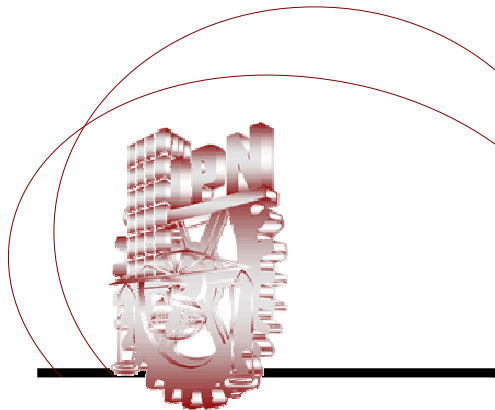




INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA
Y TECNOLOGÍA AVANZADA

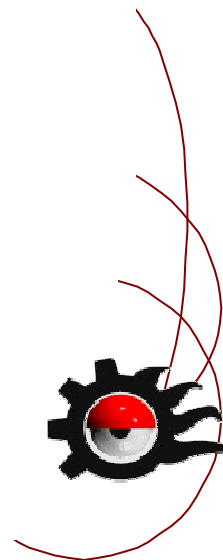
**ANÁLISIS DEL PARÁMETRO COMO VARIABLE EN LA
TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES: UN ESTUDIO CON
ALUMNOS UNIVERSITARIOS**

Tesis que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Lysette Félix Félix

Directora de Tesis:
Dra. María Trigueros Gaisman

México, D. F., Octubre de 2009.





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 16 del mes de octubre del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

**"Análisis del parámetro como variable en la transformación de funciones:
un estudio con alumnos universitarios"**

Presentada por el (la) alumno (a):

<u>Félix</u> Apellido paterno	<u>Félix</u> materno	<u>Lysette</u> nombre(s)
Con registro:		
A	0	3 0 2 1 2

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. María Trigueros Gaisman

Dra. Gabriela Buendía Abalos



Dr. Apolo Castañeda Alonso

CICATA - IPN

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 20 del mes Octubre del año 2009, el (la) que suscribe Lysette Félix Félix alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030212, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. María Trigueros Gaisman y cede los derechos del trabajo intitulado Análisis del parámetro como variable en la transformación de funciones: un estudio con alumnos universitarios, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección tabachines2@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



Lic. Lysette Félix Félix

Nombre y firma

Dedicatorias

A Ricardo, por su incondicional apoyo, paciencia y comprensión,
para lograr una mas de mis metas

A mis queridas hijas Regina, Alejandra y Lysette quienes fueron
una gran motivación a mi esfuerzo y dedicación

A mis hermanas Yadelle y Carla cuyo espíritu de lucha y
superación ante la adversidad me ha servido de gran ejemplo

A aquellos familiares y amigos quienes me estuvieron alentando
durante la elaboración de esta tesis

Agradecimientos

A Dios por permitirme vivir y darme la oportunidad de realizar este logro

Deseo expresar mi agradecimiento con mucho cariño a la Dra. María Trigueros G. por la motivación y apoyo recibidos no sólo en la construcción de esta investigación sino también para mi desarrollo personal y profesional. Gracias por sus conocimientos y las ganas de transmitirlos

A mis profesores del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) por su dedicación y guía para la formación profesional de sus alumnos, gracias por sus valiosas aportaciones

Agradezco a todos mis alumnos por su trabajo y esfuerzo en la realización de las prácticas, ya que gracias a eso pude realizar el análisis de mi investigación

INDICE

Resumen	1
Abstract	1
Introducción	2
CAPITULO 1. Motivación y preguntas de investigación	5
1.1 Motivación	5
1.2 Preguntas de investigación	7
CAPITULO 2. Antecedentes	9
2.1 Antecedentes históricos	9
2.2 Antecedentes de investigación	11
2.3 Visualización y uso de la tecnología	17
CAPITULO 3. Marco teórico. Modelo 3UV	22
CAPITULO 4. Metodología	29
4.1 Análisis de cada una de las preguntas de las prácticas	30
CAPITULO 5. Resultados	77
5.1 Análisis de las respuestas de cada una de las actividades utilizando el modelo 3UV	77
5.2 Resultados globales del análisis de las respuestas de las prácticas	140
5.2.1 Práctica 1, 2, y 3 (función lineal)	140
5.2.2 Práctica 4 (función cuadrática)	145
5.2.3 Práctica 5 (función racional)	149
5.3 Análisis de las respuestas de exámenes parciales y departamentales	151
5.4 Discusión de los resultados obtenidos	170
Conclusiones	176
Bibliografía	183

Resumen

Este trabajo de investigación muestra los resultados del análisis de la capacidad de los alumnos de interpretación, simbolización y manipulación de los parámetros que aparecen en la transformación de funciones básicas. La investigación consiste en la aplicación de una serie de prácticas a un grupo de estudiantes que inician la universidad, que incluyen distintas actividades diseñadas para poder detectar la forma en la que los alumnos trabajan con parámetros, con el apoyo de un programa de graficación llamado Graphmatica, como herramienta de visualización y aprendizaje. Para realizar el análisis de cada una de las preguntas y cada una de las respuestas, se utilizó el modelo 3UV (tres usos de la variable) como marco teórico. Las prácticas se aplicaron a estudiantes universitarios, durante el primer semestre, cuando cursaban la materia de introducción a las matemáticas.

Abstract

This research work shows the results obtained from the analysis of students' capability to interpret, symbolize and manipulate parameters when they appear in transformations of basic functions. The research project consists on the application of a series of class-activities to a group of students who are starting university, the activities include different questions intended to analyze the way students work with parameters. A graphical software called Graphmatica was used in the activities as learning and visualizing tool. The theoretical framework used in the analysis of each question and each answer, was the 3UV (uses of variable) model. All the activities were used by first semester university students in an Introduction to Mathematics course.

Introducción

Investigaciones realizadas en el área de la Matemática Educativa han encontrado que el origen de las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión y el aprendizaje del concepto de variable se deben en parte a que es un concepto multifacético, ya que la variable puede analizarse como incógnita, como número general y como parte de una relación funcional. Por tanto, el concepto de variable asume diversos significados en diversos contextos (Ursini y Trigueros, 2001; Drijvers, 2003).

A nivel secundaria cuando los estudiantes inician el estudio del álgebra, el uso de literales para denotar una cantidad desconocida o un valor general, se convierte en un problema para su comprensión, y a pesar de que los resultados en exámenes aplicados muestran buenas calificaciones, se ha demostrado que se debe más bien a memorización de métodos más que al hecho de lograr una buena comprensión y manipulación de las variables.

Si durante la enseñanza del concepto de variable se trabaja en ejercicios distintos para diferenciar a la variable de sus tres distintos usos (como incógnita, como número general o en una relación funcional) posiblemente se lograría que el alumno desarrollara la habilidad para interpretarla, simbolizarla y manipularla de manera adecuada, dados los resultados positivos de algunos experimentos de enseñanza (Ursini, Trigueros, Escareño y Montes, 2002).

Lo mismo ocurre con los parámetros, de acuerdo con la propuesta de Ursini y Trigueros (2004). Los parámetros adoptan las mismas facetas que el concepto de variable e incluso, pueden considerarse como un número general de segundo orden, es decir, una generalización de la generalización. Al igual que con las variables, se ha encontrado que existen serias dificultades por parte de los estudiantes en la comprensión de los usos elementales de los parámetros. Dadas estas dificultades y las que se conocen relativas al concepto de función, al trabajar con funciones, es de esperar que este problema se agudice.

Por otra parte, se sabe que la tecnología puede jugar un papel importante en la promoción de la reflexión de los alumnos sobre el papel de los parámetros; por ello se consideró importante, en este trabajo de investigación, incluir el análisis del uso de la computadora primeramente como herramienta de visualización y además para poder analizar qué tanto influye el uso de la tecnología en la comprensión y el aprendizaje del efecto de los parámetros en las transformaciones más usuales de funciones básicas.

En este trabajo de investigación se analiza de manera específica, cómo los alumnos en la universidad, trabajan con funciones básicas que incluyen parámetros cuando tienen oportunidad de utilizar una herramienta de visualización en la computadora. Utilizando el modelo 3UV como marco teórico se diseñó y se llevó a cabo una investigación con este propósito. Las actividades empleadas se diseñaron de modo que podamos analizar si los alumnos distinguen y comprenden el efecto que cada uno de los parámetros tiene sobre la transformación de funciones, así como detectar sus dificultades respecto al parámetro.

Dado que el trabajo con funciones que incluyen parámetros requiere de la comprensión del concepto de variable, se consideró pertinente utilizar como marco teórico un modelo que enfocara directamente al concepto de variable: el modelo 3UV. En este modelo se describen los tres distintos usos en los que la variable se presenta más frecuentemente en el álgebra elemental (3UV) y los aspectos involucrados en su posible diferenciación e integración (Ursini y Trigueros, 2001)

La tesis está dividida en cinco capítulos. En el primer capítulo se explican los motivos que me llevaron a realizar este trabajo de investigación y las preguntas formuladas que son la base para la investigación.

En el segundo capítulo se hace un breve análisis sobre el concepto de parámetro a través del tiempo, y también se hace mención a diferentes investigaciones relacionadas con los conceptos de función, de parámetros, de transformaciones de funciones, sobre visualización y sobre el uso de la tecnología como instrumento para el aprendizaje del concepto de parámetro.

En el tercer capítulo se describe el modelo 3UV utilizado como marco teórico, y se muestra, de manera explícita, los requisitos que caracterizan a cada uno de los tres usos de la variable (como incógnita, como número general o en relación funcional), al igual que para los tres distintos usos del parámetro. El modelo es utilizado, tanto para el diseño y análisis de las preguntas aplicadas en cada una de las actividades de las prácticas, así como para el análisis de cada una de las respuestas dadas por los alumnos. El diseño de las preguntas permite explorar la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que implican los tres distintos usos tanto de la variable como del parámetro.

El cuarto capítulo corresponde a la metodología utilizada. Aplicando el modelo 3UV se analizaron cuidadosamente cada una de las preguntas diseñadas para las actividades de las prácticas, aplicadas a lo largo del semestre escolar.

En el capítulo cinco se exponen los resultados; este capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera sección se realizó un análisis detallado, de cada una de las

respuestas de las distintas actividades resueltas por los alumnos, con el fin de detectar si pueden distinguir los distintos usos tanto de la variable como del parámetro, así como su capacidad para interpretarlos, manipularlos y simbolizarlos. En la segunda sección se hizo un análisis general sobre las respuestas dadas por los estudiantes, según el tipo de funciones con las que se trabajó en las diferentes prácticas. En la tercera sección se expone el análisis a las respuestas de los alumnos en exámenes parciales y departamentales que resolvieron durante el semestre escolar en que trabajaron con las prácticas, como parte complementaria de este trabajo de investigación. Y por último, en la cuarta sección se presentan los resultados obtenidos, en forma general, para poder responder a las preguntas de investigación.

La última parte de este trabajo corresponde a las conclusiones resultantes de la investigación.

CAPITULO 1

MOTIVACION Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1.1 Motivación

A través de mi experiencia como profesora en cursos de álgebra básica y cálculo, en dos universidades privadas en la ciudad de México, he notado que la mayoría de los estudiantes presentan graves problemas en la comprensión del concepto de parámetro.

Durante la escuela secundaria, los estudiantes pasan de la aritmética al álgebra básica, cursan materias en donde aprenden el concepto de variable y el de parámetro, conceptos que son muy importantes para su buen desempeño tanto en el álgebra como en otras materias más avanzadas de matemáticas. Durante la escuela preparatoria, los estudiantes cursan materias que involucran procedimientos algebraicos cada vez más avanzados que involucran, conocimientos sobre álgebra, cálculo, trigonometría, geometría analítica, matrices, determinantes y otros más, por lo que al llegar a la universidad se supone que tienen los conocimientos suficientes para cursar materias que requieren las bases matemáticas que aprendieron durante su educación previa.

Al ingresar a nivel universitario, los alumnos enfrentan cursos introductorios a las matemáticas, que son cursos propedéuticos para revisar el nivel de lo aprendido previamente y para homogeneizar los conocimientos de los estudiantes que provienen de escuelas diferentes y por ello su aprendizaje de cada tema puede variar.

La sorpresa como profesora al impartir dichos cursos introductorios, es que la mayoría de los alumnos, no ha logrado un aprendizaje significativo del concepto de variable y mucho menos, del concepto de parámetro, es decir, los alumnos no manejan con flexibilidad los símbolos matemáticos, no logran darle sentido al uso que se hace de las literales y de cómo se espera que se trabajen con ellas. Los estudiantes cometen muchos errores en sus procedimientos porque hay conceptos que han aprendido erróneamente o que no han entendido claramente desde un principio. Al trabajar por ejemplo, en algún desarrollo algebraico tienden a confundir el objetivo principal del problema y además, como su lenguaje algebraico es deficiente, convierten, por ejemplo, un ejercicio de simplificación en uno de resolución, a pesar de que no se trataba de una ecuación. Utilizan mal los signos, las propiedades de las expresiones, por ejemplo la distributiva, el desarrollo de un binomio al cuadrado, y muchos otros errores comunes.

Al trabajar con expresiones simples que contienen literales, los alumnos no siempre pueden determinar si éstas representan una variable o un parámetro. Interpretan los símbolos como una constante que puede tomar cualquier valor confundiendo, en muchas expresiones, qué representa la literal.

En algunas expresiones generales, las literales los confunden y no logran interpretar claramente el papel que representan. Un ejemplo se encuentra cuando trabajan con la ecuación de una línea recta; si en su forma analítica tienen $y = 3x - 1$, reconocen qué representan el número 3 y el -1, y que las variables son x e y porque son las letras utilizadas comúnmente. Si dicha ecuación está expresada como $y = 3x + b$, algunos de los estudiantes no pueden interpretar qué representa la literal b , a pesar de que la forma analítica de una línea recta es una expresión que manejan constantemente.

En expresiones más complejas, en donde la incógnita no sólo se usa para las variables dependiente e independiente, sino para los parámetros, aparecen serios problemas de comprensión, interpretación y por tanto, de resolución. Un ejemplo, también sobre la ecuación de una línea recta: dada la expresión $x - (k - 4)^2 + 2ky - 2y + k^2 = 0$ en donde tienen que determinar qué valor o valores debe de tomar el parámetro k para que la ecuación de la recta sea horizontal, los alumnos no saben cómo resolver el ejercicio porque no interpretan correctamente qué representa la k , no reconocen que se trata de un problema donde el parámetro es un número general de segundo orden, es decir, una variable que se utiliza para generalizar una expresión que ya de por sí contiene variables. Si la ecuación hubiera tenido variables y números fijos, el ejercicio hubiera sido para ellos más fácil de manipular.

Cuando los alumnos requieren interpretar los parámetros, muchas veces lo hacen por simple asociación de expresiones memorizadas, como cuando trabajan con la pendiente de la línea recta. De hecho a ésta la asocian siempre a la letra m ; cuando se cambia la literal, muchos alumnos se confunden y no identifican el papel que representa en la misma ecuación de la recta, lo que implica que no logran una buena comprensión y por tanto, al momento de manipularla o simbolizarla en ejercicios generales como aquellos que involucran una familia de rectas, no logran hacerlo, como se ha podido constatar en una gran cantidad de exámenes y otras investigaciones como las que se describen a continuación.

En una investigación Ursini y Trigueros (2004) mencionan que a pesar de que en muchos casos los alumnos logran distinguir la diferencia entre parámetros y variables en las literales en una expresión algebraica, no logran manipularlos porque no distinguen el

papel que dicho parámetro juega en la expresión. Pueden resolver expresiones para los valores desconocidos de la variable, pero cuando se trata de los valores para las literales que corresponden a parámetros, no los distinguen como números generales en un grado mayor de abstracción, es decir, no pueden considerarlos como un número general de segundo orden. El problema no sólo consiste en interpretar al parámetro, también los alumnos presentan problema al manipularlos y sobre todo al tratar de simbolizarlos.

Se han hecho investigaciones acerca de los procesos cognitivos que conducen a la construcción del concepto de variable para tratar de distinguir cuáles son las dificultades y errores más comunes en los que incurren los estudiantes al intentar resolver problemas algebraicos y se han diseñado modelos que permitan un mejor aprendizaje y una enseñanza adecuada de dicho concepto (Ursini y Trigueros, 1998; López, 1996; Lozano, 1998; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005; Socas, 2007).

Considero que el análisis de los resultados de dichos estudios puede servir de base para analizar más a fondo el aprendizaje del papel que juegan los parámetros cuando los estudiantes trabajan con funciones y sus transformaciones. Esto es importante para contar con elementos que permitan diseñar estrategias de enseñanza que ayuden a los alumnos a desarrollar un aprendizaje significativo de este concepto.

Por otra parte, es posible que si se usa tecnología para visualizar el papel del parámetro en la representación de las funciones más comunes que se introducen en los primeros cursos universitarios de matemáticas, la herramienta tecnológica se constituya en un apoyo para que los alumnos interioricen el papel del parámetro en la generalización de las expresiones algebraicas. Por ello, considero importante llevar a cabo un estudio en el que en la clase de matemáticas y de tarea, se desarrollen actividades apoyadas con el uso de la computadora para el aprendizaje de las funciones cuando se incluyen parámetros para generalizar transformaciones sobre ellas. El análisis de la forma en la que los estudiantes trabajan con dichas actividades, sus dificultades y la influencia de ello en su aprendizaje de la función de los parámetros en el álgebra no ha sido estudiado y puede resultar en una aportación interesante y relevante en el ámbito de la Educación Matemática.

1.2 Preguntas de investigación

Con base en lo anteriormente expuesto, mi primera pregunta de investigación es ¿Cómo interpretan los alumnos que inician estudios universitarios, los parámetros en las

expresiones que representan funciones básicas, cuáles son las dificultades que enfrentan en su comprensión y cómo manejan dicho concepto cuando se introducen a su estudio mediante el uso de actividades diseñadas previamente y que incluyen el uso de la visualización con tecnología?

En particular esta pregunta puede dividirse en preguntas más específicas:

¿Qué dificultades encuentran los alumnos cuando trabajan con actividades en clase acerca de relaciones funcionales que incluyen parámetros?

¿Qué aprenden los estudiantes acerca de las variables y los parámetros cuando usan estas actividades?

¿Logran los estudiantes adquirir la capacidad para distinguir el efecto que cada parámetro tiene en el caso del estudio de la transformación de funciones?

¿Qué papel juega la visualización en el aprendizaje de los alumnos en estas condiciones? Y específicamente ¿Qué tanto ayuda un programa específico de graficación, Graphmatica en este caso, en la comprensión y aprendizaje, por parte de los estudiantes del efecto de los parámetros sobre la transformación de funciones?

Para dar respuesta a estas preguntas realicé una investigación en la que utilicé como marco teórico el modelo 3UV, que es un instrumento para diagnosticar la forma en la que los estudiantes de diversas edades y niveles de formación, usan, interpretan y trabajan el concepto de variable. Con base en dicho marco teórico se diseñaron actividades para desarrollar en clase y de tarea en casa. Se analizaron además las respuestas de los alumnos a cada una de estas actividades y sus respuestas a preguntas relacionadas con ellas planteadas en clase y en los exámenes durante el curso.

CAPITULO 2

ANTECEDENTES

2.1 Antecedentes históricos

Para conocer la forma en que se logra la comprensión del concepto de parámetro, a través del tiempo, debemos de hacer un breve análisis del desarrollo del concepto de variable, si se considera que el parámetro es una clase especial de variable.

Diferentes investigaciones en el desarrollo del concepto de variable y de parámetro, identifican tres fases: la fase retórica, la fase sincopada y la fase del álgebra simbólica (Boyer, 1968; Harper, 1987).

a) en la fase retórica que dura desde tiempos antiguos hasta la época de Diofanto (año 250 a.n.e.) las palabras no se abreviaban y no se usaban símbolos para denotar incógnitas. Los problemas y su solución eran descritos en el lenguaje natural.

b) la fase sincopada se considera desde el tiempo de Diofanto (año 250 a.n.e.) hasta François Viète (1540-1603) en este período aparece la introducción del uso de abreviaturas y notaciones reducidas. Para representar un número desconocido o incógnita, se empiezan a utilizar símbolos literales, por ejemplo, Diofanto comenzó a utilizar el símbolo ζ para representar incógnitas. El trabajo algebraico se enfocó en buscar el valor numérico de las incógnitas o números desconocidos, las soluciones se convirtieron en soluciones numéricas. La contribución principal de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema, aunque este simbolismo no es tan simple como el que se usa en la actualidad. En su obra Aritmética, libro sobre álgebra, proporciona métodos para encontrar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas, esta obra se estudió por más de mil años.

Poco a poco se fueron introduciendo el uso de letras diferentes para denotar variables, sin embargo, el uso de parámetros, como notación general, todavía no se trabajaba. Van der Waerden (1983), en su obra esboza cómo en las escrituras de los Babilonios y en el primer libro de Diofanto, se trabajaba con problemas en donde el número de incógnitas era igual al número de ecuaciones y por tanto, se obtenía un número finito de soluciones numéricas. En libros posteriores, Diofanto resuelve sistemas en donde el número de variables era mayor que el número de ecuaciones (sistemas indeterminados) y como

estos sistemas implicaban un número infinito de soluciones, para poder expresarlas de un modo compacto introdujo el uso de parámetros.

En esta fase, los procedimientos para resolver problemas, eran demostrados con el uso de ejemplos numéricos, de manera que para la resolución de problemas similares, se adaptaban los métodos a los ejemplos ya existentes, por ello no había necesidad de una notación para una solución general.

En el siglo XIII, Jordanus Nemorarius (1225-1260) publicó su libro *De Numeris Datis* en el que utilizó letras para las variables como incógnitas pero también para parámetros que representaban valores conocidos. Este trabajo abrió el horizonte para soluciones generales y el álgebra simbólica que era lo que le faltaba al trabajo de Diofanto (Rojano, 1996).

c) la fase del álgebra simbólica empieza con François Viète (1540-1603), político francés exitoso que se dedicó a las matemáticas ya tarde en su vida. En su trabajo, el uso de literales era tanto para valores determinados como para variables. De hecho, esto representa el parámetro, constantes que cambian su valor a un nivel de abstracción más alto que otra variable. Por tanto, su uso se extendió para generalizar, para uso de notaciones en general y para representar soluciones algebraicas de ecuaciones paramétricas.

La diferencia con el trabajo de Diofanto consistió en pasar de adaptar resultados numéricos a generalizar soluciones con el uso de parámetros. El trabajo de Viète fue muy importante para el desarrollo del álgebra, ya que fue el primero en distinguir los diferentes papeles de los símbolos literales.

Las incógnitas o valores indeterminados fueron representadas por vocales y las consonantes simbolizaban parámetros (número conocidos, magnitudes o cantidades dadas). Fue la introducción al concepto de fórmulas y expresiones como entes, el concepto de objeto general. La primera parte del libro de Viète 'Introducción al arte analítico', llamado 'Zetetics' contiene un conjunto de reglas definidas para la manipulación de expresiones algebraicas, de esta manera propuso un método general para solucionar problemas (Drijvers, 2003). El distinguir entre incógnitas y parámetros, la notación utilizada y la solución general para ecuaciones paramétricas propuesta por Viète fue un gran avance para el álgebra.

Una generación después, Descartes empleó las primeras letras del alfabeto para representar a valores conocidos (parámetros) y las últimas letras para simbolizar las

incógnitas, esta notación se usa hasta nuestros días (Drijvers, 2003). Años más tarde, Newton, Leibniz, Descartes y Fermat aplicaron las ideas de Viète y desarrollaron la noción de función como relación entre variables. En ella la variable era interpretada como una cantidad dinámicamente cambiante.

La introducción de símbolos para variables y parámetros fue, por tanto, un proceso histórico que tardó años en desarrollarse y fue, además, punto de partida para el desarrollo de nuevas disciplinas (Drijvers, 2003).

El análisis del desarrollo histórico del concepto de variable permite valorar las dificultades intrínsecas a la construcción del concepto y determinar aquellos factores que pueden incidir en las dificultades de los alumnos. Esta revisión histórica se utilizó, de hecho, como una de las bases sobre las cuales se sustentó el modelo 3UV, como se verá más adelante.

2.2 Antecedentes de Investigación

En una investigación sobre el aprendizaje del álgebra a nivel secundaria enfocado sobre el papel de los parámetros y su relación con incógnitas y variables (Furinghetti y Paola, 1994) resaltan que las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con parámetros son atribuibles a su origen semántico y sintáctico. También mencionan que para trabajar de manera adecuada con parámetros, los estudiantes deben distinguirlos de las incógnitas y las variables. En expresiones algebraicas que involucran parámetros, su uso dependerá del contexto del problema, el cual puede cambiar. Bloedy-Vinner (2001) resalta el papel de los parámetros en términos de la relación entre variables que resulta de su inclusión en una expresión.

Ursini y Trigueros (2004) concuerdan en que el parámetro es otro uso de las literales pero diferente a las incógnitas y variables relacionadas, pero afirman que no debería ser considerado sólo como esto, para ellas, los parámetros son números generales en un grado más alto de abstracción. Son números generales de segundo orden que permiten la generalización de una expresión algebraica que se podría considerar como de primer orden de abstracción. Entendiendo como relaciones de primer orden aquellas que al generalizar involucran sólo números y variables; por ejemplo ecuaciones con coeficientes numéricos como $3x - 2 = 2x + 5$, fórmulas como las que se usan para calcular el área de

un cuadrado, el término general de una secuencia numérica, etc. Los parámetros los encontramos en representaciones de familias de expresiones de primer orden: familias de ecuaciones como $4x - 2b = 6$, familias de funciones como $f(x) = kx + 3$, familias de expresiones generales. Por tanto, los parámetros pueden considerarse como números generales de segundo orden.

Sugieren que para que el estudiante sea capaz de diferenciar a los parámetros de las variables, deben de tener claro el concepto de generalización de segundo orden, si no sólo podrán percibir al parámetro como número general. Proponen además, que las actividades para los estudiantes pueden ser diseñadas de acuerdo al modelo 3UV, dado que de esta manera se les podrá ayudar a diferenciar los distintos usos de las variables, incluyendo a los parámetros y a utilizarlos de manera integrada y flexible en la solución de problemas.

Simbolizar los parámetros es algo que los estudiantes no siempre pueden hacer. A pesar de que en un ejercicio pueden reconocer una regla o un método o un patrón de comportamiento, al tratar de usar símbolos para representar el patrón de comportamiento, no lo logran (Bardini, Radford, Sabena, 2005; Ursini y Trigueros, 2004; Drijvers, 2003).

Otros estudios analizan cuatro diferentes papeles para el parámetro: parámetro como etiqueta, parámetro como cantidad que cambia, parámetro como generalizador y parámetro como incógnita (Drijvers, 2003). En realidad, el único uso que difiere de los utilizados en el modelo 3UV es el de etiqueta; los otros tres se consideran también en el modelo 3UV dado que, aunque el parámetro se considera un número general, cuando se usa en la solución de problemas puede jugar el papel de incógnita o puede aparecer en relación con alguna otra variable y siempre actúa como generalizador.

Las investigaciones mencionan que el uso de los parámetros:

a) contribuyen a la reificación del uso de fórmulas y expresiones. Al trabajar con expresiones y fórmulas algebraicas, como por ejemplo tres ecuaciones de líneas rectas como: $y = \frac{1}{2}x$, $y = 3x - 1$, $y = x - 2000$, se puede considerar que son objetos para los que los números que aparecen representan algo común a cada uno. Esta consideración permite identificar la fórmula general de líneas rectas que se escribe justamente utilizando parámetros: $y = ax + b$ en donde las literales a y b representan los parámetros y la x es la única variable independiente, pues la y es la variable dependiente (Sedivy, 1976).

b) ayudan a darle sentido a la generalización. Después de trabajar con ejercicios análogos, los alumnos podrán usar los parámetros para poder generalizar tipos de situaciones, funciones, fórmulas, ecuaciones y soluciones y poder pasar de casos particulares a un nivel más general.

c) pueden ayudar a distinguir los diferentes papeles que los símbolos literales representan. Como se mencionó anteriormente, las variables tienen diferentes usos (Ursini y Trigueros, 2001) y es importante que los alumnos tengan la habilidad de poder distinguir estos usos y pasar de uno de ellos a otro y de un nivel de generalización a otro y considerar que dichos usos pueden variar en el proceso de resolución de problemas (Bloedy-Vinner, 2001). Es muy importante distinguir el uso que las diferentes literales juegan en un procedimiento algebraico. Los parámetros, al igual que las variables, tienen diferentes usos y diferentes significados; pueden jugar el papel de variable común pero a un nivel más alto que por tanto, los hace más complicados dado que implican profundizar aún más sobre el concepto de variable a un segundo nivel (Ursini y Trigueros, 2004).

d) ayudan a darle sentido al uso de los símbolos. Al trabajar con expresiones algebraicas que contienen variables y/o parámetros, para el estudiante no siempre es claro el camino que deben tomar. Los alumnos interpretan los símbolos de tal manera, que al trabajar con ellos en algún procedimiento la acción que llevan a cabo, no siempre es la correcta o la más adecuada. Por ejemplo, en la expresión $(x + 3)^2 = 16$, el exponente puede ser interpretado como una indicación para desarrollar el binomio, sin embargo, cuando se trata de resolver la ecuación, esto no sería el procedimiento más adecuado. Wenger (1987) sugiere que en las situaciones que involucran parámetros, deben enseñarse a los estudiantes de manera explícita cuál es su papel para que puedan distinguir el camino que se debe de elegir para trabajar con ellos.

En un estudio realizado para analizar cómo el uso de álgebra con computadora ayuda a la comprensión de conceptos algebraicos y sus operaciones, en especial sobre la comprensión del concepto de parámetro (Drijvers, 2000 y 2003), se menciona que el uso del álgebra con computadora primeramente contribuye a darle sentido al uso de los símbolos al trabajar y manipular fórmulas y expresiones algebraicas, así como su significado. Al utilizar la tecnología, el estudiante no debe preocuparse de los cálculos ya que la calculadora o la computadora los hace y esto, por tanto, puede incrementar su comprensión global sobre los procedimientos en la resolución de problemas.

Se refiere también que el uso de la tecnología ofrece el manejo de diferentes representaciones y de procedimientos repetitivos que ayudan a la generalización y permite trabajar con las expresiones algebraicas como objetos. Todo esto puede contribuir a la comprensión del significado y papel de las variables.

Se encuentra también (Drijvers, 2003) que el uso de la calculadora con el apoyo de sesiones de laboratorio con computadoras contribuye al desarrollo de los conceptos algebraicos en general, como por ejemplo el desarrollo en problemas de sustitución y problemas de resolución; sin embargo cuando la instrumentación está incompleta, es decir, cuando la tecnología se utiliza simplemente como herramienta y no como instrumento de aprendizaje, se obstaculiza el aprendizaje. Algunos procedimientos con calculadoras que manejan el álgebra simbólica, o CAS (Computer Algebra System), no son transparentes para los estudiantes, como tampoco lo es la notación y la sintaxis utilizada, ya que difieren de aquellas a las que los estudiantes están acostumbrados a utilizar cuando trabajan y resuelven utilizando papel y lápiz. Se sugiere en esta investigación que debe de haber congruencia entre las técnicas utilizadas con el álgebra con computadora, la transparencia en los procedimientos CAS, las técnicas utilizando papel y lápiz y la concepción mental de los estudiantes (Drijvers 2000 y 2003).

Al analizar los resultados de la investigación, se encontró que las dificultades resultantes de la instrumentación eran más persistentes de lo que se esperaba y por tanto, que el papel que un profesor desempeña en la enseñanza era más importante de lo que podía prever.

La creencia más común detrás de los cursos de pre-cálculo basados en transformaciones de funciones básicas afirma, que el uso de transformaciones ayuda a que los estudiantes comprendan mejor las funciones. Sin embargo, existe una investigación (Lage y Trigueros, 2006) sobre la comprensión del concepto de transformaciones de funciones y las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al trabajar con ellas, utilizando la teoría APOE como marco teórico, que muestra que estas creencias no son válidas, o por lo menos no los son, cuando se utilizan para su enseñanza el tipo de actividades convencionales en clase.

En esa misma investigación se menciona que el uso de transformaciones de funciones sólo ayuda como método para promover la reflexión acerca del concepto de función si las actividades de clase se diseñan de tal forma que tomen en cuenta, una por una, las diferentes acciones que se deben de interiorizar y los procesos que se tienen que coordinar para ayudar a que los alumnos construyan su comprensión del efecto que

tienen las diferentes transformaciones en las funciones y en el concepto de función específicamente. Esta reflexión también debe de estimular a que los estudiantes exploren las consecuencias que tiene una transformación en cada propiedad de una función, el orden en el cual se aplican las transformaciones y las diferencias entre las transformaciones rígidas y las no rígidas.

Otro trabajo de investigación sobre si los cursos de introducción a las matemáticas a nivel universitario logran el objetivo de que el alumno comprenda o refuerce el concepto de transformaciones de funciones, así como los problemas que enfrentan para entenderlo utilizando como marco teórico la teoría APOE (Lage, 2004), concluye que gran parte del éxito en materias más avanzadas, está relacionado con el buen aprendizaje de los conceptos básicos como son el de función así como sus transformaciones.

Ese mismo trabajo menciona que gran parte del problema de los alumnos con el concepto de transformaciones de funciones está relacionado con el hecho de que tienen problemas con el concepto mismo de función, ya que muchos de ellos no han logrado desarrollar una concepción objeto de función, en el sentido de la teoría APOE, es decir, no han logrado concebir a la función como una entidad sobre la cual pueden aplicar acciones para formar nuevas funciones o para determinar sus propiedades sin acudir a formas de respuesta memorizadas y que ello es esencial, pues las transformaciones implican acciones sobre este tipo de objetos.

La investigación mostró también, en cuanto al concepto de transformaciones de funciones, que frecuentemente los alumnos tienden a memorizar los efectos que producen, por lo que al recurrir al concepto en cursos posteriores y apoyarse en su memoria, presentan problemas para determinar los efectos de cada transformación de forma correcta.

En los resultados del estudio se identificó que existen distintos grados de dificultad en los procesos involucrados para obtener transformaciones. Hay procesos que los alumnos han interiorizado y que los ayudan a realizar algunas transformaciones rígidas (desplazamientos) pero tal vez el mismo estudiante no ha logrado interiorizar procesos de transformaciones no rígidas (ampliación y contracción) que deforman la función original.

El uso de transformaciones de funciones debería ser una herramienta de gran utilidad en el aprendizaje del concepto de funciones; sin embargo, los alumnos no lo consideran como tal ya que su manejo sobre la representación gráfica es muy pobre y porque tabular o usar fórmulas son herramientas poco efectivas para comprender las transformaciones y

que no ayudan a los alumnos a interpretar cada una de las transformaciones que se ha aplicado a una función.

Otro trabajo de investigación (Hernández, 1998) hace un análisis de las deficiencias de los alumnos que ingresan a la universidad, con respecto a sus conocimientos matemáticos, en especial el concepto de variable y menciona que una parte importante del problema, recae sobre los métodos para enseñar matemáticas y da como causas principales del problema de la enseñanza, primero, el cambio de actitud de las nuevas generaciones que choca con los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas; y segundo, los métodos mismos de enseñanza de las matemáticas.

Hernández toma como base de su investigación la teoría APOE, y el método de enseñanza creado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduated Mathematics Education Community) encabezado por Dubinsky, en el que uno de los instrumentos principales de apoyo es la computadora para investigar un método alternativo de enseñanza. Para efectos de su investigación, Hernández diseñó unas actividades que permitieran la enseñanza eficaz del concepto matemático de variable y el de función. Las actividades las aplicó a un grupo piloto que cursó la materia de introducción a las matemáticas. Las actividades incluyen el uso de la computadora, usando principalmente el programa ISETL (Interactive Set Language) que tiene una sintaxis muy parecida a la notación de la matemática estándar. Con este programa los alumnos, según se menciona, aprenden rápidamente el lenguaje de programación. Es además un programa ideal para la experimentación matemática, la reflexión y la discusión. Las actividades fueron diseñadas para lograr estimular en los alumnos, las cualidades de exploración y reflexión que son muy importantes para que se logre el aprendizaje y para que el alumno vaya construyendo su propio conocimiento. En la investigación se concluye el logro de un avance sustancial de los alumnos en la comprensión del concepto de variable y de función gracias al uso conjunto de las actividades con el programa ISETL.

En un trabajo de tesis de licenciatura (Ambrosio, 2006) cuyo propósito es identificar las interpretaciones y las dificultades de los estudiantes al trabajar con parámetros, se les aplicó a los alumnos un cuestionario que contiene expresiones algebraicas y problemas que implican parámetros y se usó como marco teórico el modelo 3UV para poder analizar la interpretación, la simbolización y la manipulación que los estudiantes hacen del concepto de parámetro en contexto algebraico y geométrico. En su investigación, Ambrosio concluye que los resultados obtenidos muestran que el conocimiento de los

estudiantes del concepto de variable y de parámetro no es significativo. No logran distinguir las variables de los parámetros, ni interpretar, para cada uno de ellos sus distintos usos (como incógnita, número general, variable relacionada). Los alumnos presentaron gran dificultad en la interpretación, la manipulación y la simbolización de parámetros en general. Menciona que para lograr que los estudiantes distingan a los parámetros de otras variables y les den significado es necesario que los alumnos conozcan el significado de la generalización de segundo orden, porque de lo contrario, interpretan a los parámetros sólo como número general como lo arrojaron los resultados del análisis del cuestionario. También encontró que a pesar de que los alumnos utilizan procedimientos y técnicas para resolución de problemas, el aprendizaje es sólo memorizado y no se logra ningún tipo de comprensión del concepto de variable ni de parámetro. Los estudiantes resuelven problemas utilizando pasos en sus procedimientos que ejecutan de manera mecánica. Esta investigación cuestiona, al igual que otras investigaciones, la forma y los métodos de enseñanza.

Los resultados del análisis histórico indican que el concepto de parámetro fue un concepto que tardó muchos años en desarrollarse y que justamente surgió de la necesidad de diseñar métodos de representación y solución de problemas en los que se busca generalizar expresiones, ecuaciones o relaciones entre variables para representar familias de ellas. Tomó muchos años el que los parámetros se utilizaran de manera generalizada. Por otra parte, los resultados de las investigaciones arriba mencionadas indican que los alumnos tienen serias dificultades para entender los parámetros y, en particular, cuando éstos se utilizan en el caso de las transformaciones de funciones.

2.3 Visualización y uso de la tecnología

Comprender las propiedades geométricas de las funciones implica la posibilidad de relacionar las diferentes representaciones de las funciones. Esto, a su vez está relacionado con la visualización. Durante las últimas dos décadas, el problema crítico de la traslación entre y dentro de las representaciones se ha abordado en varios estudios.

La visualización no queda relegada a un simple papel ilustrativo, permite ayudar a los alumnos a lograr la intuición de lo abstracto. Es una herramienta que con el apoyo de las actividades diseñadas, permite la reflexión y la interiorización, ayuda a desarrollar la

creatividad y flexibilidad de pensamiento. Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo) que puede facilitar la resolución de problemas. Examinó los diferentes roles que puede desempeñar la visualización, enseñando y aprendiendo matemáticas, y cómo secuencias visuales se pueden utilizar para analizar los procedimientos provocada por señales visuales, también señaló que los estudiantes pueden "ver" en una representación algo distinto de lo que un experto lo haría, y relacionarlo con su estructura conceptual, como sugiere Dreyfus (1991).

En matemáticas muchos conceptos y procesos podrían ligarse a interpretaciones visuales lo que ha generado diversas investigaciones en relación con el potencial didáctico de la visualización, la forma como ésta podría favorecer al aprendizaje y bajo qué condiciones utilizarla. Para Bishop (1989), la visualización es un proceso mental interno y por tanto muy particular de cada individuo, pero que puede estimularse y esto corresponde a la enseñanza, la cual puede valerse de materiales de apoyo como la computadora que ayuden al proceso de la visualización. Por lo que toca al uso de la computadora, dice que ésta ha desempeñado un papel importante en los trabajos de investigación relativos a la visualización, arrojando resultados positivos que parecen indicar que el poder generar y manipular imágenes en la computadora estimula las habilidades de visualización mental e incluso la comprensión de ideas algebraicas.

Actualmente los programas que grafican (como MATLAB, MAPLE, MATHEMATICA, etc.), representan una buena opción para el manejo de diagramas, gráficas y figuras. El problema estriba en que el uso de las herramientas tecnológicas debe ser adecuado al diseño de las estrategias de enseñanza, de tal modo que propicien el razonamiento y la aplicación del potencial de conocimientos de los alumnos, ayudándolos a lograr esquemas más ricos, más estructurados e interrelacionados.

Para Cantoral y Montiel (2002 y 2003) hay que entender a la visualización no como el simple acto de ver, pues visualizar una función, por ejemplo, no significa solamente verla, mirar o contemplar su gráfica, de hecho es posible visualizarla sin verla. Para ellos, la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. Para realizar la actividad de visualización, se requiere el uso de nociones matemáticas independientemente de la representación utilizada (numéricas, tablas, gráficas, problemas verbales o expresiones algebraicas) y de un lenguaje común. La visualización entonces,

trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado.

Para Plasencia (2000), visualizar, en el área de Matemática Educativa, son aquellos procesos que están involucrados cuando las personas construyen, transforman y relacionan imágenes mentales visuales, y en los que la mente tiene un papel activo, por ejemplo, rotando, trasladando o transformando la imagen.

Desde la aparición de las primeras calculadoras y computadoras, por un lado se cuestionaba sobre su potencial para apoyar un aprendizaje más significativo de las matemáticas, pero por otro, muchos profesores temían que con su uso los alumnos perderían habilidades que consideraban importantes. Los investigadores, por su parte, se preguntaron qué tan real era el potencial anunciado y cómo afectaría su presencia a la enseñanza de las matemáticas. Los avances tecnológicos siguen su marcha; la presencia de la tecnología en los salones de clase puede considerarse como un hecho. ¿Cuál es su verdadero potencial respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? En los últimos años, se ha estudiado sobre su problemática. Actualmente existen investigaciones sólidas, tanto a nivel internacional como nacional, que abarcan distintos aspectos del uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La información sobre sus resultados permite formarse una opinión sobre su papel en el aprendizaje y los requerimientos para enseñar con ella de manera efectiva.

Se sabe que el uso de la tecnología en el aula puede convertirse en un instrumento de aprendizaje pero no basta con esto para lograrlo. En algunos proyectos de investigación se ha encontrado de manera consistente que el uso de la tecnología motiva la participación activa de los alumnos en la clase de matemáticas, sin embargo, no es garantía de un aprendizaje efectivo (Rojano, 2003).

En el aula se trabaja de distintas maneras con la tecnología pero los resultados muestran que no todas logran un aprendizaje significativo. Es necesario utilizar programas que favorezcan la interacción y la reflexión y que se acompañan de estrategias pedagógicas que favorezcan la actividad matemática de los alumnos y la discusión y comunicación de sus ideas (Sacristán, Ursini, Trigueros y Gil, 2006; Lozano, Sandoval y Trigueros, 2006).

Es importante el tipo de recursos tecnológicos utilizados para favorecer el aprendizaje. No es lo mismo emplear programas en los que los alumnos sólo tienen que responder preguntas directas a aquellos que requieren de una actividad de razonamiento crítico, de la exploración de distintos escenarios y de la comparación de resultados, para que la tecnología se convierta en un instrumento útil para la construcción del conocimiento. Con el apoyo de programas que favorecen la elaboración de construcciones mentales, su manipulación y la escritura de expresiones, acompañados de la guía oportuna del maestro y de actividades que promuevan la reflexión y discusión, los alumnos aprenden conceptos que se consideran difíciles (Moreno, 2001; Sacristán, 2003; Sandoval, Lozano y Trigueros, 2006; Lozano, Sandoval y Trigueros, 2006; Trigueros y Sacristán, 2007).

Se ha encontrado en investigaciones realizadas, que los alumnos se motivan y se interesan por el uso de la tecnología. Lo difícil ha sido evaluar sus logros en cuanto a aprendizaje, se han encontrado casos aislados en los que los alumnos logran grandes avances cuando trabajan con la tecnología en ambientes estimulantes. Los estudiantes valoran positivamente su aprendizaje cuando se usa tecnología. Reportan que cuando se comparan con grupos que no usan tecnología aprecian que han aprendido más y mejor (Trigueros y Sacristán, 2007). Con el apoyo efectivo de la tecnología los alumnos desarrollan una visión más completa de lo que son las matemáticas: la consideran una disciplina que permite la interpretación y el análisis de problemas y que ayuda no sólo a hacer cálculos sino a tomar decisiones (Sacristán, Ursini, Trigueros y Gil, 2006).

La introducción de tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática ha sido considerada por algunos, como una respuesta a los problemas actuales que presentan los estudiantes cuando aprenden matemáticas, ya que permiten el desarrollo de la comprensión conceptual. La tecnología como herramienta, puede generar diferentes problemas y de su uso, se derivan algunas preguntas sobre el aprendizaje de los estudiantes (Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche, 2001; Drijvers, 2003). La tecnología no genera de manera automática la comprensión de conceptos matemáticos. De hecho, diferentes programas de computadora provoca en los estudiantes diferentes tipos de comportamiento como se observa durante el análisis de aprendizaje de las matemáticas con los programas de Enciclomedia (Lozano y Trigueros, 2007).

Los recursos tecnológicos, son considerados como mediadores de la actividad humana. Constituyen una parte importante del aprendizaje, porque su uso moldea los procesos de construcción del conocimiento y de la conceptualización (Rabardel, 1999). Cuando las herramientas tecnológicas se incorporan en las actividades de los estudiantes se

convierten en instrumentos, que son entidades mixtas que incluyen tanto las herramientas y los modos en que estas se utilizan. No son simplemente componentes auxiliares en la enseñanza de las matemáticas, sino que determinan las acciones de los estudiantes y por lo tanto su aprendizaje (Rabardel, 1999).

Cada herramienta genera un espacio para la acción, y al mismo tiempo plantea a los usuarios ciertas restricciones. Esto hace posible la aparición de nuevos tipos de acciones. La influencia que las herramientas ejercen sobre el aprendizaje no es inmediata. Las acciones se forman gradualmente, en un complejo proceso de interacción. En el salón de clase, los estudiantes construyen significados a través del uso de herramientas tecnológicas, en un proceso de interacción social y con la guía del profesor y otros instrumentos de aprendizaje, como lo mencionan otras investigaciones (Mariotti, 2001; Lozano y Trigueros, 2007).

Las investigaciones indican, además, que el uso de los recursos tecnológicos, sean las CAS o algún programa de computadora pueden ser útiles para favorecer la comprensión de los estudiantes de los parámetros y su papel en el manejo de transformación de funciones, pero, al parecer la forma en la que se usa la tecnología incide de manera sustancial en su posible éxito.

Mucho se ha hablado de la importancia de la tecnología como herramienta de visualización y aprendizaje y de las posibles ventajas que aporta a la enseñanza de las matemáticas.

En este trabajo se presenta una estrategia didáctica en la que se hace uso del programa de computadora Graphmatica y actividades específicas para promover que los estudiantes visualicen los efectos de operaciones específicas sobre ciertas funciones elementales. El programa de computadora aislado, no se puede considerar una herramienta de visualización y exploración. Es, el uso conjunto del programa con las actividades diseñadas, lo que debe hacer que los estudiantes pasen de la mera observación a la visualización y del uso de la tecnología como herramienta a su uso como instrumento de aprendizaje.

La hipótesis de esta investigación consiste justamente en que el uso de la tecnología como herramienta de visualización y exploración puede ayudar a los estudiantes a comprender de manera más significativa el papel de los parámetros en las transformaciones de funciones. La investigación que se propone tiene como objetivo validar o invalidar esta hipótesis.

CAPITULO 3

MARCO TEORICO

El concepto de variable es un concepto multifacético, varios autores sugieren que se presenta en una multiplicidad de aspectos (Trigueros y Ursini, 2001; Chevallard, 1989), pero la mayoría coincide en que hay tres distintos usos que pueden considerarse de mayor importancia en el manejo del álgebra: variable como incógnita, como número general y como parte de una relación funcional (Bills, 2001; Warren, 1999; Ursini y Trigueros, 2002). Dada la complejidad de este concepto se espera que para que el alumno logre su comprensión y disminuyan sus problemas con el aprendizaje de conceptos algebraicos, es necesario que la enseñanza de dicho concepto haga explícita la distinción entre los tres diferentes usos y permita el paso entre cada uno de ellos con flexibilidad (Ursini y Trigueros, 2002; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005).

Los parámetros aparecen en el álgebra como variables. Algunos autores los consideran como un uso adicional de la variable (Bloedy-Vinner, 2001; Furinghetti y Paola, 1994), pero de acuerdo con la postura de Ursini y Trigueros (2004), el parámetro consiste más bien en un número general cuya función es generalizar algo que ya de por sí es general. Desde esta propuesta, los parámetros adoptan las mismas facetas que el concepto de variable. Para ellas, dependiendo el contexto, los parámetros no sólo asumen el papel de incógnita o variable relacionada, pueden considerarse como un número general, una variable de segundo orden, es decir, una generalización de la generalización. La investigación ha mostrado que al igual que con las variables, los estudiantes tienen serias dificultades en la comprensión de los usos elementales de los parámetros (Bloedy-Vinner, 2001; Furinghetti y Paola, 1994; Ursini y Trigueros 2004; Drijvers, 2003).

Dado que la intención de mi investigación es analizar la capacidad de los estudiantes para interpretar, simbolizar y manipular los parámetros en sus distintos usos, cuando trabajan con transformaciones de funciones y apoyados con un programa de graficación llamado Graphmatica, que les permite visualizar gráficamente las distintas relaciones funcionales así como las transformaciones de las gráficas provocadas por parámetros particulares, el marco teórico que considero pertinente para utilizar en esta investigación es justamente el modelo 3UV (tres usos de la variable) propuesto por Trigueros y Ursini.

Ursini y Trigueros (1998) en su modelo 3UV consideran que para lograr una conceptualización adecuada para cada uno de los tres usos de la variable, el estudiante

requiere de ciertas capacidades básicas y nociones previas relacionadas con cada uno de dichos usos.

El modelo proporciona una base teórica fundamental en la investigación educativa que sirve como guía tanto en el desarrollo de instrumentos de evaluación y enseñanza, como en el análisis de las respuestas que dan los estudiantes a tareas específicas como se explica con claridad en el trabajo de Trigueros y Ursini (2001), además el modelo 3UV puede usarse como una herramienta de diagnóstico; como un instrumento útil para el diseño de materiales y actividades para la enseñanza escolar y como una herramienta de investigación (Trigueros y Ursini 2001; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005).

A continuación presento los elementos básicos de este modelo.

Modelo 3UV:

Como se mencionó, el concepto de variable, puede considerarse como un concepto de múltiples facetas, dentro de las que destacan las concepciones como incógnita, como número generalizado y como parte de una relación funcional. Su comprensión integral, requiere del entendimiento y el manejo adecuado de estas tres facetas, además de la posibilidad de pasar de una a otra de manera dinámica y flexible e integrarlas como un mismo objeto matemático.

a) Variable como incógnita: para comprender el uso de la variable como incógnita, hay que reconocer que hay una cantidad cuyo valor se desconoce pero que su valor se puede determinar tomando en cuenta la información contenida en un problema o situación determinado. Será necesario simbolizar la cantidad que se desconoce y con los datos del problema se deberá plantear una ecuación que refleje los datos relacionados para que después, mediante un procedimiento de aritmética o de álgebra, se resuelva dicha ecuación para poder determinar el valor o valores correspondientes que satisfagan la ecuación y que corresponden a la cantidad o cantidades desconocidas. Es muy importante que una vez obtenido el valor o los valores, se sustituyan en la ecuación original para comprobar que sea la solución o soluciones correctas.

La conceptualización de la variable como incógnita implica entonces los siguientes elementos:

I1: reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;

I2: interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;

I3: sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;

I4: determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas y/o aritméticas necesarias;

I5: simbolizar la incógnita que aparece en una situación específica y plantear una ecuación.

b) Variable como número general: para comprender el uso de la variable como número general y poder trabajar con él, hay que desarrollar la capacidad para reconocer patrones, deducir reglas o métodos generales y describirlos. Hay que distinguir lo que varía de lo que no. Se usarán símbolos para representar la situación general, una regla o un método o relacionar expresiones generales entre sí. Los símbolos utilizados representarán cantidades indeterminadas que no se pueden ni se necesitan determinar. Según el tipo de problema, dichas cantidades se podrán manipular factorizando o simplificando pero sin tener que asignarles valores particulares a las variables.

La conceptualización de la variable como número general implica entonces los siguientes elementos:

G1: reconocer patrones y reglas generales en secuencias numéricas y en familias de problemas;

G2: interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que asumir cualquier valor;

G3: deducir reglas o métodos generales, en secuencias y en familia de problemas;

G4: manipular la variable simbólica para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas;

G5: simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

c) **Variable en relación funcional:** para comprender el uso de la variable en relación funcional primero hay que reconocer, que hay cantidades cuyos valores están relacionados en cierta situación y después, distinguir que en dicha situación la variación de una cantidad afecta la variación de la otra. En este tipo de situaciones la información puede estar representada mediante una tabla, en una gráfica, en forma analítica o en forma verbal. Se debe de reconocer la correspondencia entre las variables y cómo las variables varían de manera relacionada. También es importante reconocer el intervalo de variación para el cual está definida la relación. Es necesario que los alumnos puedan representar la relación funcional de distintas maneras y pasar de una a otra, así como poder simbolizar la relación funcional de manera analítica.

La conceptualización de las variables en relación funcional implica los siguientes elementos:

F1: reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;

F2: determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;

F3: determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;

F4: reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;

F5: determinar los intervalos de variación cuando se conocen los de la otra;

F6: simbolizar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, con base en el análisis de los datos de un problema.

Las tres caracterizaciones del concepto de variable están fuertemente interrelacionadas entre sí. En casi todas las actividades algebraicas aparecen conjuntamente, pero con diferentes grados de importancia. La posibilidad de diferenciar entre cada uno de estos usos conforme aparecen en un problema y de utilizarlos de manera integrada en su solución es lo que puede considerarse como un buen manejo de este concepto. Es claro

que el concepto de variable no es lo único que entra en juego en el conocimiento del álgebra, el modelo 3UV lo considera un requisito esencial, pero no el único. Otro punto importante para hablar de conocimiento algebraico será la capacidad del alumno para poder usar e interpretar el lenguaje algebraico, sus definiciones, así como las reglas sintácticas que lo rigen (Trigueros y Ursini, 2001; Trigueros y Ursini, 2003).

El modelo 3UV puede ser de gran utilidad como marco teórico para poder entender la forma en la que los estudiantes trabajan con parámetros, pues justamente lo que en ello está implícito es el conocimiento flexible de la variable (Ursini y Trigueros, 2004). La aplicación del modelo, que se está utilizando como marco teórico, se hace de la misma forma que cuando se aplica a variables más simples distinguiendo los tres distintos usos de los parámetros: como número general, como incógnita y como variable relacionada.

Para poder lograr una buena comprensión y manejo de los parámetros es necesario que los alumnos logren primeramente una comprensión integral del concepto de variable, es decir, logren entender sus distintos usos, manejarla adecuadamente en cada una de sus facetas y sean capaces de pasar de un uso u otro de manera flexible. Esa comprensión integral se debe manifestar también en el caso en que las expresiones algebraicas incluyan parámetros.

a) parámetro como número general: es necesario que los estudiantes sean capaces de reconocer patrones, deducir reglas y métodos generales que se relacionan con familias de expresiones, considerar al parámetro como la representación de algo general, cantidad indeterminada que puede tomar cualquier valor; que sean capaces de deducir reglas generales y métodos generales que incluyan parámetros distinguiendo lo que no varían contra lo que si varía.

La conceptualización del parámetro como número general implica entonces los siguientes elementos:

G1: reconocer patrones y reglas generales en secuencias numéricas y en familias de problemas;

G2: interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que asumir cualquier valor;

G3: deducir reglas o métodos generales, en secuencias y en familia de problemas;

G4: manipular la variable simbólica para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas;

G5: simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

b) parámetro como incógnita: es necesario que los alumnos sean capaces de reconocer que el parámetro indica la presencia de algo desconocido y que se puede determinar su valor; interpretarlos como la representación de un valor particular que se puede determinar considerando las restricciones dadas por cada problema en particular.

Determinar su valor o valores mediante algún procedimiento algebraico y/o aritmético para después comprobar que el valor encontrado para el parámetro cumple con las condiciones del problema.

La conceptualización del parámetro como incógnita implica entonces los siguientes elementos:

I1: reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;

I2: interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;

I3: sustituir el o los valores del parámetro que hacen que la ecuación sea verdadera;

I4: determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas y/o aritméticas necesarias;

I5: simbolizar la incógnita que aparece en una situación específica y plantear una ecuación

c) parámetro como variable relacionada: es necesario que los estudiantes sean capaces de reconocer la correspondencia entre dos variables dentro de una expresión analítica que incluye al parámetro como parte de la relación; que sean capaces de determinar el valor del parámetro dado un valor para la variable relacionada o determinar

el valor de la variable relacionada dado un valor para el parámetro; reconocer la variación conjunta entre el parámetro y la variable relacionada; determinar el intervalo de variación del parámetro dado el intervalo de variación de la variable relacionada o viceversa.

La conceptualización del parámetro en relación funcional implica los siguientes elementos:

F1: reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;

F2: determinar los valores del parámetro cuando se conocen los valores de la variable relacionada;

F3: determinar los valores de la variable relacionada cuando se conocen los valores del parámetro;

F4: reconocer la variación conjunta entre las variables y parámetros que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;

F5: determinar los intervalos de variación del parámetro cuando se conocen los intervalos de variación de la variable relacionada o al revés;

F6: simbolizar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, con base en el análisis de los datos de un problema.

CAPITULO 4

METODOLOGIA

Para realizar la investigación sobre la comprensión de los parámetros con el apoyo de un programa de graficación en computadora, se aplicaron 5 prácticas con varias actividades cada una. Es claro que el uso de la tecnología implica cambios en las condiciones de enseñanza en el aula. Por ejemplo, fue necesario en primera instancia, enseñar a los alumnos a utilizar el programa específico empleado y trabajar en un aula donde el programa estuviera disponible. La hipótesis de este trabajo consistió en suponer que los estudiantes se verían beneficiados en sus posibilidades de manejo de los parámetros con el uso de esta herramienta. La metodología implementada en el trabajo permite llegar a conclusiones al respecto.

De 3 clases a la semana, de hora y media cada una, que tenían los estudiantes, una de ellas, cada dos semanas, se llevaba a cabo en un salón de clases con computadoras, para que con el apoyo visual de las gráficas, pudieran comprender las transformaciones de las funciones y el efecto de los parámetros sobre cada una de ellas.

Los estudiantes resolvían las actividades de las prácticas como tarea en su casa y después, durante la siguiente clase, los alumnos externaban sus dudas acerca de las preguntas que no entendían y de las actividades que no podían realizar y se discutían los conceptos involucrados en las actividades. Las sesiones de clase se complementaban con ejercicios y gráficas que se hacían en el pizarrón y en el cuaderno, con discusión de la totalidad del grupo y con la guía del profesor.

Durante el curso se trabajó con diferentes funciones básicas como: la función lineal, la cuadrática y la racional, para las cuales se desarrollaron las actividades. Adicionalmente se trabajó con otro tipo de funciones como: la función cúbica, la función radical, la función valor absoluto, con funciones exponenciales y funciones logarítmicas utilizando el mismo tipo de transformaciones relacionadas con los parámetros que se analizaron en las prácticas.

El grupo al que se le aplicaron las prácticas estaba formado por 28 alumnos de primer semestre, de nivel universitario, en carreras de Administración de empresas, Contaduría, Relaciones industriales y Ciencias políticas, que tenían entre 18 y 19 años y que estaban

familiarizados con conocimientos matemáticos sobre álgebra, trigonometría, geometría analítica, y algunos tenían nociones de cálculo, que aprendieron durante secundaria y preparatoria (bachillerato).

Las cinco prácticas incluyen actividades para poder analizar no sólo la comprensión y aprendizaje del efecto de los parámetros en la transformación de funciones por parte de los estudiantes, sino también la manera en la que los alumnos los interpretan, simbolizan y manipulan en sus distintos usos y qué tanto la posibilidad de manipular las funciones gráficamente con el programa Graphmatica lo convierte en un mediador de su aprendizaje. Se analizó así el efecto de los parámetros en transformaciones del tipo: desplazamientos, reflexiones y alargamiento o contracciones.

El análisis sobre cada una de las preguntas y sobre cada una de las respuestas de los alumnos en cada práctica, se llevó a cabo utilizando como marco teórico el modelo 3UV que fue diseñado para los tres usos de la variable (Ursini y Trigueros, 1998) y que puede aplicarse al análisis de los tres usos de los parámetros, al considerarlos como un caso específico de la variable como número general.

Las actividades de las prácticas 1, 2 y 3 están enfocadas al análisis de los parámetros en la función lineal. Las de la práctica 4 a función cuadrática y las de la 5, al análisis en una función racional.

Antes de comenzar a trabajar con las actividades, se introdujo a los alumnos en el uso del programa Graphmática.

4.1 Análisis de cada una las preguntas de las prácticas

PRACTICA 1

El objetivo de esta práctica es que el alumno a partir de la función lineal $f(x) = ax + b$ y el uso de Graphmatica pueda analizar la relación funcional entre las variables y el efecto que los parámetros a y b tienen sobre esa relación.

Actividad #1

Usando el programa Graphmatica, grafica la función $f(x) = x$ y contesta las siguientes preguntas usando papel y lápiz:

a) ¿Es f una función lineal? ¿Cuáles son las características de una función lineal?

Para resolver la pregunta el alumno debe reconocer la relación entre las variables, dada la gráfica y la forma analítica (F1) y la variación conjunta entre ellas (F4).

b) Encuentra la pendiente

Para encontrar la pendiente el alumno debe reconocer la variación conjunta de las variables (F4) al analizar la gráfica y la forma analítica

Deben comparar la función dada $f(x) = x$ con la forma general de la función lineal $y = ax + b$ para identificar a como un número general (G2) que representa a la pendiente de la recta y deben distinguir el valor que toma para esta función particular (I2)

c) Calcula el valor de $f(x)$ correspondiente a $x = 0$, localízalo en la gráfica; calcula el valor de la variable independiente x para el cual $f(x) = 0$, localízalo en la gráfica ¿qué puedes decir acerca de esos dos valores, qué representan?

Para calcular $f(0)$, debe determinar un valor para la variable dependiente a partir de un valor particular de la variable independiente (F2). Para encontrar $f(x)=0$, el alumno tendrá que determinar un valor para la variable independiente a partir de un valor dado de la variable dependiente (F3)

En ambos valores deben reconocer una incógnita (I1, I2) y encontrar su valor desconocido (I4) realizando las operaciones algebraicas adecuadas.

Nuevamente tienen que comparar la función del ejemplo con la forma general de la función lineal y reconocer que el parámetro b , que puede tomar cualquier valor (G2) toma el valor de cero en esta ecuación.

El que tengan que localizar las coordenadas del punto encontrado en la gráfica (F1) les ayudará a entender mejor la intersección de la gráfica de la recta con los ejes.

d) Grafica las siguientes funciones: $f(x) = x + 2$; $g(x) = x - \frac{1}{4}$; $h(x) = x + \frac{1}{2}$, repite lo que hiciste en los incisos a – c. Compara tus resultados con los obtenidos en la función $f(x) = x$ ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?

Después de graficar y analizar cada gráfica de manera visual, para poder contestar los tres incisos:

Primero se debe de identificar la relación entre las variables (F1).

Para encontrar la pendiente en cada gráfica, deben de reconocer la variación conjunta (F4) y hacer la comparación con la regla general de la ecuación lineal e identificar al parámetro a (G2) e identificar el valor que toma en cada ejemplo (I2).

El alumno debe de reconocer la incógnita en la ecuación (I1) y hacer el procedimiento correspondiente para encontrar el valor desconocido (I4).

Para responder el alumno debe encontrar un valor para la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (F2) y encontrar un valor de la variable independiente dado un valor dado para la variable dependiente (F3). Con este ejercicio se espera que el alumno pueda distinguir la diferencia entre $f(0)$ y $f(x) = 0$ y comprenda su relación con las respectivas intersecciones con ambos ejes (F1).

Al pedirle que compare cada gráfica con la función $f(x) = x$, se espera que el alumno pueda reconocer un patrón (G1) sobre el valor del parámetro b , tanto gráfico como analítico al comparar cada ecuación y su respectiva gráfica y reconocer que distintos valores del parámetro b (G2) provocan desplazamientos de la gráfica de manera paralela hacia arriba o hacia abajo, desplazando la gráfica de la función en b unidades y que tienen que ver con el punto en donde la gráfica de la recta corta al eje Y (la ordenada al origen).

También deben hacer un análisis similar sobre el valor del parámetro a (G1, G2), para cada ecuación y reconocer (G1, I2) que su valor es el mismo en cada recta ($a = 1$) por lo que la inclinación en todas las rectas es la misma y que representa lo que no cambia con respecto a la ecuación $f(x) = x$ (F1, G3).

e) ¿Qué pasa en general si sumas a $f(x)$ una constante b , es decir, qué puedes decir de la función $f(x) = ax + b$? ¿Qué tiene de particular el parámetro b con la gráfica de la función?

Después de resolver el inciso anterior en donde los alumnos deben de reconocer un patrón en el comportamiento del parámetro b sobre la gráfica de la recta (G1) podrán ser capaces de deducir una regla general sobre el parámetro b (G3) de la función lineal definida como $f(x) = ax + b$, y el efecto sobre su gráfica (F1 y F4).

Deben identificar al parámetro b como un número general (G2) que desplaza la gráfica de la recta en b unidades hacia arriba si $b > 0$ y hacia abajo si $b < 0$ para cada valor de x obteniendo para cada coordenada y el valor de $f(x) + b$ (G3, F4).

f) Grafica las siguientes funciones: $f(x) = 2x$; $f(x) = 5x$; $f(x) = (\frac{1}{2})x$; $f(x) = 10x$, $f(x) = (\frac{1}{6})x$, repite lo que hiciste en los incisos a – c, compara tus resultados con los obtenidos en la función $f(x) = x$ ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?

El alumno después de graficar y analizar cada recta de manera visual, para contestar los tres incisos:

Primero debe de identificar la relación lineal entre las variables (F1, F4).

Para determinar el valor numérico de la pendiente en cada gráfica, deben de comparar con la regla general de la ecuación lineal e identificar al parámetro a (G2) e identificar el valor que toma en cada ejemplo.

Para contestar el inciso c, el alumno debe de reconocer la incógnita en la ecuación (I1) y hacer el procedimiento correspondiente para encontrar el valor desconocido (I4).

Para encontrar dichas incógnitas, el alumno debe encontrar un valor para la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (F2) y encontrar un valor de la variable independiente dado un valor dado para la variable dependiente (F3). Con este ejercicio se espera que el alumno pueda distinguir la diferencia entre $f(0)$ y $f(x) = 0$ y comprenda su relación con las respectivas intersecciones con ambos ejes (F1).

Al pedirle que compare cada gráfica con la función $f(x) = x$, se espera que el alumno pueda reconocer un patrón (G1) sobre el valor del parámetro a , tanto gráfico como analítico al comparar cada ecuación y su respectiva gráfica y reconocer que distintos valores del parámetro a (G2) provocan que cambie la inclinación de la recta.

También deben hacer un análisis similar sobre el valor del parámetro b (G1), en donde en cada ecuación $b = 0$ por lo que en todas las rectas la ordenada al origen es la misma (F1, G1) y en el punto $(0, 0)$ (I2) y que representa lo que no cambia con respecto a la ecuación $f(x) = x$ tanto gráfico como analítico.

g) ¿Qué puedes decir que pasa en general si multiplicas a x por una constante a positiva, es decir, qué puedes decir de la función $f(x) = ax$?

El alumno debe de poder identificar que el parámetro a puede tomar cualquier valor (G2) y que en cada caso particular toma un valor específico (I2).

Después de resolver el inciso f) donde reconocen un patrón de comportamiento del parámetro a (G1) deben, en este inciso, poder deducir una regla general sobre el efecto de éste sobre la gráfica de cada recta (G1, G3).

También deben de distinguir el efecto sobre la inclinación de la recta que el parámetro a tiene sobre ella, según el valor numérico de a (G2). No sólo comprender el efecto por el signo, sino también sobre su magnitud (F1, F4).

Si $a > 0$, los alumnos deben de distinguir que la relación entre las variables es en el mismo sentido (F1, F4) provocando que cada nueva coordenada y será $af(x)$.

h) Repite el inciso f para las funciones: $f(x) = -x$; $f(x) = -(\frac{1}{4})x$; $f(x) = -3x$; $f(x) = -(\frac{1}{5})x$

Después de graficar y analizar cada grafica de manera visual, para poder contestar los tres incisos el alumno:

Primero debe de identificar la relación lineal entre las variables (F1, F4).

Para determinar el valor numérico de la pendiente en cada gráfica, deben de comparar con la regla general de la ecuación lineal e identificar al parámetro a (G1, G2) e identificar el valor que toma en cada ejemplo (I2).

Para contestar el inciso c, el alumno debe de reconocer la incógnita en la ecuación (I1) y hacer el procedimiento correspondiente para encontrar el valor desconocido (I4).

Para encontrar dichas incógnitas, el alumno debe buscar un valor para la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (F2) y encontrar un valor de la variable independiente dado un valor dado para la variable dependiente (F3). Con este ejercicio se espera que el alumno pueda distinguir la diferencia entre $f(0)$ y $f(x)=0$ y comprenda su relación con las respectivas intersecciones con ambos ejes (F1).

Al pedirle que compare cada gráfica con la función $f(x) = x$, se espera que el alumno pueda reconocer un patrón (G1) sobre el valor del parámetro a , tanto gráfico como analítico al comparar cada ecuación y su respectiva gráfica y reconocer que distintos valores del parámetro a (G2) provocan que cambie la inclinación de la recta (G3, F4).

También deben hacer un análisis similar sobre el valor del parámetro b (G1), en donde en cada ecuación $b = 0$ por lo que en todas las rectas la ordenada al origen es la misma (F1) y en el punto $(0, 0)$ (I2) y que representa lo que no cambia con respecto a la ecuación $f(x) = x$ tanto en forma gráfica como analítica.

i) ¿Qué puedes decir que pasa en general si multiplicas a x por una constante a negativa, es decir, qué puedes decir de la función $f(x) = ax$?

El alumno debe de poder identificar que el parámetro a puede tomar cualquier valor (G2) y que en cada ecuación toma un valor específico (I2).

Después de resolver el inciso anterior, donde reconocen un patrón de comportamiento del parámetro a (G1) deben, en este inciso, poder deducir una regla general sobre el efecto de éste sobre la gráfica de cada recta (G3, F4).

También deben de distinguir el efecto sobre del parámetro a sobre la inclinación de la recta, según su valor numérico. No sólo deben comprender su efecto a partir del signo, sino también por su magnitud (F1) y al ser $a < 0$, deben distinguir que la relación entre las variables es en sentido inverso (F1, F4).

j) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en los incisos anteriores?

Analizando la gráfica de manera visual y analítica, los alumnos deben identificar la relación lineal entre las variables (F1, F2, F3, F4) y poder determinar los intervalos correspondientes para su dominio y su rango.

Actividad #2

Usando el programa Graphmatica, grafica las siguientes funciones: $f(x) = 3x + 2$; $f(x) = -(\frac{1}{2})x + 1$; $f(x) = -4x - (\frac{3}{4})$; $f(x) = 2x + (\frac{3}{4})$; $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})$ **y contesta las siguientes preguntas usando papel y lápiz:**

Se espera que después de resolver la actividad #1, los alumnos puedan responder la actividad # 2 de manera más fácil y que la reflexión sobre lo que han hecho les ayude a lograr una mayor comprensión sobre el papel de los parámetros a y b .

a) ¿Es f una función lineal? Justifica tu respuesta

Para resolver la pregunta el alumno debe reconocer la relación entre las variables, dada la gráfica y la forma analítica (F1) y la variación conjunta entre ellas (F4).

b) Encuentra la pendiente

Para encontrar la pendiente el alumno debe reconocer la variación conjunta de las variables (F4) al analizar la gráfica y la forma analítica.

Deben comparar cada función dada $f(x)$ con la forma general de la función lineal $y = ax + b$ para identificar a como un número general (G2) que representa a la pendiente de la recta y deben de distinguir el valor que toma para esta función particular (I2).

c) Calcula el valor de $f(x)$ correspondiente a $x = 0$, localízalo en la gráfica; calcula el valor de la variable independiente x para el cual $f(x) = 0$, localízalo en la gráfica ¿qué puedes decir acerca de esos dos puntos, qué representan?

Para calcular $f(0)$, debe determinar un valor para la variable dependiente a partir de un valor particular de la variable independiente (F2). Para encontrar $f(x)=0$, el alumno tendrá que determinar un valor para la variable independiente a partir de un valor dado de la variable dependiente (F3).

En ambos valores deben reconocer una incógnita (I1) y encontrar su valor desconocido (I4) usando un procedimiento adecuado. Al obtener ambos puntos con sus respectivas coordenadas (F1) deberán ser capaces de visualizar y distinguir como las intersecciones con los ejes o el punto en donde la recta corta a cada eje (F2, F3).

d) Compara tus resultados con los obtenidos en la actividad anterior para la función $f(x) = 0$ y describe ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?

Deben tener una mayor comprensión sobre los parámetros a y b y los efectos de cada uno sobre la gráfica de la recta y podrán reafirmar lo reconocido en incisos anteriores. (F1, G1, G2, G3).

e) ¿qué puedes decir de la función $f(x) = ax + b$? ¿Qué representan los parámetros a y b ?

Después del análisis sobre cada gráfica el alumno deberá deducir para la función lineal $f(x) = ax + b$, una regla general (G3) para el parámetro a que representa a la pendiente o inclinación de la recta (G1, G2, F4) y lo mismo para el parámetro b u ordenada al origen (G1, G2, G3), reforzando o confirmando lo que realizó en la actividad anterior.

f) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones anteriores?

Analizando la gráfica de manera visual y analítica, los alumnos deben identificar la relación lineal entre las variables (F1, F2) y poder determinar los intervalos correspondientes para su dominio y su rango (F5).

Actividad #3

a) Usando papel y lápiz, construye una tabla en la que se muestren distintos valores de la variable independiente x y los valores correspondientes para la variable dependiente $f(x)$, si $f(x) = 2x - 3$. No olvides incluir valores negativos y el cero para x . En papel cuadriculado esboza la gráfica de $f(x)$ con los datos de la tabla.

Primero, dada la forma analítica de la función $f(x) = 2x - 3$, el alumno debe de reconocer la relación funcional entre las variables (F1) identificando quien es la variable independiente y quien la dependiente. Una vez identificado el valor de algo desconocido (I1), hay que calcular valores correspondientes para la variable dependiente a partir de valores particulares de la variable independiente (F2), utilizando las operaciones necesarias para lograrlo (I4).

b) Usando el programa de Graphmatica, traza la gráfica de $f(x) = 2x - 3$ ¿qué forma tiene la gráfica de $f(x)$, se parece a la que habías dibujado en papel? A partir de la gráfica encuentra tres puntos que no estén en tu tabla y agrégalos a la misma (coloca el apuntador sobre la gráfica para lograrlo)

El alumno debe de reconocer la relación funcional entre las variables (F1 y F4) de manera gráfica.

c) Usando Graphmatica, determina si los siguientes pares de valores pertenecen a la función:

1. (0.5, -2)
2. (3, 7)
3. (-0.628, 4.3)
4. (-0.75, -4.5)
5. (0, 0)
6. (0.125, -2.75)
7. (-2/3, -13/3)
8. (1.15, -3.75)
9. (1/4, -3/2)
10. (π , 3.2832)
11. (5/7, -4/3)
12. (0, 3)
13. (3.525, 4.05)

14. (0, -3)

15. (-3/2, 0)

16. ($\sqrt{2}$, -0.1716)

Con este ejercicio se espera que el alumno entienda mejor la relación entre las variables (F1) y al sustituir cada valor para la variable independiente x en la función $f(x)$ puede comprobar si el valor obtenido es el valor correspondiente para la variable dependiente y (F2) o no lo es.

d) Calcula las intersecciones de la recta con los ejes coordenados

Para que los alumnos determinen las intersecciones con los ejes deben primero calcular $f(0)$, encontrando un valor para la variable dependiente a partir de un valor particular de la variable independiente (F2). Para encontrar $f(x)=0$, el alumno tendrá que determinar un valor para la variable independiente a partir de un valor dado de la variable dependiente. En ambos valores deben reconocer una incógnita (I1) y encontrar su valor desconocido (I4) realizando las operaciones algebraicas adecuadas.

Al obtener los dos puntos con sus respectivas coordenadas el alumno podrá entender la relación entre las variables tanto analítica como gráficamente (F1).

e) ¿Cuál es el dominio y el rango de la función?

Analizando la gráfica de manera visual y analítica, los alumnos deben identificar la relación lineal entre las variables (F1, F4) y poder determinar los intervalos correspondientes para su dominio y su rango.

Actividad #4

Traza las siguientes funciones y determina: su pendiente, la intersección con los ejes X y Y, los intervalos donde es positiva y donde es negativa, determina si es una función creciente o decreciente y comenta cuál es la relación entre la pendiente de una recta y su comportamiento (creciente o decreciente)

a) $y = -3x + 5$

b) $y = (\frac{1}{2})x + 2$

$$\text{c)} \quad y = -\left(\frac{2}{3}\right)x - 2$$

$$\text{d)} \quad y = -\left(\frac{3}{4}\right)x - 2$$

Para encontrar la pendiente el alumno debe reconocer la variación conjunta de las variables (F4) al analizar la gráfica y la forma analítica.

Deben comparar la función dada $f(x)$ con la forma general de la función lineal $y = ax + b$ para identificar a como un número general (G2) que representa a la pendiente de la recta y deben de distinguir el valor particular que toma para esta función (I2).

Al igual que en incisos anteriores, para que los alumnos determinen las intersecciones con los ejes deben primero calcular $f(0)$, encontrando un valor para la variable dependiente a partir de un valor particular de la variable independiente (F2). Para encontrar $f(x) = 0$, el alumno tendrá que determinar un valor para la variable independiente a partir de un valor dado de la variable dependiente.

En ambos valores deben reconocer una incógnita (I1) y encontrar su valor desconocido (I4) realizando las operaciones algebraicas adecuadas.

Al obtener los dos puntos con sus respectivas coordenadas el alumno podrá entender la relación entre las variables tanto analítica como gráficamente (F1).

Para determinar los intervalos en donde la función es positiva y los intervalos en donde es negativa, deben de reconocer la correspondencia entre las variables (F1) Para encontrar éstos intervalos el alumno lo podrá determinar con solo observar la gráfica de cada recta (F1).

Para determinar los intervalos en donde la función es creciente ó decreciente, deben de reconocer la correspondencia entre las variables (F1) que la obtienen de la pendiente que mide el tipo de relación entre la variable independiente y la variable dependiente.

Al observar la gráfica podrá determinar directamente si la función es creciente o decreciente (F1).

PRACTICA 2

El objetivo de esta práctica es que el alumno a partir de la función lineal $f(x) = mx + b$ y el uso de Graphmatica pueda analizar la relación funcional entre las variables y el efecto que los parámetros m y b tienen sobre esa relación.

Actividad #1

A.1.1 Usando papel y lápiz, calcula la ecuación de cada una de las rectas y con palabras explica qué criterio usaste.

Para poder calcular la ecuación de cada una de las rectas de la actividad A.1.1 el alumno debe de visualizar con detenimiento la información contenida en cada dibujo.

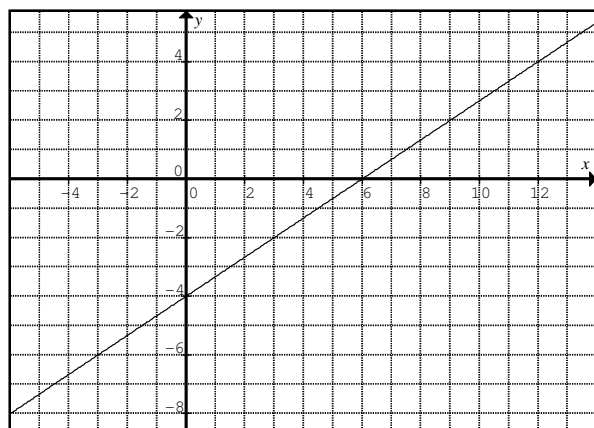
Debe de reconocer la relación lineal entre las variables (F1), la variación conjunta entre ellas (F4), analizar y determinar el intervalo de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra (F5).

Después de lo anterior deberá de reconocer la presencia de algo desconocido (I1) y determinar mediante las operaciones algebraicas necesarias (I4) los parámetros correspondientes para la pendiente a y la ordenada al origen b , y así, poder simbolizar la relación funcional para cada recta (F6).

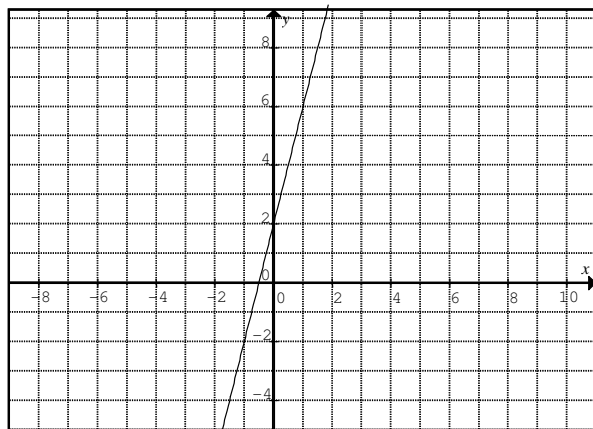
Con solo analizar el punto donde la recta corta al eje Y y que corresponde a la ordenada al origen (F1) los alumnos podrán determinar el valor correspondiente del parámetro b de cada recta (I2, G1).

El valor del parámetro a que corresponde a la pendiente de la recta, también lo pueden determinar visualizando la gráfica con el criterio de elevación entre recorrido (F4, F5, G1) sin tener que hacer cálculos algebraicos.

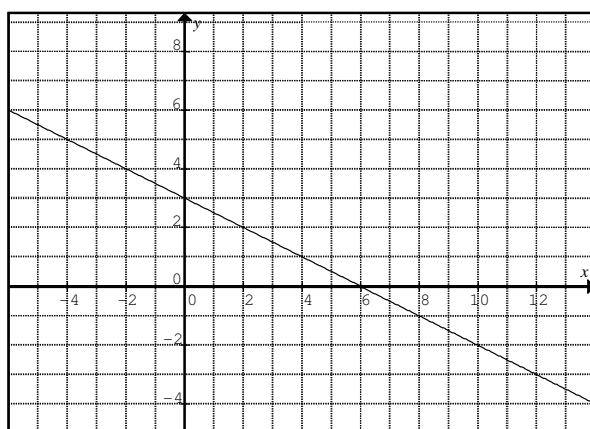
a)



b)



c)



A.1.2 Grafica con Graphmatica cada una de las rectas que calculaste y compáralas con las gráficas dadas ¿resultó la misma? En caso de que tu respuesta sea negativa ¿en qué no coinciden y porqué? ¿en qué te equivocaste?

El objetivo de este inciso es que el alumno pueda comprobar si tuvo o no error al calcular la forma analítica de cada recta (F1, I4).

Se espera que al hacer la comparación visual de las gráficas dadas y las obtenidas (F1, F4), distingan si se logró el objetivo. En caso contrario, que puedan visualizar si lo que calculó mal fue el valor de la pendiente (F1, I4), porque la inclinación de la recta obtenida no coincide; o si el valor calculado para la ordenada (F1, G1, I4) está incorrecto porque la recta obtenida no corta al eje Y en el mismo punto que la recta dada.

Actividad #2

Realiza cada una de las actividades de los siguientes incisos usando papel y lápiz y después grafica cada ejercicio, usando Graphmatica para comprobar tu resultado. Explica brevemente con tus palabras tu razonamiento para obtener el resultado.

En todos los incisos de esta actividad se pide a los alumnos que calculen la ecuación de una línea recta (F1, I4, I5) y se espera que lean con cuidado cada inciso y determinen lo que se pide analizando la información con la que cuentan en cada uno, teniendo siempre en mente el concepto de ecuación lineal y lo que se necesita para poder encontrar los valores de los parámetros y poder llegar a la ecuación en cada inciso (I4, I5). En cada inciso puede haber más de una respuesta por alumno debido al tipo de análisis que se está haciendo.

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-1, -3) y B(5, 3)

Los alumnos necesitan reconocer que las coordenadas de cada punto, representan a dos variables que están relacionadas (F1).

Los alumnos deben de reconocer la presencia de algo desconocido (I1) y realizar las operaciones necesarias para calcular primero, el valor de la pendiente (I2) y segundo, la ecuación de la recta (I4).

El alumno debe de comprobar si la recta obtenida es la correcta al sustituir uno de los dos puntos dados en la recta obtenida (I3).

Si dibujan ambos puntos A y B en el plano cartesiano, pueden determinar el valor de la pendiente con el criterio de elevación entre recorrido (F1, F4, F5) sin necesidad de realizar operaciones algebraicas.

b) Si desplazas la gráfica de la línea recta verticalmente en forma paralela tres unidades hacia arriba ¿cuál será la ecuación de dicha recta? ¿Pasa por el punto P(3, 4)?

Con el desplazamiento vertical de la recta, el alumno debe de reconocer la relación entre las variables (F1) y la variación conjunta entre ellas (F4) para cada punto.

Se espera que reconozcan que el desplazamiento vertical de manera paralela afecta solamente al parámetro b de la ecuación (G1).

Para poder determinar si la recta obtenida pasa por el punto P, deben de sustituir el valor de ambas coordenadas en la recta obtenida (I3).

También lo podrán determinar si toman el valor para la variable independiente y lo sustituyen en la ecuación encontrada, para comprobar si el valor obtenido para la variable dependiente es el valor de la coordenada y del punto dado (F2, I3).

Otra manera de comprobar si la recta encontrada pasa por el punto P es visualizándolo en la recta (F1).

c) Encuentra la ecuación de una recta que tenga como pendiente $m = 3$ y que cruce la gráfica de la recta del inciso b. ¿Cuál es la ecuación de la familia de rectas que tienen pendiente tres?

De la ecuación en forma general de una línea recta $y = ax + b$, los alumnos deben de relacionar el valor de la pendiente a (G2), con el valor particular asignado para este inciso $a = 3$ (I2).

Para que la recta que deben de determinar cruce por la recta del inciso b, los alumnos pueden reconocer varios puntos (F1) por los que pasa dicha recta y usarlos para la nueva recta que deben de determinar (I1, I4).

Para determinar la familia de rectas con la condición de la pendiente dada (I2), los alumnos deben de ser capaces de poder simbolizar la relación funcional (F6) distinguiendo que el valor para el parámetro b que representa a la ordenada al origen puede tomar cualquier valor (G2, G3, G4).

d) Encuentra la ecuación de la recta que pase por los puntos A(-3, -6) y B(0, 3) ¿tienen algo en común ésta recta y la del inciso c? Justifica tu respuesta

Los alumnos necesitan reconocer que las coordenadas de cada punto, representan a dos variables que están relacionadas (F1, F4).

Los alumnos deben de reconocer la presencia de algo desconocido (I1) y realizar las operaciones necesarias para calcular los parámetros de la ecuación de la recta (G4, I4) y poder simbolizarla (F6).

El alumno debe de comprobar si la recta obtenida es la correcta al sustituir uno de los dos puntos dados en la recta obtenida (I3).

Si dibujan ambos puntos A y B en el plano cartesiano, pueden determinar el valor de la pendiente con el criterio de elevación entre recorrido (F1, F4, F5) sin necesidad de realizar operaciones algebraicas.

Si los alumnos grafican ambos puntos, podrían visualizar la recta y responder a la pregunta (F1).

Deben de reconocer, tanto numérico como gráfico que la recta encontrada y la del inciso anterior son paralelas (G1, G2, G3).

e) Da la ecuación de dos rectas que sean perpendiculares entre sí pero que pasen por el punto $P(-2, 3)$ ¿qué criterio usarás? En términos generales, da la ecuación de ambas rectas perpendiculares y que pasen por ese punto

Primero que nada, los alumnos deben de recordar la condición necesaria para que dos rectas sean perpendiculares (F1, G1, G3, G4, G5).

Como se pide que determinen la ecuación de dos rectas que sean perpendiculares entre sí y que pasen por un punto dado $P(x, y)$, los alumnos primero deben de dar un valor arbitrario para la pendiente de una de las rectas (F1, G2) y con el criterio de rectas perpendiculares poder determinar el valor de la pendiente para la recta perpendicular (F1, G1, G2, G4).

Con el punto dado y cada una de las pendientes, podrán calcular las ecuaciones respectivas (I1, I4).

Para el segundo ejercicio en donde deben de determinar en términos generales la ecuación de dos rectas perpendiculares pero que pasen por un punto dado $P(x, y)$, se espera que el alumno pueda simbolizar de manera general la condición dada (G1, G2, G4, G5).

f) Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $3x + y - 2 = 0$ y que pasa por el punto $P(-6, -1)$ ¿pasa ésta recta por el punto $Q(3, 2)$?

Al igual que el inciso anterior, el alumno debe tener presente el criterio para rectas perpendiculares (G1, G3, G4, G5).

Una vez identificada la pendiente de la recta de referencia (G4) los alumnos deben de determinar la pendiente de la recta perpendicular (G4, G5).

Una vez teniendo la pendiente y el punto $P(-6, -1)$ el alumno podrá calcular la ecuación de la recta que se pide (F1, I1, I4).

Para comprobar que el punto $Q(3, 2)$ pertenece a la recta encontrada, tendrán que sustituir el valor para la variable independiente $x = 3$ (I3).

g) Desplaza la recta del inciso f cuatro unidades verticalmente, de manera paralela hacia abajo ¿cuál es la ecuación de ésta nueva recta?

Con el desplazamiento vertical de la recta, el alumno debe de reconocer la relación entre las variables (F1) y la variación conjunta entre ellas (F4) para cada punto.

Se espera que reconozcan que el desplazamiento vertical de manera paralela afecta solamente al parámetro b de la ecuación (G1) y para este caso particular, le deben de restar 4 unidades (G4).

h) Encuentra la ecuación de la recta que pase por los puntos A(-1, 5) y B (4, 5) y da la ecuación de una recta que sea perpendicular a ella.

Los alumnos necesitan reconocer que las coordenadas de cada punto, representan a dos variables que están relacionadas (F1).

Podrán determinar la ecuación de la recta sin necesidad de hacer algún procedimiento algebraico ya que los puntos A y B pertenecen a una recta horizontal cuya pendiente es igual a cero (F1, G4, F6) y cuya ecuación debe de ser $y = 5$.

Si no resuelven el problema de manera gráfica, los alumnos deben de reconocer la presencia de algo desconocido (I1) y realizar las operaciones necesarias para calcular la ecuación de la recta (I4).

El alumno debe de comprobar si la recta obtenida es la correcta al sustituir uno de los dos puntos dados en la recta obtenida (I3).

Si dibujan ambos puntos A y B en el plano cartesiano, pueden visualizar el ejercicio y determinar el valor de la pendiente con el criterio de elevación entre recorrido (F1, F4, F5) sin necesidad de realizar operaciones algebraicas.

Para encontrar la recta perpendicular no necesitarán hacer ningún procedimiento (G1, G3, F6) ya que la recta que encontraron y que pasa por los puntos A y B es una recta horizontal cuya pendiente es igual a cero, por lo que cualquier recta perpendicular a ella será una recta vertical cuya pendiente no está definida y la ecuación de una recta vertical se determina con la forma $x = k$ donde k puede ser cualquier número real.

i) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen y no tiene pendiente

Los alumnos necesitan reconocer que las coordenadas del punto que corresponde al origen es el punto P(0, 0) y representan a dos variables que están relacionadas (F1).

Si los alumnos trazan el punto para visualizar la pregunta, entenderían que no tienen que hacer procedimiento algebraico y que pueden determinar la ecuación de la recta vertical de manera directa (F1, G1, G2, G3) reconociendo la forma general de su ecuación y simbolizarla sin problema (F6).

Deben de reconocer que una recta que no tiene pendiente, corresponde a una recta vertical y dada la condición de que pase por el origen, deben determinar de manera directa la ecuación de la recta, al relacionarla con la forma general de una recta vertical (F1, G1, G2, G3, F6).

j) Encuentra la ecuación de una recta que sea paralela a la recta del inciso i, pero que pase por el punto P(4, -1)

Se espera que los alumnos recuerden el concepto de rectas paralelas (F1, G1, G3).

Los alumnos deben de reconocer que las coordenadas del punto dado están relacionadas (F1) distinguiendo el valor para la variable independiente y el valor correspondiente para la variable dependiente y que para este ejercicio en particular, deben distinguir que la coordenada que necesitan es el de la variable $x = 4$ (I2).

Como la ecuación de la recta que se pide, corresponde a la ecuación de una recta vertical pero que pase por un valor particular para la variable x cuya recta no tiene pendiente, deben de hacerlo de manera directa, al relacionarla con la forma general de una recta vertical (F1, G1, G4, I2) y poder simbolizarla (F6).

k) Da la familia de rectas que pasen por el punto P(4, -1)

Se espera que el alumno trace el punto P(4,-1) para que después de visualizar la pregunta los alumnos puedan responder encontrando la familia de rectas que pasen por un punto particular (F1, G2).

Se espera que los alumnos distingan que por un punto dado, pueden pasar una infinidad de rectas que tienen pendientes o inclinaciones diferentes entre ellas (F1, G1, G3) y que el valor correspondiente para la ordenada al origen b , quedará en función del valor que tome el parámetro de la pendiente a (F1, G1, G2, F6).

l) Encuentra la familia de rectas que tienen la misma pendiente que la recta del inciso f. Explica brevemente tu respuesta

Se espera que los alumnos obtengan la pendiente de la recta del inciso f (I1, I4) y una vez que tienen éste parámetro a , puedan generalizar la ecuación de la recta reconociendo que lo único que les falta, es el valor del parámetro para la ordenada al origen b y que puede tomar cualquier valor (G1, G3, I5) y ya con ambos valores, simbolizar la ecuación de la recta (F6).

Actividad #3

En cada uno de los siguientes incisos, encuentra la ecuación de una línea recta con las condiciones que se piden, gráficolas para comprobar tú resultado ¿Quién es la pendiente y la ordenada al origen de cada una?

En esta actividad los alumnos deben de ser capaces de reconocer la variación conjunta y simbolizar (F1, F4, F6) la ecuación que se pide según cada condición.

Deben tener en mente siempre la forma general de la función lineal $f(x) = ax + b$ para que en cada inciso puedan distinguir la condición que se pide (G2, G3) tanto para el parámetro de la pendiente a como el de la ordenada al origen b , y después dar un ejemplo numérico particular para ambos (I2) y con ellos encontrar la ecuación que se pide (F6).

En cada ejercicio tendrán que dibujar una recta que pase por los cuadrantes que se piden (F1, F4) y después identificar las condiciones que deben de cumplir cada uno (G3).

Con la gráfica de cada una (F1) podrán visualizar si se cumple con lo que se pide.

a) Que pase por los cuadrantes I, II y IV

Para que la recta pase por esos tres cuadrantes (F1, F4), los alumnos tienen que distinguir que la pendiente debe de ser negativa y la ordenada al origen debe de ser positiva (G1, G2, G3) y ya con la condición en mente deberán ser capaces de dar los valores particulares (I2) para cada uno.

b) Que pase por los cuadrantes I y III

Para que una recta pueda pasar sólo por estos dos cuadrantes (F1, F4), los alumnos deben de reconocer que la pendiente debe de ser positiva y la ordenada al origen debe de ser igual a cero (G1, G3) para poder simbolizar (F6) la ecuación como se pide, escogiendo un valor particular para cada uno de los parámetros (I2).

c) Que pase por los cuadrantes II y III

Para que la recta pase sólo por estos dos cuadrantes, los alumnos deben de identificar (F1, F4) que tiene que ser la ecuación de una recta vertical de forma general $x = k$ (G1, G3) donde k puede tomar cualquier valor negativo (G2).

d) Que pase por los cuadrantes II, III y IV

Para que la recta pase por esos tres cuadrantes (F1, F4), los alumnos tienen que distinguir que la pendiente y la ordenada al origen deben de ser ambas negativas (G1, G2, G3) y ya con la condición en mente deberán ser capaces de dar los valores particulares (G2) para cada uno después de identificar el signo que deben de tomar.

e) Que pase por los cuatro cuadrantes

Los alumnos deben darse cuenta de que ninguna recta puede pasar por los cuatro cuadrantes (F1, F4) al mismo tiempo (G1, G3).

f) Que pase por los cuadrantes I y II

Para que la recta pase sólo por éstos dos cuadrantes, los alumnos deben de identificar que tiene que ser la ecuación de una recta horizontal de forma general $y = b$, donde b puede tomar cualquier valor positivo (G2, G3).

g) Que pase por los cuadrantes I, III y IV

Para que la recta pase por esos tres cuadrantes (F1, F4), los alumnos tienen que distinguir que la pendiente debe de ser positiva y la ordenada al origen debe de ser negativa (G1, G3) y ya con la condición en mente deberán ser capaces de dar los valores particulares (G2) para cada uno y simbolizar la ecuación de la recta (F6).

h) Que pase sólo por un cuadrante

Para que una recta pueda pasar sólo por un cuadrante se deben de condicionar sus valores (F1, F4, F5). Por ejemplo: para que sólo pase por el cuadrante I, se pueden plantear ecuaciones de la forma: a) $y = ax$ con $a > 0$ y $x > 0$, b) $y = b$ con $b > 0$ y $x > 0$ y c) $x = k$ con $k > 0$ e $y > 0$. Tendrían que hacer un análisis similar para cada cuadrante determinando los signos para los parámetros a y b y también para las variables (G1, G2, G3) para su ejemplo en particular.

Actividad #4

Para cada uno de los incisos de la actividad #3, da la familia de rectas que cumplan con dichas condiciones, es decir ¿qué características deben tener los parámetros m y b de la recta $y = mx + b$ en cada caso?

En esta actividad los alumnos deben de ser capaces de simbolizar (F1, F4, F6) la ecuación que se pide según cada condición.

Deben tener en mente siempre la forma general de la función lineal $f(x) = ax + b$ para que en cada inciso puedan distinguir la condición general (G1, G2, G3) tanto para el parámetro de la pendiente a como el de la ordenada al origen b .

En cada ejercicio tendrán que dibujar una recta que pase por los cuadrantes que se piden (F1, F4) y después identificar los signos que deben tener el parámetro de la pendiente y el de la ordenada al origen (G1, G2, G3) para poder dar una ecuación general.

a) Que pase por los cuadrantes I, II y IV

b) Que pase por los cuadrantes I y III

c) Que pase por los cuadrantes II y III

d) Que pase por los cuadrantes II, III y IV

e) Que pase por los cuatro cuadrantes

f) Que pase por los cuadrantes I y II

g) Que pase por los cuadrantes I, III y IV

h) Que pase sólo por un cuadrante

PRACTICA 3

El objetivo de esta práctica es que el alumno a partir de la función lineal $f(x) = ax + b$ y el uso de Graphmatica pueda analizar la relación funcional entre las variables y el efecto que los parámetros a y b tienen sobre esa relación.

Actividad #1

1.- Usando papel y lápiz, resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por el método que quiera, diga qué tipo de solución tienen, cómo se llaman las ecuaciones:

a) $5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6$ y $\frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}$

b) $5x - 15y = 60$ y $y = \frac{1}{3}x + 2$

c) $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 4$ y $\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 5$

Para resolver cada sistema de ecuaciones lineales, los alumnos primero tendrán que simplificar cada una de las ecuaciones (G4) y después tendrán que reconocer la presencia de algo desconocido (I1) y, mediante un método algebraico adecuado para resolver sistemas de ecuaciones lineales (I4), deberán determinar el tipo de solución que tiene cada uno. Por otra parte, los alumnos deben de reconocer, y decidir, según la solución, si las rectas son rectas paralelas, si se trata de la misma recta ó son rectas que se cruzan en un punto. Para ello es necesario que interpreten las relaciones funcionales (F1) y que reconozcan las condiciones generales sobre el parámetro (G1, G3) Si la solución resultante es un punto común a ambas rectas, el alumno debe de comprobar si efectivamente pertenece a ambas haciendo la sustitución correcta (I3) y reconociendo que es un punto $P(x, y)$ donde las variables están relacionadas (F1).

2.- Usando Graphmatica, grafica los tres sistemas anteriores y comprueba con tu solución. ¿Coincide? ¿No, en qué te equivocaste?

El objetivo en esta actividad es principalmente que los alumnos puedan comparar las respuestas que obtuvieron en la actividad anterior (I3) tanto algebraicamente como

gráficamente (F1) y relacionar ambas representaciones para profundizar en su comprensión de la relación entre las variables.

Actividad #2

1.- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, por el método que

quiera: $7x - 8y = 4$ y $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$. **Encuentre la ecuación de la**

línea recta que pasa por ese punto de intersección y que sea perpendicular a la recta $x = -1$.

2.- Encuentre la ecuación de la recta que sea paralela a la recta $4x + 4y = -32$ y que pase por el punto de intersección entre las rectas:

$$x + 3y = -18 \quad y \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 5$$

3.- Encuentre la ecuación de la recta que sea perpendicular a la recta $6x + 3y = -9$ y que pase por el punto de intersección entre las rectas:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = -1 \quad y \quad 2x + y = 16$$

Para cada ejercicio, los alumnos primero tendrán que resolver el sistema de ecuaciones lineales, manipulando las variables (G4), reconociendo que hay valores desconocidos (I1) y utilizar el método apropiado para resolver y llegar al punto solución (I4).

El punto solución $P(x, y)$ representa un par de coordenadas que están relacionadas entre sí (F1, F4).

Para poder encontrar y simbolizar la ecuación de la recta que se pide (F6), ya tienen el punto P que pertenece a ella y necesitan una pendiente numérica que la tendrán que obtener de la recta que se da como referencia según la condición dada (G1, G4) y hacer un procedimiento adecuado para determinar lo desconocido (I4).

Actividad #3

De la actividad anterior, escriba cada una de las cuatro rectas de cada inciso, en forma pendiente ordenada al origen (cuide su álgebra) y usando Graphmatica, grafique cada una, para comprobar la condición que se pide en cada inciso. Grafique cada inciso por separado.

Una vez que los alumnos identifiquen los parámetros a y b (I2) de cada recta, y las grafiquen, se espera que puedan visualizar y comprobar con las cuatro rectas la condición que se pide en cada ejercicio (F1, F4) además de relacionar las representaciones gráfica y analítica.

Actividad #4

Usando papel y lápiz, grafique cada uno de los siguientes sistemas de desigualdades lineales:

$$a) \quad y < -x + 4, \quad y > x - 4$$

$$b) \quad y < 4 - \frac{1}{2}x, \quad y > 2x - 10$$

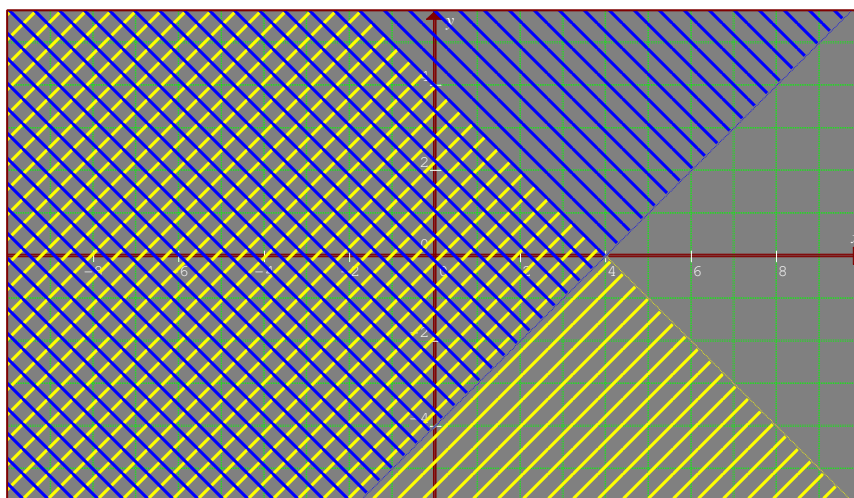
**¿Qué tomaste en cuenta para graficarlos? Coincide con las siguientes gráficas?
¿Sí, no, porqué?, explique brevemente**

En esta actividad se espera primeramente que los alumnos distingan la relación entre las variables (F1, F4) reconociendo la diferencia entre ecuación y desigualdad.

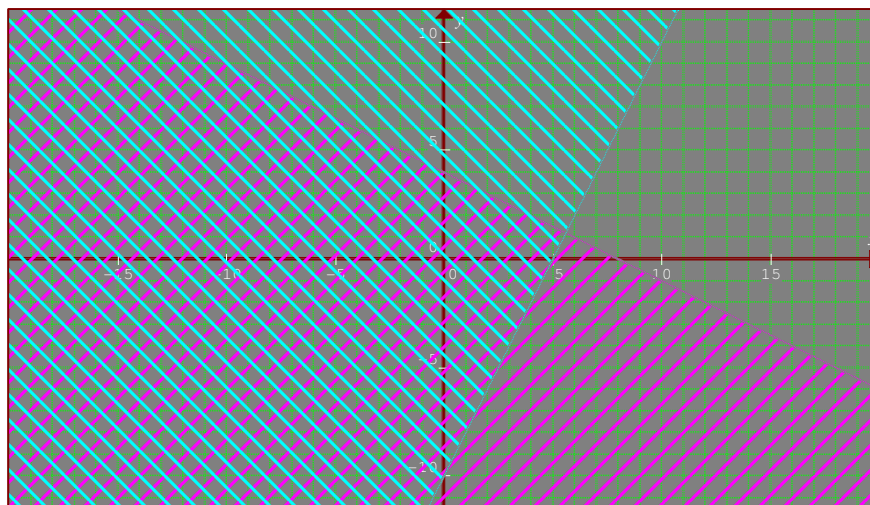
Para poder trazar la región correspondiente en cada desigualdad tendrán que reconocer los valores particulares de los parámetros de la pendiente y de la ordenada al origen (I2) y después relacionar las variables x e y según el signo de la desigualdad (F1, F4).

Por último tendrán que distinguir la región común entre las desigualdades que corresponde al sistema de desigualdades lineales (F1, G1, F4).

a)



b)



PRACTICA 4

El objetivo de esta práctica es que el alumno, a partir de la función cuadrática $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y el uso de Graphmatica, pueda analizar la relación funcional entre las variables y el efecto que los parámetros a , h y k tienen sobre esa relación.

Funciones Cuadráticas

Actividad #1

Analiza los datos de la siguiente tabla y contesta las preguntas:

x	y
- 10	- 100
- 8.4	- 70.56
- 5.8	- 33.64
- 4	- 16
- 3.5	- 12.25
- 2	- 4
- 3/2	- 9/4
- 1	- 1
- 1/4	- 1/16
1/8	- 1/64
1/4	- 1/16
1	- 1
1.3	- 1.69
2	- 4
3.8	- 14.44
4.3	-18.49
6	-36
7.9	-62.41
9	-81
10	-100

a) ¿Qué tipo de función crees que representan los datos? Explica porqué:

Después de analizar detenidamente la tabla de datos, y en base a los conocimientos previos que tienen los alumnos acerca de funciones cuadráticas y su comportamiento, podrán identificar la relación funcional entre las variables (F1) y la variación conjunta entre ellas (F4).

b) Encuentra una relación analítica entre los valores de la variable x y los valores de la variable y .

En base al análisis de los datos el alumno debe ser capaz de simbolizar la relación funcional (F6).

c) Usando tu calculadora, has una tabla de valores de y para diez valores distintos de x .

Una vez definida la forma analítica de la función en el inciso anterior, el alumno podrá obtener un correspondiente valor para la variable dependiente y para cada valor de la variable independiente x (F2).

d) ¿Para qué valor de x la y tiene el valor mínimo ó el máximo? Con qué fórmula lo encontrarías?

Igual que los incisos anteriores, después del detenido análisis de los datos dados y los obtenidos por los alumnos, deberán ser capaces de identificar el valor de x que corresponde al valor máximo de y (F1, F3). Para ello también es necesario identificar la variación conjunta entre las variables (F4) puesto que conocen la relación funcional (F1).

El valor desconocido para la variable x (I1) podrán encontrarlo haciendo la sustitución en la relación funcional que simbolizaron en el inciso b, dando varios valores (G2) a la variable y (I3, F3) y comparar entre ellos para determinar cuál es el valor máximo correspondiente.

Otra manera de contestar la pregunta sería sólo analizando la tabla de datos (F1) para identificar el valor del vértice y su respectiva concavidad, pero esto no asegura que el valor encontrado sea efectivamente el máximo.

e) Escribe una fórmula para encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función intersecta al eje X , y también para encontrar el valor de y para el cual la gráfica de la función intersecta al eje Y .

En la práctica 1, los alumnos estuvieron trabajando con la intersección de la gráfica de la función en ambos ejes, por lo que en esta actividad no deberían de tener ningún problema. Para encontrar la intersección con el eje Y deberán calcular $f(0)$, es decir, determinar un valor para la variable dependiente a partir del valor particular de $x = 0$ para la variable independiente (F2).

Para la intersección con el eje X, deberán de calcular $f(x) = 0$, teniendo que determinar un valor para la variable independiente a partir de un valor dado de la variable dependiente $y = 0$ (F3).

En ambos valores deben reconocer una incógnita (I1, I2) y encontrar su valor desconocido (I4) realizando las operaciones algebraicas adecuadas (G4).

Para este ejercicio podrán responder la pregunta analizando los datos (F1) porque están familiarizados con la función cuadrática $y = x^2$.

f) Grafica la función

Apoyándose con el programa de graficación Graphmatica, podrán visualizar la relación funcional entre las variables (F1), comprobando lo encontrado en los incisos anteriores.

Actividad #2

Si $f(x) = x^2 - 9$, completa la siguiente tabla y contesta las preguntas:

Dada la función $f(x)$, para completar la siguiente tabla, el alumno debe de encontrar cada valor correspondiente y para cada valor particular de x (F1, F2).

x	y
- 8	
- 5.5	
- 4	
- 2.5	
- 1	
- $\frac{1}{2}$	
- $\frac{1}{4}$	
0	
$\frac{1}{4}$	
1	
2	
3.5	
4	

6	
8	
10	

a) ¿Para qué valor de x la y tiene el valor mínimo? Con qué fórmula lo encontrarías? ¿cuál es el correspondiente valor de y para ese valor de x

Una vez que el alumno calculó los valores de la tabla (F2) podrá identificar el valor de x para el cual el valor de y es el mínimo (F1) solo visualizando.

Para hacerlo de manera analítica mediante el uso de una fórmula, deberán utilizar la función $f(x)$ dada, reconociendo la presencia de algo desconocido (I1) y realizar las operaciones necesarias para encontrar las coordenadas del vértice (I4).

b) Escribe una fórmula para encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función intersecta al eje X, y también para encontrar el valor de y para el cual la gráfica de la función intersecta al eje Y. ¿cuáles son esos valores?

En este inciso se pide que encuentren las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ donde la gráfica de la parábola corta a ambos ejes, por lo que en un inicio, el alumno deberá identificar las coordenadas de cada punto como valores relacionadas por la función $f(x) = x^2 - 9$ (F1).

Para calcular los valores de x en donde la gráfica de la función intersecta al eje X, los alumnos tendrán que recordar que en ese eje, el valor de $y = 0$, por lo que tendrán que usar la relación funcional $f(x)$ y convertirla en ecuación $f(x) = 0$ para que mediante el uso de un procedimiento adecuado (I4, F3), puedan encontrar los valores desconocidos para x (I1).

Para encontrar el valor de y en donde la gráfica de la función corta al eje Y, deberán recordar que tienen que usar $f(0)$ y encontrar el valor correspondiente para la y (F2).

c) Grafica la función usando papel y lápiz

Al trazar la gráfica, el alumno podrá visualizar la relación entre las variables (F1) comprobando que una función cuadrática tiene como gráfica una parábola vertical y ayudará a que comprueben los puntos encontrados en los incisos a y b (F1).

d) Encuentra los valores de la variable independiente para los cuales la función crece y decrece.

Con el análisis de la gráfica de la parábola y reconociendo el valor del punto mínimo (F1) el alumno podrá determinar los intervalos de valores para la variable x en donde la gráfica de la función crece y en dónde decrece (F4, F5) también implica reconocer la variación conjunta de las variables.

e) Encuentra los valores de x para los cuales la función es positiva y para los que la función es negativa.

Con el análisis de la gráfica de la parábola y tomando en cuenta los dos puntos en donde la gráfica corta al eje X (F1), el alumno podrá determinar los intervalos en donde la función es positiva y en donde es negativa (F4, F5).

f) Encuentras algún o algunos valores de la variable independiente para los cuales la función $f(x)$ tome el mismo valor? ¿cuántos? En general, ¿para cuántos valores de x obtendrías el mismo valor de la función $f(x)$? ¿cómo explicas esto a partir de la gráfica de la función?

Para responder a las preguntas, los alumnos tendrán que analizar tanto la tabla de valores obtenidos, como la gráfica de la función (F1) y reconocer, dada la relación funcional, la simetría con respecto al eje Y (G1) de manera gráfica y probando la condición para función par que implica identificar la relación conjunta entre las variables (F4).

g) Podrías encontrar un valor para $f(x)$ al que le corresponda únicamente un valor de x ¿qué valor sería? Localízalo en la gráfica.

Al igual que el inciso anterior, los alumnos deberán de apoyarse, tanto con la tabla de valores como con la gráfica de la parábola (F1) y corroborarlo con las coordenadas del punto mínimo (G1), para lo cual necesitan también identificar la variación conjunta de las variables (F4).

Actividad #3

Usando Graphmatica grafica la siguiente función: $f(x) = x^2$

La gráfica es muy importante para la comprensión visual de la relación funcional entre las variables y para comprobar el tipo de gráfica que corresponde a esa función cuadrática (F1) y para identificar la variación conjunta de las variables (F4).

a) ¿Es $f(x)$ una función cuadrática? ¿Cuáles serían las características de una función cuadrática?

Para resolver la pregunta el alumno debe reconocer la relación entre las variables, dada la gráfica y la forma analítica (F1, G1, G3) y la variación conjunta entre ellas (F4).

b) Encuentra los puntos en los que la función toma su valor más pequeño ¿cuántos son?

Los alumnos deberán reconocer visualmente las coordenadas del punto mínimo (F1), y es sólo un punto.

c) Encuentra las intersecciones de la función con los ejes coordenados.

Al igual que en actividades pasadas, para resolver esta pregunta, los alumnos deben reconocer que hay que encontrar puntos, para los cuales, sus respectivas coordenadas están relacionadas. En la intersección con eje Y, deben calcular $f(0)$, es decir, encontrar un valor para la variable dependiente a partir de una valor particular para la x (F2). Para la intersección con el eje X deben obtener $f(x) = 0$, es decir encontrar un valor para la variable independiente a partir de un valor particular para la variable dependiente (F3).

En ésta función en particular, pueden responder sólo analizando la gráfica, sin tener que resolver algún procedimiento algebraico (F1, F4).

d) Usando Graphmatica, grafica las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 + 2$, $g(t) = t^2 - \frac{1}{4}$, $h(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, $i(x) = x^2 + 5$, **repite lo que hiciste en los incisos b y c. Compara tus resultados con los que hiciste en a-c y describe con tus palabras ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?**

Después de graficar y analizar de manera visual cada gráfica de las cuatro funciones que se piden y haciendo una comparación visual con la gráfica de la función $f(x) = x^2$, los alumnos deben reconocer la relación funcional entre las variables (F1) entre la forma gráfica y la forma analítica y la variación conjunta (F4).

Para determinar el punto en el que la función toma su valor más bajo lo pueden resolver analizando la gráfica (F1) sin hacer ningún procedimiento.

Para encontrar la intersección con el eje Y, los alumnos deben calcular $f(0)$, es decir dar un valor para la variable independiente para obtener un valor particular para la variable dependiente (F2). Se espera que los alumnos logren identificar en este punto intersección la relación con el parámetro k (G1).

Para la intersección con el eje X, deben encontrar uno, dos ó ningún valor para la variable independiente dado el valor de cero para la variable dependiente (F3) calculando $f(x) = 0$.

Con este ejercicio se espera que los alumnos puedan distinguir la diferencia entre $f(0)$ y $f(x) = 0$.

Al pedirle que compare cada función y su respectiva gráfica con la función $f(x) = x^2$, se espera que el alumno pueda reconocer un patrón (G1) sobre el valor del parámetro k y su efecto sobre la gráfica, y reconocer que distintos valores del parámetro k (G2) provocan desplazamientos de la gráfica de manera paralela hacia arriba ó hacia abajo según su signo, y que tiene que ver con el punto en donde la gráfica de la parábola corta al eje Y (la ordenada al origen).

Para poder contestar qué es lo que cambia y qué es lo que permanece sin cambiar, una vez que resolvieron las preguntas anteriores, la comparación de funciones también deben de hacerla con la forma estándar de la parábola $f(x) = a(x - h)^2 + k$ comparando cada término e identificando los valores que toma cada parámetro en cada una de las funciones dadas, para lograr reconocer patrones de comportamiento (G1, G2), poder deducir reglas generales (G3) sobre los parámetros: a , h y k , y necesitan identificar la variación conjunta (F4).

e) Completa la siguiente tabla y compara la posición de los puntos cuya abscisa es $x = -2, 0, 3/2$ y 4 cuando le aplicas la función $f(x) = x^2$ y cuando le aplicas las funciones del inciso anterior. Explica con tus palabras qué le ocurre a cada punto de la función $f(x) = x^2$ cuando le aplicas las funciones del inciso anterior.

	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + 2$	$g(t) = t^2 - \frac{1}{4}$	$h(x) = x^2 - \frac{1}{2}$	$i(x) = x^2 + 5$
$x = -2$	P(-2,)	P(-2,)	P(-2,)	P(-2,)	P(-2,)
$x = 0$	P(0,)	P(0,)	P(0,)	P(0,)	P(0,)
$x = 3/2$	P(3/2,)	P(3/2,)	P(3/2,)	P(3/2,)	P(3/2,)
$x = 4$	P(4,)	P(4,)	P(4,)	P(4,)	P(4,)

Con este ejercicio se espera que al dar valores diferentes para las abscisas (variable independiente) en las diferentes funciones cuadráticas, el alumno pueda distinguir el efecto del parámetro k sobre cada punto en la función (F1, F4, G1) y distinguir que para el mismo valor de la variable independiente, el valor resultante de la variable dependiente queda desplazado en k unidades (G2) obteniendo $f(x) + k$. (F6)

Con este tipo de actividades se espera que los alumnos puedan deducir reglas generales (G3) sobre el efecto del parámetro k en las funciones, tanto gráfico como analítico (F1, F4, F6).

f) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en esta actividad? ¿Cómo cambia el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2$ al efectuar las transformaciones de esta actividad?

Analizando la gráfica de manera visual y analítica, los alumnos deben identificar la relación funcional entre las variables (F1) y su variación conjunta (F4) y poder determinar los intervalos correspondientes para su dominio y su rango.

Dada una función cuadrática, deberán distinguir que el dominio para todas es el mismo, sin embargo, el alumno debe de reconocer (G1) que el rango de cada una dependerá del valor del parámetro k (G2).

Actividad #4

a) Repite d) de la actividad anterior para las siguientes funciones:

$$f(x) = (x + 3)^2, \quad g(x) = (x + \frac{3}{4})^2, \quad h(x) = (x - 4)^2 \quad y \quad i(x) = (x - 5/2)^2$$

Después de graficar y analizar de manera visual cada gráfica de las cuatro funciones que se piden y haciendo una comparación visual con la gráfica de la función $f(x) = x^2$, los alumnos deben reconocer la relación funcional entre las variables (F1) entre la forma gráfica y la forma analítica.

Para determinar el punto en el que la función toma su valor más bajo lo pueden resolver analizando la gráfica (F1) sin hacer ningún procedimiento ó pueden calcularlo mediante un procedimiento algebraico (I4) identificando la presencia de algo desconocido (I1) o el papel del parámetro k al que ahora se le han asignado valores.

Para encontrar la intersección con el eje Y, los alumnos deben calcular $f(0)$, es decir dar el valor de cero para la variable independiente para obtener su valor correspondiente para la variable dependiente (F2).

Para la intersección con el eje X, deben encontrar un valor para la variable independiente, dado el valor de cero para la variable dependiente (F3) calculando $f(x) = 0$ y se espera que los alumnos reconozcan que dicho punto intersección corresponde al punto más bajo de cada función (G1) y que está relacionado con el valor del parámetro h (G2)

Con este ejercicio se espera que los alumnos puedan distinguir la diferencia entre $f(0)$ y $f(x) = 0$.

Al pedirle que compare cada función y su respectiva gráfica con la función $f(x) = x^2$, se espera que el alumno pueda reconocer un patrón (G1) sobre el valor del parámetro h y su efecto sobre la gráfica, y reconocer al parámetro como un número general que puede tomar cualquier valor y que distintos valores del parámetro h (G2) provocan desplazamientos de la gráfica de manera paralela hacia la izquierda ó hacia la derecha según su signo, y que tiene que ver con el punto en donde la gráfica de la parábola corta al eje X, y que para cada función, corresponde a su punto mínimo (F1). También la variación conjunta (F4)

Para poder contestar qué es lo que cambia y qué es lo que permanece sin cambiar, una vez que resolvieron las preguntas anteriores, la comparación de funciones también deben de hacerla con la forma estándar de la parábola $f(x) = a(x - h)^2 + k$ comparando cada término e identificando los valores que toma cada parámetro en cada una de las funciones dadas, para lograr reconocer patrones de comportamiento (G1, G2) y poder deducir reglas generales (G3) sobre los parámetros: a , h y k .

b) Completa la siguiente tabla y compara la posición de los puntos cuya abscisa es $x = -2, 0, 3/2$ y 5 cuando les aplicas los desplazamientos dados en el inciso anterior. Explica con tus palabras qué le ocurre a cada punto de la función $f(x) = x^2$ cuando le aplicas las funciones del inciso anterior.

	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x + 3)^2$	$g(x) = (x + \frac{3}{4})^2$	$h(x) = (x - 4)^2$	$i(x) = (x - \frac{5}{2})^2$
$x = -2$	P(,)				
$x = 0$					
$x = 3/2$					
$x = 5$					

c) ¿Qué transformaciones tendrías que hacer sobre la función $f(x) = x^2$ para obtener las funciones $f(x) = (x - 5)^2$ y $g(x) = (x + \frac{3}{2})^2$?

Con las actividades de los dos incisos anteriores, se espera que, una vez comprendido el efecto del valor del parámetro h sobre la gráfica de la función, tomando en cuenta su valor numérico y signo (F1, F4, G1, G2), los alumnos expliquen que en la función $f(x)$ la gráfica de la parábola queda desplazada cinco unidades horizontalmente hacia la derecha (de manera paralela) entendiendo el efecto sobre la variable independiente (F1) al obtener $f(x - h)$. En el caso de la gráfica de $g(x)$ deben responder que el efecto de h es desplazar la gráfica de la parábola pero 1.5 unidades horizontalmente hacia la izquierda (G1, G2) obteniendo $f(x + h)$.

Con este tipo de actividades se espera que los alumnos puedan deducir reglas generales (G3) sobre el efecto del parámetro h en las funciones, tanto gráfico como analítico (F1).

d) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en esta actividad? ¿Cómo cambia el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2$ al efectuar las transformaciones de esta actividad?

Analizando la gráfica de manera visual y analítica, los alumnos deben identificar la relación funcional entre las variables (F1) y su variación conjunta (F4) y poder determinar los intervalos correspondientes para su dominio y su rango.

Dada una función cuadrática, deberán distinguir que el dominio para todas es el mismo, y que el agregar un valor a la función que corresponda al parámetro h , no lo modifica, siguen siendo todos los reales. El rango de cada una tampoco se ve modificado, ya que es importante que los alumnos reconozcan que el efecto del parámetro h sobre la función, sólo afecta a la variable independiente y no a la variable dependiente (F1).

Actividad #5

a) Repite d) de la actividad # 3 para las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2, \quad g(x) = 5x^2, \quad h(x) = (\frac{1}{2})x^2, \quad i(x) = (\frac{1}{10})x^2$$

Después de graficar y analizar de manera visual cada gráfica de las cuatro funciones que se piden y haciendo una comparación visual con la gráfica de la función $f(x) = x^2$, los alumnos deben reconocer la relación funcional entre las variables (F1) entre la forma gráfica y la forma analítica. También variación conjunta (F4).

Para determinar el punto en el que la función toma su valor más bajo lo pueden resolver analizando la gráfica (F1) sin hacer ningún procedimiento y contestando que sólo hay un punto mínimo (G1).

Para encontrar la intersección con el eje Y, los alumnos deben calcular $f(0)$, es decir dar el valor de cero para la variable independiente x para obtener su valor correspondiente para la variable dependiente y (F2). Pueden contestar la pregunta sólo visualizando la gráfica de cada función cuadrática (F1), e identificar que es el origen para todas y para ambos ejes. También variación conjunta (F4).

Para la intersección con el eje X, deben encontrar un valor para la variable independiente dado el valor de cero para la variable y (F3) calculando $f(x) = 0$. Pero al igual que con el eje Y, pueden hacerlo sólo visualizando la relación funcional.

Al pedirle que compare cada función y su respectiva gráfica con la función $f(x) = x^2$, se espera que el alumno pueda reconocer un patrón (G1) sobre el valor del parámetro a y su efecto sobre la gráfica, y reconocer que distintos valores del parámetro a (G2) provocan que la abertura de la parábola se modifique, es decir, se estira verticalmente si $a > 1$, o se contrae verticalmente si $0 < a < 1$. Otra manera de explicarlo es que, el efecto del parámetro a sobre la gráfica de la parábola es que se pega más o se despega más de su eje de simetría, según su valor numérico.

Otro punto que deben de reconocer (F1) es que todas las funciones tienen la misma concavidad (G1).

Para poder contestar qué es lo que cambia y qué es lo que permanece sin cambiar, una vez que resolvieron las preguntas anteriores, la comparación de funciones también deben de hacerla con la forma estándar de la parábola $f(x) = a(x - h)^2 + k$ comparando cada término e identificando los valores que toma cada parámetro en cada una de las funciones dadas, para lograr reconocer patrones de comportamiento (G1, G2) y poder deducir reglas generales (G3) sobre los parámetros: a , h y k .

b) Compara los puntos correspondientes a $x = -2, 0, 1$, y 2 , de la función $f(x) = x^2$ con los correspondientes puntos de las funciones $g(x) = 5x^2$ $h(x) = (\frac{1}{2})x^2$

	$f(x) = x^2$	$g(x) = 5x^2$	$h(x) = \frac{1}{2} x^2$
$x = -2$	P(,)		
$x = 0$			
$x = 1$			
$x = 2$			

Una vez que los alumnos obtengan los valores correspondientes para la variable dependiente dados los diferentes valores particulares para la variable independiente x (F2), y comparen con los valores de $f(x) = x^2$ (F1) se espera que reconozcan (G1) visualmente que la gráfica de la función se estiró de manera vertical cuando $a > 1$ (G2, F4), lo cual corresponde a que cada valor resultante para la variable dependiente, quedó multiplicado por el valor numérico del parámetro a obteniendo $af(x)$. Y que cuando el valor del parámetro se encuentra entre $0 < a < 1$ (G2), la gráfica se contrae verticalmente resultante de multiplicar cada valor de la coordenada y o variable dependiente por el valor numérico del parámetro a obteniendo nuevamente $af(x)$ (G1). Deben reconocer también la variación conjunta (F4).

Con este tipo de actividades se espera que los alumnos puedan deducir reglas generales (G3) sobre el efecto del parámetro a en las funciones, tanto gráfico como analítico (F1).

c) Repite a) de esta actividad pero para las funciones:

$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = -3x^2, \quad h(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)x^2, \quad i(x) = \left(-\frac{1}{7}\right)x^2$$

Después de graficar y analizar de manera visual cada gráfica de las cuatro funciones que se piden y haciendo una comparación visual con la gráfica de la función $f(x) = x^2$, los alumnos deben reconocer la relación funcional entre las variables (F1) entre la forma gráfica y la forma analítica y la variación conjunta (F4).

Para determinar el punto en el que la función toma su valor más alto lo pueden resolver analizando la gráfica (F1) sin hacer ningún procedimiento y contestando que sólo hay un punto máximo (G1).

Para encontrar la intersección con el eje Y, los alumnos deben calcular $f(0)$, es decir dar el valor de cero para la variable independiente x para obtener su valor correspondiente para la variable dependiente y (F2). Pueden contestar la pregunta sólo analizando la gráfica de cada función cuadrática (F1).

Para la intersección con el eje X, deben encontrar un valor para la variable independiente dado el valor de cero para la variable y (F3) calculando $f(x) = 0$. Pero al igual que con el eje Y, pueden hacerlo sólo visualizando la relación funcional. Al pedirle que comparen cada función y su respectiva gráfica con la función $f(x) = x^2$, se espera que el alumno pueda reconocer un patrón (G1) sobre el parámetro a y su efecto sobre la gráfica, y reconocer que distintos valores del parámetro a (G2) provocan que la abertura de la parábola se modifique, es decir, se estira verticalmente si $-1 < a$, o se contrae verticalmente si $-1 < a < 0$. Otra manera de explicarlo es que, el efecto del parámetro a sobre la gráfica de la parábola es que se pega más o se despega más de su eje de simetría, según su valor numérico (F4).

Otra particularidad importante que deben de reconocer (F1) es que todas las funciones tienen la misma concavidad (G1) y contraria a la de la función $f(x) = x^2$ ya que el signo del parámetro a para las funciones de este inciso es negativo, provocando que en lugar de tener un punto más bajo, tendrá un único punto más alto (F1) Deben reconocer con esto la variación conjunta (F4).

Para poder contestar qué es lo que cambia y qué es lo que permanece sin cambiar, una vez que resolvieron las preguntas anteriores, la comparación de funciones también deben de hacerla con la forma estándar de la parábola $f(x) = a(x - h)^2 + k$ comparando cada término e identificando los valores que toma cada parámetro en cada una de las funciones dadas, para lograr reconocer patrones de comportamiento (G1, G2) y poder deducir reglas generales (G3) sobre los parámetros: a , h y k .

d) Compara los puntos correspondientes a $x = -2, 0, 1$ y 2 de la función $f(x) = x^2$ con los correspondientes puntos de las funciones $g(x) = -3x^2$ $h(x) = (-\frac{1}{4})x^2$

	$f(x) = x^2$	$g(x) = -3x^2$	$h(x) = -\frac{1}{4}x^2$
$x = -2$	P(,)		
$x = 0$			
$x = 1$			
$x = 2$			

Una vez que los alumnos obtengan los valores correspondientes para la variable dependiente dados los diferentes valores particulares para la variable independiente x (F2), y comparen con los valores de $f(x) = x^2$ (F1) se espera que identifiquen la variación conjunta (F4), que reconozcan (G1) visualmente que la gráfica de la función cambió de concavidad debido al signo negativo del parámetro a , y que dependiendo de su valor numérico, la parábola se estiró de manera vertical cuando $-1 < a$ (G2), debido a que cada valor resultante para la variable dependiente, quedó multiplicado por el valor numérico del parámetro a . Y que cuando el valor del parámetro se encuentra entre $-1 < a < 0$ (G2), la gráfica se contrae verticalmente (G1) como resultado de multiplicar cada valor de la coordenada y o variable dependiente por el valor numérico del parámetro a (G2) obteniendo $a f(x)$. Los alumnos deben de ser capaces de interpretar la notación simbólica (F6).

Con este tipo de actividades se espera que los alumnos puedan deducir reglas generales (G3) sobre el efecto del parámetro a en las funciones, tanto gráfico como analítico (F1).

e) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en esta actividad? ¿Cómo cambia el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2$ al efectuar las transformaciones de esta actividad?

Analizando la gráfica de manera visual y analítica, los alumnos deben identificar la relación funcional entre las variables (F1) y su variación conjunta (F4) y poder determinar los intervalos correspondientes para su dominio y su rango.

Dada una función cuadrática, deberán distinguir que el dominio para todas es el mismo, y que al multiplicar la función por el parámetro a , obteniendo $a f(x)$, no lo modifica, siguen siendo todos los reales.

El rango de cada función se modifica y es importante que los alumnos reconozcan (G1) que el intervalo correspondiente para la variable y dependerá del signo del parámetro a (G2) deduciendo ellos mismos la regla (G3).

Actividad #6

Escribe un párrafo para responder a cada una de las siguientes preguntas:

Después de resolver las actividades 3, 4 y 5, se espera que los alumnos puedan responder sin ningún problema las preguntas de ésta actividad siendo capaces de deducir

las reglas generales (G3) para cada uno de los parámetros analizados. Y su efecto en la relación funcional (F4).

a) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando la multiplicas por una constante a positiva $f(x) = ax^2$? ¿Qué le pasa cuando a es negativa?

Primeramente reconocer (G1) que si a es positiva, la concavidad de la gráfica de la parábola deberá ser positiva (G2, G3); y por el contrario, si $a < 0$ la concavidad será negativa (G2, G3). También deben reconocer la variación conjunta entre las variables (F4) Dependiendo del valor numérico del parámetro a (G1, G2), la gráfica de la parábola se estira verticalmente o se pega a su eje de simetría (G3) si $a > 1$ ó $-1 < a$. En éstos dos casos, cada coordenada y de la función $f(x) = x^2$ queda multiplicada por el valor numérico del parámetro a (F1, G3) obteniendo $af(x)$ Deben reconocer la variación conjunta entre las variables (F4) deben ser capaces de interpretar la simbolización (F6).

La gráfica de la parábola se contrae verticalmente o se despega de su eje de simetría (G3) si el valor del parámetro se encuentra entre $0 < a < 1$, ó $-1 < a < 0$ (G2), al igual que los dos casos anteriores, cada coordenada y de la función $f(x) = x^2$, quedará multiplicada por el valor numérico del parámetro a (F1, G3) obteniendo $af(x)$

b) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando le sumas a la variable x una constante $f(x) = (x + h)^2$? ¿Cómo se transforma si le restas la constante $f(x) = (x - h)^2$?

Deberán reconocer (G1) que si a la variable x le sumamos el valor del parámetro h , es decir con $h < 0$ (G2), la gráfica de la parábola queda desplazada h unidades horizontalmente de manera paralela hacia la izquierda (G3), es decir, que para la misma coordenada de la variable dependiente y la coordenada correspondiente para la x queda desplazada h unidades hacia la izquierda (F1, G3) obteniendo $f(x + h)$. Deben reconocer la variación conjunta (F4) y ser capaces de poder interpretar la simbolización (F6).

Por el contrario, deberán reconocer (G1) que si a la variable x le restamos el valor del parámetro h , es decir con $h > 0$ (G2), la gráfica de la parábola queda desplazada h unidades horizontalmente de manera paralela hacia la derecha (G3), es decir, que para la misma coordenada de la variable dependiente y la coordenada correspondiente para la x queda desplazada h unidades hacia la derecha (F1, G3) obteniendo $f(x - h)$. Deben de reconocer la variación conjunta (F4) y deben saber interpretar la simbolización (F6).

c) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando le sumas a la variable y una constante $f(x) = x^2 + k$? ¿Cómo se transforma si le restas la constante $f(x) = x^2 - k$?

Deberán reconocer (G1) que si a la función le sumamos el valor del parámetro k (G2) la gráfica de la función $f(x) = x^2$ se desplazará k unidades hacia arriba de manera paralela (G3), es decir, cada coordenada y de la función $f(x)$ tomará el valor de $f(x) + k$ unidades (F1, G3) Deben reconocer la variación conjunta (F4) y deben poder interpretar la simbolización (F6).

Por el contrario, deberán reconocer (G1, F4) que si a la función le restamos el valor del parámetro k (G2) la gráfica de la función $f(x) = x^2$ se desplazará k unidades hacia abajo de manera paralela (G3), es decir, cada coordenada y de la función $f(x)$ será $y - k$ unidades (F1, G3).

d) ¿Cómo se transforma la función $y = x^2$ cuando multiplicas a la variable x por una constante $f(x) = ax^2$ y después le sumas otra constante $f(x) = ax^2 + k$?

Se espera que puedan responder este inciso reconociendo el efecto de varios parámetros sobre la función $f(x) = x^2$ y no sólo el efecto de uno sólo como se analizó en los incisos de actividades anteriores.

Primeramente, los alumnos deben de reconocer (G1) que al multiplicar $f(x)$ por una constante a (G2) se va a modificar su abertura y tal vez su concavidad si $a < 0$ (G2), y después, si le sumamos otra constante $k > 0$ (G2) la gráfica de la función se desplazará k unidades hacia arriba (G3). Deben reconocer la variación conjunta (F4).

Estos dos movimientos tienen su efecto sobre el valor de la variable dependiente $y = f(x)$, el primero provoca que se modifique en $af(x)$ unidades (F1, G3) y el segundo, que a ese nuevo valor de la variable dependiente se le sumen k unidades resultando $a f(x) + k$ (F1, G3). Deben reconocer la variación conjunta (F4) y deben poder interpretar la simbolización (F6).

e) ¿Cómo se transforma la función $y = x^2$ cuando le sumas una constante h a la variable x $f(x) = (x + h)^2$ y después multiplicas a esa suma por una constante a $f(x) = a(x + h)^2$? ¿La transformación sería la misma que la del inciso anterior?

Se espera que sin ningún problema los alumnos reconozcan (G1) que primero al sumar una constante h a la variable x (G2) obteniendo $f(x + h)$, con $h < 0$, la gráfica de la parábola quedará desplazada de manera paralela, h unidades hacia la izquierda (G3) sin modificar los valores de la variable dependiente (F1) Deben de reconocer la variación conjunta (F4). Deben poder interpretar la simbolización (F6).

Como segundo paso si ahora multiplican a la nueva función $f(x + h)$ por un valor a (G2) los alumnos reconocerán (G1) que lo que se va a modificar es la abertura según el valor numérico del parámetro a (G2) y tal vez hasta su concavidad si $a < 0$ (G3), modificando entonces, el valor de cada coordenada de la función obteniendo $a(f(x + h))$ (G3). Reconocer variación conjunta (F4).

Esta nueva función resultante en donde $f(x)$ queda desplazada h unidades horizontalmente y después multiplicada por a unidades, no será la misma que la del inciso anterior, en donde $f(x)$ se ve afectada primero en a unidades y después desplazada verticalmente en k unidades.

f) ¿Qué le sucede a la función $y = x^2$ si haces la misma operación que el inciso e

$f(x) = a(x + h)^2$ pero después de esa transformación le sumas otra constante k

$f(x) = (x + h)^2 + k$?

Deberán reconocer (G1) que después de desplazar primero h (G2) unidades hacia la izquierda a $f(x)$ (G3), después multiplicarla por a unidades (G2) modificando su abertura (G3) al sumarle ahora otra constante k (G2) la nueva función $[a(f(x + h))] + k$ quedará desplazada k unidades hacia arriba (G2, G3). Reconocer la variación conjunta (F4) e interpretar la simbolización (F6).

PRACTICA 5

El objetivo de esta práctica es que el alumno, a partir de la función $f(x) = a(x - h)^{-1} + k$ y el uso de Graphmatica, pueda analizar la relación funcional entre las variables y el efecto que los parámetros a , h y k tienen sobre esa relación.

Actividad #1

1.- Usando Graphmatica, grafica la función $f(x) = \frac{1}{x}$

a) ¿Para qué valores de x está definida la función?

Primeramente el alumno debe de reconocer que existe una relación entre las variables mediante la función $y = f(x)$ y reconocer una relación conjunta (F1,F4) y al analizar de manera visual su gráfica (F1) deben de distinguir que la función no está definida cuando la variable independiente x toma el valor de cero; para cualquier valor diferente para la variable independiente x , $f(x)$ si está definida (F2).

También con la visualización de la gráfica, los alumnos podrán reconocer (F1) que la gráfica tendrá una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) Tomando papel y lápiz substituya valores en x cada vez más grandes positivamente y cada vez más pequeños negativamente ¿cuál es el comportamiento de $f(x)$?

En este inciso los alumnos deben de dar diferentes valores para la variable independiente x para determinar sus correspondientes valores de la variable dependiente y (F2).

Es importante que el análisis de los datos lo realicen para diferentes valores para la variable independiente x pero primero con signo positivo y luego valores con signo negativo (F1, F2, F4).

Se espera que al realizar el cálculo y análisis de los datos los alumnos distingan (G1) que el comportamiento de la función $f(x)$ es similar si damos valores para la variable independiente $x \geq 1$ (F2, F4, G2); al igual que $x \leq -1$ (F2, F4, G2) pero con signo contrario para la variable dependiente y .

Al reconocer dicho comportamiento (G1), los alumnos podrán distinguir que conforme la variable independiente x toma valores cada vez más grandes positivos ó cada vez más pequeños negativos (G2), el valor de la variable y , va disminuyendo cada vez más, pero sin llegar a tomar el valor de cero, por lo que la gráfica de la función tendrá una asíntota horizontal en $y = 0$ (G3).

c) ¿Qué le pasa a la función si x se acerca a cero por ambos lados? ¿Quiénes son las intersecciones con los ejes?

Al realizar el cálculo y análisis de los datos (F1, F2, F4) los alumnos deben distinguir y reconocer (G1) que el comportamiento de la función para valores $0 < x < 1$, y para $-1 < x < 0$ (G2) es similar pero con signo contrario para la variable dependiente. Por lo que podrán deducir (G3, F2, F4) que la variable dependiente y toma valores cada vez más grandes conforme x se acerca a cero por la derecha, y valores cada vez más pequeños conforme x se acerca a cero por la izquierda, y que la variable independiente no podrá tomar el valor de $x = 0$ por lo que se tendrá una asíntota vertical en ese valor.

Para determinar las intersecciones con los ejes, lo pueden determinar visualizando la gráfica de $f(x)$ (F1, F4) distinguiendo que no toca o cruza a ninguno de los dos ejes. Si deciden determinarlo mediante un procedimiento algebraico (I1, I3), deben distinguir que $f(0)$ no existe (F2) y que para ningún valor de x , $f(x) = 0$ (F3).

d) Graficar $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{1}{x} - 5$. **Compara con**

la función $f(x) = \frac{1}{x}$ **y responde ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?**

Se espera que al graficar cada función $f(x) = x^{-1} + k$, los alumnos puedan visualizar (F1, F4) la diferencia entre cada una y la función $f(x) = x^{-1}$.

Al pedirle que compare cada función y su respectiva gráfica con la función $f(x)$ (F1, F4), se espera que los alumnos visualicen el efecto del parámetro k sobre la gráfica de cada función desplazándola completamente de manera paralela verticalmente k unidades hacia arriba si $k > 0$, o k unidades hacia abajo si $k < 0$ (G1, G2)

También deberán de reconocer (G1) que la gráfica de la función tendrá un comportamiento asíntótico alrededor del valor de la constante k (G2, G3).

Deben ser capaces de interpretar la notación simbólica (F6).

e) ¿Qué puedes decir que pasa en general si sumas a $f(x) = \frac{1}{x}$ una constante k ?

Se espera que el alumno pueda reconocer primeramente la relación funcional entre las variables y su variación conjunta (F1, F4), que puedan distinguir el efecto del parámetro k sobre cada punto en la función (G1, G3, F4) y distinguir que para el mismo valor de la variable independiente, el valor resultante de la variable dependiente, para cada punto en la función, queda desplazado en k unidades (G3) obteniendo $f(x) + k$ si $k > 0$, ó $f(x) - k$ si $k < 0$ (G3). Deben de poder interpretar la notación simbólica (F6).

f) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones del inciso d?

Analizando la relación funcional en la gráfica de manera visual (F1) o haciéndolo de manera analítica, los alumnos podrán determinar el dominio de cada función identificando que son todos los números reales excepto $x = 0$ (F4,G3) y el rango todos los valores para la variable dependiente excepto el valor parámetro en $y = k$ para cada una (F1,F3, F4, G2).

Actividad #2

a) Graficar $f(x) = \frac{1}{(x+3)}$, $f(x) = \frac{1}{(x+5)}$, $f(x) = \frac{1}{(x-2)}$, $f(x) = \frac{1}{(x-7)}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x + \frac{5}{2})},$$

Se espera que al graficar cada función $f(x) = (x - h)^{-1}$, los alumnos puedan visualizar (F1, F4) la diferencia entre cada una y la función $f(x) = x^{-1}$

.b) Compara las graficas del inciso anterior con la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

¿Qué cambia, que permanece sin cambiar? ¿Qué pasa si sumas o restas una constante positiva h a x en la función $f(x)$?

Al pedirle que compare cada función y su respectiva gráfica con la función $f(x) = x^{-1}$ (F1, F4), se espera que los alumnos visualicen el efecto del parámetro h sobre la gráfica de cada función desplazándola completamente de manera paralela horizontalmente h unidades hacia la derecha si $h > 0$, o h unidades hacia la izquierda si $h < 0$ (G1, G2)

También deberán de reconocer (G1, F4) que la gráfica de la función tendrá un comportamiento asintótico vertical alrededor del valor de la constante h (G3).

Se espera que el alumno pueda distinguir el efecto del parámetro h sobre cada punto en la función (G1) y distinguir que para el mismo valor de la variable dependiente, el valor resultante de la variable independiente, para cada punto en la función, queda desplazado en h unidades de manera horizontal (G2) obteniendo $f(x-h)$ si $h > 0$, ó $f(x+h)$ si $h < 0$ (G3). Deben ser capaces de interpretar la notación simbólica (F6).

c) ¿El efecto sobre la función es el mismo si la constante va sumada o va restada a la variable x ?

Es muy importante que reconozcan (G1, F4) que no es el mismo efecto sobre la gráfica de la función si se tiene $f(x-h)$ desplazándola hacia la derecha porque $h > 0$, a si se tiene $f(x+h)$ desplazándola hacia la izquierda porque $h < 0$ (G2, G3, F4). Igualmente deberán reconocer el valor de la asíntota vertical $x = h$ (G1, G2, G3, F4) y visualizar que dependiendo del signo del parámetro h la asíntota vertical o estará en cuadrantes I y IV ó II y III.

d) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones? Y compáralas con

el dominio y el rango de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} + k$

Analizando la relación funcional en la gráfica de manera visual y la relación conjunta entre las variable (F1, F4) o haciéndolo de manera analítica, los alumnos podrán determinar que el dominio de las funciones $f(x-h)$ son todos los reales excepto el valor de $x = h$ y el rango todos los reales excepto $y = 0$. Al comparar con el dominio y rango de $f(x)$ y de $f(x) + k$ es tomar en cuenta el valor de la constante h para el dominio y el de la constante k para el rango (F1, F4, G2).

e) En las funciones de la actividad 1 ¿Qué representa la constante k en la grafica?

Y en las funciones de esta actividad ¿Qué representa la constante h en la grafica?

Después del análisis tanto visual como analítico, en todas las actividades anteriores, los alumnos deben de reconocer primeramente la relación funcional entre las variables y su variación conjunta (F1, F4), segundo, que en las funciones de la actividad 1, el valor de la constante k (G1, G2) es una asíntota horizontal en $y = k$ (G3) y también que identifica el desplazamiento vertical de TODOS los puntos de la función con respecto a la función original (F4). En las gráficas de la actividad 2 (G1), el valor de la constante h (G2), corresponde a una asíntota vertical en $x = h$ (G3) y al desplazamiento horizontal de todos los puntos de la función (F4).

Actividad #3

a) Usando Graphmatica graficar $f(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = \frac{10}{x}$, $f(x) = \frac{1}{3x}$, $f(x) = \frac{1}{9x}$

Se espera que al graficar cada función $f(x) = ax^{-1}$, los alumnos puedan visualizar (F1,F4) la diferencia entre cada una y la función $f(x) = x^{-1}$.

b) Compara con la gráfica de la función de la actividad uno $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿Qué cambia?

¿Que permanece sin cambiar?

Al pedirle que compare cada función $f(x) = ax^{-1}$ y su respectiva gráfica con la función $f(x) = x^{-1}$ (F1), se espera que los alumnos visualicen y reconozcan (G1) el efecto del parámetro a sobre la gráfica de cada función estirándola verticalmente (G3, F4) si $a > 1$ (G2), o contrayéndola verticalmente (G3, F4) si $0 < a < 1$ (G1, G2)

Para poder contestar qué es lo que cambia y qué es lo que permanece sin cambiar, se espera que el alumno pueda distinguir el efecto del parámetro a sobre cada punto en la función (F1, F4, G1) y distinguir que para el mismo valor de la variable independiente, el valor resultante de la variable dependiente, para cada punto en la función, queda multiplicado en a unidades (G2, F2) obteniendo una nueva gráfica $f(x)=af(x)$ (G3, F4).

c) ¿Qué pasa en general con la función $f(x) = \frac{1}{x}$ si multiplicamos a esta función por una constante positiva a mayor que uno. ¿Será lo mismo si a se encuentra entre $0 < a < 1$?

Después de realizar los incisos anteriores, los alumnos deben de ser capaces de deducir que según el valor del parámetro a , el efecto sobre la gráfica es de estirla verticalmente si $a > 1$, o contraerla verticalmente si $0 < a < 1$ (F1, F4, G1, G2, G3).

d) Multiplica cada una de las funciones del inciso a por -1. ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras con las gráficas de $f(x)$?

Se espera que el alumno reconozca que se modifica sólo el signo de la función $f(x)$ (F1, F4), más no su comportamiento.

Al multiplicar cada función $f(x)$ por -1, se refleja la gráfica de la función $f(x)$ con respecto al eje X (G1, G2, G3, F1, F4), es decir, para cada valor de la variable independiente, se obtiene su respectiva y con signo cambiado y no el valor, para cada punto en la función.

e) Determina dominio y rango de cada una

Después del análisis tanto visual como analítico, en todas las actividades anteriores, los alumnos deben de reconocer (F1, F4, G1) que en las funciones de esta actividad 3, el valor de la constante k (G2) es una asíntota horizontal en $y = k$ (G3) que modifica la forma de la función estirándola (F1, F4) y el valor de la constante h (G2), corresponde a una asíntota vertical en $x = h$ (G3) y modifica el comportamiento de todos los puntos de la función (F1, F4).

A continuación, en el siguiente capítulo, se presentan los resultados obtenidos del uso de estas actividades con los alumnos.

CAPITULO 5

RESULTADOS

5.1 Análisis de las respuestas de cada una de las actividades utilizando el modelo 3UV

PRACTICA 1

Esta práctica la resolvieron 26 alumnos pero como en las actividades hay más de un inciso, algunos tienen más de una respuesta.

Actividad #1

Usando el programa Graphmatica, grafica la función $f(x) = x$ y contesta las siguientes preguntas usando papel y lápiz:

a) ¿Es f una función lineal? ¿Cuáles son las características de una función lineal?

- Los alumnos logran distinguir a partir de la gráfica de la línea recta, la relación funcional (F1) y la variación conjunta entre ellas (F4) dada $f(x) = x$.
- 10 alumnos de 26 al momento de visualizar la recta usan signos externos como el grado de la función sin identificar la relación entre las variables (F1).

b) Encuentra la pendiente

- 20 alumnos de 26 identifican de la forma analítica $f(x) = x$, que la pendientes es $a = 1$ porque es el coeficiente numérico de la x y están analizando una función lineal (F4).
- 6 estudiantes de 26 contestaron que no tiene pendiente porque no ven un número diferente de 1 como coeficiente de la variable x . No identifican al parámetro a como número general (G2) por no aparecer explícitamente. Por lo que tampoco cumplen con reconocer la relación funcional entre las variables de la forma analítica, ni de la forma gráfica de la función lineal (F1) ni reconocen la variación conjunta (F4).

c) Calcula el valor de $f(x) = 0$ correspondiente a $x = 0$, localízalo en la gráfica; calcula el valor de la variable independiente x para el cual $f(x) = 0$, localízalo en la gráfica ¿qué puedes decir acerca de esos dos valores, qué representan?

- Ningún alumno tuvo problema para calcular $f(0)$, es decir determinar un valor para la variable dependiente a partir de un valor dado de la variable independiente (F2). Sin embargo, no distinguen la diferencia con la siguiente pregunta: para qué valor de x , $f(x) = 0$ (F3). 15 alumnos de 26 confunden la notación simbólica (G5), porque nuevamente se guían por signos externos. Cuando se pide calcule o determine $f(0)$ y $f(x) = 0$, los alumnos no identifican qué se está pidiendo y que representan valores diferentes, en el primero se trata de (F2) y en el segundo de (F3). En particular para esta función como la intersección es el punto $P(0, 0)$ ellos contestan que ya lo hicieron.
- La pregunta adicional en este inciso sobre localizar en la gráfica y determinar qué representa tiene el objetivo, precisamente, de que los alumnos distingan que no es lo mismo determinar el valor de la variable dependiente (F2) que el de la independiente (F3) y que reconozcan la correspondencia entre las variables (F1) de manera gráfica. Los alumnos se guían por signos externos y no dan muestra de comprensión. A pesar de la pregunta sólo se fijan en el comportamiento global de la gráfica, sin poner atención ni a las variables involucradas ni a la relación entre ellas.
- Al localizar el punto sobre la recta (F1) sólo 7 de 26 distinguen que el punto encontrado $P(0, 0)$ representa la ordenada al origen, es decir el valor numérico del parámetro b , porque no hacen la comparación con la regla general en la función lineal y por ello no logran identificar el valor específico del parámetro (G2).

d) Grafica las siguientes funciones: $f(x) = x + 2$; $g(x) = x - \frac{1}{4}$; $h(x) = x + \frac{1}{2}$, repite lo que hiciste en los incisos a – c. Compara tus resultados con los obtenidos en la función $f(x) = x$ ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?

- Después de graficar, logran identificar la relación lineal entre las variables F1 (gráfico).
- Los alumnos calculan el valor de la variable dependiente a partir del valor dado de la variable independiente $x = 0$ (F2). Sólo 10 alumnos de 26, calculan el valor de la variable independiente a partir del valor dado de la variable dependiente $y = 0$ (F3) esto demuestra la poca comprensión sobre la diferencia entre $f(0)$ y $f(x) = 0$ y lo que representa cada valor gráficamente (F1).

- Confunden la notación simbólica (G5) porque unos contestan que ya lo calcularon o que se pide lo mismo, debido a que hacen un análisis general distinguiendo únicamente signos externos sin tener comprensión de lo que esos puntos, con sus respectivas coordenadas representan.
- 23 de 26 alumnos contestaron que las gráficas se desplazan hacia arriba o hacia abajo, identificando el efecto del parámetro b (G1) sobre la función $f(x) = x$, y el efecto sobre el lado del desplazamiento según su signo (G1, G3).
- Identifican que el término constante de la función corresponde al punto en donde la gráfica corta al eje Y (ordenada al origen) (G1, G3) a diferencia de la respuesta del inciso anterior en la que 19 alumnos de 26 no identificaron la ordenada al origen, porque no aparece ningún coeficiente numérico sumando o restando (G1, G3).
- El desplazamiento sólo lo analizan en el punto de la ordenada y hacen referencia a eso. 18 de 26 no mencionan que toda la grafica se está desplazando paralelamente, es decir, que no comparan cualquier punto sobre la gráfica, sólo el de la ordenada sin distinguir que el desplazamiento es para cada punto sobre la recta (G1, F1) provocando $f(x) + b$.
- Sólo 7 alumnos de 26 contestan las preguntas de ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar? Y no porque no distingan la diferencia entre las funciones; la mayoría sólo indica que se desplaza hacia arriba o hacia abajo, sin especificar, como lo dice la pregunta, que la pendiente sigue siendo la misma e igual a uno por lo que el desplazamiento es paralelo y que se desplaza en el valor numérico de la ordenada para todos los puntos de la recta en un valor $f(x) + b$ (G1, G3).

e) ¿Qué pasa en general si sumas a $f(x)$ una constante b , es decir, qué puedes decir de la función $f(x) = ax + b$? ¿Qué tiene de particular el parámetro b con la gráfica de la función?

- Pueden interpretar al parámetro b como la representación de un término que puede tomar cualquier valor (G1, G2).
- La mayoría identifica sin problema que si a la ecuación le sumo un valor b , la gráfica de la función se desplaza de manera paralela b unidades hacia arriba si $b > 0$ y hacia abajo en b unidades si $b < 0$ (G1, G2, G3).
- Identifican que b es la ordenada al origen, es decir, el punto $P(0, b)$ en donde la gráfica de la recta corta al eje Y (F1, G2).

- Los alumnos no distinguen que el desplazamiento vertical es $f(x) + b$ para cada una de las coordenadas y de cada punto sobre la recta (G1, G3). El desplazamiento sólo lo relacionan básicamente con el desplazamiento de la ordenada (F1, G2), o no lo especifican de manera más clara, sólo ven lo general.

f) Grafica las siguientes funciones: $f(x) = 2x$; $f(x) = 5x$; $f(x) = (\frac{1}{2})x$; $f(x) = 10x$; $f(x) = (\frac{1}{6})x$, repite lo que hiciste en los incisos a – c, compara tus resultados con los obtenidos en la función $f(x) = x$ ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?

- después de visualizar cada recta los alumnos reconocen el patrón de comportamiento del parámetro a (G1, G3) comentando que lo que cambia es la inclinación de la recta.
- 10 alumnos de 26 no responden el inciso c, donde se pide que calculen F2 y F3 después de identificar el valor de una incógnita (I2) y que representan las intersecciones con los ejes (F1).
- 16 alumnos de 26 sólo contestan sobre el efecto del parámetro a en la gráfica de la recta (G1), analizan sólo lo visual, no calculan nada, tal vez porque lo visual les indica que la recta sigue en el origen y ese punto pertenece a todas. Al igual que en respuestas anteriores, se guían por signos externos, no muestran una buena comprensión sobre la relación funcional entre las variables y sobre la variación conjunta entre ellas (F1, F4).
- 16 alumnos de 26 identifican que el valor del parámetro b es igual a 0 y que por esa razón la gráfica de cada recta pasa por el origen (F1) y por tanto, no hay desplazamiento paralelo de la recta ni hacia arriba ni hacia abajo. Pero sólo 7 comentan qué es lo que no cambia.
- Al momento de poner sus comentarios, no hacen referencia a la comparación con la ecuación $f(x) = x$ como se pide en las instrucciones de este inciso en cada gráfica, sólo hacen un análisis global.

g) ¿Qué puedes decir que pasa en general si multiplicas a x por una constante a positiva, es decir, qué puedes decir de la función $f(x) = ax$?

- Logran deducir la regla general para el comportamiento del parámetro a (G3) y el efecto sobre la gráfica de la función lineal. (F1, F4).

- 23 alumnos de 26 especifican que a es la pendiente porque es el coeficiente numérico de la x a pesar de que no se usó la letra m , al distinguirlo de la regla general de la ecuación lineal $f(x) = ax + b$ (G1, G2) el valor del parámetro para cada recta (I2).
- 10 alumnos de 26 distinguen que dependiendo del valor numérico de a el efecto sobre la inclinación es mayor o menor (G1, G3, F4).
- Sólo 7 alumnos de 26 especifican que si la $a > 0$ (pendiente positiva), al aumentar la variable independiente x , la variable dependiente y también aumenta, es decir, distinguen el concepto del parámetro a que mide la relación entre las variables (F1, F4), en este caso, relación en el mismo sentido.
- Ninguno hace referencia al valor numérico de la respuesta de cambio en la variable y dado un cambio unitario en la variable x (F4, G2).

h) Repite el inciso f para las funciones: $f(x) = -x$, $f(x) = -(\frac{1}{4})x$, $f(x) = -3x$,
 $f(x) = -(\frac{1}{5})x$

- Al igual que en el inciso anterior todos contestan que se modifica la inclinación de la recta, pudieron reconocer el patrón de comportamiento del parámetro a (G1, G3).
- 16 alumnos de 26 distinguen y lo especifican, que al multiplicar por el parámetro a de signo negativo, la inclinación es contraria a la de los incisos anteriores (F1, G1).
- En este ejercicio sólo 2 alumnos hacen mención acerca del efecto que el valor numérico de la constante ejerce sobre la inclinación de la recta, los demás sólo mencionan que se modifica la inclinación pero no propiamente qué sucede con la magnitud (G1, G2, G3).
- Sólo 7 alumnos mencionan que si $a < 0$, el cambio en la variable dependiente y será en sentido inverso al cambio unitario en la variable independiente x (F1, F4, G1).
- 10 alumnos de 26 no calculan tampoco el inciso c, donde se pide que calculen un valor para la variable dependiente a partir de un valor particular de la variable independiente (F2) Ni tampoco calculan el valor de la variable independiente a partir de un valor particular de la variable dependiente (F3) después de identificar el valor de una incógnita (I4) y qué representan las intersecciones con los ejes (F1).
- Sólo dos alumnos mencionan que la recta permanece en el origen porque su ordenada es igual a cero, los demás no lo mencionan. No se podría asegurar que no lo saben, más bien se fijan únicamente en el efecto en sí de la pendiente de manera general, sin analizar el efecto del parámetro b sobre la recta (G1) como lo indica el ejercicio.

i) ¿Qué puedes decir que pasa en general si multiplicas a x por una constante a negativa, es decir, qué puedes decir de la función $f(x) = ax$?

- Todos los alumnos contestaron que se modifica la inclinación de la recta, es decir, después de reconocer en el inciso anterior un patrón en el comportamiento de las rectas provocado por el parámetro a (G1), pueden pasar a deducir en forma general, el efecto del parámetro a (G3, F4) con respecto a la inclinación.
- Al igual que en incisos anteriores, logran interpretar el efecto del parámetro a para cualquier valor (G2).
- 7 alumnos de 26 especificaron sobre el sentido de la inclinación, es decir que si la variable independiente aumenta, la variable dependiente disminuye (F1, F4).
- Sólo 2 de 26 alumnos relacionan el valor numérico de a con el efecto sobre la inclinación (F1) y la variación conjunta (F4) entre parámetro-variable.

j) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en los incisos anteriores?

- 18 alumnos de 26 contestaron que el dominio y el rango son todos los reales, logrando identificar la relación entre las variables (F1) y su variación conjunta (F4,).
- 8 alumnos sólo contestaron sobre el dominio y no sobre el rango, no pudieron identificar, ni de manera visual la relación entre x y y (F1, F2, F4).

Actividad #2

Usando el programa Graphmatica, grafica las siguientes funciones: $f(x) = 3x + 2$; $f(x) = -(\frac{1}{2})x + 1$; $f(x) = -4x - (\frac{3}{4})$; $f(x) = 2x + \frac{3}{4}$; $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})$ y contesta las siguientes preguntas usando papel y lápiz:

Se espera que después de resolver la actividad #1, los alumnos puedan responder la actividad # 2 de manera más fácil y que la reflexión sobre lo que han hecho les ayude a lograr una mayor comprensión sobre el papel de los parámetros a y b .

a) ¿Es f una función lineal? Justifica tu respuesta

- Todos contestaron que sí es una función lineal porque su gráfica es una línea recta por lo que reconocen la relación entre las variables (F1) de manera gráfica.

- 10 alumnos de 26 mencionan que es lineal porque el grado de la x es uno, al momento de visualizar la recta usan signos externos como el grado de la función sin identificar la relación entre las variables (F1).

b) Encuentra la pendiente

- Todos dieron bien el valor de la pendiente de cada recta al determinar que es el coeficiente numérico de x al compararlo con el valor de la pendiente de la regla general (G1, G2, G3).
- En la última recta del inciso, cinco alumnos contestaron de manera directa, y los demás, por la forma analítica en la que está representada la recta, no distinguieron el valor de la pendiente de manera visual, por lo que para responder al valor tuvieron que reconocer la presencia de un valor desconocido (I1) usando un procedimiento adecuado para encontrarlo (I4).

c) Calcula el valor de $f(x)$ correspondiente a $x = 0$, localízalo en la gráfica; calcula el valor de la variable independiente x para el cual $f(x) = 0$, localízalo en la gráfica ¿qué puedes decir acerca de esos dos puntos, qué representan?

- Todos encontraron el valor correcto de la ordenada $f(0)$ (F2), en donde 10 de 26 lo hicieron de manera directa sólo al ver la función identificando el valor del parámetro b (G2) y otros sustituyendo el valor de $x = 0$ y haciendo la operación algebraica (I1, I4).
- Los que contestan la instrucción de localizarlo en la gráfica comentan que corresponde al valor de la ordenada al origen (G1, G2, G3).
- Sólo 10 alumnos de 26 trabajaron buscando el valor de la x en donde $f(x) = 0$, haciendo las operaciones respectivas (F3, I1, I4) y observando que correspondía a la intersección con el eje X (F1) pocos distinguen que se pide un valor para la variable independiente a partir de un valor dado para la variable dependiente (F3), identificando la presencia de algo desconocido (I1) que tienen que calcular (I4).
- Confunden la notación simbólica (G5) porque unos contestan que ya lo calcularon o que se pide lo mismo, debido a que hacen un análisis general distinguiendo únicamente signos externos sin tener comprensión de lo que esos puntos, con sus respectivas coordenadas representan.
- Al resolver dudas de la práctica en una discusión en grupo se hizo evidente que para muchos alumnos la notación produce confusión. 15 alumnos de 26 pensaban que

$f(x) = 0$ era lo mismo que $f(0)$ y otros ni siquiera entendían qué representa o qué significa $f(x) = 0$. Mucho menos eran capaces de relacionar ambas notaciones con las intersecciones con los ejes, es decir, todas estas cuestiones les causan muchas dificultades (G2, F1, F3).

d) Compara tus resultados con los obtenidos en la actividad anterior para la función $f(x) = x$ y describe ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?

- No son nada específicos en sus respuestas al igual que los incisos anteriores, sólo analizan en forma global y se fijan en signos externos (G1).
- 23 alumnos de 26 distinguen el efecto sobre la inclinación (G1, G3, F4) especificando si es inclinación positiva o negativa, pero no sobre el efecto del valor de la pendiente sobre la inclinación (G1, G2, F1).
- Sólo siete alumnos de 26 hacen referencia a que si la x aumenta la y aumenta o disminuye (dependiendo del signo de la pendiente) en el valor numérico de la pendiente (F1, F4)
- 23 alumnos de 26 pudieron distinguir que si la ordenada al origen en la función tiene un valor, es decir, diferente de cero (porque lo veían) dicho valor corresponde al punto en donde la recta debe de cortar al eje Y (G1, G2, G3).
- Analizan cada recta de manera individual, pero sin estar haciendo referencia o comparación con la recta $y = x$ para poder contestar las dos preguntas que se formulan en este inciso y generalizar sobre el efecto de los parámetros.

e) ¿qué puedes decir de la función $f(x) = ax + b$? ¿Qué representan los parámetros a y b ?

- Después de analizar varios ejercicios similares, reconocen sin problema el patrón de comportamiento de los parámetros a y b (G1) y deducen las reglas sobre dicho comportamiento para cada parámetro (G3).
- Todos pudieron contestar que a es la pendiente de la recta, que representa la inclinación (G1, G2, G3), pero sólo 7 de los 26 hacen referencia en sus efectos sobre el cambio en la función dependiendo de su signo y de su valor (F1, F4).
- Todos contestaron que b es donde la recta corta al eje Y (F1) donde 18 de 26 usan el nombre específico de ordenada al origen. También 23 de 26 distinguen sin problema

(G1, G3), que si se suma b la gráfica corta por encima del eje X y si se resta b la recta corta por debajo (F1).

- En el análisis del parámetro b como ordenada al origen, consideran el punto $P(0, b)$ pero no parecen entender el efecto de desplazamiento vertical paralelo de la recta hacia arriba o hacia abajo, provocado por el valor del parámetro b , sin reconocer que dicho desplazamiento es para cada punto $(F1, F4)$ obteniendo como nueva coordenada $f(x) + b$.

f) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones anteriores?

- Respondieron lo mismo que el inciso j de la actividad anterior: 18 alumnos de los 26 contestaron que el dominio y el rango son todos los reales, logrando identificar la relación entre las variables (F1, F4, F2, F5).
- Sólo 8 de los 26 contestaron la parte correspondiente al dominio y no la del rango. No pudieron identificar, ni de manera visual la relación entre x y y (F1, F2, F4).

Actividad #3

a) Usando papel y lápiz, construye una tabla en la que se muestren distintos valores de la variable independiente x y los valores correspondientes para la variable dependiente $f(x)$, si $f(x) = 2x - 3$. No olvides incluir valores negativos y el cero para x . En papel cuadriculado esboza la gráfica de $f(x)$ con los datos de la tabla.

- Todos los 26 alumnos resolvieron el ejercicio de manera correcta (F2)
- sólo 5 alumnos sustituyen números racionales, sólo usan enteros, a pesar de que en la actividad anterior reconocen que el dominio de la función son todos los reales (F1). Tal vez sólo usan enteros para facilitar las operaciones.

b) Usando el programa de Graphmatica, traza la gráfica de $f(x) = 2x - 3$ ¿qué forma tiene la gráfica de $f(x)$, se parece a la que habías dibujado en papel? A partir de la gráfica encuentra tres puntos que no estén en tu tabla y agrégalos a la misma (coloca el apuntador sobre la gráfica para lograrlo)

- Al trazar la gráfica los alumnos obtienen una línea recta, comprobando que esa gráfica es la que corresponde a la función lineal $f(x) = 2x - 3$ (F1, F4).

c) Usando Graphmatica, determina si los siguientes pares de valores pertenecen a la función:

1. (0.5, -2)
2. (3, 7)
3. (-0.628, 4.3)
4. (-0.75, -4.5)
5. (0, 0)
6. (0.125, -2.75)
7. (-2/3, -13/3)
8. (1.15, -3.75)
9. (1/4, -3/2)
10. (π , 3.2832)
11. (5/7, -4/3)
12. (0, 3)
13. (3.525, 4.05)
14. (0, -3)
15. (-3/2, 0)
16. ($\sqrt{2}$, -0.1716)

- Los alumnos no tuvieron ningún problema para resolver el ejercicio y comprobar si el valor obtenido para la variable dependiente (F2) pertenece o no a la función $f(x)$ (F1).

d) Calcula las intersecciones de la recta con los ejes coordenados

- Los alumnos no tuvieron problema para calcular los valores que corresponden a las intersecciones con los ejes (F2 y F3). A diferencia de la actividad anterior, en este inciso calcularon las intersecciones porque así se pedía en la pregunta y no tuvieron problema de interpretar la notación simbólica como en las actividades anteriores donde se pedía lo mismo (G5).
- Detectan tanto analítica como gráficamente la relación entre las variables (F1).

e) ¿Cuál es el dominio y el rango de la función?

- Todos contestaron que el dominio y el rango son todos los reales, logrando identificar la relación entre las variables (F1, F4, F2).
- 14 alumnos de 26 contestaron sobre el dominio y no sobre el rango; no pudieron identificar, ni de manera visual la relación entre x y y (F1, F4, F2).

Actividad #4

Traza las siguientes funciones y determina: su pendiente, la intersección con los ejes X y Y, los intervalos donde es positiva y donde es negativa, determina si es una función creciente o decreciente y comenta cuál es la relación entre la pendiente de una recta y su comportamiento (creciente o decreciente)

a) $y = -3x + 5$

b) $y = (\frac{1}{2})x + 2$

c) $y = -(\frac{2}{3})x - 2$

d) $y = -(\frac{3}{4})x - 2$

- Los alumnos identifican de cada forma analítica $f(x)$, que la pendiente es el coeficiente numérico de la x y que corresponde al parámetro a de la función general $f(x) = ax + b$ (G1, G2, G3) y están analizando una función lineal (F1, F4).
- Los alumnos tampoco tuvieron problema para calcular los valores que corresponden a las intersecciones con los ejes (F2, F3, I1, I4).
- Detectan tanto analítica como gráficamente la relación entre las variables (F1, F4).
- Los alumnos encuentran sin problema los intervalos correspondientes a $f(x) > 0$ y a $f(x) < 0$ (F1, F5) sólo al visualizar la recta.
- 10 alumnos de 26 cometen errores al simbolizar los intervalos; y 5 alumnos de 26 se equivocan también en la notación de desigualdad (G5) al no usar de manera correcta el sentido del símbolo de desigualdad.
- Los alumnos contestan la pregunta analizando sólo el signo de la pendiente, logrando identificar la relación entre las variables (F1, F4, F5) tanto gráfica como analíticamente.

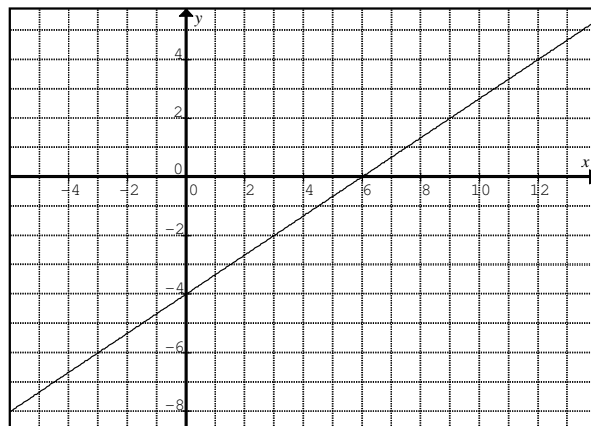
PRACTICA 2

Esta práctica la resolvieron 25 alumnos pero como en las actividades hay más de un inciso, algunos tienen más de una respuesta.

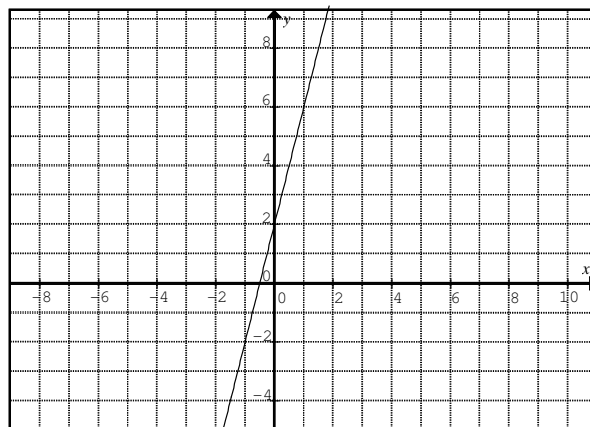
Actividad #1

A.1.1 Usando papel y lápiz, calcula la ecuación de cada una de las rectas y con palabras explica qué criterio usaste.

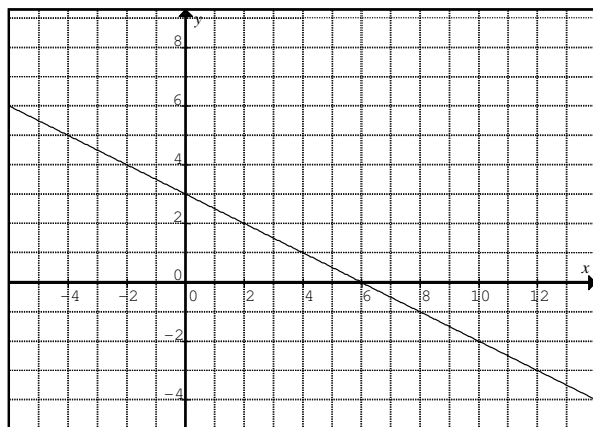
a)



b)



c)



Para esta actividad puede haber más de una respuesta por alumno ya que son tres gráficas diferentes

- 14 alumnos de 25 calculan sin problema el parámetro a que corresponde a la pendiente usando la fórmula correspondiente, ya que tienen de información dos puntos que corresponden a la intersección con cada uno de los ejes (F1, I1, I4).
- 5 alumnos de 25 determinan el valor de la pendiente a utilizando el criterio de elevación entre recorrido (F1, F4, F5, G1) sólo contando el desplazamiento tanto en la variable x como en la variable y .
- Un alumno se equivoca en el cálculo algebraico de la pendiente al no poder sustituir de manera adecuada los puntos dados en la definición de la pendiente (I5).
- 12 alumnos de 25 determinan el valor del parámetro b , sin necesidad de realizar operaciones algebraicas ya que lo identifican al observar dónde la gráfica de la línea recta corta al eje Y (F1, I2, G1).
- 16 alumnos de 25 pueden, con los valores respectivos de la pendiente y de la ordenada al origen que ya calcularon, simbolizar la relación funcional de cada recta (F6) en el caso en el que la pendiente es un número entero como el de la segunda recta.
- 9 alumnos de 25 realizan las operaciones necesarias para calcular la ecuación de la línea recta con la fórmula de pendiente ordenada al origen o la de punto pendiente (I1, I4).

- 21 alumnos de 25 cometen errores cuando deben simbolizar la ecuación de la recta y el valor encontrado para la pendiente es un número fraccionario (F6). Escriben la variable x en el denominador porque no usan paréntesis para el coeficiente numérico.
- 4 alumnos de 25 no especificaron cómo calcularon sus parámetros y comenten errores en alguno de ellos y por lo tanto no simbolizan correctamente la ecuación de la recta (F6).
- 3 alumnos de 25 no especificaron cómo calcularon los parámetros como se pide en la instrucción.
- 3 alumnos de 25 no dieron las ecuaciones de cada recta como se pide.

A.1.2 Grafica con Graphmatica cada una de las rectas que calculaste y compáralas con las gráficas dadas ¿resultó la misma? En caso de que tu respuesta sea negativa ¿en qué no coinciden y porqué? ¿en qué te equivocaste?

- 6 alumnos de 25 graficaron las rectas de este inciso como se pidió y comentan que comprobaron con las ecuaciones encontradas (F1, F4, F6).
- La mayoría de los alumnos no acostumbran validar, en esta actividad 16 alumnos de 25 no agregan las gráficas ni comentan si graficaron para poder comprobar que sus rectas son las correctas (F1, F4).
- tres alumnos tuvieron error en alguna de las gráficas que encontraron y al graficar no percibieron su error (F1).

Actividad #2

Realiza cada una de las actividades de los siguientes incisos usando papel y lápiz y después grafica cada ejercicio, usando Graphmatica para comprobar tu resultado. Explica brevemente con tus palabras tu razonamiento para obtener el resultado.

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-1, -3) y B(5, 3)

- Todos los 25 alumnos calcularon sin problema la pendiente y la ecuación de la línea recta usando las fórmulas correspondientes (m , b) al reconocer de los 2 puntos dados (G1) la relación entre las variables (F1, F4)

- Ningún alumno comprueba si la recta calculada es la correcta (I3) al sustituir uno de los puntos.
- Sólo 2 alumnos de 25 mencionaron que comprobaron con la gráfica (F1).
- 13 alumnos de 25 calculan la recta que se pide pero no explican lo que hicieron como se pide en las instrucciones.

b) Si desplazas la gráfica de la línea recta verticalmente en forma paralela tres unidades hacia arriba ¿cuál será la ecuación de dicha recta? ¿Pasa por el punto P(3, 4)?

- 24 alumnos de 25 encuentran la ecuación de la recta desplazada, sin necesidad de hacer ningún procedimiento algebraico, sumando tres unidades al término constante de la recta encontrada en el inciso anterior, reconociendo que dicho desplazamiento tiene efecto sobre el parámetro b de la ordenada al origen en la ecuación (F1, G1, G4) y sobre cada punto de la recta desplazada de manera paralela.
- 17 alumnos de 25 sustituyen el valor de la coordenada de la variable independiente x en la ecuación de la recta obtenida para obtener el valor de la variable dependiente y (F2, I3) para comprobar si la recta pasa por el punto P.
- 7 alumnos de 25 no comprueban si la recta pasa por el punto P como se pide (F2, I3).
- Sólo un alumno de 25 no respondió nada.

c) Encuentra la ecuación de una recta que tenga como pendiente $m = 3$ y que cruce la gráfica de la recta del inciso b. ¿Cuál es la ecuación de la familia de rectas que tienen pendiente tres?

- En la forma analítica de la ecuación de la línea recta, los 25 alumnos no tienen ningún problema en sustituir el valor de la pendiente $a = 3$ (I2, I3) como coeficiente numérico de la variable x .
- 9 alumnos de 25 toma el punto de la ordenada al origen de la recta anterior B(0, 1) como el punto que pertenece a la nueva recta que deben de encontrar (F1) fijándose sólo en la ordenada al origen b y no distinguiendo que una recta puede cortar en cualquier punto (G2). Pueden simbolizar la ecuación de la nueva recta con el valor conocido para los parámetros de la pendiente $a = 3$ y de la ordenada $b = 1$ sin necesidad de realizar operaciones algebraicas (F1, F6, I2).

- Sólo 3 alumnos de 25 utilizaron el punto conocido $P(3,4)$ por donde pasaba también la recta anterior para calcular la ecuación de la recta que se pide haciendo un procedimiento de álgebra (I1, I4).
- 9 alumnos de 25 mencionan que sólo basta con la pendiente $a = 3$ ya que la ordenada al origen b puede tomar cualquier valor (G1, G2) y ya con eso las rectas se van a cruzar porque tienen diferente inclinación (F1, F4), 6 de estos alumnos simbolizan esta ecuación con dichas condiciones (F6) como familia de rectas.
- 4 alumnos obtienen la ecuación de la nueva recta usando un valor particular (G2, F6) para el parámetro de la ordenada al origen, distinto al de la recta del inciso anterior y además no usan el punto P, asignándole un valor arbitrario (G2).

d) Encuentra la ecuación de la recta que pase por los puntos $A(-3, -6)$ y $B(0, 3)$ ¿tienen algo en común ésta recta y la del inciso c? Justifica tu respuesta

- 18 alumnos de 25 determinan el valor de la pendiente mediante un procedimiento algebraico (I1, I4) y no mediante el criterio gráfico de elevación entre recorrido (F1, F4).
- 18 alumnos de 25 ya con el valor del parámetro de la pendiente a que encontraron, y uno de los puntos dados calculan la ecuación de la recta (I1, I4) mediante un procedimiento sencillo.
- 7 alumnos de 25 distinguen que la recta obtenida tiene pendiente $a = 3$ y por tanto, al tener la misma pendiente numérica, las rectas son paralelas (G1, G2).
- 4 alumnos de 25 no contestan la pregunta acerca de qué tienen en común ambas rectas, ni tampoco grafican para comparar de manera visual.
- Ninguno comprueba que la recta obtenida es la correcta sustituyendo uno de los puntos dados A o B (I3).
- 9 alumnos de 25 reconocen que la recta que encontraron y la del inciso anterior tienen la misma pendiente (G1, G2) pero sin mencionar que esto implica que ambas rectas son paralelas (G1, G3).
- 4 alumnos de 25 tienen error en su procedimiento algebraico (I4) y calculan mal alguno de los parámetros y por tanto la recta.
- 3 alumnos sólo calcularon la pendiente (I1, I4) reconocen que son paralelas (G1, G3) por tener pendientes iguales pero no calculan la recta como se pide (I4, F6).

e) Da la ecuación de dos rectas que sean perpendiculares entre sí pero que pasen por el punto $P(-2, 3)$ ¿qué criterio usarás? En términos generales, da la ecuación de ambas rectas perpendiculares y que pasen por ese punto

- 13 alumnos de 25 toman un valor arbitrario para una de las pendientes y determinan el valor de la pendiente de la perpendicular (G1, G2, G3).
- 13 alumnos de 25 con ambas pendientes y el punto dado $P(-2, 3)$ calculan ambas ecuaciones de rectas perpendiculares (I1, I4).
- 7 alumnos sólo determinaron las pendientes para dos rectas perpendiculares (G1, G2, G3) y tomaron de manera arbitraria un valor para la ordenada (G2), sin considerar que las rectas debían pasar por el punto $P(-2,3)$ por lo que el valor de la ordenada al origen no puede ser cualquier valor (G2).
- 5 alumnos no hicieron nada y no explican porqué.
- 15 alumnos mencionan que no entienden la instrucción de encuentre la familia de rectas que cumplen una condición, no supieron qué hacer. Con este ejercicio se demuestra que estos alumnos no pueden generalizar a una familia de funciones (G1, G2 G3, F6).

f) Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $3x + y - 2 = 0$ y que pasa por el punto $P(-6, -1)$ ¿pasa ésta recta por el punto $Q(3, 2)$?

- Los 25 alumnos encuentran la pendiente de la recta que se da como referencia de recta perpendicular (I2, G4) y determinan correctamente el valor correspondiente para la pendiente de la recta perpendicular (I2, G4, G5).
- Los 25 alumnos encuentran sin problema la ecuación de la recta con las condiciones dadas con el valor del punto P y la pendiente (I1, I4).
- Ningún alumno comprueba que la recta encontrada es la correcta sustituyendo el punto $P(-6,-1)$ por el que pasa (I3).
- 16 alumnos de 25 comprueban que la recta encontrada pasa por el punto $Q(3, 2)$ como se pide en la pregunta (I3).
- 9 alumnos de 25 no comprueban que la recta pase por el punto $Q(3, 2)$ (I3), porque no siguen las instrucciones que se piden y no acostumbran validar.

g) Desplaza la recta del inciso f cuatro unidades verticalmente, de manera paralela hacia abajo ¿cuál es la ecuación de ésta nueva recta?

- 23 alumnos de 25 sin necesidad de hacer ningún cálculo, encuentran la ecuación de la recta desplazada, restando cuatro unidades al término constante de la recta encontrada en el inciso anterior, reconociendo que dicho desplazamiento tiene efecto sobre el parámetro b de la ordenada al origen (F1, G1, G2) en la ecuación desplazando la recta completa de manera paralela.
- 2 alumnos de 25 tienen error en sus procedimientos algebraicos y obtienen mal alguno de los parámetros (I4).

h) Encuentra la ecuación de la recta que pase por los puntos A(-1, 5) y B (4, 5) y da la ecuación de una recta que sea perpendicular a ella.

- 15 alumnos de 25 no trazan en el plano los puntos A y B reconociendo el mismo valor para la variable dependiente (F1, G1, G3) y hacen procedimiento algebraico para determinar la pendiente de la recta (I1, I4) y después con ésta y uno de los puntos, la ecuación de la recta horizontal (I4).
- 5 alumnos de 25 reconocen que ambos puntos tienen el mismo valor para la coordenada de la variable dependiente (G1) y simbolizan la ecuación de la recta sin problema (G3, F6).
- 5 alumnos de 25 no distinguen que la recta con pendiente igual a cero es diferente a una recta que no tiene pendiente o tiene pendiente infinita (pendiente no definida) (F1, G1, G2) por lo que al momento de simbolizar la ecuación de la recta perpendicular y que corresponde a la ecuación de una recta vertical, se equivocan.
- 11 alumnos de 25 si identifican que una recta perpendicular a una recta horizontal, no tiene pendiente y es una recta vertical de la forma $x = k$ y la pueden simbolizar (G1, G2, F6).
- 4 alumnos de 25 no dan la ecuación de la recta perpendicular que se pide (G1, F6) y no mencionan el porqué.
- 1 alumno de 25 reconoce (G1) que la recta perpendicular a la recta $y = 5$, que tiene pendiente cero, es perpendicular al eje Y pero no da la ecuación porque no la puede simbolizar (G3, F6).
- 2 alumnos de 25 determinan la recta $y = 5$ mencionando que dicha recta no tiene pendiente (G1, G3) y al simbolizar la ecuación de la recta perpendicular dan $y = 2$ (G1, G3, F6).

- 2 alumnos de 25 simbolizan la ecuación de la recta $y = b$ (F6) pero que no pasa por los puntos dados como se indica y la ecuación de la recta perpendicular la simbolizan identificando su forma analítica (G1, G3, F6).

i) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen y no tiene pendiente

- 2 alumnos de 25 presentan confusión con la expresión “no tiene pendiente”, la confunden con “tiene pendiente cero” y escriben como ecuación de la recta vertical que se pide $y = 0$ (G1, G3, F6).
- 18 alumnos de 25 escriben sin problema la ecuación $x = 0$, distinguiendo que corresponde a la ecuación de una recta vertical cuya pendiente no está definida (F1, G4, F6)
- 2 alumnos de 25 escribieron $x = 0$ y $y = 0$ ya que ambas pasan por el origen, sin reconocer que la condición que se pide es para una recta que no tiene pendiente (F1, G1, G3, F6)
- 1 alumno escribió $y = x$ justificando que si el valor para la $x = 0$ el valor de la $y = 0$
- 1 alumno de 25 identifica que una recta vertical no tiene pendiente (G1, G3) pero no da la ecuación de la recta porque no la puede simbolizar (F6).
- 1 alumno de 25 menciona que si la ecuación de la recta no tiene pendiente entonces las y 's son cero cometiendo también el error al reconocer la pendiente (G1, G3) y sin poder tampoco simbolizar la ecuación de la recta (F6).

j) Encuentra la ecuación de una recta que sea paralela a la recta del inciso i, pero que pase por el punto P(4, -1)

- 3 alumnos de 25 presentaron la misma confusión que los dos incisos anteriores con respecto al concepto de pendiente (G1, G3) escribiendo la recta incorrecta $y = -1$ (F6).
- 16 alumnos de 25 si pueden simbolizar de manera correcta la ecuación de la recta vertical reconociendo que es paralela al eje Y, que pasa por el punto P(4,-1) (F1, G1, G4, F6).
- 1 alumno de 25 reconoce que la pendiente de la recta vertical es infinita (G1, G3) pero no puede simbolizar la ecuación (F6).
- 2 alumnos de 25 no dan ninguna ecuación (F6).

- 3 alumnos de 25 reconocen que es una recta que no tiene pendiente y mencionan con error que la ordenada debe de ser igual a 4, sin distinguir que una recta vertical no corta al eje Y (G1, G3).

k) Da la familia de rectas que pasen por el punto P(4, -1)

- 12 alumnos de 25 no hicieron nada y en la discusión en clase comentaron que tenían dudas; de esta discusión se puede concluir que estos alumnos no son capaces de generalizar (G1, G3) ni de simbolizar (F6).
- 4 alumnos de 25 dan la ecuación $x = 4$, sin distinguir que sólo es un caso particular y no general (G1, G2, G3, F6).
- Sólo un alumno de 25 pudo simbolizar la ecuación en forma generalizada (G1, G3, F6).
- 8 alumnos de 25 mencionan que no entienden qué se pide con “familia de rectas” (G1, G3), se observa en este caso que estos alumnos tampoco son capaces de generalizar (G2) ni de simbolizar (F6).

l) Encuentra la familia de rectas que tienen la misma pendiente que la recta del inciso f. Explica brevemente tu respuesta

- 7 alumnos de 25 mencionan que no entendieron lo que se pide, nuevamente no pueden generalizar una familia de rectas (G1, G2, G3) ni simbolizarla (F6).
- 10 alumnos de 25 explican que la recta debe tener la misma pendiente a y que la ordenada al origen b puede tomar cualquier valor (G1, G2, G3) pero no lo pueden simbolizar (F6).
- 7 alumnos de 25 reconocen que la pendiente a es la misma, que la ordenada al origen b puede tomar cualquier valor y además, pueden simbolizarla (G1, G2, G3, F6).
- 1 alumno de 25 menciona que la ordenada al origen puede ser cualquier valor (G1, G2, G3) pero sin pendiente (G2).

Actividad #3

En cada uno de los siguientes incisos, encuentra la ecuación de una línea recta con las condiciones que se piden, gráficolas para comprobar tú resultado ¿Quién es la pendiente y la ordenada al origen de cada una?

a) Que pase por los cuadrantes I, II y IV

- 15 alumnos de 25 pueden simbolizar (F6) la ecuación de la recta (F1, F4) dando valor particular para el parámetro de la pendiente y de la ordenada al origen (G1, I2, G3).
- 7 alumnos de 25 simbolizaron la ecuación de la recta (F1, F4, F6) con un ejemplo particular, identificando y generalizando que el signo que debe tener el parámetro a de la pendiente tiene que ser negativo y el de la ordenada al origen b debe de ser positivo (G1, G2, G3). Cuatro alumnos de éstos, escriben pendiente menor o igual a cero, no distinguiendo la desigualdad estricta y lo que ésta implica gráficamente (G1, G2).
- 1 alumno de 25 pudo simbolizar (F6) la ecuación de la recta reconociendo que el signo de la pendiente tiene que ser negativo pero no especificó el signo de la ordenada al origen (G1, G3) como se pregunta.
- 2 alumnos de 25 tuvieron un error en reconocer el signo de la pendiente (F1, G1, G3) por lo que simbolizan incorrectamente la ecuación de la recta (F6).
- 14 alumnos de 25 especifican cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de la ecuación de la recta que escribieron (G1, G2).
- 11 alumnos de 25 no especifican, como se pregunta, cuál es el valor de la pendiente y cuál el valor de la ordenada al origen de la recta que escribieron (G1, I2) pero no especifican el porqué.

b) Que pase por los cuadrantes I y III

- 19 alumnos de 25 pueden simbolizar (F6) la ecuación de la recta dando valores particulares para el parámetro de la pendiente y para el de la ordenada al origen (I2, G2) una vez que identificaron su signo (G1, G3).
- 5 alumnos de 25 simbolizan (F6) la ecuación de la recta con un ejemplo particular (I2, G2), identificando y generalizando que el signo que debe tener el parámetro a de la pendiente debe de ser positivo y el de la ordenada al origen b debe de ser cero (G1, G3).
- 1 alumno de 25 puede simbolizar (F6) la ecuación de la recta dando valores particulares para la pendiente y para la ordenada al origen (G1, G2, G3) pero al especificar cada uno, sólo menciona que el signo del parámetro a debe de ser positivo y no menciona nada de la ordenada ya que como b es cero, no escriben nada al simbolizarlo, no lo especifican (G1, G2, G3).

- 13 alumnos de 25 especifican cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de la ecuación de la recta que escribieron (G1, G2) como se indica en la pregunta.
- 9 alumnos de 25 no especifican, como se pregunta, cuál es el valor de la pendiente y cuál el valor de la ordenada al origen de la recta que escribieron (G1, G2) pero no especifican el porqué.
- 2 alumnos de 25 especifican que la ordenada al origen debe de ser cero (G1, G2) y no especifican el valor de la pendiente, porque al simbolizar la recta y escribir $y = x$ no distinguen que el coeficiente es uno (G2).

c) Que pase por los cuadrantes II y III

- 15 alumnos de 25 pueden simbolizar (F6) la ecuación de la recta dando un ejemplo particular de la forma $x = k$ identificando que k debe de ser negativo (G1, G2, G3).
- 1 alumno de 25 presenta error al simbolizar (F6) la ecuación de una recta vertical por la ecuación de una recta horizontal (G1, G3).
- 5 alumnos de 25 pueden simbolizar (F6) la ecuación de la recta vertical dando un ejemplo particular (G2) especificando de forma general, que la recta no tiene pendiente ni ordenada al origen (G1, G3).
- 1 alumno de 25 puede simbolizar (F6) la ecuación de la recta vertical dando un ejemplo particular (G2) y después generalizando la regla para la ecuación de la recta vertical como $x = k$ sin condicionar a que k sea negativo (G1, G3).
- 8 alumnos de 25 especifican, de la ecuación que simbolizan como ejemplo particular, (G2, F6) que dicha recta no tiene pendiente (ó pendiente infinita) ni ordenada al origen (G1, G3).
- 6 alumnos de 26 no especifican nada sobre los parámetros de la pendiente y de la ordenada de la recta que dan como ejemplo (G1, G3).
- 1 alumno de 25 simboliza la ecuación particular de la recta vertical como $x = -5$ (F6) pero menciona que la pendiente es igual a cero, sin distinguir su error (G2) y que la ordenada al origen es -5.
- 1 alumno de 25 simboliza la ecuación particular de la recta vertical como $x = -2$ (F6) y menciona, con error, que la ordenada al origen es -2 (G2) y no especifica nada de la pendiente (G1, G3).
- 2 alumnos de 25 simbolizan la ecuación particular de la recta vertical (F6) pero especificando, con error, que la pendiente es igual a cero (G1, G2, G3).

d) Que pase por los cuadrantes II, III y IV

- 17 alumnos de 25 pueden simbolizar (F6) la ecuación de la recta (F1, F4) dando valor particular para el parámetro de la pendiente y de la ordenada al origen (G1, G2, G3).
- 5 alumnos de 25 simbolizaron la ecuación de la recta (F1, F4, F6) con un ejemplo particular, identificando y generalizando que el signo que debe tener el parámetro a de la pendiente tiene que ser negativo y el de la ordenada al origen b también debe de ser negativo (G1, G2, G3).
- 1 alumno de 25 puede simbolizar la ecuación de la recta (F1, F4, F6) dando un ejemplo particular (G2) especificando de forma general que la pendiente tiene que ser igual a -1 como usó en su ejemplo (G2) y sin especificar nada sobre la ordenada al origen (G1, G2).
- 2 alumnos de 25 simbolizaron la ecuación de la recta (F1, F4, F6) con un ejemplo particular (G2) especificando el valor de la ordenada al origen que ponen como ejemplo (G2) pero no el de la pendiente que usaron $a = -1$, tal vez por el valor del coeficiente (G1).
- 12 alumnos de 25 especifican cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de la ecuación de la recta que escribieron (G1, G2).
- 10 alumnos de 25 no especifican, como se pregunta, cuál es el valor de la pendiente y cuál el valor de la ordenada al origen de la recta que escribieron (G1, G2) pero no especifican el porqué.

e) Que pase por los cuatro cuadrantes

- 20 alumnos de 25 reconocen (G1, G3) que ninguna curva puede pasar por los cuatro cuadrantes al mismo tiempo.
- 1 alumno de 25 escribió la ecuación $y = 0$ como la ecuación que pasa por los cuatro cuadrantes (F1, G1).
- 2 alumnos de 25 escribieron $x = 0$ y $y = 0$ como si las ecuaciones que corresponden a ambos ejes, pasaran por los cuatro cuadrantes a la vez (F1, G1). Mencionan también que esto es posible a menos que no sean rectas.
- 1 alumno de 25 reconoce que sólo que fuera un círculo (F1, G1).
- 1 alumno de 25 no contestó nada.

f) Que pase por los cuadrantes I y II

- 15 alumnos de 25 pueden simbolizar (F6) la ecuación de la recta (F1, F4) dando valor particular para el parámetro de la pendiente y de la ordenada al origen (G1, G2, G3).
- 5 alumnos de 25 simbolizaron la ecuación de la recta (F1, F4, F6) con un ejemplo particular, identificando y generalizando que la pendiente debe de ser cero y la ordenada al origen b debe de ser positiva o cero (G1, G2, G3), sin que distingan que la desigualdad debe de ser estricta, es decir, que la ordenada al origen no puede ser cero, o no pasaría por los cuadrantes que se piden.
- 4 alumnos de 25 pueden simbolizar (F1, F4, F6) la ecuación de la recta dando un ejemplo particular (G2) identificando que la ordenada al origen debe de ser positiva (G1, G3) pero no especifican nada sobre la pendiente (G1, G3).
- 1 alumno de 25 puede simbolizar (F1, F4, F6) la ecuación de la recta dando un ejemplo particular (G2) identificando que la pendiente debe de ser cero (G1, G3) pero no especifican nada sobre la ordenada al origen (G1, G3).
- 10 alumnos de 25 especifican cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de la ecuación de la recta que escribieron (G1, G2).
- 10 alumnos de 25 no especifican, como se pregunta, cuál es el valor de la pendiente y cuál el valor de la ordenada al origen de la recta que escribieron (G1, G2) pero no especifican el porqué.

g) Que pase por los cuadrantes I, III y IV

- 17 alumnos de 25 pueden simbolizar (F6) la ecuación de la recta (F1, F4) dando valores particulares para el parámetro de la pendiente y de la ordenada al origen (G1, G2, G3).
- 7 alumnos de 25 no presentaron problema para simbolizar las ecuaciones (F1, F4, F6) generalizando el signo que deben de tener los parámetros a y b y simbolizándolos de manera correcta (G1, G2, G3).
- 1 alumno de 25 no pudo simbolizar la ecuación de la recta (F1, F4, F6) de manera correcta, porque tuvo error al identificar el signo del parámetro de la pendiente (G1, G2).
- 12 alumnos de 25 especifican cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de la ecuación de la recta que escribieron (G1, G2).

- 12 alumnos de 25 no especifican, como se pregunta, cuál es el valor de la pendiente y cuál el valor de la ordenada al origen de la recta que escribieron (G1, G2) pero no especifican el porqué.

h) Que pase sólo por un cuadrante

- La mayoría tuvo problemas en simbolizar ejemplos particulares que cumplieran con la condición de este inciso (G1, G2, G3). Hubiera ayudado que trataran de dibujar las rectas para tratar de simbolizar su ecuación (F1, F4, F5, F6), pero no lo hicieron.
- Sólo 8 alumnos de 25 pudieron simbolizar la ecuación de la recta (F1, F4, F6) dando un ejemplo particular de tramo de recta, y especificando para el ejemplo dado, qué es lo que se debe condicionar (G1, G2, G3).
- 1 alumno de 25 menciona con palabras que sería un tramo de recta (G1, G3, F5) pero no puede simbolizar la ecuación de la recta (F6).
- 8 alumnos de 25 escribieron que ninguna ecuación puede pasar sólo por un cuadrante (G1, G3).
- 4 alumnos de 25 escribieron que no supieron qué hacer (G1, G3).
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada y no especifican el porqué.
- 1 alumno de 25 escribió la recta $y = 3$ (F1, F4, F6) pero sin distinguir que debe de condicionar los valores del dominio de la función (G1, G3, F5).

Actividad #4

Para cada uno de los incisos de la actividad #3, da la familia de rectas que cumplan con dichas condiciones, es decir ¿qué características deben tener los parámetros m y b de la recta $y = mx + b$ en cada caso?

a) Que pase por los cuadrantes I, II y IV

- 13 alumnos de 25 identifican el signo que debe tener el parámetro de la pendiente y el de la ordenada al origen (G1, G3), algunos dando un ejemplo particular (I2), pero no simbolizan la ecuación de la recta en forma generalizada (G1, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que la pendiente debe de ser $m = -1$ (I2), cualquier recta paralela a $y = -x + 3$ (I2), en donde la ordenada va ir cambiando, pero sin identificar

que, para que pase por esos cuadrantes, la ordenada al origen debe de ser positiva. Muestran un ejemplo particular pero no logran generalizar el signo (G1, G2, G3).

- 2 alumnos de 25 tuvieron error al identificar el signo de la pendiente y el de la ordenada al origen (G1, G2, G3) y tampoco simbolizan la ecuación (F6).
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).
- 1 alumnos de 25 explica que para poner familia de rectas hay que poner coeficientes numéricos (G1, I2) sin poder simbolizar en forma generalizada (G3, F6).

b) Que pase por los cuadrantes I y III

- 13 alumnos de 25 identifican el signo que debe tener el parámetro de la pendiente y el de la ordenada al origen (G1, G3), algunos dando un ejemplo particular (I2), pero no simbolizan la ecuación de la recta en forma generalizada (G1, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron la recta $y = x$ (G1, I2, F6) y cualquier recta paralela en donde lo que cambiaría es la ordenada al origen. Identificando en su ejemplo particular (G1, I2) que la ordenada al origen debe de ser cero, pero no al momento de explicarlo (G2, G3).
- 2 alumnos de 25 escribieron que la pendiente debe de ser 1, identificando sólo un ejemplo particular (G1, I2) sin mencionar nada acerca del valor de la ordenada al origen (G1, G2, G3).
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).
- 1 alumnos de 25 explica que para poner familia de rectas hay que poner coeficientes numéricos (G1, I2) sin poder simbolizar en forma generalizada (G3, F6).

c) Que pase por los cuadrantes II y III

- 7 alumnos de 25 explican bien que la pendiente debe de ser infinita, ó no tener pendiente (G1, G2, G3) y tampoco la ordenada, y que los valores para las abscisas deben de ser negativas (G1, G2, G3) pero no pueden simbolizar la ecuación de la recta (F6).

- 2 alumnos de 25 explican que la recta no tiene pendiente (G1, G3) pero que la ordenada al origen debe de ser cero (I2) sin reconocer que si la recta es vertical, no hay ordenada al origen (G1, G3).
- 2 alumnos de 25 mencionan que la pendiente debe de ser cero (I2) mostrando la misma confusión entre el que la recta no tenga pendiente y que tenga pendiente cero (G1, G3).
- 2 alumnos de 25 mencionan que la pendiente debe ser cero ó infinita (I2) mostrando nuevamente la misma confusión entre el que la recta no tenga pendiente y que tenga pendiente cero (G1, G3), y afirman que los valores de x deben de ser negativos (G1, G2, G3).
- 3 alumnos de 25 mencionan que la recta no tiene pendiente (I2) y debe cortar al eje X , pero sin mencionar el signo que deben tener las abscisas (G1, G2, G3).
- 2 alumnos de 25 mencionan que las rectas van a ser paralelas al eje Y , y que no tienen pendiente (G1, G2, G3) pero sin reconocer el signo de las abscisas (G1) para que sólo pase por los cuadrantes que se pide.
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).
- 1 alumnos de 25 explica que para poner familia de rectas hay que poner coeficientes numéricos (G1, I2) sin poder simbolizar en forma generalizada (G3, F6).

d) Que pase por los cuadrantes II, III y IV

- 15 alumnos de 25 identifican el signo que debe tener el parámetro de la pendiente y el de la ordenada al origen (G1, G3), algunos dando un ejemplo particular (I2), pero no simbolizan la ecuación de la recta en forma generalizada (G1, F6).
- 3 alumnos de 25 mencionan que la pendiente debe de ser igual a -1 (I2) y cualquier recta paralela a la recta $y = -x - 2$ (G1, G2, G3, F6) donde lo que cambia es la ordenada al origen, sin reconocer el signo de este parámetro para que pase por los cuadrantes indicados (G1, G3). Nuevamente no pueden generalizar la familia de rectas (G1, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).

- 1 alumnos de 25 explica que para poner familia de rectas hay que poner coeficientes numéricos (G1, I2) sin poder simbolizar en forma generalizada (G3, F6).

e) Que pase por los cuatro cuadrantes

- 12 alumnos de 25 mencionan que ninguna recta puede pasar por los cuatro cuadrantes a la vez (G1, G3).
- 2 alumnos de 25 mencionan una recta que esté ó sobre el eje Y ó sobre el eje X (G1, G3) pero no pasaría por los cuadrantes que se piden y no logran simbolizarlas (F6).
- 2 alumnos de 25 mencionan que esto es posible sólo que sea circunferencia (G1, G3) pero que no sería función (F1, F4).
- 2 alumnos de 25 mencionan que tendrían que ser rectas paralelas o perpendiculares al mismo tiempo y con ciertas condiciones para la pendiente y para la ordenada (G1, G2, G3) sin dar muestras de entender lo que se pide.
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).
- 1 alumno de 25 explica que para poner familia de rectas hay que poner coeficientes numéricos (G1, I2) sin poder simbolizar en forma generalizada (G3, F6).

f) Que pase por los cuadrantes I y II

- 12 alumnos de 25 identifican el signo que debe tener el parámetro de la pendiente y el de la ordenada al origen (G1, G3), algunos dando un ejemplo particular (I2), pero no simbolizan la ecuación de la recta en forma generalizada (G1, F6).
- 3 alumnos de 25 mencionan que la pendiente debe de ser cero (I2), rectas horizontales que corten al eje Y, pero sin reconocer el signo que debe de tener la ordenada al origen (G1, G3) para que pase por los cuadrantes que se piden. Tampoco pueden simbolizar la ecuación de la recta (F6).
- 1 alumno de 25 menciona que no debe de tener pendiente (I2) mostrando la misma confusión sobre una recta con pendiente cero y una que no tiene pendiente (G1, G2, G3).
- 2 alumnos de 25 no mencionan nada acerca del valor de la pendiente (G1, G2, G3) y sí reconocen que la ordenada debe de ser positiva (G1, G2, G3) pero no simbolizan la ecuación de la recta en forma generalizada (F6).
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).

- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).
- 1 alumno de 25 explica que para poner familia de rectas hay que poner coeficientes numéricos (G1, I2) sin poder simbolizar en forma generalizada (G3, F6).

g) Que pase por los cuadrantes I, III y IV

- 15 alumnos de 25 identifican el signo que debe tener el parámetro de la pendiente y el de la ordenada al origen (G1, G3), algunos dando un ejemplo particular (I2), pero no simbolizan la ecuación de la recta en forma generalizada (G1, F6).
- 3 alumnos de 25 mencionan que la pendiente debe de ser $\frac{3}{4}$ (I2) y cualquier recta que sea paralela a la recta $y = (3/4)x - 3$ (G1, G3, F6) en donde lo que cambia sería la ordenada al origen (G1, G2). En su ejemplo particular reconocen el signo que debe tener la ordenada pero no lo explican para la forma generalizada (G1, G3).
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).
- 1 alumno de 25 explica que para poner familia de rectas hay que poner coeficientes numéricos (G1, I2) sin poder simbolizar en forma generalizada (G2, G3, F6).

h) Que pase sólo por un cuadrante

- 12 alumnos de 25 explicaron que no supieron qué hacer.
- 2 alumnos de 25 simbolizaron un ejemplo particular (G1, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 explican que debe ser una recta que vaya desde menos infinito al eje X, reconociendo parte del ejercicio (G1, G2, G3) pero sin poder simbolizarlo (F6).
- 2 alumnos de 25 explican que dependiendo del cuadrante hay que poner restricción a los valores de x e y (G1, G2, G3) sin entender completamente el ejercicio y sin poder simbolizar (F6).
- 3 alumnos de 25 no hicieron nada (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 3 alumnos de 25 escribieron que no entienden qué significa “familia de rectas” (F1, G1, G2, G3, F6).

PRACTICA 3

Esta práctica la resolvieron 22 alumnos pero como en las actividades hay más de un inciso, algunos tienen más de una respuesta.

Actividad #1

1.- Usando papel y lápiz, resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por el método que quiera, diga qué tipo de solución tienen, cómo se llaman las ecuaciones:

$$a) \quad 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6 \quad y \quad \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}$$

$$b) \quad 5x - 15y = 60 \quad y \quad y = \frac{1}{3}x + 2$$

$$c) \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 4 \quad y \quad \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 5$$

- 3 alumnos de 22 manipulan sin problema las variables y parámetros (G4), resuelven cada sistema encontrando la solución correcta (I4) y dan el nombre de cada tipo de sistema (G1).
- 6 alumnos de 22 no responden las preguntas completas, porque no saben la respuesta correcta. Al aplicar alguno de los métodos para resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones (I1, I4) y encontrar la solución correcta, no distinguen qué tipo de solución corresponde a cada sistema, si la respuesta a la que llegan es una tautología o una contradicción (G1, G3)
- 3 alumnos de 22 tienen error en su procedimiento algebraico (I4) y no llegan a la solución correcta
- 2 alumnos de 22 grafican en esta pregunta, pero no escriben qué tipo de solución tienen (F1, G1). Parece ser que, aunque estos alumnos conocen las condiciones, no las saben aplicar en este caso en el que primero tuvieron que encontrar la solución. Podría ser que se han aprendido ciertos procedimientos de memoria pero no los han

interiorizado como para poder aplicarlos más que cuando se les pregunta de manera directa.

- 14 alumnos de 22 escriben la solución correcta simbolizando sin problema las ecuaciones (F6), especifican el tipo de solución y el nombre de las ecuaciones (I4, G1, G3) aunque no escribieron el procedimiento para poder analizar cómo manipulan las variables y los parámetros (G4).
- 3 alumnos de 22 escriben la solución correcta simbolizando la ecuación sin problema (F6), especifican el tipo de solución y el nombre de las ecuaciones (I4, G1, G3) especificando el procedimiento algebraico que utilizan (I1, I4).
- 3 de 22 alumnos, en el sistema del inciso c, escriben solución única o un valor para cada variable, pero no especifican el punto solución $P(x, y)$ que representa la relación entre las dos variables (F1). Ninguno sustituye las coordenadas del punto solución para comprobar que sea la solución correcta (I3).
- 3 de los 22 alumnos en los sistemas de ecuaciones del inciso a y el b, no entienden conceptualmente qué representa la solución numérica (G1, G3).

2.- Usando Graphmatica, grafica los tres sistemas anteriores y comprueba con tu solución. ¿Coincide? ¿No, en qué te equivocaste?

- 11 estudiantes de 22 no graficaron, a pesar de que se especifica que deben hacerlo para comprobar la solución numérica obtenida con la solución obtenida gráficamente, con ello no se logra el objetivo de la actividad.
- 11 de 22 alumnos si graficaron y compararon las soluciones para comprobar (F1).

Actividad #2

1.- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, por el método que quiera: $7x - 8y = 4$ y $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$. Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por ese punto de intersección y que sea perpendicular a la recta $x = -1$.

2.- Encuentre la ecuación de la recta que sea paralela a la recta $4x + 4y = -32$ y que pase por el punto de intersección entre las rectas:

$$x + 3y = -18 \quad y \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 5$$

3.- Encuentre la ecuación de la recta que sea perpendicular a la recta $6x + 3y = -9$ y que pase por el punto de intersección entre las rectas:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = -1 \quad y \quad 2x + y = 16$$

- 11 de los alumnos no tuvieron problema en encontrar la recta que se pide. Encontraron bien el punto solución del sistema de ecuaciones y el parámetro correspondiente a la pendiente correcta (G4, I1, I2, I4, F6) pero no escriben su procedimiento porque comprueban con la gráfica en la siguiente actividad (F1).
- 3 alumnos de 22 no tuvieron problema en encontrar la recta que se pide. Encontraron bien el punto solución del sistema de ecuaciones y el parámetro correspondiente a la pendiente correcta (G4, I1, I2, I4, F6) y a diferencia de los alumnos anteriores, si escriben su procedimiento.
- 4 de los alumnos no obtuvieron la recta correcta (I4) porque cometen errores en la manipulación algebraica (G4) principalmente en las manipulaciones necesarias para obtener el valor correcto del parámetro correspondiente a la pendiente o al de la ordenada al origen (I4).
- 2 alumnos tienen errores al simbolizar la ecuación (F6) en el caso en que el valor de la pendiente es una fracción, y por no utilizar paréntesis (I5), la expresión resultante incluye la variable en el denominador.
- 2 alumnos no agregan procedimiento y no se puede especificar por qué no pueden para obtener y simbolizar la ecuación correcta (I4, F6).

Actividad #3

De la actividad anterior, escriba cada una de las cuatro rectas de cada inciso, en forma pendiente ordenada al origen (cuide su álgebra) y usando Graphmatica,

grafique cada una, para comprobar la condición que se pide en cada inciso.

Grafique cada inciso por separado.

- 20 de los 22 alumnos graficaron bien las 4 rectas (F1, I2) pudiendo visualizar la condición para el inciso resuelto.
- 2 alumnos por no leer las instrucciones, sólo grafican 2 rectas probando que sean paralelas o perpendiculares (F4), pero no verifican que se cumplan todas las condiciones (F1). Al no graficar las 4 rectas, cuando cometieron errores en su procedimiento (G4), no pudieron visualizar su error y llegaron a una recta que no pasa por el punto de intersección (F1).
- En alguno de los sistemas de los incisos de esta actividad. 7 alumnos, sólo grafican las rectas obtenidas (I4, G4) sin relacionar las preguntas de las actividades 2 y 3 como se especifica en la instrucción y no pueden verificar visualmente que no se cumple con la condición requerida. Además, no comentan nada porque no tienen el hábito de validar.
- El alumno no tiene la costumbre de comprobar su solución ni algebraica ni gráfica y se aprecia cuando hay errores en las preguntas de esta actividad.
- Al simbolizar la ecuación (F6) una vez que tienen los valores correspondientes para la pendiente y la ordenada al origen, 2 alumnos cometen errores. Por ejemplo, en el caso en que la pendiente tiene un valor fraccionario (I2) no utilizan paréntesis y al simbolizar la variable independiente queda en el denominador por lo que la ecuación resultante no es de una línea recta (I5) y no se dan cuenta.

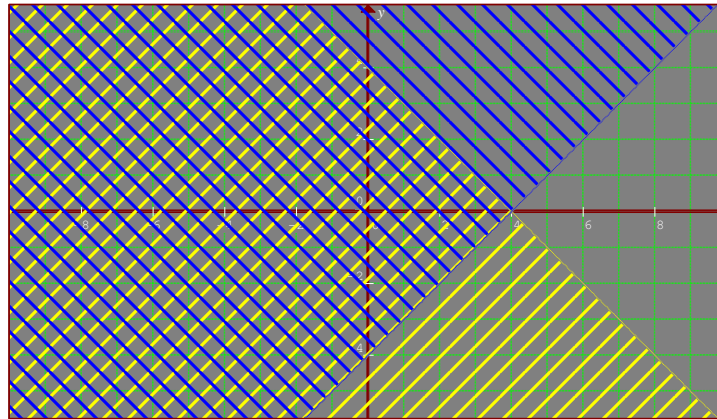
Actividad #4

Usando papel y lápiz, grafique cada uno de los siguientes sistemas de desigualdades lineales:

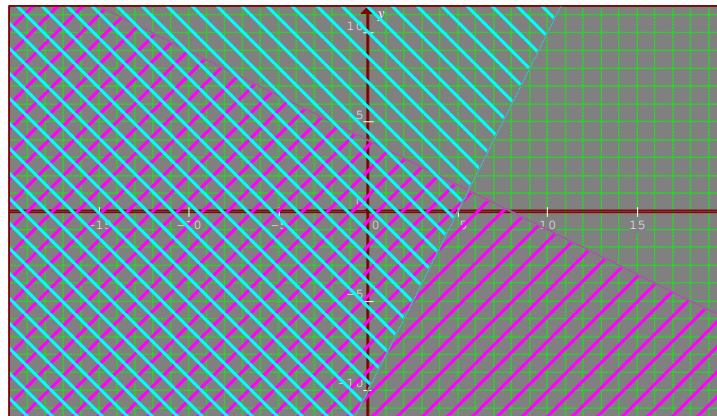
$$a) \quad y < -x + 4, \quad y > x - 4$$

$$b) \quad y < 4 - \frac{1}{2}x, \quad y > 2x - 10$$

a)



b)



¿Qué tomaste en cuenta para graficarlos? Coincide con las siguientes gráficas?

¿Sí, no, porqué?, explique brevemente

- Uno de los alumnos no distingue que cada desigualdad tiene una determinada pendiente y una determinada ordenada al origen tratándose de una recta con una determinada inclinación y por tanto no puede identificar la región correspondiente a la desigualdad, es decir, no reconoce la relación funcional que implica la desigualdad (F1, F4). Para una de las desigualdades da a la variable y el valor de cero y despeja la

variable x y traza la región correspondiente a esa desigualdad, y en la otra, a la variable x le da el valor de cero y despeja la desigualdad en y para trazar la región correspondiente (G4): Esto que demuestra que no distingue los valores de los parámetros correspondientes en cada desigualdad y, por tanto, mucho menos la relación entre las variables en cada desigualdad (F1, G1). Tampoco valida con el dibujo correspondiente a esta actividad que se les pide para que verifiquen sus resultados (F1, F4, G3).

- 4 alumnos no lo hicieron y no comentan el porqué.
- 11 alumnos lo hicieron con el programa de graficación identificando sin problema los correspondientes valores para la pendiente y la ordenada al origen en cada una (I2) pero no especifican si coincidían con las regiones dadas (F1, G1), el programa lo hizo por ellos.
- 6 alumnos grafican las desigualdades en papel y lápiz identificando sin problema los correspondientes valores para la pendiente y la ordenada al origen en cada una (I2) y trazan la región correcta para cada sistema de desigualdades, pero no lo hacen con el programa de graficación y por tanto no comparan la representación gráfica con la algebraica y no comentan nada (F1, F4, G1).

PRACTICA 4

Esta práctica la entregaron 18 alumnos. Hay preguntas que tienen más de una respuesta

Funciones Cuadráticas

Actividad #1

Analiza los datos de la siguiente tabla y contesta las preguntas:

x	y
- 10	- 100
- 8.4	- 70.56
- 5.8	- 33.64
- 4	- 16

- 3.5	- 12.25
- 2	- 4
- 3/2	- 9/4
- 1	- 1
- 1/4	- 1/16
1/8	- 1/64
1/4	- 1/16
1	- 1
1.3	- 1.69
2	- 4
3.8	- 14.44
4.3	- 18.49
6	- 36
7.9	- 62.41
9	- 81
10	- 100

a) ¿Qué tipo de función crees que representan los datos? Explica porqué:

- 7 alumnos de 18 responden que los valores particulares para la variable independiente x y sus correspondientes valores para la variable dependiente y están relacionados con una función cuadrática porque la variable dependiente está elevada al cuadrado pero con signo negativo. Esta respuesta indica que los estudiantes identifican la relación de correspondencia entre las variables (F1) pero lo hacen con base a signos externos o analizando el patrón de la tabla uno a uno.
- 9 alumnos de 18 responden que los datos corresponden a una función cuadrática porque hay simetría, es decir, para cada valor de x con el signo contrario le corresponde el mismo valor de y , (para cada y hay dos x) esto indica que los alumnos son capaces de analizar los datos de la tabla y generalizar alguna de sus propiedades (G1) y de identificar la relación funcional (F1), aunque no reconocen la variación pues el hecho de que haya simetría no garantiza que la función sea cuadrática.

- 2 alumnos de 18 respondieron que es una función cuadrática porque $y = -x^2$ (F1, F4). Estos alumnos reconocen el patrón en la tabla y lo generalizan, además son capaces de simbolizarlo utilizando una expresión (F6).

b) Encuentra una relación analítica entre los valores de la variable x y los valores de la variable y .

- En base al análisis de los datos, 12 alumnos de 18 pueden simbolizar la relación funcional $y = -x^2$ (F6).
- 3 alumnos de 18 simbolizan la relación funcional pero sin identificar que el signo es negativo $y = x^2$ (F6), probablemente identifican la relación entre las variables (F1) pero no ponen atención a la forma en que varían conjuntamente (F4).
- Un alumno de los 18 no puede simbolizar la relación (F6) pero explica con palabras el comportamiento de la función (F1).
- Dos alumnos no puede simbolizar la relación funcional (F6) y al explicarla con palabras, no identifican que su variación es negativa (F4).

c) Usando tu calculadora, has una tabla de valores de y para diez valores distintos de x .

- 4 alumnos de 18 encuentran los valores para la variable dependiente (F2) pero dando sólo valores enteros para la variable independiente (I2).
- 6 alumnos de 18 utilizan valores enteros y fraccionarios para la variable independiente (I2) para poder encontrar sus correspondientes valores para la variable dependiente (F2).
- 3 alumnos forman mal su tabla porque no reconocen correctamente la variación entre las variables (F4), al no reconocer que la función tiene signo negativo (F1).
- 2 alumnos no siguen bien las instrucciones porque utilizan valores dados para la variable independiente que se incluyen en la tabla anterior.
- 3 alumnos forman una tabla con valores que no corresponden a la función que ellos simbolizan en el inciso anterior como $y = -x^2$, y no se dieron cuenta de su error (G4).

d) ¿Para qué valor de x la y tiene el valor mínimo ó el máximo? Con qué fórmula lo encontrarías?

- 2 alumnos identifican bien la coordenada para la variable independiente $x = 0$ (I1, I2) dando correctamente el correspondiente valor de la variable dependiente $y = 0$. Sin

embargo, al calcular ese correspondiente valor para la variable dependiente y (F2) usan la fórmula general de la ecuación cuadrática, como si estuvieran calculando la intersección con el eje X. La confusión podría ser que para esta función particular, las coordenadas del vértice coinciden con la intersección con el eje X.

- 4 alumnos de 18 identifican bien la coordenada para la variable independiente (I1, I2) y también el correspondiente valor para la variable dependiente (F2) especificando que el vértice corresponde a un máximo (F1). Para esta respuesta ayuda que los alumnos ya conocen el comportamiento en general de la función $y = -x^2$.
- 3 alumnos de los 18 no dan las coordenadas del vértice como se pide en este inciso, sólo comentan que según el signo del coeficiente numérico de x^2 se tendría o un mínimo o un máximo (G1).
- 3 alumnos calculan la coordenada x del vértice utilizando la fórmula de vértice de la parábola $x = \frac{-b}{2a}$ y para la variable dependiente y , sustituyen el valor encontrado para x en la relación funcional (I1, I2, I3, F1).
- Al analizar los datos 3 alumnos no distinguen el signo negativo en la expresión para la función y dan mal la concavidad (F1).
- 3 alumnos dan el valor máximo de la x en base a los datos de la tabla que ellos formaron sin relacionarlo con la función inicial (F1) dada, es decir no son capaces de generalizar la variación conjunta de las variables (F4).

e) Escribe una fórmula para encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función interseca al eje X, y también para encontrar el valor de y para el cual la gráfica de la función interseca al eje Y.

- 8 alumnos de 18 reconocen bien la forma de calcular las intersecciones con ambos ejes (F6). Para la intersección con eje Y, sustituyendo $x = 0$ (F2) y para la intersección con eje X sustituyendo $y = 0$ (F3).
- Para esta función $y = -x^2$, como las intersecciones coinciden con el vértice, 3 alumnos dan la fórmula del vértice para encontrarlas (F6, G5).
- 2 alumnos sólo responden analizando la tabla (F1)
- 5 alumnos explican cómo se calculan las intersecciones simbolizando correctamente las fórmulas adecuadas para hacerlo, pero no lo hacen para la función dada en esta actividad sino para un ejemplo particular definido por ellos (G1, G4).

f) Grafica la función

- 4 alumnos de 18 al no reconocer el signo negativo de la función y la variación conjunta (F1, F4) tienen error al describir la concavidad de la gráfica y como no comparan su respuesta con los datos de la tabla (F1, F4) no distinguen su error.
- 8 alumnos de 18 graficaron bien la función. Hay una correspondencia entre los datos y la gráfica (F1, F4), pero no mencionan la comparación.
- Un alumno graficó la función correcta, pero tomó el dominio en base a los datos de la tabla únicamente: $(-10, 10)$ (F1, F4, F5).
- Desde el inciso anterior, 5 alumnos de 18 usan una función cuadrática particular que ellos mismos definen para ejemplificar sus respuestas, aun cuando esta función nada tiene que ver con la función cuadrática dada $y = -x^2$. Además no comparan con los datos de la tabla inicial y no se dan cuenta de su error.

Actividad #2

Si $f(x) = x^2 - 9$, completa la siguiente tabla y contesta las preguntas:

X	Y
- 8	
- 5.5	
- 4	
- 2.5	
- 1	
- $\frac{1}{2}$	
- $\frac{1}{4}$	
0	
$\frac{1}{4}$	
1	
2	
3.5	

4	
6	
8	
10	

- 17 alumnos de 18 completan bien los datos de la tabla (F2).
- Sólo un alumno encuentra los datos para la variable dependiente (F2), a partir de una función cuadrática diferente y no se dio cuenta de su error al sustituir (G4).

a) ¿Para qué valor de x la y tiene el valor mínimo? Con qué fórmula lo encontrarías?

¿Cuál es el correspondiente valor de y para ese valor de x ?

- Un alumno de 18 da bien las coordenadas del vértice al visualizar la tabla de datos (F1, I1).
- 6 alumnos tienen error en las coordenadas del vértice (F1, I1, I4) porque al visualizar los datos de la tabla no distinguen cuál es la coordenada menor.
- Un alumno de los 18 usó otra función, así que los valores de su tabla son incorrectos y por lo mismo las coordenadas del vértice que encuentra también lo son.
- 9 alumnos de 18 calculan sin error las coordenadas del vértice usando fórmula (I1, I2, I4, F1).
- Un alumno usa fórmula general de la ecuación cuadrática para encontrar las coordenadas del vértice (F6, G3), pero lo hace incorrectamente.

b) Escribe una fórmula para encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función intersecta al eje X, y también para encontrar el valor de y para el cual la gráfica de la función intersecta al eje Y. ¿cuáles son esos valores?

- 16 alumnos de 18 calcularon ambas intersecciones utilizando un procedimiento algebraico (I1, I3, I4).
- Sólo 2 alumnos cometen errores en sus procedimientos algebraicos (I4) y calculan mal las intersecciones. Además no se fijan si hay correspondencia entre sus resultados, los datos de la tabla y la gráfica (F1, F4).

c) Grafica la función usando papel y lápiz

- 6 alumnos de 18 graficaron con el programa de computadora (F1).

- 7 alumnos de 18 siguen bien las instrucciones al hacer la gráfica en papel y lápiz (F1).
- 1 alumno graficó una parábola que no es la que se pidió.
- 2 alumnos no incluyeron la gráfica (F1).
- Sólo un alumno graficó usando como dominio los datos extremos de la tabla $[-8, 10]$ (F4, F5).

d) Encuentra los valores de la variable independiente para los cuales la función crece y decrece.

- 13 alumnos de 18 identificaron correctamente los intervalos (F4, F5).
- 2 alumnos de 18 cometen errores al simbolizar los intervalos (F6); dan valores a la variable y en lugar de a la variable x (F1, F4, F2). Estos alumnos no reconocen la variación conjunta.
- 1 alumno comete un error en la *coordenada* x del vértice por lo que también se equivoca al escribir los intervalos (I3).
- 2 alumnos escriben los extremos de los intervalos en función sólo de los valores de la tabla y no de la función definida para todos los reales (F1, F4, F2, F5). Estos alumnos no reconocen la variación conjunta de las variables.

e) Encuentra los valores de x para los cuales la función es positiva y para los que la función es negativa.

- 14 alumnos de 18 obtienen correctamente los intervalos a partir de la visualización en la gráfica (F1, F4, F5). Estos alumnos reconocen la variación conjunta de las variables.
- 2 alumnos cometen errores al dar los intervalos ya que lo hacen sólo en base a los datos de la tabla (F1, F5). No reconocen variación conjunta (F4).
- 2 alumnos cometen error en los intervalos al confundir los datos de la variable independiente por los de la variable dependiente (F1, F4).

f) Encuentras algún o algunos valores de la variable independiente para los cuales la función $f(x)$ tome el mismo valor? ¿Cuántos? En general, ¿para cuántos valores de x obtendrías el mismo valor de la función $f(x)$? ¿Cómo explicas esto a partir de la gráfica de la función?

- 11 alumnos de 18 responden correctamente que hay infinidad de valores debido a la simetría de la función o dado que se trata de una parábola (F1); también identifican la variación conjunta (F4) de la función par.
- 2 alumnos no contestaron pero no explicaron la razón.
- 2 alumnos de 18 identifican la paridad sólo en base a los datos de la tabla (F1) y su respuesta se basa en esos valores únicamente. No identifican la variación conjunta (F4).
- Sólo un alumno contestó que para ningún valor se cumplía lo que se pedía, pero sin explicar su respuesta; no identifica la variación conjunta entre las variables (F4).
- Dos alumnos respondieron que para todos los valores por ser una parábola, especificaron que para el único valor que esto no se cumple es $x = 0$ que corresponde al vértice (F1, F4).

g) Podrías encontrar un valor para $f(x)$ al que le corresponda únicamente un valor de x ¿qué valor sería? Localízalo en la gráfica.

- 7 alumnos de 18 contestan bien identificando que se trata del vértice (F1, G1) y dando ambas coordenadas, pero no especificando el valor de la y de la forma que se pide (F4).
- Sólo 3 alumnos de 18 responden el valor de la variable dependiente $y = f(x)$ en la forma en que se pregunta (I1, G1).
- 3 alumnos de 18 responden sobre el valor de la coordenada $x = 0$ pero no de la $y = f(x)$ como se pide.
- 2 alumnos de 18 cometen error al simbolizar (F6) las coordenadas del vértice escribiendo el punto $P(-9, 0)$ (F4).
- 2 alumnos dan como respuesta la definición de función. Confunden en la pregunta el valor $f(x)$ con el de la x (F4).
- Sólo un alumno como cometió un error al encontrar la coordenada x del vértice, tiene error en su respuesta (I4).

Actividad #3

Usando Graphmatica grafica la siguiente función: $f(x) = x^2$

a) ¿Es $f(x)$ una función cuadrática? ¿Cuáles serían las características de una función cuadrática?

- 10 alumnos de 18 responden considerando únicamente el grado de la función (F1) no reconocen la variación conjunta (F4), responden con base a datos memorizados o signos externos.
- 6 alumnos de 18 responden que sí ya que tiene como gráfica una parábola con su vértice sobre el eje Y (F1, G1) y que es simétrica con respecto a ese eje por ser una función par (F1, F4). Especifican además que a cada valor de la y le corresponden dos de x (F4).
- Sólo un alumno de los 18 responde que es una función cuadrática (F1, G1) porque es simétrica con respecto al eje Y, sin reconocer la variación conjunta (F4).
- Sólo un alumno no hizo esta actividad.

b) Encuentra los puntos en los que la función toma su valor más pequeño ¿cuántos son?

- 10 alumnos de 18 identifican correctamente las coordenadas del vértice y lo identifican como un mínimo (G1, G3). Responden además que sólo hay un punto (F1, F2, F4) con las características que se piden.
- 8 alumnos de 18 responden correctamente dando las coordenadas del vértice e indicando que es un mínimo (G1, G3), pero sin responder, cómo dice la pregunta que corresponde sólo a un punto (F1, F2, F4).

c) Encuentra las intersecciones de la función con los ejes coordenados.

- 16 alumnos de 18 contestan correctamente a partir de la visualización en la gráfica, dando las coordenadas del vértice que para esta función coincide con ambas intersecciones (F1).
- Sólo 2 alumnos calculan el vértice usando un procedimiento algebraico, sustituyendo en la función (I1, I3, I4).

d) Usando Graphmatica, grafica las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 + 2$, $g(t) = t^2 - \frac{1}{4}$, $h(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, $i(x) = x^2 + 5$, repite lo que hiciste en los incisos b y c. Compara tus resultados con los que hiciste en a-c y describe con tus palabras ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?

- 10 alumnos de 18 no agregaron las gráficas. 8 alumnos de los 18 si las agregaron (F1).
- La mayoría de los alumnos no saben seguir instrucciones ya que sólo se limitaron a contestar qué cambia y algunos mencionan algo sobre lo que permanece sin cambiar. Ese tipo de respuestas incompletas, indica que los alumnos pueden ver qué cambia pero no son capaces de relacionar este cambio con la forma general de la función porque no reconocen a los parámetros como generalización y porque no pueden asignarles un valor específico. Probablemente tampoco pueden interpretar la relación funcional. Si los alumnos compararan cada función con la función $f(x) = x^2$ y responden cada uno de los incisos de las preguntas se podría analizar mejor su comprensión.
- 11 alumnos de 18 contesta que cambió la intersección de la función con el eje Y, es decir la ordenada al origen (G1, G2, G3) sin distinguir que el desplazamiento de cada gráfica ocurre para cada uno de sus puntos (F1, F4). Especifican también que lo que no cambia es la concavidad o la forma de la función (F1, G1). No reconocen los intervalos de variación ni el papel de cada uno los parámetros sobre la función (F5) ya que no mencionan nada acerca de ninguno de ellos.
- 3 alumnos de 18 calculan vértice e intersecciones de cada función, pero no comparan las funciones y no comentan sobre todo lo que se pide (F1, F4). Sólo mencionan que se mueve el vértice o la ordenada al origen (G1, G2) y no identifican tampoco el papel de los parámetros.
- 4 alumnos de 18 calculan vértice e intersecciones de cada función, pero no comparan y no responden a todo lo que se pide (F1, F4). Sólo mencionan que cambian las intersecciones con los ejes (G1, G2), pero no identifican el papel de cada uno de los parámetros.

e) Completa la siguiente tabla y compara la posición de los puntos cuya abscisa es $x = -2, 0, 3/2$ y 4 cuando le aplicas la función $f(x) = x^2$ y cuando le aplicas las funciones del inciso anterior. Explica con tus palabras qué le ocurre a cada punto de la función $f(x) = x^2$ cuando le aplicas las funciones del inciso anterior.

	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + 2$	$g(t) = t^2 - \frac{1}{4}$	$h(x) = x^2 - \frac{1}{2}$	$i(x) = x^2 + 5$
$x = -2$	P(-2,)	P(-2,)	P(-2,)	P(-2,)	P(-2,)

$x = 0$	$P(-0, \quad)$	$P(0, \quad)$	$P(0, \quad)$	$P(0, \quad)$	$P(0, \quad)$
$x = 3/2$	$P(3/2, \quad)$	$P(3/2, \quad)$	$P(3/2, \quad)$	$P(3/2, \quad)$	$P(3/2, \quad)$
$x = 4$	$P(4, \quad)$	$P(4, \quad)$	$P(4, \quad)$	$P(4, \quad)$	$P(4, \quad)$

- Sólo 2 alumnos completan la tabla (F2) y mencionan que cambia la intersección con el eje Y u ordenada al origen en el valor del parámetro k (F1, G1, G2) analizando, por su respuesta, sólo el valor de $x = 0$ o tal vez, visualizándolo de las gráficas del inciso anterior. No identifican la variación conjunta ni los parámetros en forma general (F4).
- 11 alumnos de 18 completan la tabla (F2) pero no comentan nada, es decir, no siguen instrucciones. Puede decirse que no reconocen la variación conjunta ni el papel de los parámetros.
- 5 alumnos de 18 completan la tabla (F2) y mencionan que se desplaza el vértice sobre el eje Y de manera vertical (F1, F4) pero sin relacionar dicho desplazamiento con el parámetro k sobre la función sin reconocer la variación conjunta ni el papel de los otros parámetros.

f) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en esta actividad? ¿Cómo cambia el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2$ al efectuar las transformaciones de esta actividad?

- Los 18 alumnos reconocen el dominio de cada una de las funciones (F1).
- 10 alumnos de 18 encuentran correctamente el intervalo para el rango de cada función (F1, F4, F2), sin comentar nada acerca del valor del parámetro k (G1). No interpretan al parámetro como número general (G2), responden con base en lo que ven únicamente.
- 5 alumnos de 18 identifican la relación entre k y el extremo del rango (G1, G2, F1, F4, F2).
- 2 alumnos de los 18 cometen error al simbolizar (F6) el intervalo por no comparar su respuesta con la gráfica (F1, F4, F2). Usan, además los datos de la variable independiente en dichos intervalos en lugar de los de la variable dependiente.
- Sólo un alumno no dió el intervalo para el rango de la función (F1, F4, F2, F5).

Actividad #4

a) Repite d) de la actividad anterior para las siguientes funciones:

$$f(x) = (x + 3)^2, \quad g(x) = (x + \frac{3}{4})^2, \quad h(x) = (x - 4)^2 \text{ y } i(x) = (x - 5/2)^2$$

- 9 alumnos de 18 no agregaron las gráficas y 9 sí lo hicieron (F1, F4).
- Al igual que el inciso d de la actividad anterior, la mayoría de los alumnos no saben seguir instrucciones ya que sólo se limitaron a contestar qué cambia y algunos mencionan algo sobre lo que permanece sin cambiar. Con ese tipo de respuestas incompletas, es difícil analizar su comprensión acerca de los parámetros. Si compararan cada función con la función $f(x) = x^2$ y respondieran cada uno de los pasos de las preguntas se podría analizar mejor su comprensión (F1, F4, G1, G3).
- 7 alumnos de 18 no agregan las gráficas ni contestan lo que se pregunta (F1, F4, G1, G2, G3).
- Sólo un alumno menciona que el vértice se desplaza de manera horizontal pero no identifica hacia qué lado se da el desplazamiento con el signo del parámetro h . También identifica que lo que no cambia es la concavidad (G1, G2, G3) pero no menciona nada acerca de las intersecciones (F1).
- 2 alumnos resuelven este inciso de manera completa, calculando para cada función, su vértice y sus intersecciones como se pide. Pueden identificar el efecto del parámetro h , que según su signo, desplaza la función hacia la derecha o hacia la izquierda (G1, G2, G3). Interpretan correctamente la relación funcional y la variación conjunta (F1, F4). Mencionan que cambian las intersecciones con ambos ejes (G1).
- 4 alumnos de los 18 resuelven todo lo que se pide en este inciso como los 2 alumnos anteriores, la diferencia es que estos alumnos no relacionan el desplazamiento horizontal con el valor y el signo del parámetro h (F1, F4, G1, G2, G3).
- 4 alumnos de los 18 no resuelven todas las actividades, sólo mencionan que el vértice se desplaza horizontalmente sobre el eje de las X, identificando la dirección del desplazamiento con el signo y el valor del parámetro (F1, F4, G1, G2, G3). Sólo se fijan en el desplazamiento de un punto pero no aprecian el efecto del parámetro sobre toda la función.

b) Completa la siguiente tabla y compara la posición de los puntos cuya abscisa es $x = -2, 0, 3/2$ y 5 cuando les aplicas los desplazamientos dados en el inciso anterior. Explica con tus palabras qué le ocurre a cada punto de la función $f(x) = x^2$ cuando le aplicas las funciones del inciso anterior.

	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x+3)^2$	$g(x) = (x+\frac{3}{4})^2$	$h(x) = (x-4)^2$	$i(x) = (x-\frac{5}{2})^2$
$x = -2$	P(,)				
$x = 0$					
$x = 3/2$					
$x = 5$					

- 7 alumnos de 18 completan la tabla (F2) pero no comentan nada; no parecen identificar la relación funcional ni el efecto del parámetro (F1, F4).
- 5 alumnos completan la tabla y mencionan que la gráfica se desplaza a la derecha o a la izquierda sobre el eje de las X, pero sin hacer mención sobre el signo del parámetro h (F2, G1, G2) Ven a la función como un todo, no interpretan correctamente la relación funcional (F1, F4).
- Sólo 6 alumnos de los 18 identifican el desplazamiento de la gráfica con el signo y el valor del parámetro (G1, G2, G3, F4).

c) ¿Qué transformaciones tendrías que hacer sobre la gráfica de la función

$f(x) = x^2$ para obtener las funciones $f(x) = (x-5)^2$ y $g(x) = (x+\frac{3}{2})^2$?

- 3 alumnos de 18 no responden porque tal vez no distinguen el efecto de los parámetros sobre la función (F1, F4, G1, G2, G3).
- Sólo 5 alumnos de 18 distinguen que hay que desplazar el vértice de la parábola de manera horizontal, sin relacionar el lado del desplazamiento con el signo del parámetro; pero no mencionan que el desplazamiento es sobre toda la gráfica para cada valor de x (F1, G1, G3). No reconocen variación conjunta (F4)
- 6 alumnos de 18 relacionan la dirección del desplazamiento horizontal con el signo y el valor del parámetro h mencionando que se desplaza toda la gráfica de manera horizontal y paralela (G1, G2, G3, F4).
- 4 alumnos mencionan que no saben qué hacer, no pueden interpretar expresiones de la forma $(x-h)^2$ y si no entienden aún ni las funciones, menos su generalización (F1, F4, G1, G2, G3).

d) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en esta actividad? ¿Cómo cambia el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2$ al efectuar las transformaciones de esta actividad?

- Todos los alumnos excepto uno contestaron correctamente el intervalo del dominio (F1, F4).
- 4 alumnos cometen errores al simbolizar el rango de la función (F6); no comparan con la gráfica para visualizarlo, ni mencionan el papel del parámetro (G1, F1, F4, F2)
- 11 alumnos de 18 identifican correctamente el intervalo del rango al visualizarlo de cada gráfica, pero no mencionan la relación entre el parámetro h y el k (F1, F4, F2). No utilizan la generalización que se ha introducido en las actividades anteriores (G1, G3) en cuanto al papel del parámetro.
- Sólo un alumno no dio ni el dominio ni el rango (F1, F4, F2).

Actividad #5

a) Repite d) de la actividad # 3 para las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2, \quad g(x) = 5x^2, \quad h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)x^2, \quad i(x) = \left(\frac{1}{10}\right)x^2$$

- 4 alumnos de 18 no resolvieron esta actividad.
- De los 14 alumnos que sí la resolvieron, 8 graficaron las funciones y 6 alumnos no las graficaron.
- 5 alumnos de 14 mencionan que lo que cambia es la apertura de la gráfica y que no cambia la concavidad (F1, G1, G2), sin relacionar la apertura con el valor numérico del parámetro a (G1, G2). No reconocen variación conjunta (F4).
- 3 alumnos de 14 identifican que el vértice de todas las funciones es el mismo y es un mínimo (F1, G1, G2, G3); también reconocen que cambia la amplitud de la gráfica, pero sin relacionarla con el valor del parámetro a (G1, G2, G3). No parecen reconocer la variación conjunta (F4).
- 5 alumnos de 14 resuelven la actividad identificando que todas las funciones tienen el mismo vértice, pero no las comparan con la función $f(x) = x^2$ ni comentan nada acerca de los cambios que se dan entre ellas (F1, G1), ni sobre la variación conjunta (F4).

- Sólo un alumno relaciona el efecto del valor numérico del parámetro para cada punto en la variable dependiente (F1); distingue que se obtiene $f(x) = a x^2$ (F4) modificando la amplitud (G1, G2, G3).

b) Compara los puntos correspondientes a $x = -2, 0, 1$, y 2 , de la función $f(x) = x^2$ con los correspondientes puntos de las funciones $g(x) = 5x^2$ $h(x) = (\frac{1}{2})x^2$

	$f(x) = x^2$	$g(x) = 5x^2$	$h(x) = \frac{1}{2} x^2$
$x = -2$	P(,)		
$x = 0$			
$x = 1$			
$x = 2$			

- 4 alumnos de 12 resuelven la tabla (F2) pero no comentan (F1) ni acerca de la variación conjunta ni reconocen un patrón o el efecto del parámetro a (F1, F4, G1, G2). No pueden interpretar expresiones $f(x) = ax^2$.
- 3 alumnos de 12 resuelven la tabla (F2) distinguiendo que el vértice es el mismo (F1, G1, G2, G3), así como la concavidad (F1) y que se modifica la apertura. Pero no relacionan ese cambio con el valor numérico del parámetro a (G1, G2). No reconocen variación conjunta (F4).
- 3 alumnos de 12 resuelven la tabla (F2) y distinguen la relación entre la amplitud y el valor del parámetro a , describen además su efecto sobre toda la función (G1, G2, G3, F4).
- 2 alumnos de 12 resuelven la tabla (F2) y distinguen que la gráfica de la parábola está mas abierta entre más pequeño sea el valor del parámetro a (G1, G2, G3) pero no comparan con otros valores de a , como $a > 1$.

c) Repite a) de esta actividad pero para las funciones:

$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = -3x^2, \quad h(x) = (-\frac{1}{4})x^2, \quad i(x) = (-\frac{1}{7})x^2$$

- En este inciso, 6 alumnos agregan gráficas y 6 no lo hacen (F1).
- 3 alumnos de 12 no responden todo lo que se pide en la actividad y mencionan que cambia la amplitud (G1) pero no identifican que cambia también la concavidad (G1, G2, G3).

- 3 alumnos de 12 identifican que cambia la concavidad cuando el parámetro a tiene signo negativo (G1, G2, G3), distinguen que el vértice es el mismo pero representando un máximo (F1), pero no mencionan nada acerca de la amplitud (G1, G2). No reconocen variación conjunta (F4).
- 1 alumno de los 12 menciona que se modifica la concavidad y la apertura pero sin relacionarla con el valor numérico del parámetro a , es decir, no reconocen su papel (G1, G2) ni la variación conjunta (F4). No interpreta el lenguaje simbólico (F6).
- 5 alumnos siguen las instrucciones calculando el vértice e identificando que en todas las funciones es el mismo; encuentran intersecciones con los ejes, identifican que cambia la concavidad y que el vértice es un máximo (G1, G2, F4), pero no mencionan el efecto del parámetro a sobre la amplitud en la función (G1, G2, G3).

d) Compara los puntos correspondientes a $x = -2, 0, 1$ y 2 de la función $f(x) = x^2$ con los correspondientes puntos de las funciones $g(x) = -3x^2$ $h(x) = (-\frac{1}{4})x^2$

	$f(x) = x^2$	$g(x) = -3x^2$	$h(x) = -\frac{1}{4}x^2$
$x = -2$	P(,)		
$x = 0$			
$x = 1$			
$x = 2$			

- 3 alumnos de 12 no contestaron.
- 1 alumno menciona que la concavidad es negativa, identifica que se modifica la apertura de la parábola pero no relaciona esta transformación con el valor numérico del parámetro a (G1, G2). No reconoce el papel del parámetro (G1, G2) ni la variación conjunta (F4).
- 2 alumnos mencionan cambio en la concavidad y no en la amplitud (F1, G1, G2, G3). No reconocen ni el efecto del parámetro ni variación conjunta (G1, G2, F4).
- 2 alumnos completan la tabla e identifican el cambio en la concavidad (G1) debido al signo negativo del parámetro a (G3) y mencionan su efecto sobre la amplitud de la parábola distinguiendo el efecto de la transformación y la variación conjunta (G1, G2, G3, F4). También pueden interpretar el lenguaje simbólico (F6).

- 4 alumnos únicamente completan la tabla sin distinguir el efecto del parámetro a (F1, F2, G1, G2, G3), ni la interpretación del lenguaje simbólico (F6).

e) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones vistas en esta actividad? ¿Cómo cambia el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2$ al efectuar las transformaciones de esta actividad?

- Todos los alumnos encontraron correctamente el dominio de las funciones (F1, F4).
- 5 alumnos visualizaron y encontraron correctamente el rango sólo para las funciones con $a < 0$ (F1, F4, F2).
- Sólo un alumno menciona que hay relación con el vértice y el intervalo del rango de cada función (F1, F4, F2, G1), tanto en el caso en que $a > 0$ como cuando $a < 0$.
- 2 alumnos cometen error al dar el rango de las funciones (F1, F4, F2) mencionando que son todos los reales; no reconocen el valor de parámetro (G1, G2).
- 4 alumnos de 12 simbolizan correctamente el rango (F1, F4, F2) para todas las funciones, haciendo la distinción de los casos en que $a < 0$ y en que $a > 0$, sin mencionar la relación entre el vértice y el rango.

Actividad #6

Escribe un párrafo para responder a cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando la multiplicas por una constante a positiva $f(x) = ax^2$? ¿Qué le pasa cuando a es negativa?

- Solo 14 alumnos resolvieron la actividad 6 (F1, F4).
- Un alumno explica incorrectamente (F1). Su respuesta no tiene relación con la pregunta. Contestó que si $a = 0$ deja de ser una cuadrática (G1, G2, F4). No es capaz de interpretar el parámetro ni el lenguaje simbólico (F6).
- 3 alumnos de 14 identifican la concavidad con el signo del parámetro a y mencionan que también se modifica la amplitud de la gráfica (G1, G3) pero no relacionan dicha transformación con el valor numérico del parámetro a (G1, G2, G3), por lo que no reconocen la variación conjunta (F4).

- 10 alumnos de 14 no identifican la apertura de la gráfica con el valor numérico del parámetro a , sólo identifican su efecto sobre la concavidad (G1, G2, G3), por lo que no reconocen la variación conjunta (F4).
- Un alumno identifica que según el valor del parámetro a se modifica la amplitud de la parábola, sin embargo lo explica incorrectamente al afirmar que “si a es una fracción la parábola se abre pero si es entero se estira” (G2, G3, F4).

b) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando le sumas a la variable x una constante $f(x) = (x + h)^2$? ¿Cómo se transforma si le restas la constante $f(x) = (x - h)^2$?

- 12 alumnos de 14 identifican el signo del parámetro h con la dirección del desplazamiento (G1, G2, G3) También reconocen la variación conjunta (F4) y son capaces de interpretar la relación funcional en forma simbólica (F6).
- 1 alumno confunde el desplazamiento horizontal con el vertical (F1, G1, G3). No reconoce ni la variación conjunta (F4), ni el papel del parámetro ni es capaz de interpretar el lenguaje simbólico (F6).
- 1 alumno no pudo interpretar la simbolización (F6), desarrolló el binomio de la forma analítica (F1, F4).

c) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando le sumas a la variable y una constante $f(x) = x^2 + k$? ¿Cómo se transforma si le restas la constante $f(x) = x^2 - k$?

- Un alumno no contestó (F1, F4, G1, G2).
- 12 alumnos de 14 identifican el efecto del parámetro k con el desplazamiento vertical y además, relacionan dicho movimiento con el signo del parámetro (G1, G2, G3). Explican el movimiento en base al cambio de posición de su vértice o en función de su ordenada al origen pero no especifican su efecto sobre toda la función (F1, F4). Son capaces de interpretar la simbolización (F6).
- Un alumno confundió el desplazamiento vertical con el desplazamiento horizontal (F1, F4, G1, G3).

d) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando multiplicas a la variable x por una constante a $f(x) = ax^2$ y después le sumas otra constante k $f(x) = ax^2 + k$?

- 9 alumnos de 14 contestan que al multiplicar por un parámetro a se modificaría la apertura de la gráfica (G1, G2, G3) y que el sumar una constante, desplazaría la gráfica hacia arriba (G1, G2, G3). Reconocen también la variación conjunta e interpretan el lenguaje simbólico (F4, F6). De estos 9 alumnos, sólo 3 relacionan el tipo de apertura con el valor numérico del parámetro a (G2, F4).
- Sólo un alumno de 14 identifica el efecto del parámetro a sobre la apertura de la gráfica y no menciona el del desplazamiento vertical (F1, G1, G3). No identifica la variación conjunta, ni la generalización, ni el papel del parámetro.
- 2 alumnos de 14 no contestan probablemente porque no han comprendido los conceptos a los que se refiere la pregunta (F1, F4, G1, G3) ni pueden interpretar el lenguaje simbólico (F6).
- Un alumno comente un error al identificar el efecto del parámetro: menciona que el desplazamiento es horizontal (G1, G2, F4)
- Un alumno identifica correctamente la primera transformación relacionada con la amplitud pero no identifica correctamente el desplazamiento vertical, lo confunde con desplazamiento horizontal hacia la izquierda (G1, F4).

e) ¿Cómo se transforma la función $f(x) = x^2$ cuando le sumas una constante h a la variable x $f(x) = (x + h)^2$ y después multiplicas a esa suma por una constante a $f(x) = a(x + h)^2$? ¿La transformación sería la misma que la del inciso anterior?

- 4 alumnos de 14 confunden los efectos de los parámetros sobre la función y comentan que son iguales a los del inciso anterior (F1, G1, G3, F4).
- 4 alumnos de 14 no supieron qué hacer (F1, G1, G3, F4) no pueden interpretar el lenguaje simbólico (F6).
- 3 alumnos de 14 reconocieron las transformaciones, primero el desplazamiento horizontal y después modificando la apertura según el valor del parámetro a (G1, G2, G3, F4), pueden identificar el lenguaje simbólico (F6)
- 3 alumnos de 14 cometen un error al comentar que disminuye la amplitud y después la función se desplaza hacia arriba. Indican además que no es igual al inciso anterior (G1, G3, F4) No reconocen el papel de los parámetros.

f) ¿Qué le sucede a la función $f(x) = x^2$ si haces la misma operación que el inciso e $f(x) = a(x+h)^2$ pero después de esa transformación le sumas otra constante k $f(x) = (x+h)^2 + k$?

- 3 alumnos de 14 sólo identifican que si suman una constante k , la gráfica se desplazaría verticalmente (G1, G3) pero al no distinguir los movimientos en el inciso anterior no identifican ni la variación conjunta (F4) ni el papel de los parámetros h y a , o sea no reconocen tampoco un patrón general (G1, G3) ni pueden interpretar en lenguaje simbólico (F6).
- 1 alumnos de 14 confunde las transformaciones asociadas con cada parámetro (F1, G1, G3, F4). Menciona que los movimientos dependen del signo y la magnitud de los parámetros pero no los identifica (G3).
- 4 alumnos de 14 no contestaron no pueden interpretar ni el lenguaje simbólico (F1, F4, G1, G2, G3, F6).
- 2 alumnos de 14 identificaron las transformaciones sobre la función correctamente (G1, G2, G3, F4, F6).
- 3 alumnos de 14 mencionaron que se modifica la amplitud de la función si se multiplica a la función por una constante, (G1, G3) y se desplaza hacia arriba, es decir, identifican el movimiento vertical provocado por el parámetro k (G1, G3) pero no la primera transformación provocada por el parámetro h (G1, G3). No son capaces de interpretar el lenguaje simbólico (F6).
- Un alumno simbolizó en forma general escribiendo $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y mencionando que se llega a la forma estándar de la parábola, pero sin reconocer el papel de cada uno de los parámetros sobre la función (G1, G2, G3, F4).

PRACTICA 5

Esta práctica la resolvieron 25 alumnos pero como en las actividades hay más de un inciso, algunos tienen más de una respuesta

Actividad #1

1.- Usando Graphmatica, grafica la función $f(x) = \frac{1}{x}$

a) ¿Para qué valores de x está definida la función?

- Un 88% de los alumnos respondieron que la función $f(x)$ está definida para todos los valores de x excepto para cuando $x = 0$, reconociendo la relación funcional entre las variables (F1, F2, F4, F5).
- Sólo un alumno de 25 respondió que la gráfica de la función no intersecta al eje Y, identificando también la relación funcional entre las variables de manera visual (F1, F4).
- Dos alumnos de 25 no distinguieron la restricción para los valores del dominio, respondiendo que $f(x)$ está definida para todos los reales (F1, F4, F5).
- Algunos alumnos (3 de 25), cometen errores al simbolizar su respuesta en la restricción del dominio (G5).

b) Tomando papel y lápiz substituya valores en x cada vez más grandes positivos y cada vez más pequeños negativos ¿cuál es el comportamiento de $f(x)$?

- 56% respondieron que la función $f(x)$ se va acercando a cero sin llegar a tomar nunca ese valor, reconociendo el patrón de comportamiento de la gráfica de la función (G1) y la relación entre las variables (F1, F4, F5) y deduciendo su comportamiento a partir de valores positivos y negativos para la variable independiente (F2, G3)
- Después de construir una tabla de valores como lo indica la actividad, un 44% de los alumnos respondieron que al dar valores cada vez más grandes para la variable x , la variable y va tomando valores más pequeños acercándose al eje de las X, sin llegar a tocarlo (F2) reconociendo el comportamiento de la función, la relación entre sus variables y la variación conjunta (F1, F4, F5); deduciendo también su regla (G3).

c) ¿Qué le pasa a la función si x se acerca a cero por ambos lados? ¿Quiénes son las intersecciones con los ejes?

- Después de construir la tabla de valores o analizar la gráfica de $f(x)$, las respuestas de los alumnos son similares pero las expresan de manera diferente.
- 9 alumnos de 25, respondieron que la función $f(x)$ se acerca al eje Y pero nunca lo toca, reconociendo la relación funcional (F1) y su variación conjunta (F4, F5) y el

patrón de comportamiento de la gráfica (G1) deduciendo ese comportamiento (G2, G3).

- 6 alumnos de 25 respondieron que conforme la variable x toma valores más pequeños, la variable dependiente y toma valores más grandes acercándose al eje Y (F2, F4, F5, G1, G2, G3), sin especificar que el comportamiento es similar para valores negativos de x (G1, G3).
- 4 alumnos de 25 respondieron que aumenta el valor de la variable dependiente y (F2, F4, F5, G1, G2, G3) pero sin mencionar el comportamiento de la función para valores negativos de la variable independiente x (G1, G2, G3).
- 2 alumnos de 25 responden en general del comportamiento de la función, sin responder a lo que se pide en este inciso mencionando que si la x toma valores más pequeños la gráfica se pega a los ejes pero no los toca (F2, F4, F5)
- Sólo un alumno respondió que la gráfica de la función se va acercando al origen pero no lo toca, confundiendo el origen con el eje Y (F1, F2, F4).
- 2 alumnos de 25 respondieron que los valores de y son positivos si la variable x es positiva, y son negativos si los valores de la variable x son negativos (F1, F4, F5) pero no mencionaron nada acerca del valor numérico del comportamiento de las variables (G1, G2, G3).
- Un alumno de 25 no respondió pero no especificó la razón (F1, F4, G1, G4).
- Con respecto a la segunda pregunta, un 80% de los alumnos respondieron que no hay intersección con los ejes reconociendo visualmente dicho comportamiento de la gráfica (F1, F4) y los valores que no pueden tomar las respectivas variables en sus respectivos ejes (F2, F3).
- 3 alumnos de 25 respondieron que la gráfica no toca a los ejes porque si lo hiciera, no sería función (F1, F4).
- Sólo dos alumnos no respondieron pero no especifican la razón (F1, F4).

d) Graficar $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{1}{x} - 5$. **Compara con la función** $f(x) = \frac{1}{x}$ **y responde ¿qué cambia? ¿qué permanece sin cambiar?**

- En esta actividad algunos alumnos dan más de una respuesta debido a lo que se pide que se analice, sin contestar en particular cada una de las preguntas.

- 7 alumnos respondieron que la gráfica se desplaza verticalmente, identificando el sentido del desplazamiento con el signo de la constante k (F1, F4, G1, G2, G3). Algunos de ellos mencionan que el desplazamiento es sobre el eje Y, hacia arriba y hacia abajo, a pesar de que la gráfica no toca a dicho eje, pero lo toman como referencia para ese movimiento.
- 2 alumnos mencionan que la gráfica se desplaza pero sin especificar el tipo de desplazamiento (F1, F4, G1, G2, G3).
- 2 alumnos respondieron que cambia la altitud de la gráfica pero no la forma (F1, G1, G2, F4).
- 5 alumnos respondieron que cambia la asíntota horizontal y el rango de la función (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que no cambia el dominio de la función (F1, F4, F5).
- 3 alumnos respondieron que cambia el punto de partida desplazando la función hacia arriba o hacia abajo, sin relacionar dicho movimiento con el signo de k (F1, F4, G1, G3).
- 2 alumnos respondieron que no cambia la concavidad (F1, F4, G1, G3) sin analizar nada más.
- 3 alumnos respondieron que cambia la asíntota que “pasa” por el eje Y y que no cambia la asíntota que “pasa” por el eje X (G1, G3) sin especificar la ecuación en particular de cada una de ellas, ni su relación con los parámetros h y k (F1, G1, G2, G3).
- 7 alumnos cometieron error debido a que no usan paréntesis al escribir la función $f(x)$ en el programa de graficación, sumando o restando la constante a la variable x y no a la función. Sus respuestas son incorrectas pero no lo percibieron ni siquiera al leer una pregunta tan específica sobre el valor que suma o resta a la función (F1, F4, F6).
- 3 alumnos respondieron que lo que no cambia es la pendiente, confundiendo los símbolos (F1, F4, F6, G1).

e) ¿Qué puedes decir que pasa en general si sumas a $f(x) = \frac{1}{x}$ una constante k

$$f(x) = \frac{1}{x} + k ?$$

- 12 alumnos de 25 respondieron que la gráfica de la función se desplaza verticalmente hacia arriba o hacia abajo, según el signo del parámetro k (F1, F4, G1,

G2, G3). Algunos mencionan que el desplazamiento se lleva a cabo sobre el eje Y (G1).

- 5 alumnos respondieron que la constante representa la asíntota horizontal y por tanto, la función se desplaza hacia arriba o hacia abajo según su signo (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que cambia el punto de origen o donde se empieza a trazar la función (F1, F4, F6).
- Un alumno respondió que cambia la altitud de la función porque al agregar k , el eje de las Y se modifica en ese valor (F1, F4, G1, G2, G3).
- 4 alumnos respondieron incorrectamente sobre el movimiento de la función ya que su gráfica era incorrecta por falta del uso de paréntesis (F1, F4, F6).

f) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones del inciso d?

- 16 alumnos de 25 identificaron bien el dominio de la función (F1, F4, G3).
- 14 alumnos de 25 identificaron bien el rango, distinguiendo que el valor del parámetro k (G1) es el valor que no puede tomar la variable y (F1, F4, F5, F2).
- 2 alumnos dieron mal el rango (F1, F4, F2).
- 2 alumnos no respondieron la pregunta pero no especificaron la razón.
- 7 alumnos de 25 dieron mal el dominio y el rango de la función, al trazar las gráficas con error por no usar los paréntesis correctamente (F6). Hicieron correctamente el análisis de las gráficas obtenidas (F1, F4, F5, F2).
- Algunos alumnos no revisan lo equivalencia entre lo gráfico y lo analítico (F1, F4, F5).

Actividad #2

a) Graficar $f(x) = \frac{1}{(x+3)}$, $f(x) = \frac{1}{(x+5)}$, $f(x) = \frac{1}{(x-2)}$, $f(x) = \frac{1}{(x-7)}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x + \frac{5}{2})},$$

- 24 alumnos de 25 graficaron cada una de las diferentes funciones de esta actividad, pero no todos ellos pudieron reconocer visualmente el objetivo de la actividad (F1, F4).

- Sólo un alumno de los 25 no agregó las gráficas a esta actividad.

b) Compara las graficas del inciso anterior con la grafica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

¿Qué cambia, que permanece sin cambiar? ¿Qué pasa si sumas o restas una constante positiva h a x en la función $f(x) = \frac{1}{(x-h)}$?

- En este inciso los alumnos sólo responden algunas preguntas pero no todas como se pide.
- 14 alumnos respondieron que la gráfica de la función se desplaza horizontalmente, identificando la dirección del movimiento con el signo del parámetro h (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que la constante h es la asíntota vertical y que es ésta la que se desplaza (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que la asíntota vertical es la que se desplaza y la horizontal no se desplaza (F1, F4, G1, G2, G3).
- 2 alumnos respondieron que la función se desplaza pero sin especificar dicho desplazamiento (F1, F4, G1).
- 2 alumnos mencionan que si se suma o resta una constante a la variable x , entonces la gráfica va a interceptar al eje Y, a diferencia de $f(x) = \frac{1}{x}$ (F1, F4, G1, G2, G3).
- 2 alumnos responden que lo que cambia es el punto en donde $f(x)$ intersecta al eje Y (F1, F4, G1, G2, G3).
- 5 alumnos respondieron que cambia la asíntota vertical y por tanto, cambia su dominio (F1, F4, F5, G1, G2, G3).
- 2 alumnos respondieron que el eje X se desplaza en h unidades (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos mencionaron que cambió el punto de origen o donde se empieza a trazar la gráfica. El error consiste en mencionar el punto de partida, tal vez refiriéndose a la intersección de los ejes (asíntotas) que toman como referencia para el trazo (F1, F4, F6, G1, G2, G3).
- 3 alumnos mencionan que ninguna gráfica toca al eje X (G1, G2, G3, F1, F4).
- 4 alumnos mencionan que no cambia la asíntota horizontal, por tanto tampoco cambia el rango de la función (F4, F5, G1, G2, G3).

- 1 alumno menciona que no cambia la pendiente, sin especificar si se refiere al parámetro a y a la forma de la función (F1, F4, F6, G1).
- 4 alumnos mencionan que cambia el dominio pero el rango no cambia (F1, F4, F5, G1, G2, G3).
- 1 alumno respondió que todas las funciones se encuentran en los mismos cuadrantes que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ (F1, F4, G1, G2, G3).

c) ¿El efecto sobre la función es el mismo si la constante va sumada o va restada a la variable x ?

- 14 alumnos de 25 respondieron que el efecto no es el mismo. Identificaron que el lado del desplazamiento horizontal dependerá del signo del parámetro h (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que la asíntota vertical se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda según el signo del parámetro h (F1, F4, G1, G2, G3).
- 1 alumno respondió que la gráfica no toca el valor de la constante h (F1, F4, G1, G2, G3).
- 4 alumnos respondieron sobre el desplazamiento horizontal, pero relacionando incorrectamente el movimiento de la gráfica y el signo del parámetro h (F1, F4, G1, G2, G3).
- 1 alumno respondió que según el valor del parámetro h , la gráfica cambia de cuadrantes (F1, F4, G1, G2, G3).
- Sólo un alumno mencionó que el efecto es el mismo, sin importar el signo de h no reconociendo por tanto, el lado del desplazamiento (F1, F4, G2).

d) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de las funciones? Y compáralas con

el dominio y el rango de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} + k$

- 22 alumnos de 25 identificaron bien el dominio de cada función (F1, F4, F5, G1, G2).
- Sólo 2 alumnos de 25 cometieron errores al identificar el dominio; no distinguieron que la variable x no toma el valor del parámetro h (F1, F4, F5, G1, G2).
- 24 alumnos de 25 identificaron bien el rango de la función (F1, F4, F5, F2, G1, G2, G3).
- Sólo un alumno de los 25 no respondió la pregunta sin explicar la razón (F1, F2).

e) En las funciones de la actividad 1 ¿Qué representa la constante k en la gráfica?

Y en las funciones de esta actividad ¿Qué representa la constante h en la gráfica?

- 10 alumnos respondieron que el parámetro k representa el desplazamiento vertical y el parámetro h representa el desplazamiento horizontal (F1, F4, G1, G2, G3).
- 10 alumnos respondieron que $y = k$ es la asíntota horizontal y que $x = h$ es la asíntota vertical (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos que graficaron mal las funciones de la actividad 1 por no usar paréntesis correctamente (F6), encuentran las mismas gráficas tanto en la actividad 1 como en la 2, por tanto al visualizar lo mismo, responden que los parámetros k y h representan lo mismo (F6).
- Un alumno respondió que el parámetro k representa el movimiento de la gráfica sobre el eje Y, y el parámetro h representa el movimiento de la gráfica sobre el eje X (F1, F4, G1, G2, G3).
- 2 alumnos respondieron que k representa la ordenada y h la pendiente usando los nombres de los parámetros de la línea recta pero sin explicar a qué se refieren con esos términos (responden de memoria, no entienden el significado de los parámetros F1, F4, F6, G1).
- 2 alumnos respondieron que el parámetro k es lo que cambia la posición que ocupa el origen con respecto al eje Y y el parámetro h cambia la posición que ocupa el origen con respecto al eje X, refiriéndose tal vez a los ejes como el valor de las respectivas asíntotas, pero sin explicarlo más específicamente (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos que muestran gráficas incorrectas de las funciones, respondieron que la constante es la y pero no está definida (F1, F4, G1, G2, G3).

Actividad #3

a) Usando Graphmatica graficar $f(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = \frac{10}{x}$, $f(x) = \frac{1}{3x}$, $f(x) = \frac{1}{9x}$

- 24 alumnos de 25 agregaron las gráficas de cada una de las funciones de esta actividad (F1).
- Solo un alumno de los 25 agregó las gráficas de esta actividad.

b) Compara con la grafica de la función de la actividad uno $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿Qué cambia?

¿Que permanece sin cambiar?

- En este inciso, hay alumnos que dan más de una respuesta
- 9 alumnos respondieron que lo que cambia es la apertura o amplitud de la gráfica (F1, F4, G1, G2, G3).
- 8 alumnos respondieron que la gráfica se pega más a los ejes o se despega más de los ejes (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos mencionaron que lo que cambia es la pendiente, usando mal el nombre de la constante. No entienden el parámetro, responden de memoria (F1, F4, G1).
- 1 alumno respondió que cambia el punto de inflexión, sin mencionar a que se refería con ese término, no entiende, responde de memoria (F1, F4, G1).
- 1 alumno respondió que lo que cambia es el punto donde pasa x y y sin entender la respuesta que está dando (F1, F4, G1).
- 3 alumnos respondieron que cambia el denominador que ya no es 1, cuando el valor del parámetro $a < 1$ (F1, F4, G1, G2).
- 8 alumnos respondieron que no cambia el dominio y el rango de cada uno (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 mencionaron que lo que no cambia es que ninguna función toca ambos ejes (F1, F4, G1, G2, G3).
- 6 alumnos mencionaron que no cambia ni la asíntota vertical ni la asíntota horizontal (F1, F4, G1, G2, G3).
- 1 alumno respondió que no cambian los cuadrantes donde se traza la gráfica de la función (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que la gráfica no se desplaza ni hacia arriba ni hacia abajo, manteniendo la misma posición (F1, F4, G1, G2, G3).
- 1 alumno no usa paréntesis de manera correcta, traza gráficas de líneas rectas para las gráficas con $a < 1$, (F1, F4, F6).

c) ¿Qué pasa en general con la función $f(x) = \frac{1}{x}$ si multiplicamos a esta función por una constante positiva a mayor que uno. ¿Será lo mismo si a se encuentra entre $0 < a < 1$?

- 18 alumnos de 25 respondieron que lo que cambia es el trazo de la función identificando que si $a > 1$ la gráfica se despega de los ejes y si $0 < a < 1$ la gráfica se pega a los ejes (F1, F4, G1, G2, G3).
- 1 alumno respondió que cambia el punto de inflexión, sin explicar de manera más específica su respuesta (F1, F4, F6).
- 1 alumno respondió que el efecto del parámetro a es el mismo sin importar su valor numérico (F1, F4, G1, G2, G3).
- 1 alumno respondió que el valor de la variable y en su punto de inflexión se desplazan en un número mayor a uno ó en un número menor a -1 y lo mismo entre 0 y 1 ó -1 y 0. Tal vez refiriéndose al momento de hacer el trazo de la función, sin entender su respuesta (F1, F4, F6).
- 1 alumno dio una respuesta que nada tiene que ver con la pregunta (F1, F4).
- 3 alumnos no respondieron la pregunta, sin especificar la razón (F1, F4).

d) Multiplica cada una de las funciones del inciso a por -1. ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras con las graficas de $f(x)$?

- Algunos alumnos dieron más de una respuesta en este inciso.
- 5 alumnos respondieron que la función se vuelve negativa y por tanto el trazo cambia de los cuadrantes I y III a los cuadrantes II y IV (F1, F4, G1, G2, G3).
- 4 alumnos respondieron que la gráfica se refleja con respecto al eje X (F1, F4, G1, G2, G3).
- 8 alumnos respondieron que la gráfica cambia de cuadrantes (F1, F4, F5, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que la función deja de ser decreciente y se convierte en una función creciente (F1, F4, F5, G1, G2, G3).
- 2 alumnos respondieron que tienen las mismas asíntotas verticales y horizontales (F1, F4, G1, G2, G3).
- 3 alumnos respondieron que el rango y el dominio de cada una de las funciones no cambia (F1, F4, G1, G2, G3).
- 1 alumno respondió que la gráfica va en dirección contraria, refiriéndose tal vez al trazo de los cuadrantes o reflexión con el eje X, sin explicarlo de manera más específica (F1, F4, F6, G1, G2, G3).
- 1 alumno mencionó que todas las gráficas son impares (F1, F4, G1, G2, G3).

- Sólo un alumno respondió incorrectamente mencionando que no cambia nada (F1, F4, G1).
- 4 alumnos no respondieron sin especificar la razón (F1, F4, G1).

e) Determina dominio y rango de cada una

- 20 alumnos de 25 identificaron correctamente el dominio de cada una de las funciones de esta actividad (F1, F4, F5, G1).
- 2 alumnos de 25 se equivocaron al dar el dominio de las funciones porque no identificaron la restricción dada por el valor de la asíntota vertical (F1, F4, G1).
- 18 alumnos de 25 identificaron correctamente el rango de cada una de las funciones (F1, F4, F5, F2, G1).
- 4 alumnos de 25 dieron el rango de la función incorrectamente (F1, F4, F5, F2, G1).
- 2 alumnos no respondieron la pregunta sin especificar la razón (F1, F4, F5, F2).
- 1 alumno tuvo mal las gráficas por no usar paréntesis al momento de trazar con la computadora y por lo tanto, el dominio y el rango de las funciones (F1, F4, F2, F6) son diferentes.

5.2 Resultados globales del análisis de las respuestas de las prácticas

Como apoyo para resolver cada una de las prácticas, los alumnos usaron el programa de graficación Graphmatica. En el análisis sobre las respuestas de cada una de las actividades de las prácticas aplicadas, usando el modelo 3UV, se revisa, qué tanto contribuye el uso del programa de graficación para la comprensión, manipulación y simbolización de las variables y los parámetros, así como el efecto de cada uno de ellos sobre la transformación de funciones.

5.2.1 Práctica 1, 2, y 3 (función lineal)

- Cuando los alumnos visualizan la gráfica que trazan con Graphmatica, pueden reconocer la relación entre las variables, comparando la forma analítica con su gráfica.

- Son capaces de interpretar las coordenadas de los puntos en donde la gráfica intersecta en ambos ejes, y algunos alumnos, con esta información pueden calcular de manera visual el valor numérico de la pendiente con el criterio de elevación entre recorrido, interpretando la relación entre las variables.
- En las actividades en donde tienen que calcular el parámetro de la pendiente, o el de la ordenada al origen, no tienen problema en manejar la información dada y manipular algebraicamente las expresiones para hacerlo.
- Algunos alumnos cometen un error en su procedimiento algebraico al tratar de encontrar el valor numérico de la pendiente, pero no se dan cuenta puesto que no tiene la costumbre de comparar lo numérico con lo gráfico. No validan ni siquiera el signo encontrado para la pendiente con la inclinación de la recta graficada, que sería una condición muy importante para asegurar que su resultado es el correcto.
- Con los valores numéricos encontrados de los parámetros pueden simbolizar la ecuación de la línea recta ó calcular la ecuación de la recta según el tipo de ejercicio del que se trate. Cuando el valor del parámetro de la pendiente es fraccionario, algunos de los alumnos no usan paréntesis para el coeficiente al simbolizar la ecuación, y escriben la ecuación de la recta como si fuera función racional, por ejemplo: $f(x)=1/2x + 3$ y por tanto, no coincide la forma analítica con la gráfica y no se dan cuenta de su error.
- Una vez que simbolizan o calculan la ecuación de la recta, ningún alumno comprueba si es la recta que corresponde a la información dada y a partir de la cual la encontraron. Es decir, quienes llegan a tener un error en su procedimiento no lo detectan ni siquiera comparando con la gráfica correspondiente.
- Pueden calcular valores particulares para la variable dependiente dados valores particulares de la variable independiente o viceversa, cuando cuentan con la expresión de la forma funcional, mediante simples sustituciones, entendiendo la relación funcional.

- En los ejercicios en donde tienen que encontrar la familia de rectas que cumplan con cierta condición, no entienden ni siquiera el enunciado. Por lo que no pueden generalizar la ecuación de la recta. No son capaces de simbolizar los parámetros en forma general, usando sólo una letra que los represente. A pesar de que durante la clase se aclaraban sus dudas, se discutía con el grupo y se explicaba el significado de “familia de rectas”, la mayoría de los estudiantes no entendió esta generalización. Están acostumbrados a trabajar sólo con ejemplos específicos y en ellos si son capaces de simbolizar.
- Al momento de trazar la gráfica de una recta usando Graphmatica, pueden visualizar que corresponde a la forma gráfica que esperaban. Sin embargo, al tratar de distinguir cuál es el efecto gráfico que corresponde a diferentes valores del parámetro correspondiente a la ordenada al origen y en las preguntas en que se esperaba que pudieran distinguirlo sólo de visualizar la gráfica, lo distinguen sólo como signo externo. Distinguen que la recta se desplaza hacia arriba o hacia abajo según el signo y el valor numérico del parámetro, pero sólo en función del movimiento sobre el eje Y, es decir, no analizan cómo afecta a cada punto de la función como $f(x) + b$, donde b representa la distancia entre las rectas paralelas, que es la misma para cada punto.
- Si se pide que desplacen la recta b unidades hacia arriba ó b unidades hacia abajo, lo pueden hacer gráficamente y también con la representación analítica de la función, ya que saben que su ecuación se modifica en b unidades sobre la ordenada al origen, pero nuevamente sólo asocian el movimiento con la ordenada al origen como punto intersección $P(0, b)$.
- Con respecto al análisis sobre el efecto del parámetro que representa la pendiente de la recta, pueden visualizar que cambia la inclinación de la recta, sin embargo, con el programa Graphmatica, no son capaces de distinguir la relación entre el valor numérico del parámetro de la inclinación en particular. No distinguen la magnitud del cambio entre las variables a pesar de que en las actividades se trabajaron ejercicios para distintos valores numéricos, valores $a > 1$ y para valores $0 < a < 1$ y también para negativos. Sólo distinguen de forma general el cambio en la inclinación.

- Cuando la pendiente de la recta toma el valor de 1 ó -1, algunos alumnos interpretan como que no tiene valor porque no ven ningún valor numérico como coeficiente de la variable ejemplo: $f(x) = x + 3$ ó $f(x) = -x + 4$.
- Cuando trabajan ejercicios en donde tienen como referencia una pendiente y tienen que encontrar la pendiente de una recta paralela o una perpendicular, no tienen problema en distinguir la regla que deben aplicar y simbolizarla. Algunos cometen errores de procedimiento algebraico. En cambio, cuando se trata de simbolizar familia de rectas que cumplan con que sean paralelas ó perpendiculares, tampoco logran generalizarlo.
- En actividades en donde se pide que expliquen lo que hacen o que comprueben alguna condición, algunos alumnos no siguen las instrucciones completas. Ni siquiera comparan lo gráfico con lo analítico como se pide para comprobar su resultado.
- La mayoría presenta confusión con la notación simbólica que representa las intersecciones con los ejes. Pueden calcular las intersecciones con ambos ejes, algunos con procedimiento sencillo de álgebra y otros sólo visualizándolo en la gráfica, si la instrucción es calcule las intersecciones con los ejes, pero no distinguen la diferencia entre $f(0)$ y $f(x) = 0$ como notación, inclusive muchos comentan que ya lo hicieron, sin reconocer que para $f(0)$ tienen que encontrar un valor para la variable dependiente y para $f(x) = 0$ tienen que encontrar un valor particular para la variable independiente.
- En los ejercicios en que trabajan con rectas horizontales y verticales, algunos alumnos no distinguen si se trata de una recta que tiene pendiente cero o de una recta que no tiene pendiente (pendiente infinita). Para algunos estudiantes el término cero significa lo mismo que “no tiene” y no son capaces, por tanto, de poder simbolizar de manera correcta la ecuación de la recta correspondiente. Si se especifica recta horizontal algunos alumnos si pueden simbolizar la ecuación, lo mismo cuando se especifica ecuación de recta vertical. Pero no cuando se menciona el tipo de pendiente.
- Tienen problemas para simbolizar ecuaciones de rectas verticales u horizontales que pasen por el origen.

- Cuando se pide que den ejemplos particulares de rectas que pasen por ciertos cuadrantes los alumnos no tienen problema, en general, para identificar las condiciones que deben de cumplir el parámetro de la pendiente o el de la ordenada al origen y pueden simbolizar la ecuación (excepto para algunos alumnos cuando las rectas son horizontales ó verticales); pero al momento de pedir que simbolicen cualquier recta o familia de rectas no son capaces de generalizar y algunos entre ellos mencionan que ni siquiera entienden la instrucción.
- Cuando analizan los intervalos en dónde la función es positiva y en dónde es negativa usan la visualización en la gráfica de la recta para responder, al igual cuando responden a los intervalos de dominio. El problema se encuentra al momento en que simbolizan los intervalos, puesto que no ponen atención en los extremos de los mismos, simbolizando con paréntesis o corchete, para indicar si el valor se incluye o no. Los alumnos no distinguen esta condición, muy pocos son los estudiantes que no cometen errores en eso.
- Cometen errores al interpretar y simbolizar el rango, muchos alumnos lo escriben equivocadamente, o no lo escriben, pero no indican la razón, les cuesta trabajo distinguir entre la variable independiente y la dependiente de manera visual y por intervalos. Se esperaba que lo pudieran apreciar en la gráfica y fuera apoyo para su respuesta, pero no se logra.
- En ejercicios de rectas, donde tienen que realizar algún procedimiento de álgebra, para poder determinar tanto el valor del parámetro de la pendiente y el de la ordenada al origen, cuando los coeficientes de las variables no están explícitos y además son valores fraccionarios, poco menos de la mitad de los alumnos cometen errores en sus procedimientos, al manipular, agrupar ó despejar las variables.
- Algunos alumnos cuando deben resolver sistemas de ecuaciones lineales cometen errores en los procedimientos y no encuentran la solución correcta; como no comprueban o validan por falta de costumbre, no se dan cuenta de su error, ni siquiera en los casos que en que tienen la gráfica para visualizar, comparar y comprobar. Ni siquiera lo hacen cuando en algunos ejercicios deben distinguir si las rectas son paralelas, perpendiculares, ó si tienen algún punto intersección.

- En la solución de sistemas de ecuaciones lineales, cuando se tienen rectas paralelas (sin solución) o rectas equivalentes (infinitud de soluciones) la mayoría de los alumnos no son capaces de interpretar el resultado de su procedimiento. Al desaparecer las variables les queda ya sea una contradicción o una tautología, pero no la reconocen como tal. Algunos alumnos comentan que se pierden las variables o usan el término “se va todo” pero no son capaces de interpretar el significado respecto al tipo de solución del sistema.
- Cuando se presentan gráficas de rectas paralelas o equivalentes, algunos alumnos como no entienden la solución de manera analítica, tampoco son capaces de comparar los parámetros de las pendientes y ordenadas respectivas. No pueden aprovechar la gráfica para hacer un análisis alternativo. Se observa claramente que los alumnos tienden siempre a mecanizar procedimientos memorizados pero no son capaces de interpretarlos de manera diferente. Sólo en el caso en que el sistema tiene solución única, pueden interpretar la solución como valor para las variables, pero incluso algunos no relacionan la solución con un punto en el plano dado por pares coordenados.
- En sistemas de desigualdades lineales, algunos alumnos no distinguen que el símbolo de desigualdad representa una región. Muy pocos alumnos identifican trazar gráficamente las regiones.
- Al resolver desigualdades, no aplican las propiedades correspondientes correctamente y no llegan a la solución. En sus procedimientos, algunos utilizan las reglas para resolver ecuaciones, sin distinguir que se trata de desigualdades.

5.2.2 Práctica 4 (función cuadrática)

- A partir de una tabla de datos, relacionados entre sí mediante una función cuadrática, no todos los estudiantes son capaces de distinguir esta relación ni tampoco de

simbolizarla. Algunos alumnos tampoco distinguen ni su vértice ni las intersecciones con los ejes. No logran distinguir la relación entre las variables y su variación conjunta.

- Los estudiantes no comprueban sus resultados comparando con los datos dados y su respectiva gráfica. No tienen la costumbre de validar.
- A partir de una función cuadrática dada, pueden manipular valores de la variable independiente para calcular los respectivos valores para la variable dependiente mediante un procedimiento de sustitución. Así pueden completar las tablas de las actividades. Utilizan procedimientos mecanizados que les impiden interpretar la relación funcional entre variables y parámetros, además de interpretar el efecto de los parámetros sobre la función.
- A partir de la función definida analíticamente, los alumnos son capaces de determinar el valor del vértice de la parábola, de identificar la concavidad de la función y de encontrar las intersecciones con los ejes. Algunos resuelven cada pregunta como actividad aislada, es decir, no logran identificar la relación que los parámetros y las variables tienen sobre cada función y sobre su gráfica. Pocos son los alumnos que responden sólo visualizando la gráfica de la parábola y no relacionan la representación gráfica con lo analítico. Pero prácticamente todos hacen los procedimientos algebraicos de manera correcta.
- Al visualizar la gráfica de la parábola, los alumnos pueden determinar los intervalos donde la función crece y decrece y los intervalos en donde la función es positiva y negativa. Al simbolizar los intervalos, al igual que en el caso de la función lineal, sólo algunos alumnos se equivocan al determinar si los valores extremos del intervalo se incluyen o no. Pocos alumnos confunden las variables en su análisis de la función y se equivocan al simbolizar los intervalos.
- Los alumnos no resuelven cada uno de los incisos en las actividades y por tanto no hacen el análisis de los parámetros involucrados en las funciones como se esperaba, ni pueden comparar la representación analítica con la gráfica.

- Con la ayuda del programa Graphmatica se esperaba que los alumnos pudieran distinguir con claridad el efecto del parámetro k sobre la función cuadrática y sobre su gráfica; sin embargo los alumnos sólo visualizan lo general. Mencionan que cambia la intersección con el eje Y u ordenada al origen hacia arriba o hacia abajo sobre el eje. Algunos comentan que se mueve su vértice, pero no reconocen que la gráfica completa se desplaza de manera vertical en k unidades, no relacionan tampoco, las coordenadas del vértice con los valores de los parámetros h y k . Pueden distinguir que no cambia la concavidad pero sin relacionarla con el parámetro correspondiente.
- Los alumnos reconocen los valores del dominio de la función pero no todos pueden simbolizar correctamente los del rango y únicamente unos cuantos son capaces de relacionar uno de los extremos con el valor del parámetro k .
- Con respecto al análisis del efecto del parámetro h sobre la función y su respectiva gráfica, el programa Graphmatica sólo ayuda a los alumnos visualizar lo general: el desplazamiento horizontal de la gráfica sobre el eje X. Algunos alumnos relacionan la dirección del desplazamiento de la función con el signo y el valor del parámetro h , pero nuevamente su análisis enfoca sólo sobre el movimiento del vértice, sin mencionar el movimiento de la función completa. No relacionan las coordenadas del vértice con los valores de los parámetros h y k . Algunos alumnos distinguen también que no hay cambio en la concavidad pero sin reconocer el papel de cada uno de los parámetros en particular sobre las traslaciones de la gráfica.
- Los alumnos encuentran correctamente el intervalo que corresponde al dominio de las funciones, y algunos simbolizan bien el intervalo para el rango a partir de la representación gráfica.
- Al hacer el análisis del efecto del parámetro a sobre la función y su gráfica, los alumnos tienen problemas semejantes a los que se han descrito para el análisis de los parámetros anteriores, Graphmatica sólo les ayuda a visualizar lo más general. Distinguen que según el signo del parámetro, la parábola tiene una determinada concavidad, tratándose de un mínimo o de un máximo, y que en todas las parábolas dadas el vértice es el mismo.

- Muy pocos alumnos relacionan el valor del parámetro a con la apertura de la parábola, a pesar de que los ejercicios de las actividades hacen énfasis en la interpretación del efecto del parámetro. Los alumnos mencionan únicamente que se modifica la apertura de la gráfica, pero no distinguen el efecto del parámetro sobre cada uno de los puntos de la función ni tampoco, el valor del parámetro con que tanto se estira o se contrae esa apertura.
- En las actividades en donde se analiza el efecto del parámetro a , no consideran el efecto de los otros dos parámetros. Algunos alumnos comentan que el vértice es el mismo pero sin relacionarlo de forma generalizada con los valores de los parámetros.
- Los alumnos no distinguen tampoco que el parámetro afecta a cada punto de la función. No logran generalizar cada valor resultante de la variable dependiente como el producto del parámetro con el valor de la función ($a f(x)$).
- Encuentran correctamente el intervalo correspondiente al dominio de las funciones y la mayoría también encuentra el correspondiente al rango. Muy pocos alumnos mencionan la relación entre el intervalo del rango y el signo del parámetro.
- En la actividad 6, se pregunta el efecto de cada uno de los parámetros sobre la función pero no para ejemplos particulares sino en forma general. Los alumnos logran identificar con mayor facilidad el papel de cada uno de los parámetros cuando los analizan por separado, pero cuando se integran todos en la simbolización de la función, muy pocos alumnos distinguen la generalización. No reconocen el efecto de cada uno de los parámetros sobre la función. Sólo indican que en el caso en que se multiplica la función por un parámetro se afecta su concavidad y si se suma o resta un parámetro la función se desplaza verticalmente y si se suma o resta un valor a la variable independiente la función se desplaza horizontalmente, aunque no indican el sentido del desplazamiento. Los alumnos identifican las transformaciones sobre la función de manera memorizada o poniendo atención sobre signos externos, pero no puede decirse que son capaces de interpretar el efecto de los parámetros sobre la relación funcional como un todo.

5.2.3 Práctica 5 (función racional)

- A partir de la forma analítica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, los alumnos pueden formar la tabla de valores para la variable dependiente, dados valores para la variable independiente. Pueden identificar con los datos de la tabla, el comportamiento gráfico de la función, reconociendo que la gráfica no toca los ejes.
- Al igual que en las prácticas anteriores, al trazar cada una de las gráficas con Graphmatica, la mayoría de los alumnos sólo identifican lo general. No resuelven paso a paso cada una de las actividades como se pide, lo que les impide reflexionar sobre lo que se pretendía con ellas, y no comparan cada gráfica con la original para poder determinar lo que cambia y lo que no cambia con relación a los valores de los parámetros.
- Con respecto al análisis del efecto del parámetro k sobre la función, sólo algunos alumnos relacionan el desplazamiento vertical con el signo del parámetro. Algunos mencionan que la gráfica se desplaza sobre el eje Y, a pesar de que la gráfica no toca este eje (cuando $h = 0$). La mayoría de los alumnos no relaciona el valor del parámetro k con la asíntota horizontal de la función; sólo algunos reconocen que cambia la asíntota horizontal y que cambia el rango.
- Algunos alumnos mencionan que lo que cambia es el punto en donde se empieza a trazar la gráfica de la función, no analizan la relación entre variables a lo largo de toda la gráfica. Se fijan en la intersección de las asíntotas como apoyo visual.
- Algunos alumnos tienen dificultad para simbolizar la función.
- La mayoría de los alumnos escriben correctamente el dominio de la función, reconociendo que la variable independiente no puede valer 0 (cuando $h = 0$) y por tanto, simbolizan bien el intervalo. Pero sólo algunos también identifican el intervalo correspondiente al rango de la función.
- Los alumnos tienen dificultades para relacionar lo visual con lo analítico.

- El análisis del efecto del parámetro h sobre la gráfica de la función resulta más difícil para los alumnos, reconocen que el desplazamiento es horizontal, pero pocos distinguen la dirección en la que se da ese desplazamiento en relación al signo del parámetro h . El término $(x - h)^{-1}$ como lleva signo negativo hace que se confundan al tratar de distinguir hacia que lado es el movimiento. Sólo algunos alumnos relacionan el valor del parámetro h con la asíntota vertical que tiene la gráfica.
- Algunos alumnos distinguen el cambio de la intersección de la gráfica de la función con el eje Y. La mayoría se enfoca sólo en signos externos como el punto intersección pero no analizan como cambia la relación funcional completa.
- Pocos alumnos mencionan que no cambia la forma de la gráfica. En general sólo distinguen algo específico que cambia o que permanece sin cambiar, pero no establecen una relación entre cada una de las gráficas de las distintas funciones que se presentan con la original y con cada uno de los efectos de los parámetros en particular.
- Aún cuando los alumnos encuentran el dominio y el rango de la función, lo hacen en forma global. Muy pocos relacionan con los valores de los parámetros.
- El poder ver la gráfica ayuda a la mayoría de los alumnos a visualizar aspectos generales, como por ejemplo encontrar los intervalos correspondientes al dominio y al rango de la función, los intervalos en donde crece y decrece, los intervalos en donde es positiva y donde es negativa, los desplazamientos, pero no les ayuda a entender totalmente el efecto de cada uno de los parámetros según su signo y valor sobre el comportamiento de la función.
- Con respecto al análisis del efecto del parámetro a sobre la función. Los alumnos comentan que la gráfica se despega o se pega a los ejes (asíntotas), o que cambia su apertura o amplitud. Nuevamente ponen atención en los signos externos y en el caso del análisis de lo que sucede si $a > 1$ o $0 < a < 1$, pueden distinguir el tipo de transformación pero únicamente respecto al comportamiento global de la gráfica de la función. Por ejemplo, algunos alumnos reconocen los cuadrantes en los que está trazada la gráfica y lo relacionan con el signo del parámetro a .

5.3 Análisis de las respuestas de exámenes parciales y departamentales

a) Determine la ecuación de la recta que es perpendicular a $4x + 4y = -32$ y que

pasa por la intersección de las rectas $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = -1$ con $2x + y = 16$

18 alumnos de 28 llegaron a la respuesta correcta. Para resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas, manipularon las variables, reconocieron la presencia de algo desconocido y aplicando algún método apropiado y su correspondiente procedimiento algebraico, pudieron encontrar el punto solución $P(x, y)$ del sistema. Con la recta dada como referencia, reconocieron la condición de rectas perpendiculares, manipularon la ecuación y determinaron el valor del parámetro correspondiente de la pendiente. Con el punto encontrado, y el valor del parámetro de la pendiente perpendicular correspondiente encontraron la ecuación de la recta que se pedía. De éstos 18 alumnos, sólo 10 sustituyeron el punto $P(x, y)$ en las ecuaciones originales para comprobar que fuera el punto solución. Los demás no validaron.

10 alumnos de 28 no encontraron la recta correcta. El error más común fue el no llegar al punto solución del sistema de ecuaciones por errores cometidos en sus procedimientos algebraicos y como no validan, no se dieron cuenta de sus errores. De estos 10 alumnos, 3 de ellos tuvieron mal la pendiente de la recta perpendicular por no saber bien la condición de rectas perpendiculares. 2 alumnos de los 10, obtuvieron bien el punto solución del sistema de ecuaciones, pero al manipular para encontrar la ecuación de la recta cometieron errores.

Poder simbolizar la ecuación de la línea recta no fue problema, el error fue no encontrar los valores de los parámetros o el punto $P(x, y)$ solución correctamente.

b) Resuelva las siguientes desigualdades y exprese su resultado en notación de intervalo

$$a) \frac{x+1}{4} - \frac{x}{3} > 1 - \frac{1-2x}{6}$$

$$b) -8 \leq \frac{7-x}{5} < -3$$

$$c) 3x - 5 < 1 + x \leq 2x - 3$$

En esta pregunta los alumnos pueden interpretar a la variable x como incógnita y reconocen que deben utilizar un procedimiento algebraico para poder resolver las desigualdades.

Sólo 10 alumnos de 28 llegaron a la solución correcta de los tres incisos; el resto de ellos presentaron errores en sus procedimientos algebraicos. Los errores fueron en la aplicación de las propiedades básicas para resolver desigualdades; errores en su manipulación algebraica; errores en la simbolización del intervalo solución por no reconocer el sentido de la solución con respecto a la variable y en la desigualdad del inciso c que deben resolver por separado y luego intersectar los tramos solución, la mayoría de los alumnos no supo cómo hacerlo.

c) Encuentre la función lineal $f(x)$ en cada inciso con la información dada y graficar cada una para comprobar:

$$c.1) f(-3) = 4 \quad y \quad f(1) = -6$$

En esta pregunta, los alumnos reconocieron que para encontrar la ecuación de una función lineal necesitaban el valor de la pendiente y un punto. Al reconocer la presencia del valor desconocido para el parámetro de la pendiente y de la ecuación de la función lineal, manipularon la información para que mediante un procedimiento algebraico adecuado pudieran resolver lo que se pedía.

22 alumnos de 28 reconocieron la relación entre las variables, distinguiendo que la información dada correspondía a dos puntos e identificaron cuál era el valor de la coordenada para la variable independiente y cuál era el de la variable dependiente. De estos alumnos, 4 de ellos no llegaron a la ecuación correcta por problema en la

manipulación de los signos al obtener el valor del parámetro de la pendiente y por tanto, no encontraron la ecuación correcta. Al igual que en otras preguntas, los alumnos que tienen errores algebraicos, como no validan, no se dan cuenta de que cometieron algún error.

6 alumnos de 28 tuvieron error al interpretar los valores correspondientes para la variable independiente y para la variable dependiente, por lo que partieron desde una información incorrecta para los puntos dados, por lo que la ecuación encontrada no era la correcta.

c.2) Que sea perpendicular a la función del inciso c.1 y que pase por el punto $P(5, 3)$

De los 22 alumnos que obtuvieron la recta correcta en el inciso anterior, 2 tuvieron error en el signo de la pendiente de la recta perpendicular que tenían que determinar y por tanto, no llegaron a la ecuación de la recta correcta y 3 tuvieron problema en la manipulación algebraica y tampoco llegaron a la respuesta correcta y como no sustituyen la información que tienen para validar, no detectaron sus errores.

De los 6 que tuvieron mal las coordenadas de los puntos al inicio del inciso anterior, 2 de ellos tuvieron error al determinar la pendiente de la recta perpendicular por lo que no llegaron a la ecuación correcta y otro tuvo error en el procedimiento de álgebra al calcular la ecuación de la función lineal.

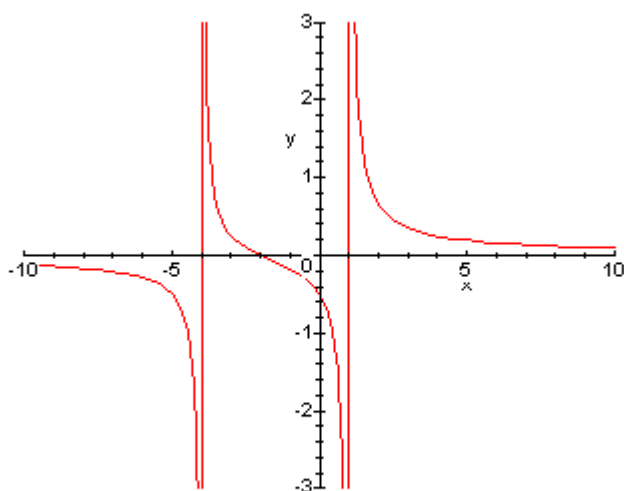
c.3) Desplazar 4 unidades verticalmente hacia arriba la gráfica de la función del inciso c.2 ¿Cuál es la nueva función $f(x)$?

De los 28 alumnos, 24 de ellos no tuvieron problema en reconocer cómo un desplazamiento vertical transforma la ecuación de la función lineal y el efecto que tiene sobre el parámetro de la ordenada al origen afectando el comportamiento de cada punto sobre la recta. Sumaron cuatro unidades al valor de dicho parámetro correspondiente a la ordenada al origen o término constante en la función lineal llegando a la respuesta correcta, independientemente si la ecuación de la recta que habían encontrado en el inciso anterior era correcta o incorrecta; otros dos alumnos restaron cuatro unidades y los otros dos alumnos no contestaron nada.

c.4) Que tenga pendiente cero y que pase por el punto $P(0, -5)$

6 alumnos de 28 no hicieron ningún procedimiento algebraico al reconocer que cuando el valor del parámetro de la pendiente toma el valor de cero corresponde a una recta horizontal y que la forma analítica de su ecuación es $y = -5$. El resto de los alumnos calcularon, mediante un procedimiento algebraico, la ecuación de la función con los datos dados y sólo 3 de ellos tuvieron error en su manipulación no llegando a la ecuación correcta.

d) Utilice la gráfica de la siguiente función $f(x)$ para responder las siguientes preguntas



$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x-4}$$

- d.1) Determine el dominio y el rango de $f(x)$**
- d.2) Para que valor de x se cumple que $f(x) = 0$**
- d.3) El punto $P(0, \frac{1}{2})$ está en $f(x)$?**
- d.4) Determine $f(-4)$, y $f(4)$**
- d.5) Determine el intervalo para x donde $f(x)$ crece**
- d.6) ¿Es $f(-5)$ positiva o negativa?**

d.7) Para que valores de x se cumple que $f(x) < 0$

d.8) ¿Cuántas veces, la recta $y = 1$, corta a $f(x)$?

En esta pregunta los alumnos tienen tanto la función analítica como la gráfica para poder responder cada uno de los incisos.

10 alumnos de 28 respondieron que el dominio era $[-10, 10]$ y el rango $[-3, 3]$ porque es lo que muestra la gráfica a pesar de que tienen la representación analítica de la función.

11 alumnos de 28 encontraron correctamente el intervalo para el dominio, algunos respondieron sólo visualizando y otros resolvieron para qué valores de la variable x el denominador de la función analítica se hacía cero entendiendo la relación entre las variables.

4 alumnos de 28 tuvieron error al factorizar el denominador por lo que no encontraron los valores correctos para la variable independiente x para los cuales el denominador toma el valor de cero. Sin embargo, no compararon sus resultados numéricos con la gráfica para validar su respuesta, lo que pone de manifiesto su tendencia a hacer de manera muy mecánica sus manipulaciones.

3 alumnos no contestaron nada.

9 alumnos de 28 encontraron bien el intervalo correspondiente para el rango.

4 alumnos de 28 se dieron cuenta de que para valores cada vez más grandes ó cada vez más pequeños para la variable x , la variable y no toma el valor de cero, respondieron $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ sin darse cuenta que el punto $P(0, -0.5)$ pertenece a la gráfica.

5 alumnos no respondieron nada para el rango.

16 alumnos de 28 respondieron bien el inciso d.2, la mayoría de ellos respondieron visualizando la respuesta de la gráfica, al analizar las variables y su correspondiente valor, y los otros, hicieron el procedimiento algebraico para resolver la ecuación.

7 alumnos de 28 interpretaron mal la pregunta y respondieron para $f(0)$ como si la pregunta se trataba de encontrar la intersección con el eje Y .

2 alumnos de 28 manipularon incorrectamente y llegaron a respuestas erróneas.

3 alumnos no respondieron nada.

23 alumnos de 28 respondieron bien el inciso d.3, la mayoría lo respondió analizando la gráfica, sólo algunos hicieron procedimiento algebraico.

Los 5 alumnos, de 28, que tuvieron mal la respuesta del inciso d.3 cometieron errores de signo al manipular y no validaron con la información que podían visualizar en la gráfica.

18 alumnos de 28 respondieron correctamente el inciso d.4; la mayoría de ellos calcularon el valor correspondiente para la variable dependiente y a partir del correspondiente valor dado para la variable x . Para $x = -4$ algunos reconocieron de la gráfica que no era un valor en el dominio de la función.

De los 4 alumnos que factorizaron incorrectamente el denominador y no encontraron correctamente el dominio, tres calcularon $f(-4)$ y reconocieron que el denominador se hacía cero, pero no se regresaron a comparar con la respuesta del inciso a y no corrigieron su error.

7 alumnos de 28 tuvieron error al manipular y calcularon incorrectamente el correspondiente valor para la variable y ; al no compararlo con la gráfica, no se percataron de su error.

3 alumnos no respondieron el inciso d.4.

26 alumnos de 28 respondieron correctamente el inciso d.5, comentando que la función $f(x)$ nunca crece. Sólo dos no contestaron.

23 alumnos de 28 respondieron correctamente al inciso d.6. La mayoría, como en otros incisos, respondió sólo a partir de visualizar la información de las variables en la gráfica, muy pocos hicieron procedimiento algebraico.

4 de los 28 alumnos que se equivocaron, manipularon incorrectamente y no validaron con la gráfica; esto demuestra poca comprensión de la relación funcional entre variables. Estos alumnos no distinguen la relación que existe entre la función con la gráfica.

1 alumno no contestó nada.

15 alumnos de 28 encontraron correctamente el intervalo solución del inciso d.7.

11 de los 28 que se equivocaron no simbolizan correctamente los intervalos solución, o cometen error al indicar los valores extremos, o escriben dando el valor mayor como el extremo izquierdo del intervalo o no reconociendo correctamente el intervalo correspondiente o incluyendo valores donde $y = 0$ y no reconociendo que el cero no es negativo.

2 no respondieron nada.

Sólo 13 alumnos de 28 respondieron correctamente el inciso d.8.

e) Dada la función $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ determine lo siguiente:

e.1) Las coordenadas del vértice, indicando si es un mínimo o un máximo de la función

19 alumnos de 28 llegaron a la respuesta correcta. 14 de ellos aplicaron la técnica de completar el trinomio cuadrado perfecto para escribir la ecuación de la parábola en su forma estándar y poder identificar los valores de los parámetros h y k correspondientes a los desplazamientos horizontal y vertical respectivamente, y apoyándose de ellos, pudieron trazar la gráfica. Los otros 5 alumnos encontraron la coordenada para la variable independiente x usando fórmula del vértice, y el correspondiente valor para la coordenada de la variable dependiente y la encontraron sustituyendo a x en la función. La mayoría respondió que el vértice corresponde a un mínimo, debido el signo positivo del coeficiente numérico de x^2 .

Los 9 alumnos que no llegaron a la respuesta correcta presentaron problemas en sus procedimientos algebraicos o aplicaron mal el método para pasar a forma estándar no factorizando como primer paso, el coeficiente numérico de x^2 , sin embargo identificaron que el vértice correspondía a un mínimo.

e.2) la concavidad de la grafica

25 alumnos de 28 respondieron que la parábola era cóncava hacia arriba o de concavidad positiva, algunos explicando que se debía al coeficiente positivo del parámetro a y otros sin mencionar nada.

e.3) Las intersecciones con los ejes cartesianos

Ningún alumno tuvo error al dar la intersección con el eje Y . Algunos alumnos identificaron que correspondía al término constante de la función cuadrática y no tuvieron que hacer ningún procedimiento. Otros alumnos hicieron procedimiento para calcular $f(0)$ y encontrar el valor correspondiente para la variable dependiente cuando $x = 0$.

17 alumnos de 28 calcularon sin error la ecuación para determinar las raíces en donde la parábola cortaba al eje X utilizando, algunos, la fórmula general y, otros, resolviendo la ecuación en forma estándar.

7 alumnos de 28 no llegaron a la respuesta correcta por error en el procedimiento o por aplicar mal la fórmula general.

4 alumnos no hicieron nada para encontrar las intersecciones con el eje X.

e.4) La gráfica

25 alumnos de 28 trazaron una gráfica, de éstos, sólo 15 tenían la información correcta correspondiente al vértice y a las intersecciones con ambos ejes, los demás cometieron errores en alguno de los datos calculados en los incisos anteriores.

f) Para la función $f(x) = \log_{10}(x-3) - 2$, determine lo siguiente:

f.1) la función inversa $f^{-1}(x)$

Encontrar la inversa de una función, aplicando los tres pasos, no implica una manipulación de la relación funcional difícil. Los alumnos saben que la inversa de una función logarítmica es una función exponencial, sin embargo, hacer la manipulación necesaria para encontrar su correspondiente inversa implica interpretar claramente la relación funcional como variación conjunta, o utilizar el procedimiento de manera memorística aunque sólo se piense en la correlación entre variables, además de la definición de inversa. Como se vio en el análisis de las prácticas, muchos de los alumnos sólo fueron capaces de desarrollar la idea de función como correspondencia entre variables. Para estos alumnos es difícil interpretar a la f como una nueva variable y que jugará el papel de la variable independiente y manipular para encontrar una relación en la que la variable x es la nueva variable dependiente y ello se traduce en que no son capaces de llevar a cabo la manipulación requerida.

15 alumnos de 28 encontraron bien la función inversa, reconocieron bien la base de la función logaritmo para determinar que la función exponencial debía de tener la misma base.

5 alumnos de 28 en lugar de encontrar la inversa, escribieron la recíproca de $f(x)$, lo cual indica claramente que no han entendido la relación entre variables.

El resto de los alumnos algunos empezaron el procedimiento, pero no fueron capaces de hacer correctamente la manipulación, probablemente aplican el procedimiento de forma memorística y ya no continuaron, y los demás, no contestaron, a pesar de que el tema de funciones inversas se trabajó a detalle con todo tipo de funciones.

f.2) las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$

A lo largo de todo el semestre se trabajó sobre el efecto que cada parámetro tiene sobre cada una de las funciones analizadas: lineales, cuadráticas, cúbicas, con radicales, valor absoluto, exponenciales, logarítmicas, semi-cónicas. Sin embargo, los alumnos siguieron mostrando dificultades con la comprensión y el trazo de funciones logarítmicas y exponenciales con sus respectivas transformaciones.

Los procedimientos de los alumnos muestran que al trazar la gráfica de otra función, los alumnos toman como referencia algunos puntos de apoyo pues recuerdan la forma general de la gráfica de cada función en particular, entre las que fueron desarrolladas durante el semestre. Una vez que son capaces de identificar los valores de los parámetros que permiten desplazar, reflejar, o deformar la gráfica de la función de base, pueden trazar la función requerida con más detalle.

Por ejemplo, si se trata de una función cuadrática los alumnos identifican la parábola básica y después trabajan con algún método para identificar su vértice, la concavidad, las intersecciones para encontrar los valores de los parámetros que le corresponden a la función transformada y entonces dibujarla, pero cuando se trata de funciones exponenciales y logarítmicas, tienen dificultades para identificar las características de la función básica. Están tan poco familiarizados con su gráfica y con su forma funcional que no son capaces de encontrar puntos de apoyo que les permitan trazar las funciones requeridas. Esto pone de manifiesto también que los alumnos no han logrado una comprensión significativa de las funciones y que usan mucho los procedimientos memorizados para resolver los problemas planteados. En el caso de las funciones logarítmicas y exponenciales no recuerdan lo que se hizo en la clase, no recuerdan la forma de las funciones básicas y no son capaces de generalizar lo que ocurre a las gráficas cuando se modifican los parámetros; por ello no lo logran dibujar la gráfica correctamente. De cualquier manera, se observa en los datos que para la mayoría de estos alumnos es menos difícil el trazo de las gráficas de las funciones exponenciales que el de las logarítmicas.

Sólo una tercera parte de los alumnos pudieron identificar los parámetros h y k correspondientes a los desplazamientos horizontal y vertical respectivamente de estas funciones y trazaron la gráfica de ambas funciones de manera aproximada.

f.3) verifique que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas, mediante el cálculo de las composiciones pertinentes

Dado que muchos alumnos no fueron capaces de encontrar la función inversa correctamente, tampoco fueron capaces de hacer la composición necesaria para hacer la verificación. En las respuestas de los alumnos se observa que como saben, nuevamente de manera memorística, que al hacer la composición de estas funciones se debe obtener como resultado x , algunos de ellos “cuadran” el procedimiento inventando manipulaciones algebraicas.

De los 15 alumnos que calcularon correctamente la función inversa, 11 fueron capaces de hacer la composición de funciones y la manipulación requerida para la verificación. Los otros 4, sólo fueron capaces de sustituir la función inversa como variable independiente de la función original para hacer la composición y, como no son capaces de hacer la manipulación únicamente tachan todas las letras excepto x . Esto muestra nuevamente la falta de comprensión de los alumnos de la relación funcional.

Algunos de entre los 13 alumnos que no encontraron correctamente la función inversa, “cuadraron” el procedimiento para terminar con x , unos cuantos intentaron hacer la composición, pero no continuaron con la manipulación. Otros no respondieron.

g) Grafique en el plano cartesiano, el siguiente subconjunto:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-2| \geq 3, |y-1| < 2\}$$

Para poder trazar la gráfica del conjunto W se requiere que los alumnos comprendan el valor absoluto como función o que utilicen procedimientos algebraicos para resolver cada una de las desigualdades, utilizando tanto la definición del valor absoluto como sus propiedades.

17 alumnos de 28 fueron capaces de identificar el tipo de desigualdad que tenían que resolver y con un procedimiento algebraico adecuado llegaron al resultado correcto. Identificaron que una de las desigualdades tenía como incógnita a la variable x mientras que en la otra desigualdad la incógnita era la variable y , sin que éstas variables estuvieran relacionadas en una forma funcional $y = |x|$.

13 alumnos de los 17, trazaron la región correspondiente al conjunto W correctamente, y los otros 4 no lo lograron. 8 alumnos de los 17 dibujaron una recta continua cuando se trataba de una desigualdad mayor igual o una recta punteada en el caso de desigualdad

estricta; no fueron capaces de determinar cómo queda la gráfica de la región cuando incluye o no algún o algunos valores.

7 alumnos de 28 reconocen el tipo de desigualdad que deben de resolver pero mostraron dificultades al manipular los datos y no llegaron al resultado correcto. Algunos de entre ellos tienen dificultades en la manipulación porque no aplican correctamente las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades; las resuelven como si fueran ecuaciones sin modificar el sentido de la desigualdad cuando multiplican o dividen por un número negativo.

4 alumnos de 28 resolvieron las desigualdades sin considerar que la desigualdad el valor absoluto. No encuentran por ello que hay dos casos en la solución y consideran únicamente el caso en que la expresión que se encuentra dentro de valor absoluto es positiva. Por tanto, su gráfica es incorrecta.

h) Sea $f(x) = (x+2)^2 - 3$ trace la gráfica de $f(x)$ y bosqueje la gráfica de la función

recíproca $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

22 alumnos de 28 identificaron la función cuadrática escrita en su forma estándar y en esta forma funcional reconocieron los valores de los parámetros a , h y k para poder determinar el vértice y la concavidad de la parábola y por tanto, las transformaciones correspondientes derivadas de los valores particulares de dichos parámetros.

17 alumnos de los 22 reconocieron los valores correctos para los parámetros, escribieron el vértice y determinaron que se trataba de un mínimo.

5 alumnos de los 22 no identificaron correctamente el signo de los parámetros correspondientes a las coordenadas del vértice, por lo que al trazar la gráfica la parábola resultante no era la correcta.

6 de los 28 alumnos resolvieron el binomio al cuadrado de la forma dada para la parábola, agruparon datos comunes y escribieron la función en su forma general. Después calcularon la coordenada x del vértice utilizando fórmula de vértice y con ese valor, sustituyendo en la función, trataron de encontrar la coordenada correspondiente para la variable y . De esos 6 alumnos, 4 encontraron los valores de los parámetros correctamente y trazaron la gráfica de la parábola requerida. 2 de los 6 no manipularon

correctamente el binomio al cuadrado y por tanto, no llegaron a los valores correctos del vértice.

De los 21 alumnos que determinaron correctamente las coordenadas del vértice, 18 encontraron correctamente las intersecciones tanto con el eje Y como con el eje X.

En el caso del trazo de la gráfica de la función recíproca, sólo 10 alumnos fueron capaces de trazarla correctamente de manera aproximada. La mayoría de los alumnos no identificaron ni los puntos de apoyo ni las condiciones que deben cumplirse para que una función sea la recíproca de otra, para poder trazar la gráfica.

i) Utilizando operaciones gráficas, dibuje la siguiente función

$f(x) = -3(x+4)^{-1} + 2$ y determine:

20 alumnos de los 28 identificaron sin error los valores correspondientes de los parámetros a , h y k . 17 alumnos de los 20 reconocieron que se trataba de una función racional y reconocieron cómo es la gráfica de este tipo de funciones. Identificaron además que el valor del parámetro h corresponde a la ecuación de la asíntota vertical con su respectivo desplazamiento horizontal y el valor del parámetro k corresponde a la ecuación de la asíntota horizontal y su correspondiente desplazamiento vertical. Sin embargo algunos alumnos tuvieron dificultades con el trazo de la gráfica, 3 de ellos no relacionaron el signo negativo con la reflexión con el eje X.

3 alumnos de los 20 trazaron una parábola sin identificar que en la función potencia el exponente era -1 y no 2.

6 alumnos de 28 respondieron incorrectamente el valor de los parámetros al cometer errores en los signos y al momento de trazar la gráfica, 2 trazaron una parábola, los otros 4 trazaron una función racional identificando las correspondientes asíntotas y sus correspondientes desplazamientos.

2 alumnos de 28 no respondieron.

i.1) dominio y rango

A pesar de que los alumnos identificaron la ecuación de la asíntota vertical, y muchos de ellos trazaron correctamente la gráfica de $f(x)$, no todos pudieron encontrar el dominio de la función correctamente, considerando que el valor de la coordenada h no se debe de incluir en el mismo. Lo mismo sucede cuando los alumnos buscan el rango

de la función. Se observa en los datos que los alumnos reconocen de manera memorística los valores de los parámetros y su relación con la gráfica, pero no interpretan esa información ni gráficamente ni algebraicamente.

i.2) intersecciones con los ejes

Para calcular la intersección con el eje Y es necesario identificar que la incógnita es el valor de la variable y cuando x toma el valor 0 . Algunos alumnos manipulan incorrectamente y no logran obtener la intersección dado que no consideran al término $(x + 4)^{-1}$ como una variable que pueden manipular. Otros alumnos cometen errores de manipulación al considerar que el coeficiente -3 que multiplica a $(x + 4)^{-1}$ corresponde también al denominador de la fracción. Estos alumnos se dejan guiar por signos externos y no interpretan correctamente la relación funcional. Algunos de los alumnos que graficaron correctamente pero no pudieron encontrar las intersecciones por problemas de manipulación, no compararon su resultado numérico con el gráfico para validar e intentar corregir su error. Algunos alumnos muestran sus problemas de interpretación de la variable pues cuando escriben la expresión en su calculadora ignoran los paréntesis, demostrando que no comprenden la estructura de la relación funcional. Sólo 14 alumnos de 28 calcularon bien la intersección con el eje Y.

Para calcular la intersección con el eje X es necesario identificar que la incógnita es el valor de la variable x y que se encuentra sustituyendo $y = 0$ para la variable dependiente y posteriormente manipular. En esta parte los alumnos cometieron menos errores en la manipulación de los datos. Se encontraron más errores de signo que de manipulación, algunos alumnos pudieron, en este caso, hacer la manipulación primero sobre el coeficiente de la expresión $(x+4)^{-1}$ y ello ayudó a evitar el problema que tuvieron en la búsqueda de la otra intersección. 21 alumnos de 28 obtuvieron el valor correcto, sin embargo, al igual que con la otra intersección, algunos alumnos a pesar de que obtuvieron bien los valores y su gráfica era incorrecta, no compararon sus respuestas algebraicas con la gráfica para verificar si coincidían o si diferían para corregir su error.

i.3) Intervalos para x donde la función es creciente y donde es decreciente

La mayoría de los estudiantes logró identificar bien los intervalos correspondientes a los tramos en donde la función crece y en donde decrece, identificando los intervalos de variación de una de las variables dado el intervalo de variación de la otra; a pesar de que el trazo de su gráfica no fuera correcto. Los errores que cometieron se relacionan

con la simbolización de los intervalos solución: algunos alumnos incluyeron en alguno de los extremos del intervalo los valores de las asíntotas verticales, lo cual nuevamente indica un problema de interpretación, pero ahora de la variación. Otros, escribieron que antes de la asíntota vertical la función crecía y después de ella que la función decrecía; tal vez esta confusión se deba a que, como la gráfica de este tipo de funciones racionales tiene dos ramas, una de las cuales crece y la otra decrece (o viceversa), los alumnos no simbolizan los intervalos y simplemente describen el comportamiento de la gráfica que pueden visualizar.

i.4) Intervalos para x en donde la función es positiva y donde es negativa

Al visualizar la gráfica, la mayoría de los alumnos, identificaron los intervalos en donde la función es positiva y en donde es negativa, ya que sólo tenían que reconocer los tramos de la gráfica que quedaban por encima o por debajo del eje X , independientemente de si su gráfica era correcta o incorrecta.

Al intentar identificar los tramos correspondientes a los intervalos solución, algunos alumnos cuya gráfica no coincidía con los resultados obtenidos en el contexto algebraico, al resolver la ecuación, tomaron los valores solución que habían obtenido del procedimiento algebraico. Esto sugiere que estos alumnos tienden a resolver los incisos de la pregunta de manera mecánica más que utilizando los conceptos e interpretando los resultados obtenidos en otras partes del mismo problema.

Nuevamente los alumnos se equivocaron al simbolizar los intervalos de solución cuando uno de los extremos correspondía a la intersección con el eje X , incluyeron el valor para la variable x usando corchete (notación para intervalo que incluye el valor) en lugar de paréntesis (notación para intervalo que no incluye el valor), sin distinguir que el cero no es ni positivo ni negativo.

i.5) Las ecuaciones de sus asíntotas si las hay

De forma memorizada más que conceptual, los alumnos saben que el valor del parámetro h corresponde al valor de la asíntota vertical, pero la mayoría de ellos sólo responden “en - 4” cuando se pide que especifiquen la ecuación de la asíntota que debe ser $x = - 4$. Lo mismo ocurre cuando tratan de simbolizar la ecuación de la asíntota horizontal.

j) A partir de la siguiente función $f(x) = 2\sqrt{3-x} - 1$, determina lo que se pide en cada inciso:

j.1) graficar la función $f(x)$

22 alumnos de 28 identificaron los valores correspondientes a los parámetros h y k , reconociendo el desplazamiento provocado por cada uno sobre la función y el valor del parámetro a y su efecto de alargamiento vertical. Identificaron el punto $P(h, k)$ correspondiente al punto donde se debe de iniciar el trazo de la gráfica de éste tipo de función. Todos reconocieron el tipo de gráfica que correspondía a la función dada. Sin embargo algunos alumnos no identificaron que $3 - x \geq 0$ para encontrar el dominio de la función y por tanto, la gráfica debía trazarse hacia la izquierda del punto P .

14 alumnos de los 22 trazaron bien la gráfica. Los otros 8 se equivocaron al no considerar el dominio correspondiente.

De los 6 alumnos que se equivocaron en el signo de alguno de los parámetros a , h y k , 2 identificaron la gráfica con la función radical y 4 se equivocaron en la dirección en la que se debía de dibujar la gráfica.

j.2) $g(x) = f(x) - 2$ (desplazar la gráfica de $f(x)$ dos unidades verticalmente hacia abajo) y dar la forma algebraica.

En este inciso ayudó que se especificara verbalmente el tipo de desplazamiento correspondiente a $f(x) - 2$.

25 alumnos de los 28 desplazaron la gráfica de la función como se pedía, aunque de inicio no fuera la gráfica correcta y 3 de ellos no respondieron. Los alumnos que respondieron tomaron como referencia el punto P de inicio para desplazar la gráfica verticalmente, manteniendo el valor de la coordenada x (el valor del parámetro h) y modificando el valor de la coordenada y (valor del parámetro k).

Para encontrar la forma algebraica correspondiente a la función $g(x)$ ya con el desplazamiento incluido, sólo 18 alumnos fueron capaces de simbolizarlo correctamente, 2 de los 28 cometieron errores en el signo y 8 no simbolizaron.

j.3) $h(x) = g(x + 5)$ (desplazar la gráfica de $g(x)$ cinco unidades horizontalmente hacia la izquierda) y dar su forma algebraica.

Al igual que el inciso anterior, la descripción verbal ayudó a la respuesta correcta de los estudiantes pues no tuvieron que identificar el tipo de desplazamiento correspondiente al parámetro. En este caso, los errores en las gráficas de los alumnos fueron mínimos.

26 alumnos de 28 desplazaron su gráfica $h(x)$ hacia la izquierda como se pedía, aunque al igual que el inciso anterior, la gráfica $f(x)$ no hubiera sido la correcta. Nuevamente tomaron como referencia el nuevo punto P de inicio, pero en este inciso, modificaron el valor de la coordenada x (valor del parámetro h), manteniendo el mismo valor para la coordenada y (valor del parámetro k).

De 28 alumnos, 15 simbolizaron correctamente el desplazamiento horizontal, 7 cometieron errores y 6 no simbolizaron.

j.4) $i(x) = -h(x)$ (reflejar con respecto al eje X la gráfica de $h(x)$) y dar la forma algebraica.

La mayoría de los alumnos pudo identificar la reflexión de la función a pesar de que no se hubiera especificado verbalmente, es decir, fueron capaces de interpretar la notación simbólica. Sin embargo, no todos los alumnos lograron encontrar gráficamente.

14 alumnos de 28 lograron trazar la reflexión de $h(x)$ con respecto al eje X, modificando el signo de la coordenada y pero no su magnitud (o parámetro k), cambiaron también el signo del parámetro a , pero mantuvieron el valor de la coordenada x (o parámetro h), aunque su función $h(x)$ no fuera la correcta.

8 de 28 alumnos no reflejaron la gráfica con respecto al eje X, sino que reflejaron la gráfica de $h(x)$ sólo con respecto al punto P , modificando únicamente el signo del parámetro a .

6 no respondieron.

18 alumnos de 28 fueron capaces de simbolizar la función reflejada correctamente, porque leer la notación simbólica $-h(x)$ facilita la simbolización, aunque algunos de ellos no trazaron correctamente la reflexión ni habían encontrado correctamente la función $h(x)$.

6 de 28 alumnos cometieron error en el signo, no afectando a los parámetros correctamente, independientemente de si la función $h(x)$ que habían encontrado fuera o no correcta.

4 no respondieron.

k) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, gráficamente y analíticamente:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2 \qquad y = 3x - 2$$

A partir de la forma gráfica de la primera ecuación, sólo 15 alumnos de los 28 identificaron correctamente el valor de los parámetros h y k y sus respectivos desplazamientos, así como el valor del parámetro a y su efecto de contracción vertical, aunque reconocieron el punto $P(h, k)$ como apoyo para su trazo. 12 de esos 15 alumnos reconocieron el tipo de gráfica que correspondía a dicha función y 3 de los 15 no trazaron la gráfica de una función cúbica.

9 de los 28 alumnos cometieron error en el valor del parámetro h . Algunos alumnos al no tener la transformación de la gráfica en la forma estándar, decidieron que h era el valor del parámetro k y por tanto, $k = 0$. 7 alumnos de los 9, trazaron una función cúbica pero con los valores de los parámetros equivocados.

De la forma gráfica de la segunda ecuación, todos los alumnos identificaron que se trataba de la ecuación de una línea recta y reconocieron el valor correspondiente al parámetro de la pendiente y el valor del parámetro de la ordenada al origen, sólo uno de los 28 se equivocó en el trazo de la gráfica, dibujando la recta con una inclinación correspondiente a pendiente negativa.

En el caso de la resolución algebraica del sistema de ecuaciones, los alumnos tuvieron dificultades para encontrar los tres puntos solución.

De los 12 alumnos que trazaron bien las gráficas correspondientes a ambas ecuaciones y que podían visualizar de ellas la respuesta, 9 lograron encontrarla. De los 16 alumnos que tuvieron algún error en el trazo de las gráficas, 7 resolvieron correctamente y llegaron a la solución. El resto de los alumnos cometieron error en la manipulación y por tanto no encontraron la solución. Algunos alumnos en lugar de agrupar la incógnita del mismo lado de la ecuación, la dejan de ambos lados y eliminan así, desde el inicio, un valor para la solución, al dividir todo entre x . No comparan nuevamente los resultados que obtienen de la manipulación algebraica con la gráfica para comprobar si su respuesta es o no la correcta.

l) Determine el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{(x-5)\sqrt{x^2+x-12}}$$

En esta pregunta los alumnos pudieron identificar que existe una relación entre las variables, y por tanto, para que dicha relación exista debe de haber un intervalo de dominio para la variable independiente x para que la variable dependiente y esté definida como número real.

17 alumnos de 28 calcularon correctamente el intervalo solución, obteniendo la restricción para cada tramo y después interceptándolas. 5 alumnos obtuvieron correctamente por separado cada tramo restricción pero no interceptaron los conjuntos obtenidos. Los demás tuvieron error al resolver la desigualdad cuadrática o al tomar el término $x - 5$ y resolverlo como desigualdad en lugar de ecuación.

m) Encuentre el valor de k para que la recta $x + ky - 2 = 0$ tenga ordenada al origen igual a 4

En esta pregunta, la variable que es la incógnita del problema es el parámetro k que representa a una variable de segundo orden, cuyo valor desconocido se debe determinar con la información dada.

De 28 alumnos 16 calcularon bien el valor correspondiente al parámetro k . 7 alumnos de los 16 primero manipularon para tener la ecuación de la recta como relación funcional en la forma pendiente ordenada al origen. Reconocieron el término correspondiente a la ordenada al origen y lo sustituyeron por 4, manipularon y encontraron el resultado correcto. 9 alumnos de los 16 interpretaron la información de la ordenada al origen como un punto perteneciente a la ecuación $P(0, 4)$, distinguiendo un valor particular para la coordenada de la variable independiente x y su respectivo valor para la coordenada de la variable dependiente y , por lo que la única incógnita que resultaba al sustituir el punto en la ecuación era el valor del parámetro k , que encontraron manipulando la ecuación.

4 alumnos intentaron algún procedimiento que no tenía que ver con lo que se buscaba, demostrando que no distinguieron la intención de la pregunta.

8 alumnos no respondieron la pregunta pero algunos escribieron que no entendieron qué se pedía, lo cual pone claramente en evidencia su imposibilidad para interpretar las variables.

n) Determine los valores que puede tomar k para que la ecuación $(3k - 2)x^2 + kx + \frac{1}{4} = 0$ tenga solamente una raíz real (raíz doble)

En esta ecuación de segundo grado la incógnita de la ecuación es la variable x , sin embargo, lo que se pide encontrar como incógnita en el problema es el parámetro k . En el caso particular dado por la condición de la pregunta, el parámetro puede tomar dos valores que se deben de determinar.

15 alumnos de 28 distinguieron primeramente la condición de la pregunta: Para que una ecuación cuadrática tenga solamente una raíz real, su discriminante debe valer cero. Todos ellos fueron capaces de resolver dicha condición. 8 alumnos de los 15 hicieron la sustitución correcta para los valores del discriminante, resolvieron la ecuación y calcularon correctamente los dos valores solución que puede tomar el parámetro k . 3 alumnos de los 15 sustituyeron incorrectamente los datos de la ecuación en el discriminante dado que no interpretan correctamente el papel de cada uno de ellos en la ecuación, por lo que no llegaron a las soluciones correctas para el parámetro k . 4 alumnos de los 15 sustituyeron correctamente los datos pero cometieron errores en la manipulación de la expresión resultante y no llegaron a las soluciones correctas.

13 alumnos de los 28 no distinguieron la condición para que la solución de la ecuación tuviera una sola raíz, 7 de ellos no respondieron, y entre estos, algunos escribieron que no entendieron la pregunta, y 6 intentaron hacer alguna manipulación de la ecuación sin éxito.

ñ) ¿qué condiciones deben satisfacer a , b y c para que la expresión $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente un punto

Al igual que los incisos anteriores tenemos como incógnitas a los parámetros a , b , y c , y como variables en relación funcional a x y a y . En la pregunta se pide determinar el valor de las incógnitas para que cumplan la condición de la pregunta.

Sólo 13 alumnos de 28 reconocieron que para que la ecuación de la circunferencia represente un punto se requiere que su radio sea cero.

La mayoría de los alumnos intentaron escribir la ecuación de la circunferencia en su forma estándar para poder identificar las coordenadas de su centro y el valor de su radio. En sus procedimientos, los alumnos comenten errores al aplicar la técnica de completar el trinomio cuadrado perfecto cuando no se tienen valores numéricos sino sólo se tienen valores generales para los parámetros a , b , y c . Cuando intentan

completar sumando el término $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ y el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación,

algunos alumnos, al sacarle la mitad, escribieron además ax y by sin identificar que el coeficiente era sólo el parámetro y que no deben de escribir la variable. Algunos alumnos agregaron los términos sólo al lado izquierdo de la ecuación. Se observa en sus respuestas que los alumnos no tenían claro lo que estaban haciendo debido a que no son capaces de interpretar las letras. Otros alumnos se perdieron en la manipulación algebraica y no llegaron hasta el final.

9 alumnos de los 28 determinaron la condición que se pedía para los valores de los parámetros a , b y c y que la circunferencia representara sólo un punto.

5.4 Discusión de los resultados obtenidos

El análisis de las respuestas a las actividades de las diferentes prácticas, a las actividades de clase y a los exámenes parciales y departamentales nos revelan que el conocimiento de los alumnos sobre el concepto de variable en sus distintos usos, y principalmente sobre la interpretación, manipulación y simbolización del concepto de parámetro es limitado, a pesar de que no son conceptos nuevos para los alumnos, puesto que los han venido revisando desde la introducción al estudio del álgebra en secundaria.

Cada una de las actividades de las diferentes prácticas fue diseñada para cumplir diferentes propósitos y poder analizar y responder a las preguntas de investigación. Para que el alumno se familiarizara con el trabajo con la variable como una relación funcional, aprendiera a distinguir la correlación entre la variable independiente y la variable dependiente y a relacionar cada forma funcional con su forma gráfica, los alumnos

trabajaron en sus prácticas con diferentes funciones como: la función lineal, la función cuadrática y la función racional. En clase y en los talleres, también se trabajó con otras funciones como: la función cúbica, funciones con radicales, función valor absoluto, función exponencial y función logarítmica con el mismo objetivo.

Los resultados nos muestran que la mayoría de los alumnos relacionan la forma analítica con su forma gráfica con facilidad únicamente cuando se trata de las funciones básicas como la función lineal, la cuadrática, la función valor absoluto y algunas funciones con radicales. Sin embargo, cuando se trata de la función cúbica, la racional, la exponencial y las logarítmicas, la mayoría de los alumnos no fueron capaces de generalizar lo que habían aprendido, como se esperaba; su posibilidad de relacionar entre la forma gráfica y la forma analítica no se desarrolló a partir del trabajo que los alumnos hicieron con las otras funciones.

Los estudiantes pueden encontrar valores correspondientes ya sea para la variable dependiente dado un valor para la variable independiente, o viceversa, manipulando la información dada; aunque en algunos ejercicios persisten errores de álgebra que debieran estar superados. A partir de la representación gráfica de las funciones, los alumnos son capaces de identificar los intervalos de variación de la variable dependiente dados los intervalos de variación para la independiente, reconociendo por ejemplo, dónde una función crece o decrece, dónde es positiva o dónde negativa. Los errores cometidos en este tipo de problemas son principalmente de simbolización de intervalos aunque hay todavía unos cuantos alumnos que confunden las variables en su análisis.

Algunos alumnos cometen errores al introducir la forma simbólica de la función en el programa de computación (o en su calculadora) con el objeto de trazar su gráfica, dado que no utilizan los paréntesis de manera adecuada, no han interiorizado la notación algebraica y no han logrado interpretar correctamente las diferencias en la variación conjunta de las variables para distintas funciones, lo cual no les permite establecer la relación entre la representación analítica y la gráfica de las funciones.

Si bien en las actividades se trabajaron pocos ejemplos con la variable como incógnita, al hacerlo, los alumnos pueden identificarla y manipularla para determinar su valor, aunque en muchas ocasiones, al determinar la cantidad desconocida mediante algún procedimiento algebraico, cometen errores en la manipulación de la variable y no detectan su error dado que no están acostumbrados a validar, mediante una simple sustitución.

En ejercicios donde era necesario encontrar la ecuación de una recta con algunas características en particular, o con alguna condición para las pendientes, como paralelismo o perpendicularidad, los alumnos pudieron simbolizar las funciones correspondientes. Sin embargo, mostraron dificultad para simbolizar relaciones funcionales cuando se trataba de rectas con pendiente cero (ecuación de recta horizontal) o rectas que no tienen pendiente (ecuación de recta vertical) porque no son capaces de distinguir entre estas dos condiciones; lo cual indica también que no comprenden claramente la función del parámetro para la pendiente en la función lineal.

Otro de los propósitos en el diseño de las prácticas fue el poder analizar la comprensión e interpretación por parte de los estudiantes del concepto de parámetro también en sus distintos usos. Se esperaba que los alumnos hicieran una verdadera reflexión al trabajar en cada uno de los incisos de las actividades para lograr la interiorización del significado de las variables en la relación funcional y del papel que juegan los parámetros sobre la misma. Algunos alumnos pudieron reconocer el efecto que cada parámetro utilizado en particular, tiene sobre la función en distintos problemas, pero sólo de forma muy general y sólo en el caso de las funciones que les resultan más familiares.

El objetivo de introducir el uso del programa de graficación Graphmatica, era que los alumnos pudieran visualizar, y reflexionar sobre los movimientos de las gráficas de las funciones para reconocer el efecto de cada parámetro sobre la gráfica de una función y sus respectivas transformaciones, encontrar regularidades y diferencias entre las distintas funciones, y ligar estas actividades con la forma algebraica de la función para poder pasar de una representación a otra de manera flexible, pero los resultados no fueron los esperados para todos los alumnos.

Las diferentes actividades que se incluyeron en las prácticas y el trabajo en el salón de clase, estuvieron enfocadas a trabajar sobre el efecto de cada parámetro en particular en la forma estándar de funciones de tipo $f(x) = a(x-h)^n + k$ con $n \in \{1, 2, 3, -1, \frac{1}{2}\}$, de la función valor absoluto $f(x) = a|x-h| + k$ y de las funciones exponencial y logarítmica $f(x) = a^{(x-h)} + k$ y $f(x) = a \log_b(x-h) + k$.

Se observó consistentemente que los alumnos buscan elementos a memorizar y trabajan en general usando algoritmos o fórmulas memorizadas. Evitan consistentemente el razonamiento en las actividades de las prácticas destinadas a la comprensión de los conceptos y ponen atención sólo en ciertos puntos de apoyo de cada gráfica cuando requieren de reconocer las transformaciones y su efecto sobre las funciones.

Los alumnos pueden, en forma general, describir que el parámetro k provoca que la gráfica se desplace hacia arriba o hacia abajo ya que es lo que observan de forma visual con el programa Graphmatica; sin embargo no interpretan dicho desplazamiento en términos de cómo se ve afectado cada punto de la gráfica. Su reconocimiento es global aunque toman como referencia lo que sucede a un punto de la gráfica que consideran importante. Por ejemplo: si se trata de la función lineal, responden que lo que se mueve es la intersección de la gráfica con el eje Y; si es la parábola o la función valor absoluto, reconocen que el vértice sube o baja, y algunos también observan sólo el punto intersección con el eje Y. Cuando trabajan con una función radical, sólo hacen mención del efecto del parámetro k sobre el punto inicial del rango de la función. En la función racional reconocen que se desplaza la asíntota horizontal y algunos también mencionan el movimiento sobre el eje Y. En la función cúbica el punto de apoyo, y el que mencionan que se mueve, es el punto de inflexión. En las funciones exponenciales y logarítmicas, la mayoría de los alumnos podían reconocer si la función subía o bajaba pero sólo cuando la gráfica estaba dada; ellos difícilmente trazaban la gráfica y sus desplazamientos a partir de la forma algebraica porque no eran capaces de distinguir algún punto de apoyo, como los mencionados anteriormente, que les facilitara o recordara cómo es la forma gráfica de la función. La mayoría de los alumnos logró relacionar el tipo de desplazamiento vertical de la gráfica de una función con el signo del parámetro k , aunque no necesariamente la imagen de la función. Estos resultados ponen en evidencia que algunos alumnos no desarrollaron con las prácticas y con el uso del programa Graphmatica, una idea clara de la variación conjunta de las variables en la relación funcional, ni del papel del parámetro k en ella.

Al igual que con el parámetro k , el reconocimiento del efecto del parámetro h sobre los desplazamientos de la gráfica de cada función es interpretado por los alumnos de forma global. Reconocen el movimiento horizontal de la gráfica pero nuevamente en términos de un punto que toman como referencia. No describen el movimiento de toda la gráfica, sólo

el de los puntos de apoyo mencionados en cada función en particular. No todos los alumnos son capaces de identificar la dirección del desplazamiento horizontal con el signo del parámetro h ; generalmente se confunden con el signo en la forma general de la ecuación estándar. En la forma analítica de cada función, no interpretan todo el término correspondiente a este movimiento horizontal formado por $(x - h)^n$ sobre la variable dependiente, sólo lo identifican sobre un punto específico, y algunos estudiantes en términos de movimientos sobre el eje X poniendo atención en las intersecciones (si es que las tienen). Cuando los alumnos describen los desplazamientos de las funciones, lo hacen únicamente en términos del movimiento de algunos puntos en particular. No muestran comprensión sobre la relación de los parámetros con cada uno de los valores de la variable dependiente. Nuevamente no logran entender la variación conjunta de las variables como tal.

Con respecto al parámetro a que indica la deformación de la gráfica, muchos alumnos tienen dificultades para reconocer de forma visual la transformación de las funciones. En el caso de la línea recta identifican el cambio de la inclinación, pero algunos alumnos únicamente como más inclinada o menos inclinada y no en relación al valor del parámetro; nuevamente recurren a estrategias memorizadas o a la identificación de comportamientos que les son más familiares. Los estudiantes también reconocen en el caso de funciones cuadráticas o de valor absoluto que dicho parámetro les cambia la concavidad, en el primer caso y en el segundo la dirección en la que apunta el vértice, según si el signo del parámetro es positivo o negativo. Sin embargo, cuando reconocen el cambio en la apertura de la gráfica no relacionan el valor numérico del parámetro con el efecto del mismo. Reconocen lo que ven de forma general: una gráfica más abierta o menos abierta pero muy pocos alumnos distinguen que si $a > 1$, la gráfica se estira de manera vertical o que la gráfica se pega a su eje de simetría y cuando $0 < a < 1$, pasa lo contrario. Muchos alumnos no logran reconocer el efecto del parámetro a sobre las otras funciones analizadas. Algunos alumnos mencionan que cambia la forma de la función porque se alarga o se contrae de manera vertical, o que se pega o despega de los ejes (asíntotas) cuando se trata de la función racional, pero nuevamente sin poder generalizar la relación entre los cambios y la magnitud del parámetro a sobre cada punto de la misma. En los incisos de las actividades de las prácticas se observa cómo al ir avanzando algunos alumnos logran entender mejor el comportamiento de variables y parámetros en una forma global, pero fuera del contexto de las prácticas, sólo algunos son capaces de

reconocerlo, lo cual indica que no hubo la reflexión esperada para lograr la interiorización del papel y el efecto de los parámetros en la relación funcional con el apoyo visual de la herramienta tecnológica para la mayoría de los alumnos.

A pesar de que los alumnos trabajaron con distintas actividades, se observa una tendencia a memorizar, en lugar de a reflexionar. Por ello no logran entender el efecto de los parámetros sobre cada función. Por ejemplo, llaman al parámetro a pendiente aunque la función no sea lineal o lo relacionan únicamente con cambios globales en la forma de la función, como concavidad o amplitud, pero no con lo que ocurre con cada uno de los puntos de la función.

CONCLUSIONES

Los resultados de la experiencia muestran que entre el 30% y 40% de los estudiantes lograron entender el significado de los parámetros a través de las distintas actividades del proyecto. Para estos estudiantes el uso del programa Graphmatica conjuntamente con las prácticas funcionó claramente como un instrumento de visualización que promovió la reflexión sobre el papel del parámetro en las funciones en general. Esto se ve también reflejado en las respuestas de estos estudiantes tanto en las prácticas como en los exámenes, en los que fueron capaces de generalizar lo aprendido a la transformación de funciones que no se estudiaron en las actividades y a la resolución de ecuaciones que incluían parámetros.

El resto de los estudiantes logró un aprendizaje parcial del uso de los parámetros a través de la visualización de las transformaciones de funciones en las actividades presentadas. Estos estudiantes lograron visualizar el papel de los parámetros en las transformaciones únicamente para las funciones más simples y de forma global, es decir, fijan la atención únicamente en las diferencias de las gráficas de las funciones consideradas como un todo, pero no logran apreciar lo que ello significa en términos del comportamiento de los puntos que componen la función; además mostraron dificultades para otras funciones. Estos alumnos no pudieron generalizar en las preguntas del examen que incluían funciones más complejas como la cúbica, la racional y las funciones exponencial y logarítmica.

Como se había mencionado, el objetivo de introducir el uso del programa de graficación Graphmatica, era que los alumnos pudieran visualizar, y reflexionar sobre los movimientos de las gráficas de las funciones para reconocer el efecto de cada parámetro sobre la gráfica de una función y sus respectivas transformaciones, encontrar regularidades y diferencias entre las distintas funciones, y ligar estas actividades con la forma algebraica de la función para poder pasar de una representación a otra de manera flexible.

Se puede concluir que el programa Graphmatica, proporciona un apoyo visual de manera muy limitada, no todos los alumnos distinguen o reconocen el mismo comportamiento en cada función pues no reflexionan sobre lo que las actividades demandan. Algunos alumnos se concentran en algunas particularidades de los desplazamientos de las funciones a pesar de que el propósito de las actividades era que todos logran identificar el efecto de los parámetros sobre cada función. Con respecto a la pregunta sobre qué tanto contribuye el programa de graficación Graphmatica sobre el

aprendizaje del papel de cada uno de los parámetros sobre las transformaciones en las distintas funciones, es posible concluir que aunque ciertamente contribuyó a apoyar el aprendizaje de los alumnos, no respondió a las expectativas que se tenían de inicio, dado que favorece la visualización sobre el comportamiento de las gráficas de la función de manera global. Algunas investigaciones como la de Hernández (1998) muestran que hay programas con los que el alumno interactúa con la representación algebraica y gráfica de la función mediante el uso de la programación de la computadora; en estas experiencias se ha encontrado que los alumnos se involucran más en su aprendizaje, reflexionan sobre cada una de sus acciones y, de esta manera se obtienen mejores resultados en cuanto a su aprendizaje: son capaces de describir con precisión los cambios de la función de manera global y punto a punto y transfieren lo que aprenden sobre el papel de los parámetros en las actividades con funciones específicas a otras funciones.

En contraste, las gráficas que los alumnos trazan con el programa de Graphmatica y las actividades, ayudan a visualizar la forma de la gráfica, los desplazamientos de manera global, el cambio en la concavidad y de la posición de algunos puntos específicos pero no a entender e interpretar el efecto de cada uno de los parámetros sobre cada punto de la relación funcional. Los alumnos ponen atención en que la gráfica se hace más estrecha por ejemplo, pero no en la variación conjunta de las variables, que es uno de los aspectos importantes del modelo 3UV para la relación funcional.

El propósito de las actividades no se logra al 100% con el uso del programa Graphmatica. Habría que, en futuras experiencias, involucrar más el uso de trazo de papel y lápiz analizando las transformaciones a lo largo de la gráfica en diferentes puntos para que los alumnos distingan cómo es que cada parámetro tiene efecto sobre toda la función e ir comparando, con el apoyo del programa, el efecto de ello en la totalidad de la gráfica; o utilizar un programa del tipo del utilizado por Hernández (1998) en el que los alumnos deben programar por ellos mismos las funciones a estudiar.

Otro de los propósitos de las actividades consistía en promover, que al visualizar la gráfica de la función, los alumnos tuvieran oportunidades de comparar la correspondencia entre la representación gráfica y la algebraica. Como se observa de los resultados, nuevamente únicamente una tercera parte de los estudiantes logró comparar exitosamente estas dos representaciones. Aparentemente, a pesar de los esfuerzos por encaminar la reflexión en las actividades, los alumnos siguen atados al razonamiento mecánico y no distinguen sus errores, ni se percatan cabalmente de sus limitaciones; esto

se observa en que muchas de las actividades que pedían validar los resultados fueron ignoradas por muchos alumnos y en que no comparan los resultados que obtienen cuando trabajan algebraicamente con lo que obtienen a nivel gráfico. Estos alumnos coinciden con aquéllos que pueden distinguir algunas particularidades de la forma gráfica de las funciones y, aunque no coincida con la representación analítica esperada, no se detienen a reconsiderar la falta de correspondencia y en ocasiones no logran distinguir la falta de concordancia entre representaciones.

Las dificultades que los estudiantes muestran en la manipulación de variables y parámetros son comunes y en algunos casos prevalecieron a pesar de la didáctica empleada. Se observa que algunos estudiantes no aplican las propiedades en expresiones algebraicas de manera correcta; desarrollan según “sus reglas” demostrando que su manejo de la variable como número general no es sólido, muestran dificultades para pasar de un uso de la variable de forma flexible en un mismo problema e incluso muestran dificultades con los aspectos de cada uso de la variable que postula el modelo 3UV para la comprensión del álgebra; este uso flexible no se logra tampoco a través del trabajo en las actividades y es indispensable para un aprendizaje significativo del papel de la variable en el álgebra.

Cuando los alumnos manipulan la variable, se observa de nuevo una diferencia entre aquellos alumnos que se beneficiaron del método y aquéllos que no lo hicieron cabalmente. Los resultados muestran claramente que tienen dificultades con la interpretación y simbolización de las variables, no usan la notación adecuada, y confunden, por ejemplo, expresiones algebraicas en las que la variable es un número general, con ecuaciones en las que la variable es una incógnita y las resuelven para encontrar valores específicos, cuando la variable o el parámetro pueden representar cualquier valor. También en ejercicios que requieren manipular, muestran todavía problemas para reconocer o usar las estructuras adecuadas, por ejemplo, muestran una tendencia a igualar a cero y a manipular la variable aunque no se trate de una ecuación, como ya se ha referido en múltiples estudios acerca del aprendizaje del álgebra. Estas dificultades están asociadas a una falta de sentido de estructura que se manifiesta al utilizar paréntesis o no tener cuidado con la precedencia de operaciones. La forma en que estos estudiantes usan las variables no se ve afectada cuando los alumnos utilizan la tecnología que se empleó en este trabajo.

La relación funcional, fue el eje del trabajo en este estudio, y en particular el efecto de los parámetros en la relación funcional. Los resultados obtenidos muestran dificultades similares a las que se encuentran con los otros usos de las variables. Los alumnos exitosos muestran la posibilidad de trabajar con este uso de la variable y sus distintos aspectos de manera flexible. Logran diferenciar claramente la relación funcional de los otros dos usos de la variable y son capaces de integrar los usos y los aspectos de la variable en un mismo problema. Estos alumnos reconocen el papel del parámetro como número general que permite generalizar expresiones y logran distinguir los diferentes efectos que se pueden producir al introducir parámetros en la relación funcional, independientemente de la representación empleada. Aquellos alumnos que tienen dificultades con el uso de la variable, tienen dificultades aún mayores cuando además de variables se utilizan parámetros en la relación funcional, Estos estudiantes centran su atención en signos externos, ni siquiera se encuentra una clara regularidad en aquello que consideran relevante pues cada uno pone atención en un distinto aspecto aislado de la gráfica de la función. A pesar de las instrucciones de las actividades, estos alumnos muestran dificultades para determinar lo que es importante en cada actividad. Esto puede deberse a la forma en que se redactaron las preguntas “¿qué cambia?”, “¿qué permanece sin cambiar?” Tal vez, para lograr dirigir la atención de los alumnos a lo que en este estudio se consideraba relevante, se debieron haber redactado las preguntas de manera más específica y no dejarlas tan abierta. Esto tendía que estudiarse en un seguimiento de esta investigación.

Las dificultades de los alumnos se pueden distinguir de acuerdo a la función del parámetro en la relación funcional. Los alumnos mostraron menos dificultades con la generalización del efecto del parámetro k y sus respectivos desplazamientos verticales, que con los otros dos parámetros. Esto posiblemente debido a que la comprensión del efecto de dicho parámetro está menos ligada al sentido de estructura algebraica con el que los alumnos mostraron más dificultades.

Otro de los propósitos de este trabajo consistía en validar la hipótesis de que después de resolver el mismo tipo de actividades para distintos tipos de funciones, los alumnos generalizarían el comportamiento de las funciones con relación a los valores de los parámetros. Esto no se logró en términos generales más que para algunos alumnos y no para todas las funciones, a pesar que los resultados muestran que conforme los alumnos

avanzaban en su respuesta a los incisos de cada actividad, parecían dar muestras de comprensión sobre el comportamiento de variables y parámetros.

En el análisis de las respuestas a exámenes parciales y departamentales aplicados durante el semestre escolar, se observó que los alumnos eran capaces de trazar gráficas de diversas funciones y que pueden interpretar la correspondencia entre variables, pero no pueden, en muchos casos, distinguir con claridad la variación conjunta de las variables y el efecto del parámetro sobre esta variación.

Otro de los propósitos de este trabajo consistió en analizar cómo los alumnos manipulan, interpretan y simbolizan los parámetros a través del trabajo con las actividades. Cuando la actividad incluía ejercicios para interpretar al parámetro como incógnita, como en los ejercicios donde era necesario determinar el valor numérico de la pendiente y de la ordenada al origen, dada alguna información particular para la función lineal, los alumnos pudieron manipular y encontrar el valor desconocido, aunque nuevamente se detectaron muchos errores en la manipulación y la ausencia de validación. En ejercicios hechos en clase y aplicados en exámenes donde el parámetro representaba a una incógnita, muchos alumnos no fueron capaces de interpretar el significado del parámetro. Estos alumnos pueden interpretar a las variables x o y como incógnitas cuyo valor desconocido intentan determinar, sin embargo, cuando una ecuación ya sea de primer o segundo grado incluye además un parámetro, los alumnos ya no son capaces de interpretarlo e incluso mencionan que no entienden qué es lo que se les pide. A diferencia de lo que se ha encontrado en otros estudios, en los que simplemente se especifica que los alumnos muestran una tendencia a ignorar el parámetro, lo que se observa en éste, es que la razón por la cual los estudiantes ignoran el parámetro es porque no le dan un significado específico.

La simbolización de relaciones funcionales cuando se trata de generalizar, por ejemplo, una familia de rectas o de parábolas, resultó muy difícil a la mayoría de los alumnos. Cuando la instrucción dada consistía en simbolizar una función con valores numéricos para los parámetros, los alumnos lo hacían sin dificultad en el caso de funciones lineales, lo que muestra nuevamente la comprensión de los alumnos de la correspondencia entre variables, en cambio, si se trataba de simbolizar la relación cuando el parámetro se comportaba como tal, como un número general, o se imponía alguna condición sobre su

valor, la mayoría de los alumnos no fueron capaces de generalizar, lo que pone en evidencia que tienen dificultades con la variación conjunta de las variables.

A pesar de algunas de las limitaciones en los resultados obtenidos, este trabajo contribuye a determinar las dificultades de los alumnos universitarios cuando trabajan con parámetros; pone en evidencia la resistencia de los alumnos a cambiar sus estrategias de aprendizaje y a modificar lo que han aprendido erróneamente. Otra contribución de este trabajo consiste en esclarecer el papel que juega el uso del programa Graphmatica como apoyo en el aprendizaje. Los resultados confirman que la visualización de las gráficas con Graphmatica, aún acompañada por preguntas que intentan favorecer la reflexión de los alumnos, no apoya realmente el aprendizaje para la mayoría de los alumnos. Les permite identificar los efectos de cada parámetro sobre las funciones pero de manera general. Logran identificar si los desplazamientos verticales son hacia arriba o hacia abajo según el signo del parámetro k ; al igual con el efecto del parámetro h sobre el desplazamiento horizontal hacia un lado o hacia otro. Con respecto al parámetro a sobre la transformación según el tipo de función, pueden también interpretarlo pero de manera global.

La comparación con otras experiencias de investigación indica que es necesario que el uso de la computadora favorezca que este medio se convierta en un instrumento de aprendizaje.

Los resultados aquí obtenidos nos indican además, que es necesario hacer mucho más trabajo con los alumnos a fin de que comprendan de manera significativa el papel de los parámetros en las expresiones algebraicas, en particular en las relaciones funcionales.

Para futuras investigaciones, este trabajo deja abierta la cuestión de qué tipo de tecnología es conveniente usar en el salón de clase, si se obtienen resultados distintos si se usa la misma tecnología pero con actividades distintas o al menos, redactadas de manera más específica: sugerir usar la misma versión del software, indicar a los alumnos a trabajar con la misma escala, preguntarse sobre el tipo de actividades que habría que proponer a los estudiantes para lograr un mejor aprendizaje de este importante concepto matemático.

En términos generales puede concluirse que para que una experiencia, como la que se reporta en este trabajo, tenga mejores resultados sobre el aprendizaje de los parámetros,

es necesario buscar formas de promover la reflexión por parte de los alumnos sobre lo que se pide en las actividades. Hacer actividades en sí mismo no necesariamente implica que los estudiantes reflexionarán sobre lo que hacen. El diseño de las actividades y el tipo de discusión sobre ellas deben ser trabajados con mucho cuidado a fin de avanzar hacia un logro más contundente de los resultados esperados.

Lo mismo puede decirse del uso de la tecnología. No toda tecnología contribuye a un buen aprendizaje por parte de los alumnos, como se aprecia de los resultados de este trabajo. La interacción activa y reflexiva del alumno con la tecnología es indispensable para la promoción de la abstracción; y para que la tecnología pueda convertirse en un instrumento de aprendizaje.

BIBLIOGRAFIA

- Ambrosio, J. (2006). *Uso de un modelo teórico para el estudio de la comprensión del concepto de parámetro en el álgebra*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México.
- Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F. y Santos, M. (Eds.) *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp 55-80) Cuernavaca, México (pp. 55–80). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications–The Ohio State University.
- Bardini, C., Radford, L. y Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and Indeterminate objects or how to go insane in mathematics. En Chick, H.L. y Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, pp. 129-136. Melbourne, Australia.
- Bills, L. (2001). Shifts in the Meanings of Literal Symbol. En Van den Heuvel-Panhuizen M. (Eds.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, pp. 161-168. Utrecht, Netherlands.
- Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol. II, N° 1, pp 7-16.
- Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables in high school algebra. En Sutherland, R., Rojano, T. Bell, A. and Lins, R. (Eds.) *Perspectives on school algebra*, Kluwer Academic Publishers, pp. 177-189.
- Boyer, C.B. (1968). *A history of mathematics*. Wiley, J. y Sons. New York. (publicación electrónica)
- Cantoral, R., Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.
- Cantoral, R., Montiel, G. (2003). Visualización y Pensamiento Matemático: el caso de los polinomios interpoladores de Lagrange. *Números*. España. N° 55, pp. 3 - 22

- Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, Algèbre, Modélisation. étapes d'une recherche. *Publication de l'IREM d'Aix-Marseille*, N° 16, pp. 5 – 62.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics Education. En Furinghetti, F. (Ed), *Proceedings of the 15th PME Conference*, Vol 1, pp 33-48. Genova: Universidad de Genova, Italia.
- Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal Of Computers for Mathematical Learning*, Vol 5, N° 3, (publicación electrónica) pp. 189-209.
- Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment, Design Research on the understanding of the concept of parameter. Dissertation. Utrecht University, Center for Science and Mathematics Education, Wilco, Amersfoort. Freudenthal Institute, Utrecht, NL. (publicación electrónica)
- Ferrara, F., Pratt, D. y Ornella, R. (2006). The role and uses of Technologies for the Teaching of algebra and calculus. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds). *Handbook of Research and the PME*, pp. 237-272. Rotterdam, N.L: Sense Publishers.
- Furinghetti, F. y Paula, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En Da Ponte, J.P. y Matos, J.F. (Eds.) *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, pp. 368-375. University of Lisbon, Portugal.
- Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, pp. 75-90. (publicación electrónica)
- Hernández, P. (1998). *El concepto de variable matemática y su enseñanza a estudiantes Universitarios*. Tesis de Licenciatura no publicada, ITAM, México, D.F., México.
- Lage, A. E. (2004). *Análisis y aprendizaje sobre transformación de funciones*. Tesis De Licenciatura en Matemáticas Aplicadas no publicada, ITAM, México, D.F., México.
- Lage, A.E. y Trigueros, M. (2006). An Analysis of Students' Ideas About Transformations of Functions. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 23-30, Mérida, Yucatán, México. Noviembre 10-12 (publicación electrónica).

- Lagrange, J., Artigue, M., Laborde, C. y Trouche, L. (2001). A meta studio on IC Technologies in Education. En Ven den Heuvel-Panhuizen M. (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. I, pp. 111-122. Utrecht, The Netherlands: PME.
- López, A. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Querétaro, México.
- Lozano, M. D. (1998). *El concepto de Variable: Evolución a lo largo de la Instrucción Matemática*. Tesis de Licenciatura no publicada. ITAM, México, D.F., México.
- Lozano, M. D., Sandoval, I. T. y Trigueros, M. (2006). Investigating mathematics learning with the use of computer programmes in primary schools. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. IV, pp 89-96. Prague, Czech Republic: PME.
- Lozano, M. D. y Trigueros, M. (2007). Mathematics learning with the use of the Balance, a computer programme from Enciclomedia. *Proceedings of the 5th Congress of ERME, the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca, Cyprus. Febrero 22-26.
- Mariotti, M. A. (2001). Introduction to Proof: The mediation of a Dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Vol. 44, pp. 25-53.
- Moreno, L. (2001). Cognición, mediación y tecnología, *Revista Avance y Perspectiva*, Vol. 20, pp.65-68.
- Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática: un estudio de casos*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de la Laguna, Las Palmas de Gran Canaria, España.
- Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate 18-21 Août, IUFM de Caen, 203-213.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México, *Revista Iberoamericana de Educación: Los maestros y su formación*, número 33, septiembre – diciembre 2003.

- Sandoval, I. T., Lozano, M. D. y Trigueros, M. (2006). The Culture of Mathematics Classrooms with the Use of Enciclopedia, a National Programme. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mérida, Yucatán, México. pp. 863-870, Noviembre 10-12. Publicación electrónica.
- Sacristán, A. I. (2003). Mathematical Learning with Logo in Mexican Schools. En Eurologo'2003 *Proceedings: Re-Inventing technology on education*. Coimbra, Portugal: Cnotinfor, Lda., pp. 230-240.
- Sacristán, A. I., Ursini, S., Trigueros, M. y Gil, N. (2006). Computational Technologies in Mexican Classrooms. The Challenge of Changing a School Culture. En Dagiene, V. y Mittermeir, R. (Eds.). *Information Technologies at Schools. 2nd International Conference 'Informatics in Secondary Schools: Evolution and Perspectives' Selected Papers* (pp. 95-110), Vilnius, Lithuania: Institute of Mathematics and Informatics.
- Sedivy, J. (1976). A note on the role of parameter in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.7 pp. 121-126.
- Socas, M. M., (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*. (publicación electrónica) pp. 19-52.
- Swokowski, E. (1998). *Algebra y Trigonometría con geometría Analítica*. International Thomson Editores, S.A. de C.V. pp. 183-188.
- Trigueros, M., y Jacobs, S. (2008). On developing a rich conception of variable, en Carlson, M.P., Rasmussen, R., (Eds.) *Making de connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*, MAA Notes # 73, Mathematical Association of America, pp. 3 - 13.
- Trigueros, M. y Sacristán, A. I. (2007). "Teachers' practice and students' learning in the Mexican programme for Teaching Mathematics with Technology". Milková, E. y Pražák, P. (Eds). *Proceedings of the 8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, Hradec Králove, Czech Republic. July 1-4. Publicación electrónica.
- Trigueros, M. y Ursini, S. (1998). Dificultades de los Estudiantes Universitarios frente al Concepto de Variable. En Hitt, F. (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 445-463.

- Trigueros, M. y Ursini, S. (2001). Approaching the study of algebra through the concept of variable. En Chick, H., Kaye S., Vincent, J. and Vincent, J. (Eds.). *The future of the teaching and learning of algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, The University of Melbourne, Australia.
- Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). Starting college students' difficulties in working with different uses of variable. *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics Education*. Vol. V, Providence, R.I., U.S.A., pp.1-29.
- Trigueros, M. y Ursini, S. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? en *Matemática Educativa*, Vol. 18, núm. 3, diciembre, pp. 5-38. Editorial Santillana.
- Trigueros, M. y Ursini, S. (2008). Structure Sense and the use of variable. En Figueras, O. and Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter*, Vol. IV, Morelia, Michoacán, México, pp. 337 – 344.
- Trigueros, M., Ursini, S., Escareño, F. y Montes, D. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México, Trillas. Primera edición.
- Ursini, S. y Trigueros, M. (2001). A model for the uses of Variable in Elementary Algebra. En M. Van den Heuvel-Panhuizen. (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*. Utrecht, Netherlands, Vol. IV, pp. 327-334.
- Ursini, S., y Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra? En Johnsen, M. y Berit, A. (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education*, Vol. IV, pp. 361-369. Bergen, Norway.
- Ursini, S., Trigueros, M., Escareño, F., y Montes, D. (2002). Teaching algebra using the 3UV Model. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, Netherlands, Vol. IV, pp. 327-334.
- Waerden, B.L. van der (1983). *Geometry and algebra in ancient civilization*. Berlin: Springer Verlag, Vol. XII, pp. 223.
- Warren, E. (1999). The concept of a variable; gauging student's understanding. *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology Of Mathematics Education*. Haifa, Israel, Vol. IV, pp. 313-320.

Wenger, R.H. (1987). Cognitive science and algebra learning. En Schoenfeld, A. (Ed.) *Cognitive science and mathematical education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.