocimiento que junto con la Universidad de Sonora, tienen en la región noroeste de México. El resto, Universidad de Guadalajara, Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Autónoma Metropolitana y el Instituto Politécnico Nacional por ser los centros educativos que congregan al mayor número de estudiantes de ingeniería en este país y que tienen una gran influencia académica en el resto de los centros de educación superior públicos mexicanos.

No incluimos los programas de los cursos por cuestión de espacio, pero de su lectura y análisis, lo primero que notamos en la similitud en cuanto a la estructura. Son básicamente los mismos apartados: datos de identificación, objetivos generales y específicos, un temario, horas asignadas a cada uno de los temas, habilidades que se espera sean desarrolladas por los estudiantes, sugerencias didácticas y de evaluación, y la bibliografía.

La práctica educativa en el nivel universitario ha llevado a que los programas de matemáticas presenten de manera esquemática y sintetizada el proceso de estudio que profesores y alumnos deberán realizar alrededor de algún tópico, y aunque existen consideraciones globales planteadas en los planes de estudio de las ingenierías, es poco frecuente que sean tomadas en cuenta. Un argumento vertido a favor de esta presentación de los programas de materia, es que aunque deben contener el espíritu del plan de estudios, deben, por otro lado, tener la suficiente apertura como para que sea viable y efectiva su implementación. Por nuestra parte, estamos convencidos que el programa de materia es una componente documental importante en la estrategia general de formación de un egresado de ingeniería; en la medida en que contiene la toma de postura respecto a muchos asuntos importantes, debe ser diseñado y estudiado con cuidado.

El problema del diseño de los programas de materia o de los planes de estudio, no se restringe a su formato, a saber qué rubros se incorporan o se eliminan; como lo hemos venido repitiendo, hay un trasfondo de concepciones implícitas, que trataremos de hacer explícitas para el caso particular que nos ocupa, los sistemas de ecuaciones lineales.

Centrando entonces nuestro análisis en la parte correspondiente a los SEL, de acuerdo con los datos expuestos en la Tabla IV.1 y en el programa de la Universidad de Sonora, observamos que hay variantes de diferente naturaleza, una de las cuales es el tiempo asignado al trabajo en el aula. En las facultades donde se asignan entre seis y siete horas, se debe a que solamente aparece un curso de álgebra en el plan de estudios; en donde se asignan entre 10 y 12 horas, se cuentan dos cursos de álgebra, pero aquí la excepción es la Universidad de Sonora, la cual cuenta con una asignación de 10 horas y un curso de álgebra. Nos llamó la atención el caso del Instituto Politécnico Nacional, donde la asignación de los tiempos es mucho más desglosada, hasta por periodos de media hora para algunos subtemas.

En los temarios, el núcleo básico del contenido propuesto es la definición de SEL, y al menos un algoritmo para resolverlos empleando la representación matricial; sin embargo, hay interés en todos los programas por mostrar una coherencia interna desde el punto de vista de los contenidos algebraicos hay una preocupación común, la aplicabilidad de lo estudiado en la resolución de problemas de ingeniería. La pregunta que surge es si las configuraciones epistémicas expresadas en los programas son las idóneas para conseguir ese objetivo; pues los SEL se establecen de inicio como un conjunto de relaciones de igualdad entre números y variables. Encontrar su solución consiste en utilizar una serie de operaciones y propiedades de esas operaciones, lo cual requiere de adentrarse en las estructuras algebraicas formales.

Para desarrollar la configuración epistémica planteada en esos programas, se necesita introducir un lenguaje algebraico apropiado, una serie de conceptos asociados, propiedades, argumentos, procedimientos, y, por supuesto, las situaciones que permitan la interrelación de todos los objetos anteriores y que se advierte están contempladas dentro de la generalidad y rigor de la actividad algebraica. Nuevamente planteamos la interrogante de si esas son las configuraciones idóneas para promover el que los estudiantes puedan resolver problemas de ingeniería aplicando los conocimientos aprendidos.

Creemos que expresada la idea en esos términos, la de la aplicabilidad, se evidencia que las situaciones problemáticas no son consideradas también como objetos matemáticos. Esta diferencia conceptual no es elemental, pues puede tener consecuencias importantes para los procesos de enseñanza y aprendizaje; si un profesor toma como referencia la configuración epistémica planteada en esos programas, lo más probable es que planifique un proceso de estudio, como ya dijimos, organizado mediante configuraciones formales o estructurales del álgebra y de las prácticas operativas y discursivas que promoverá emergerá un objeto SEL acorde con ellas.

Otra variante la hallamos en las modalidades de conducción o sugerencias didácticas, pues mientras en algunos programas no aparecen, en otros recomiendan que el profesor intente de algún modo motivar los conceptos y métodos a través de ejemplos sencillos, otros más dan una lista de actividades a desarrollar, como la exposición del profesor, trabajos de investigación, solución de ejercicios dentro y fuera de clase, etc.

Vamos a exponer la configuración epistémica que encontramos en el caso de la Universidad de Sonora para los SEL. Los objetos matemáticos que ahí identificamos son:

a) Lenguaje:

- Verbal: Enunciados de las situaciones-problemas
- Gráfico: No aparece explícitamente
- Simbólico: las matrices como forma de representación de un sistema de ecuaciones lineales; los propios SEL como representación algebraica de un problema de ingeniería.

b) Las situaciones-problemas:

- Problemas contextualizados, planteados de manera implícita, cuando se habla de problemas de ingeniería que se resuelvan mediante SEL;
- Ejercicios o ejemplos descontextualizados de solución de SEL.

c) Conceptos:

-Definiciones de SEL, coeficientes, incógnitas, constantes, tamaño y solución, sistemas consistentes e inconsistentes, matriz, representación matricial, matriz de coeficientes, matriz aumentada, operaciones entre ecuaciones, operaciones entre renglones de una matriz, sistemas equivalentes, así como qué significa un SEL como modelo matemático de un problema de ingeniería.

d) Procedimientos:

-Método de Gauss-Jordan, en el cual encontramos como subprocedimientos a las operaciones que se realizan entre los renglones de una matriz para llevarla a su forma escalonada reducida.

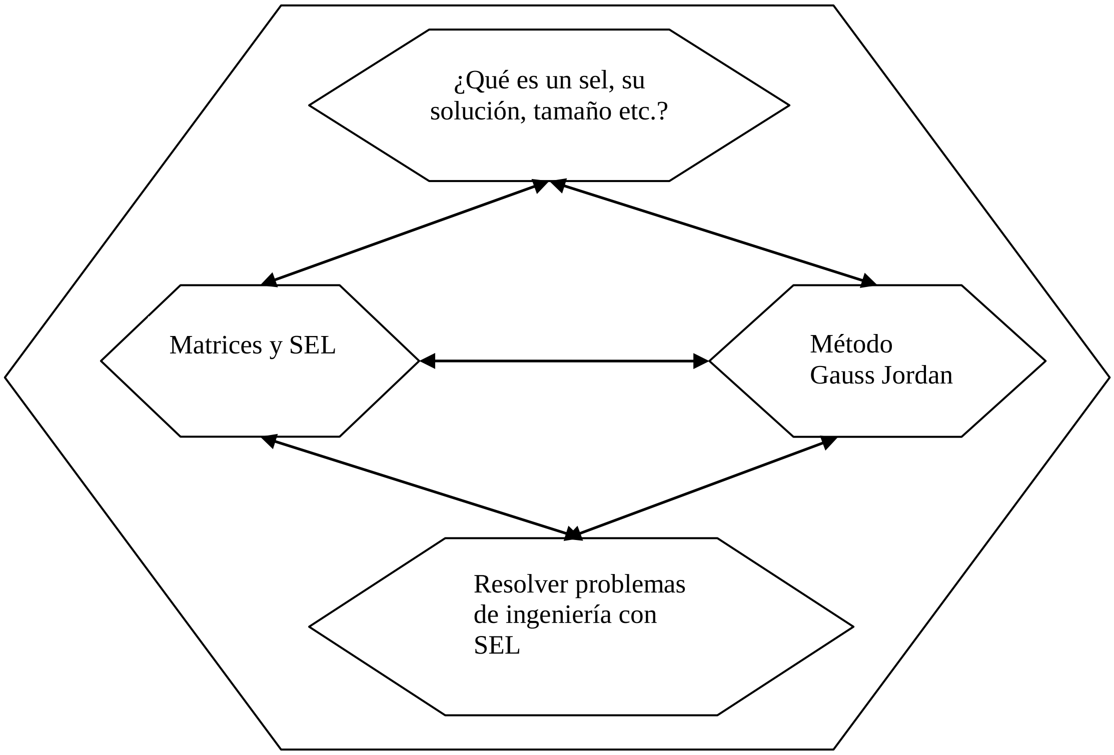
e) Propiedades o proposiciones:

-La equivalencia de SEL, propiedad en la cual se basan los métodos algebraicos de solución.

f) En cuanto a los argumentos, no aparecen.

Esta manera de representar a los objetos componentes de la configuración planteada por el programa, no muestra la interrelación que existe entre ellos, ni la serie de configuraciones didácticas que podrían identificarse; así es que retomamos la idea expresada por Godino, Font y Wilhemi (2007), para representar globalmente la estructura propuesta, mediante el siguiente esquema.

Figura IV.3 La configuración epistémica



Empleamos a propósito los hexágonos en cada una de las configuraciones identificadas, para remarcar la identificación e interrelación de los seis objetos matemáticos primarios; la figura hexagonal no se refiere necesariamente a un hexágono regular, pues ésta podría, en un momento dado, significar que las seis componentes están equitativamente distribuidas en la configuración. Cada configuración, dependiendo de sus intencionalidad, puede requerir la presencia y uso de alguno(s) de los objetos matemáticos primarios en mayor proporción. Lo que sí es importante, es la colocación que hicimos de los hexágonos más pequeños, pues con ello estamos indicando que, de acuerdo al programa, hay una secuenciación propuesta para el tratamiento de los contenidos.

Dependiendo de la secuencia de configuraciones epistémicas seleccionadas para un proceso de estudio se identifica la trayectoria epistémica que este seguirá. Dentro de un mismo programa de materia, un profesor puede escoger las mismas configuraciones que otro, pero secuenciarlas de manera distinta; esto da como resultado que las trayectorias epistémicas de ambos profesores sean diferentes.

Pasaremos ahora a analizar la segunda de las fuentes que intervienen en la constitución del significado referencial.

IV. 3 Tratamiento de los SEL en textos

Al revisar la bibliografía que aparece en el programa del curso, encontramos, como era de esperarse, que se recomiendan textos de álgebra lineal, la mayor parte de los cuales son de origen estadounidense (Lay, Kolman, Nakos y Anton). Cada autor, en la introducción de su libro, declara haber incorporado todas o algunas de las sugerencias emitidas por el Linear Algebra Curriculum Study Group, LACSG por sus siglas, el cual desarrolló su trabajo fundamentalmente durante la década de los noventa en los Estados Unidos de América.

La influencia que el LACSG tuvo en el diseño del curriculum de álgebra lineal no es exclusiva a su país de origen, pues en la revisión de programas de álgebra y álgebra lineal para ingeniería, realizada en algunas universidades de nuestro país (Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Autónoma Metropolitana, Universidad de Baja California, Universidad de Sonora) encontramos que en todos se proponen, ya sea como bibliografía básica o complementaria, los cuatro textos ya mencionados. Este hecho nos lleva a suponer que en mayor o menor medida, son libros que se usan en las universidades mexicanas.

Por tales razones consideramos importante conocer, aunque sea brevemente, algunos antecedentes del LACSG, así como las sugerencias que hicieron para la elaboración del curriculum de álgebra lineal de las universidades e institutos de educación superior norteamericanos.

Este grupo fue fundado por David Carlson, Charles R. Johnson, David C. Lay y A. Duane Porter en enero de 1990, y su primera actividad consistió en una amplia mesa de trabajo celebrada en agosto del mismo año, en la cual participaron veinte panelistas, miembros de la industria y la academia estadounidense. Como resultado de esa interacción, se publicó una serie de cinco recomendaciones, que incluía un *core syllabus* para un primer curso de álgebra lineal universitaria. A partir de esa fecha, el LACSG ha efectuado diferentes reuniones con temáticas que giran alrededor del curriculum de esa disciplina.

Las cinco recomendaciones del LACSG son:

1) El plan de estudios y la presentación de un primer curso de álgebra lineal deberá responder a las necesidades de sus disciplinas usuarias.- Esto significa que un primer curso debería reconocerse como un curso de servicio para una amplia variedad de disciplinas, de las cuales destacan las ciencias de la computación, ingeniería eléctrica, de sistemas, aeronáutica, física, economía, estadística, investigación de operaciones, así como algunas áreas dentro de la propia matemática. Las generalizaciones y otros aspectos solamente deberán incluirse si el tiempo lo permite o hacerlo para aquellas instituciones con requerimientos de esa naturaleza.

Si bien algunas de las aplicaciones no permiten su tratamiento completo en el aula, es necesario presentarlas de tal manera que contribuyan a dar una idea de que el álgebra lineal es el área de la matemática más potencialmente útil que estudiarán en su paso por la universidad.

El nivel y la forma de la presentación del material a estudiar deberán tomar en consideración el bagaje previo de los estudiantes, tanto en conocimiento como en habilidades, así como la forma en que podrán usar posteriormente sus conocimientos. Varias de las disciplinas usuarias han remarcado la necesidad de que el curso de álgebra lineal sea sólido, intelectualmente retador, con definiciones cuidadosas y enunciados de teoremas que muestren las relaciones existentes entre varios conceptos.

Es importante también tener contacto, desde las escuelas y facultades, con los profesionales de las disciplinas usuarias, así como el establecer relaciones entre los responsables de la impartición del álgebra lineal y los responsables de las carreras que la emplean, con la intención de que el curso resultante sea lo más valioso posible para los estudiantes.

2) Los departamentos de matemáticas deberían considerar seriamente orientar el primer curso de álgebra lineal hacia el estudio de las matrices. Tomando en consideración la gran importancia que durante el último cuarto de siglo ha mostrado el álgebra lineal como una herramienta para los científicos que laboran en la industria, un primer curso debería pensarse de tal modo que refleje su nuevo papel como una herramienta científica.

Esto significa menos énfasis en las abstracciones y más énfasis en la resolución de problemas y en las aplicaciones motivantes, lo cual no implica menos énfasis en el rigor en la demostración de teoremas, sino un cambio en el enfoque, que vaya de tener un curso abstracto, centrado en la misma álgebra, hacia un curso más práctico, orientado hacia las matrices. En él se deberá proceder desde lo concreto, desde lo práctico, hacia el desarrollo de los conceptos generales, principios y la teoría concomitante que simplifica, clarifica y hace tan poderosa y útil al álgebra lineal.

En términos de lo planteado anteriormente, ¿cuál debiera ser el corazón del plan de estudios? Los prerrequisitos para el curso que se propone a continuación provienen de la madurez que proporciona el estudio previo de dos semestres de cálculo; sus propósitos son alcanzar un dominio excelente de los tópicos nodales así como incrementar la capacidad para la solución de problemas.

Los tópicos que se proponen son:

a) Suma y Multiplicación de Matrices. Esto incluye los tópicos clásicos sobre suma de matrices, multiplicación por un escalar, multiplicación de matrices, transposición, propiedades algebraicas como la asociatividad de la multiplicación; operaciones con matrices particionadas; motivar la multiplicación de matrices y examinar cuidadosamente tres maneras de interpretar el producto matricial AB:

i) Ax como una combinación lineal de las columnas de A, con los coeficientes de x; cada columna de AB se obtiene multiplicando A por la columna correspondiente de B. Entonces, cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A, con los coeficientes de la correspondiente columna de B. Si D es una matriz diagonal, entonces AD es un escalamiento de las columnas de A.

ii) Similarmente, los renglones de AB son combinaciones lineales de los renglones de B.

iii) AB es una suma de productos exteriores (es decir, matrices de rango 1): $AB = columna_1(A)renglón_1(B) + ... + columna_k(A)renglón_k(B)$, donde a es una matriz de m renglones y k columnas y B tiene k renglones con n columnas.

Tiempo estimado: 3 días.

b) Sistemas de Ecuaciones Lineales.- Donde se contempla Eliminación gaussiana, matrices elementales. Formas escalonada y escalonada reducida. Existencia y unicidad de las soluciones. Matrices Inversas. Reducción de renglones interpretada como una factorización LU.

Tiempo estimado: 4 días.

c) Determinantes.- Cálculo de determinantes de matrices de 2x2 y 2x2, encontrados a partir de plantear la solución de SEL de 2x2 y 3x3. Ilustración de las propiedades más comunes, evitando las demostraciones formales. Explorar el uso de determinantes así como las dificultades en su cálculo. Principales tópicos: desarrollo por cofactores, determinantes y operaciones con renglones, det AB= det A det B y la Regla de Cramer (para mostrar la sensibilidad de las soluciones de Ax=b).

d) Propiedades de R^n.- Introducir R^n como un conjunto de n-adas y no como un espacio vectorial formal. Definir la suma de vectores y el producto punto, pero no es necesario probar formalmente todas sus propiedades. Hacer un énfasis geométrico fuerte en la presentación de este material.

i) Combinaciones lineales: dependencia e independencia lineal.

ii) Bases de R^n.

iii) Subespacios de R^n. Bases y dimensión, espacio renglón y espacio columna (rango de A como un mapeo), espacio nulo,.
iv) Matrices como transformaciones lineales
v) Rango: rango por renglones = rango por columnas, productos, conexiones con submatrices invertibles.
vi) Sistemas de Ecuaciones Lineales: teoría sobre la solución de sel, rango + nulidad = número de columnas.
vii) Producto interior: longitud y ortogonalidad, conjuntos y bases ortogonales y ortonorlmales, matrices ortogonales.

e) Eigenvalores y eingenvectores. Dada su importancia hay que cubrir completamente este tema. Los eingenvectores pueden introducirse y motivarse usando ejemplos geométricos.
i) La ecuación $Ax = \lambda x$.
ii) El polinomio característico y la identificación de algunos coeficientes (traza, determinante); multiplicación algebraica de eigenvalores.
iii) Eigenespacios, multiplicidad geométrica.
iv) Similaridad.
v) Matrices simétricas: diagonalización ortogonal; formas cuadráticas.

f) Más sobre Ortogonalidad.- Incluye los tópicos comunes con un fuerte énfasis geométrico: proyección ortogonal sobre un subespacio; proceso de ortogonalización de Gram-Smidt y la interpretación de la factorización QR; solución por mínimos cuadrados de un sistema inconsistente y su aplicación al ajuste de datos.

g) Tópicos suplementarios.- Dependiendo del tiempo, necesidades e intereses de los estudiantes, así como de los objetivos del curso se recomienda incorporar el uso de computadoras en los cálculos (ver también la recomendación 5).

Como tópicos suplementarios: espacios vectoriales abstractos, transformaciones lineales, matrices definidas positivas, reducción de una matriz simétrica a una diagonal por congruencia, norma de matrices. Algunas aplicaciones como Cadenas de Markov, modelos de entrada-salida, matrices de Leslie, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias, programación lineal.

3) Las facultades deberían considerar las necesidades e intereses de los estudiantes como aprendices. La investigación que se ha realizado sobre enseñanza y aprendizaje nos sugiere:

i) Un primer curso de álgebra lineal debe tener como principio básico partir de ejemplos concretos y prácticos hacia los conceptos generales (lo que ya se propuso en la recomendación 2), y

ii) El aprendizaje de los estudiantes mejorará si los involucramos activamente en la solución de problemas, el establecimiento de conjeturas y en su comunicación con los demás. Recomendamos a los investigadores, incluyendo aquellos que son matemáticos, a estudiar aspectos relacionados con las estrategias de enseñanza, aprendizaje efectivo, la abstracción y el papel de las aplicaciones, todo con la intención de que lo puedan aplicar en la enseñanza del álgebra lineal.

4) Las facultades deberían impulsar el uso de la tecnología en un primer curso de álgebra lineal.- El uso de las computadoras y las super calculadoras para las tareas y los proyectos, puede reforzar los conceptos, contribuir al descubrimiento de nuevos conceptos y hacer factible la solución de problemas aplicados reales. Existe mucho software disponible que no requiere de experiencia computacional previa.

5) En cada curriculum matemático, debería ser prioritario al menos un segundo curso de teoría de matrices-álgebra lineal. Se pueden diseñar diferentes tipos de segundos cursos: espacios vectoriales abstractos, análisis matricial-álgebra lineal aplicada; álgebra lineal numérica. Finalmente se recomienda considerar la posibilidad de expandir el tradicional curso de álgebra lineal con duración de un semestre, a un curso con duración anual, tal y como es común en otros países.

Algunos de los líderes del grupo escribieron posteriormente textos para la enseñanza universitaria; otros autores han incorporado en las ediciones más recientes de sus obras, modificaciones acordes, desde su punto de vista, con las recomendaciones del Grupo, lo que nos da una idea del impacto de su trabajo.

De los libros cuyos autores ya mencionamos al inicio de esta sección, seleccionamos dos, para revisar sus planteamientos respecto a los SEL. EL primero de ellos es el de

Lay, C. David (2001), quien señala, como características pedagógicas distintivas del mismo, las siguientes:

a) Contiene una amplia selección de aplicaciones del álgebra lineal a la ingeniería.
b) Se da un fuerte énfasis a los aspectos geométricos, es decir, cada concepto considerado como principal, es ilustrado geométricamente.
c) Se presenta una selección de ejemplos seleccionados cuidadosamente, de tal manera que los estudiantes puedan estudiarlos autónomamente.
d) Los resultados importantes se enuncian como teoremas, los cuales son demostrados de la forma más comprensible posible para los alumnos.
e) Se incluye una serie de problemas prácticos antes de cada grupo de ejercicios.
f) Existe una abundante provisión de ejercicios que van desde sencillos cálculos hasta preguntas conceptuales, pues esta parte del diseño busca enseñar a entender, más que mecanizar.
g) Están planteados una serie de los llamados “ejercicios escritos”, los cuales pretenden que los estudiantes desarrollen la habilidad para escribir afirmaciones matemáticas coherentes en su lengua materna.
h) Se incluyen temas de cómputo, debido al impacto que en el desarrollo y práctica del álgebra lineal han tenido las computadoras. Por ejemplo hay ejercicios para ser resueltos con ayuda de cualquier “programa para matrices” (MATLAB, Maple, Matemática, MathCad, Derive, o calculadoras programables).

En cuanto a los Sistemas de Ecuaciones Lineales, como nota relevante, se asegura que con mucha frecuencia, en el trabajo práctico, se presentan SEL inconsistentes, lo que lleva a tener que plantear el problema de cómo obtener “la mejor solución posible” a un sistema que no tiene solución.

El estudio de los SEL está planteado en el Capítulo I del libro, y su contenido temático es el siguiente:

I ECUACIONES LINEALES EN ÁLGEBRA LINEAL

Ejemplo introductorio: modelos lineales en economía e ingeniería

1.1 Sistemas de ecuaciones lineales

1.2 Reducción por filas y formas escalonadas

1.3 Ecuaciones vectoriales

1.4 La ecuación de matrices AX=b
1.5 Conjuntos solución de sistemas lineales
1.6 Independencia lineal
1.7 Introducción a las transformaciones lineales
1.8 La matriz de una transformación lineal
1.9 Los modelos lineales en negocios, ciencias e ingeniería
Ejercicios suplementarios

El ejemplo introductorio que se señala al inicio del capítulo, consiste en la descripción anecdótica del trabajo que realizó a fines del verano de 1949 el profesor de Harvard, Wassily Leontief, cuando puso en práctica su famoso modelo para la economía norteamericana, consistente en un SEL de 500 ecuaciones con 500 incógnitas. Además se plantean de manera muy general otro tipo de situaciones que también se pueden modelar mediante SEL:

a) el caso de la prospección petrolera.-Ésta consiste en la búsqueda de depósitos petrolíferos que hacen barcos equipados con potentes computadoras. Los equipos de cómputo deben resolver miles de SEL diariamente, provenientes de datos sísmicos obtenidos por ondas de choque bajo el agua, las cuales son producidas por explosiones con cañones de aire. Al rebotar las ondas en las rocas situadas bajo la superficie del agua, se miden mediante unos aparatos conocidos como geófonos, los cuales están sujetos a cables de una milla de largo situados en la parte trasera del barco.
b) Programación lineal. En este apartado se afirma que las situaciones que se desprenden de las decisiones gerenciales también son susceptibles de modelarse mediante SEL. Específicamente se menciona el caso de la industria aeronáutica, que emplea modelos lineales para el tráfico de vuelos, tripulaciones y servicios de mantenimiento.
c) Redes eléctricas. Aquí se informa de la posibilidad de utilizar software de simulación para el diseño de circuitos eléctricos y microchips que tienen millones de transistores. El diseño del software depende de técnicas del álgebra lineal y concretamente del uso de los SEL.

Como puede observarse, las situaciones señaladas están en un nivel descriptivo muy general y seguramente que las razones por las que se incluyeron fueron para generar algún tipo de motivación e interés en los estudiantes. Posteriormente, se empiezan a desarrollar las ideas del resto de las secciones del temario.

Retomando el recurso de análisis que usamos en el caso del programa de la materia, vamos ahora a describir una posible trayectoria epistémica de los SEL, a partir de la estructura global del tema que aparece en Lay. En el capítulo correspondiente del texto hay nueve secciones y de ellas solamente analizaremos en detalle tres, que son las que se corresponden con los aspectos tratados en el programa oficial de la materia.

El orden en el que las mencionamos es el mismo en el que aparecen en el texto.

Configuración epistémica 1.- Sistemas de ecuaciones Lineales;
Configuración epistémica 2.- Reducción por filas y formas escalonadas;
Configuración epistémica 3.- Los modelos lineales en negocios, ciencias e ingeniería.

Las cuales desglosamos a continuación:

Configuración epistémica 1. Sistemas de Ecuaciones lineales. Tiene como propósito SEL en un entorno sencillo y concreto, así como introducir un método sistemático para resolverlos. Los objetos matemáticos primarios identificados son:

a) Lenguaje:

-Verbal: Para expresar a los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones-problemas.

-Gráfico: Representaciones gráficas de SEL de 2x2 y las tres posibilidades de solución: única, infinitas y sin solución. Para los de 3x3 se ilustra el caso de un sistema con única solución y otro sin solución. También se usa un gráfico para plantear un problema de transferencia de calor en una placa.

-Simbólico: Representaciones algebraicas de SEL, representaciones matriciales.

b) Conceptos:

-Ecuación lineal, coeficientes, sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal; solución del sistema, conjunto solución, sistemas lineales equivalentes, consistentes, inconsistentes, matriz, matriz de coeficientes (o matriz coeficiente), matriz aumentada del sistema, tamaño de una matriz, matrices equivalentes por filas, matrices triangulares.

c) Procedimientos:

- Operaciones elementales de renglón; operaciones con las ecuaciones de un SEL, la estrategia básica para resolver un SEL es enunciada así: *"reemplazar un sistema por un sistema equivalente, (es decir, uno con el mismo conjunto solución), que sea más fácil de resolver".*

d) Propiedades:

-La propiedad básica utilizada es *"Si dos matrices aumentadas de dos sistemas lineales son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tiene el mismo conjunto solución".*

-La propiedad anterior está sostenida en propiedades de los números reales, que aunque no se explicitan, deben usarse para hacer la eliminación adecuada de las ecuaciones, o los ceros y unos en la matriz aumentada del sistema.

e) Argumentos:

-Los usados para justificar las propiedades anteriores, así como aquellos que permiten concluir por qué el sistema no tiene solución, o por qué tiene infinitas, o por qué tiene solamente una. También aparecen argumentos cuando se construyen los SEL a partir de situaciones en contextos no matemáticos, pues con ellos se justifica las relaciones que se construyen vía las ecuaciones del sistema.

-En la sección de problemas aparecen algunas aseveraciones que se pide sean justificadas con algún argumento desprendido de lo estudiado a lo largo de la sección.

f) Situaciones-problemas:

-La mayoría de las que aparecen son ejemplos, casi todos los conceptos están primero ejemplificados y después definidos; la única excepción es la de ecuación lineal.

-Problemas de práctica, los cuales son problemas escogidos por haber identificado que contienen cierto tipo de dificultades para los estudiantes.

-Aparecen dos tipos de ejercicios: elementales, que pueden resolverse con cálculos manuales, y los etiquetados para que puedan trabajarse con el auxilio de algún programa computacional, ya sea calculadora o computadora.

-Sólo hay un problema planteado en un contexto no matemático.

La configuración anterior la podemos calificar como *ilustrativa-adiestrativa*, pues un aspecto que se destaca en ella es la presentación que paralelamente se va haciendo entre la introducción de los conceptos y la ejemplificación de los mismos; solamente se tratan sistemas cuadrados, hasta de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas; se nota la preocupación por, primero, familiarizar al estudiante, vía la ejemplificación, con el lenguaje y procedimientos usados en los SEL, para luego ejercitarlo en lo que supuestamente acaba de aprender: la resolución de SEL, y la teoría que empíricamente se ha podido formular vía la ejercitación, con un nivel bajo de formalización. La mayoría de los ejercicios planteados son del estilo de los resueltos en las exposiciones previas, aunque su grado de dificultad va aumentando, hasta llegar al último de los problemas, el cual está planteado en un contexto no matemático, y en el que se pide que se construya el SEL que lo modela. Aún en este caso, se ejemplifica cómo construir una de las ecuaciones del sistema.

Configuración 2. Reducción por filas y formas escalonadas. Tiene como objetivo refinar el método mostrado en la configuración anterior para tener entonces un algoritmo de reducción por filas o renglones, que permita analizar cualquier sistema de ecuaciones lineales. Además se podrán responder las preguntas formuladas alrededor de la existencia y unicidad de soluciones. Encontramos:

a) Lenguaje:

-Verbal: Para expresar a los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones-problemas.

-Gráfico: Aparece solamente una gráfica en la sección de problemas resueltos, usada para ilustrar la solución general a un SEL con 2 ecuaciones y tres incógnitas.

-Simbólico: Matrices como representación de SEL, SEL en su representación algebraica.

b) Conceptos: Matriz rectangular, formas escalonadas y escalonadas reducidas por renglones de una matriz, posición pivote de una matriz, fase progresiva del algoritmo de reducción por filas; fase regresiva del algoritmo de reducción por filas, pivoteo parcial, variables básicas o principales, variables libres, solución general de un sistema; descripciones paramétricas de conjuntos solución.

c) Procedimientos:

-Reducción por filas de una matriz.

d) Propiedades:

- Cada matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida.

-Teorema de existencia y unicidad para las soluciones de un SEL.

e) Argumentos:

-Del mismo tipo que los usados en la configuración 1, esto es, para justificar, de acuerdo a la forma escalonada reducida de una matriz, si tiene solución o no, y de qué tipo.

-En la sección de problemas aparecen algunas aseveraciones que se pide sean justificadas con algún argumento desprendido de lo estudiado a lo largo de la sección.

f) Situaciones-problemas: Se sigue exactamente el mismo esquema que en la Configuración 1, es decir aparecen:

-Ejemplos. Los conceptos están primero ejemplificados y después definidos.

-Problemas de práctica, los cuales, como ya dijimos, son problemas identificados previamente como difíciles para los alumnos.

-Aparecen dos tipos de ejercicios: elementales, que pueden resolverse con cálculos manuales, y los etiquetados para que puedan trabajarse con el auxilio de algún programa computacional, ya sea calculadora o computadora.

-Solamente hay un problema planteado en un contexto no matemático, que consiste en encontrar una función polinomial que interpole un conjunto de parejas de datos (velocidad, fuerza). El polinomio solicitado es de grado cinco, pero en un problema previo se construye el SEL cuya solución lleva a encontrar un polinomio interpolador de grado dos.

La configuración que acabamos de describir sigue el mismo principio de la anterior, ilustración-adiestramiento, pues introduce una definición que inmediatamente se ejemplifica y posteriormente se ejercita. Articulándola con la anterior, se ve el interés de que la exposición fluya de un grado de simplicidad menor a uno mayor. Es muy notoria la orientación hacia la ejercitación de los algoritmos.

Configuración epistémica 3.- Los modelos lineales en negocios, ciencias e ingeniería.

Siendo exhaustivos, en este apartado cabe la posibilidad de hablar de dos configuraciones, una por cada situación-problema propuesta. Éstas son:

1. Diseño de una dieta nutritiva para perder peso

Este es el problema típico de dietas, donde se proporcionan algunos alimentos con las correspondientes aportaciones de nutrimentos. La pregunta es qué cantidad de cada alimento deberá contener una dieta para que satisfaga determinados requerimientos nutricionales.

Se plantea la situación general, y posteriormente se ejemplifica mediante valores específicos con los cuales se construye el SEL, el cual se resuelve llevando la matriz a la forma escalonada reducida.

2. Ecuaciones lineales y redes eléctricas

En este caso se describe la situación general, pasando después a ejemplificarla con valores particulares, se construye el sistema correspondiente a esos valores y se resuelve, llevando la matriz a su forma escalonada reducida.

Como puede observarse, el esquema seguido es el mismo, las situaciones anteriores funcionan como ejemplos de problemáticas susceptibles de atenderse con la teoría de los SEL estudiada previamente.

Los objetos matemáticos son básicamente los mismos en ambos problemas:

a) Una situación-problema.

b) Lenguaje: verbal, algebraico, matricial.

c) Conceptos: los ya estudiados.

d) Procedimientos: eliminación de Gauss-Jordan.

e) Argumentos: para explicar la construcción del SEL.

f) Propiedades: las estudiadas en las secciones anteriores, pero sin hacerlas explícitas.

IV. 4 Comentarios finales sobre el significado referencial

Lo que mostramos en los apartados IV.2 y IV.3 nos dan evidencias para asegurar que el significado referencial se construye con la influencia de elementos de diferente naturaleza. Más allá de las consideraciones propias de la disciplina, en este caso el álgebra lineal, entran en acción pretextos, fundamentos, observaciones, razones y argumentos, de los sujetos e instituciones que desde alguna instancia participan en el diseño de planes y programas, así como en la elaboración de los libros de textos que luego sirven de soporte a los cursos.

En el caso particular que nos ocupa, el significado referencial para los sistemas de ecuaciones lineales en la Universidad de Sonora, encontramos que el sistema de prácticas operativas y discursivas promovidas desde el programa de materia, están centradas en un empleo utilitario: conocer qué son los SEL, cómo se pueden resolver y en qué tipos de problemas de la ingeniería podemos usarlos.

En ese sentido, el texto que revisamos complementa la visión plasmada en el programa de la materia, puesto que el tratamiento que se hace ahí de los SEL, sigue el mismo esquema, tal y como puede verse en las tres configuraciones que se mostraron: se introduce un concepto y se ejemplifica; se presenta un procedimiento y enseguida se resuelven ejemplos. Posteriormente se pasa a la ejercitación.

Las situaciones-problema de la ingeniería se dejan para el final, como una muestra de la potencia que tienen los objetos matemáticos previamente estudiados.

Capítulo V. El significado pretendido

V.1 Introducción

De acuerdo con el EOS, el significado pretendido está constituido por el sistema de prácticas actuativas y discursivas que surgen de la planeación del profesor, por la red de significados que ha seleccionado, secuenciado y organizado para planificar su clase, una vez que ha estudiado el significado referencial. Se trata de un significado institucional pretendido, puesto que el profesor, en el papel de representante de la institución escuela, lo llevará al aula, espacio en el cual realizará las actividades que considere pertinentes para que dicho significado sea construido por los estudiantes.

En el caso que nosotros investigamos, ubicamos un momento especial en la construcción del significado pretendido. El hecho de que un grupo de profesores hayan sido convocados por la institución (Departamento de Matemáticas), responsable de la impartición del curso de álgebra, para realizar un estudio colegiado previo, de alguna manera modificó las consideraciones y concepciones que de manera individual hubieran podido realizar los profesores.

La serie de actividades efectuadas por el grupo de maestros, permitió que sus significados personales fueran modificados, pues el diseño bajo el cual se trabajó, incorporó en las discusiones cotidianas aspectos que iban mucho más allá de lo disciplinar, o del compartir experiencias. No menospreciamos esos elementos, lo que queremos destacar es el hecho de que la planeación del trabajo que el grupo realizó, hizo que se discutieran ésos y otros elementos que llevaron a un verdadero proceso de estudio del álgebra para los estudiantes de ingeniería de la Universidad de Sonora.

Debemos reconocer que estos procesos de estudio son lentos, requieren de apoyos que no siempre es posible encontrar o mantener por mucho tiempo, sobre todo porque, como ya se señaló en otros apartados, los responsables administrativos exigen resultados que justifiquen los recursos que se emplean. Y en esos resultados o productos requeridos, no se alcanza a ver que cuando los profesores están trabajando en esos entornos, en realidad están participando en procesos de formación cuyos alcances pueden ser muy positivos, pero que son a largo plazo.

Para estudiar las transformaciones hechas al significado referencial de los SEL, las cuales tuvieron como resultado el significado pretendido, vamos a hacer primero una descripción sucinta de la dinámica bajo la cual trabajó el grupo de profesores en estudio, y posteriormente vamos a centrarnos en el análisis, vía las herramientas teóricas del EOS que ya hemos usado antes, de los diversos materiales tales como actividades didácticas, relatorías de clase, entrevistas, etc., que fueron propuestas por los profesores participantes en el proyecto, los cuales están publicados, con acceso libre en la dirección electrónica http://www.uson.mat.mx/proyectos/ . Evidentemente tuvimos que hacer una selección previa de ellos para su presentación en esta tesis, sin embargo, es posible hacer un seguimiento más detallado de los mismos en la dirección ya anotada. Ese seguimiento da una mejor idea de las variaciones o adecuaciones que fueron surgiendo como producto de la discusión de los maestros participantes alrededor de las distintas temáticas.

V.1. El colegiado de profesores y el Proyecto de Seguimiento de los cursos de álgebra bajo el esquema del Nuevo Modelo Curricular en la División de Ingeniería

En el capítulo denominado Contexto y Sujetos de Investigación, describimos cómo y por qué razones se integró el grupo de profesores que desarrolló el *"Proyecto de Seguimiento de la Impartición de los Cursos de Álgebra bajo el esquema del Nuevo Modelo Curricular en la División de Ingeniería*, el cual ha venido desarrollando actividades desde el semestre 2005-1 hasta la actualidad (semestre 2008-1), aunque aquí solamente reportamos las observaciones realizadas durante los dos semestres del 2005 y el primero del 2006.

En proyecto mencionado, además de los intereses institucionales por parte del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, de prestar un servicio de calidad al resto de los Departamentos universitarios, se toma como marco esta materia para conocer las consecuencias y cambios que en la labor docente trae consigo la implantación de un nuevo modelo curricular. Es decir, se trata de saber cuál es la concreción, que en el caso del álgebra, se dará a los ordenamientos de carácter general estipulados por el modelo curricular universitario, si el nuevo curso se corresponde con las necesidades de los ingenieros, si se hace necesario o no modificar las prácticas docentes; si la respuesta a este último cuestionamiento es afirmativa, saber en qué dirección tendrían que darse esos cambios.

En este sentido, se declara como objetivo general el que los profesores participantes reflexionen sobre sus prácticas docentes, y lleven a cabo las acciones que se consideren pertinentes para hacer modificaciones acordes a los lineamientos del nuevo modelo curricular, en el marco del curso de Álgebra de los programas de Ingeniería.

De ese objetivo general se desprenden los siguientes objetivos específicos:
i) Promover la reflexión y el análisis sobre la manera en que los profesores interpretan e implementan los contenidos temáticos señalados en el programa.
ii) Analizar la pertinencia y viabilidad del programa de la materia.
ii) Proponer diseños de situaciones problemáticas para motivar la construcción de los conceptos
iii) Discutir sobre los niveles de conocimiento esperados
iv) Establecer las estrategias, valores y habilidades que el alumno debe desarrollar
v) Analizar distintas modalidades de conducción de los procesos de enseñanza y aprendizaje
vi) Proponer formas de evaluación
vii) Diseñar y recopilar recursos y materiales de apoyo
viii) Implementar actividades didácticas en las que se haga uso sistemático de nuevas tecnologías
ix) Establecer acciones de vinculación con los docentes de los diferentes programas de la División de Ingeniería que permitan ampliar nuestra visión acerca de los requerimientos de álgebra que demanda el nuevo modelo curricular en su disciplina
x) Promover acciones de capacitación y actualización de profesores

Las acciones que se derivaron de los objetivos expuestos fueron éstas:

- Sesiones de trabajo de periodicidad semanal donde los profesores participantes pudieron compartir sus propuestas y experiencias en el aula. Se trató de involucrar a los profesores participantes en el proyecto en un proceso de reflexión conjunta sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, conocimiento de tecnología, diseño de materiales, experimentación, etc. con la intención de que se fuera concretando en el mejoramiento gradual de nuestra práctica docente.

- Visitas a empresas de la localidad, con el propósito de conocer procesos de producción en ingeniería, así como tener entrevistas con egresados de ingeniería para conocer aspectos de su práctica profesional.
- Entrevistas con profesores de los cursos específicos de ingeniería, para saber el tipo de conocimientos algebraicos que requieren que sus estudiantes manejen en esas materias.
- Participación en dos cursos de actualización en uso de recursos tecnológicos en la enseñanza del álgebra lineal: uno con Cabri y otro con la calculadora Voyage 200

Cronológicamente, las acciones que los profesores fueron desarrollando las agrupamos así:

i) Semestre 2005-1.- Se discuten y establecen los objetivos del proyecto. El primer punto clave que se aborda es de qué manera lo establecido en el nuevo modelo curricular de la Unison impactará sus actividades, cuáles son los cambios y modificaciones que deberán realizar en su actuar cotidiano en el aula. Otros puntos importantes que se llevan a la reflexión conjunta son el nuevo programa de la materia, el enfoque, la incorporación de los recursos tecnológicos en el aula, los tiempos de dedicación a cada uno de los temas del programa.

Detectamos varios momentos importantes durante este periodo de observación, sobre todo por las temáticas en discusión. De ellas hay tres que se constituyeron en el consenso del grupo de trabajo, consenso en el sentido de que todos los participantes reconocieron la importancia de que estuvieran incluidas en el desarrollo cotidiano del curso, y se comprometieron a hacerlo.

Éstas fueron:

a) Uso de los problemas en la enseñanza del álgebra. Las discusiones que se dieron estuvieron centradas en cuál era el papel que se daría a los problemas. Todos los participantes estaban de acuerdo en la importancia de trabajarlos en el aula, sobre todo aquellas situaciones que permitieran mostrar que los SEL, resultaban de utilidad en las ingenierías. Las diferencias eran en qué momento hacerlo, se reproducía pues la discusión que ya se ha dado en Matemática Educativa sobre el papel que deben de tener los problemas o mejor dicho, las situaciones problemáticas, en la enseñanza del álgebra.

Básicamente eran dos las posiciones: la primera, que sugería estudiar primero los contenidos matemáticos y luego ver problemas donde se aplicaran esos contenidos en situaciones de la ingeniería; la segunda cuyos argumentos versaban sobre la posibilidad de escoger situaciones problemáticas adecuadas, planteadas en contextos de ingeniería, a partir de los cuales pudieran desprenderse los conceptos, argumentos, proposiciones, etc., sobre los SEL.

Finalmente los profesores que sostenían la primera posición, mostraron disposición por conocer la segunda de las alternativas; una vez que la conocieron, asumieron como reto el rediseñar sus actividades de esta manera.

b) Uso de la tecnología en la enseñanza del álgebra.- Al principio todos los participantes reconocieron que promovían el que sus estudiantes usaran la calculadora, y en algunos casos aislados la computadora. Las opciones de uso eran fundamentalmente dos: la primera de ellas como auxilio en los cálculos engorrosos, por ejemplo a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales, o de invertir matrices, o en el cálculo de determinantes. La segunda trataba de promover el surgimiento de los conceptos vía el diseño de actividades que, obviando los cálculos, dejaran espacio para discusiones conceptuales, o del propio surgimiento de conceptos o propiedades.

Los que sostenían la primera opción, mostraron disposición para conocer otras alternativas, y, cuando lo hicieron, declararon estar agradablemente sorprendidos, asumiendo inclusive como un reto el aprender a manejar la calculadora de la cual se disponía y diseñar actividades que la involucraran.

c) Uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra.- Todos los profesores reconocieron la necesidad de usar diferentes representaciones en la enseñanza; sin embargo, al ampliarse la discusión, se identificaron básicamente dos posturas: una de ellas privilegiaba lo algebraico, reconociendo que de cuando en cuando usaban una que otra gráfica para ilustrar ciertos conceptos, pero no como una práctica sostenida y constante.
La otra posición abogaba por la riqueza de significados que se promueven cuando en las actividades de enseñanza se usan consciente y planificadamente diversas representaciones.

ii) Semestre 2005-2. Durante este periodo se acuerda trabajar en el diseño de actividades para el aula, con las cuales se formará un banco que estará disponible para todos los profesores participantes. Se hace una distribución de los temas del programa y cada equipo de trabajo presenta sus productos. Al término del semestre se evalúan los resultados que se tienen, advirtiendo la disparidad de enfoques en las propuestas presentadas.

iii) Semestre 2006-1. En vista de los resultados del semestre previo, se acuerda que todo el grupo se dedique de nueva cuenta al diseño de actividades para el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales, las cuales se exponen periódicamente. Aquellos profesores que las ponen en práctica en sus aulas, escriben y presentan la relatoría de su experiencia y las reacciones de los estudiantes.

Se refrendan los lineamientos generales para el diseño de las mismas son los siguientes:
a) Abordar situaciones problemáticas de la ingeniería, considerando necesidades e intereses de los estudiantes para introducir los conceptos matemáticos incluidos en el programa de la materia.
b) Utilizar el mayor número de representaciones posibles para los objetos matemáticos involucrados en las situaciones problemáticas abordadas (lenguaje ordinario, gráficas, tablas, expresiones algebraicas, etc.).
c) Incorporar de manera planificada el uso de nuevas tecnologías, privilegiando el uso de hojas electrónicas, sistemas de cómputo simbólico y software de geometría dinámica, ya sea mediante el uso de la computadora o la calculadora simbólica.

Al término del tercer semestre, consideramos pertinente investigar las concepciones de los profesores respecto a aquellos elementos sobre los cuales se había venido insistiendo a lo largo de los tres semestres de trabajo colegiado, y que desde nuestra óptica influían en el diseño de sus propuestas didácticas.

Con este propósito, entrevistamos a los maestros participantes, organizando la información que obtuvimos. Para ello, los agrupamos en tres subgrupos atendiendo a su formación en matemática educativa y su experiencia en proyectos de docencia; el cuadro siguiente resume tal información:

Tabla V.1 Características de los sujetos de estudio

SUBGRUPO	EXPERIENCIA PROMEDIO COMO PROFESOR DE ÁLGEBRA EN INGENIERÍA	FORMACIÓN EN MAT. EDUCATIVA	PARTICIPACIÓN EN PROYECTOS DE DOCENCIA
A	15	Posgrado	Amplia
B	15	Ninguna	Ninguna
C	5	Diplomados	Poca, como colaboradores

Las categorías que nos sirvieron para estructurar la interpretación que cada grupo de profesores desarrolló respecto al saber algebraico a enseñar a un ingeniero, fueron:

a) qué es el álgebra;

b) el significado de saber álgebra;

c) el significado de enseñar álgebra;

d) el papel de los problemas en la enseñanza del álgebra;

e) el uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra y

f) el papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.

En las tablas siguientes se concentró la información por subgrupo:

Tabla V.2 Los profesores del Subgrupo A

PROFESORES DEL SUBGRUPO A	
Qué es el álgebra	Más que hablar de álgebra, de conceptos, reglas y fórmulas, se habla de la necesidad de concebir y desarrollar un pensamiento algebraico.
Significado de saber álgebra	Que un alumno sepa álgebra significa que se ha podido desarrollar en él una forma de pensar, un tipo de pensamiento que les permita, al verse enfrentados a una situación problemática, construir modelos matemáticos que resuelvan dicha situación, que los puedan operar, y que interpreten los resultados en el contexto del problema original.
Significado de enseñar álgebra	Diseñar un proceso de conducción que lleve a alcanzar el que los alumnos sepan álgebra, en el sentido explicado en el rubro anterior.
Papel de los problemas en la	Fundamental. A partir del planteamiento de

enseñanza del álgebra	situaciones problemáticas se pueden generar los conocimientos algebraicos que marca el programa. Lo ideal es encontrar contextos adecuados de la ingeniería para el diseño de los problemas.
Uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra	Fundamental. Amplia la gama de significados que los estudiantes pueden construir.
Papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.	Los emplean porque son muy útiles, especialmente para potenciar la construcción del conocimiento en juego. Se menciona básicamente el uso de calculadoras y computadoras.

Tabla V.3 Los profesores del Subgrupo B

PROFESORES DEL SUBGRUPO B	
Qué es el álgebra	El lenguaje de la matemática
Significado de saber álgebra	No lo habían pensado, pero debe ser que los estudiantes conozcan las reglas y algoritmos y que sepan identificar cuándo los van a emplear
Significado de enseñar álgebra	Explicar cuidadosamente los temas, con paciencia, auxiliándose de ejemplos de la ingeniería. Asegurarse de que los estudiantes practican lo que se les ha enseñado.
Papel de los problemas en la enseñanza del álgebra	Fundamental. Los alumnos deben conocer las aplicaciones del álgebra en la ingeniería. Siempre se buscan problemas de aplicación los cuales se trabajan generalmente al final de la teoría, aunque a raíz de lo que se ha discutido en el grupo de trabajo, vale la pena experimentar con los ejemplos que han expuesto algunos compañeros. Les preocupa el factor tiempo, pues un cambio así hace muy lenta la clase.
Uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza	Suena interesante, pero no siempre se puede. Cuando es posible, usan las gráficas para ilustrar, aunque con

del álgebra	la calculadora graficadora esto se puede mejorar.
Papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.	Antes sólo los usaban para agilizar cálculos, pero con las experiencias que se han compartido en las reuniones del grupo, creen que vale la pena intentarlo. Algunos manifiestan haberlo hecho tomando los ejemplos que se trabajaron en las reuniones. Expresan mucho interés en actualizarse en este rubro.

Tabla V.4 Los profesores del Subgrupo C

PROFESORES DEL SUBGRUPO C	
Qué es el álgebra	Un lenguaje que permite modelar problemas de la ingeniería
Significado de saber álgebra	Cuando dado un problema los alumnos sepan identificar los recursos algebraicos para resolverlo
Significado de enseñar álgebra	Enseñar a los estudiantes a comprender y resolver problemas de ingeniería en donde utilicen los recursos del álgebra, pero no con los recursos tradicionales de “yo te hago un ejemplo y tú tienes que hacer muchos similares”
Papel de los problemas en la enseñanza del álgebra	Fundamental. Las experiencias que se han compartido en el grupo de trabajo son de mucha utilidad. Ya se encuentran experimentando con algunos de los diseños propuestos.
Uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra	Han leído sobre ellos y comparten su utilidad, aunque a en ocasiones no tienen mucha claridad sobre como explotarlos.
Papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.	Ya las emplean, pues han participado en proyectos relacionados.

Como conclusiones de lo anteriormente expuesto, tenemos que la versión personal de los participantes en el grupo de trabajo está fuertemente permeada por su formación profesional y por su práctica docente. La noción que los maestros tienen de lo que es álgebra influye de manera determinante en su accionar con los aspectos contemplados en el resto de las categorías.

Por otro lado también observamos que el trabajo colegiado contribuyó a modificar posturas restringidas que de inicio sostuvieron algunos participantes, sobre todo en lo relativo a los posibles usos de los problemas, la tecnología y las representaciones matemáticas. Sin embargo, todo lo que se ha expuesto surge de las declaraciones y observación de los maestros cuando se encontraban en un conglomerado de iguales. En el capítulo siguiente expondremos qué fue lo que sucedió cuando los profesores se encontraban en el aula.

Desde nuestro punto de vista, en el contexto del problema originalmente expuesto, el proceso que observamos y analizamos resulta alentador en tanto provoca cambios, al menos en el discurso, de los profesores, los cuales juegan un papel clave en el proceso de transposición didáctica.

Como un comentario al margen, percibimos la necesidad de utilizar un lenguaje accesible que facilite la comprensión y la comunicación entre quienes en un momento dado son solo usuarios de los resultados de matemática educativa y los expertos en la disciplina. Esto fue muy evidente en las reuniones del colegiado; los matemáticos educativos tienen ya un lenguaje especializado que no es entendible por otras comunidades con las cuales es imprescindible establecer una comunicación fluida, principalmente el profesorado.

En el sitio electrónico que ya se mencionó, se cuenta, en la sección correspondiente a los SEL, con una serie de situaciones problema, con series de problemas, con relatorías de clase y con actividades didácticas planteadas con el uso de la calculadora Voyage 200.

Las posturas que se han señalado, tomaron concreción a la hora en que cada uno de los profesores expuso sus diseños didácticos ante el colegiado, y sus creencias y concepciones quedaron en evidencia cuando hicieron la relatoría de la puesta en escena de sus propuestas. Estos momentos resultaron muy aleccionadores para quien esto escribe, pues permitieron explorar la ontología de los objetos algebraicos que tienen los maestros, sus posturas respecto a su enseñanza y aprendizaje, así como sus significados personales, específicamente en relación a los SEL.

Resaltamos cómo este proceso permitió poner en juego las significaciones personales de los maestros, y tuvo como uno de sus productos la construcción de un significado institucional colectivo, el llamado significado pretendido.

V.2. Algunos diseños didácticos elaborados por los profesores participantes para los Sistemas de Ecuaciones Lineales

En lo que se ha dicho hasta ahora en este Capítulo, se ha tratado colateralmente lo relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección vamos a incluir tres actividades diseñadas por los maestros, las cuales analizaremos después de enunciarlas.

Las actividades fueron escogidas de tal manera que constituyesen una muestra representativa del tipo de problemas y diseños que se hicieron. Cuando tratemos el significado implementado, ahí aparecerán otras situaciones tomadas del mismo banco al cual pertenecen las que ahora se exponen.

Actividad 1. MEZCLAS BÁSICAS Y ESPECIALES

Una compañía de concreto almacena tres mezclas básicas, dadas enseguida. Las cantidades se miden en gramos y cada "unidad" de mezcla pesa 60 gramos. Pueden formularse mezclas especiales revolviendo combinaciones de las tres mezclas básicas

	Mezcla V_1	Mezcla V_2	Mezcla V_3
Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15

Supóngase que se requiere una mezcla A que consista de 1000 g de cemento, 700 g de Agua, 1300 g de arena, ¿Cuántas unidades de cada una de las mezclas básicas V_1 , V_2 , V_3 se necesitan para formular la mezcla especial A ?

Para resolver el problema anterior, nos guiaremos con las siguientes preguntas :

1. Identifica las incógnitas del problema, es decir qué datos se pretende obtener

   ____

   ____ .

2. ¿Qué datos conoces?

   ____

   ____ .

3. Trata de formar una ecuación que relacione el número de gramos de cemento que contienen las mezclas básicas V_1 , V_2 , V_3 , además de la cantidad de cemento que se requiere para formar la mezcla A .

4. Enseguida escribe otra ecuación lineal donde se involucren las cantidades de agua que tienen las mezclas V_1 , V_2 , V_3, y el número de gramos de agua que se necesita.

5. Finalmente, crea una ecuación lineal que indique las proporciones de arena contenidas en las mezclas básicas V_1 , V_2 , V_3 , además de la cantidad de arena requerida.

6. Forma un Sistema de Ecuaciones con las tres ecuaciones que obtuviste en los últimos tres puntos

   ____

   ____

   ____

7. Apoyándote con la calculadora, realiza operaciones con renglones para resolver el sistema anterior.

Comentarios sobre la Actividad 1. En esta actividad se parte de un problema de mezclas, que son típicos cuando se trabaja en el estudio de los SEL. Como puede observarse, la actividad no solamente consta del enunciado del problema, además de éste el profesor incluyó una serie de preguntas que van guiando al estudiante para su solución.

Dichas preguntas son un cuestionario que va guiando el accionar del estudiante. De alguna manera se limita la actividad intelectual del alumno, pues el camino para la resolución del problema está claramente marcado; da la impresión de que se está señalando una ruta de la cual no hay posibilidades de salirse, si es que se quiere alcanzar la solución.

La configuración epistémica que se desprende consta de:
a) Una situación problema.
b) Lenguajes: verbal y algebraico.
c) Procedimientos: guía para construir las ecuaciones y formar el sistema. Posteriormente, el procedimiento de la calculadora para resolver el sistema.
d) Argumentos: ninguno.
e) Proposiciones: ninguna.
f) Conceptos: ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales.

Si la pensamos aisladamente, la configuración es pobre, aunque cabe la posibilidad de que pudiera manejarse como un ejercicio. De cualquier manera, explota muy pocos recursos.

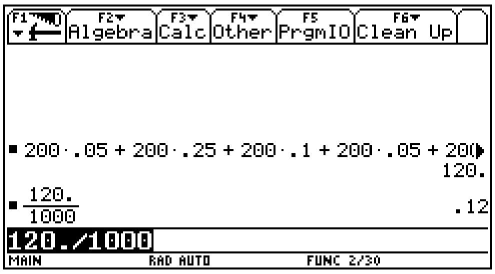
Actividad 2. Elaboración de Embutidos

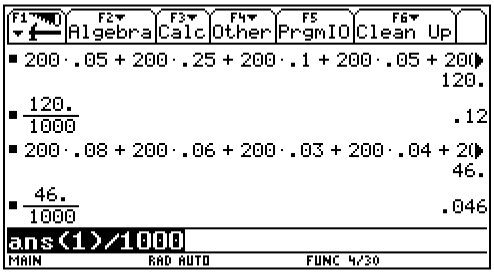
La Compañía de Alimentos Nutricare ha recibido una orden para elaborar semanalmente 1000 kilogramos de un embutido que contenga 12% de carbohidratos, 5% de grasa y 15% de proteína. Para ello cuentan con 3 diferentes tipos de tripas naturales: tripas de cerdo, tripas de res, tripas de cordero. Además cuentan con carne de pavo y carne de pierna de cerdo. La siguiente tabla muestra los porcentajes de grasa, carbohidratos y proteína de estos 5 ingredientes. También se muestra el costo por kilogramo de cada uno de los ingredientes.

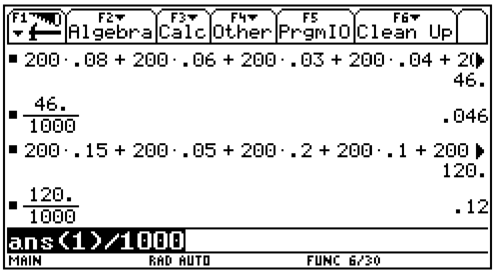
www.casings.com/html/home-espanol.html

	Pierna de cerdo	Tripas de cerdo	Tripas de cordero	Tripas de res	Carne de pavo
Carbohidratos (%)	5	25	10	5	15
Grasas (%)	8	6	3	4	2
Proteínas (%)	15	5	20	10	10
Precio/Kg ($)	11.00	5.00	6.00	8.00	7.00

1. El gerente de producción, recientemente contratado, ordenó preparar el embutido con 200 kilogramos de cada uno de los cinco ingredientes. Éste fue destituido de su puesto cuando el director general se enteró de tal acción. ¿Es posible justificar la decisión del director general en términos del desempeño del gerente destituido?







2. El nuevo gerente de producción presentó, a petición del director general, dos propuestas para la elaboración del embutido, señalando que la propuesta A, es más económica. Las dos propuestas se muestran en la siguiente tabla (las unidades de las cantidades mostradas son kilogramos). ¿Crees que el nuevo gerente tenga posibilidades de conservar su empleo?

	Pierna de cerdo	Tripas de cerdo	Tripas de cordero	Tripas de res	Carne de pavo
Propuesta A	8	6	3	4	2
Propuesta B	5	25	10	5	15

3. El director de la compañía no estaba del todo contento con el desempeño del nuevo gerente de producción, así que preguntó entre sus empleados si habría otras maneras para preparar el embutido con los ingredientes disponibles. Uno de ellos utilizó un modelo matemático que le permitió determinar y presentar **todas** las maneras de preparación posibles, así como cuál de ellas resultaba más barata y cuál resultaba más cara. Por supuesto, este empleado fue ascendido a gerente de producción.
    a. Encuentra un modelo matemático que describa la situación.

    b. Encuentra todas las posibles soluciones y las condiciones que deben imponerse a la cantidad de cada ingrediente, para obtener soluciones factibles.

    c. Determina la cantidad de cada ingrediente, de modo que el embutido resulte más barato.

    d. Determina la cantidad de cada ingrediente, de modo que el embutido resulte más costoso.

4. Durante el verano, la compañía tuvo inventarios excesivos de tripa de res y se decidió hacer el embutido utilizando la máxima cantidad posible de este ingrediente. Encuentre las cantidades de cada ingrediente para preparar este embutido rico en tripa de res, así como el costo total.

5. Durante el invierno, la tripa de res no estuvo disponible y se tuvo que preparar el embutido con los otros cuatro ingredientes. Determine las cantidades de cada ingrediente para preparar este embutido sin tripa de res, así como el costo total.
6. ¿Hay algún ingrediente del cual no se pueda prescindir?

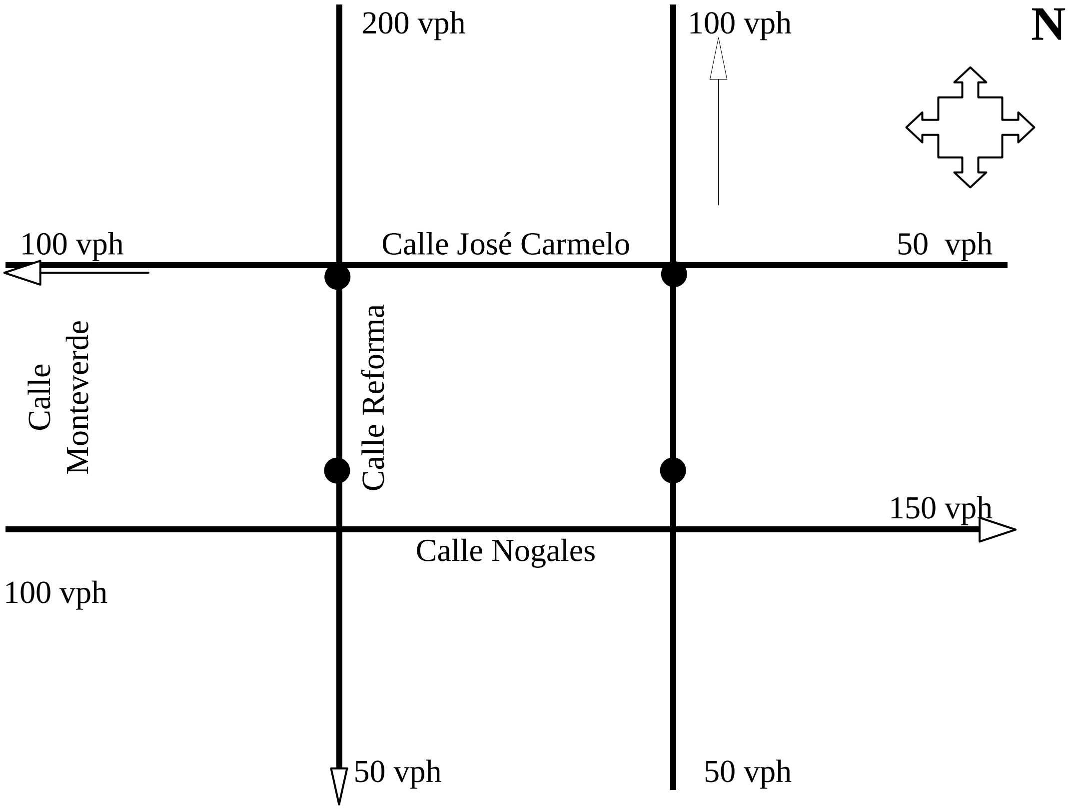
7. ¿Es posible prescindir de dos ingredientes?

Comentarios sobre la Actividad 2. Esta actividad, ejemplo de los llamados problemas de dietas, es didácticamente muy atractiva y propone un nivel de problematización adecuado a los estudiantes de ingeniería. A diferencia de lo que sucedió en la Actividad 1, donde las preguntas incluidas iban guiando el proceso de solución del SEL asociado, la serie de cuestionamientos que se hacen al final, requiere, para su respuesta, del análisis concienzudo de la solución que se obtenga del modelo algebraico, con lo cual la promoción de la argumentación es alta.

A pesar de que solamente aparece el uso de los lenguajes verbal y algebraico y no hay conceptos ni propiedades explícitas, el hecho de que involucre la necesidad de tomar decisiones justificadas para dar respuesta a las preguntas, la vuelve interesante y retadora para los alumnos.

Actividad 3. El Problema de flujo de tráfico

Considérese la red de avenidas que se muestran en la figura. Esta figura representa un área de la Ciudad de Hermosillo, Sonora. Todas las calles son de un solo sentido, las flechas indican la dirección del flujo de tráfico. El flujo de tráfico que entra y que sale de la red se mide en vehículos por hora (vph), por ejemplo por la avenida José Carmelo entran 150 vph y salen 100 vph. Los datos proporcionados se basan en las horas pico 7 A. M. a 9 A. M. y 4 P. M. a 6 P. M. a mitad de la semana. En la noche del viernes se considera un aumento de 2 % en todo el tráfico.



Lo que sigue se refiere a las horas pico mencionadas antes.

1. Una persona que vive por la José Carmelo entre Monteverde y Reforma opina que en ese tramo a esas horas el flujo es de 50 vph ¿Considera factible eso? Explique.

2. ¿Es posible que por la Reforma, entre Nogales y José Carmelo, el flujo a esas horas sea de 70 vph? Explique.

3. Una persona que vive por la Monteverde entre José Carmelo y Nogales dice que el flujo a esas horas es de 50 vph. ¿Considera factible eso? Explique.

4. Si es cierto lo que esta persona dice, ¿Cuál sería el flujo en el resto de la red?

5. ¿Cuál es el flujo que llega al cruce de Nogales y Reforma? Y ¿Cuál es el que sale?

6. Determine los flujos en el resto de la red, dejando las operaciones suspendidas.

7. Describa las relaciones entre los flujos de la red, dejando las operaciones suspendidas.

Establecer las relaciones, en general, entre los flujos en cada uno de los nodos, a partir de que el flujo que llega a un nodo es igual al flujo que sale de ese nodo.

8. ¿Cuál es la menor afluencia de tráfico que se puede tener en la avenida José Carmelo, entre Reforma y Monteverde, sin que se provoque un congestionamiento en el resto de la red?

9. ¿Cuál sería entonces la afluencia de tráfico en las otras calles?

Comentarios sobre la Actividad 3. Este problema pertenece a la categoría de los llamados problemas de flujo, que pueden ser de tráfico de automóviles, flujo de agua, petróleo o cualquier fluido, los cuales son típicos en diversas áreas de la ingeniería.

La situación presentada está ambientada en la Ciudad de Hermosillo, Sonora, en un núcleo de calles muy conocida de esa ciudad, lo cual puede constituirse en un elemento extra de motivación. Aunque la actividad es en cierto sentido similar a la presentada anteriormente, tiene elementos extras, nos referimos a las preguntas con las cuales se empieza a desarrollar el estudio propuesto. Esos cuestionamientos buscan clarificar qué es lo que se pregunta en el problema.

Nótese que la construcción del SEL asociado y su correspondiente solución no son los fines primarios asociados a la actividad. Las preguntas estratégicamente ubicadas llevan por un recorrido que va de lo verbal, a lo numérico, a lo algebraico y aterriza con el análisis completo de las soluciones del SEL, pero siempre en el contexto específico que se está tratando.

En esta propuesta se interrelaciona el uso de los lenguajes con lo procedimental y lo argumentativo, por lo que también constituye una alternativa interesante para ser desarrollada por los estudiantes.

V.2. El significado pretendido por el colegiado de profesores

La oportunidad que tuvimos de participar como observadores en este grupo de trabajo fue muy importante, pues nos permitió avanzar en la consecución den nuestros objetivos de investigación, y además, darnos cuenta de lo enriquecedoras que pueden ser las interacciones entre iguales, más cuando los individuos que interaccionan son profesores.

La circunstancia de que fuese un grupo de maestros conocidos entre sí, con años de conocerse como compañeros de trabajo y algunos con relaciones de amistad, permitió que no existieran muchas de las barreras que usualmente surgen en conglomerados de este tipo, y que para nuestra fortuna, pasáramos ignorados como investigadores y fuésemos asumidos como un participante más.

En algún otro lugar comentamos que este tipo de proyectos son espacios de formación para los profesores, pues ahí confluyen formaciones académicas y experiencias profesionales disímbolas, puntos de vista las más de las veces divergentes sobre lo que significa la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Poder establecer un consenso sobre las características del trabajo docente a desarrollar con los estudiantes de ingeniería, no fue tarea sencilla, más cuando la formación profesional de la mayor parte de los miembros de este grupo es la de matemático.

Educados con una estrategia que privilegia la formalidad de las construcciones matemáticas, considerándolas sinónimo de perfección intelectual, resulta difícil para los egresados de esta carrera admitir que hay otros profesionales que conciben a la matemática como una herramienta, de la cual les interesa fundamentalmente que funcione y les resuelva sus problemas. Sin embargo, la práctica docente y los estudios de posgrado de algunos de ellos, de alguna manera habían sensibilizado a este grupo de profesores, permitiéndoles escuchar y aceptar otras opciones.

En cuanto al significado pretendido para los SEL, al cual llegó por consenso el colegiado, podemos resumirlo así: lo que el estudiante de ingeniería hará y dirá sobre los SEL, surgirá a partir del tratamiento de situaciones derivadas de su campo de estudio, en las cuales se promoverá la interrelación de diferentes lenguajes, la aparición de los conceptos típicos, el dominio de un algoritmo para resolver los SEL. Sin declararse explícitamente, se le asigna un papel importante a las argumentaciones, quedando las propiedades sin un papel protagónico. Para ello se contarán como recursos de apoyo a la calculadora y a la computadora.

Capítulo VI. El significado implementado

VI.1. Introducción

Entenderemos como significado institucional implementado al sistema de prácticas efectivas del docente, durante un proceso de estudio determinado; esto es, lo que en realidad hizo y dijo el profesor en el aula, en su carácter de representante de la institución "escuela". En el momento en el cual el maestro llega al aula, todas las acciones que efectúe y todo lo que diga, está avalado por la escuela, pues su pertenencia a esa institución le concede esos privilegios.

Previamente, como hemos expuesto en los capítulos anteriores, se construyeron los significados referencial y pretendido; este último será con el cual llegue el profesor al salón de clase. Sabemos, sin embargo, que las características particulares del grupo con el cual estará trabajando, le llevará a hacer selecciones y modificaciones de diferente naturaleza, a tomar decisiones que lo apartarán, en mayor o menor medida, del significado institucional pretendido.

Las coincidencias, cambios y/o modificaciones de los cuales fuimos testigos en el caso de estos tres profesores, son los que vamos a identificar y mostrar en este capítulo. Con ello tendremos ya la tercera de las componentes para completar la descripción del fenómeno de transposición didáctica, las otras dos son el significado institucional referencial y el pretendido.

Las construcciones teóricas que usamos para organizar e interpretar la información obtenida, y que nos permitieron dar nuestra versión del significado implementado para cada uno de los sujetos en estudio, son las trayectorias epistémicas y docentes, así como las configuraciones epistémicas y docentes asociadas. El esquema que seguimos para presentar la información, consta de la identificación de cuántas y cuáles son las situaciones-problemas sobre las cuales se construyeron los dos tipos de trayectorias señalados con anterioridad; éstas últimas son descritas mediante las configuraciones asociadas. Esta idea, fue retomada del modelo planteado por Godino, Contreras y Font (2006).

Incluimos también las entrevistas que tuvimos con los profesores participantes en esta etapa del estudio, por considerar que proporcionan elementos de utilidad para nuestros fines, a las cuales se les hicieron pequeñas modificaciones como eliminar frases repetidas, o incluir algunas palabras, solamente con la intención de hacer la lectura más clara y fluida. Las inclusiones y/o aclaraciones se colocaron entre paréntesis y con letra itálica.

VI.2. El significado implementado por el Profesor A

El profesor A cuenta con 20 años de antigüedad en la Universidad de Sonora, y al momento en el que se realizó la observación de su actividad, había impartido dos veces el curso de Álgebra, aunque previamente tenía gran experiencia en los cursos que fueron sustituidos por éste, Álgebra Lineal y Álgebra Superior. Cuenta con el grado de maestro en ciencias con especialidad en matemática educativa, además de experiencia en la impartición de cursos para profesores de matemáticas de otros niveles, (primaria y secundaria), así como en el diseño y participación de diplomados en matemáticas.

El grupo con el cual trabaja en esta ocasión tiene 30 alumnos constantes, los cuales es la primera vez que llevan el curso y todos son estudiantes de ingeniería química; la mayoría son egresados de Colegios de Bachilleres y de Centros de Bachillerato Tecnológico y de Servicios.

VI.2.1 Trayectorias epistémica y docente del Profesor A

Recordemos que la trayectoria epistémica consiste en la distribución, a lo largo del tiempo, de las diferentes componentes del significado institucional implementado. Para el profesor A, consignamos en la Tabla VI.1 la trayectoria epistémica seguida, desglosando posteriormente las particularidades que se observaron en cada una de las configuraciones.

Tabla VI.1. Trayectoria epistémica del Profesor A

Sesión de clase	Configura-ción epistémica	Unidad epistémica	Descripción	Estado
1	1	0	Se plantea una situación- problema que sirve de punto de partida para el proceso de estudio, sistema de 3x2	Situacional
1	1	1	Se resuelve la situación inicial mediante los	Procedimen-

			métodos de sustitución, igualación, suma y resta y gráfico	tal
2	2	3	Se plantea una nueva situación- problema, de la selección previa que hizo el profesor	Situacional
2	2	4	Se organiza la información en una tabla	Lingüístico
2	2	5	Se definen las incógnitas y se representan algebraicamente, construyéndose el SEL, 3x3	Lingüístico
2	2	6	Se deja en libertad de que se escoja de qué manera se resolverá, escogiéndose el método de suma y resta, pero aplicándose con variantes, dependiendo del estudiante.	Procedimen-tal
2	2	7	En los pasos intermedios se van dando argumentos de qué significan la ecuación equivalente obtenida, en términos de la situación que se está resolviendo.	Argumentati-va
2	2	8	Se comprueba que la solución que se obtuvo es la correcta	Argumentati-va
3	3	9	Se presenta una nueva situación-problema	Situacional
3	3	10	Se identifican las incógnitas, se denotan algebraicamente, se relacionan para armar el SEL de 2x2 resultante.	Lingüístico
3	3	11	Se escoge una estrategia de solución: el método de sustitución, se aplica y se genera un resultado	Procedimen-tal
3	3	12	Se comprueban los resultados.	Argumentati vo
4	4	13	Se propone otra situación problema	Situacional
4	4	14	Se formula el SEL de 3x3	Lingüístico
4	4	15	Se resuelve por sustitución, llegando a resultados sin sentido en el contexto tratado, lo cual ocasiona desconcierto	Procedimen-tal
5	4	16	Se introduce tablas para estudiar de nueva cuenta el problema	Lingüístico
5	4	17	Se retoma el método de sustitución para resolver el SEL	Procedimen-tal
5	4	18	Se discute qué sentido tiene en el contexto tratado el encontrar valores negativos y se concluye que en esas condiciones no hay solución posible	Argumentati-vo
6	5	19	Se plantea una situación-problema que surge de introducir variantes a la estudiada en la	Situacional

			configuración 4	
6	5	20	Se retoma el SEL que se había construido en la configuración anterior, con un nuevo valor para el monto de los intereses.	Lingüístico
6	5	21	Se analizan cuáles soluciones tienen sentido en el contexto del problema, primero mediante una tabla y luego graficando la expresión que relaciona dos de las variables. Se regresa el análisis hacia lo algebraico, luego a lo numérico, en un juego lingüístico que busca la determinación de los posibles valores de las variables que tengan sentido dado el contexto del problema.	Lingüístico-Argumentativo
7	5	22	Se resumen todos los argumentos, para arribar a una conclusión final	Argumentativo
8	6	23	Hay una nueva situación-problema	Situacional
8	6	24	Se reformula algebraicamente el problema, SEL 4X4	Lingüístico
8	6	25	Se resuelve el problema mediante sustituciones	Procedimental
9	6	26	Se retoma la solución del problema, hay única solución, y se procede a resumir el procedimiento seguido.	Argumentativo
9	7	27	Nueva situación problema planteada	Situacional
9	7	28	Se construye la representación algebraica del SEL, tamaño 3x3	Lingüistico
10	7	29	Se resuelve por suma y resta, encontrándose única solución, la cual se verifica. Poco a poco se empieza a reflexionar sobre las operaciones con las ecuaciones. Por vez primera se introduce el arreglo matricial	Procedimental y argumentativo
11	7	30	Se replantea el procedimiento seguido, porque se manifiestan muchas dudas	Argumentativo
12	8	31	Se plantea una nueva situación-problema, consistente en una variante al anterior, donde se deben resolver al mismo tiempo 3 SEL de 3x3	Situacional
12	8	32	Se resuelven los sistemas, empleando Gauss-Jordan, aunque sin mencionarlo explícitamente.	Procedimental
13	9	33	Se plantea una nueva situación problema	Procedimental

13	9	34	Se construye el modelo, SEL 3X3	Lingüístico
13	9	35	Se resuelve el SEL mediante sustitución, única solución	Procedimen-tal
13	10	34	Otra nueva situación-problema es planteada	Situacional
13	10	35	Se construye el modelo, SEL 4X4	Lingüístico
14	10	36	Se proponen soluciones particulares	Argumentati-vo
14	10	37	Se resuelve el sistema mediante la matriz aumentada, hay infinitas soluciones	Procedimen-tal
14	10	38	Se analizan las soluciones encontradas	Argumentati-vo
15	10	39	Se resumen los argumentos, pues no hay convencimiento de los razonamientos y pasos que se siguieron	Argumentati-vo
16	11	40	Se plantea una nueva situación-problema	Situacional
16	11	41	Se construye el SEL, 2x3	Lingüístico
16	11	42	Se resuelve el SEL por eliminación, pero el proceso es rechazado, al haberse desarrollado antes una práctica que privilegiaba la sustitución	Procedimen-tal
16	11	43	Se analizan las soluciones que tienen sentido en el contexto del problema	Argumenta-tivo
17	12	44	Se expone una nueva situación-problema	Situacional
17	12	45	Se resuelve el problema por inspección	Procedimen-tal
17	12	46	Se induce a construir el SEL de 3x3	Lingüístico
17	12	47	Se resuelve el SEL por eliminación gaussiana, para practicar el funcionamiento del algoritmo	Procedimen-tal
18	13	48	Se plantea otra situación problema semejante a la anterior	Situacional
18	13	49	Se resuelve el problema por inspección	Procedimen-tal
18	13	50	Se induce a construir el SEL de 3x3	Lingüístico
18	13	51	Se resuelve el SEL por eliminación gaussiana	Procedimen-tal
19	14	52	Se plantea un SEL de 3x5	Situacional
19	14	53	Se resuelve mediante el algoritmo de eliminación gaussiana, con auxilio de la calculadora	Procedimen-tal
19	14	54	Se examinan las infinitas soluciones del sistema	Argumenta-

				tivo
20	14	55	Se retoma el problema anterior por la gran cantidad de dudas que aparecieron	Situacional
21	14	56	Se conduce hacia la sistematización de las ideas	Argumenta-tivo
22	14	57	Se retoma el mismo problema anterior, examinándose diferentes estrategias seguidas para escalonar la matriz.	Procedimen-tal
22	14	58	Se debate sobre la conveniencia de una u otra estrategia	Argumenta-tivo
23	15	59	Se solicita resolver un SEL de 1x3	Situacional
23	15	60	Se encuentra la forma general de las infinitas soluciones	Procedimen-tal
23	16	61	Se plantea una nueva situación-problema que es similar a otra ya estudiada con anterioridad	Situacional
23	16	62	Se construye el SEL, 4X4	Lingüístico
23	16	63	Se resuelve por inspección	Procedimen-tal
23	16	64	Se resuelve ahora mediante Gauss-Jordan	Procedimen-tal
24	17	65	Se concluye el proceso de estudio con la formalización de todos los elementos que aparecieron durante el desarrollo del mismo	Lingüístico

Configuración epistémica 1

La sesión donde se desarrolló la primera de las configuraciones no fue videograbada, por falta de coordinación entre investigadora y sujeto de investigación; la información de esta configuración se obtuvo de una breve entrevista con el profesor y con algunos de los estudiantes; como no se nos proporcionaron los datos numéricos, usamos literales para representarlos.

Se propone una situación en que dice:

Una carpintería fabrica mesas y sillas mediante un proceso de producción que consta de tres fases: corte, armado y acabado; para cada una de las fases se cuenta con un número determinado de unidades de tiempo, que deben emplearse totalmente. Para fabricar una mesa se requieren w_1 unidades de tiempo en corte, t_1 en armado y z_1 en acabado; en el caso de las sillas, se emplean w_2 unidades de tiempo en el corte, t_1 en armado y z_2 en acabado. Si se dispone de W unidades de tiempo para el corte, T para el armado y Z para el acabado, ¿cuántas mesas y sillas podrán fabricarse sin que sobren unidades de tiempo?

Este problema, que es el inicial, tiene como modelo un SEL de 3x2, hecho que no es usual al inicio de un proceso de estudio como éste; la mayoría de ellos se inicia con SEL de 2x2, con la pretensión de ir avanzando en grado de complejidad respecto al tamaño de los sistemas. La situación sirve también para determinar el nivel de partida de los estudiantes en cuanto a sus conocimientos previos, pues se les solicita que resuelva el sistema por el método que ellos gusten; de esta manera de algunos surge la propuesta de hacerlo por suma y resta, otros por sustitución, algunos más por igualación y mediante el método gráfico. Se revisan todos los procedimientos y se hace una síntesis de lo que se ha trabajado en esa sesión.

Los objetos matemáticos que aparecieron en el desarrollo de la configuración son:

a) Situación-problema: la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración.
b) Lenguaje: verbal y algebraico.
c) Procedimientos: método de sustitución, suma y resta, gráfico e igualación.
d) Conceptos: Sistema de dos ecuaciones lineales de tres ecuaciones con dos incógnitas; solución del sistema.
e) Argumentos: Para validar la veracidad de las soluciones encontradas.
f) Propiedades: Ninguna explícita.

Configuración epistémica 2

Previo al trabajo de la primera sesión observada y videograbada, el profesor ha hecho una selección de catorce situaciones- problema del banco de actividades elaboradas por el grupo de profesores que participó en lo que hemos llamado fase colegiada. Se entregan algunos ejemplares a los estudiantes y se solicita que se hagan cargo de su reproducción, de tal manera que para la siguiente sesión, todos los estudiantes deben presentarse con su correspondiente copia. Asimismo, les pide que traten de resolver el problema número uno de la lista, el cual dice lo siguiente:

1. Una compañía ensambla tres modelos de computadora personal a los que llamaremos: el modelo regular, el modelo de lujo y modelos de versión limitada. Cada unidad es procesada en tres departamentos, A, B y C.

El modelo regular requiere 3 unidades de tiempo de proceso en el departamento A, 7 unidades de tiempo en el departamento B y 5 en el departamento C.
El modelo de lujo requiere 4 unidades de tiempo de proceso en el departamento A, 8 en el departamento B y 7 en el departamento C.
El modelo de versión limitada requiere 4 unidades de tiempo en el departamento A, 9 en el departamento B y 6 en el departamento C.

El departamento A puede cubrir 129 unidades de tiempo, el departamento B abastece 28.5 unidades de tiempo y el departamento C, 120 unidades de tiempo por día.

¿Cuántas computadoras al día puede ensamblar esta compañía al día, agotando todas las unidades de tiempo disponibles de cada departamento?

Se identifican y denotan las incógnitas y se construyen las ecuaciones,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 129 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 289 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 210 \end{aligned}$$

pero analizando cuidadosamente cuál es el significado de cada uno de los sumandos en cada una de las ecuaciones. Se promueve la solución del sistema aceptando las propuestas de los participantes; en momentos intermedios de la solución se trabaja de nueva cuenta sobre las significaciones; cuando se tiene la solución, que resulta ser única, se interpreta en el contexto del problema específico, además de comprobar que efectivamente lo es.

Los objetos matemáticos que aparecieron son:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: verbal y algebraico.

c) Procedimientos: suma y resta, eligiendo los estudiantes las ecuaciones que consideran pertinentes.

d) Conceptos: Sistema de dos ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas; solución del sistema.

e) Argumentos: Para interpretar la solución encontrada en el contexto del problema; para darle significación a las ecuaciones intermedias que se van consiguiendo.

f) Propiedades: Ninguna explícita.

Configuración epistémica 3

Se selecciona un problema de la lista previamente entregada, cuyo contenido es el siguiente:

Un inversionista depositó la cantidad de $100,000 distribuidos en dos cuentas C_1 *y* C_2. *Al cabo de un año recibió $20,000.00 por concepto de intereses. La tasa de interés anual neta de la cuenta* C_1 *resultó ser del 15% y la de la cuenta* C_2 *fue del 22%. ¿Cuánto se invirtió en cada cuenta?*

Se repite el esquema de la configuración anterior: identificación y notación de los valores buscados, establecimiento de las relaciones que dan origen al sistema

$$\begin{aligned} 115\%C \;\; + 122\%C_2 &= 120000 \\ C_1 + C_2 &= 100000 \end{aligned} \quad ,$$

selección y aplicación de la estrategia de solución, que para este caso resulta ser el método de sustitución; el sistema resulta con solución única, y para terminar, los resultados se verifican.

Los objetos matemáticos que aparecieron son:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: verbal y algebraico.

c) Procedimientos: sustitución.

d) Conceptos: Sistema de dos ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas; solución del sistema.

e) Argumentos: Para interpretar la solución encontrada en el contexto del problema; para darle significación a las ecuaciones intermedias que se van consiguiendo.

f) Propiedades: Ninguna explícita.

Configuración epistémica 4

Esta configuración inicia con la proposición de la siguiente situación-problema:

Otro inversionista depositó también la cantidad de $100 000.00, pero lo distribuyó en tres cuentas: la C_1 y la C_2 del problema anterior y en una tercera cuenta C_3. La estrategia del inversionista fue depositar en la C_2 el doble de lo que depositó en la C_1. Los rendimientos después de un año fueron $21, 750.00 y la tasa de interés anual de la nueva cuenta C_3 fue del 12%. ¿Cuánto invirtió en cada cuenta?

Esta situación surge de retomar la anterior, pero es más complicada en tanto se están agregando otras condiciones, con lo cual se arriba sin problemas a establecer el conjunto que sigue:

$$
\begin{aligned}
&C_2 = 2C_1 \\
&C_1 + C_2 + C_3 = 100000 \\
&\textit{entonces} \\
&3C_1 + C_3 = 100000 \\
&15\%C_1 + 22\%C_2 + 12\%C_3 = 21750
\end{aligned}
$$

Se desarrolla el trabajo alrededor de la simplificación del sistema, haciendo sustituciones que llevan a encontrar que $C_1 = 42391$, resultado que, viéndolo en conjunto con otras relaciones llevan a concluir que no es un valor viable en este contexto, pues la suma de dos de las cantidades sobrepasa el 100% de la cantidad invertida. Este hecho causa desconcierto, por lo que se decide tomar otro camino.

Se trabaja ahora la ruta numérica, es decir se organiza una tabla, donde, mediante valores específicos se le va dando sentido a las relaciones entre las cantidades invertidas:

C_2	C_1	C_3
0	0	100000
2000	1000	97500
4000	2000	94000

Esto con la intención de que los participantes desconcertados no pierdan la interpretación que tienen del problema, se vuelve a desarrollar algebraicamente, hasta llegar a $C_1 = 423914$; $C_2 = 84782$ y $C_{31} = -27173$, lo cual lleva a concluir que con esas condiciones no es posible conseguir ganancias, por lo que la estrategia de inversión no es adecuada.

El hecho de que el sistema tuviese una solución que no tenía sentido en la situación estudiada, permitió que en esta configuración los argumentos fueran los objetos matemáticos más abundantes e importantes. La situación escogida permitió explorar, además de lo anterior, a:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: verbal, algebraico, numérico.

c) Procedimientos: sustitución.

d) Conceptos: Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas; solución del sistema.

e) Argumentos: Para interpretar la solución encontrada en el contexto del problema; para darle significación a las ecuaciones intermedias que se van consiguiendo.

f) Propiedades: Ninguna explícita.

Configuración epistémica 5

Hay ahora una tercera situación problema que versa sobre inversiones**:**

Un tercer inversionista también deposita la cantidad de $100,000.00, en las tres cuentas

C_1, C_2 *y* C_3*. Si los rendimientos después de un año son $20,000.00*

a) ¿Puede terminar cuánto se invirtió en cada cuenta? Explique.

b) ¿Cuál es le monto máximo que pudo ser invertido en la C_3*?*

c) Para el monto máximo que pudo ser invertido en la C_3*, ¿cuáles son los montos que pudieron ser invertidos en las otras cuentas?*

En esta ocasión, el profesor ha planteado una situación que retoma información anterior, pero que le permite introducir nuevos elementos de análisis para este tipo de problemas. Puesto que la construcción del modelo no es problema, sobre todo cuando ya se cuenta con la experiencia previa de las otras situaciones, ahora la discusión se centra en los valores que hacen que la relación a la que se llega tenga sentido:

$$
\begin{aligned}
&C_2 = 2C_1 \\
&C_1 + C_2 + C_3 = 100000 \\
&\textit{entonces} \\
&3C_1 + C_3 = 100000 \\
&15\%C_1 + 22\%C_2 + 12\%C_3 = 20000
\end{aligned}
$$

Pero si $C_3 = 100000 - 3C_1$, se pueden analiza los posibles valores de C_1 y C_3, formando una tabla:

C_1	C_3
0	100000
1000	97000
2000	94000
$\cdots$	$\cdots$
$\frac{100000}{3}$	0

Ahora se introduce la graficación de la relación $C_3 = 100000 - 3C_1$, para poder ahondar en el análisis, esto se hace mediante la calculadora graficadora; la introducción de esta representación causa también desconcierto.

No se advierte todavía que en esa relación que se acaba de trabajar tabular y gráficamente hay una condición que implica restricciones a los valores que se pueden manejar, si se piensa esto en el contexto del problema. Al regresar a lo algebraico se vuelve a conseguir un valor negativo para la tercera de las cuentas, lo que ocasiona contrariedad en algunos participantes.

Se empieza a variar entonces el valor de la cantidad obtenida por concepto de intereses, viendo en cada caso que sucede con las tres cuentas, hasta que un estudiante acota: *"Ah, lo que estamos tratando de hacer es buscar los valores para que la inversión sea positiva"*.

Se grafican algunas rectas que resultan de tomar diferentes valores para los intereses generados, haciendo un análisis muy intenso, hasta llegar a la conclusión de que los intereses variarán entre 12000 y 19666.66 pesos.

La gran cantidad de objetos matemáticos que aparecen en esta configuración, la gama de relaciones que se establecen entre ellos, y la manera en la que son introducidos en el juego didáctico hace que la configuración sea sumamente rica; lo sintetizamos así:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: verbal, algebraico, numérico.

c) Procedimientos: método de sustitución.

d) Conceptos: Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas; solución del sistema.

e) Argumentos: Para interpretar la solución encontrada en el contexto del problema; para darle significación a las ecuaciones intermedias que se van consiguiendo.

f) Propiedades: Ninguna explícita.

Configuración epistémica 6

La situación-problema que da origen a la sexta configuración epistémica es:

Un padre con aficiones matemáticas decide hacer su testamento de la manera siguiente:

- *Todo mi capital será dividido entre mis tres hijos: Antonio, Benito y Carla*
- *Del capital menos 10,000 euros Antonio recibe la mitad.*
- *La cantidad recibida por Carla menos la cantidad que reciba Benito debe ser igual a la cantidad recibida por Benito menos la cantidad recibida por Antonio.*
- *La cantidad recibida por Carla menos el 60 por ciento de la recibida por Benito debe ser igual a 4,000 euros.*

¿Cuánto dinero recibiría cada uno de estos herederos?

Se construyen las expresiones algebraicas que representan la información expresada verbalmente, y se manipulan intentando llegar a alguna solución; después de varios intentos de sustituciones, no se tiene éxito. De cualquier manera, hay argumentos y razonamientos adecuados los cuales son rescatados y permiten reiniciar la discusión. Se parte entonces de resolver el sistema

$$\begin{aligned}
&A = \frac{x}{2} - 10000 \\
&K + B + A = x \\
&K - B = B - A \\
&K - 60\% B = 4000
\end{aligned}$$

mediante el método de sustitución, el cual lleva a que el sistema tiene solución única.

En la configuración descrita se identifican:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: Verbal, algebraico.

c) Procedimientos: Método de sustitución.

d) Conceptos: los que ya se han venido manejando desde la primera configuración.

e) Argumentos: Para validar los pasos que se van dando y para aceptar o rechazar opiniones de los demás.

f) Propiedades: ninguna explícita.

Configuración epistémica 7

La situación problema que inicia la configuración 7 es:

Es muy común que los cultivos se infecten de plagas, para controlarlas se utilizan insecticidas. Para combatir cierta plaga en un determinado cultivo se recomienda rociar la cosecha con una mezcla de los siguientes químicos:

6 unidades del químico A,

10 unidades del químico B y

8 unidades del químico C.

En el mercado se venden estos químicos combinados en las 3 proporciones siguientes:

- *Un barril de mezcla* S_1 *contiene 1 unidad del químico A, 3 unidades del químico B y 4 unidades del C.*
- *Un barril de mezcla* S_2 *contiene 3 unidades de cada químico.*
- *Un barril de mezcla* S_3 *contiene 2 unidades del químico A y 5 unidades del químico B.*

Además de los químicos A, B y C, cada barril contiene solventes, de tal manera que la cantidad de volumen para cada mezcla es el mismo.

a) ¿Cuál es la proporción de cada barril que debe ser usado para obtener la cantidad exacta de químicos requeridos?

b) Si sólo se venden barriles llenos al total de su capacidad, ¿Cuántos barriles de cada mezcla se deben comprar?

c) Teniendo en cuenta que el precio de los barriles es de \$1350.00 para la mezcla S_1, \$1500.00 para la mezcla S_2 y \$1100.00 para la mezcla S_3, ¿Cuánto se gastaría en la compra de los dos barriles?

d) Suponiendo que la capacidad de los barriles es de 80 litros, ¿qué tantos litros de cada mezcla deben ser utilizados para rociar el cultivo?

Sin dificultades se establece el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} S_1 &= A + 3B + 4C \\ S_2 &= 3A + 3B + 3C \\ S_3 &= 2A + 5B \end{aligned}$$

Éste es propuesto por una estudiante, la cual se ataca sin éxito, porque los valores $x = 1, y = \frac{4}{3}; z = \frac{3}{5}$ propuestos, no cumplen la totalidad de las ecuaciones, con lo cual se le convence de que en algo falló. En estas condiciones se reorganiza la información, y se plantea un nuevo SEL,

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 5z &= 10 \\ 4x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

En cuya solución se empiezan a introducir elementos que lleven a la organización de un procedimiento donde solamente se trabaja con los coeficientes y con las constantes del sistema, llegando a la única solución y haciendo la comprobación correspondiente.

A pesar de que el problema ya ha sido resuelto, se retoma, con la idea de impulsar el análisis de la información, la cual se muestra mediante una tabla

	A	B	C
S_1	1	3	4
S_2	3	3	3
S_3	2	5	0
	6	10	8

Dicho análisis es impulsado mediante preguntas del estilo *¿Qué pasaría si compráramos un barril de cada tipo? A lo que se responde: De A está bien, de B nos pasamos, de C nos hace falta.*

¿Y si fueran dos barriles de cada tipo? Nos pasamos.

¿Y si compramos 1, 4/3, y 3/5 de barril respectivamente? Nos pasamos en A.

Este tipo de preguntas lleva la intención de aclarar qué significa la solución del sistema; cuando esto ya se logra, nuevamente se resuelve, pero dirigiendo los razonamientos hacia el algoritmo de eliminación gaussiana. Hay resistencias entre una y otra operación con los renglones de la matriz aumentada, sobre todo porque al tratar de llevar un procedimiento organizado, los estudiantes advierten que hay opciones más sencillas.

Se proponen entonces ternas diferentes para los valores de S_1, S_2, S_3: (5, 12, 7); (8, 10, 8) y (6, 8 10). Esto puede considerarse como la situación problema que origina otra configuración epistémica.

Por lo pronto, en esta que acabamos de caracterizar, identificamos:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: verbal, matricial, algebraico.

c) Procedimientos: operaciones con los renglones de la matriz aumentada, eliminación gaussiana.

d) Conceptos: matriz de coeficientes, matriz aumentada.

e) Argumentos: para justificar las operaciones, para interpretar la solución, para sostener sus opiniones.

f) Propiedades: ninguna explícita.

Configuración epistémica 8

Al proponer diferentes valores para S_1, S_2, S_3: (5, 12, 7); (8, 10, 8) y (6, 8 10), se intenta resolver los tres sistemas que se originan al mismo tiempo, pero ya empleando el algoritmo de eliminación gaussiana. Se parte entonces del arreglo matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 12 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 0 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Con esto se logra calmar las inquietudes respecto a las supuestas desventajas de usar esta estrategia, pues se alcanza a entender la potencia que tiene el algoritmo, más cuando se usa con la representación matricial de los sistemas.

Identificamos entonces a:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: matricial.

c) Procedimientos: algoritmo de eliminación gaussiana.

d) Conceptos: ninguno explícito.

e) Argumentos: para justificar el uso del algoritmo de eliminación gaussiana.

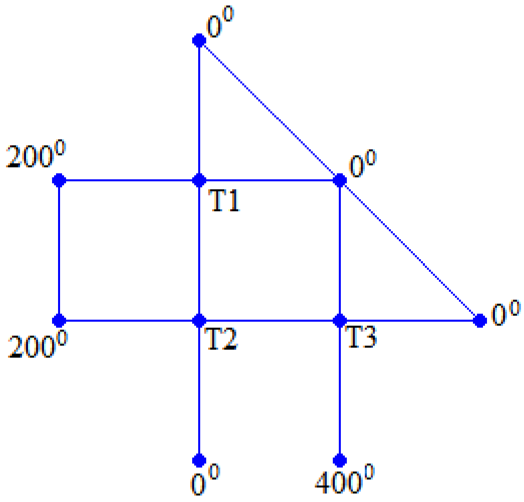
f) Propiedades: ninguna explícita.

Configuración epistémica 9

Pasamos a la asignación de la siguiente situación:

En una red de cables, la temperatura en los puntos de unión exteriores se mantiene constante (en ^{o}C*), como se muestra en la figura de abajo. Cuando la red está en equilibrio térmico, la temperatura T en cada punto de unión interior es el promedio de las temperaturas de los cuatro puntos adyacentes. Encuentre las temperaturas* T_1, T_2, T_3 *cuando la red está en equilibrio térmico.*

La figura a la que se hace referencia en el problema es:



Que se modela mediante el SEL:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 50 + \frac{T_2}{4} \\
T_2 &= 50 + \frac{T_1 + T_3}{4} \\
T_3 &= 50 + \frac{T_2}{4}
\end{aligned}$$

Además de la información verbal, hay un diagrama que representa la red de cables. El SEL se empieza a resolver mediante sustituciones sucesivas, que parece ser la estrategia más familiar; se proponen diversas formas de sustitución, coincidentes todas en la misma solución que es comprobada.

Los objetos que entran en juego en esta configuración son:

a) Situación-problema: se enunció al principio de la configuración.

b) Lenguaje: el verbal, en la cual originalmente se enunció la situación-problema, y el algebraico, que permite construir el modelo.

c) Conceptos: los mismos que han aparecido hasta el momento.

d) Procedimientos: método de sustitución.

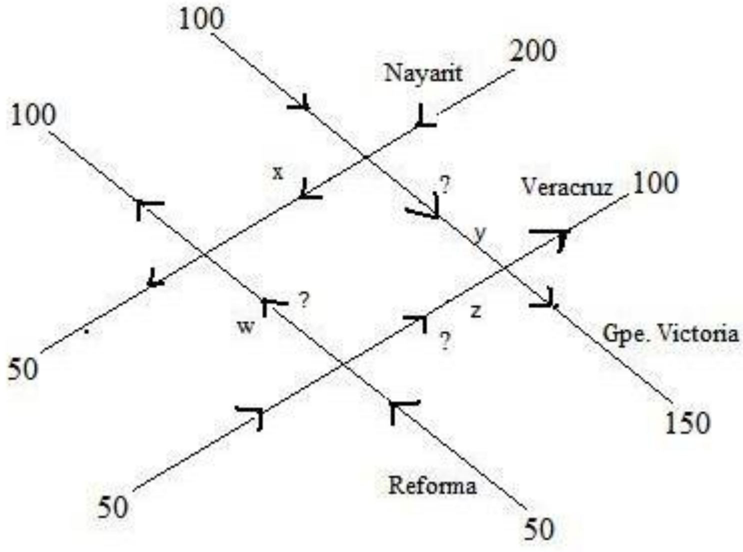
e) Argumentos: Para validar la construcción del SEL, para resolverlo, para comprobar la solución.

f) Propiedades: Las que permiten la simplificación de las expresiones algebraicas resultantes, así como las de la igualdad para despejar el valor de las incógnitas buscadas; todas ellas usadas implícitamente.

Configuración epistémica 10

La siguiente situación está estratégicamente ubicada, pues retoma elementos del anterior, aunque su grado de complejidad es mayor:

La figura de abajo representa el flujo de tráfico en dos pares viales de la Ciudad de Hermosillo, el cual se midió durante una hora. Todas las calles son de un solo sentido, en la dirección indicado. Todos los vehículos que entraron en el área durante esta hora fueron exactamente los que salieron. Los callejones intermedios se encontraban cerrados a la circulación.



a) *¿Qué puede decir acerca de flujo de tráfico en los cuatro tramos marcados con un signo de interrogación?*
b) *¿Puede encontrar exactamente el flujo de tráfico en cada tramo?*
c) *Si no, describa un posible escenario.*
d) *Para cada tramo, encuentre el mayor y menor flujo de tráfico posible.*

Además del lenguaje verbal, se emplea un diagrama para exponer la situación a tratar en esta configuración. Para la construcción del modelo, la idea fundamental es la del flujo que entra y sale en cada intersección; esa consideración hace que surja una ecuación por cada intersección mostrada en el diagrama.

Este sistema es:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 300 \\
z + w &= 100 \\
x + w &= 150 \\
y + z &= 250
\end{aligned}
$$

que es el de mayor tamaño de los tratados hasta el momento. Además del tamaño, otra característica que produce confusión es la forma que tiene, pues aparecen varios coeficientes cero en las ecuaciones. Para avanzar en su tratamiento, se pregunta por posibles soluciones al sistema, que salen de estimaciones al observar el diagrama y analizarlo, no propiamente de trabajar con la representación algebraica del SEL.

Cuando se encuentra un conjunto de valores que satisface a todas las ecuaciones, la pregunta inmediata es si habrá más. Se enfrenta la situación infructuosamente con la herramienta de las sustituciones sucesivas, que solo conducen a identidades del estilo $x = x$. Después de un lapso, el profesor retoma la conducción de la actividad recuperando los argumentos que llevaron a la construcción algebraica del SEL, y propone tratarlo usando la matriz aumentada asociada y mediante el método de eliminación gaussiana, lo cual tiene la conveniencia de llevar un control de las operaciones.

Al llegar la matriz a su forma escalonada, se tiene las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
& x + y = 300 \\
& y + z = 250 \\
& z + w = 100 \\
& \rightarrow z = 100 - w
\end{aligned}
$$

Este hallazgo sugiere la posibilidad de que los valores de z dependen de w, y que por lo tanto se le deben proporcionar valores específicos para encontrar el resto de las variables, hallando así varias soluciones particulares, pero la pregunta, ¿Cuántas soluciones más podremos encontrar?, conduce a tratar de simplificar más la matriz, hasta que se llega a su forma escalonada reducida.

En ese momento se ve con más claridad las relaciones entre x, y, z, w; además de la necesidad de que w varíe para encontrar más soluciones. Si bien en este punto hay convencimiento de lo que se ha encontrado, aparece una propuesta diferente de la que usó para escalonar la matriz, que es puesta en la mesa de discusión, comparando las opciones que se tienen. Este proceso de argumentación y contra argumentación es muy ilustrativo del manejo que poco a poco van adquiriendo los estudiantes de los algoritmos, de su utilidad y de cómo concluyen a partir de lo que la matriz escalonada, o escalonada reducida les informa. La configuración termina al responderse que los valores de esta variable son enteros no negativos que corren del 0 al 100.

a) Situación-problema: la ya enunciada

b) Lenguaje: verbal, algebraico, numérico

c) Procedimientos: eliminación gaussiana

d) Conceptos: los mismos que han aparecido en las anteriores configuraciones.

e) Argumentos: para justificar las estrategias y operaciones realizadas, para identificar e interpretar la solución.

f) Propiedades: ninguna explícita.

Configuración epistémica 11

Al plantearse la situación-problema:

Una persona compra borregos, cabras y puercos jabalí. Son 100 animales en total y paga $100 000 pesos. Cada borrego costó $500 pesos, tres cabras cuestan $4000 y cada puerco jabalí $3500. ¿Cuántos compró de cada uno?

se inicia la configuración. El problema, expuesto en la lengua materna, es modelado mediante la expresión algebraica del SEL de 2x3, del cual se construye la matriz aumentada y se empieza a operar, llevándola a la forma escalonada reducida.

Al advertir la existencia de infinitas soluciones, se presentan soluciones particulares que tienen sentido en el contexto de la situación específica que se está tratando. Todavía hay resistencia de los participantes, pues se había desarrollado una práctica sobre la forma de resolver los sistemas, y hay oposición a cambiar de estrategia, a pesar de que se han presentado situaciones en las cuales claramente el método de eliminación gaussiana ha probado su potencia.

Se ubican entonces a los siguientes objetos:

a) Situación-problema: la ya enunciada

b) Lenguaje: verbal, algebraico, numérico

c) Procedimientos: eliminación gaussiana

d) Conceptos: los mismos de las configuraciones anteriores

e) Argumentos: para interpretar la solución.

f) Propiedades: ninguna explícita

Configuración epistémica 12

Una compañía quiere predecir la venta de uno de sus productos. La historia de ventas del producto (en miles de pesos) en los primeros tres meses es

Mes	***1***	***2***	***3***
Ventas	***10***	***25***	***45***

a) Un modelo es encontrar la ecuación de la recta $y = mx + b$ *que pasa por los puntos (1, 10) y (2, 25). Encuentre la ecuación de esta recta. ¿El punto (3, 45) está en esta recta? ¿Está cerca de la recta?*

b) Otro modelo es encontrar un polinomio de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ *que pase por los puntos (1,10), (2,25) y (3,45). Encuentre este polinomio.*

c) ¿Cuál de los modelos de la mejor predicción para las ventas del cuarto mes?

Se empiezan a proponer soluciones por parte de los estudiantes para el inciso a, de las cuales ninguna toma en consideración a los SEL como alternativa para solucionar el problema. Tres de las propuestas se van por la opción de la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta.

En el caso del inciso b, sí se recurre a los SEL, formulándose el siguiente:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 10 \\ 4a + 2b + c &= 25 \\ 9a + 3b + c &= 45 \end{aligned}$$

Donde de nueva cuenta hay resistencia a usar eliminación gaussiana para resolverlo. En este tono, el docente induce a su uso "para practicarlo". Así se hace y se llega a obtener una única solución.

En este desarrollo, surgen:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: verbal, algebraico.

c) Procedimientos: eliminación gaussiana.

d) Conceptos: igual que en los casos anteriores.

e) Argumentos: igual que en los casos anteriores.

f) Propiedades: ninguna explícita.

Configuración epistémica 13

Como una especie de continuación de la situación problema de la configuración epistémica 12, está aquella con la que se inicia la 13 y que consiste en:

Encuentre un polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ *que pase por los puntos:*

a) (1,5), (2,7), (3,9)

b) (-1,-1), (0,1), (1,-3)

Cuando se trata el inciso a), se determina por inspección que en realidad se trata de una línea recta, cuya ecuación es $y = 2x + 3$, hecho que se confirma cuando se recurre a la construcción del SEL

$$\begin{aligned} a + b + c &= 5 \\ 4a + 2b + c &= 7 \\ 9a + 3b + c &= 9 \end{aligned}$$

que es resuelto ya sin tanta resistencia mediante el algoritmo de eliminación gaussiana, y donde la solución es c=3, b=2, a=0.

Este problema es básicamente un ejercicio para los estudiantes, pues en ningún momento surge alguna dificultad para su manejo. En esas condiciones, el segundo de los incisos se asigna como tarea.

La revisión de la configuración muestra:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: verbal, algebraico.

c) Procedimientos: eliminación gaussiana.

d) Conceptos: no aparecen nuevos.

e) Argumentos: no aparecen nuevos.

f) Propiedades: no aparecen explícitamente.

Configuración epistémica 14

A partir de esta situación problema se inicia la preparación para una actividad de evaluación con la cual se cerrará el proceso de estudio de los SEL. Como apoyo, el profesor selecciona y hace entrega de una lista de 36 problemas, de los cuales no todos se revisarán en el aula, solamente aquellos en los que haya dudas. El que sigue es uno de ellos:

Utilice la calculadora y el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 25x_5 &= 53 \\ 7x_1 + 14x_2 + 21x_3 + 9x_4 + 53x_5 &= 105 \\ -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 5x_4 - 10x_5 &= 11 \end{aligned}$$

Se promueve el uso de la calculadora Voyage 200 para hacer los cálculos, puesto que por el tamaño del sistema las operaciones con los renglones son tediosas. En este punto del desarrollo del tema, no aparecen mayores dificultades; al llegar a la forma escalonada, se identifica la forma general que tiene la solución.

Se analiza la configuración y encontramos:

a) Situación-problema: la ya enunciada.

b) Lenguaje: algebraico.

c) Procedimientos: eliminación gaussiana.

d) Conceptos: ninguno nuevo.

e) Argumentos: para identificar las operaciones adecuadas, e interpretar la forma escalonada de la matriz con respecto a la solución.

f) Propiedades: ninguna explícita.

Configuración epistémica 15

El siguiente es otro ejercicio sobre el cual se expresan dudas:

Utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$x + 2y + 3z = 4$$

Se construye la matriz aumenta y se llega a que hay dos variables libres.

a) Situación-problema: la ya enunciada

b) Lenguaje: algebraico

c) Procedimientos: despeje de variable.

d) Conceptos: no hay nuevos.

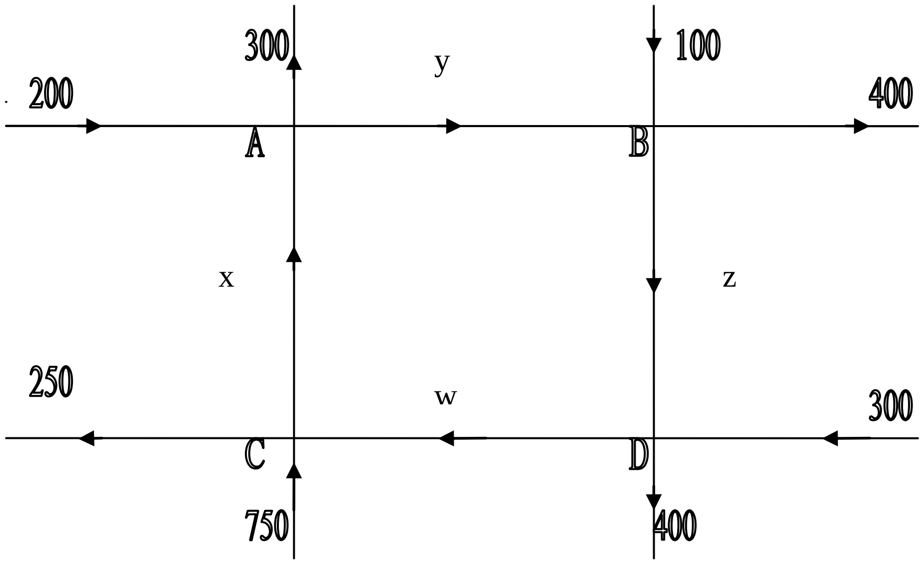
e) Argumentos: para identificar las variables libres.

f) Propiedades: no reconocidas explícitamente.

Configuración epistémica 16

A pesar de que ya se resolvió anteriormente un problema similar, los estudiantes solicitan se revise en el aula el que sigue:

Un ingeniero tiene a cargo la remodelación de las tuberías de Petróleos Mexicanos que abastecen de gasolina la ciudad de Hermosillo. El siguiente diagrama reproduce una red de tuberías del parque industrial con el flujo de gasolina en las direcciones indicadas. El número de litros que fluye está dado como promedio de litros por minuto. Asumiendo que el flujo que llega a una intersección es igual al flujo que sale de ella. El ingeniero desea construir un modelo matemático del flujo de gasolina. Si la tubería que va de C a A estuviera en reparación, ¿Cuál sería el mínimo flujo de gasolina que se podría permitir? ¿Cómo podría obtenerse este mínimo?



Este es una nueva situación donde se plantea un problema de flujo, de cuyo tipo ya se había resuelto otro en la configuración 10. Con esos antecedentes, la construcción del SEL asociado no presentó grandes obstáculos:

$$\begin{aligned}
200 + x &= 300 + y \\
y + 100 &= 400 + z \\
750 + w &= 250 + x \\
300 + z &= 400 + w
\end{aligned}$$

Es presentada una alternativa de tratamiento donde no se requiere la incorporación de las cuatro variables anteriores, pues todos los flujos se expresan en términos de una sola: *x*.

El razonamiento es como sigue: tomemos el caso de la intersección A, están entrando $x + 200$ litros, y están saliendo 300, entonces por la rúa que va de A a B estarán circulando $x - 100$ litros. De la misma manera, si por la intersección B entran $x - 100$ litros de un lado y 100 de otro, al sumarlos me quedan x litros, pero por otro lado salen 400, lo que lleva a que de B a D fluyan $x - 400$ litros.

Si ahora nos fijamos en el flujo que entra por D, tenemos que por un lado están entrando $x - 400$ litros y por otro 300, que al sumarlos dejan $x - 100$, de los cuales salen 400 por un lado y el resto, $x - 500$, fluyen de C a D. Como se pregunta por el flujo mínimo, eso lleva a que, a partir de la última expresión, se concluya que x=500, resultado del cual se desprenden los otros valores: de A a B circularán 400 litros, de B a D fluirán 100 y de C a D cero litros.

Vale la pena resaltar lo ingeniosa de la estrategia anterior, que no requirió absolutamente del planteamiento de un SEL, pero que no consiguió convencer al resto de los participantes en la discusión.

En estas circunstancias, se decide proceder mediante la matriz aumentada, llevándola a su forma escalonada. Una variante introducida ahora es que ese manejo se hace con el auxilio de la calculadora, llegándose a:

$$x = 500 + w$$
$$y = 400 + w$$
$$z = 100 + w$$

Expresiones que sirven de base para hacer análisis sobre soluciones que tengan sentido en el contexto; se llega entonces a que el flujo mínimo se obtiene cerrando la tubería que va de D a C, es decir con un valor de cero para w.

$$w = 0$$
$$x = 500$$
$$y = 300$$
$$z = 100$$

Todo este proceder convence al resto del grupo.

a) Situación-problema: la ya enunciada.
b) Lenguaje: numérico, algebraico, matricial.
c) Procedimientos: método de eliminación gaussiana para resolver el SEL.
d) Conceptos: no aparecen nuevos
e) Argumentos: para justificar las estrategias seguidas al resolver el problema
f) Propiedades: ninguna explícita.

Configuración epistémica 17

Consiste en una actividad de cierre, que un proceso de formalización del estudio hecho para los SEL. Se define lo que es un SEL de mxn introduciendo la notación matemática para representarlo, lo que es una solución, los métodos de solución, la representación general de la matriz aumentada, las operaciones elementales de renglón, la forma escalonada y escalonada reducida de una matriz y las posibilidades de existencia de solución.

a) Situación-problema: no hay.
b) Lenguaje: algebraico, verbal
c) Procedimientos: sustitución, suma y resta, igualación, eliminación gaussiana, Gauss-Jordan.

d) Conceptos: sistema de ecuaciones lineales, solución de un SEL, matriz, matriz aumentada, matriz escalonada, matriz escalonada reducida, operaciones elementales de renglón.

e) Argumentos: no hay.

f) Propiedades: no hay.

Con esto concluye la configuración y el proceso de estudio que el profesor planeó.

Trayectoria docente seguida por el profesor A, asociada a su trayectoria epistémica

Ahora mostraremos la trayectoria docente del profesor A, la cual, como ya dijimos, nos da cuenta de las sucesivas acciones que el maestro va realizando durante el desarrollo del proceso de estudio sobre los SEL. Posteriormente desglosaremos cada una de las configuraciones correspondientes.

TablaVI. 2. Trayectoria docente del Profesor A

Sesión de clase	Configuración epistémica	Descripción de la actividad del profesor	Estado
1	1	Asigna la tarea a realizar, la cual se aborda individualmente	Asignación
2	2	Deja en libertad a los estudiantes para que resuelvan el problema con sus recursos, identificando así sus conocimientos previos.	Regulación
2	2	Asigna la siguiente situación-problema	Asignación
2	2	Motiva la participación	Motivación
2	2	Mediante preguntas va promoviendo la participación de los estudiantes, hasta que llegan a la solución del problema, la cual analizan a profundad	Regulación
3	3	Asigna la nueva situación-problema	Asignación
3	3	Motiva la participación de los estudiantes, impulsando que sean ellos los que seleccionen la estrategia de solución. El recurso de las preguntas es muy utilizado para conducir la actividad de aprendizaje de los estudiantes	Motivación
3	3	Organiza los elementos que surgen en la discusión hasta llegar a las conclusiones finales sobre la solución del problema	Regulación
3	4	Varía los datos del problema propuesto en la	Asignación

		configuración anterior, lo que da lugar a una nueva situación-problema	
4	4	Repite el estado motivacional, de selección de estrategia, y de organización de la información y del proceso seguido para resolver el problema	Regulación
5	5	Retoma el problema anterior, debido a dudas surgidas en un grupo de estudiantes	Situacional
6	5	Motiva el análisis, introduce variantes al problema, y nuevos recursos para tratar de entenderlo y resolverlo	Regulación
7	5	La situación analizada se complica, pues son muchos los recursos y argumentos que han salido a flote, en esas circunstancias, el profesor sintetiza razonamientos	Regulación
8	6	Propone una nueva situación problema	Situacional
8	6	Promueve la participación del alumnado, dejándolos en libertad de exponer sus ideas, en ocasiones contrapunteándolos para que en el debate ellos mismos se den cuentan de cuándo sus argumentos no están siendo los adecuados	Regulación
9	6	Organizan los procedimientos seguidos, preparando el terreno para llegar al algoritmo de eliminación gaussiana	Regulación
9	7	Propone una nueva situación-problema	Situacional
9	7	Atiende la propuesta de un estudiante, conduciéndolo a que verifique su solución para que perciba los problemas que tiene su proposición	Regulación
10	7	Propone encontrar soluciones particulares para clarificar lo que se busca en el problema	Regulación
10	7	Guía la construcción del SEL y su solución, promoviendo las operaciones entre los renglones para tratar de llegar a la estrategia de eliminación gaussiana	Regulación
11	7	Intenta vencer las resistencias de los alumnos para cambiar sus estrategias hacia un camino algorítmico	Regulación
11	8	Asigna una tarea que se desprende del problema anterior con la intención de que los estudiantes se convenzan de la potencia del algoritmo de eliminación gaussiana	Asignación
12	8	Logra convencer de lo potente del algoritmo de eliminación gaussiana	Regulación

13	9	Propone una nueva situación- problema	Asignación
13	9	Permite que los estudiantes resuelvan el problema con la estrategia de su elección, siempre y cuando sean capaces de llegar a un resultado, interpretarlo y comprobarlo	Regulación
14	10	Propone una nueva situación- problema	Asignación
14	10	El análisis previo que siempre promueve, lleva a concluir que hay muchas soluciones posibles, de las cuales se proponen algunas antes de construir el modelo	
14	10	Se promueve el llegar a una propuesta integral de solución	Regulación
15	10	Retoma argumentos, operaciones, estrategias, para tratar de consolidar una respuesta al problema; trata de institucionalizar el uso del algoritmo de eliminación gaussiana	Regulación
16	11	Propone otra situación problema	Asignación
16	11	No tiene éxito en promover la eliminación gaussiana, pues los estudiantes se resisten a ello, argumentando que con sus prácticas anteriores tienen éxito	Regulación
16	11	Dejando de lado el método de solución, promueve el análisis de las soluciones encontradas	Regulación
17	12	Propone una nueva situación-problema	Regulación
17	12	Deja en libertad a los estudiantes de que propongan estrategias de solución,	Regulación
17	12	Retoma la conducción de la actividad, enfrentando las resistencias al uso de un algoritmo más potente. Su insistencia va mermando las oposición de los alumnos	Regulación
18	13	Plantea un problema muy similar al anterior, que se convierte prácticamente en un ejercicio para los estudiantes	Asignación
19	14	Propone una nueva situación problema, mucho más complicada	Asignación
19	14	Seleccionó un problema complicado, lo que lleva a los alumnos a aceptar sin cortapisas la economía y potencia del algoritmo de eliminación gaussiana. Usa la calculadora como apoyo en todo el proceso	Regulación
20	14	Retoma el problema, se sistematizan las operaciones que se realizaron, poco a poco se va introduciendo terminología más propia del proceso de estudio.	Regulación

21	14	Cconduce un proceso de reflexión conjunta, donde se van sintetizando procesos	Regulación
22	14	Continúa el proceso de síntesis	Regulación
23	15	Asigna nueva tarea	Asignación
23	15	Revisión de las acciones que los estudiantes hicieron en la tarea previa	Regulación
23	16	Asigna una nueva situación-problema	Asignación
23	16	Conduce el proceso de solución de un estudiante, el cual resuelve el problema por inspección	Regulación
23	16	Ante la perplejidad del resto de los estudiantes, conduce el proceso de solución con eliminación gaussiana, además de los análisis de las soluciones encontradas	Regulación
24	17	Formaliza conceptos y procedimientos que surgieron durante todo el proceso de estudio sobre los SEL. Con esta actividad lo cierra.	Regulación

Configuración docente 1

Esta configuración fue reconstruida con información vertida por el profesor y los estudiantes. El profesor enuncia la primera situación-problema, y se deja en libertad a los alumnos de que trabajen con ella, con la intención de conocer cuáles son sus conocimientos previos sobre el particular.

Configuración docente 2

Después de plantearse la situación-problema, mediante preguntas se va promoviendo la participación de los estudiantes, los cuales aceptan el reto y empiezan a proponer; las pocas indicaciones que da el profesor van en la dirección de organizar la información, pero esencialmente todo se trabaja mediante un esquema de elaboración conjunta. Aunque hay un buen número de estudiantes participando, existe un pequeño grupo que no se engancha en la discusión y que asume solamente el papel de observador, y aunque el profesor intenta involucrarlos, no lo consigue.

Configuración docente 3.

La estrategia de conducción es similar a la seguida en las anteriores configuraciones; con base en preguntas se va arribando a las ecuaciones, pero siempre insistiendo en la necesidad de ir comprendiendo, en términos de las particularidades del problema, las relaciones que se establecen entre los datos proporcionados, y que son las que luego quedarán algebraicamente representadas mediante dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. La selección de la estrategia de solución siempre queda en manos de los estudiantes, pues en estos momentos esto no parece ser una preocupación del profesor.

Configuración docente 4

Una vez que se ha propuesto la situación por estudiar**,** no hay mayores conflictos en conseguir que el núcleo estudiantil que siempre está en sintonía con el profesor, arme el sistema y empiece a hacer las sustituciones que considera convenientes para arribar a algún valor; pero al hacerlo, se concluye que es un valor que no tiene sentido, porque al sumar dos de los valores de las incógnitas, se tiene como resultado una cantidad que sobrepasa aquella que se quiere invertir. Hay un poco de desasosiego entre el alumnado, porque consideran entonces que no han hecho ni el planteamiento ni las operaciones indicadas; pero el profesor no pierde la calma y tomando el control, propone hacer una tabla con valores específicos para volver a situarlos.

Cuando esto sucede, y se retoma el procedimiento ya puesto en práctica, se confirma el resultado previo. Se concluye entonces que no es una inversión adecuada, pero dos estudiantes, no conformes, increpan al profesor así: *"Usted díganos si hay o no solución, o qué, ¿no se sabe la respuesta?"*

Configuración docente 5.

La naturaleza del problema hace que la generación de argumentos sea abundante, aunque solamente es un número pequeño de estudiantes los que pueden sostener el ritmo demandante del profesor; este grupo, que ya habíamos mencionado antes, asume los retos que el docente plantea sin temor a equivocarse.

En la línea del maestro, nunca hay afirmaciones ni negaciones, a respuestas de los estudiantes, echa mano de argumentos o contrapreguntas para que ellos mismos arriben a saber si son adecuadas o no, en un juego dialéctico en el que desafortunadamente hay varios estudiantes que no se enganchan.

Se aprecia la habilidad con la que el profesor cambia el lenguaje que está manejando, cuando nota que en el que está, hay argumentos que no son suficientemente claros para los estudiantes. Sin embargo el análisis es profundo y llega a cansar a buena parte de los alumnos.

Configuración docente 6

Después del planteamiento del problema, una estudiante expone lo que entendió en el problema, las expresiones algebraicas que construyó y la manipulación que de ellas hizo, aunque no tiene éxito, en el sentido de que no logró llegar a la solución, mostró avances que permitieron al profesor retomar sus argumentos y encauzarlos, de tal manera que se logró cerrar el círculo llegando a la solución y comprobándola. De lo escrito se deduce

Configuración docente 7

A partir del intento infructuoso de la estudiante, el profesor retoma la conducción, organiza la información tratando de rescatar los argumentos expuestos por la alumna, pero llevando, mediante interrogantes, a que ella misma se diera cuenta dónde usó razonamientos inadecuados para el problema, se resuelve con nuevos elementos y se comprueba.

Configuración docente 8

La variante introducida, esto es, el considerar resolver distintos problemas (y sistemas), al mismo tiempo, fue asumido sin conflicto por los estudiantes, expresando en algunos casos su asombro ante la *"ocurrencia que tuvo el profesor*". Más allá de este hecho, la decisión oportuna que tomó el docente, impidió que se concibiera como un ejercicio de autoridad del profesor el que tuvieran que aprender a usar el método de eliminación gaussiana.

Configuración docente 9

El profesor después de hacer la asignación de la situación, delega la responsabilidad en los estudiantes, quienes la asumen sin conflicto, recurriendo a las prácticas que la mayoría domina: la construcción del SEL, y la sustitución para resolverlo, además de la comprobación de la solución. Dada la pericia que se demuestra en atender la situación, ésta en realidad es más un ejercicio que propiamente un problema, puesto que en realidad no representó un conflicto para el estudiantado.

Configuración docente 10

La situación trabajada en esta configuración es muy rica, y permite el accionar del profesor en diferentes ámbitos, los cuales en realidad han venido siendo una constante respecto a la conducta que el docente manifiesta en el aula.

Hay momentos situacionales, después de los cuales, el impulso al uso del lenguaje algebraico, a lo procedimental, a la interpretación y a la argumentación es notable; el efecto de esas acciones del profesor se va percibiendo en un buen número de alumnos.

Configuración docente 11

En este grado de avance en el desarrollo del trabajo, el profesor asume que los estudiantes verán con naturalidad el empleo del algoritmo de Gauss-Jordan, pero esto no resulta ser así, pues los alumnos se resisten a utilizarlo, argumentando la mayor facilidad de la estrategia de sustitución que habían venido empleando. Es notoria la actitud de un grupo numeroso de alumnos que replican con seguridad al docente y debaten sus puntos de vista; dicha actitud no solo es bienvenida por el profesor, sino que además la promueve.

Configuración docente 12

En esta ocasión, la configuración docente se restringe a escuchar y analizar las estrategias que usaron los estudiantes para resolver el problema planteado. Cuando en el inciso a), se pide la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$, y ellos la asocian con lo que han estudiado en otros cursos, utilizando esos recursos, esto se acepta sin sanción. En el inciso b), en cambio, les parece más natural construir el SEL y resolverlo

Configuración docente 13

La actividad docente es básicamente de monitoreo a la actividad del alumnado, cuidando los detalles, pero dejando libre su participación.

Configuración docente 14

Este tipo de problema es prácticamente un ejercicio para los estudiantes, donde lo novedoso radica en que están empleando la calculadora para hacer las operaciones con los renglones de la matriz aumentada, recurso con el cual cuenta el dispositivo que usan.

La actividad del profesor consiste en el monitoreo de las decisiones que se van tomando sobre qué operaciones realizar.

Dado que aparecen algunas dudas sobre el ejercicio, se retoman las ideas, pero aprovechando esta circunstancia, el profesor inicia un proceso de formalización de ideas, se introducen conceptos y algoritmos. Llama la atención el hecho de que el docente da completa libertad a los alumnos para que prueben sus propuestas al resolver el SEL mostrado; ellos se pueden desprender del discurso de profesor, discutir entre sí sus ideas y engancharse de nueva cuenta en el discurso del maestro, y si se hace necesario, argumentar a favor o en contra de lo que se dice y hace.

A pesar de ello, no todos los alumnos pueden sostener el nivel de la discusión y se pierden en otros quehaceres. En todo este proceso se usa los complementos tecnológicos que permiten proyectar lo que se está haciendo en la calculadora en un televisor.

Configuración docente 15

Solamente se monitorea el trabajo de los estudiantes.

Configuración docente 16

Dada la complejidad del problema, el debate es rico en argumentos; ya no hay nuevos conceptos ni procedimientos, pero sí estrategias diferentes de abordaje de la situación.

Configuración docente 17

La actividad del profesor consiste en ir exponiendo los conceptos y procedimientos que aparecieron a lo largo de las diferentes sesiones, pero con cierto nivel de formalidad. Se usa notación matemática para representar un SEL en general, a su solución, a la matriz aumentada. No se menciona ningún teorema o justificación a los procedimientos.

Pasaremos a continuación a transcribir la entrevista que hicimos al Profesor A, una vez que concluyó el estudio sobre los SEL.

Entrevista Profesor A.

Investigadora: ¿Cómo planeaste desarrollar este tema? ¿Antes de abordar un tema determinado te haces un esquema detallado de cuáles son las actividades que vas a trabajar, de qué manera lo vas a trabajar?, y si la respuesta es afirmativa, entonces en el caso específico del tema de los sistemas de ecuaciones lineales quisiera que me platicaras cómo organizaste el trabajo a desarrollar en el aula.

Profesor A: Bueno, mi mayor experiencia ha sido impartiendo el curso de álgebra superior en el área de ciencias de ingeniería … entonces de alguna manera el cambio este de planes que modifican los programas, me ha movido lo que ya tenía como muy estructurado y como muy organizado en el sentido de que más o menos, tenía muy estimados los momentos ¿no? y el tiempo de dedicación, entonces en este caso particular estoy como en esa fase de ir como midiendo qué tanto tiempo, qué cosas se van a ver, cómo se van a ver, y el caso particular de sistemas, … de alguna manera he estado improvisando, no tanto en el sentido de, mmm, del tema en sí, sino más bien en ver las actividades, los tipos de problemas, buscando los tipos de problemas favorecedores que no se puede decir que sean, no es que esté improvisando sino más bien estoy como probando sobre situaciones y a ver qué efectos está causando porque quisiera como identificar el trabajo que tienen ellos con los sistemas, o sea de repente, con los sistemas de ecuaciones, o sea de repente te encuentras a un grupo, y uno piensa que ya, que ya trabajó mucho eso en la prepa ¿no?, y entonces dices tú, no pues esto ya, ya lo tienen entonces en particular en este grupo yo vi que esa parte de sistemas la trabajan muy bien, pero sí he estado tomando, he estado intentando trabajar en una visión más de resolución de problemas prácticos porque se presta mucho el programa, y en este semestre lo que yo preparé, o sea como yo lo visualicé fue trabajar alguna situación sencilla para ellos donde lo que requieran para resolver, esas técnicas fuera las técnicas que ellos han manejado hasta la preparatoria, entonces con esta idea y yo tomando el proyecto este de álgebra en el que estamos trabajando.

Lo que hice fue tomar de los problemas, lo que ahí hay[1], entonces yo dije, con esta lista que tome de aquí con esto ya puedo empezar; sin embargo… yo identificaba muchas situaciones que podían explotarse en términos de poder aterrizar en un momento los métodos que te marca el programa, que son los de Gauss, y Gauss-Jordan. O sea yo esperaba que se diera ese tránsito a través de esa serie de problemas que yo les planteé para resolución, yo visualizaba poder atenderlo, pero la verdad es que no, o sea en otros

[1] Se está refiriendo a la selección de situaciones-problema elaborada por el colegiado de profesores.

semestres eh… en los otros semestres de alguna manera eso se da, pero particularmente cuando son *(alumnos)* repetidores. Se da con la lista que lleves porque ya tienen una experiencia entonces como que ellos adivinan qué es lo que va a pasar, y la primera vez lo que di si me resultó también complicado pero creo que ahí, más que nada me impuse ¿no?, pues en esta ocasión yo esperaba que de ahí saliera, pero esa era mi idea pues de empezar con algunos problemas, provocar que, tratar, buscar que salieran los métodos… Yo vi que no salieron como yo me lo esperaba, entonces de alguna manera fui como induciendo a que salieran y bueno al momento en que salieran reflexionar un poco en términos de los métodos sin meternos a profundizar mucho en ellos, o sea más bien yo planeé así, buscando la modelación, para que una vez que ellos entraran a la parte de resolución no voy a decir que tuvieran resuelto el problema de modelación sino que ya vieran la importancia de conocer o tener ideas de las técnicas ¿no? … sin pretender meterlos a una parte así de mucha manejo ¿no?, un manejo así de expertos en las operaciones porque, porque no se tienen más que con mucha práctica y no era la idea ¿no?, que tuvieran un nivel de "expertez" aceptable digamos ¿no?, entonces así lo pensé.

Investigadora: ¿Pensaste utilizar algún tipo de tecnología? ¿En qué sentido?, o sea, la tecnología ¿jugando qué papel?

Profesor A: Bueno ya tengo algún tiempo trabajando con la calculadora, y… eh, pues la experiencia con la calculadora te ayuda mucho, pero sí hay que tener como muy identificado en qué lo vas meter, entonces yo empecé un poco experimentando con la calculadora[2] buscando maneras de trabajar con los diferentes ambientes y en algún momento trabajé con el ambiente de aplicación "Home" que se llama, que es una aplicación donde tú puedes estar ingresando matrices, … la calculadora es la simbólica, te tendría que decir primero esto, los objetos pueden ser matrices, pueden ser lo que tú quieras, números; entonces yo intenté eh, hacer las operaciones en la calculadora o sea ingresando los renglones como renglones, o sea como matrices de un renglón y operar entre ellos, pero vi que sí se perdían mucho los muchachos en estas operaciones, porque teníamos que estar llevando la secuencia entonces tardábamos mucho.

[2] Se refiere a la calculadora Voyage 200

El semestre pasado esta compañera del proyecto hizo ese programa[3], entonces yo dije "pues aquí es" ¿no? o sea, me gustó porque… hacer las cuentas te lleva mucho tiempo y no nos permite a veces analizar las soluciones. Ya que identifiquen las operaciones, ya que sepan hacer algunas operaciones, entonces que empezáramos a usar la calculadora para agilizar la parte de la eliminación… eso es lo que yo quería… que ellos pudieran estar viendo las transformaciones que se van haciendo al momento que se van eliminando y que pudieran a partir de la resolución que tienen ahí, interpretar esas respuestas y regresar a la situación que se está modelando. Entonces ¿cómo la pensé?, ¿cuál era mi idea? era facilitarles cálculos básicamente ¿no? eso es como yo lo estoy pensando y particularmente con este programa, eso es, no tenía otra pretensión.

Investigadora: Bien, ya estás prácticamente al término del desarrollo de este tema, ¿que esperas que tus estudiantes estén en condiciones de hacer? en cualquier sentido o sea mi pregunta es en el sentido amplio, puede ser en relación a los contenidos matemáticos o a cualquier otro tipo de contenidos que tú tengas pensado, ¿qué esperas de tus estudiantes?, ¿que se estén en condiciones de qué?

Profesor A:...Algo así básico es que identificaran aquellas situaciones que son susceptibles de analizarse con un modelo lineal, que puedan identificar diferentes situaciones que se deben satisfacer y que las puedan plantear, que identifiquen en términos del contenido (*de la situación*), cuándo están hablando de un sistema de ecuaciones lineales, que puedan tener idea de alguna manera de resolverla ¿no? Que puedan incluso resolverla cuando se traten de sistemas de tamaño sencillo 2x2, 3x3 quizás algunos de 4x4 ¿sí?... donde puedan hacer operaciones, que hay métodos como el de igualación, sustitución. Que cuando vean tamaños más grandes tengan la sensación de que lo pueden hacer también y que puedan decidir a lo mejor usar un recurso que les apoye como la tecnología que les pueda dar respuesta directa.

Incluso no te lo dije eso ¿no? hay una aplicación para resolver sistemas que yo también quiero que trabajemos en la calculadora, pero una vez que ellos puedan leer las soluciones de la matriz,…, que puedan entender… saber si la solución es la única, si hay más, que vean cuando no hay solución y que puedan regresarse al problema y

[3] Está hablando de un programa para la calculadora, diseñado por una de las integrantes del grupo de profesores. Dicho programa resuelve el SEL, introduciendo los coeficientes del mismo.

decir… interpretar esa resolución en términos de la situación que se esté planteando ¿no? Básicamente eso, no pretendería más, no me metería ni siquiera a pedirles que demuestren cosas, de hecho no lo hago, no porque le reste importancia sino porque creo que son cosas que… (*ya*) están escritas y que ellos pueden consultar y pueden relacionar creo más fácilmente cuando para ellos tiene sentido lo que están analizando.

Sí siento un poco débil, o mucho débil, muy débil la parte de formalización; sin embargo creo que ahí pues eso puede subsanarse cuando uno se documenta en algún material como los libros, por ejemplo (*mis alumnos*) ya empezaron a pedir libros. Cuando empiezan a pedir libros ya digo ahh; entonces van y buscan y vienen y preguntan. En el caso particular de este tema no hay ningún material (*elaborado por los profesores*), cuadernos didácticos que respalden, espero que pronto los podamos sacar.

Investigadora: La serie de preguntas que vienen a continuación, tienen que ver con cosas que han venido sucediendo ahí en el aula, hace rato mencionaste el factor tiempo. Una preocupación que todos los profesores tenemos es el tiempo que los programas tienen asignados, mi pregunta es, ¿cómo calculas tu tiempo de trabajo?, en dos vertientes, primero el tiempo asignado al tema en el programa; es decir, si lo respetas si no lo respetas si priorizas otras cosas, qué consideraciones haces a ese respecto. Y luego ya más directamente trabajando en el aula quisiera que me comentaras algo en relación a cómo mides el tiempo en las interacciones con los alumnos, o sea ¿cuándo decides que es suficiente?, ¿cuando ves qué cosas?, ¿cómo tomas tus decisiones ahí?

Profesor A: Pues definitivamente que no me baso en los tiempos que me marca el programa…no me cuesta trabajo decidir ante un programa y un trabajo en el aula; es decir yo veo que definitivamente no voy a poder cumplir en el tiempo del programa, entonces yo prefiero trabajar más con los muchachos. Igual yo puedo irme guiando por el programa pero yo sé que no, no voy a avanzar nada y entonces prefiero avanzar un poco más con ellos.

Sí, definitivamente son muy cortos los tiempos pues uno tiene que acelerarle a veces ¿no? y a mí particularmente para ninguno de los temas me alcanzan los tiempos que tiene previsto el programa en términos de lo que me preocupa, me preocupo demasiado por cómo se está entendiendo. Yo siento que si me concretara a irme con lo que me está

marcando el programa quedarían como muchos vacíos, igual siguen quedando, pero siento que en la medida que ellos van como soltándose más y adquiriendo más familiaridad, *(entonces*) ya voy decidiendo hasta aquí ¿no? Es decir, si no los noto, si no veo que ellos manifiestan de alguna forma *(avances*), por lo menos en su discurso, si no van incorporando en su lenguaje lo que ahí se va mencionando,… sé que no puedo ir avanzando. Entonces definitivamente…no me guío por los tiempos que marca el programa, no es mi prioridad.
¿Cómo voy midiendo?, pues en la medida en que van saliendo las ideas en él (alumno), en el lenguaje que estamos trabajando; mmm, pero no entiendo la pregunta. La verdad no me había percatado de eso ¿no?, de decir eso hasta aquí, sino más bien yo voy formulando las preguntas. Y en la medida que yo veo que responden es que siento que está quedando bien la pregunta, si ellos no me responden me digo que pregunté mal, porque alguien, alguna responsabilidad tiene que haber ¿no? ante una pregunta…Veo cómo responden a la pregunta y si va en la dirección *(adecuada*), digo está bien la pregunta, sí se entendió y si no hay respuesta pues la modifico, más bien me guío por eso ¿no? …En mi salón de clases siempre vas a ver mucha preocupación de mi parte de que ellos estén involucrados,… porque es lo que me guía.

Investigadora: La interacción pues.

Profesor A: La interacción, ajá, entonces si el salón está calladito pues me preocupo.

Investigadora: A ver en relación a esto último que acabas de decir, uno observa, y esto siempre sucede en todos los grupos, que hay pequeños grupos de estudiantes que se aíslan o como que no se enganchan en lo que uno está diciendo, yo quisiera preguntarte si tú te percatas de que esa situación se está dando, y si te percatas, ¿haces algo?

Profesor A: De eso siempre me percato, pero por ejemplo lo que yo trato de hacer es al menos saber qué es lo que está pasando con ellos, porque a veces me doy cuenta de que no es que no estén atentos, sino que para muchos estudiantes es su estilo y entonces me fijo en el trabajo que están haciendo en los cuadernos, si están haciendo algo, pero sí me cuesta trabajo involucrarlos porque incluso a veces los estudiantes han dicho que no participan no porque no les interese sino porque no es su estilo. Me es difícil estar atendiendo a todos,…, en este grupo en particular ya los tengo identificados, que no es que no estén avanzando.

Investigadora: Hay otro asunto que me ha llamado la atención en el trabajo cotidiano que haces, cuando llegas a preguntar algo y los alumnos te responden, nunca dices si una respuesta es correcta o es incorrecta, ¿bajo qué consideraciones decidiste hacer esto, por qué lo haces?

Profesor A: Sí, ha sucedido mucho esto, en particular en esta sesión, de que no hago correcciones o no correcciones, sino que mi idea era más bien que podamos tener, o ver, entre todos, o sea que puedan tomar los criterios, las decisiones ahí, pero sí, me han quedado esas lagunas en este grupo; ya me había percatado de esos vacíos, de la corrección o la no corrección de algunas cosas, pero es que estaba esperando que se empezara a dar este asunto de *(saber)* qué me va a decir si está bien o no. Sí, me había percatado de esto que se está dando en este grupo.

Investigadora: Te lo pregunto porque los estudiantes como que están esperando que el profesor sea el que…

Profesor A: El que marque.

Investigadora: Sí, porque de alguna manera eso también los hace sentir respaldados y con confianza.

Profesor A: Así es. Estoy conciente de la confianza; sin embargo yo no quisiera imponer la autoridad del profesor sino más bien que ellos *(se)* vayan dando cuenta, y que digan bajo qué consideraciones eso sería correcto o no, qué es lo que está detrás, entonces no quiero la imposición de así a fuerzas sino más bien hacer ver por qué *(lo que responden o hacen)* está o no está bien, y que la razón no puede ser porque el profesor lo dice ¿no? Porque eso es lo que he intentado provocar (*aunque)* a lo mejor no lo he conseguido; y si es cierto que debe haber un momento en el que a lo mejor uno tiene que sacar la pauta como el responsable institucional ¿no? Me refiero al, al objeto de estudio, pero *(mi preocupación fundamental es*) que ellos mismos se puedan percatar de la corrección o no.

.

Investigadora: He observado que hay un buen número de estudiantes que tienen una excelente capacidad para argumentar, para contra argumentar, ¿así eran ellos desde que iniciaste el curso o tú crees que precisamente esta forma de trabajo que has venido sosteniendo de alguna manera haya influido en que esto se dé?

Profesor A: Ellos provienen de diferentes espacios, diferentes ambientes, y empezaron como un grupo que más tendía a estar escuchando. La interacción yo siempre la he estado promoviendo y desde el principio se empezó a dar, poco a poco fueron empezando en la medida en que ellos van viendo y se va marcando la pauta de que ahí es de estar interactuando *(con el)* profesor y estar interactuando entre ellos.

Así se han estado haciendo cada vez más, pero al principio llegaron y se sentaron y esperaron a ver qué decía el profesor, siempre provoca como una sensación de que no es a lo que están acostumbrados ¿no?

Investigadora: ¿Y nunca te hicieron algún reclamo en ese sentido?

Profesor A: Pues déjame hacer un poquito de memoria porque siempre hay el reclamo de "díganos qué hacer", "¿y qué vamos a hacer, qué sigue?"

Investigadora: Porque dicen "¿qué no sabe usted?", "¿Qué no sabe cómo sale este problema?"

Profesor A: Sí, "el resultado es tanto, ¿ya lo terminamos?", o "¿qué es lo que quiere, qué vamos a hacer?", no están acostumbrados a que un ambiente de trabajo funcione con base base en preguntas *(como)* ¿qué pasa si esto?, ¿qué pasa si lo otro? Sí, sí hubo un momento en el que preguntaban, pero *(en)* este momento ya no, ya es parte del ambiente que se promueve, incluso ellos me comentaban en alguna ocasión de otras clases. Dicen "no, es que en la otra clase vamos a que nos escriba un libro el maestro y a estar llenando páginas.

Investigadora: ¿Sí advierten las diferencias en las formas de trabajo en el aula?

Profesor A: Sí, claro, las diferencias de un profesor que va y les escribe todo en el pizarrón, a uno donde se provoca interacción.
Investigadora: No sé si sea algo general, pero en esta parte yo no he visto mucho trabajo independiente en el aula, o sea sí veo que tú siempre estás dejando problemas de tarea, trabajos que ellos tienen que hacer fuera del salón de clases, pero en el aula no ví momentos de trabajo independiente, ¿eso es una decisión que tú tomaste?, y ¿por qué razón la tomaste?

Profesor A: Sí, de hecho también te fijarás que no hay trabajo intencional en equipo, que yo diga "a formar equipos, pónganse a hacer trabajos", eso no lo hay porque, aunque estoy conciente de que es muy importante, los mismos tiempos son los que me frenan entonces yo de hecho siempre *(les digo)* "ustedes estén trabajando en equipo fuera de clase, júntense trabajen" y yo sé que lo hacen y quiero aprovechar el aula para la interacción del grupo, pero es más bien porque yo estoy suponiendo que ellos tienen por fuera de la clase esos espacios.

Investigadora: Otro aspecto del que me he dado cuenta es que la mayoría de las veces cuando tú lanzas una pregunta, las preguntas son abiertas, o sea lo que te quiero decir es que no llevan destinatario. ¿Eso también lo haces a propósito?

Profesor A: Sí, o sea pocas veces se pregunto así dirigido, sí lo hago a propósito, no me gusta preguntar directamente.

Investigadora: ¿Y eso por qué?

Profesor A: Más bien por cuidado, me da cuidado el estudiante.

Investigadora: ¿Que se pueda sentir incómodo?

Profesor A: Sí, incómodo, es por eso, quizá más porque supongo que están pensando y se sienten como que los está uno evidenciando; de hecho eso es lo que produce que sean unos cuantos los que se enganchen.

Investigadora: Pero también está el estudiante que aunque sabe, no se atreve a contestar por iniciativa propia, a tomar la palabra, si le dan un empujoncito como que se empieza a soltar.

Profesor A: Sí, de hecho lo hago muy poco pero sí, es algo que me falta afinar ahí, de lo mucho que me falta afinar.

Investigadora: Hace rato comentaste algo relacionado con el proyecto de álgebra[4], en lo que quisiera que fueras más específica, ¿las decisiones que ahí se tomaron, influyeron, al menos en este tema *(los SEL),* el tratamiento que hiciste en el aula

Profesor A: Como yo no estuve participando desde el inicio del proyecto, cuando dijeron que había actividades ya listas, creí que eran actividades ya probadas y que de alguna manera iban a producir buenos efectos, entonces lo que hice fue intentar armar *(el tratamiento del tema)* a partir de ahí; sin embargo me he dado cuenta que las actividades no están todavía estructuradas, y de repente cuando voy y las pruebo veo que hay problemas con errores, problemas que no te dan como tú esperas, y tenía que improvisar, incluso sacar ahí respuestas. También eso me sirvió y le va a servir al proyecto porque ya tengo respuestas y observaciones a las actividades. Además de eso, no sé a qué decisión te refieras en particular del proyecto ¿o sea si el proyecto impactó en mí en qué?

Investigadora: Se dijo que se iba a intentar que el abordaje de los temas fuera con base en la resolución de problemas, que cuando fuera posible se trataran de incorporar diferentes representaciones, y el uso de la tecnología.

Profesor A: Lo que pasa que para mí es por sistema partir de resolución de problemas, fundamentalmente esta parte (SEL), creo que es así como un campo naturalito para la resolución y porque tienes a la mano muchas situaciones sujetas de modelación. La tecnología es lo que ya he venido tratando de incorporar en la medida en que uno le va avanzando y en la medida en que hay condiciones para hacerlo. Ahorita es una contradicción pues estamos *(impartiendo clases)* en un laboratorio de calculadoras y no

[4] Nos estamos refiriendo al proyecto realizado por el grupo colegiado de profesores de álgebra que se reseñó en el capítulo anterior.

tenemos calculadoras, y los muchachos pues ven y reclaman, ellos tienen una versión virtual de la calculadora, que estuvieron usando con complejos y estuvieron usando con polinomios, pero ahora no la hemos trabajado porque como tiene la aplicación que resuelve los sistemas no quería que se me precipitaran y, y fueran a pensar que el fin es *(obtener)* la solución pues es que, como ya te platicaba, ellos han estado modificando.

Ellos han estado modificando sus esquemas en el sentido de que se han dado cuenta que el objetivo no es obtener una respuesta, sino más un objetivo de análisis, donde la respuesta es también sujeta de análisis. Creo que independientemente del proyecto, lo habría estado haciendo porque es parte de lo que realmente hago, más lo del proyecto lo tomé en cuenta en el sentido de lo que tenemos disponible como productos del proyecto.

Investigadora: Respecto a lo que señalas de que, “yo estoy convencida de la resolución de problemas”, etcétera, etcétera, ¿tú siempre has trabajado de esa manera, o has venido modificando tu forma de proceder en el aula? Y si tu respuesta es afirmativa, ¿porqué la has modificado?, o sea ¿cuáles son los factores que te han llevado a modificarla?

Profesor A: Pues ya tengo 19 años de experiencia docente, formado como matemático en un modo de trabajar donde te presentan todo y te das cuenta de que cuando tú le entras a los problemas, es cuando realmente aprendes. Muchos años trabajé de una manera en la que, al centro, estaba el presentarles las cosas a los estudiantes lo más bonito que podías ¿no? y lo más explicadito. Porque esa era mi concepción de la enseñanza y aunque estaba preocupada por lograr que ellos aprendieran, pues tenía una visión ya muy rebasada de qué es aprender y que tiene que hacer uno ahí para enseñar.

Creo que cambia mi manera de trabajar, a raíz de que yo entré al programa de maestría (*en Matemática Educativa),* porque incluso saliendo del programa de maestría después de toda la reflexión uno ya tiene otra visión, llegas al aula y te das cuenta que sí, el problema es bastante complejo. En la medida en que he ido integrando y en que he ido viendo la manera de enfrentar a los muchachos a los problemas pues me voy convenciendo de que es una buena alternativa para hacer el trabajo con ellos. De manera sistemática del 2000 para acá, aclaro, no es nada más la atención en problemas de aplicación, sino yo me refiero más a problemas de carácter matemático cuando uno analiza los problemas, los objetos matemáticos.

Investigadora: Mi última pregunta es la siguiente, hace rato tú me diste una relación de aspectos que en tu planeación contemplas desarrollar en los estudiantes, trabajando de la manera como lo haces. La pregunta es ¿cómo te das cuenta de qué tanto avanzaste en la consecución de tus objetivos?

Profesor A: Pues mira ahorita tienen los reportes de tarea que me van a hacer y tienen programado un examen.

Investigadora: Bien, es todo por el momento. Te agradezco mucho tu tiempo y amabilidad.

VI.2.2 Análisis del significado implementado por el Profesor A

Con los tres elementos que desglosamos en las secciones anteriores, trayectoria epistémica, docente y la entrevista, vamos a interpretar cuál es el significado implementado por el Profesor A. Cada una de esas componentes nos da información de diferente estilo, que complementada, permite reconstruir las prácticas operativas y discursivas del docente en relación a los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Reconocemos la existencia de todos los objetos matemáticos primarios durante el desarrollo de su práctica; sin embargo no todos están presentes con la misma frecuencia ni con la misma profundidad, lo cual nos habla de cuál es la orientación que el maestro da a sus actividades en el aula. Advertimos en este caso de estudio un excelente dominio de la estrategia de enseñanza denominada resolución por problemas, que se maneja a conciencia, tal y como él mismo lo señala en la entrevista.

Esta selección impacta no solamente las interacciones que busca mantener de manera constante entre él y los estudiantes, sino también las orientaciones y los objetos matemáticos que se privilegian durante las sucesivas discusiones, casi diríamos debates, que se promueven en el salón de clases.

En términos globales, se observa que el Profesor A tiene un gran convencimiento del papel que en la construcción del conocimiento matemático tiene la solución de problemas, sobre todo en la generación del pensamiento algebraico; el caso específico de los sistemas de ecuaciones lineales de proporciona un campo fértil para poner en práctica sus concepciones teóricas.

Mas que el aprendizaje de un algoritmo para resolver SEL, las preocupaciones de este profesor están centradas en propiciar que los estudiantes puedan generar competencias para enfrentarse con éxito a resolver problemas que involucren a los sistemas de ecuaciones lineales. Sus objetivos son ambiciosos, pues espera que los estudiantes puedan reconocer aquellas situaciones susceptibles de modelarse mediante los sistemas, que dominen estrategias para resolverlos y que sean capaces de analizar las soluciones que han encontrado.

En el proceso de estudio que desarrolló se distinguen varios momentos importantes:
i) Hay una primera fase, donde el tratamiento de las situaciones-problema que se plantearon, estuvo centrado en encontrar las relaciones entre las variables o incógnitas involucradas; en estos momentos apareció un recurso que resultó de mucha utilidad para que los alumnos entendieran de qué se trataba el problema. Nos referimos al espacio que el maestro dedicaba a preguntar por valores que fueran solución del problema; este tipo de preguntas ayudaron a ubicar a los estudiantes en la naturaleza de los valores que están buscando, pero pensamos que llegó más allá, porque los ubicaba en qué era lo que se estaba buscando.
Este recurso ayudó también a que fueran establecidas de manera más natural las relaciones entre las variables, de tal manera que el paso hacia la construcción de la representación algebraica de los SEL resultara natural. En esta fase no hubo gran preocupación por estudiar una estrategia determinada para resolver los SEL; se aseguró de que se existiese una, que se aplicara adecuadamente, pero no se limitó en ningún sentido.

ii) Hay otra fase donde se trató de convencer de la necesidad de manejar una forma más económica y potente para resolver los sistemas; esto hizo que se introdujeran a las matrices aumentadas y a los algoritmos de Gauss y Gauss-Jordan. Las ventajas que tuvo el manejar a las matrices para almacenar en ellas a los coeficientes y constantes del sistema se tomaron inmediatamente; no sucedió esto último con los algoritmos, pues los alumnos habían venido manejando estrategias con las cuales habían sido exitosos y no encontraban la razón para cambiar. Ante la resistencia evidente de los alumnos, el profesor fue paciente y propuso situaciones que hicieran notar la necesidad y potencia de esos algoritmos.

iii) La fase final, que resultó ser muy corta, fue básicamente de formalización. Aunque a lo largo del periodo de estudio que observamos, se fue introduciendo la terminología propia del tema, no es sino hasta la última configuración donde aparecen propiamente conceptos y procedimientos formalmente descritos.

Una práctica constante a lo largo de todo el proceso, fue la promoción a la argumentación; se solicitaban argumentos para validar cualquier acción ejecutada: escoger tal o cual estrategia, justificar pasos, discriminar soluciones, contrastar opiniones, por citar algunas. Todo esto se hacía, como ya se señaló arriba, con el recurso de las preguntas que el maestro formulaba.

El campo de problemas que se seleccionó fue variado, con versiones adecuadas al nivel de los estudiantes, pero en los que en casi todos había un reto presente. Es decir, eran situaciones problemáticas, en el sentido de que podían abordarse con los conocimientos con los cuales contaban los muchachos, aunque siempre estaba presente el elemento que los conflictuaba y los hacía asumir el desafío. El tamaño de los SEL resultantes no siguió, como frecuentemente sucede, ningún patrón determinado; no aparecieron primero los de 2x2, luego los de 3x3, etc., luego los no cuadrados, porque como ya se dijo, el interés del profesor estaba ubicado en otro lado.

Se observó también que había pequeñas secuencias de problemas, un ejemplo lo encontramos en las configuraciones 3, 4, y 5, donde el tipo de situaciones era el mismo, uno surgía del anterior variando ciertas condiciones. Este hecho permitía aprovechar la discusión del periodo inmediato anterior enriqueciendo las significaciones construidas hasta ese momento. Es en este bloque donde apareció un problema cuya solución no tenía sentido en el contexto estudiado, pues se encontraba un valor negativo para una cantidad de dinero que debía depositarse; el profesor aprovechó esta circunstancia para aumentar la complejidad del problema e introducir otros lenguajes. Desde nuestro punto de vista, esta fue un bloque de problemas que demandó ingenio y dedicación, tanto de parte del profesor como de los alumnos., cada uno en sus respectivos papeles.

No podemos señalar que hubiese un lenguaje dominante en el discurso del profesor: verbal, algebraico, numérico, gráfico, todo se introducía dependiendo de la situación que se estuviese trabajando y de lo que se considerara que era más útil, didácticamente hablando. Hacemos notar, sin embargo, que en el grupo había un conjunto de estudiantes que, sin mayores dificultades, podría encontrar las representaciones algebraicas de los sistemas que aparecían. Si bien no era una situación generalizada, este hecho proporcionaba al maestro la punta de lanza a partir de la cual podía dirigir la discusión sobre aquellos aspectos que le interesaban.

En cuanto a los procedimientos, ya mencionamos que se avalaban siempre las estrategias de los estudiantes, aunque sí hubo interés en encaminarlos hacia el reconocimiento de algoritmos con probada eficacia, como son el de Gauss y el de Gauss-Jordan. Solamente hacia el final del proceso de estudio se podría decir que hubo un poco de convencimiento sobre sus ventajas.

Los conceptos introducidos fueron los estrictamente necesarios para poder enfrentar las situaciones propuestas, y fue hasta en la etapa final donde se formalizaron, aunque de manera breve y sin preocupación por las propiedades, teoremas y sus demostraciones. Estos últimos se usaron implícitamente y nunca fueron cuestionados por los alumnos. Como puede verse en la entrevista, esto no fue casual; no estaba entre las prioridades del maestro.

El tiempo total dedicado a los SEL por el Profesor A, fue de 24 sesiones de una hora, en las cuales, como mostramos en la Tabla VI.1, se trabajaron 17 configuraciones. En varias ocasiones el tiempo por sesión sobrepasó el de la hora oficialmente asignada.

Sintéticamente, podemos decir que en el proceso de estudio conducido por el Profesor A aparecen claramente:

a) Una planeación de los contenidos matemáticos a tratar
b) Objetivos claramente definidos
c) Una estrategia didáctica concientemente seleccionada
d) Organización del trabajo en el aula
e) La iniciativa de emplear a la calculadora como dispositivo de agilización de cálculos

f) Un proceso de evaluación

Las funciones docentes asumidas por el Profesor A fueron de planeación, motivación, asignación de tareas, regulación y evaluación. Finalmente acotamos que no todo el grupo pudo seguir el ritmo de laboriosidad descrito: existió un buen número de alumnos que podían seguir el ritmo demandante del docente, que nunca bajaron la guardia, con un nivel de disciplina excelente y que alcanzaron un alto nivel discursivo y operativo; en contraparte, hubo otro conglomerado de alumnos quienes no fueron tan buenos interlocutores ni para el profesor ni para sus compañeros, que en varias ocasiones se desconectaron de la dinámica que privaba en el aula, y que participaron muy escasamente.

VI.3. El significado implementado por el Profesor B

El Profesor B tiene experiencia de 11 años y medio impartiendo clases de matemáticas, de los cuales 10 son en bachillerato y el resto en el nivel universitario; en este último nivel ha impartido el curso de álgebra en dos ocasiones. Durante el lapso en el que trabajó en preparatoria, en escuelas particulares, participó en un diplomado en docencia para el nivel superior; otro diplomado en innovación educativa, un diplomado sobre técnicas estadísticas para la investigación, y otro diplomado en enseñanza del cálculo. Además de lo anterior, había participado en una serie de cursos que tenían que ver con el uso de software, cómo hacer mapas conceptuales y diferentes cursos sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; al momento en que se realizó la observación de su actividad en el aula, estaba iniciando sus estudios de maestría en matemática educativa.

El grupo que atendió este profesor era de los llamados condicionados. Esto es, alumnos que no aprobaron el examen de selección que aplica la Universidad, pero que son admitidos de manera condicionada; es decir, sin inscribirles oficialmente, se permite que tomen clases durante un semestre al término del cual, si aprobaron todas sus materias con promedio mayor o igual a ochenta y cinco, se les inscribe reconociéndoseles estos cursos. A decir del profesor, su carácter de condicionados hacía que algunos profesores de otras de las materias que llevaban, les trataran de forma despectiva o con comentarios poco afortunados, lo que de alguna manera influía en que llegaran a su aula con desánimo; este hecho, de alguna manera trastocaba la dinámica de la clase, pues había que dedicar algún tiempo a tranquilizarlos.

El condicionamiento además no les aseguraba el ingreso a la carrera de su elección, sino que de aquellos interesados, por ejemplo en arquitectura, se les ofrecía espacio en ingeniería civil o en geología, es decir, en carreras en las que hubiesen quedado espacios libres después del proceso ordinario de admisión que lleva a cabo la Universidad.

Las sesiones de clase se desarrollaron en un aula equipada con 40 bancos individuales para uso de los estudiantes, escritorio y computadora para uso del profesor, ligeramente sucio; recientemente habían desaparecido cañón de video, mesa y silla. Hay dos pizarrones que quedan frente a los bancos de los alumnos. Usualmente hay demasiado ruido externo.

VI.3.1 Trayectorias epistémica y docente seguidas por el Profesor B

El Profesor B construyó su trayectoria epistémica a partir del enunciado de 13 situaciones problema, distribuidas a lo largo de doce sesiones, de aproximadamente 50 minutos cada una. La distribución del tiempo no es homogénea, pues depende de las decisiones didácticas que el profesor va tomando, en dependencia de las diferentes actividades que propone a los estudiantes y de la manera en la cual éstos se involucran en ellas. Cada situación-problema permite el tejido de una configuración epistémica, en cuyo desarrollo se advierte la presencia de los objetos matemáticos primarios, que dan origen a su vez a los diferentes estados de la trayectoria epistémica.

En la Tabla VI.3, presentamos la trayectoria epistémica seguida por el Profesor B, y posteriormente, desglosamos cada una de las trece configuraciones epistémicas identificadas en la actividad desarrollada por el profesor B.

Tabla VI.3. Trayectoria epistémica del Profesor B

Sesión de clase	Configura-ción epistémica	Unidad episté-mica	Descripción	Estado
1	1	0	Se plantea el problema de dietas que se modela mediante un SEL 2X2, con única solución	Situacional
1	1	1	Construcción del modelo matemático	Lingüístico-Procedimen-

				tal Estableci miento de una serie de relaciones
1	1	2	Introducción de un concepto, el de SEL 2X2	Conceptual
2	1	3	Solución del SEL por el método de sustitución	Procedimen-tal
3	1	4	Comprobación de resultados	Procedimen-tal y argu-mentatativo
3	2	5	Se plantea un problema de mezclas, que se modela mediante un SEL 2X2, con única solución	Situacional
3	2	6	Construcción del modelo matemático	Lingüístico-Procedimen-tal Estableci-miento de una serie de relaciones
3	2	7	Solución del SEL por el método de suma y resta	Procedimen-tal
3	2	8	Institucionalización de un procedimiento: método de suma y resta	Procedimen-tal
3	3	9	Se retoma el mismo SEL de la configuración 2, y se resuelve por el método de sustitución	Procedimen-tal
3	4	10	Se retoma el mismo SEL de la configuración 2, y se resuelve por el método de igualación	Procedimen-tal
3	5	11	Se plantea una nueva situación problema, en donde, a partir de la expresión algebraica de un SEL, se pide resolverlo, de tal manera que se practique lo ya visto y además se incorpore la representación gráfica del SEL en la discusión	Situacional
4	5	12	Uso de cada uno de los métodos vistos en clase, encontrando diferencias y similitudes, y agregando la representación gráfica	Procedimen-tal y lingüístico
4	5	13	Identificación de la intersección de dos rectas con la existencia de única solución para el SEL	Conceptual

5	6	14	Se propone resolver una nueva situación problema, un SEL de 2x2 que tiene solución única, por el método gráfico	Situacional
5	6	15	Solución del SEL por el método gráfico, resultando dos rectas que se intersectan en un punto, por lo tanto hay solución única	Procedimen-tal y lingüístico
5	7	16	Se propone resolver una nueva situación problema, un SEL de 2x2 que no tiene solución, por el método gráfico	Situacional
5	7	17	Solución del SEL por el método gráfico, rectas paralelas, no tiene solución	Procedimen-tal
5	7	18	Identificación de dos rectas paralelas con la no existencia de solución para el SEL 2X2	Conceptual
5	8	19	Se propone resolver una nueva situación problema, un SEL de 2x2 que tiene infinitas soluciones, por el método gráfico	Situacional
5	8	20	Solución del SEL por el método gráfico,	Procedimen-tal
5	8	21	Identificación de dos rectas coincidentes, con un SEL 2x2 que tiene infinitas soluciones	Conceptual
5	9	22	Planteamiento de una nueva situación problema, se proporciona la expresión algebraica de un SEL 3X3 y se pide resolverlo	Situacional
6	9	23	Solución del SEL por suma y resta	Procedimen-tal
7	9	24	Organización de la estrategia seguida para resolver el SEL anterior	Proposicio-nal
7	9	25	Introducción de los conceptos de matriz, operaciones entre los renglones	Lingüístico
7	9	26	Solución del mismo sistema, pero utilizando la matriz aumentada asociada al sistema	Procedimen-tal
8	10	27	Formalización de los conceptos introducidos: operaciones elementales en los renglones, forma escalonada reducida de una matriz y método de Gauss-Jordan	Conceptual
8	10	28	Planteamiento de varios ejercicios para decidir si una matriz está o no en su forma escalonada reducida	Situacional
8	10	29	Solución de los ejercicios anteriores	Procedimen-tal

8	11	29	Planteamiento de una nueva situación problema mediante la expresión algebraica de un SEL de 3x3	Situacional
8	11	30	Solución del SEL, 3x3, pero ahora llevando la matriz aumentada a la forma escalonada reducida	Procedimen-tal
8	11	31	Comprobación de que la solución obtenida es la correcta	Procedimen-tal y argu-mentativo
9	12	32	Planteamiento de una nueva situación problema, expresión algebraica de un SEL de 3x3	Situacional
9	12	33	Solución del SEL llevando la matriz a la forma escalonada reducida	Procedimen-tal
10	13	34	Planteamiento de una nueva situación problema: expresión algebraica de un SEL 3x5	Situacional
11	13	35	Solución del SEL, donde hay infinitas soluciones, encontrando algunas particulares	Procedimen-tal

Configuración epistémica 1.

El profesor inicia su actividad mediante el planteamiento del siguiente problema de dietas:

Un biólogo desea establecer una dieta, a partir de pescado y carne, que contenga 183 gramos de proteínas y 93 gramos de hidratos de carbono. Si el pescado contiene un 70% de proteínas y 10% de hidratos de carbono y la carne contiene un 30% de proteínas y un 60% de hidratos de carbono. ¿Qué cantidad de cada comida se necesita cada día?

La solución del problema requiere la construcción de un modelo, un SEL de 2x2, para lo cual es necesaria la identificación de las incógnitas y el establecimiento de las relaciones entre ellas y el resto de los datos que se están proporcionando. De acuerdo con la planeación del profesor, la situación, expresada en el lenguaje materno, requiere de la incorporación de un nuevo lenguaje, el algebraico. Cognitivamente, esta es una de las dificultades más fuertes planteadas a los estudiantes al momento de trabajar los sistemas de ecuaciones lineales; a ello hay que agregar el que en este caso particular se incluye información proporcionada mediante porcentajes, hecho que se traduce en una dificultad extra para los estudiantes.

Una vez lograda la tarea anterior, se procede a la identificación del concepto matemático introducido, el SEL de 2x2, y el siguiente paso es la aplicación del método de sustitución para resolver el sistema. La configuración concluye con la comprobación de los resultados obtenidos.

La anterior es una configuración epistémica bastante completa, porque identificamos en ella la puesta en juego de los siguientes objetos matemáticos (mencionamos aquellos que fueron hechos explícitos durante la clase):

b) Lenguaje: verbal y algebraico
c) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
d) Procedimientos: método de sustitución
e) Conceptos: Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; solución del sistema
f) Argumentos: Para validar la veracidad de las soluciones encontradas
g) Propiedades: de la igualdad, de los números reales con respecto a la suma y el producto

Configuración epistémica 2

El maestro pide a los estudiantes pasar a trabajar con la situación problema que sigue:

En el expendio de café "El Industrial" hay café de dos clases; uno de $54 el kilogramo y otro que cuesta $70 el kilogramo. Se desea obtener una mezcla de 200 kilogramos de café para venderla a $60. ¿Cuántos kilogramos deberán ponerse de cada clase de café?

El esquema seguido en la configuración anterior se repite; esto es, la tarea requiere que, a partir de la situación, se construya el modelo algebraico, el SEL de 2x2,

$$\begin{aligned} 54x + 70y &= 12000 \\ x + y &= 200 \end{aligned}$$

y se le resuelva haciendo uso de dos métodos diferentes al que se empleó en la configuración anterior, con lo cual se introducen nuevos objetos matemáticos. Finalmente se comprueba la veracidad de la solución encontrada.

Nuevamente se identifican la puesta en juego de los objetos matemáticos que siguen:

a) Lenguaje: verbal y algebraico
b) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
c) Procedimientos: método de suma y resta
d) Conceptos: Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; solución del sistema
e) Argumentos: Para validar la veracidad de las soluciones encontradas
f) Propiedades: de la igualdad, de los números reales con respecto a la suma y el producto.

Configuración epistémica 3

Se retoma el SEL planteado en la configuración anterior, y se resuelve mediante un método diferente, el de sustitución.

a) Lenguaje: algebraico
b) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
c) Procedimientos: método de sustitución
d) Conceptos: Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; solución del sistema
e) Argumentos: Para validar la veracidad de las soluciones encontradas
f) Propiedades: de la igualdad, de los números reales con respecto a la suma y el producto.

Configuración epistémica 4

Se retoma el SEL planteado en la configuración anterior, y se resuelve mediante un método diferente, el de igualación.

a) Lenguaje: algebraico
b) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
c) Procedimientos: método de igualación
d) Conceptos: Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; solución del sistema
e) Argumentos: Para validar la veracidad de las soluciones encontradas
f) Propiedades: de la igualdad, de los números reales con respecto a la suma y el producto.

Configuración epistémica 5

Esta configuración inicia con el planteamiento de la siguiente situación:

A una ecuación como x+y=200 se le llama ecuación lineal. La gráfica de esta ecuación es una línea recta en el plano x-y. Considere el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$x + 3y = 9$$
$$-2x + y = -4$$

Resuelva el sistema por cualquier método. Compruebe que los valores que encontraste son solución de la ecuación. Haz la gráfica de cada una de las ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas. ¿Qué relación puedes observar entre la solución del sistema y su gráfica? Explique.

Aunque el enunciado de la situación pide que se resuelva el SEL por cualquier método de los ya estudiados, la discusión se centra en la construcción de la representación gráfica del SEL, resultando un par de líneas rectas que tienen un único punto en común, el cual es identificado como la solución del sistema.

Objetos asociados:

a) Lenguaje: verbal, algebraico y gráfico
b) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
c) Procedimientos: métodos de sustitución, igualación y/o suma y resta; gráfico
d) Conceptos: Plano cartesiano, intersección de líneas rectas e identificación de ese punto con la solución del SEL
e) Argumentos: Para relacionar lo geométrico con lo analítico
f) Propiedades: De la igualdad, suma y producto de números reales

Configuración epistémica 6

Se parte de establecer el problema:

Resuelve el siguiente sistema, haz la gráfica. ¿Qué puedes decir de la gráfica y la solución del sistema?

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 6$$

El centro de la solución radica en la construcción de la gráfica, de donde se observa nuevamente que se trata de un par de líneas rectas que se intersectan en un solo punto, por lo que se concluye que el sistema tiene única solución.

Objetos matemáticos que surgen:

a) Lenguaje: verbal, algebraico y gráfico
b) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
c) Procedimientos: graficación de una línea recta dada su expresión algebraica
d) Conceptos: Plano cartesiano, intersección de líneas rectas e identificación de ese punto con la solución del SEL

Configuración epistémica 7

Resuelve el siguiente sistema, haz la gráfica. ¿Qué puedes decir de la gráfica y la solución del sistema?

$$-2x + y = 3$$
$$-4x + 2y = 2$$

El tratamiento de este problema se centra en la construcción de la gráfica, un par de líneas rectas que no se intersectan, lo que lleva a concluir que el sistema no tiene solución.

Objetos matemáticos que entran en juego:

a) Lenguaje: verbal, algebraico y gráfico
b) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
c) Procedimientos: graficación de una línea recta dada su expresión algebraica
d) Conceptos: Rectas paralelas e identificación de ese hecho con la existencia de un SEL sin solución.
e) Argumentos: Para relacionar lo gráfico con lo analítico

Configuración epistémica 8

Resuelve el siguiente sistema, haz la gráfica. ¿Qué puedes decir de la gráfica y la solución del sistema?

$$4x - 2y = 6$$
$$6x - 3y = 9$$

Al trazar la gráfica del sistema, se encuentran dos rectas que son coincidentes, por lo cual se concluye que hay una infinidad de soluciones.

Objetos matemáticos presentes en el proceso:

a) Lenguaje: verbal, algebraico y gráfico
b) Situación-problema, la ya enunciada, a partir de la cual surge la configuración
c) Procedimientos: graficación de una línea recta dada su expresión algebraica
e) Conceptos: Rectas coincidentes e identificación de ese hecho con la existencia de un SEL con infinitas soluciones
f) Argumentos: Para relacionar lo gráfico con lo analítico

Configuración epistémica 9

Ahora se proporciona un SEL 3x3,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \\ x - y - 2z &= -6 \end{aligned}$$

que al igual que casi todos los anteriores, tiene solución única; se resuelve mediante el método de suma y resta; lo novedoso resulta ser la organización que se le da al proceso de solución. Se aprovecha esta organización para dar entrada hacia el manejo de la matriz aumentada asociada al sistema y a las operaciones entre los renglones; una vez que se mencionan estos conceptos, se vuelve a resolver el sistema, pero ahora utilizando la matriz aumentada.

En este tenor, se identifica la presencia explícita de un mayor número de objetos matemáticos presentes en la configuración:

a) Lenguaje: algebraico y matricial,
b) Situación-problema, la ya enunciada,
c) Procedimientos: método de suma y resta mediante el escalonamiento de una matriz
d) Conceptos: Matriz aumentada asociada a un SEL, operaciones entre renglones de una matriz
e) Argumentos: Para identificar la equivalencia entre las operaciones que se hacen con las ecuaciones del sistema y las operaciones entre los renglones de la matriz aumentada

f) Propiedades: de la igualdad, de los números reales con respecto a la suma y el producto para poder hacer los ceros y los unos que requiere el escalonamiento de la matriz

Configuración epistémica 10

Se formalizan e institucionalizan las operaciones elementales entre los renglones de la matriz aumentada, los pasos con los cuales se organiza el método de Gauss-Jordan, la forma escalonada reducida de una matriz; se formula también la existencia de SEL donde el número de ecuaciones es diferente al número de incógnitas.

A partir de esta teoría, se plantean cinco matrices aumentadas donde se trata de identificar aquéllas que están en su forma escalonada reducida, tratando de ejercitar los conceptos previamente introducidos.

Las matrices son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Objetos matemáticos identificados:

a) Lenguaje: representación matricial de un SEL

b) Situación-problema: la ya enunciada,

c) Argumentos: Los necesarios para decidir si la matriz está o no en la forma escalonada reducida; otros para interpretar la solución del sistema de acuerdo a la información que proporciona la matriz

d) Procedimientos: Método de Gauss-Jordan

e) Conceptos: Matriz aumentada asociada a un SEL, operaciones entre renglones de una matriz; sistemas no cuadrados

f) Propiedades: De los números reales con respecto a la suma y producto; de la igualdad

Configuración epistémica 11

Ésta inicia con el enunciado del siguiente SEL de 3x3

$$\begin{aligned} 4x + -2y - 3z &= 8 \\ 5x + 3y - 4z &= 4 \\ 6x - 4y - 5z &= 12 \end{aligned}$$

Se resuelve el SEL construyendo la matriz aumentada y llevándola a la forma escalonada reducida. Este sistema también tiene solución única.

Objetos matemáticos identificados:

a) Lenguaje: algebraico y matricial, para representar el SEL

b) Situación-problema: el SEL de 3x3

c) Procedimientos: Método de Gauss-Jordan

d) Argumentos: Los necesarios para decidir si la matriz está o no en la forma escalonada reducida; otros para interpretar la solución del sistema de acuerdo a la información que proporciona la matriz

e) Conceptos: Matriz aumentada asociada a un SEL, operaciones entre renglones de una matriz; sistemas no cuadrados

f) Propiedades: De los números reales respecto a la suma y producto

Configuración epistémica 12

Se plantea la situación:

Resuelva, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

$$
\begin{aligned}
3x - 3y + 3z &= 9 \\
2x - y + 4z &= 7 \\
3x - 5y - z &= 7
\end{aligned}
$$

La solución del sistema se aborda utilizando el método de Gauss-Jordan.

Objetos matemáticos identificados:

a) Lenguaje: algebraico y matricial para representar el SEL
b) Situación-problema: el SEL de 3x3
c) Procedimientos: Método de Gauss-Jordan
d) Argumentos: Los necesarios para decidir si la matriz está o no en la forma escalonada reducida; también para interpretar la solución del sistema de acuerdo a la información que proporciona la matriz
e) Conceptos: Matriz aumentada asociada a un SEL, operaciones entre renglones de una matriz; forma escalonada reducida de la matriz
f) Propiedades: De los números reales respecto a la suma y producto

Configuración epistémica 13

Por primera vez se plantea un SEL que no es cuadrado:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 6 \\
-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

Se encuentra la solución escalonando la matriz aumentada, se encuentran algunas soluciones particulares del mismo y se da por concluido la clase y con ella el tema.

Los objetos matemáticos involucrados aquí son:

a) Lenguaje: algebraico para representar el SEL;
b) Situación-problema: Expresión algebraica de un SEL de 3x5
c) Procedimientos: Método de eliminación gaussiana
d) Conceptos: Tamaño del SEL, soluciones infinitas y particulares
e) Propiedades: De los números reales con respecto a la suma y producto

f) Argumentos: Para decidir si el proceso ya terminó y para interpretar lo que muestra la matriz escalonada reducida en términos de las soluciones del sistema.

Trayectoria docente seguida por el profesor B, asociada a su trayectoria epistémica

Al igual que se hizo en el caso de la trayectoria epistémica, vamos a mostrar la trayectoria docente construida por el profesor B, después de lo cual desglosaremos cada una de las configuraciones docentes.

Tabla VI.4. Trayectoria docente del Profesor B

Sesión de clase	Configuración epistémica	Descripción de la actividad del profesor	Estado
1	1	Asigna la tarea a realizar, organizando a los estudiantes en equipos	Asignación
		Organiza a los estudiantes para trabajar en equipo	Asignación
		Impulsa y motiva la actividad de cada uno de los equipos, a través de cuestionamientos y refutaciones	Motivación
		Introducción de un concepto, el de SEL 2X2	Regulación
2	1	Conduce hacia la solución del SEL por el método de sustitución	Regulación
3	1	Comprueba resultados	Regulación
3	2	Asigna la siguiente tarea a realizar, la cual se aborda mediante una discusión grupal, en el cual el profesor juega el papel de guía	Asignación
3	2	Organiza el trabajo en el aula, donde se asigna el papel de guía, retomando la responsabilidad principal de la tarea a realizar	Regulación
3	2	Impulsa y motiva la actividad de los estudiantes a través de cuestionamientos y refutaciones	Regulación
3	2	Conduce hacia la construcción del SEL de 2x2 que modela la situación problema	Regulación
3	2	Guía hacia la solución del SEL, empleando el método de suma y resta	Regulación
3	3	Se resuelve el SEL por el método de sustitución	Regulación
3	4	Se resuelve el SEL por el método de igualación	Regulación
3	5	Plantea una nueva situación-problema, la cual consta de la expresión algebraica de un SEL que debe	Asignación

		resolverse por cualquiera de los métodos ya vistos, solicitando además su representación gráfica	
4	5	Promueve la ejercitación de los métodos anteriores	Regulación
4	5	Introduce la representación gráfica del SEL	Regulación
4	5	Relaciona la intersección de dos rectas en el plano cartesiano con la existencia de una única solución para el SEL que se está resolviendo	Regulación
5	6	Propone resolver una nueva situación problema, por el método gráfico, presentando la expresión algebraica de un SEL 2x2 que tiene solución única	Asignación
5	6	Conduce hacia la representación gráfica del SEL, dos rectas que se intersectan en un punto, identificando nuevamente esta situación con la existencia de una solución al SEL	Regulación
5	7	Propone resolver una nueva situación problema, presentando la expresión algebraica de un SEL 2x2, que no tiene solución, por el método gráfico	Asignación
5	7	Conduce hacia la representación gráfica del SEL, dos rectas paralelas, identificando esta situación con la no existencia de solución al SEL	Regulación
5	8	Propone resolver una nueva situación problema, presentando la expresión algebraica de un SEL 2x2, que tiene infinitas soluciones, por el método gráfico	Asignación
5	8	Conduce hacia la representación gráfica del SEL, dos rectas coincidentes, identificando esta situación con la existencia de infinitas soluciones al SEL	Regulación
5	9	Propone nueva situación-problema mediante la expresión algebraica de un SEL 3X3	Asignación
6	9	Intenta que los estudiantes incorporen lo estudiado al resolver los SEL 2x2, para resolver el de 3x3	Asignación
6	9	Conduce hacia la solución del SEL 3x3	Regulación
7	9	Organiza los pasos seguidos para resolver el problema anterior	Regulación
7	9	Introduce nuevos conceptos: matriz aumentada, operaciones entre renglones de una matriz	Regulación
7	9	Resuelve el SEL anterior, pero ahora utilizando la matriz aumentada asociada al sistema	Regulación
8	9	Formaliza e institucionaliza los conceptos que previamente introdujo: operaciones elementales en los renglones, forma escalonada reducida de una matriz y	Regulación

		método de Gauss-Jordan	
8	11	Asigna varios ejercicios para que los estudiantes traten de reconocer si la matriz dada está en la forma escalonada reducida	Evaluación
9	11	Plantea una nueva situación problema: dada la expresión algebraica de un SEL 3x3, resolverlo llevando la matriz aumentada a la forma escalonada reducida	Asignación
8	11	Impulsa, motiva y orienta a los estudiantes para que alcancen el objetivo propuesto	Motivación
8	11	Resuelve el SEL y comprueba los resultados obtenidos	Regulación
9	12	Asigna un nuevo SEL 3x3, para que los estudiantes, de manera independiente, intenten resolverlo.	Asignación
9	12	Orienta a los estudiantes que presentan dudas y dificultades para resolver el ejercicio anterior.	Evaluación
9	12	Resuelve el problema anterior, mediante elaboración conjunta con los alumnos	Regulación
10	13	Propone resolver un SEL de 3x5	Asignación
10	13	Conduce el proceso de solución mediante interrogantes; esta actividad le permite darse cuenta de que todavía existen algunas dificultades conceptuales y procedimentales para resolver el SEL	Evaluación
10	13	Ante la incapacidad que manifiestan los estudiantes para responder a sus preguntas, propone una matriz escalonada de menor tamaño para ilustrar el proceso de interpretación y construcción de soluciones particulares y generales de un SEL que tiene infinitas soluciones.	Regulación
10	13	Se da por concluido el proceso de estudio de los SEL, programándose un examen escrito	Regulación

Configuración docente 1.

El trabajo del profesor inicia cuando distribuye una hoja que contiene dos problemas y solicita a los estudiantes que resuelvan el primero de ellos, cuyo enunciado ya mostramos líneas arriba. Se les pide que se organicen libremente por equipos para que procedan a iniciar su trabajo. No todos asumen la tarea, pero conforme transcurre el tiempo, se involucran en ella. El profesor se desplaza entre los diferentes equipos, respondiendo a las interrogantes que se le formulan, o planteando otras, con la intención de llamar la atención de los alumnos sobre los datos que se proporcionan, intentando guiarlos hacia el establecimiento del SEL.

Es muy notorio el buen nivel de comunicación que el profesor logró establecer con el grupo, pues los jóvenes bromean, preguntan confiadamente y expresan sin temor sus opiniones. A pesar de los repetidos impulsos del profesor, no logran construir el SEL que modela la situación planteada, pero empiezan a proponer soluciones mediante el tanteo; o restringiendo las condiciones (pensando solamente en la cantidad de proteínas que se debe ingerir y distribuyendo la cantidad de carne y pescado de manera que se cumpla ese requerimiento, pero dejando de lado a los carbohidratos). Las intervenciones del profesor propician que se den cuenta del hecho, pero éste no aprovecha esta parte del trabajo de los estudiantes para impulsarlos a reflexionar sobre la relación que establecen cuando dan esa solución., solamente les señala que no están contemplando todas las condiciones del problema.

Transcurrida la mitad de la sesión, el maestro autoriza el que los alumnos pasen a tratar de resolver el segundo de los problemas, que trata sobre una mezcla de dos tipos de café; esto lleva a que la actividad de la clase se disperse, pues algunos muchachos siguen trabajando con la situación anterior. Los equipos que trabajan en esta nueva situación manifiestan la misma conducta expuesta con anterioridad, solamente consideran una de las condiciones y empiezan a proporcionar parejas de valores que cumplen con ella, pero al cuestionárseles sobre la otra condición, expresan desesperación, al punto que uno de ellos llegó a exclamar: *¡No le entiendo nada, profe, hágalo usted!*

Faltando algunos minutos para la conclusión de la clase, el profesor pide a un estudiante que pase al pizarrón, iniciándose un proceso de discusión colectiva sobre el primero de los problemas, por medio del cual se trata de guiar al alumno que se encuentra al frente. Después de una serie de intentos no exitosos por parte del estudiante, se pide a otro alumno que pase a apoyarlo; este último, quien tiene una idea un poco más cercana a lo que el maestro quiere, es guiado hasta que llega a establecer el SEL. Dado el avance de la sesión, e inminente fin de la misma, se asigna como tarea extraclase la solución del mismo.

Durante la segunda sesión utilizada en el desarrollo de la configuración, el profesor realiza una síntesis de la situación planteada en la clase anterior, mediante un mapa conceptual, tomando como base la expresión algebraica del SEL, lo cual se aprovecha para generar participaciones alrededor de los métodos de solución que son recordados por los estudiantes; éstos entran a compartir el lenguaje y conceptos que les son sugeridos. A pesar de ellos, cuando llega el momento en el que tienen que utilizar el algoritmo escogido, que fue el de sustitución, manipulan incorrectamente lo que los lleva a obtener un valor negativo. El hecho no les llama la atención, pues evidentemente no lo relacionan con la situación y la naturaleza de las incógnitas que deben encontrar. Finalmente, el profesor logra conducir la actividad hasta encontrar los valores inicialmente buscados, lo que permite poner punto final a la segunda de las sesiones.

Al inicio de la tercera clase, nuevamente se hace una síntesis mediante un mapa conceptual que incluye ahora las soluciones previamente encontradas. Con esto concluye la primera de las configuraciones didácticas, inmediatamente después de la cual, se plantea la segunda de las situaciones-problema, generadora de la segunda de las configuraciones epistémicas, la cual se desarrolla bajo la configuración docente siguiente.

Configuración docente 2

Para abordar la segunda de las situaciones, el problema de las mezclas de café, los estudiantes siguen trabajando por equipos, bajo la orientación del profesor, repitiéndose el esquema seguido en la configuración docente 1, esto es, hay alumnos que proponen soluciones particulares que atienden sólo parte de las condiciones, lo cual pudiera ser un buen principio para que el profesor los condujera al establecimiento de la relación algebraica a la cual desea que los estudiantes arriben puesto que resalta el hecho de que sus orientaciones van hacia el establecimiento de una expresión algebraica. Esto es tan evidente, que uno de los alumnos pregunta *"Profe, ¿tiene que salir una ecuación?"* y ante la respuesta afirmativa del docente, dos estudiantes proponen las dos ecuaciones que conforman el sistema. Una vez lograda esta etapa de la configuración, se pasa a la utilización del método de suma y resta para encontrar la solución; *¡Este método se llama de suma y resta*!, dice el profesor, y aprovecha para sumar esta idea a lo que hizo, en relación al método de solución, asignando ahora la tarea de resolver el mismo sistema por el método de sustitución, después de lo cual indica: *¡Ya repasamos acerca* *del método de sustitución! ¡Ya repasamos acerca del método de suma y resta! Y pregunta: ¿En qué consiste el método de igualación?* Esto le da pie para resolver el mismo SEL, pero ahora por el método de igualación, con lo cual concluye la configuración docente 2..

Configuración docente 3

Esta inicia cuando el profesor asigna tarea extra clase, la cual debe retomarse desde su inicio en el aula, puesto que no fue atendida por los alumnos. El maestro asigna el abordaje del problema individualmente, indicación atendida parcialmente, puesto que algunos jóvenes empiezan a trabajar por parejas; en cualquiera de los casos, solicitan con bastante frecuencia ayuda al docente, quien con gran paciencia trata de impulsarlos mediante preguntas y refutaciones a partir de los razonamientos que los muchachos hacen. Al transcurrir el tiempo, aumenta el intercambio entre los alumnos, ahora ya no son parejas los que trabajan, sino equipos formados independientemente, los cuales se involucran en la discusión del problema, incrementándose los intercambios de opinión entre ellos. Termina el tiempo y con él el trabajo que se realiza alrededor de este problema, los resultados no se retoman grupalmente, tal y como había venido siendo la práctica.

Configuración docente 4, 5 y 6

Agrupamos estas tres configuraciones pues están estructuradas de manera muy similar; son configuraciones muy cortas, en las cuales el docente propone la representación algebraica de un SEL de 2X2, y solicita a los alumnos que lo resuelvan tanto algebraica como gráficamente en sus cuadernos, pidiendo al mismo tiempo a alguno de los estudiantes que pase al pizarrón a trabajar el problema; esto se hace bajo su conducción, siguiendo el ya usado esquema de preguntas y refutaciones; las conclusiones son elaboradas bajo su conducción.

Configuración didáctica 7

La sesión inicia cuando el profesor asigna la tarea, resolver individualmente un SEL que integra elementos novedosos respecto a los estudiados hasta ese momento (una ecuación y una incógnita más); al principio resulta difícil lograr la integración de los alumnos en el trabajo, pues si bien algunos muestran interés desde el inicio, otros se dedican a actividades disímbolas que no tienen nada que ver con la clase: comen, cantan, duermen, bostezan. El maestro no pierde la compostura y con amables y pacientes comentarios, empieza a lograr que otros más se interesen en la actividad que ha propuesto, lo cual se logra poco a poco. Sin embargo, cuando esto sucede, la duración de la sesión ha terminado, por lo cual el mismo problema se retoma en la siguiente clase. Un alumno pasa al pizarrón, expone lo que logró hacer: encontrar una solución sumando y restando ecuaciones, al término de lo cual intenta graficar en un plano; se autopregunta: *¿y la z?*, borra el plano y explica otra vez, por petición del profesor, la estrategia algebraica que siguió para encontrar la solución del SEL.

El maestro retoma la dirección de la clase, y empieza a introducir intuitivamente conceptos (matriz aumentada, operaciones entre renglones y a llamar la atención del alumnado respecto a las ventajas que tiene, a la hora de resolver un sistema, el trabajar solamente con sus coeficientes y constantes, concluyendo su intervención con la expresión: *"No es nuestro objetivo cada vez que hacemos operaciones, estar regresando a la matriz"*.

-*"O sea profe"*, le interpela uno de los alumnos, *"¿el chiste es dejar ceros?*

-"*El chiste es dejar unos en la diagonal y ceros abajo"*-, responde el maestro*".*

- *"Está más fácil el método de suma y resta; ¿así lo vamos a hacer en el examen? ¿Lo vamos a hacer tan complicado?*" Con estas preguntas de los estudiantes, concluye la configuración.

Configuración didáctica 8

En esta ocasión, el profesor reparte una hoja que contiene resumen de los conceptos que se presentaron durante la configuración epistémica 7, haciendo una lectura comentada. En esa hoja se muestran algunos ejercicios que le permiten ejemplificar lo que está diciendo, interpelar a los alumnos y de alguna manera evaluar si logran establecer alguna relación entre el concepto que lee y el ejercicio sobre el cual pregunta. Se muestra satisfecho con las respuestas de los alumnos, explicando a los pocos que manifiestan extrañeza o incapacidad para dar una respuesta adecuada, cuál es ésta.

Configuración didáctica 9

De nueva cuenta, el maestro presenta la situación y asume la dirección del proceso al frente, en el pizarrón, insistiendo en las similitudes que se presentan cuando se resuelve un SEL por suma y resta y cuando se hace llevando la matriz aumentada asociada al sistema a su forma escalonada reducida, llega a la solución y la comprueba. Durante todo el proceso, intenta que éste se lleve a cabo mediante elaboración conjunta entre él y los estudiantes; de cualquier manera, la duración de sus intervenciones es, en esta ocasión, muy superior a la que había mantenido en configuraciones anteriores.

Configuración didáctica 10

El profesor propone un SEL para resolverse en actividad independiente por los alumnos; en este momento, todos los asistentes a la clase usan la matriz aumentada y el método de Gauss-Jordan; aunque los alumnos tardan en integrarse, finalmente lo hacen. El profesor no deja de estar al pendiente de la actividad que realizan los alumnos.

Configuración didáctica 11

El profesor repite el recurso de entregar un resumen escrito, que le sirve como guía para iniciar una discusión con los alumnos sobre la temática ahí tratada; con esto procura dar algún grado de formalización a los objetos matemáticos que han aparecido en esta parte del proceso de estudio de los SEL.

En este momento, la participación de los alumnos es muy abundante, no se teme preguntar, ya sea a los compañeros que se ubican como más adelantados o al mismo profesor.

Configuración didáctica 12

Cuando plantea el último sistema de la trayectoria epistémica, la actividad individual que el profesor solicita no prende; aunque de su parte hay mucha atención personalizada, ésta evidentemente no es suficiente para satisfacer los requerimientos de los estudiantes, lo que lleva a algunos a hacer otras cosas que no tienen nada que ver con la clase.

Cuando por fin logra concentrar la atención de los alumnos, el maestro hilvana sus intervenciones alrededor de dos cuestionamientos, ¿qué es la solución de un SEL? y ¿Cuántas soluciones tiene este sistema? Las respuestas proporcionadas indican al docente que todavía no hay un nivel de comprensión adecuado en los estudiantes sobre aspectos conceptuales que son claves a la hora de resolver un SEL, por lo que usa una matriz escalonada de menor tamaño que la que ha propuesto con anticipación, para ilustrar cómo se procede cuando en un SEL aparecen infinitas soluciones, evidenciando su intención de que este proceso sea extrapolado para contestar las preguntas que ha formulado. Finalmente, el problema planteado al inicio de la configuración no es resuelto, siendo asignado como tarea extraclase. Así concluye esta configuración y con ella el proceso de estudio de los SEL que llevó a cabo el Profesor B.

VII.3.2. Entrevista a Profesor "B"

Investigadora: Quisiera que empezáramos platicando acerca de las características del grupo, cuántos estudiantes, aspirantes a ingresar a qué carrera, porque yo me acuerdo que me comentaste que era un grupo de los condicionados.

Profesor B: Ok, en ese grupo había estudiantes que estaban condicionados porque en su examen "EXHCOBA"[5] habían salido con menos puntos y entonces estaban condicionados a aprobar todas las materias, había de todas las áreas, de minas, de industrial, de civil y de geología, condicionados a entrar a una carrera que no era necesariamente en la que estaban inscritos; la escuela les propuso inscribirlos a una determinada carrera, pero la mayoría tenían la intención no de entrar a la carrera que la escuela les había propuesto, querían en realidad otras. Algunos querían estudiar arquitectura que no tenía nada que ver con civil o con minas

Investigadora: ¿Te acuerdas cuántos estudiantes eran o al menos cuántos se mantuvieron constantes durante el semestre?

Profesor B: **S**é que eran a lo más 25, pero que iban regularmente serían como unos 20, 22 aproximadamente, porque algunos dejaron de asistir.

Investigadora: En alguna ocasión estuvimos comentando, antes de empezar la video-grabación, respecto a que veías un cierto estado anímico en estos estudiantes, que había un profesor o dos profesores, no sé exactamente, de otros cursos, que les hacían cierto tipo de comentarios no muy agradables, y que tú notabas que eso de alguna manera influía en el comportamiento de los estudiantes, ¿qué nos puedes comentar al respecto?

Profesor B: **S**é lo que ellos me comentaban, yo no lo comprobé, no escuché a los otros maestros; sin embargo, sus comentarios y sus actitudes en las clases te hacían ver que ellos se sentían inferiores a los demás estudiantes, en el sentido de que estaban condicionados y esto de cierta manera los hacía sentirse "tontos" y así lo expresaban. Si

[5] Se refiere al examen que aplica la Universidad de Sonora a quienes aspiran a ingresar a ella.

tú querías que se abordara algún tema durante la clase, iniciabas con los antecedentes de algún tema y ellos: “es que somos muy tontos maestra”, “es que nosotros no sabemos”, y de cierta manera uno piensa, pues es más fácil no saber, porque así no tienen ningún compromiso. Algunos estudiantes a veces lo hacen así, contestan “no sé” porque la responsabilidad es menor, así lo pensaba yo al principio hasta que ellos empezaron a manifestarse más bien en el sentido de que se les trata como “tontos” y entonces tienen que ser “tontos”, y uso esa palabra porque ellos la usaban.

“Nosotros no aprendemos, no tenemos la capacidad pero nos dieron esta oportunidad para que no anduviéramos en la calle”, no sé, situaciones así. En varias ocasiones yo traté de hacer alguna actividad ya no de matemáticas, sino de tratar de quitarse esas barreras que ellos mismos se estaban poniendo pero no creo haber incidido tanto como a veces he incidido en otro grupo.
Inclusive ellos me comentaban que las personas con las que tenían más trato, que en este caso sería el coordinador de la carrera, que inclusive él les decía cosas en un sentido negativo, por lo menos eso es lo que expresaban.

Investigadora: Centrándonos en la forma como estuviste desarrollando el tema de los sistemas de ecuaciones lineales, antes de iniciar el tratamiento del tema ¿hiciste algún tipo de planeación? y si tu respuesta es afirmativa, ¿en qué dirección, en qué sentido iba esta planeación?

Profesor B: Yo estaba iniciando la maestría, creo que era el primer o segundo semestre, y entonces estábamos revisando el Eslabón Perdido de Chevallard, en donde se habla un poco del tema y de una manera de hacer una trayectoria didáctica con los sistemas de ecuaciones, y entonces yo traté de hacer eso y algunas otras cosas que también venían en ese libro, pero para polinomios.

Una manera era abordar el tema de tal forma, que se logre que, partiendo en el caso de los sistemas de ecuaciones, de un sistema de 2x2 y de los métodos que ellos ya conocían para resolverlo, después viéramos la utilidad de esos mismos métodos con los sistemas de 3x3 y luego buscar generalizar a sistemas de cualquier tamaño y ver qué es lo que si funciona y qué no funciona de los que son sistemas cuadrados, por ejemplo, y de los métodos para solución. Ahora pienso de otra forma la manera de abordarlos pero en ese momento me pareció buena la idea y eso es lo que traté de hacer; se tuvieron muchas dificultades y, algunas de parte de los estudiantes, y algunas yo creo de parte mía, en el sentido de no ver las dificultades que ellos estaban teniendo para resolver los problemas, y otras situaciones ajenas a la clase, externas que provocaron que los estudiantes se sintieran cohibidos y también no manifestaran en realidad lo que podrían haber hecho. Se conjuntaron muchas cosas, pero en términos generales, de cómo se abordó los sistemas de ecuaciones, pues serían principalmente eso, el tratar de llegar a un método más general para resolverlos.

Investigadora: ¿Utilizabas en algún momento de manera razonada, planificada previamente, tipos de problemas de ingeniería?

Profesor B: Para iniciar no, para iniciar tomé algunos problemas del proyecto de álgebra que desafortunadamente no todos tienen que ver con problemas de ingeniería, pero era lo que teníamos en ese momento para, por lo menos iniciar el tema. Algunos que quedaron de tarea pues tendrían que ver, pero la mayoría no, o sea estaban enfocados a que, *(los alumnos)* primero comprendieran o recordaran más bien, los métodos que tenían para resolver los sistemas.

Creo que los problemas de ingeniería que nosotros teníamos en ese momento *(no servían)* si la intención era partir de sistemas de 2x2 y luego generalizar; los problemas con los que habíamos estado trabajando en el proyecto, los que tenían que ver con ingeniería eran sistemas no cuadrados y mucho más grandes como el del flujo de tráfico que es de 7x5 ¿o algo así no? y entonces al principio no se tomaron ese tipo de problemas por esa situación.

Investigadora: En esta planeación que tú tenías previa al inicio de tus actividades, ¿hubo qué hacer alguna modificación por esos elementos externos que manifiestas o por la conducta que tenían los estudiantes o por esta actitud de "me siento menos", con autoestima baja?, ¿hubo qué hacer modificaciones, ajustes a tu planeación?

Profesor B: Sí, sí tuvo qué haber ajustes porque todos esos factores que tú mencionaste influyeron, pero yo creo que principalmente influyó la actitud de ellos, durante todo el curso, no nada más en sistemas de ecuaciones, ellos se negaban a empezar siquiera a hacer algo porque de antemano pensaban que no lo pondrían resolver. Algo así como "¿para qué voy a hacer el esfuerzo si de todas maneras no voy a poder hacerlo? Y entonces fue una lucha constante para que ellos dijeran: "oye pues inténtalo, y luego vemos" ,"no importa que esté mal", y una serie de cosas que se les decía con la intención de motivarlos a participar o a entrar por lo menos en una discusión sin forzarlos a que su respuesta sea siempre la correcta, pero no se logró.

Creo, por ejemplo, que los problemas que son de enunciado verbal siempre causan dificultad, pero también cuando se trataba de algo que supuestamente es conocido por ellos como por ejemplo el resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con el método de suma y resta, en donde ni siquiera había que plantear el sistema, o sea el sistema ya estaba planteado, también tenían dificultades pero es porque ni siquiera lo intentaban y ésa era mi preocupación mayor. Uno piensa: "bueno, no van a desarrollar habilidades, o sea todas las habilidades que se pueda tener para matemáticas, pero por lo menos hay la intención de participar y de buscar entender las cosas", pero con ese grupo yo creo que no. No se logró desarrollar las habilidades matemáticas pero tampoco de otro tipo, como el ser constantes, de… ser… no sé cómo decirlo…

Investigadora: ¿Una actitud apropiada para el estudio?

Profesor B: Sí de entrar en la clase, en el contrato didáctico, simplemente se sentían derrotados.

Investigadora: Yo, que te conozco de hace algún tiempo, sé que tienes cierta familiaridad para trabajar con recursos tecnológicos como la computadora, como la calculadora. ¿En algún momento pensaste en la posibilidad de poder trabajar este curso utilizando algunos de estos recursos?, Si la respuesta es afirmativa o no, en cualquiera de los casos, quisiera que la ampliaras, ¿por qué sí? o ¿por qué no?

Profesor B: Mira sí se pensó en trabajar usando inicialmente el Excel. Pero no tenía acceso a un centro de cómputo por el horario; después dije: "hay calculadoras en esta área de ingeniería", yo sabía que había un laboratorio de calculadoras y entonces me dirigí ahí a las autoridades y resultó que sí tenían; no un laboratorio pero tenían una maleta llena de calculadoras de la "Voyage 200" y eso nos serviría, pero hubieron una serie de dificultades, que no había pilas, que no había el encargado, etc. Finalmente nunca se concretó, pero la idea era utilizar el Excel, pero si no la calculadora nos hubiera servido para poder avanzar yo creo más de lo que se avanzó, pero desafortunadamente no teníamos acceso a ninguno de los dos recursos, pero si estaba planeado así, por lo menos ahí en el proyecto de álgebra estaba planeado para usarse la tecnología, nuevas tecnologías.

Investigadora: ¿Qué esperabas lograr con tus estudiantes en relación a los sistemas de ecuaciones lineales dentro de tu planeación? Y, ¿qué es lo que consideras que lograste una vez que terminaste el estudio del tema, en términos de lo que tú te habías planteado?

Profesor B: ¡Ay, a la torre!... Ya te expliqué que al principio la intención era buscar un método más general para resolver y que yo pensaba que en el camino se encontrarían o se podrían ver algunas propiedades o algunas situaciones, no nada más llegar a un método más general, sino ir abordando cosas que tienen que ver con los sistemas de ecuaciones en el camino de buscar el método más general.

Yo creo que lo más general que se logró, y estoy especulando porque no hice un estudio así exhaustivo, simplemente puse un examen y lo que pude observar durante la clase, porque no sé si te acuerdas que se acabó el semestre y entonces las cosas quedaron para mi sentir un poco abiertas, como que nos faltó concretar cosas. Creo que por lo menos se recordó los métodos para resolver SEL, no es lo que uno esperaría por supuesto, pero dadas las circunstancias, todas las circunstancias, *(hace un gesto de resignación*).

Uno puede ser muy ambicioso pero el hecho es que hay que tomar decisiones y a veces las cosas se quedan en el aire y yo siento que así sucedió, y que el objetivo quedó muy lejos de lograrse, el objetivo inicial o de lo pretendido, pero dadas las circunstancias, pues creo que lo que se logró es que ellos, por lo menos, recordaran los sistemas y vieran su utilidad. Yo no sé si ellos puedan resolver un problema en este momento ¿verdad? pero eso es lo que creo que se logró.

Investigador: Muy bien, pues es todo profesor, muchísimas gracias por su tiempo y su colaboración.

VI.3.3 Análisis del significado implementado por el Profesor B

Nuestro análisis del significado que implementó el Profesor B, parte de reconocer, tal y como lo muestra su trayectoria epistémica, la presencia de todos los objetos matemáticos primarios en lo que hace y dice durante su práctica docente, aunque el énfasis que se pone en cada uno de ellos no sea el mismo. Pudiera argumentarse que este hecho se presenta dependiendo de la configuración o momento didáctico específico que se esté tratando, pero aún reconociendo esta posibilidad, la realidad es que la cronogénesis del proceso de enseñanza muestra que los aspectos procedimentales son los que marcan la pauta, hecho que él mismo declara durante la entrevista.

Resaltamos que la trayectoria epistémica del profesor tiene como eje el estudio de procedimientos, dado que su objetivo fundamental está puesto en que, a partir de recordar métodos estudiados con anticipación, y haciendo notar sus limitaciones, puedan los estudiantes asumir la necesidad de aprender un algoritmo de carácter más general para resolver los SEL. Como se observa en el desarrollo de su clase, éste fue el de Gauss Jordan.

Aunque las estrategias usadas para resolver los sistemas de ecuaciones lineales no fueron dadas como recetas, pues de acuerdo a las actividades de inicio que manejó el maestro, asumió que tenía un punto de partida en los conocimientos previos de los estudiantes, lo cierto es que el proceso de construcción del algoritmo de Gauss Jordan fue prácticamente impuesto a los estudiantes, pues nunca se exploró la posibilidad de que éstos usaran su creatividad en la generación del mismo.

Las situaciones problema que se manejaron, salvo las dos iniciales, fueron exclusivamente en el contexto matemático, y trataron de irse desarrollando de acuerdo a su grado de complejidad, esto es, de las situaciones más simples hacia las más complicadas. La simplicidad (o complejidad), se fincó en el tamaño de los sistemas y en la existencia de las soluciones: primero fueron sistemas de 2x2, luego de 3x3, donde la gran mayoría tenía solución única. Entre los SEL de 2x2 solamente se presentó uno inconsistente y otro que tenía infinitas soluciones, pero ambos estaban situados en la parte del estudio gráfico, más con la intención de completar los casos posibles; después de esto hubo muy pocos casos de sistemas no cuadrados, pero de tamaño relativamente reducido, aunque aptos para trabajarse en un salón de clases donde no existieron los apoyos tecnológicos que hubieran posibilitado abordar sistemas más grandes.

El profesor B no exhibió, ni en su actuación ni en sus declaraciones posteriores, preocupación por cubrir una gran cantidad de problemas, cada uno se explicó y explotó tanto como fue necesario, el tiempo no fue una gran preocupación, puesto que se priorizó el grado de solidez que iban alcanzando, de acuerdo a la evaluación del maestro, los alumnos en el dominio de los diferentes objetos matemáticos que entraron en juego.

El lenguaje dominante, además, por supuesto, de la lengua materna, fue el algebraico, en seguida el numérico, y en menor medida aparecieron representaciones gráficas. Por la naturaleza del tema, se desarrollaron habilidades para convertir un SEL expresado algebraicamente, a su representación matricial y viceversa. De acuerdo con nuestra interpretación, este hecho es consistente con la preocupación de generar un método general para enfrentar los SEL, que era lo que el profesor esperaba que los alumnos se llevaran de este proceso de estudio.

Si bien es cierto, como señalamos anteriormente, que los estudiantes fueron conducidos a dominar un algoritmo, no se insistió suficientemente, desde nuestra óptica, en la construcción sólida de los conceptos básicos asociados, como por ejemplo el de "solución de un SEL". Este hecho se manifestó en la dificultad para identificar y verbalizar ese y otros conceptos, o simplemente para describir algún proceso particular de solución que se hubiera utilizado.

Aunque en este sentido los alumnos manifestaban que su profesor les exigía "hablar algebraicamente", lo cierto es que los niveles de formalización matemática impulsados fueron bajos; las escasas definiciones que aparecieron no fueron estrictas. Por decir algo, nunca se definió de manera general un SEL, ni sus componentes; solamente se enunciaron las operaciones elementales que se podían hacer con los renglones de la matriz aumentada y las características de la forma escalonada reducida del arreglo matricial.

Si no hubo preocupación por la introducción de conceptos formales, mucho menos por el enunciado de teoremas y propiedades; se usaron, pero de manera implícita. El nivel de autoridad que se asigna al profesor, hizo que nunca fuera cuestionado por la validez de los procedimientos que se trabajaban, de tal forma que éstos se asumieron como verdades absolutas.

El impulso al uso de los argumentos si fue una preocupación notoria de este profesor, pues esto estaba muy relacionado con la forma en que interaccionaba con los estudiantes, con base en preguntas y refutaciones constantes que trataban de conducirlos a poder validar sus procedimientos o aseveraciones, o a que se dieran cuenta de que estaban realizando alguna operación o elaborando una conclusión que no era la más apropiada.

El tiempo total asignado al tratamiento de este tema fueron 11 sesiones, supuestamente de una hora cada una, pero en realidad de 50 minutos de trabajo efectivo, la mayor parte del cual, según se advierte en la trayectoria epistémica, giró alrededor de la parte algorítmica.

Por otro lado, en la trayectoria docente, complementada con la entrevista, encontramos argumentos para asegurar que en la actividad global desarrollada por el maestro, aparecieron los siguientes elementos:

a) Una organización de los contenidos matemáticos a tratar, argumentada con un referente teórico, la idea de trayectoria expuesta por Chevallard.

b) Un objetivo por alcanzar: lo que los estudiantes debían aprender alrededor de los SEL.

c) Una estrategia didáctica seleccionada: el trabajo alrededor de situaciones-problemas.

d) Una propuesta de organización para el trabajo en el aula: momentos individuales, por equipo y en grupo completo.

e) La iniciativa a integrar a la calculadora, la cual finalmente no tuvo éxito.

f) Un proceso de evaluación consistente en un examen.

Las funciones docentes asumidas fueron de planeación, motivación, asignación de tareas, regulación, evaluación e investigación. La planeación original se tuvo que ir modificando, al menos en algunos aspectos, dependiendo de las diversas circunstancias y reacciones de parte del estudiantado. La afectación emocional que el maestro detectó en el grupo, debido a su condicionamiento para ser inscritos en la universidad y al trato discriminatorio de otros profesores, le llevó a asumir una postura muy receptiva respecto a la conducta de los alumnos y a sus dificultades para sumir el compromiso de la actividad escolar.

La reiterada facilidad de los estudiantes para distraerse e involucrarse en actividades ajenas a la clase, fue enfrentada con un alto grado de paciencia, lo que terminaba por vencer las resistencias existentes y hacía que finalmente los alumnos se integraran al trabajo. El maestro detectó rápidamente que la actividad individual no prendía, pero que el trabajo colectivo tenía mejores efectos, de tal manea que la organización por equipos, que se formaron al libre albedrío de los jóvenes, permitió que la comunicación entre iguales fluyera con libertad. Esta organización se convirtió en una práctica cotidiana, a tal grado que cuando hubieron indicaciones de trabajar individualmente, éstas no eran mayormente atendidas; al poco tiempo los alumnos terminaban por integrarse, al menos en parejas, pero en cualquier caso, siempre acudían a la autoridad del profesor para exponer sus adelantos y/o dudas sobre el problema que se estuviese resolviendo.

Puesto que la disciplina tradicional en el aula no era una preocupación, el control se daba mediante el impulso al trabajo, mediante orientaciones del estilo: “intenta hacer algo”, “fíjate en lo que hicimos cuando…”, “sigue el método que ya vimos”. Esta preocupación por seguir un camino fijo, expresado mediante un método, dejó de lado algunos intentos de los alumnos que podrían haber permitido explorar y explotar su creatividad.

El nivel de comunicación que alcanzó a establecer este profesor con su grupo fue alto, pues ante la ausencia de recriminaciones o descalificaciones verbales cuando algo se les cuestionaba, los muchachos no temían expresar sus ideas o externar sus opiniones, ya fuera ante el profesor o ante el grupo completo.

Con esto concluimos nuestra caracterización de los elementos del significado implementado por el Profesor B.

VI.4. El significado implementado por el Profesor C

El profesor C tiene 17 años trabajando en la Universidad de Sonora, tres de los cuales son impartiendo clases de álgebra en ingeniería. Es maestro en ciencias con especialidad en matemáticas y cuenta con estudios parciales de tres años en un doctorado en ciencias en la misma área. Cursó un diplomado en el uso de la calculadora en la enseñanza de las matemáticas y durante dos años colaboró en un proyecto sobre el uso de la calculadora en la enseñanza de esta ciencia. Como parte de las actividades de dicho proyecto, ha diseñado diversas actividades para sus clases; además ha colaborado desde su inicio en el Proyecto de Seguimiento del Curso de Álgebra en Ingeniería, el cual reseñamos en el capítulo anterior.

El grupo atendido por este profesor estaba constituido por aproximadamente 30 alumnos, todos los cuales estaban, al igual que los alumnos del Profesor B, condicionados, característica que ya explicamos con anticipación. Según los datos proporcionados, todos aspiraban a ingresar a la carrera de ingeniería industrial.

Las sesiones de clase que observamos se desarrollaron en un aula equipada con 40 pupitres individuales, para uso de los estudiantes, escritorio y silla para uso del profesor, un televisor de 40 pulgadas, equipo para proyectar el trabajo de la calculadora en pantalla (view screen y Texas Instrument presenter), un anaquel donde se guardan 40 calculadoras Voyage 200 y 40 calculadoras Texas Instrument 83, así como dos pizarrones. El entorno es generalmente muy tranquilo y sin ruido.

La primera acción de los estudiantes al entrar al salón, es dirigirse hacia el anaquel y tomar la calculadora Voyage 200 que ya tienen asignada. De manera análoga, al término de la clase, los alumnos se dirigen a guardar la calculadora al lugar que ocupaba inicialmente; todo esto se realiza muy organizadamente.

VI.4.1 Trayectorias epistémica y docente seguidas por el Profesor C

El Profesor C construyó su trayectoria epistémica con base en 12 situaciones-problemas, distribuidas a lo largo de 8 sesiones, con un promedio de 50 minutos cada una. Como usualmente sucede, la distribución del tiempo no es homogénea, pues depende de las decisiones didácticas que el profesor va tomando, en correspondencia con la manera en cómo los estudiantes se involucran y asumen su responsabilidad didáctica.

Todas las situaciones-problemas propuestas fueron retomadas del banco elaborado por el grupo colegiado al que hemos estado haciendo referencia constantemente.

Como ya vimos en los casos de los Profesores A y B, cada situación-problema permite el tejido de una configuración epistémica, en cuyo desarrollo se advierte la presencia de los objetos matemáticos primarios, que dan origen, a su vez, a los diferentes estados de la trayectoria epistémica.

En la Tabla VI.5, presentamos la trayectoria epistémica seguida por el Profesor C y posteriormente, desglosamos cada una de las 12 configuraciones epistémicas identificadas en su actividad.

Tabla VI.5 Trayectoria epistémica del profesor C

Sesión de clase	Configuración epistémica	Unidad epistémica	Descripción	Estado
1	1	0	Se plantea un problema que consiste en encontrar parejas de números que satisfagan una condición dada	Asignación
1	1	1	Se resuelve numéricamente el problema planteado	Procedimental
1	1	2	Se construye la gráfica de la función lineal asociada al problema inicial	Procedimental
1	2	3	Se recuerda cómo se resuelve el problema más general de encontrar la expresión algebraica de una recta cuando se conoce su gráfica, identificando en ella la pendiente y ordenada al origen	Procedimental
1	3	4	Se plantea un nuevo problema que consiste en encontrar parejas de números que satisfagan una condición diferente a la establecida en la configuración 1.	Situacional
1	3	6	Se resuelve numéricamente el problema anterior	Procedimental

1	4	7	Se asigna la tarea de graficar ambas rectas en el mismo plano cartesiano, utilizando la calculadora	Procedimen-tal
1	4	8	Se introduce el lenguaje que maneja la calculadora para graficar, así como para poder homogenizar las características del formato de la pantalla.	Lingüistico
1	4	9	Introducción de una serie de conceptos y procedimientos: SEL de 2x2, número de variables, número de incógnitas, y su relación con el tamaño del SEL, representación gráfica de un SEL de 2x2, identificación de la solución única en la gráfica como el cruce de las dos rectas, solución algebraica, comprobación de la solución, métodos de solución: sustitución, igualación y suma y resta.	Conceptual
2	5	10	Se introduce una nueva situación problema que involucra un sel de 2x2 con infinitas soluciones	Situacional
2	5	11	Se resuelve numéricamente el problema	Procedimen-tal
2	5		Se construye la representación algebraica del SEL	Procedimen-Tal-Lingüistico
2	5	11	Se resuelve gráficamente el SEL, utilizando la calculadora	Procedimen-tal
2	5	12	Identificación del hecho de que las rectas sean coincidentes con la existencia de infinitas soluciones al sistema, pero sin relacionarlo con la situación-problema original	Conceptual
2	6	13	Se asigna una nueva situación problema cambiando las constantes	Situacional
2	6	14	Se grafican las nuevas rectas y se relaciona el hecho de que sean paralelas con la no existencia de soluciones para el SEL.	Procedimen-tal y Concep-tual
2	7	15	Se resumen los tres casos posibles que se presentaron al tratar gráficamente los SEL.	Conceptual
3	8	16	Asignación de una nueva situación-problema	Situacional
3	8	17	Proposición de posibles parejas de números como solución, tomando una de las condiciones contenidas en el enunciado del problema	Procedimen-tal

3	8	18	Se introduce un cambio en la naturaleza de los objetos involucrados en la situación problema	Lingüístico
3	8	19	Se construye la representación algebraica del SEL que modela la situación problema	Lingüistico
3	8	20	Se realizan operaciones con las ecuaciones, para tener una versión más simple	Procedimen-tal
3	9	21	Se corta el proceso anterior, para ir mostrando los efectos que en las gráficas de las rectas tienen las operaciones que se van haciendo sobre los renglones. Esto no puede concluirse por limitaciones del equipo.	Lingüístico
4	10	22	Se retoma el proceso de búsqueda de la solución algebraica del sistema anterior; los números obtenidos no tienen sentido en el contexto originalmente planteado	Procedimen-tal
4	10	23	Se introduce la representación matricial del SEL	Lingüístico
4	10	24	Se propone llevar la matriz a su forma escalonada reducida, describiendo verbalmente el proceso	Procedimen-tal
4	10	25	Se estudian las instrucciones necesarias en la calculadora para manejar las operaciones con los renglones de la matriz aumentada	Lingüístico
5	11	26	Se retoma una situación problema anterior, agregando nuevos elementos, con lo cual el modelo será ahora un SEL de 3x3	Situacional
5	11	27	Se resuelve el SEL escalonando la matriz, pero con auxilio de la calculadora, probando las sugerencias de los estudiantes	Procedimen-tal
5	11	28	Se sintetiza el procedimiento seguido	Procedimen-tal
6	12	29	Se plantea una nueva situación problema, pero que contiene ya la serie de actividades que se harán para resolverlo, ahora se trabajará en parejas	Situacional
6	12	29	Se aclaran símbolos y conceptos desconocidos	Lingüístico
		30	Nuevamente aparecen dificultades sobre el lenguaje de la calculadora, que se discuten en los equipos	Lingüístico
7	12	31	Búsqueda de la solución del SEL, usando las calculadoras, aparecen las primeras propuestas	Procedimen-tal

			de solución	
8	12	32	Se resuelve el problema por el grupo, con lo cual concluye la configuración y el estudio del tema	Procedimen-tal

Configuración epistémica 1

La sesión inició con la advertencia del profesor respecto a que ese día se iniciaría el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y que en consecuencia se revisarían problemas a partir de los cuales los SEL deberían aparecer.

La primera situación propuesta es:

Encontrar parejas de números que sumen 10

Se empieza trabajando numéricamente, pues se dan algunos casos particulares de parejas de números que cumplen con la condición estipulada, todos ellos números naturales; se diversifica la naturaleza de los números propuestos; después de esto se propone graficar las parejas y con base en esta información, encontrar la representación algebraica de la recta asociada.

Los objetos matemáticos explícitos en esta configuración son:

a) Lenguaje: verbal, numérico y gráfico.
b) Situación-problema: la ya enunciada.
c) Procedimientos: graficación de parejas ordenadas en el plano cartesiano.

Configuración epistémica 2

Esta es una configuración muy breve, que se abre para recordar cuál es el procedimiento que se sigue para graficar una línea recta cuando se conocen pendiente y ordenada al origen.

Objetos matemáticos que aparecen:

a) Lenguaje: verbal y gráfico.
b) Situación-problema: la ya enunciada.
c) Procedimientos: localización de puntos en el plano cartesiano.
d) Conceptos: pendiente, ordenada al origen.

Configuración epistémica 3

Se asigna una nueva situación:

Encontrar parejas de números tal que su diferencia sea 2.

De nueva cuenta se proponen parejas que cumplen con la condición, recorriéndose el camino siguiente: con los datos de la tabla que se forma con las parejas de números, encontrar la expresión algebraica de la relación y luego trazar la gráfica; ahora la gráfica se hará con la calculadora.

Objetos matemáticos que aparecen:

a) Lenguaje: Verbal, algebraico, númerico, gráfico.
b) Situación-problema: la ya enunciada.
c) Procedimientos: encontrar la expresión algebraica de la relación dada, encontrar parejas de números que cumplan con la condición dada.

Configuración epistémica 4

Se asigna la tarea de graficar las dos rectas obtenidas en las configuraciones 1 y 3, en el mismo plano, con la calculadora. Esto conlleva a introducir el lenguaje propio de la calculadora para graficar, así como las especificaciones necesarias para que en la pantalla se observe la misma gráfica. Al ver que las rectas se cruzan, se investiga sobre las significaciones del punto de cruce con respecto a los problemas 1 y 3. A partir de esta conclusión, se introducen una serie de conceptos: SEL, tamaño, elementos involucrados, representación gráfica de un SEL de 2x2, identificación de la solución única en la gráfica, solución algebraica, comprobación de la solución, y finalmente, métodos de solución (sustitución, igualación, suma y resta).

En este tenor, se identifica la presencia explícita de un mayor número de objetos matemáticos presentes en la configuración:

a) Lenguaje: algebraico, numérico, gráfico, el propio de la calculadora para graficar.
b) Situación-problema: la ya enunciada.
c) Procedimientos: graficación de rectas.
d) Conceptos: SEL, tamaño, elementos que aparecen en un SEL, representación gráfica de un SEL de 2x2, identificación de la solución única en la gráfica, solución algebraica, comprobación de la solución, y finalmente, métodos de solución (sustitución, igualación, suma y resta).
e) Argumentos: para relacionar soluciones posibles de un sistema con las posibilidades de ubicación de dos rectas en el plano cartesiano.

Configuración epistémica 5

La situación problema asignada en esta configuración es:

Una firma de transporte posee dos tipos distintos de camiones para transportar dos tipos de maquinaria. El número de máquinas de cada tipo que puede transportar cada uno de los camiones está dado en la siguiente tabla:

	Maquinaria 1	*Maquinaria 2*
Camión 1	*2*	*1*
Camión 2	*4*	*2*

La empresa consigue una orden para transportar 32 máquinas de tipo 1 y 16 máquinas del tipo 2. ¿Cuántos camiones de cada uno de los tipos necesita la empresa para cumplir cabalmente con los pedidos? El costo por manejar los camiones es el mismo y los camiones tienen que ir completamente llenos.

Se empiezan a proponer como soluciones particulares las siguientes parejas:
(10, 2); (0, 8); (16, 0); (12, 2), las cuales se verifican para saber si son o no solución. Se formulan las ecuaciones que modelan el SEL:

$$2x + 4y = 32$$
$$x + 2y = 16$$

Y se retoma el tratamiento gráfico; hay que despejar y en ambas ecuaciones y graficar las rectas usando la calculadora, resultando dos rectas coincidentes, hecho que se identifica con que el SEL tiene infinitas soluciones, las cuales no se analizan en el contexto del problema.

Ahora encontramos explícitamente los objetos matemáticos:

a) Lenguaje: algebraico, numérico, gráfico, el propio de la calculadora para graficar.

b) Situación-problema: la ya enunciada.

c) Procedimientos: graficación de rectas.

d) Argumentos: para relacionar infinitas soluciones del SEL con el hecho de que en su representación gráfica haya dos rectas que se cruzan.

Configuración epistémica 6.

Se asigna una nueva situación-problema cambiando las constantes del problema anterior,

$$2x + 4y = 16$$
$$x + 2y = 32$$

Se grafica las rectas asociadas y se llega a que, al ser rectas paralelas, el sistema no tiene solución.

Objetos matemáticos presentes:

a) Lenguaje: algebraico, el propio de la calculadora para graficar.

b) Situación-problema: la ya enunciada.

c) Procedimientos: graficación de rectas.

d) Argumentos: para relacionar no existencia de soluciones de un sistema con el hecho de que dos rectas son paralelas

Configuración epistémica 7.

Esta es una configuración muy breve, que sirve para sintetizar los tres casos presentados, relacionando representación gráfica con el tipo de solución existente para el SEL.

Los objetos matemáticos presentes son:

a) Conceptos: Identificación de los tres posibles casos de ubicación de dos rectas en el plano con el número de soluciones que tiene un SEL de 2x2.

Configuración epistémica 8

Se enuncia la situación problema que sigue:

Una fábrica produce dos productos, cada uno de ellos tiene que procesarse en dos departamentos. En la tabla siguiente se indica el número de horas necesarias para elaborar una unidad de cada producto en cada departamento.

	Producto 1	*Producto 2*
Dpto. A	*3*	*4*
Dpto. B	*5*	*3*

El número total de horas disponibles en cada departamento por semana es de 1150 horas de trabajo para el Dpto. A y 1050 para el Dpto. B. La compañía quiere determinar la cantidad de cada uno de los productos que puede fabricarse cada semana, de modo que se utilicen todas las horas disponibles.

El problema se trata impulsando una estrategia general, consistente en determinar las incógnitas, cuántas y cuáles son, armar el SEL, para lo cual se emplea el recurso ya utilizado con anterioridad de buscar soluciones particulares, con el objetivo de que se observe la relación existente y se pueda generalizar. Se consigue establecer el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 1150 \\ 5x + 3y &= 1050 \end{aligned}$$

que no se resuelve, pues se agregan nuevos datos, un nuevo producto y otro departamento participante, así como sus horas disponibles de trabajo. Con ello se plantea un SEL de 3x3,

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 1150 \\ 5x + 3y + 4z &= 1050 \\ 2x + 5y + 3z &= 2200 \end{aligned}$$

que no se resuelve y se regresa al anterior.

Se empiezan a introducir las operaciones con las ecuaciones, las cuales se van efectuando en el SEL de 2x2, para irlo simplificando.

Aparecen en esta configuración:

a) Lenguaje: verbal, algebraico, numérico, gráfico.

b) Situación-problema, la ya enunciada.

c) Procedimientos: algunas operaciones con las ecuaciones que llevan a tener una versión más simplificada del SEL

Configuración epistémica 9.

Cuando se tiene

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 1150 \\ y &= \frac{2600}{11} \end{aligned} \quad ,$$

se interrumpe el procedimiento para introducir la discusión gráfica, con lo cual se origina una nueva configuración; esto con la intención de ir mostrando paralelamente cómo se van reflejando en las sucesivas representaciones gráficas del sistema las sucesivas operaciones entre las ecuaciones y su efecto en la solución del sistema.

En los hechos este proceso es la demostración gráfica de que las operaciones entre las ecuaciones van produciendo sistemas equivantes. En este desarrollo la calculadora se usa como recurso para la graficación, pero el que no se puedan graficar expresiones del tipo

x= constante, impide ver la versión gráfica final, cuando se consigue tener *x= constante,*

y = constante, pareja de números solución del sistema.

La revisión de la configuración anterior, nos permite encontrar:

a) Lenguaje: algebraico, gráfico, el propio de la calculadora para graficar.

b) Situación-problema: la ya enunciada.

c) Procedimientos: operaciones con las ecuaciones del sistema, graficación de rectas, y la relación entre ambos.

d) Argumentos: para mostrar cómo las operaciones con las ecuaciones del sistema van produciendo sistemas equivalentes, es decir no alteran la solución; la argumentación es de carácter visual, pues se basa en ir observando cómo, conforme avanza el procedimiento de solución, el punto de cruce no sufre cambios.

Configuración epistémica 10.

Se retoma el proceso de búsqueda de la solución algebraica del sistema anterior; los números obtenidos no tienen sentido en el contexto originalmente planteado, pero esta situación es minimizada. Se introducen nuevos conceptos y procedimientos: matriz aumentada, cómo se lleva esta matriz a su forma escalonada reducida.

Se introduce el lenguaje que la calculadora usa para hacer las operaciones con los renglones de la matriz, limpieza de la pantalla; esto se constituye en un pequeño espacio de entrenamiento para el empleo adecuado del recurso computacional.

Nos damos cuenta de la existencia en esta configuración de:

a) Lenguaje: algebraico y el propio de la calculadora para manejar las operaciones con renglones de la matriz aumentada.

b) Situación-problema: la ya enunciada.

c) Procedimientos: computacionales, para manejar vía la calculadora, las operaciones con los renglones; además el procedimiento necesario para llevar una matriz a su forma escalonada reducida.

d) Conceptos: matriz aumentada

Configuración epistémica 11.

Hay una nueva situación problema que aunque ya había sido planteada, se retoma hasta este momento; nos referimos a la que surgió a partir del problema de la configuración 8, en donde se construye la expresión algebraica del SEL:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 1150 \\ 5x + 3y + 4z &= 1050 \\ 2x + 5y + 3z &= 2200 \end{aligned}$$

Donde x representa el número de plumas, y el número de lápices, z el número de borradores que se pueden fabricar con las condiciones dadas.

Para la solución del sistema se usa la calculadora, esto permite probar con rapidez si las operaciones propuestas sirven o no para los fines de escalonamiento de la matriz. Termina la configuración encontrando la solución del sistema y sintetizando el procedimiento utilizado.

Encontramos, entonces los objetos matemáticos primarios:

a) Lenguaje: algebraico.

b) Situación-problema; la ya enunciada.

c) Procedimientos: transformación de la matriz a su forma escalonada reducida

Configuración epistémica 12.

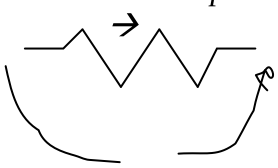
En esta ocasión, no es solamente el enunciado de una situación problema, sino una secuencia didáctica la que se propone:

Corriente en una red eléctrica

La ley de Ohm, establece que V = I R.

En donde V es la diferencia de potencial o voltaje (voltios) aplicada a los extremos de una resistencia conocida R (ohmios), e I representa la intensidad de la corriente (amperios) que pasa por la resistencia.

I amperios



V = I R,

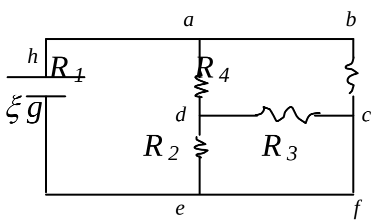
R ohmios

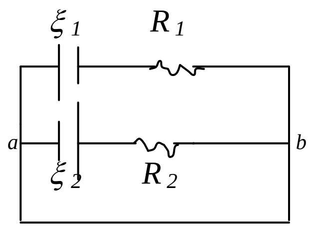
V voltios

Las leyes de Kirchoff permiten resolver las relaciones que se presentan entre las diferencias de potencial (voltajes), y las intensidades de las corrientes que circulan en diferentes partes de una red eléctrica.

En una red conformada por baterías cuyas fuerzas electromotrices y resistencias están presentes, un <u>nodo</u> en una red eléctrica es un punto donde se unen tres o más conductores. Una malla es cualquier trayectoria conductora cerrada.

1.- Observa las figuras siguientes





(b)

a) *En la figura (a) ¿cuáles puntos son nodos? ____________________ ¿cuáles puntos no son nodos? __________________ (los puntos a, d, e y c son nodos pero b y f no)*
b) *En la figura (b) ¿cuáles puntos son nodos? ____________________ ¿cuáles puntos no son nodos? __________________ (los únicos nodos son a y b.)*
c) *Señala algunas mallas posibles en la figura (a) ____*
d) *son las trayectorias cerradas abcda, dcfed, hadegh, hadcfegh. No hemos citado todas las mallas posibles del circuito.*

Las leyes de Kirchoff señalan lo siguiente:

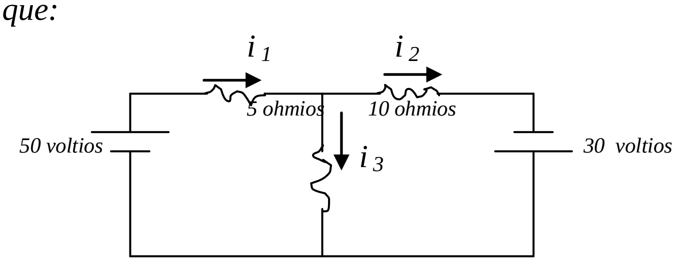
<u>Regla del nodo</u>: La suma algebraica de las corrientes en un nodo es 0.

$$\Sigma I = 0$$

<u>Regla de la malla</u>: La suma algebraica de las fuerzas electromotrices en cualquier malla es igual a la suma de los productos I R en la malla.

$$\Sigma\, \xi = \Sigma I R.$$

2.- Teniendo en cuenta estas leyes, el sistema eléctrico que se muestra en la figura siguiente plantea que:



20 ohmios

¿Cuáles puntos son nodos? ____________________
Señala todas las mallas posibles en la figura ____

De acuerdo a la regla de los nodos se tiene que, para cada nodo se cumple: ____

De acuerdo a la regla de las mallas, para cada malla una de ellas se cumple: ____

Es decir, se tiene un sistema de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
5\,i_1 + 20\,i_3 &= 50 \\
10\,i_2 - 20\,i_3 &= 30
\end{aligned}
$$

3.- Reescribiendo el sistema en forma matricial se tiene:

En donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$

4.- Resolver el sistema utilizando la matriz aumentada del sistema, efectuando operaciones elementales entre renglones, para obtener ceros debajo de la diagonal, así que utiliza la calculadora Voyage 200, e introduce cada uno de los renglones de la matriz aumentada y ve realizando las operaciones que consideres conveniente para obtener los ceros deseados, ve anotando las operaciones entre los renglones y su matriz resultantes:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)
$$

5.- finalmente se obtiene el sistema:

De forma inmediata se tiene _____________ , sustituyendo este valor en ______________ se obtiene _____________________ finalmente si se sustituye se tiene que ____

6.- Si además de obtener ceros debajo de la diagonal, también se puede obtener ceros arriba de la diagonal con operaciones elementales entre los renglones. Realiza las operaciones elementales entre los renglones utilizando la calculadora Voyage 200. Señala las operaciones realizadas y la matriz obtenida:

7.- finalmente se obtiene el sistema:

8.- Así que finalmente se encuentra que los valores de las corrientes son:

Esta es una configuración epistémica muy completa, que involucra elementos de otro campo de conocimiento, el electromagnetismo. Esto requiere el manejo de un lenguaje, conceptos y procedimientos de otro campo fuera de la matemática, aunque las actividades que conforman esta secuencia son guiadas por la misma estructura que tienen. En este caso, el interés no se centró en la construcción del modelo algebraico, sino en mostrar una aplicación del uso de los SEL en otra disciplina, además de nuevamente plantear la solución de un SEL con base en los recursos que ofrece la calculadora.

El lapso de dedicación a la secuencia consume tres sesiones, en donde las dos partes que más tiempo requirieron fueron tanto la parte algorítmica (el escalonar la matriz), como la parte técnica propia de la calculadora.

Explicitaremos ahora los objetos matemáticos primarios identificados:

a) Lenguaje: verbal, algebraico, representaciones gráficas de circuitos, el propio de la teoría de circuitos eléctricos.

b) Situación-problema: la ya enunciada.

c) Procedimientos: para llevar la matriz aumentada a su forma escalonada reducida.

d) Conceptos: De electricidad: nodos, mallas, ohmios, amperios, voltios, corriente, potencial, resistencia, intensidad de la corriente, matriz aumentada del sistema.

e) Proposiciones: Leyes de Kirchoff, Regla del Nodo, Regla de la malla.

Trayectoria docente seguida por el profesor C, asociada a su trayectoria epistémica

Al igual que se hizo en el caso de la trayectoria epistémica, vamos a mostrar la trayectoria docente construida por el profesor C, después de lo cual desglosaremos cada una de las configuraciones docentes.

Tabla VI.6. Trayectoria docente del Profesor C

Sesión de clase	Configuración epistémica	Descripción de la actividad del profesor	Estado
1	1	Asigna la tarea a realizar, la cual se aborda individualmente	Asignación
1	1	Orienta la actividad de los estudiantes hacia lo tabular, algebraico y gráfico	Regulación
1	2	Asigna la siguiente situación a resolver, el problema general de graficar una recta	Asignación
1	2	Encauza la actividad hacia cómo graficar rectas con base en pendiente y ordenada al origen	Regulación
1	3	Asigna la nueva situación problema, similar a la de la configuración 1	Asignación
1	3	Induce hacia la solución numérica, algebraica y gráfica	Regulación
1	4	Asigna nueva tarea, graficar dos rectas en el plano cartesiano, pero empleando la calculadora	Asignación
1	4	Introduce el lenguaje de la calculadora, necesario para la graficación, al mismo tiempo que va ilustrando en el televisor del aula	Regulación
1	4	Identifica la relación entre dos líneas rectas que se cruzan en un punto con la existencia de solución única para el SEL, introduciendo además conceptos y procedimientos propios de este proceso de estudio	Regulación

2	5	Asigna de una nueva situación problema	Asignación
2	5	Construye la representación algebraica del SEL	Regulación
2	5	Aborda la solución del problema numéricamente	Regulación l
2	5	Aborda la solución del problema gráficamente, usando la calculadora e ilustrando el procedimiento en pantalla	Regulación
2	5	Establece la relación: dos líneas rectas que se enciman significa que el SEL de donde provienen tiene soluciones infinitas	Regulación
2	6	Asigna nueva situación problema mediante cambios en una ya estudiada	Asignación
2	6	Aborda la solución del problema gráficamente, usando la calculadora e ilustrando el procedimiento en pantalla	Regulación
2	6	Identifica rectas paralelas con la no existencia de soluciones del SEL	Regulación
2	7	Sintetiza los tres casos que se presentaron gráficamente, relacionándolos con los tres posibilidades de solución de un SEL de 2x2	Regulación
3	8	Asigna de una situación problema	Asignación
3	8	Encauza hacia el tratamiento numérico del problema	Regulación
3	8	Modifica los datos del problema, tomando un caso concreto para los productos que se fabrican	Regulación
3	8	Guía hacia el establecimiento de la representación algebraica del SEL	Regulación
3	8	Realiza operaciones con las ecuaciones del SEL, para irlo simplificando	Regulación
3	9	Interrumpe la configuración anterior, para introducir una nueva discusión: relación entre los SEL (2x2) que se van obteniendo producto de las operaciones con los renglones y sus correspondientes modificaciones en las gráficas	Regulación
4	10	Resuelve algebraicamente el sistema anterior, sin analizar las soluciones contextualmente	Regulación
4	10	Introduce la representación matricial de un SEL	Regulación
4	10	Transforma la matriz aumentada en su escalonada reducida asociada, describiendo verbalmente el proceso	Regulación
4	10	Estudia el lenguaje que ocupa la calculadora para poder realizar las operaciones anteriores.	Regulación

5	11	Modifica una situación anterior para plantear una nueva situación -problema	Regulación
5	11	Orienta el proceso de escalonamiento de la matriz aumentada mediante la calculadora	Regulación
5	11	Sintetiza el procedimiento que siguió para escalonar la matriz	Regulación
6	12	Asigna una nueva situación problema, organizando el trabajo en parejas	Asignación
6	12	Aclara símbolos y conceptos desconocidos	Regulación
7	12	Conduce el trabajo que hacen los alumnos en la actividad propuesta	Regulación
7	12	Atiende las dificultades técnicas y conceptuales que muestran los alumnos	Regulación
8	12	Resuelve, conjuntamente con los estudiantes, el problema planteado, concluyendo así tanto esta configuración como esta trayectoria	Regulación

Configuración docente 1

La configuración inicia con la asignación de la tarea a realizar, los alumnos empiezan a proponer soluciones, todas las cuales son atendidas por el profesor, aceptándolas o rechazándolas. El control que el profesor ejerce sobre la clase es alto, pues no permite que los estudiantes se desvíen del problema y del rumbo que él va marcando, él introduce los elementos del problema que los alumnos no logran aterrizar.

Configuración docente 2

La dinámica de la configuración anterior se mantiene, por el nivel de control que mantiene el profesor; este hecho no ocasiona, aparentemente, problema alguno, pues los estudiantes asumen sin cuestionar su rol. La actividad en las calculadoras hace que éstas se conviertan en el cuaderno donde el docente revisa los avances o retrocesos de sus pupilos.

Configuración docente 3

El maestro encauza la actividad del estudiante por el rumbo que ha seleccionado, de tal manera que el margen de acción de ellos siempre está en los límites que él implícitamente les ha fijado.

Configuración docente 4

A partir de la situación-problema planteada, su seguimiento se desarrolla en los cauces sugeridos por el docente, todos los pasos que va realizando están siendo mostrados en el televisor, de tal forma que los estudiantes deben seguirlos. Si alguien muestra dificultades, es atendido con diligencia, y se espera a que se incorpore al ritmo de la clase.

Configuración docente 5

Partiendo de la clarificación que el profesor hace del problema y de los elementos involucrados, los estudiantes participan proponiendo soluciones, de cualquier forma el margen que se da para el trabajo independiente es muy pequeño, porque la actividad es constante, no baja el ritmo. Esto da poca oportunidad a que los alumnos se distraigan, por lo que siempre permanecen atentos, con calculadora en mano, siguiendo las instrucciones que marca el docente. Todo lo que éste va haciendo, lo va ilustrando en la pantalla del televisor, pero se da tiempo para resolver las dudas que van apareciendo. Cuando es necesario, recurre al pizarrón.

Configuración docente 6

Se mantiene el esquema vigente en las cinco configuraciones anteriores.

Configuración docente 7

En esta breve configuración, el maestro realiza una síntesis, donde incorpora la participación del estudiando vía cuestionamientos.

Configuración docente 8

Con la energía que le caracteriza, el profesor busca la participación de los estudiantes, mediante cuestionamientos, algunos de los cuales están fuera del alcance del grupo; sin embargo el maestro no se rinde, reformula sus preguntas, utiliza cualquier recurso que le parece apropiado para obtener alguna respuesta, las cuales llegan tímidamente. Esa respuesta le es suficiente para él corregirla y dar la correcta.

Configuraciones docentes 9 y 10

No hay modificaciones importantes en el esquema de trabajo del profesor C.

Configuración docente 11

Hábilmente el profesor modifica un problema anterior para hacer surgir una nueva situación problema. Explica, habla, se mueve, interroga, ahora la participación del alumnado es mucho mayor, pero siempre bajo su supervisión. El uso de la calculadora facilita el que sean tomadas en cuenta todas las participaciones.

Configuración docente 12

En esta configuración hay un cambio en la manera en como el profesor organiza el trabajo en el aula; la situación propuesta es, en un sentido, mucho más complicada que las anteriores, pues introduce conceptos y reglas del campo de la electricidad. Por otro lado, el hecho de que el sistema esté ya dado, reduce la tarea a resolverlo mediante la calculadora.

El cambio introducido consiste en el trabajo en pareja; esta indicación, como todas las anteriores, es seguida por los alumnos, quienes sin ninguna dificultad empiezan a interactuar con su pareja y con el resto de los equipos.

VI.4.2. Entrevista al Profesor C

Investigadora: Quisiera que empezáramos Profesor C, con que me dijeras cuáles son las características del grupo de álgebra con el cual estás trabajando ahora. Me refiero a aspectos como ¿se trata de un grupo de los inscritos normalmente?, ¿cuántos alumnos tiene?, ¿de qué carreras son?

Profesor C: Es un grupo que está condicionado a aprobar todas las materias con mínimo de 85 para poder quedarse en la universidad como alumnos oficiales, ahorita están como alumnos no oficiales hasta que no cumplan con este requisito; son en total como 30 alumnos, uno de ellos no está inscrito pues es alumno oyente de extraordinario especial, se presenta a los exámenes regulares y la calificación se le va a pasar en un extraordinario especial porque ya rebasó las tres oportunidades que tenía de pasar el curso; uno de ellos nada más está en esa condición.

Investigadora: ¿Tienes información de la carrera a la que desean ingresar?

Profesor C: Sí, todos hasta ahorita su aspiración es ingeniería industrial, todos.

Investigadora: ¿Cómo planeaste, cómo tienes planeado desarrollar el tema de SEL?

Profesor C: Inicié con una propuesta de actividades que se presentó en el proyecto[6], donde se ve una actividad de inicio, después una actividad de desarrollo y después una actividad de consolidación. La de consolidación la voy a dejar hasta el final cuando ya no sólo tenga sistemas de 2x2, sino más grandes. Ahorita estoy trabajando a la par de inicio y de desarrollo con de 2x2 y luego voy a pasar a las de 3x3 y ya después unas que no sean cuadradas y hasta al final unas de consolidación en donde abarque todas.

Me estoy basando en una propuesta que se hizo en el grupo *(de profesores)*, inicié con una actividad que se propuso en el grupo, ahí una maestra, una compañera la presentó, y también voy a retomar unas actividades que presentaron otros maestros, ya sea en las de desarrollo o en las de consolidación.

Investigadora: Y el trabajo en el aula, ¿cuál es la estrategia que vas a seguir?

Profesor C: La estrategia en el aula *(consiste en)* presentar problemas a los alumnos e irlos, ir tratando de resolverlos en conjunto con ellos, motivándolos a que contesten o guiándolos con las preguntas; por las características del grupo, es un grupo que es difícil que participe, es difícil que contesten, porque sí tienen deficiencias, sí presentan deficiencias entonces el dejarlos solos les cuesta mucho trabajo, entonces no pretendo dejarlos solos, siempre estoy guiándolos porque se dispersan muy fácilmente. De hecho todos los grupos que he dado de álgebra desde que estoy dando álgebra son repetidores o condicionados, entonces he tenido que hacerlo así por las condiciones de los grupos.

Investigadora: ¿Tienes contemplado utilizar algún tipo de tecnología, diferente por supuesto del gis y del pizarrón?, y si tu respuesta es afirmativa, ¿cómo la vas a utilizar?

Profesor C: Voy a utilizar la calculadora Voyage 200, aprovechando el laboratorio que tiene el Departamento de Matemáticas, como auxiliar me va a ayudar para las representaciones gráficas y la voy a utilizar para que las gráficas sean un poco más rápidas, un poco más exactas, y también para cuando se vea el método de eliminación

[6] Está hablando del proyecto de seguimiento para el curso de álgebra que ya se ha descrito.

Gaussiana que las operaciones con los renglones sean más rápidas ¿no?, o sea que nada más le quede *(al alumno)* la decisión de qué operaciones hacer, más las multiplicaciones, sumas o restas las va a hacer la calculadora.

Investigadora: Y entonces, ¿qué esperas tú desarrollar en tus estudiantes, o qué esperarías que ellos estuvieran en condiciones de hacer con el tipo de trabajo que estás haciendo, con el uso de tecnología que tienes?

Profesor C: Bueno, lo que pretendo es que vean, que los sistemas de ecuaciones lineales existen para empezar, emm… pues que se presentan en problemas desde muy sencillos hasta problemas muy complicados, que hay desde muy pequeños, desde 2x2 hasta tamaños muy grandes, aunque lo mencionaré pero no les mostraré ninguno de los grandes. Y con el uso de tecnología lo que quiero mostrar es que no necesariamente tienen que hacer ellos las operaciones a mano, que existe herramienta, que no solamente es esta calculadora, sino paquetes computacionales especializados para el efecto; entonces me voy a concentrar no sólo en cómo obtener la solución sino en el análisis de la solución, en qué tipo de soluciones se pueden obtener.

Investigadora: Y la parte que algunos profesores consideran muy importante, que tiene que ver con la construcción de los modelos, ¿lo tienes tú contemplado desarrollar con esa estrategia que estás siguiendo?

Profesor C: La construcción del modelo matemático, la representación algebraica sí, sí también, en la mayoría de los problemas. Creo que nada más hay uno de los que tengo pensado ver en donde no van a construir el sistema porque implicaría conocimiento de temas más elevados, entonces nada más la vería como una aplicación que se tiene pero no podrían hacerlo ellos, pero entonces sí, sí contemplo que ellos generen el sistema de ecuaciones.

Investigadora: Es todo, muchas gracias por su amabilidad.

VI.4.3 Análisis del significado implementado por el Profesor C

Identificamos, a través de la trayectoria epistémica seguida por el Profesor C, la presencia de todos los objetos matemáticos primarios en sus prácticas operativas y discursivas alrededor de los SEL**.** Si bien no todos están en la misma proporción, esta diferencia en la frecuencia y profundidad con la cual aparecen los diferentes objetos es lo que permite caracterizar el tipo de significado promovido.

El Profesor C organizó su trayectoria epistémica seleccionando, al menos fue su intención declarada, y así lo comprobamos, situaciones-problemas del banco de problemas elaborado por el grupo colegiado del cual formó parte. Intentó, desde su interpretación, ceñirse a las indicaciones y recomendaciones que el grupo había dado para el tratamiento de los problemas en el salón de clase.

Aunque hay doce configuraciones didácticas identificadas, los problemas que podríamos considerar como eje, alrededor de los cuales se anidaron algunas de las otras configuraciones, fueron cinco, de los cuales cuatro fueron simplificaciones de problemas que aparecen en ingeniería: de producción, circuitos eléctricos y de optimización de recursos.

Las situaciones-problema estudiadas estuvieron organizadas de acuerdo a su grado de complejidad, el cual se ancló en el tamaño del SEL resultante. Primero se trataron SEL de 1x2, luego de 2x2 y finalmente de 3x3, de los cuales hubo casos de única solución, infinitas soluciones y, en menor medida, sin solución. Éste último caso en la parte donde se trabajó con el método gráfico, como una forma de complementar las situaciones susceptibles de presentarse.

En aquellos casos donde hubo infinitas soluciones, solamente se mencionó su existencia pero nunca se intentó encontrar expresiones generales para ellas, ni tampoco se analizaron, en el contexto de las situaciones específicas de donde surgieron los SEL, lo cual hubiera permitido que los estudiantes participaran en análisis y argumentaciones interesantes. Desde nuestro punto de vista, esto fue un faltante importante; inclusive hubo tres momentos, en las configuraciones epistémicas 5, 8 y 11, donde no se hicieron las aclaraciones pertinentes.

En la configuración 5 las incógnitas representaban números de camiones, por lo cual hablar de soluciones infinitas no tiene sentido; en el caso de las configuraciones 8 y 11, las incógnitas originales eran número de productos de cierto tipo; en un afán de simplicidad, el maestro dice a los estudiantes “hagan de cuenta que son plumas, lápices y borradores”, pero las soluciones encontradas son fracciones, entonces les indica que tomen el entero inmediato menor como solución. Esto último fue una complicación innecesaria agregada por un comentario aparentemente inocente, hecho con el afán de ayudar a clarificar la situación expuesta.

Aunque el Profesor C declara explícitamente su preocupación por la estudio de los SEL como modelos, observamos que no fue un aspecto que explotara en gran medida, puesto que los problemas susceptibles de modelarse fueron cinco, tres de los cuales eran muy elementales.

En cuanto a los lenguajes, observamos que además de la lengua materna, el profesor C explotó el uso de representaciones numéricas (a la hora de proponer soluciones a los SEL), usándolas estratégicamente como punto de partida para hallar las expresiones algebraicas. Puesto que el aula estaba equipada de manera completa para trabajar cotidianamente con las calculadoras, pudo integrar también el uso de representaciones gráficas en aquellas situaciones que así lo permitían.

Aunque buena parte del tiempo de estudio estuvo dedicado a que los estudiantes dominaran una técnica para resolver los SEL, no quedaron muy claros los niveles de dominio alcanzados por los estudiantes; la mitad de ese tiempo lo consumió el breve entrenamiento que se tuvo que impartir en el dominio del recurso tecnológico. El tamaño de los sistemas resueltos no compensó el tiempo invertido en ello, aunque en otros aspectos, ya mencionamos lo gráfico, sí hubo ganancia didáctica. También el tener la calculadora en sus manos, motivaba que los muchachos estuviesen siempre activos, aunque fuese siguiendo las instrucciones que daba el maestro.

Los niveles de formalización alcanzados fueron muy bajos, no apareció una sola definición, ni teorema, ni propiedad alguna, que fuesen hechos explícitos en todo el proceso de estudio, pero esto claramente no era un objetivo del profesor C, como se desprende de lo que nos declaró durante su entrevista. No hubo tampoco un gran impulso en el desarrollo y uso de argumentaciones, esto tampoco estuvo entre las preocupaciones del docente.

En otro orden de ideas, la trayectoria docente nos permite identificar una planeación del Profesor C, en donde aparece:

a) Una organización de los contenidos matemáticos a tratar, basada en los acuerdos del colegiado de profesores.

b) Un objetivo por alcanzar: lo que los estudiantes debían aprender alrededor de los SEL

c) Una estrategia didáctica seleccionada: el trabajo alrededor de situaciones-problemas cercanas a la práctica de los ingenieros, involucrando el uso de recursos computacionales y de diferentes registros de representación, con lo cual sus configuraciones son muy ricas en lenguajes.

d) Una propuesta de organización para el trabajo en el aula: trabajo individual en su mayoría y finalmente en parejas.

e) La iniciativa a integrar a la calculadora, la cual fue manejada con éxito.

f) Un proceso de evaluación consistente en un examen.

Las funciones docentes fueron de planeación, motivación, asignación de tareas, regulación, evaluación e investigación. La planeación original se mantuvo, independientemente de cualquier circunstancia, según declaraciones fuera de micrófono hechas a la investigadora por el Profesor C.

El maestro no se intimida por el hecho de que los alumnos sean condicionados; siempre se muestra paciente con ellos, de buen humor, sonriente, aclara todas las dudas y repite todo los procedimientos que se le soliciten, pero no admite distracciones de ningún estilo, llama la atención sin titubeos, una sola vez pero ejerciendo el principio de autoridad sin dudarlo.

Capítulo VII. Conclusiones

En este último capítulo presentamos las conclusiones de la investigación que se ha descrito a lo largo de este documento. Lo hemos organizado partiendo desde consideraciones de carácter general, hasta aquellas que son más específicas, pero siempre situando como eje conductor a los objetivos declarados al inicio.

VII.1 Sobre la investigación y sus aportaciones

Nos interesamos por un problema de nuestro entorno, que a pesar de la especificidad de origen, es representativo de lo que cotidianamente sucede en las instituciones públicas, de nivel superior, en nuestro país. Los modelos curriculares se construyen en instancias que integran fundamentalmente especialistas de diversas áreas y autoridades administrativas de distintos niveles, y con motivaciones disímbolas: emergencia de nuevos paradigmas científicos y tecnológicos, modificación de los procesos productivos nacionales, nuevos patrones de generación y distribución de la riqueza, necesidades sociales, presiones políticas, etc.

La historia de las universidades públicas nos muestra que las modificaciones curriculares siguen la ley del embudo: en algún momento el embudo se angosta y el líquido con el que se llenó, llega a un área mucho más pequeña que aquella en donde inició; en el caso que nos ocupa, hablamos de una modificación curricular que inició en una instancia general de la institución universitaria, pasó a niveles inferiores, divisiones y departamentos, llegó a un conglomerado más reducido, los profesores de álgebra en ingeniería, y su concreción final se dio en un salón de clases con la actividad de un profesor ante un grupo de estudiantes.

Desde que concebimos nuestra investigación, nos pareció importante enmarcarla en esos ámbitos más generales que hemos señalado, porque estamos convencidos de que la problemática educativa está inmersa en una problemática social, que no debe pasar desapercibida. Sin embargo teníamos claro que al ser un trabajo de investigación en matemática educativa, debía situarse en el campo, y sobre todo, ser abordado con sus recursos.

Esto constituyó para nosotros un reto importante: la ubicación de la problemática dentro del campo, dependía de que pudiera ser interpretada con las herramientas teóricas propias de nuestra disciplina. Creemos que alcanzamos este propósito, pues la problemática pudimos identificarla vía el empleo de una noción teórica que ha rebasado la escuela francesa y se ha incorporado al núcleo básico de conocimientos, fenómenos y nociones que reconocen los diferentes paradigmas de matemática educativa, y que inclusive ha llegado más allá de los límites de la disciplina: nos referimos a la transposición didáctica.

Además de lo anterior, las nociones que tomamos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática nos permitieron hacer una relectura de la transposición didáctica; en otros términos, nos pusieron en condiciones de poder operativizar, tanto a nivel macro como a nivel micro, los aspectos más típicos del fenómeno que estudiamos. Las nociones de saber sabio, saber enseñado y saber aprendido tomaron concreción vía los significados institucionales y su correspondiente tipología: significado de referencia, pretendido, implementado y evaluado, los cuales, a su vez, fueron descritos mediante las correspondientes trayectorias y configuraciones epistémicas y didácticas.

Los seis objetos matemáticos primarios: situación-problema, lenguaje, procedimientos, argumentos, conceptos y propiedades, nos dieron la pauta para poder ubicar las prácticas operativas y discursivas de las sucesivas comunidades o instituciones que estudiamos.

Esto nos permite argumentar la potencialidad del EOS como paradigma emergente en ME, pues en la medida en que una teoría permite describir, analizar y explicar una fenomenología, está mostrando su fortaleza. En nuestro caso particular pudimos realizar todas esas funciones para el fenómeno que estudiamos.

Una de las reservas que como investigadores teníamos, era si las nociones de trayectoria epistémica y trayectoria didáctica serían sensibles a las diferencias que existen, por ejemplo, en las formas en que los profesores trabajan en el aula; esto es, si podríamos hacer visibles las variantes metodológicas o conceptuales susceptibles de emerger en la labor docente. Como se mostró en el Capítulo VIII, donde se desarrolló el significado implementado por los tres profesores en estudio, se pudo hacer de manera satisfactoria.

En el apartado siguiente señalamos nuestras conclusiones con relación a los objetivos que nos planteamos en nuestra investigación. Posteriormente haremos un análisis en torno a los aspectos curriculares y, finalmente, algunas reflexiones sobre el papel que juega el profesor en la concreción de una propuesta curricular, matizada por sus concepciones personales, las que se ponen de manifiesto en su práctica docente.

VII.2 Sobre los objetivos general y específicos

En el capítulo II declaramos como objetivo general describir el proceso de transformación del conocimiento algebraico, desde su inclusión en una propuesta curricular institucional para ingeniería, hasta su puesta en escena en el aula. De él, desprendimos como objetivos específicos:

1) Identificar los elementos que entran en juego en la construcción del significado institucional de referencia para el álgebra en las ingenierías y describir en qué consiste éste.
2) Describir el significado institucional pretendido, es decir conocer cómo interpreta y adapta un colegiado de profesores de álgebra, los contenidos algebraicos seleccionados por otra instancia.
3) Describir el significado implementado, estos es, cuáles son las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que hace un profesor, en su carácter de representante institucional, al poner en escena un conocimiento algebraico.

En relación al objetivo 1, mostramos evidencias de la gran cantidad de elementos que llevan a tomar la decisión de modificar las estrategias de formación de los futuros egresados universitarios, particularmente los de ingeniería; en esa lista, las necesidades del país ocupan los primeros lugares**,** las cuales van desde los compromisos que hacen los responsables de la conducción de los destinos nacionales, tanto al interior como al exterior, hasta los aspectos propios del desarrollo de la disciplina de que se trate.

Como señalamos en su momento, la firma del Tratado de Libre Comercio con los Estados Unidos y Canadá, ha tenido implicaciones en el ámbito educativo, concretamente en el nivel superior, que es el responsable de formar a los profesionales de la ingeniería, las cuales se reflejan en las exigencias de mejoramiento de la calidad y su certificación a las universidades públicas, como una condicionante para obtener aumentos presupuestales. Por otro lado, los colegios nacionales de ingenieros ejercen influencia y presión, argumentando, creemos que acertadamente, el hecho de que la profesión ha evolucionado, y que en consecuencia también deben cambiar las características del profesional que la ejerce.

Estos dos elementos, sociedad y gobierno, apelando a la responsabilidad social que la universidad tiene, se constituyen en una fuente constante de coerción en las decisiones institucionales. Una vez dentro de la institución escolar, confluyen otra serie de elementos para permear los cambios por impulsar; concretamente, en esta investigación, identificamos cómo las comunidades administrativas toman el lugar de sus colegas extramuros y despliegan esfuerzos para cumplir con los compromisos contraídos externamente.

En las comunidades académicas, ausentes de las grandes decisiones, recae la responsabilidad de darles concreción. De cualquier manera, a este nivel también se manifiestan presiones de otra índole, pues tomando en cuenta que en la formación de un ingeniero hay varias comunidades de profesionistas involucrados, los que en teoría tienen a su cargo la responsabilidad primera de ello, buscan a su vez presionar a las otras colectividades para que se siga el rumbo que piensan, desde su papel de expertos, es el más apropiado. A este respecto, es pertinente hacer la aclaración de que no percibimos que exista una posición uniforme del papel que tiene la educación matemática en la formación de un ingeniero.

Si bien se reconoce su necesidad, parte de la comunidad ingenieril reduce esta formación al manejo de técnicas y algoritmos, otorgándole un sentido utilitario; en contraparte, está la postura de aquellos que piensan que la matemática juega un papel mucho más formativo, en el sentido de que contribuye al desarrollo de competencias generales importantes para ejercer la profesión, así como para estar en condiciones de realizar estudios de posgrado.

Para el caso del álgebra, son las agrupaciones de profesores de ingeniería y los de matemáticas los que toman a su cargo, respectivamente, el diseño de los planes de estudio y del programa correspondiente, instrumentos de concreción de las discusiones más generales. En este nivel identificamos que algunos libros de texto presentes en el mercado, también tienen influencia sobre los contenidos del programa de la materia y en sus procesos de estudio.

Esa fue la razón por la que fueron seleccionados como las bases sobre las cuales construimos nuestra descripción del significado de referencia para los sistemas de ecuaciones lineales. Éste consiste en el dominio de procedimientos para la resolución de SEL, usando juegos entre los lenguajes materno y algebraico mediante el planteamiento de situaciones-problema de la ingeniería. Los conceptos formales también tienen su lugar, aunque no preponderante, pero los argumentos y las propiedades están ausentes.

Con esas prácticas operativas y discursivas, consideramos que el significado impulsado por la institución para el álgebra en ingeniería, es primordialmente el de un lenguaje que modela problemas del área, así como una colección de procedimientos para resolverlos.

En cuanto al objetivo 2, la instancia colegiada que se formó en el caso que estudiamos, y cuya conformación fue meramente circunstancial, introdujo elementos de análisis muy interesantes. Aunque muchas instituciones manejan instancias que agrupan a profesores que atienden el mismo tipo de cursos, llamadas generalmente academias, éstas la mayor parte de las veces no llegan más allá de ser un espacio común para intercambiar puntos de vista, experiencias y comentarios sobre las actuaciones de los alumnos en las clases.

El grupo colegiado de profesores que tuvimos la oportunidad de observar, asumió una tarea cualitativamente diferente: se trataba de discutir un programa de materia, desde todos los aspectos posibles. Había que generar consensos que tendieran a uniformizar la labor de los profesores en el salón de clase, eliminando, en lo posible, las interpretaciones que se desviaran de las líneas generales que se encontraban planteadas en el documento oficial. Al ser éste básicamente una lista de temas, adicionada con una serie simplificada de sugerencias y recomendaciones, las primeras sesiones fueron de catarsis y consistieron, como era de esperarse, en opiniones que confluían en lo cargado del programa, el poco tiempo que tenían asignados temas que se consideraban importante, lo negativo de haber aceptado comprimir dos programas en uno, etc.. En resumen, la primera coincidencia fue el reconocer la gran dificultad de cumplir con los objetivos que se planteaban en el mismo programa.

La dirección del proyecto, intentó que éste se transformara en un espacio para estudiar reportes de investigación y resultados teóricos de matemática educativa, para proveer a los participantes de herramientas para enfrentar la problemática descrita. Obviamente que esta iniciativa fracasó, y la misma dinámica del grupo empujó a que el espacio se discusión se convirtiera en una especie de taller didáctico, donde los profesores exponían, con una encomiable expresión de sencillez y honestidad, cómo abordaban determinados contenidos, qué hacían en tal o cual situación, escuchaban críticas, modificaban sus propuestas con base en esas críticas, etc.

Fue muy importante la labor de algunos integrantes, cuya formación en matemática educativa, les permitía mostrar una mayor sensibilidad a las inquietudes del resto, de tal manera que de forma natural se fueron haciendo dos subgrupos, uno que guiaba y el otro que sin dificultad asumía el liderazgo del otro, reconociendo su experiencia.

Cada profesor llegó a ese espacio de reflexión con un sistema de prácticas operativas y discursivas para el álgebra, el cual, al menos en teoría, fue transformado. De acuerdo con información proporcionada mediante entrevistas, dichos significados fueron modificados como consecuencia del trabajo colectivo, al menos en cuanto a la disposición para escuchar otros puntos de vista e incorporar en sus prácticas elementos novedosos. Específicamente algunos maestros declararon sorpresa en relación a nuevos (para ellos) usos de la calculadora, otros sobre la manera en cómo usar las situaciones problema que fuesen más allá de ejemplificaciones o ejercitaciones, otros más en cuanto a la manera de explotar el lenguaje numérico, por citar algunos ejemplos.

Los productos que el grupo generó fueron de dos tipos: un banco de situaciones-problemas y una serie de acuerdos sobre la labor docente. Éstos fueron:

i) Las situaciones problemas debían ser adaptaciones para uso en aula de problemas propios de la ingeniería. El campo de problemas a tratar se constituyó principalmente por problemas de mezclas, flujo de tráfico, balanceo de ecuaciones químicas y producción y donde los SEL resultantes podían ser cuadrados o no, y de tamaño relativamente pequeño.

ii) En atención a la importancia de los SEL en el modelado de problemas de ingeniería, se debía de impulsar el desarrollo de esta competencia, en la que mucho podría aportar el manejo sistemático de alguna o todas, dependiendo del caso específico, las diferentes representaciones matemáticas (algebraica, verbal, numérico y gráfico). Esto podía ser potenciado con el uso de algún dispositivo tecnológico moderno, calculadora y/o computadora.

iii) Ante el reconocimiento de que los ingenieros usan a la matemática, habría que desarrollar habilidades en el manejo de un procedimiento eficiente para resolver cualquier tipo de SEL, siendo el escogido el método de Gauss-Jordan.

iv) No se consideraría prioritario el trabajo formal con los conceptos y propiedades (teoremas).

Es estos consensos podemos observar que hay más objetos matemáticos primarios explícitos, que los que encontramos en el significado de referencia. En cuanto a las situaciones problema, se identifica un campo de problemas de ingeniería por tratar, los que ya se mencionaron arriba. Este campo, aunque no es exhaustivo, está formado por una muestra representativa de las situaciones prácticas que los ingenieros enfrentan durante su ejercicio profesional, adaptadas por supuesto a las condiciones que supone el trabajarlas en un salón de clases.

Los lenguajes son más ricos en el significado pretendido, pues el uso de representaciones gráficas y numéricas, en el caso de los SEL, no aparece explícitamente, aspectos que sí fueron asumidos como pertinentes por el colegiado de profesores. La recomendación de emplear siempre que fuese posible a la calculadora y a la computadora llevaba consigo la posibilidad de que se potenciara este tipo de representaciones.

En síntesis, el significado pretendido para el álgebra por el grupo, es el de un lenguaje que modela y resuelve problemas de campos diversos de la ingeniería. El tratamiento que se hace de los problemas se enriquece, si se compara con el significado de referencia, mediante la convención del uso de diversas representaciones, y del empleo de calculadoras y/o computadoras. Se dejan en un segundo término conceptos y resultados teóricos formales, así como sus demostraciones; no se hace tampoco ninguna recomendación sobre cómo emplear a los argumentos, o el desarrollo de la habilidad para argumentar, necesaria para la confrontación de ideas cuando se resuelven problemas, o para la comunicación razonada de procesos y resultados.

Una vez que el profesor llega al aula, una gran cantidad de circunstancias influyen en que su planeación tenga que ajustarse, de tal manera que el significado pretendido empieza a transformarse en el significado implementado. Su descripción, el tercero de los objetivos específicos, fue realizada mediante el estudio de tres casos, los denominados profesores A, B y C.

Los tres maestros, casos prototípicos en la institución seleccionada, mostraron mediante el ejercicio de su labor docente, las variantes que pueden ser introducidas en el trabajo didáctico, en dependencia de las circunstancias en las cuales éste se desarrolla. Si bien los tres construyeron su discurso mediante diferentes situaciones- problemas, tomadas del campo de problemas que previamente había conformado el colegiado, las configuraciones epistémicas y didácticas que tejieron alrededor de ellas fueron cualitativamente diferentes. El profesor A, por ejemplo, manifiesta en su accionar con los estudiantes el valor formativo que concede a los problemas, puesto que los usa no como una situación a resolver, sino como un medio a partir del cual puede y debe construirse el conocimiento algebraico: concibe a éste como un entramado de lenguajes, conceptos, argumentos, procedimientos, y propiedades en acto.

Es notable cómo, teniendo en mente la concepción de un ingeniero como un profesional que se enfrentará a la solución de problemas, y el papel que el álgebra puede tener en ello, centra su preocupación en desarrollar esa competencia, desplegándola como un proceso que integra conocimiento, habilidad y actitud. Como ésa es su prioridad, no escatima esfuerzos para alcanzar su objetivo, aunque en el transcurso sacrifique aspectos como los tiempos contemplados en el programa de la materia o los tiempos asignados a las sesiones de clase.

En este caso, podemos considerar que más que trabajar en el álgebra, el profesor A trabaja en desarrollar un pensamiento algebraico, integrando habilidades para la resolución de problemas, de razonamiento, de comunicación, de uso de representaciones y relacionales.

El profesor B, por su parte, planea una serie de prácticas operativas y discursivas alrededor del conocimiento algebraico en juego, atendiendo al grado de complicación que pueden tener las situaciones problema que va usando; va de lo más elemental a lo más complicado. Su objetivo es aparentemente modesto, pues declara que aspira a que los alumnos aprendan a manejar un algoritmo y a reconocer aquellas situaciones en las que lo podrían usar. En esa dirección, podemos considerar que para el profesor B, enseñar álgebra significa entonces enseñar procedimientos, identificando las problemáticas susceptibles de resolverse con ellos.

La sensibilidad que el profesor B mostró al darse cuenta de las características emotivas de sus estudiantes, lo llevó a tomar decisiones que afectaban lo contemplado en el programa de la materia, y en ese sentido, podemos decir que no atendió su responsabilidad como representante institucional. Pero si analizamos desde otra perspectiva su actuar, vemos que centró su compromiso en los estudiantes, ubicándolos como seres humanos en conflicto, a los cuales debía de ayudar en el desarrollo de actitudes hacia el trabajo, motivándolos, impulsando su autocontrol y la confianza en sí mismos, aspectos que, en el caso concreto de esos estudiantes, les era mucho más necesario que cualquier contenido algebraico.

El profesor C, en cambio, asume su papel como representante institucional con plena conciencia. Para él hay una serie de contenidos que estudiar, hay una serie de acuerdos que se tomaron en el grupo de profesores que hay que respetar, y, asumiéndolos, planea su proceso de estudio. Es el único, de los tres casos que estudiamos, que atiende, en la medida de lo posible, todos los consensos; las situaciones problema que maneja en el salón de clases, son retomadas del banco de actividades seleccionadas por el colegiado, y además las implementa siguiendo las sugerencias que éste planteó.

Las situaciones problema que selecciona las usa más en el sentido de mostrar aplicaciones para los contenidos matemáticos estudiados; le concede gran importancia al funcionamiento del algoritmo y a la construcción del modelo, y aunque sus planteamientos son en algún sentido tradicionales, los enriquece la introducción que hace, siempre que es posible, de diferentes representaciones. Fue el único maestro que cotidianamente impulsó el uso de la calculadora.

Podemos decir que su concepción de lo que significa el álgebra está más ligada a la modelación, los procedimientos y a los conceptos, caracterización que se corresponde con sus antecedentes de formación y experiencia docente. Esto último sucede también en el caso de los profesores A y B.

Los tres casos que observamos, nos han mostrado las rutas diferentes que puede tomar un proceso de estudio planeado aparentemente bajo las mismas consideraciones. Hemos sido testigos de cómo cada uno de los profesores transpone en el aula, su propia versión del significado institucional pretendido. No hay aquí juicios de valor, pues en cada una de las posturas asumidas por los tres profesores, advertimos que hubo circunstancias que los hicieron tomar las decisiones que tomaron, además, por supuesto, de las concepciones y creencias de cada uno de ellos.

Todo lo que hemos expuesto hasta este momento, nos hace confirmar una vez más la complejidad del fenómeno de la transposición didáctica, que ya advertíamos desde el inicio de la investigación, pues habíamos declarado en algún apartado anterior que se trataba de un fenómeno complejo, inevitable, y quizá hasta necesario. La gran interrogante que se abre es cómo lograr la mejor de las transposiciones didácticas, cómo conseguir que las distancias entre el significado de referencia, pretendido e implementado sea lo más pequeña que se pueda. Esto siempre tendrá una respuesta dependiendo del punto de vista desde el cual se interprete “mejor”.

Algo que se ha mantenido latente en todo este trabajo, es la noción de curriculum que se maneja en el sistema de educación superior mexicano. La interpretación de curriculum como el programa de estudios, como el conjunto de materias agrupadas en áreas de conocimiento, donde unas son catalogadas como de formación básica y otras de formación específica, ya está muy rebasada teóricamente, pero en la práctica sigue teniendo gran presencia, sobre todo en los implementadores de cualquier propuesta: los profesores.

Este hecho afecta el proceso de formación de los egresados del nivel superior. En todos los niveles educativos de este país previos a él, existen propuestas curriculares, al menos para el área de matemáticas, que están mucho más acordes con una nueva concepción del egresado, con otra mirada para la formación matemática, pero que se trunca al llegar a la universidad.

Estamos conscientes de que el contar con una propuesta curricular novedosa, en el sentido de que incluya resultados científicos generados por la disciplina que estudia esta fenomenología, la matemática educativa, no garantiza el éxito de la misma, pero al menos nos pone en el camino.

Seguramente que el mayor de los retos, el que va más allá del diseño de una estrategia de formación, es su implementación, y, para nosotros, la clave está en el diseño de los procesos de formación, capacitación y actualización de profesores. De la misma manera en que aceptamos que la resolución de problemas, es la estrategia ad hoc para la enseñanza de la matemática, ¿por qué no replantearnos esa estrategia para cambiar las creencias y concepciones que sobre la matemática, su enseñanza y el aprendizaje tienen los docentes y que son las que se convierten en obstáculos epistemológicos que impiden la construcción de nuevas formulaciones?

Asumiendo que un problema es un estado de conflicto cognitivo al que llega una persona cuando intenta responder una pregunta, o realizar una tarea relacionada con una determinada situación (denominada problémica), donde se da cuenta de que no sabe cómo proceder, y sabiendo que son esos estados de conflicto cognitivo los que propician la actividad intelectual de los individuos, ¿por qué no diseñar situaciones problémicas que impulsen el que los profesores se cuestionen sus conocimientos previos sobre lo que significa enseñar y aprender matemática?.

Estas últimas reflexiones surgieron a lo largo del proceso de diseño y elaboración de la investigación, pero ya no serán abordadas aquí. Con lo dicho, damos por concluido el presente trabajo.

Bibliografía

Anton, H. (2005). *Introducción al álgebra lineal*. (Tercera edición). México: Limusa S.A. de C.V.

Ávila, A. (1999). Enseñar a través de la resolución de problemas: Dificultades, obstáculos y efectos de una transposición. En Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger. (pp.202-209). Ciudad de México: Universidad Pedagógica Nacional.

Camarena, P. (2001) La matemática en el contexto de la ciencias. Red de Cimates, Serie Antologías. No. 1. Ed. CINVESTAV-IPN.

Camarena, P. (2002). Metodología Curricular para las ciencias básicas en Ingeniería. En *Innovación Educativa*, *2*(10).

Camarena, P. (2003). Un indicador para el desarrollo de competencias profesionales del futuro ingeniero. En 7º. Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. (pp.1-6). Ciudad de México: ESIME.

Camarena, P. (2004). La formación de los profesores de las ciencias básicas en el nivel superior. En *Científica, 8*(1), pp. 35-44. Ciudad de México: ESIME-IPN.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial*. 82-102.

Carlson, D., Johnson, Ch., Lay, D., Porter, D., Watkins, A. y Watkins, W. (1997). *Resources for Teaching Linear Algebra*. USA: The Mathematical Association of America, MMA Notes Volume 42.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento. Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis doctoral no publicada, Matemática Educativa, Cicata-IPN, México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. SEP-Cooperación Española, España (Colección "Biblioteca del Normalista").

Contreras, A., Font, V., Luque, L., y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en didactique des mathématiques, 25*(2)151-186.

Covarrubias, J. (2002, octubre). Tres documentos sobre la formación de ingenieros. *Revista Investigación Tecnológica.* 1(1), 3-8. Recuperado el 11 de junio de 2007 en http://www.ai.org.mx/revista/numeros_anteriores.htm

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefacio de Guy Brosseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla. México: Reverté/Clame A.C.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial. 177-194.*

D'Amore, B. y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 191-218.

Díaz Barriga, A. (1990) *Ensayos sobre la problemática curricular*. 4ª. Edición, México: Trillas/ ANUIES, (reimpresión 1991).

Díaz Barriga, Á. (2003). Curriculum. Tensiones conceptuales y prácticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *5*(2). Consultado el día 16 de julio de 2007 en: http://redie.uabc.mx/vol5no2/contenido-diazbarriga.html

Estévez E. y Fimbres, P. (1998). *Cómo diseñar y reestructurar un plan de estudios. Guía metodológica.* Hermosillo, México: Editorial Unison.

Font, V., Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaco Matematica Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Freudenthal, H. (1988). "Problemas mayores de la educación matemática". Contenido en: López Yáñez, Alejandro (coord.) *Problemas de la enseñanza de las matemáticas*. México: UNAM/Porrúa: (pp. 3-11).

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), pp. 325-355.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*. *22*(2/3), 237-284.

Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J., Batanero, C, y Font, V. (2007) *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Versión ampliada del artículo Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblat für Didaktik der Mathematik*, *39*(1-2; 127-135). Disponible en Internet, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J., Font, V. y Whilemi, M. (2007). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones* (en prensa). ISSN: 1577-4147. Versión revisada de la Conferencia invitada en el *IV Congresso Internacional de Ensino da Matematica*. ULBRA, Brasil, 25-27 Octubre 2007. Recuperado en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/niveles%20analisis%20didactico%204Julio08.pdf

Gómez, R. (2004, diciembre). Transposición didáctica y discursos sobre el cuerpo: una mirada a la construcción curricular en educación física. *EF y Deportes*. 10,79. Recuperado el 15 de noviembre de 2008 en http://www.efdeportes.com/edf79/ef.htm

Hernández, A. (2000). *Algunos aspectos sobre las habilidades matemáticas de los estudiantes graduados en ingeniería*. En Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario. Hitt, F., y Hernández, A. (Eds). México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. (pp. 67-77).

Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* (Cuarta edición). Cd. de México, México:Mc Graw-Hill Interamericana.

Kolman, B. (1999). *Álgebra Lineal con Aplicaciones y MATLAB*. (6ta. Edición. México: Prentice Hall/Pearson.

Lay C. D, (2001). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. (Segunda Edición). México: Pearson Educación de México.

Martínez, G. (2003). Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes. Tesis doctoral no publicada, Matemática Educativa, Cicata-IPN, México.

Marúm Espinosa, Elia. (1997). Las implicaciones del TLC en la educación superior mexicana. *Perfiles Educativos*, XIX, 077.

Mena, R. (2005). *Un estudio sobre la enseñanza del álgebra*. Tesis de Maestría no publicada, Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.

Nakos, G. y Joyner, D. (1999). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México: International Thomson Editores, S.A. de C. V.

Navarrete, M. (2006). Programas estratégicos de la División de Ingeniería. [Versión electrónica], *Epistemus, 1*(1), 5-12.

Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. Tesis de Doctorado no publicada, Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Ramos, A. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Barcelona, España.

Ruiz, A., Chavarria, J. y Alpízar, M. (2006). "Epistemología y construcción de una nueva disciplina científica: la *Didactique des mathématiques.""UNICIENCIA*, *20*,2,13. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica. Recuperado en http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%201.pdf

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones*. Madrid, España: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.

Vázquez, A. (2006). "El análisis de los procesos de transposición didáctica en la enseñanza del lenguaje escrito"**.** *Cuadernos psicopedagógicos,* 6,10. Recuperado el 16 de noviembre de 2008 en http://pepsic.bvspsi.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S16761049200600010000 4&lng=pt&nrm=is