INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería

Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias en Matemática Educativa, presenta:

Leopoldo Zúñiga Silva

Directora de tesis :

Dra. Patricia Camarena Gallardo

Junio de 2004. México, D. F.

Índice

Página

CAPÍTULO 4

Las funciones cognitivas en las experiencias de aprendizaje en contexto

CAPÍTULO 5

Conclusiones, observaciones y sugerencias

Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería

Resumen

En esta tesis se reporta un estudio de carácter cognitivo en relación al aprendizaje de los conceptos de función de dos variables y de derivada parcial, en el contexto de la ingeniería, realizado con un grupo de estudiantes de cálculo multivariable de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas del Tecnológico de Monterrey, Campus San Luis Potosí, México.

El estudio se enmarca en la línea de investigación de la *matemática en el contexto de las ciencias* (Camarena, 2000) y los análisis cognitivos realizados se basan en la teoría cognitiva de Reuven Feuerstein, en particular sobre su propuesta de *funciones cognitivas* y de *mapa cognitivo* (Feuerstein, 1977), así como en el modelo teórico del triángulo *fenomenologías-generalizaciones-notaciones* para el análisis de significados en el aprendizaje de conceptos matemáticos, de Godino y Recio (1998).

En investigaciones antecedentes realizadas en la línea mencionada, así como en la teoría que soporta a la misma, se sostiene que en escenarios didácticos contextualizados se propicia un aprendizaje con significados de interés para el estudiante, con sentido en el ámbito de su situación escolar. Esto motivó a investigar sobre lo que sucede a nivel cognitivo en los alumnos en este tipo de ambientes didácticos.

De esta forma, la investigación tuvo como objetivo analizar el *funcionamiento cognitivo* de estudiantes sujetos a una experiencia de aprendizaje sobre contenidos del cálculo diseñada específicamente en el *contexto de la ingeniería*.

Primero se hizo un estudio didáctico preliminar el cual consistió de dos partes: i) un análisis sobre el plan de estudios de la carrera mencionada, así como de los programas analíticos de

los cursos y de los libros de texto utilizados en ellos, a fin de determinar los contenidos de cálculo que se emplean en áreas de especialidad de la ingeniería; ii) un estudio sobre las *funciones cognitivas* de estudiantes de cálculo en una situación problema típica del sistema didáctico tradicional, con el propósito de caracterizar los elementos de orden cognitivo implicados al resolver un problema matemático desde la teoría utilizada, y que sirviera como referente inmediato para el desarrollo de la experiencia en contexto dado que no se tenían antecedentes sobre el uso de la teoría (al menos no en el área de cálculo, en el nivel superior de enseñanza, y en una experiencia de aprendizaje en contexto).

Enseguida, en base a los resultados obtenidos en el estudio didáctico preliminar mencionado, se diseñó un escenario didáctico que involucraba una situación problemática en el *contexto* de la ingeniería, en donde se usa el *método de mínimos cuadrados* para la determinación de la recta de regresión en una colección de datos experimentales. En el proceso de resolución de esta situación problemática se analiza el funcionamiento cognitivo de los estudiantes respecto a la conceptualización de una función de dos variables y la derivada parcial desde la teoría de las funciones cognitivas señalada.

Finalmente, se lleva a cabo un análisis global de la experiencia y se ofrecen conclusiones, observaciones y sugerencias.

El trabajo realizado contribuye a la Matemática Educativa en varios aspectos, entre ellos: ofrece una forma de estudiar y explicar lo que sucede en el aspecto cognitivo en el estudiante cuando el aprendizaje se da en un escenario en contexto; en particular, se propone una forma sistemática de analizar los procesos cognitivos en un acto mental de aprendizaje, en base a la teoría de funciones cognitivas de Feuerstein, la tripleta conceptual (fenomenologías, generalizaciones y notaciones) de Godino y Recio, y un recurso teórico propio que surgió como necesidad en el desarrollo de la investigación: los *actos matemático-cognitivos* de aprendizaje.

Cognitive functions: a qualitative analysis about learning calculus in engineering context

Abstract

This thesis is a report of a study of cognitive character in regard to learning two variable function and partial derivative concepts, in engineering context, prepared by a team of multivariable calculus students in Industrial Engineering and Systems at Tecnológico de Monterrey, Campus San Luis Potosí, México.

This study is embraced within the line of investigation of *mathematics in sciences context* (Camarena, 2000) and performed cognitive analysis is based on Reuven Feuerstein cognitive theory, particularly about his proposal about *cognitive functions* and *cognitive map* (Feuerstein, 1977), and the theoretical model of the triangle *phenomenologies-generalizations-notations* as well, for the mathematic concepts learning significance analysis, by Godino & Recio (1998).

In prior investigations performed in the above mentioned line, and the theory supporting this as well, it is maintained that in contextual didactical scenarios, learning with meanings of interest for the student is favored, with a sense in the scope of his school condition. This has caused to investigate about what happens to a cognitive level in students in this type of didactical environments.

This way, the investigation had as a goal analyzing *cognitive functioning* of students subject to a learning experience about calculus contents designed specifically in the *engineering context*.

First, a preliminary didactical study was performed, which was comprised of two parts: i) an analysis about the mentioned career study plan, and courses analytical programs and the

text books used on them as well, with the purpose of determining calculus contents used in areas of engineering field of studies; ii) a study about calculus students *cognitive functions* in a typical problem situation of traditional didactical system, with the purpose of characterizing cognitive order elements involved in solving a mathematical problem from the point of view of the used theory, and useful as an immediate reference for the experience development in context since there wasn't any background about the theory in use (at least, not in the calculus area, in the higher level of teaching, and a learning experience in context).

Next, based on the results obtained in the preliminary didactical study above mentioned, a didactical scenario was designed involving a problematic situation en the engineering *context*, where *least squares method* is used to determine the regression straight line in a collection of experimental data. In the resolution process of this problematic situation cognitive functioning of students is analyzed in regard to the conceptualization of a two variable function and partial derivative from the theory of cognitive functions already point out.

Finally, a global analysis of experience is carried out and conclusions, comments and suggestions are presented.

Work carried out contributes to the Matemática Educativa in several aspects, among them: it offers a way to study and explain what happens in the student cognitive aspect when learning is given in scenario in context; particularly, it is proposed a systematic form of analyzing cognitive processes in a learning mental act, based on Feuerstein's cognitive functions theory, Godino and Recio conceptual triplet (phenomenologies, generalizations and notations), and an own theoretical resource emerging as a need in the development of investigation: learning *mathematical-cognitive acts.*

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Se describe lo referente a los antecedentes, problema, justificación, objetivo, hipótesis, marco teórico y método de la investigación.

1.1 Antecedentes

Es bastante conocido en el ámbito de la Matemática Educativa que diversos estudios muestran cómo la enseñanza habitual del cálculo se basa en la transmisión de conocimientos con un énfasis muy marcado en el desarrollo de habilidades algebraicas, es decir, se centra el aprendizaje en la práctica de métodos algorítmicos y procedimientos que mecanizan el saber, y se desatiende el discernimiento intelectual en la comprensión de ideas, nociones y conceptos, así como sus relaciones y que son necesarios, por ejemplo, en la resolución de problemas. Más aún, el conocimiento generalmente se trata fuera de todo contexto del mundo real, a lo más que se llega en este sentido en un curso común de cálculo, es a resolver los "problemas de aplicación" que se proponen en los textos, los cuales casi nunca corresponden a la realidad. Esto tiene importantes consecuencias (negativas) cuando los que aprenden son estudiantes que en el ejercicio de su profesión requieren de conocimientos y habilidades que les permitan resolver problemas de verdad. Tal es el caso, por ejemplo, de quienes se preparan en carreras de ingeniería. Camarena (1990, p. 24) establece que: *"...parte de la problemática en ingeniería es que la matemática se encuentra totalmente desvinculada de las asignaturas de la ingeniería, y la realidad del ingeniero reclama esta vinculación que en materia de educación está en tierra de nadie..."*.

Esta situación, en el ambiente del aula, tiene implicaciones de suma importancia que afectan la didáctica, por ejemplo, sucede muy frecuentemente en clases comunes de matemáticas en nuestro sistema educativo, que al proponer un problema típico a resolver (inmediatamente después de estudiar los contenidos, definiciones, conceptos, etc., pero sin ofrecer ejemplos similares), los estudiantes reclaman porqué pretendemos que lo resuelvan si no les hemos dado un ejemplo antes. Que eso no es posible. Desde su perspectiva, el profesor debe primero explicar los procedimientos y métodos (paso a paso, con todo detalle) para resolver un problema y después ellos "practicar" con otros similares. Algunos de los alumnos, incluso, llegan a hacer comentarios como *"sólo explíqueme, por favor, cómo se hace (haciendo alusión a procedimientos, métodos o algoritmos), no me ponga a pensar cómo hacerlo"*. Situaciones como esta son comunes en las instituciones educativas de nivel superior en nuestro país.

En particular, en el Sistema Tecnológico de Monterrey, donde se realizó esta investigación, se imparte el cálculo en los cursos (de tronco común) denominados de "Matemáticas para Ingeniería" los cuales van del primero al tercer semestre, es decir, en el primer semestre, Matemáticas para Ingeniería I (cálculo diferencial de una variable), en el segundo, Matemáticas para Ingeniería II (cálculo integral de una variable y series) y en el tercero, Matemáticas para Ingeniería III (cálculo en varias variables e introducción al cálculo vectorial).

Es importante señalar que aún cuando estos cursos llevan el nombre explícito de "para ingeniería", realmente no hay diferencia alguna con otros cursos de cálculo similares, es decir, el contenido matemático y los objetivos de aprendizaje son los mismos. En los programas de estudio correspondientes se puede leer, por ejemplo, que el objetivo es *"proporcionar al alumno los conocimientos fundamentales del cálculo diferencial de una variable real que serán utilizados en la interpretación, planteamiento y resolución de problemas específicos de su carrera"* (para el caso de Matemáticas para Ingeniería I), sin embargo, ni en dichos programas, ni en los textos que se sugieren para los cursos, se mencionan o tratan esos "problemas específicos de su carrera". Y más todavía, en comunicaciones informales con los profesores que imparten estas materias, comentan que si bien tienen alguna idea, en realidad no conocen problemas o situaciones específicas de las carreras profesionales y, por tanto, se limitan a enseñar, cuando mucho, el tipo de aplicaciones que aparecen en los textos que ellos usan.

De manera similar, en pláticas con profesores que imparten cursos de especialidad en ingeniería (Industrial y de Sistemas y en Sistemas Computacionales, para este caso en el Campus San Luis Potosí del Tecnológico de Monterrey), donde se supone se emplean los conocimientos de cálculo estudiados en los cursos mencionados líneas arriba, ellos comentan que realmente necesitan muy poco de estos conceptos, debido a que no se involucran con las deducciones de métodos o fórmulas, sólo las usan. Y como el tipo de "problemas" que se abordan no van más allá de los rutinarios (los ejercicios típicos que se presentan en los libros de texto de uso común), no se necesita más.

Estas situaciones, producto de la experiencia, creencias y costumbres de los profesores, que a su vez resultan de su inmersión en el *sistema didáctico tradicional*[1], repercuten directamente en el aprendizaje de los estudiantes creando ideas falsas sobre lo que se debe (qué y cómo) aprender y sobre la importancia de la matemática misma en su formación.

En diversos trabajos se mencionan las consecuencias negativas de estas situaciones, por ejemplo, Artigue (1995, p. 97) señala que *"…numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión*

[1] Se entiende por *sistema didáctico tradicional* aquél en que el profesor tiene el rol principal en el proceso de enseñanza aprendizaje mientras que los estudiantes asumen una actitud pasiva. El aprendizaje sucede principalmente por repetición, no por descubrimiento, lo que conduce a un aprendizaje producto del énfasis en la mecanización del saber (esto no significa que el aprendizaje por repetición sea erróneo o inadecuado, sino que resulta insuficiente). Además, la didáctica empleada está determinada por el discurso de los libros de texto. Las sesiones de clase se diseñan en función del cumplimiento de los programas de estudio (que en muchos casos están elaborados en función de la estructura de contenidos de los libros de texto). En buena medida, estas situaciones se deben a que los profesores no tienen una capacitación profesional en docencia (y mucho menos en didáctica de las matemáticas), lo cual provoca que su trabajo como profesores de matemáticas se guíe casi exclusivamente por las experiencias vividas como estudiantes, su percepción de lo que significa ser un buen profesor, y lo que dictan los programas y libros de texto oficiales.

satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. Estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y, en particular, la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para tener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa…". Estas situaciones condicionan el ambiente en el aula, la disposición de los estudiantes para aprender, su actitud ante los nuevos conocimientos. Saber matemáticas significa, para los alumnos, tener alguna habilidad para resolver ecuaciones, desarrollar procedimientos, aplicar fórmulas y métodos, etc. Rara vez un estudiante concibe a las matemáticas como algo que le pueda ser útil más allá de eso, y cuando llega a suceder, no es del todo claro el porqué es importante su estudio. ¿Qué se puede hacer?, ¿Cómo vincular los contenidos matemáticos con las áreas que puedan interesar al estudiante? Al respecto, Camarena (2000, p. 5) menciona que: "*...La matemática en contexto: ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento de una matemática con significado, con amarres firmes y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades matemáticas, mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses del alumno...*"

De esta manera, atendiendo la idea de que los estudiantes de ingeniería serán (en su futura vida profesional y en el mejor de los casos) usuarios de la matemática, y que lo que requieren en su formación es de situaciones que les muestren la utilidad de los conocimientos matemáticos en su área de especialidad, es que este proyecto de investigación se basa en la línea de estudio de la matemática en contexto, abordando la problemática específica de la falta de contexto en el aprendizaje del cálculo en el nivel superior de enseñanza.

La idea básica consiste en dotar de significado a los objetos y procesos matemáticos propios del cálculo mediante el diseño de situaciones problema en contexto real de la ingeniería para estudiar el impacto en el aprendizaje de los estudiantes en el aspecto cognitivo. Es importante señalar que entre los antecedentes de trabajos sobre matemática en contexto realizados en México, se cuenta con el *Diseño de un Curso de Ecuaciones Diferenciales en el Contexto de los Circuitos Eléctricos,* Camarena (1987), el *Análisis de Fourier en el Contexto del Análisis de Señales Eléctricas y Electromagnéticas*, Camarena (1993) y *La Serie de Fourier en el Contexto de la Transferencia de Masa,* Muro (2000). Sin embargo, para los fines de esta investigación, es elemental considerar que prácticamente no se ha realizado trabajo sobre el cálculo en contexto ingenieril respecto a las *funciones cognitivas* involucradas en el aprendizaje de los estudiantes. Entendiendo a las *funciones cognitivas* como los prerrequisitos básicos para que se den en forma satisfactoria las operaciones mentales y en general el procesamiento de la información en situaciones de aprendizaje, por ejemplo, al resolver un problema (esto se describe a detalle más adelante en la sección sobre el marco teórico de este reporte).

En los trabajos mencionados líneas arriba, se proponen argumentos teóricos, se estudia el impacto del diseño y puesta en escena de situaciones problemáticas en contexto y se hacen propuestas didácticas, pero no se realiza investigación específica y detallada sobre lo que sucede en el aspecto cognitivo en el que aprende. Todo parece indicar en esos trabajos que cuando el aprendizaje se da en situaciones contextualizadas se obtienen mejores resultados. Particularmente por la enorme motivación que se provoca en los alumnos y el significado específico, en el área de interés, que se supone adquieren las nociones, ideas y conceptos matemáticos. Sin embargo, si esto es así, ¿qué es lo que sucede en la mente del estudiante al respecto?, ¿qué elementos de orden cognitivo están implicados en el aprendizaje?

1.2 Definición del problema.

Como se ha señalado, tanto profesores como estudiantes de carreras de ingeniería están generalmente inmersos en el sistema educativo tradicional, en el que se ha perdido significado en los principales conceptos y nociones matemáticas. Por tanto, se considera necesario realizar investigación a fin de proponer estructuras didácticas alternativas que posibiliten un mejor aprendizaje, un aprendizaje, en este caso, con significado en los procesos ingenieriles reales, cercano al interés de los estudiantes, donde el estudio del cálculo tenga sentido.

Para esto, resulta indispensable indagar sobre el *funcionamiento cognitivo*[2] en los estudiantes al enfrentarse a un escenario de aprendizaje del cálculo contextualizado en ingeniería, para poder contar así con elementos que den luz sobre la forma en que sucede el aprendizaje de nociones y conceptos matemáticos en este tipo de escenarios. Esto permitiría también estar en posibilidad de estudiar a futuro (no es un propósito de este trabajo) los posibles contrastes respecto a otras experiencias de aprendizaje y determinar, o al menos explorar, el porqué de esos contrastes y sus implicaciones didácticas.

De esta forma, se define el problema de investigación en los siguientes términos:

> *¿Qué sucede en el aspecto cognitivo en los estudiantes de cálculo cuando el proceso de aprendizaje se realiza en escenarios contextualizados de la ingeniería?*

1.3 Justificación

El problema de investigación que se aborda surge como respuesta a la necesidad de investigación sobre los aspectos cognitivos mencionados en experiencias de aprendizaje en el contexto de la ingeniería, y se reconoce que la situación en la práctica educativa que reclama esa investigación está marcada por un hecho que revela la experiencia en las aulas, al menos en los primeros niveles de educación superior: la creencia generalizada (o al menos una duda constante) en los estudiantes, de que las matemáticas poco les serán útiles en su futuro ámbito profesional.

---

[2] Se entiende que el *funcionamiento cognitivo* en un acto de aprendizaje está determinado tanto por las *operaciones mentales* (comparaciones, síntesis, análisis, etc.) que posibilitan la interiorización y codificación de conocimientos, como por las *funciones cognitivas* (se describen en el marco teórico de este trabajo) que subyacen al nivel operativo, es decir, las funciones que posibilitan la maniobrabilidad para transformar y adecuar las representaciones mentales en juego en dicho acto de aprendizaje.

Se sabe que un antecedente directamente ligado a esta situación, es que el proceso de aprendizaje que han vivido los estudiantes en los niveles básicos, está caracterizado generalmente por las tendencias de la enseñanza tradicional, en este sentido, su experiencia con las matemáticas en la escuela no ha sido tal vez la más conveniente. Y uno de los factores más importantes: se cree que influye decisivamente el hecho de que tanto los programas de estudio como el *discurso matemático escolar*, que se plasma en los textos de cálculo, en particular, se basan en una estructura que propicia diversos conflictos en el aprendizaje como se señala, por ejemplo, en Cantoral & Mirón (2000), ellos dicen que "*…la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación…*".

Estas situaciones provocan que se forme en los estudiantes una imagen conceptual restringida, y en muchos casos errónea, sobre el estudio y la utilidad de las matemáticas. En particular, parece ser que el cálculo para ellos no es más que una serie de fórmulas, reglas, métodos, etc., que prácticamente no tienen utilidad alguna. Evidentemente, es ésta una situación que resulta como consecuencia del sistema educativo al que han estado expuestos, sobretodo al sistema didáctico imperante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Y es que en el sistema didáctico tradicional, por ejemplo, casi nunca se muestran al estudiante situaciones problemáticas cercanas a su interés, donde se pueda observar la utilidad de los conocimientos matemáticos. Esto predispone su funcionamiento cognitivo. La actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas no es la misma cuando no hay motivación, cuando no hay interés por estudiar algo que, desde su perspectiva, no les resulta útil ni en su formación profesional, ni en su futuro campo laboral.

Así, en este sentido, resulta de suma importancia tratar los fenómenos didácticos desde una perspectiva que considere no sólo el *cómo* enseñar, sino también el *qué* enseñar. Esta preocupación implica el análisis tanto de los programas curriculares de las carreras profesionales, en este caso de ingeniería, como de los procesos didáctico del profesor y los cognitivos de los estudiantes, como señala Camarena (1984) en su metodología para el diseño de programas de estudio en carreras de ingeniería, en donde deja en claro las necesidades del qué enseñar de matemáticas en carreras de ingeniería y su relación con los procesos didácticos.

Además, específicamente en relación al aspecto cognitivo, se considera que éste constituye un aspecto fundamental en la investigación didáctica actual porque puede ofrecer información respecto a lo que sucede en la mente del que aprende. Se hace necesario investigar cómo es que un sujeto se hace de conocimiento cuando se enfrenta a una situación problemática nueva, en un escenario de su interés, e interactúa con los recursos de que dispone en su memoria, tanto de orden cognitivo funcional y operativo (lo concerniente al estado de sus capacidades en términos de funciones cognitivas y operaciones mentales) como los correspondientes a sus conocimientos matemáticos previos.

En particular, como se ha indicado, interesa el estudio del aspecto cognitivo cuando el aprendizaje ocurre en escenarios en base al planteamiento de situaciones problemáticas en contexto. Existe evidencia (ver, por ejemplo, las referencias en los antecedentes) y la creencia en profesores de que en este tipo de escenarios se propicia un mejor aprendizaje, por ejemplo, en Ríos, J. G. (2002) se señala "*Creo que un recurso importante (entre otros) en la enseñanza-aprendizaje de este tipo de cursos (matemáticas) es la realización de proyectos por parte del estudiante, es decir, el análisis y la solución de un problema real en donde es necesario la aplicación de métodos matemáticos. Tienen la ventaja de que los estudiantes se involucran en problemas reales relacionados con su área de estudio, viven en carne propia las dificultades de este tipo de tareas y les deja la sensación de que lo que están estudiando es útil*".

Es menester entonces atender la situación y estudiar lo que sucede a nivel de funciones y procesos mentales respecto al aprendizaje, porque finalmente, aunque intervienen factores como hábitos, creencias, costumbres y otros factores sociales y culturales (y que por su importancia, por supuesto, no pueden ser ignorados), éste sucede como resultado de procesos y operaciones mentales internas que dependen de un funcionamiento cognitivo individual.

Por otra parte, cabe señalar que como un producto a futuro de los resultados obtenidos en este trabajo (considerando el impacto que todo trabajo de investigación debe tener en el medio en que se desarrolla), se puede llegar a proponer una estructura alternativa al actual discurso escolar del cálculo (que se plasma en los libros de texto) que posibilite un mejor aprendizaje de sus contenidos en base al diseño e implementación de escenarios didácticos en el contexto específico de las áreas de interés en ingeniería.

1.4 Supuestos de investigación

En este marco, la idea general de investigación que motiva este proyecto de investigación se apoya en el supuesto general que plantea que una buena aproximación para aprender significativamente cálculo en carreras de ingeniería, es a partir del enfrentamiento de los estudiantes con experiencias de aprendizaje en el contexto de su especialidad, sustentado por (Camarena 2000).

En particular, consideramos el supuesto de que en escenarios contextualizados en la ingeniería, el funcionamiento cognitivo de los estudiantes propicia un aprendizaje significativo de los conocimientos de cálculo en el ámbito del área de especialidad de su interés.

Como se ha señalado, el funcionamiento cognitivo en una experiencia de aprendizaje involucra tanto las operaciones mentales que posibilitan la interiorización y representación mental de conocimientos (y en consecuencia el aprendizaje), como las *funciones cognitivas* que subyacen al nivel operativo. Pero no sólo esto, sino que se ve afectado también, en forma importante, por factores de carácter sociocultural. En particular por los factores asociados a las formas de enseñanza a las que los estudiantes han estado expuestos en su historia escolar, sus creencias sobre las matemáticas y su importancia y la actitud que tienen, en general, hacia el aprendizaje.

Entonces, en un análisis cognitivo sobre procesos de aprendizaje en situación escolar, se deben considerar, de alguna manera, todos los elementos que intervienen; desde las propias funciones y operaciones mentales, hasta los factores externos que afectan, modifican e incluso condicionan el funcionamiento cognitivo de quien está sujeto a las experiencias de aprendizaje.

Preguntas de investigación:

De lo anterior se desprenden las siguientes preguntas que están directamente relacionadas a los objetivos particulares de la investigación: ¿Cuáles son las funciones cognitivas involucradas en el proceso de aprendizaje de ideas, nociones y conceptos matemáticos?, ¿Qué características tiene el funcionamiento cognitivo (en el sentido ya descrito) respecto a la conceptualización de nociones matemáticas en una experiencia basada en le sistema didáctico tradicional de aprendizaje del cálculo?, ¿Qué características tiene el funcionamiento cognitivo respecto a la conceptualización de nociones matemáticas en una experiencia de aprendizaje del cálculo en el contexto en la ingeniería?

1.5 Objetivos

Dado el problema de investigación, se define el objetivo general como sigue:

> ***Analizar las funciones cognitivas[3] de estudiantes de cálculo en experiencias de aprendizaje del concepto de función de dos variables y la derivada parcial en el contexto de la ingeniería.***

Se debe señalar que se asume, de acuerdo a los supuestos de investigación planteados, que los estudiantes tienen un mejor aprendizaje cuando los contenidos se tratan en contexto y por consiguiente, se entiende a su vez, que los estudiantes logran un mejor aprendizaje si éste es significativo (Ausubel, 1978), es decir, si los nuevos conocimientos se tratan en un proceso consistente en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto para producir un verdadero aprendizaje. El diseño de experiencias didácticas debe permitir una relación intencionada (no arbitraria) y sustancial (no al pie de la letra) con los conocimientos e ideas del alumno, es decir, el individuo debe desarrollar una serie de estrategias que le permitan adquirir un conocimiento, almacenarlo y recuperarlo cuando sea necesario. Por consiguiente, la eficacia de este aprendizaje está en función de su significatividad, no, por ejemplo, de las técnicas memorísticas, situación que se ve fortalecida con la matemática en el contexto de la ingeniería (Camarena, 2000).

De esta forma, resulta esencial investigar cómo se logra ese aprendizaje significativo en términos de los elementos cognitivos implicados en el proceso en que se adquiere el conocimiento, de allí el interés en abordar el análisis de las funciones cognitivas que soportan los procesos de pensamiento y que posibilitan el nivel de operatividad mental adecuado para que suceda el aprendizaje.

[3] De acuerdo a la *teoría de funciones cognitivas* utilizada en la investigación. Se describe en la sección sobre el marco teórico en el siguiente Capítulo.

Los objetivos específicos de la investigación son los siguientes:

1. Determinación de los contenidos del cálculo que se usan en el área de especialidad académica de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas.

2. Analizar las funciones cognitivas que intervienen en la resolución de un problema matemático en una experiencia desarrollada bajo el sistema didáctico tradicional de aprendizaje del cálculo en ingeniería.

3. Analizar el funcionamiento cognitivo de estudiantes de cálculo en una experiencia de aprendizaje *en el contexto de la ingeniería*.

Es preciso señalar que el objetivo particular 2 se plantea con el propósito de obtener información previa al diseño de la situación problema en contexto (objetivo general del trabajo y relacionado directamente al objetivo particular 3) sobre las funciones cognitivas que intervienen particularmente al abordar un problema matemático en el área del cálculo [4]; en este sentido, ese objetivo particular constituye un referente preliminar en la investigación.

[4] Considerando que no se cuenta con antecedentes de investigaciones realizadas sobre las *funciones cognitivas* en el aprendizaje del cálculo en el nivel superior de enseñanza, como se explica en el siguiente Capítulo.

1.6 Marco teórico

El problema que se pretendía abordar y los estudios realizados consecuentemente, se ubican en el área cognitiva, dentro del marco de la matemática en contexto. Esto reclamaba una fundamentación del trabajo en referentes teóricos que ofrecieran los elementos para analizar lo que sucede en el aspecto cognitivo durante todo el proceso de resolución de problemas en contexto, esto es, desde el planteamiento del mismo, hasta la propuesta de solución. Interesaba investigar sobre el aprendizaje de nociones del cálculo mediante situaciones problemáticas contextualizadas de la ingeniería, partiendo de la convicción, como se ha señalado, de que esta contextualización posibilita un mejor aprendizaje, con significado, perdurable, no pasajero, con sentido para el que aprende. Entonces, evidentemente, uno de los aspectos de mayor relevancia en el trabajo era el de investigar sobre lo que pasa en la mente del estudiante respecto al aprendizaje de conceptos, pero, ¿cómo se podría estar lo más seguro posible de observar, recoger, interpretar y analizar objetivamente lo que se ve o se cree ver en un sujeto que aprende?

Si el interés hubiera sido el de investigar solamente sobre la adquisición de un concepto, tal vez hubiera resultado suficiente con recurrir a alguna teoría cognitiva que ofreciera un marco específico para analizar los elementos implicados en el aprendizaje de una noción matemática en algún escenario común de enseñanza, por ejemplo, en base a los trabajos de Piaget como (Piaget, J., 1972), la teoría de los campos conceptuales de G. Vergnaud (1990), u otras similares, sin embargo, la intención de estudiar el aprendizaje específicamente en situaciones contextualizadas, obligó a realizar la búsqueda de referentes teóricos que soportaran el análisis de todos los factores implicados en el desarrollo del proceso de implementación de experiencias de aprendizaje del cálculo en contexto, y por ende, en el propio proceso de conceptualización de nociones matemáticas. Es decir, el soporte teórico debía considerar, como una componente central, el análisis de los aspectos cognitivos que se suceden *en cada una* de las etapas del proceso de resolución de un problema contextualizado, a saber (Camarena, 2000):

1. *Planteamiento del problema*
2. *Determinación de las constantes y variables del problema*
3. *Incorporación de los temas y conceptos matemáticos necesarios para abordar el problema*
4. *Obtención del modelo matemático del problema*
5. *Solución matemática del modelo matemático*
6. *Solución*
7. *Interpretación de la solución en términos del problema*

Las perspectivas teóricas de los trabajos de los investigadores señalados líneas arriba, no cubren completamente los elementos necesarios para analizar desde el punto de vista cognitivo, por ejemplo, todo el proceso de resolución de una situación problemática en contexto, entendiendo que este incluye la *comprensión* de tal situación, el propio *proceso de resolución* y la *emisión de la respuesta*. Y un aspecto muy importante: ninguna de estas teorías considera en su estructura, al menos como una componente central, el estudio de las *funciones cognitivas* que subyacen a las operaciones mentales en un acto de aprendizaje (como la resolución de un problema). De hecho, no se encontró ninguna teoría cognitiva en el ámbito de la Matemática Educativa, que incorpore el análisis del funcionamiento cognitivo en este sentido.

Por otra parte, cabe señalar que teorías como la de los campos conceptuales han sido pensadas (al menos en su origen) para el estudio de los procesos de *conceptualización progresiva* de estructuras matemáticas. Esto implica un análisis en función de las etapas de desarrollo mental, como indica Vergnaud (1990) cuando explica el objetivo de su teoría: *"Su principal finalidad es la de proporcionar un marco que permita comprender las filiaciones y las rupturas entre conocimientos, en los niños y los adolescentes…"* Y aclara que *"Las ideas de filiación y de ruptura se refieren igualmente a los aprendizajes del adulto, pero estos últimos se efectúan bajo restricciones que son más del orden de los hábitos y de sesgos de pensamiento adquiridos, que relativos al desarrollo del aparato psíquico"*.

Y precisamente, el interés en esta investigación estuvo directamente relacionado con lo que sucede respecto a los efectos, a nivel cognitivo, de tales hábitos y sesgos de pensamiento en situaciones de aprendizaje. Sobre todo considerando que el presente trabajo se realizó con estudiantes de cálculo en carreras de ingeniería, es decir, con personas en edad adulta, en que se supone han alcanzado la madurez cognitiva.

Así, en lo que resta de esta sección primero se reflexionará y externarán puntos de vista, aunque en forma global, sobre las diferentes aproximaciones de la psicología en la dirección que interesa en la investigación, y posteriormente se tratará sobre la elección de los referentes teóricos en términos de las consideraciones señaladas líneas arriba, y se realizará una descripción detallada de los mismos.

En relación a la psicología**,** partimos de la idea de que - siguiendo al destacado pensador francés Gastón Bachelard- la ciencia construye su objeto de estudio como un objeto teórico. Luego, de esa construcción deberá instrumentarse una operatoria que transforme lo real. Es decir, que si bien el objeto es una construcción hipotética, no debe ser un mero idealismo, debe poder operar transformaciones en la realidad. Esta construcción surge con una pregunta. Es justamente el modo de preguntarnos, el modo de interrogarnos, lo que va ha constituir un determinado campo. Este será un campo teórico y del mismo se deberán derivar sus reglas de aplicación, es decir, sus modos de operar en lo real.

Haremos a continuación un breve recorrido por las principales posturas en relación a las preguntas básicas que han orientado el desarrollo de la Psicología.

La pregunta por el aprendizaje. A fines del siglo XIX, la naciente Psicología se separaba de la Filosofía y lo hacia bajo el fuerte influjo de la física y la química, además de la fisiología alemana y el empirismo inglés. Centraba su interés en los procesos de la conciencia y les estudiaba por medio del método llamado introspección, o sea, la observación de los propios fenómenos mentales. Su enfoque era elementalista y asociacionista, es decir, que reducían los fenómenos mentales humanos a sus elementos últimos y buscaban las leyes que permitieran comprender cómo se asociaban unos con otros. Buscaban entender cómo se percibía, sentía, recordaba etc. Su idea central, proveniente de las ciencias naturales, era que primero es el sistema y luego hay que realizar el ejercicio artificial de desglosar sus elementos.

Es, a principio del siglo XX, en las Universidades de los Estados Unidos donde surge el interés por una Psicología que rechazara las especulaciones y que tuviera un fuerte apoyo en la observación *objetiva* de los hechos. Surge así la demanda por una teoría que fuera capaz de ser *mensurable, verificable por un observador externo y que sus experimentos fueran repetibles***,** para que de esta manera, constituyera un campo científico y objetivo**.** Esta corriente que se llamará *Conductismo*, estará influenciada por el "Positivismo" en su búsqueda de regularidades, es decir *leyes* del comportamiento; por el "Pragmatismo" en su requerimiento de *aplicaciones útiles* y por el "Evolucionismo" en su jerarquización del concepto de *adaptación***.** La cuestión central será referida a cómo hace un organismo (ya que de eso se trata la forma en que consideran a lo humano) para adaptarse al medio y así poder sobrevivir. Debe poder *aprender* de la experiencia para tener mejores posibilidades de salir victorioso en la lucha por la vida.

Por lo tanto, la palabra clave en el conductismo es *adaptación*, y ésta es una forma de *aprendizaje*. La cuestión central en esta concepción es lograr explicar cómo se realiza esa modificación del comportamiento que se llama aprender. La respuesta vendrá del lado de la idea de *conexión* y es por eso que serán denominados *conexionistas*. Se asume que en toda nueva conducta, el aprender se logra por nuevas conexiones que se establecen a partir de las escasas conductas que cada organismo trae al nacer. Para esta línea de interrogación, la mayor parte de la conducta humana es aprendida -de ahí lo de nuevas conexiones- o sea que no es innata y sí es, por lo tanto, alimentada por influencias ambientales antes que por causas internas. En síntesis, podemos decir que este enfoque se caracteriza por: 1) el énfasis en el aprendizaje humano análogo al animal, 2) énfasis en las señales o estímulos presentes en la situación de aprendizaje y no en causas internas de la conducta, 3) mecanicistas en sus leyes del aprendizaje, 4) énfasis en la descripción objetiva de los eventos del medio ambiente, 5) control experimental sobre el objeto de estudio, es decir, en relación a cuáles son los acontecimientos que efectivamente ocurren en el medio, que posibilitan que el organismo responda apropiadamente a los aspectos relevantes del mismo.

Vemos que la pregunta por el aprendizaje esta sostenida fundamentalmente por las ideas de *individuo, organismo, ambiente, adaptación, conexión, condicionamiento, reflejos* y en última instancia, en *movimientos musculares y secreciones glandulares*, entendidos como *procesos físicos y químicos,* en que se manifiesta toda conducta.

Proveniente de un territorio distinto, la teoría psicoanalítica del vienés Sigmund Freud, marcó no solo un enfoque novedoso del psiquismo, sino que desarrolló también un modo de abordar el tema de su interés: *el sufrimiento humano*. La llamada Teoría y Clínica del Psicoanálisis nace en el campo médico y como consecuencia de la necesidad de poder enfrentar de alguna manera el dolor que traían los pacientes que en ese entonces demandaban una respuesta al joven médico austriaco. Dirigían su pedido al profesional para que éste diera una respuesta al porqué eran asaltados por las ideas y miedos que brotaban en sus mentes, o porqué no podían beber agua, caminar, tener sensibilidad, etc., sin ninguna lesión neurológica que lo justificara.

Esta teoría responde a *la pregunta por el saber,* e intenta dar respuesta a la dinámica de la psique humana, estudiar el inconsciente y la influencia de un sujeto cuando habla a otro al grado de provocar cambios en su conducta. Por las características de este campo psicológico y los fines de este recuento, no iremos más allá en esta pregunta.

La pregunta por el conocimiento. La "pregunta por el aprendizaje" limitaba el campo teórico a los métodos públicos de observación, rechazando la construcción de hipótesis y excluyendo, además, todos los conceptos referidos a mente, pensar, imaginar, plan, deseo, intención, etc. La creencia en la supremacía del poder determinante del medio modeló un individuo que actuaba como reflector pasivo de fuerzas y factores presentes en su ambiente, en donde no había lugar para una acción sostenida por ideas o propósitos. Este estado de cosas no se sostuvo por mucho tiempo, ya que el estudio de los procesos cognitivos -ligados al desarrollo filosófico de Occidente- como el pensar, la resolución de problemas y la naturaleza de la conciencia, volvieron a tener protagonismo en la psicología académica norteamericana alrededor de la década del 50. Asimismo, en Europa a principio de siglo, surge la propuesta llamada *"Gestalt"*, teoría centrada en estudios sobre lo *intersubjetivamente* constante en la percepción, tanto humana como de los animales superiores. Se interesa por los *procesos mentales*. La pregunta por la forma en que conocemos nuestro mundo, apelando a conceptos mentalistas los asocia y a su vez los enfrenta con el campo del conductismo. Por otra parte, en Suiza, un biólogo, Jean Piaget, plasma su objetivo básico de elaborar una teoría epistemológica (estudiar la producción del conocimiento humano), interesándose por la psicogénesis del conocimiento. Retoma los clásicos problemas de la filosofía occidental, como: ¿que es el conocimiento?, ¿cómo es posible el conocimiento?, ¿qué pertenece al sujeto y qué al objeto en el acto de conocer?, y los sustituye por una pregunta englobante: *¿cómo se pasa de un estado de menor conocimiento a otro de conocimiento más avanzado?* Construyó la categoría de *sujeto epistémico* en donde incluye lo que *es común a todos los sujetos* en el proceso del conocimiento, es decir, describe un *modelo universal*. Su preocupación por el desarrollo va de la mano con el uso de categorías lógicas, simbólicas, es decir, mentalistas.

Este campo psicológico, en donde podríamos nombrar muchos más autores igualmente significativos (Bruner, Vigotsky, Wallon, Bartlett, etc.), es el que algunos han llamado *cognitivo en sentido amplio*, ya que si bien estudia los problemas pertinentes a la *cognición humana* (percepción, memoria, pensamiento, etc.), debe ser diferenciado de aquél otro -*lo cognitivo en sentido estricto*- que pretende *estudiar los procesos mentales mediante un análisis científico, utilizando la analogía de la mente con la computadora*, y que a su vez se ha llamado las *Ciencias Cognitivas*.

El objetivo de las Ciencias Cognitivas es el análisis científico de los procesos mentales y estructura de la memoria con el fin de comprender la conducta humana (Gardner, 1988). Su componente psicológica se sostiene en un modo de abordar la cognición que recurre a eventos interiores, es decir mentales, que construye un modelo conceptual de las estructuras y de los procesos internos, que pone énfasis en la *comprensión* y en la *explicación*, que utiliza como metodología la modelación y la programación, y que fundamentalmente se apoya en la idea de *representación mental*, que es definida como la forma o la estructura que adquiere la información codificada en la mente humana y los *procesos mentales* son las maniobras mediante las cuales se manipulan y transforman esas representaciones mentales. Determina que la actividad cognitiva humana debe describirse sobre la base de símbolos, esquemas, imágenes, ideas, proposiciones, etc. Interesa entonces, estudiar a los individuos que enfrentan de manera *activa* y *con estructuras y procesos mentales propios*, los problemas que aparecen en su vida.

Es evidente que el campo que se define desde la "pregunta por el aprendizaje", entra en permanente colisión con esta propuesta representacional de la "pregunta por el conocer".

La *ciencia cognitiva* se ha constituido en *la nueva ciencia de la mente*. En su desarrollo, se destaca la presencia de investigadores provenientes del campo de la matemática, física, cibernética etc., los que van conformando un nuevo territorio, principalmente de orden conceptual, que se cristaliza en un entrecruzamiento interdisciplinario. Se reconoce que es un campo que trata con aspectos de la cognición compleja, con modelos de los procesos cognitivos, sistemas inteligentes y la conducta emergente de los sistemas interactivos en gran escala. Toma prestado de una amplia variedad de disciplinas, incluida, como se ha visto, la psicología, las ciencias de la computación, la lingüística, las matemáticas, la filosofía, la neurociencia y otras. Sus metas incluyen una mejor comprensión de la mente humana, de la enseñanza y el aprendizaje y de las habilidades mentales.

En general, se considera que las Ciencias Cognitivas, comparte con la Psicología su base empírica, su interés por los procesos mentales, la formación de símbolos, las estructuras mentales, la inteligencia -signifique esto lo que signifique-, pero discrepan en que la Psicología -como conjunto difuso de preguntas- no ha dejado de interrogarse por lo que llamamos *la experiencia humana*, es decir, un hombre que desea, que sufre, que depende de una crianza, que crece, que se sabe mortal, que vive en una sociedad, en una cultura y en una historia.

De esta manera, en función del objetivo general que se persigue en este trabajo, y considerando que el hombre no puede ser reducido a un mero procesador de información, se decidió basar los estudios en la idea científica del campo de las Ciencias Cognitivas, pero con dos consideraciones importantes: (1) incluir aspectos del comportamiento psíquico; es decir, para el análisis del funcionamiento cognitivo, se recurrirá a la idea de la analogía entre mente y ordenador como una base científica de estudio, pero se incorporarán elementos teóricos que nos den luz sobre los factores internos en que se basan los procesos mentales y que influyen en las conductas de aprendizaje de los estudiantes; (2) implementar una forma sistemática de analizar específicamente lo concerniente a la conceptualización de nociones matemáticas en una experiencia de aprendizaje en contexto.

Entonces, atendiendo estas ideas y con el objeto de realizar el estudio cognitivo en los términos en que se ha descrito, tomaremos para la primera consideración la *teoría del mapa cognitivo* y, en particular, *la teoría de las funciones cognitivas* como las concibe R. Feuerstein (1977), y para la segunda, el modelo teórico de la tripleta conceptual *fenomenologías-generalizaciones-notaciones* de Godino y Recio (1998).

1.6.1 El mapa y las funciones cognitivas de Reuven Feuerstein[5]

El *mapa cognitivo* es un instrumento que hace posible la representación de una serie de conceptos con un significado y unas relaciones, enmarcado todo ello en un esquema.

Desde una perspectiva cognitiva el mapa nos ayudaría a conocer cómo se aprende o, como dice Novak: "*el mapa cognitivo es una técnica mediante la cual podemos exteriorizar conceptos, también ayuda a aprender con significado, explicitar y relacionar al aprendizaje adquirido recientemente con el que ya se poseía, permitiendo la comprensión de los conceptos y sus relaciones jerárquicas*" (Novak, 1984; pág. 17).

[5] Todas las definiciones que se presentan en esta sección sobre el *mapa cognitivo* y las *funciones cognitivas* fueron tomadas de (Feuerstein, R., 1977).

El modelo de Feuerstein incluye siete parámetros que pretenden reflejar amplias dimensiones cognitivas, todas ellas susceptibles al cambio. A través del mapa cognitivo podemos localizar los puntos específicos en donde aparecen dificultades u obstáculos en el aprendizaje.

1. Parámetros del mapa cognitivo

El modelo se basa en parámetros a través de los cuales se puede analizar el acto mental. Este término se utiliza para describir cada función a lo largo del proceso de pensamiento, es decir, cuando se realiza un acto mental –como por ejemplo resolver un problema-, el pensamiento progresa a lo largo de tres fases que tienen una estrecha relación y se sobreponen a lo largo del proceso. Los parámetros del mapa cognitivo nos permiten *analizar y categorizar* el acto mental.

1.1 Contenido

Cada acto mental se ha de describir de acuerdo con la materia que trata; ésta se ha de analizar en función del unive rso de contenido sobre el que se opera. El contenido de cualquier material, test o problema ha de estar en consonancia con la *competencia* de la persona, por tanto, cuando se pretende estudiar una operación cognitiva específica el contenido juega un importante papel.

Además, el contenido es una de las áreas de funcionamiento cognitivo que mejor refleja las diferencias individuales en la educación, ya que según la procedencia sociocultural del individuo éste presentará una competencia relativa en ciertas áreas.

Esta es la razón por la que en el terreno educativo se debe cuidar el contenido que se pretende enseñar al estudiante, no cayendo en los extremos de suma facilidad o extrema dificultad. La excesiva familiaridad con un contenido puede provocar en el alumno una falta de interés, de la misma manera que un contenido educativo extraño puede producir un rechazo.

1.2 Modalidad del lenguaje

La modalidad, forma de presentación de la información, es el segundo parámetro del mapa cognitivo, y hace referencia a la *variedad de lenguajes* en los que se puede expresar un acto mental. Estas formas de presentación pueden ser: figurativa, numérica, simbólica, verbal, gestual, kinestésica, o muchas otras que expresen o transmitan la información, facilitando la elaboración de la misma.

La importancia de ese parámetro radica en el hecho de que el rendimiento manifiesto de un individuo depende de la clase de modalidad empleada, puesto que no todos los individuos son capaces de aprender con la misma facilidad y en la misma forma. Para Feuerstein y sus colaboradores, la modalidad en la presentación y planificación de tareas educativas ha de ser cuidadosamente considerada por el profesor o por el experto en educación, tanto para la investigación como para el diseño de materiales de instrucción (Feuerstein y otros, 1980).

1.3 Operaciones mentales

El tercer parámetro del mapa cognitivo hace referencia a la *operación mental*, conjunto de acciones interiorizadas, organizadas y coordinadas, en función de las cuales realizamos la elaboración de la información que recibimos.

¿Qué relación tendrían el acto mental y la operación? Sencillamente, la exigencia que tiene todo análisis del acto mental de definir la naturaleza precisa de la operación implícita. Es decir, la actividad mental puede fluctuar desde niveles muy simples a niveles muy complejos, de ahí que la operación que se necesita para resolver una actividad pueda oscilar desde el simple reconocimiento o identificación de objetos hasta niveles más complejos que exijan operaciones tales como clasificación, seriación, multiplicación lógica y comparaciones.

Junto con la operación, es importante definir y concretar los prerrequisitos o funciones necesarias para su aplicación. El proceso del pensamiento implica diferentes clases de operaciones: por ejemplo; la clasificación y el análisis son buenos ejemplos de operaciones mentales. Dichas operaciones se desarrollan a través de las relaciones que el individuo establece entre las cosas y el medio ambiente. El uso de las *funciones cognitivas* permite al sujeto una cierta flexibilidad para procesar la información necesaria para la operatividad mental. Consecuentemente, esto hace posible comprender los procesos implícitos en el procesamiento de la información, o, lo que es lo mismo, el análisis de la cognición.

1.4 Fases del acto mental

El cuarto parámetro del mapa cognitivo se refiere a las fases en las que tiene lugar el acto mental: input (entrada), elaboración y output (salida). Estas tres fases están intercorrelacionadas y cada una de ellas tiene sentido en la medida en que está en estrecha relación con la otra. La fase es un parámetro fundamental en el análisis del acto mental de un sujeto puesto que posibilita el estudio sistemático del proceso de pensamiento, por ejemplo, en la resolución de un problema.

A lo largo de las tres fases del acto mental ocurren una serie de funciones y de disfunciones cognitivas, disfunciones que interfieren en el aprendizaje, impidiéndole al sujeto aprender de forma eficaz.

Una disfunción cognitiva es una cierta incapacidad para realizar el acto mental. Las funciones deficientes o disfunciones ayudan a identificar los prerrequisitos del pensamiento y nos indican las deficiencias de aquellas funciones que permanecen interiorizadas en el pensamiento, que no deben confundirse con las operaciones o contenidos propios del pensamiento.

1.5 Nivel de complejidad.

El nivel de complejidad ha de ser entendido como la cantidad y calidad de unidades de información necesarias para que se produzca el acto mental.

Una “unidad de información” es la cantidad mínima de conocimientos que ha de tener un sujeto para que se produzca un acto mental específico. La complejidad vendría determinada por el número de unidades de información y la calidad de éstas, en función del grado de innovación y de la familiaridad que el sujeto tenga con el problema. De ahí que cuanto más familiar es la información, menos complejo será el acto mental y, por el contrario, cuanto más novedosa sea la información, más complejo será el acto mental.

El parámetro de complejidad, basado en el número y la innovación, tiene una especial relevancia, tanto para el diseño de materiales de apoyo en investigación como para la evolución de un proceso de instrucción.

1.6 Nivel de abstracción

Es la distancia que hay entre un acto mental y el objeto o suceso sobre el cual se opera, de tal forma que el contenido puede oscilar desde la pura percepción sensorial hasta el nivel más elevado de abstracción y representación mental. Por ejemplo, una actividad como la de clasificar bloques o separarlos de acuerdo con un sistema de clasificación previamente fijado, puede variar desde ejecutar la separación con las manos hasta representar mentalmente dicha clasificación aplicando algún principio (Prieto, S. D., 1992). Todavía es más abstracta la aplicación de operaciones a proposiciones puramente hipotéticas sin referencia a objetos reales, de tal forma que, utilizando la operación mental y el universo de objetos o sucesos a los cuales se aplica, puede establecerse una jerarquía de niveles de abstracción.

Por ello, por ejemplo, un fallo en la clasificación no implica necesariamente una incapacidad para clasificar, sino más bien una dificultad para operar en un nivel dado de abstracción.

1.7 Nivel de eficacia

El acto mental también puede ser descrito y analizado de acuerdo con el grado y nivel de eficacia con que se produce.

Como criterio de eficacia se usa el complejo rapidez/precisión, y/o la cantidad de esfuerzo proyectado objetiva y subjetivamente por el sujeto en la actividad presente.

El nivel de eficacia se puede concebir como una dimensión que difiere cualitativa y cuantitativamente de los otros seis parámetros, aún a pesar de que puede quedar determinado y afectado por uno de ellos o por la combinación de los mismos. Por ejemplo, un nivel de complejidad bajo –por el contenido demasiado familiar al sujeto- puede hacer eficaz el acto mental que opera sobre esta actividad. Sin embargo, a la hora de la evaluación es muy difícil separar la eficacia de la verdadera capacidad del sujeto, ya que intervienen otras variables como son las destrezas e informaciones que posee (Prieto, S. D., 1992).

Es precisamente esta confusión entre eficacia y capacidad la que, en muchas ocasiones, trae como consecuencia un diagnóstico erróneo de la información y puede provocar interpretaciones y conclusiones falsas.

Por tanto, la eficacia para una tarea siempre depende de una variedad de factores intrínsecos y extrínsecos que afectan al individuo –tales como la ansiedad o baja motivación- que pueden quebrantar nuestra eficiencia para una actividad particular. Por el contrario, el grado de cristalización del acto mental y la automatización del mismo pueden determinar la naturaleza y magnitud el impacto de estas variables en la eficacia del sujeto. Es decir, cuanto más recientemente se haya adquirido un modelo de conducta, menos resistente será la actividad a otra nueva y, por tanto, más vulnerable a factores nuevos que puedan aparecer.

Precisemos pues que la eficacia de un sujeto está determinada, al menos en buena parte, por la familiaridad, las operaciones involucradas en la actividad y el grado de motivación.

Hablemos ahora de otra dimensión importante en el desarrollo de la eficacia: la *automatización*. La automatización progresiva de algunas conductas es un proceso que lleva a la reducción de la cantidad y nivel de esfuerzo necesario para generar un acto mental. El proceso de automatización conduce a una familiarización con ciertos componentes de la tarea y a una cierta capacidad para invertir parte de la energía en aquellas tareas que exigen mayor precisión y rapidez.

Por el contrario, la ineficacia también se puede dar cuando un sujeto está excesivamente familiarizado con la tarea, intentando buscar relaciones o soluciones que realmente no existen. Esto se observa, a veces, en sujetos inteligentes que, al enfrentarse con actividades demasiado fáciles, pasan buen rato, mucho más de lo que realmente necesitan, buscando soluciones más complejas de las que realmente existen.

2. Las funciones cognitivas

Las funciones cognitivas son consideradas como los prerrequisitos básicos de la inteligencia. Son las funciones que subyacen a las operaciones mentales, sirven para la interiorización de la información y permiten la autorregulación del organismo. La interiorización es el pilar básico del aprendizaje y de la adaptación y, por tanto, de la inteligencia. *"Las funciones cognitivas como actividades del sistema nervioso explican, en parte, la capacidad del individuo para servirse de la experiencia previa en su adaptación a nuevas situaciones"* (Feuerstein, 1979).

2.1 Funciones cognitivas en la fase de entrada

Estas funciones se refieren a la cantidad y calidad de los datos acumulados por el individuo antes de enfrentarse a la solución de un problema.

1) Percepción clara: Conocimiento exacto y preciso de la información. El sujeto ha de recibir la estimulación de acuerdo con los parámetros de simplicidad y familiaridad, de manera que pueda enfocar su atención para captar todo tipo de información a través de los sentidos. Por el contrario, la estimulación novedosa y compleja le incapacitará para indiscriminar de forma adecuada los estímulos convenientes.

La disfunción cognitiva *percepción borrosa* consiste en un proceso pobre e impreciso de los datos de la información. Esta deficiencia implica percibir los estímulos de forma incompleta y sin detalles. La falta de claridad lleva a los sujetos a definiciones imprecisas.

2) Exploración sistemática de una situación de aprendizaje: Es la capacidad que muestran algunos individuos para organizar y planificar la información cuando se les presenta, bien en la vida ordinaria o bien en el aprendizaje sistematizado.

La disfunción de la exploración sistemática es la *impulsividad ante una situación de aprendizaje*, consistente en una incapacidad para tratar la información de forma sistemática y planificada. Esta es una de las disfunciones cognitivas más fáciles de observar.

"La impulsividad es una de las principales causas de los fallos en la solución de problemas. Feuerstein la clasifica en tres tipos. En primer lugar, existe un tipo de impulsividad que parece tener un origen biorrítmico o constitucional y se manifiesta por la rapidez inapropiada con la que una persona responde a una serie de estímulos.

Un segundo tipo de impulsividad implicaría un control sobre la conducta motora, como una función del proceso mismo de la inhibición. A veces sucede que algunos sujetos, que en un tiempo previamente determinado, deben resolver tareas que exigen una cierta *rigurosidad, se debaten entre realizar la tarea rápidamente o realizarla con precisión, aunque inviertan en ello más tiempo del convenido.*

El tercer tipo de impulsividad, cuyo origen no es ni constitucional ni biorrítmico ni incluso conductual, se observa en la falta de control, que junto con la limitada consciencia de datos relevantes hace que el sujeto llegue a dar respuestas inapropiadas. A este tipo de impulsividad Feuerstein la llama epistémica, en el sentido de que el estudiante muestra su incapacidad y falta de atención al incorporar los datos que ya previamente había contemplado" (Prieto, S. D., 1992).

No siempre ni necesariamente la impulsividad es el resultado de una incapacidad para atender, aunque bien es verdad que en la mayoría de los casos es el producto de una falta de objetivos en el acto mental, como resultado de la incapacidad para definir un problema.

La impulsividad afecta a los tres niveles del acto mental. En el *input* se manifiesta en la incorporación fragmentaria, incompleta y confusa de los datos; en el nivel de *elaboración* la impulsividad hace que el sujeto carezca de procesos internos de presentación; por tanto, la conducta se manifiesta a través del ensayo-error, respuestas al azar y motóricas; y en la fase de *output*, la conducta impulsiva se traduce en las elecciones imprecisas, respuestas absurdas y erróneas, aun cuando la respuesta correcta pueda estar en el repertorio conductual del sujeto (Prieto, S. D., 1992).

3) Habilidades lingüísticas a nivel de entrada: Capacidad para discriminar y diferenciar objetos, sucesos, relaciones y operaciones a través de reglas verbales. Ello implica una cierta habilidad para establecer el significado de símbolos y signos. También incluye la codificación y decodificación.

La disfunción consistiría en *la incapacidad para entender palabras y conceptos,* o en la dificultad para utilizar con precisión y entender adecuadamente las palabras y conceptos que son necesarios en el aprendizaje. Cuando se presenta esta disfunción hay que dar al que aprende la información muy limitada, es decir, pequeñas unidades de información para que no se le acumule la tarea, y a continuación pedirle que intente relacionar pequeñas unidades de información. La ausencia de códigos verbales específicos afecta no sólo a la fase de entrada sino también a la de elaboración y respuesta.

Así, por ejemplo, en la enseñanza de analogías el aspecto más importante que se valora es la *deducción* de la *relación*, que permitirá establecer la analogía completa.

En definitiva, los códigos verbales permiten utilizar todo tipo de relaciones y facilitan la comprensión y comunicación de los niveles abstractos de pensamiento.

"La falta de instrumentos verbales adecuados se manifiesta de forma evidente en las respuestas de los sujetos que presentan déficit cognitivos. Al igual que la impulsividad, la insuficiencia de recursos lingüísticos afecta a las distintas fases del acto mental: en la fase de input, la ausencia de códigos verbales reduce la cantidad y calidad de la información; en la fase de elaboración, la capacidad para establecer generalizaciones se verá disminuida cuando el sujeto carezca de los términos de relación propios para establecer la analogía en aquellas tareas referidas a la comparación y clasificación, y en la fase de output, la existencia de códigos verbales permite el uso de relaciones complejas y facilita la comprensión y comunicación de operaciones y relaciones abstractas. Por tanto, la ausencia de las operaciones de codificación y decodificación harán imposible la comunicación de la respuesta" (Prieto, S. D., 1992).

4) *Orientación espacial*: Capacidad para establecer relaciones entre sucesos y objetos situados en el espacio.

La disfunción será la *falta* o *deficiencia* en la *orientación espacial* consistente en la dificultad para identificar la relación que guardan en el espacio los sucesos y las cosas, a la vez que implica una cierta incapacidad, por parte del alumno, para orientarse en el espacio.

La deficiencia, e incluso la ausencia de los conceptos y sistemas de referencia espacio-temporal incapacita al que aprende para llegar a establecer, representar, proyectar y conceptuar las relaciones entre objetos y sucesos. Así, es muy frecuente encontrar sujetos que no manejan bien las relaciones espaciales a nivel proyectivo ni euclidiano, ya que carecen del nivel de representación mental que dichos niveles exigen.

5) *Orientación temporal*: Implica la incapacidad para identificar la relación entre sucesos pasados y futuros. Las relaciones temporales aparecen muy deficitarias, por ejemplo, en los sujetos con problemas de rendimiento y en los deprivados culturales, debido a que el tiempo es un concepto abstracto que requiere un pensamiento de tipo representativo relacional, siendo un concepto difícil de enseñar, incluso más que algunas relaciones espaciales.

La incapacidad para establecer relaciones temporales hace que el sujeto no pueda ordenar, resumir, comparar ni secuenciar los sucesos tal y como acontecen en la realidad.

"Tanto los conceptos espaciales como los temporales son necesarios para definir nuestras percepciones. La percepción individual tiene un significado en la medida en que unos sucesos se insertan dentro del espacio y el tiempo" (Feuerstein, 1979).

6) *Conservación, constancia y permanencia del objeto:* La estabilidad perceptiva depende de la capacidad para conservar la invariabilidad de los objetos por encima de posibles variaciones en algunos de sus atributos y dimensiones. Así, el tamaño, la forma, la orientación y la cantidad, entre otras características, permanecen estables, a pesar de algunas transformaciones en otros atributos.

Precisamente la operación mental, como función interiorizada reversible y coordinada con una estructura, es la que permite llegar a la reversibilidad, proceso mental que subyace en la conservación. La reversibilidad de pensamiento es la capacidad para ejecutar una acción en los dos sentidos del recorrido, sabiendo que se trata de una misma acción (Piaget, 1924).

La disfunción cognitiva de la conservación y de la reversibilidad es la *irreversibilidad* o rigidez del pensamiento que, asociada a la percepción episódica de la realidad, impide establecer relaciones de los objetos entre sí.

"Los sujetos que muestran una cierta dificultad en la conservación también manifiestan una capacidad muy limitada para categorizar" (Prieto, S. D., 1992).

7) *Organización de la información:* Capacidad para utilizar diferentes fuentes de información a la vez. Esta función es la base para establecer relaciones entre objetos y sucesos. La capacidad para encontrar coherencia o incoherencia a diferentes informaciones es una condición necesaria para establecer el principio de "equilibrio" que exige la solución de problemas. Es decir, ante la resolución de un problema el sujeto se plantea cómo utilizar las diferentes informaciones que tiene a mano, por tanto necesita una mínima capacidad de relación para conectar éstas entre sí y encontrar una cierta coherencia que dé sentido a su respuesta.

Por el contrario, la disfunción se manifiesta en la incapacidad del sujeto para relacionar y considerar dos o más fuentes de información a la vez. La falta de utilización simultánea de una o más fuentes de información se puede dar en las tres fases del acto mental, en la de *input* se observa esta deficiencia cuando el sujeto sólo toma en consideración una de las diversas alternativas o dimensiones del ítem.

Esta incapacidad también se manifiesta durante la fase de elaboración en el hecho de que el alumno no puede utilizar toda la información disponible porque no la ha organizado previamente.

En la fase de salida (output) el uso y manejo de dos fuentes de información es un prerrequisito indispensable para la descentración o capacidad para aceptar el punto de vista de los demás (Piaget, 1924; Pain, 1976; Feuerstein, 1980).

8) *Precisión y exactitud en la recogida de la información*: Consiste en la capacidad para percibir la información con una cierta rigurosidad. Este proceso cognitivo implica una selección cuidadosa y esmerada de todos los datos que llevarán a la respuesta correcta.

Por el contrario, la *impresión* hace que el sujeto sólo se fije de forma parcial en la información, lo cual le llevará a una elaboración pobre de la misma y a una solución inexacta del problema.

2.2 Funciones cognitivas en la fase de elaboración.

Las funciones que se suceden en esta fase están relacionadas con la organización y estructuración de la información en la solución de problemas. De ahí que las funciones de esta fase incluyan factores que permiten al sujeto hacer un uso eficaz de la información disponible.

9) *Percepción y definición de un problema:* Consiste en la habilidad para delimitar *qué* pide el problema, *qué* puntos hay que acotar y *cómo* averiguarlos.

Todo problema produce en el sujeto un cierto *desequilibrio* hasta que éste lo asimila correctamente y lo acomoda a sus esquemas. En principio, este desequilibrio llevará al sujeto a pensar reflexivamente sobre el problema intentando buscar una definición conveniente, descartando aquellos puntos que sean incompatibles e incongruentes, utilizando todo tipo de información previamente almacenada que tenga cierta relación con el problema presente.

La incapacidad para percibir un problema y definirlo se manifiesta en la imposibilidad de elaborar la información; consecuentemente, las definiciones no tienen sentido para el sujeto, ya que éste muestra una incapacidad para reflexionar, comparar y combinar los elementos del problema.

10) *Selección de información relevante:* Capacidad para elegir la información previamente almacenada y relevante para la solución del problema de que se trate.

La información adquirida por el sujeto es almacenada en la memoria a largo plazo; así pues, cuando éste necesita utilizarla sólo tiene que realizar un esfuerzo relativo para recordar todos aquellos objetos, sucesos o conceptos que le son útiles para resolver el problema.

Este proceso cognitivo lleva al sujeto a establecer comparaciones y relaciones entre los sucesos ocurridos en diferentes actividades y momentos. Consecuentemente, esto hace que el que aprende se perciba como verdadero procesador de información y no como mero receptor pasivo.

Por el contrario, la incapacidad para utilizar la información adquirida previamente afecta a la actitud de la persona con respecto al aprendizaje, ya que entonces el sujeto se percibe como recipiente pasivo de información.

Además, *"…la relevancia e irrelevancia de los datos guardan una estrecha relación con la capacidad para procesar la información. La relevancia exige establecer metas específicas, por tanto es necesario definir bien las metas y objetivos de la intervención que determinen el conocimiento que el estudiante tiene de los estímulos y el grado de concentración que exigen los mismos"* (Prieto, S. D., 1992).

Así pues, la relevancia de los estímulos es una función directa de la intencionalidad y del grado de concentración hacia la meta, lo cual impone una cierta actividad mental por parte del individuo.

A veces la falta de discriminación entre las diferentes unidades relevantes de información puede darse junto con la definición inapropiada del problema, lo cual indica la inexistencia del proceso perceptivo.

11) *Interiorización y representación mental*: Capacidad para utilizar símbolos internos de representación.

La falta o deficiencia de la interiorización se manifiesta en la conducta demasiado concreta y sin generalización apropiada; además, implica un bajo nivel de abstracción debido al uso restringido de símbolos, signos y conceptos. La interiorización deficiente impide usar y manipular activamente toda la información almacenada previamente, razón por la cual la deficiencia en la interiorización afecta seriamente a la representación de hechos futuros e impide la transformación de los mismos.

12) *Amplitud y flexibilidad mental:* Capacidad para utilizar diferentes fuentes de información, estableciendo entre ellas una coordinación y combinación adecuada para llegar al pensamiento operativo.

En muchos casos el sujeto se limita a seguir una serie de informaciones sin establecer ningún tipo de coordinación; más bien considera las diferentes informaciones como unidades independientes, lo cual hace que al intentar resolver un problema que exige la consideración de varias fuentes de información a la vez, sea incapaz de abrir su campo mental y considerar otras posibilidades. Su enfoque se limita a un solo punto de vista, por lo que su pensamiento queda limitado y reducido a una información parcializada, como si se hubiese bloqueado la mente. No es un sujeto incapaz de recordar o memorizar, sino más bien de utilizar de forma espontánea toda la información que poseen (Feuerstein, 1979).

La *estrechez o cerrazón del campo mental* implica la deficiencia en la manipulación y el procesamiento de varias unidades de información simultáneamente. Esta estrechez mental hace que se pierda una serie de informaciones adquiridas previamente, lo que demuestra que el sujeto había adquirido el aprendizaje de forma repetitiva y sin interiorización.

13) *Planificación de la conducta:* Capacidad para prever la meta que se quiere conseguir utilizando la información adquirida previamente. La conducta de planificación consiste en

establecer un plan que incluya todas las etapas hasta alcanzar la meta o solución. Los pasos se han de diseñar con un cierto orden y según una secuenciación temporal.

Por el contrario, la deficiencia en la conducta de planificación consiste en una incapacidad para organizar los datos en la dirección más adecuada. Consecuentemente, se utilizan los estímulos en forma ineficaz y el sujeto manifiesta una predisposición a responder a un estímulo de *manera episódica y fragmentada*.

14) *Organización y estructuración perceptiva*: Consiste en la capacidad para orientar, establecer y proyectar relaciones.

La percepción episódica es la dificultad para agrupar y organizar relaciones de objetos y hechos de la vida cotidiana. Así, los sujetos con necesidades educativas especiales manifiestan una ausencia en la coordinación y estructuración mental, sus reproducciones carecen, la mayoría de las veces, de relaciones básicas de orientación y las formas aparecen desarticuladas (Rey, 1954; Feuerstein, 1979).

"Se han diseñado múltiples estrategias para analizar este tipo de deficiencias. La intervención para eliminar y corregir la percepción episódica de la realidad consiste en desarrollar procesos de "insight" que permitan el análisis de los errores realizados" (Prieto, S. D., 1992).

15) *Conducta comparativa*: Consiste en la capacidad para realizar todo tipo de comparaciones y relacionar objetos y sucesos anticipándose a la situación. Este proceso está estrechamente relacionado con el manejo de la información en la medida en que el sujeto necesita utilizar la información adquirida previamente. Esta capacidad también implica poder resumir la información de forma automática.

La percepción episódica de la realidad –carencia absoluta de conducta comparativa- afecta a la interacción del sujeto con la tarea, limitándole su cognición a los procesos más elementales del pensamiento, ya que el sujeto no puede trascender su experiencia perceptiva inmediata. Consecuentemente, no podrá realizar inferencias lógicas que le lleven al pensamiento abstracto e hipotético.

La deficiencia en la conducta comparativa consiste en la incapacidad para establecer relaciones de semejanza y diferencia entre objetos y sucesos. La conducta comparativa afecta y se ve afectada por los procesos de input y output. En la mayoría de los casos, la pobreza misma de vocabulario y de conceptos y el uso restringido de las relaciones espacio-temporales limita la comparación. Esto también afecta las funciones de la organización sistemática, conducta sumativa, precisión y exactitud.

16) *Pensamiento hipotético*: Capacidad para establecer hipótesis y comprobarlas aceptando o rechazando la hipótesis previamente establecida.

"Los fallos en el pensamiento lógico no siempre se deben a una deficiencia a nivel de operaciones lógicas, sino que son más bien el producto de una cierta incapacidad para expresar sus resultados" (Prieto, S. D., 1992).

La deficiencia para razonar hipotéticamente y la falta de estrategias para relacionar hipótesis se refleja en una cierta incapacidad para intuir varias alternativas al explicar un hecho. El pensamiento hipotético deductivo requiere la presentación y anticipación del hecho futuro; incluso exige la validación del mismo, de tal forma que el sujeto, ante diversas alternativas, ha de elegir la más válida y rechazar las otras (Feuerstein, 1979).

17) *Evidencia lógica*: Consiste en la capacidad de demostrar las respuestas a través del razonamiento lógico, de ahí que el estudiante haya de formular y razonar con argumentos lógicos la validez de su respuesta.

La deficiencia en el razonamiento lógico se caracteriza por una formulación inadecuada de las razones del alumno al exponer sus argumentaciones; además, éste no se da cuenta de cuando éstas son incongruentes. Así, *"…los sujetos que muestran un déficit en la evidencia* *lógica no se inmutan en absoluto por la relación ilógica entre las soluciones que dan y las instrucciones de la tarea"* (Feuerstein, 1979).

18) *Clasificación cognitiva*: Es la capacidad para organizar datos en categorías inclusivas y superiores. La clasificación incluye en el "input" las funciones de percepción, conservación y constancia, uso de conceptos, instrumentos verbales y el manejo simultáneo de dos o más fuentes de información. En la fase de elaboración precisa de la conducta comparativa, sumativa, del uso de las dimensiones relevantes y del establecimiento de relaciones virtuales. En la fase de "output" exige la atención y la precisión de la respuesta.

"La dificultad para la elaboración de categorías cognitivas se puede presentar en la falta de repertorios conceptuales y de reglas a la hora de explicar la transformación exigida por la clasificación" (Feuerstein, 1979).

2.3 Funciones cognitivas en la fase de "output".

Las funciones y procesos que se suceden en esta fase están relacionados con la comunicación exacta y precisa de la respuesta o solución del problema presente.

19) *Comunicación explícita:* Consiste en utilizar un lenguaje claro y preciso que responda al problema formulado en la tarea. Esto supone un cierto nivel de comprensión por parte del sujeto.

La disfunción es la comunicación egocéntrica. Esta deficiencia sería el resultado de una falta de diferenciación entre el sujeto que habla y el que escucha, ya que éste no percibe a aquél como diferente. *"El egocentrismo se refleja en una falta de precisión, explicación e, incluso, de argumentación por parte del sujeto que habla, de forma que cree que su interlocutor comprende bien y acepta su punto de vista. Este tipo de conducta trae como consecuencia problemas de irreversibilidad de pensamiento y de disciplina. También* *influye en la representación y relación espacial (Wallon, 1976, 1979; Piaget e Inheler, 1977; Feuerstein, 1980)*” (Prieto, S. D., 1992).

La comunicación explícita exige la descentración y la reversibilidad de pensamiento.

20) *Proyección de relaciones virtuales*: Capacidad para ver y establecer relaciones que existen potencialmente pero no en realidad. Esta función cognitiva exige la reestructuració n y configuración de relaciones ante situaciones nuevas.

La incapacidad para establecer y proyectar este tipo de relaciones se manifiesta en la dificultad que presentan algunos sujetos para deducir y proyectar relaciones de tipo diferente.

21) *Reglas verbales para comunicar la respuesta*: Es la capacidad que se manifiesta en el uso, manejo y deducción de reglas verbales para la solución de un problema.

La falta de vocabulario, conceptos y operaciones mentales hace que el sujeto no pueda comunicar sus soluciones y respuestas de manera correcta.

22) *Elaboración y desinhibición de la en la comunicación de la respuesta*: Capacidad para expresar la respuesta de forma rápida, correcta y sistemática.

El bloqueo es la disfunción cognitiva que lleva al estudiante a no emitir ninguna respuesta, ya que se siente fracasado. “*El sujeto puede tener repertorios verbales, pero el problema surge al emitir la respuesta; por ello, el bloqueo se puede considerar como una incapacidad del sujeto para participar en la actividad, ya que ésta le puede llevar al fracaso. Este es un aspecto cognitivo y emotivo-motivacional*” (Prieto, S. D., 1992).

El bloqueo puede variar desde una falta de iniciativa para responder hasta una evasión para enfrentarse con la realidad; así pues el alumno prefiere no responder para no fracasar de nuevo.

23) *Respuestas por ensayo-error*: La conducta por ensayo y error tiene un valor muy limitado para aquellas personas que no siempre sistematizan la búsqueda de la meta final; por consiguiente, no conservan las metas u objetivos establecidos por ellos mismos. Además las deficiencias en la percepción precisa y completa, en la conducta comparativa y sumativa, en el pensamiento reflexivo y en la búsqueda de relaciones causales reducen al mínimo la eficacia en las conductas de ensayo-error (Feuerstein, 1979).

24) *Precisión y exactitud en las respuestas*: Capacidad para pensar y expresar la respuesta correcta a un problema o situación general de aprendizaje.

La impresión lleva al sujeto a no poder responder de forma clara y precisa. Esta incapacidad se manifiesta en una cierta inflexibilidad y falta de fluidez verbal; aspectos que se trabajan en las tres fases del acto mental. La ausencia de códigos verbales específicos no sólo afecta a la fase de entrada de la información, sino que, además, también afecta a las bases de elaboración y "output".

25) *Transporte visual*: Capacidad para completar una figura y transportarla visualmente. A veces, la figura se cierra mentalmente, y el problema surge al tener que llevar ese "cierre" en la mente para completar y solucionar el problema. Es un cierre gestáltico.

La incapacidad de dicho transporte se manifiesta en la manipulación mental. *"El sujeto deficiente puede cerrar y transportar la figura a nivel motórico-visual, teniendo problemas en la representación mental del "cierre", parte de la figura se pierde y carece de la forma propia y de la orientación adecuada"* (Prieto, S. D., 1992).

Hay dos factores que influyen en ese tipo de deficiencias del transporte visual: uno de ellos es la inestabilidad de la percepción en sí misma, debida a la naturaleza vulnerable de los sistemas de referencia que sirven de soporte para los elementos percibidos; el otro se refiere a la dificultad misma que manifiesta el individuo por la estrechez de su campo mental, que le lleva a reparar y considerar los datos irrelevantes, desechando los datos relevantes de la información. El fracaso se manifiesta al no poder conservar la imagen (Feuerstein, 1979).

La falta de un sistema de referencia estable puede ser también considerada como una de las razones principales de esta disfunción, ya que el sistema de referencia es un soporte para el transporte visual de estímulos.

26) *Control de las respuestas*: Consiste en la capacidad para reflexionar antes de emitir cualquier tipo de respuesta. El control y la autocorrección implican procesos metacognitivos.

La incapacidad para el autocontrol o impulsividad se manifiesta en las respuestas imprecisas.

Resumiendo, el mapa cognitivo incluye siete parámetros por medio de los cuales se puede analizar un acto mental:

1.- Contenido: Se refiere a la materia o al objeto de un acto mental.

*2.- Modalidad***:** Es el modo de presentación; por ejemplo, verbal, figurativo, numérico, pictórico, etc.

3.- Operación: Se refiere a la clase de actividades exigidas de una tarea; por ejemplo, clasificación, analogía, seriación, etc.

4.- Fase: Son los aspectos de entrada, elaboración y salida de información.

5.- Nivel de complejidad: Está en función de la cantidad y la cualidad de las unidades de información.

6.- Nivel de abstracción: Es la distancia entre el acto mental y el objeto o evento sobre el que se aplique.

7.- Nivel de eficiencia: Se refiere al grado de cristalización y automatización en la ejecución de un acto mental.

El mapa cognitivo representa un modelo en función del cual el acto mental puede ser analizado de acuerdo con los parámetros ya mencionados. Este marco teórico, el mapa, en conjunción con el inventario de funciones eficientes/deficientes, explica el comportamiento cognitivo analizando sus componentes y localizando e interpretando cualquiera de las deficiencias que puedan ocurrir.

Así, a través de un enfoque orientado al proceso, el mapa cognitivo y el repertorio de funciones implicadas permiten una evaluación dinámica del funcionamiento mental del estudiante en todo el proceso, en este caso, del aprendizaje de nociones matemáticas en contexto.

Se debe aclarar que, atendiendo los objetivos de esta investigación, los estudios se centran sobre el elemento del mapa cognitivo llamado *fases del acto mental*, dado que este contiene, precisamente, las fases del procesamiento de la información en un acto cognitivo de aprendizaje y que constituyen a su vez las áreas de interés en una experiencia contextualizada. Los demás parámetros del mapa cognitivo de Feuerstein son utilizados sólo como referencia del ámbito (contenidos, espacio, tiempo) y características particulares (modalidad y niveles de complejidad, abstracción y eficiencia) tanto de la experiencia basada en el sistema didáctico tradicional de aprendizaje, como de la correspondiente al escenario didáctico contextualizado.

1.6.2 Modelo teórico fenomenologías-generalizaciones-notaciones

Para el análisis específico del aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados en la experiencia que se realiza *en el contexto* de la ingeniería (objetivo general de la investigación), se empleará como apoyo un modelo teórico particular para el estudio de las relaciones dialécticas entre pensamiento, lenguaje matemático y situaciones-problema, mismo que se basa en una interpretación del triángulo epistemológico de Steinbring (1997). Este triángulo incluye los elementos *concepto*, *signo/símbolo* y *objeto/contexto*.

<u>Esbozo del modelo teórico</u> (Godino & Recio, 1998).

Entidades básicas:

- *Fenomenologías*, considerando como tales las situaciones-problema, aplicaciones, tareas específicas y en general, las *entidades extensionales* que inducen actividades matemáticas.

- *Notaciones*, esto es, todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas, etc., en general, *entidades notacionales*).

- *Generalizaciones*, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías, esto es, *entidades intensionales*).

Es esta una esquematización de la relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo.

El estudio matemático tanto de los fenómenos del mundo real como del matemático mismo coloca al que aprende ante situaciones-problema. Las generalizaciones matemáticas en esas situaciones son los productos resultantes de los procesos de generalización de las acciones realizadas, es decir, de la generalización de esquemas o invariantes de sistemas de acciones, así como de las condiciones de realización y los resultados de tales acciones, apoyados por el uso de sistemas de signos. Por su parte, las entidades notacionales peden ser cadenas de letras o números, pero también gráficos, diagramas o incluso, objetos físicos, y no tienen solo una valencia semiótica sino que también son instrumentos ostensivos para la actividad matemática (Godino & Recio, 1998).

Por otra parte, dado el problema de investigación que nos ocupa, se requiere la noción de *contexto* para describir y explicar los procesos de interpretación y comunicación en un estudio didáctico como el que se realiza:

> *El contexto es el conjunto de factores del mundo extra e intralingüístico que soporta y determina la actividad matemática, y por tanto, la forma, la adecuación y el significado de los objetos puestos en juego en la misma* (Godino & Recio, 1998).

Finalmente, es importante precisar la concepción de *problema* que se maneja dado que es un elemento central en los análisis realizados a largo de la investigación: un problema matemático representa un reto o dificultad que no tiene resolución inmediata y que posibilita la búsqueda de procedimientos por parte del alumno a partir de sus conocimientos previos. Esta concepción de problema (Vergnaud, 1983) implica la novedad, tanto en el sentido de una tarea que tiene elementos nuevos que no se comprenden, como en la idea de construir procedimientos o estrategias para la resolución del mismo.

En este sentido, se concibe la resolución de problemas no como la aplicación de los conocimientos estudiados previamente, sino, por el contrario, como el punto de partida o eje rector, que motiva el discernimiento intelectual y la toma de decisiones sobre las acciones a realizar, para lograr apropiarse del conocimiento necesario a fin de proponer soluciones. Después de todo, un problema debe ser aquella situación en la que no se sabe qué hacer, pues si se supiera, ya no habría problema. De la misma forma, se entiende que resolver un problema es hacer lo que se hace, precisamente, cuando no se sabe cómo afrontar la situación.

En contraste, un *ejercicio* se refiere a la tarea que requiere sólo el empleo de métodos, algoritmos o procedimientos ya conocidos y donde el objetivo principal es adquirir habilidad en su uso. Cabe señalar que este tipo de tareas (llamadas *problemas*) son las que predominan en el discurso matemático escolar que se plasma en los libros de texto tradicionales, y con las que se pretende fijar los conocimientos tratados en el mismo.

1.7 Método de investigación

Dado el problema de investigación que se aborda, en el método empleado se consideraron tanto los estudios previos que se realizaron para ubicar los contenidos de cálculo que se usan en áreas de especialidad en ingeniería, y que fueron la base para el diseño de la situación problema en contexto, como el procedimiento mediante el cual se trabajó con los estudiantes para analizar cualitativamente los elementos involucrados en el aspecto cognitivo en las experiencias de aprendizaje.

Toda la investigación se realizó en el ámbito de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas que se ofrece en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus San Luis Potosí. Se trabajó con dos grupos de estudiantes de nivel socioeconómico medio-alto (los estudiantes en este Instituto pagan su colegiatura, pero en el Campus San Luis Potosí en particular, un 25% de ellos está becado, razón por la que no todos se consideran de un nivel socioeconómico alto) que habían cursado y acreditado dos cursos de cálculo, uno de cálculo diferencial y otro de cálculo integral, ambos en una variable real.

Se realizó el trabajo de acuerdo a tres fases: la primera se refiere a los estudios preliminares necesarios para el análisis de las funciones cognitivas en el contexto de la ingeniería; la segunda, a la puesta en escena del diseño y al propio análisis de tales funciones cognitivas, y la tercera, se constituye con las conclusiones, sugerencias y reflexiones finales. Cabe señalar que, dado el objetivo de la investigación, el trabajo realizado en la segunda de estas fases es el que constituye el centro de la tesis.

En la primera de estas fases, la parte que se refiere al análisis cognitivo preliminar, se llevó a cabo con uno de los grupos mencionados líneas arriba, el cual estaba conformado por 13 estudiantes. La segunda fase se realizó con el grupo restante, mismo que estaba integrado por 12 estudiantes. Ambos grupos con edades entre 19 y 21 años de edad.

Fase I.

1. Primero se realizó un estudio de carácter didáctico, en el que se ubicaron las áreas de especialidad en ingeniería donde se usan conocimientos de cálculo. Este estudio se llevó a cabo mediante el análisis de los textos en que se basan los cursos de esas áreas (Camarena 1984), así como consultando a los profesores responsables y revisando el plan de estudios (con especial atención en los programas analíticos) de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas.

2. Una vez realizado el estudio anterior, se llevó a cabo otro estudio preliminar, también de carácter didáctico, respecto a las *funciones cognitivas* de estudiantes de cálculo en una situación problema típica del sistema didáctico tradicional. Esto con el propósito de caracterizar los elementos de orden cognitivo implicados recopilando información mediante el análisis, específicamente, de las *funciones cognitivas* particulares que se presentan al resolver un problema matemático. Cabe señalar que en esta parte de la investigación se abordó un aspecto importante en el proceso, dado que no se contaba con antecedentes referenciales sobre investigación,

en base a las *funciones cognitivas* como se definen en la teoría de Feuerstein, acerca del aprendizaje de contenidos del cálculo en el nivel superior de enseñanza.

3. Se realizaron entrevistas tanto individuales como en pareja a la vez que se realizó la experiencia a que se refiere el punto 2, pero con estudiantes no sujetos a esa experiencia. Aquí, es importante aclarar dos aspectos: primero, se decidió realizar entrevistas porque es un recurso en la investigación que permite estudiar de cerca los procesos cognitivos en un acto de aprendizaje a la luz de los modelos mentales teóricos utilizados. Las entrevistas permiten indagar sobre lo que piensa un sujeto en el momento mismo en que sucede un acto mental de aprendizaje (en este caso la resolución de un problema matemático); y segundo, tales entrevistas se realizaron con estudiantes distintos a los de la experiencia en el aula porque era necesario llevar a cabo todo el proceso de resolución del problema en el sentido señalado por Camarena (2000) –ver la sección sobre el marco teórico-, y además, atendiendo un principio básico de la matemática en contexto, los sujetos a la experiencia no debían tener contacto previo con el cálculo diferencial e integral en dos variables reales.

Fase 2.

En base a la información obtenida tanto en el análisis de textos y programas analíticos como en el estudio didáctico cognitivo preliminar, y atendiendo el objetivo general de la investigación, se procedió como sigue:

1. Se diseñó la situación problema *en contexto* que se presentó a los estudiantes y se determinaron las actividades específicas del proceso tanto en el aula como en las entrevistas que se realizaron (estas actividades se describen a detalle al inicio de la sección 4.1).

2. Se realizó la experiencia de aprendizaje mediante la situación problema contextualizada a que se refiere el punto anterior, con el grupo de 12 estudiantes referido anteriormente del curso de Matemáticas para Ingeniería III (cálculo multivariable y cálculo vectorial). Se formaron equipos para trabajo colaborativo y se abordó la situación problemática.

3. Se llevó a cabo el análisis cognitivo cualitativo en el proceso de implementación del punto anterior desde la perspectiva de R. Feuerstein, así como respecto al modelo teórico del triángulo fenomenologías-generalizaciones-notaciones de Godino y Recio.

4. Se realiza una entrevista individual, en dos sesiones, sobre el trabajo de resolución de la situación problema en contexto, a un estudiante de 19 años de edad que sólo ha cursado formalmente materias de cálculo diferencial en una variable, pero que nunca ha tenido contacto con contenidos del cálculo diferencial multivariable. Se aclara esto porque a diferencia de los estudiantes sujetos a las experiencias en grupo, este alumno no ha cursado la materia de cálculo integral del plan de estudios de la carrera (situación que no afecta las condiciones ni objetivo del estudio puesto que lo necesario era haber aprobado el curso de Matemáticas para Ingeniería I, correspondiente al cálculo diferencial de una variable). El propósito de la realización de esta entrevista es el mismo que se ha planteado en el punto 3 de la fase 1. La diferencia es que aquí se lleva a cabo en un escenario didáctico específicamente en el contexto de la ingeniería.

5. Se analizaron en términos cualitativos las funciones cognitivas de la experiencia a que se refiere el punto anterior de acuerdo al marco teórico que soporta esta investigación.

Fase 3.

Se realizó un análisis cualitativo global de los resultados obtenidos en las fases anteriores y se ofrecen conclusiones, sugerencias y reflexiones finales sobre el trabajo realizado y sus alcances.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DE LOS CONTENIDOS DE CÁLCULO EN LA CARRERA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

Se describe el trabajo realizado respecto al análisis de textos, planes y programas de estudio, el análisis cognitivo preliminar de la experiencia de aprendizaje en el sistema tradicional y algunas consideraciones y resultados previos.

2.1 Análisis de textos, planes y programas de estudio

Como se ha mencionado en el primer capítulo de este reporte, el objetivo en esta fase del trabajo fue contar con elementos que permitieran determinar el empleo que se hace de los conocimientos matemáticos, y en particular los del cálculo, en la formación de los futuros ingenieros y tener así la posibilidad de diseñar y llevar al aula un escenario didáctico en base a los resultados en este punto, poder realizar los análisis cognitivos, y a la vez, por supuesto, identificar los contenidos específicos donde se emplea el cálculo en las áreas de especialidad de la Ingeniería Industrial. Además, como se ha explicado en la sección sobre el método de investigación, se realizó un estudio preliminar de carácter didáctico-cognitivo en una experiencia de aprendizaje tradicional, con el objeto de contar con los elementos respecto a las funciones cognitivas que permitan, por un lado, tener un referente acerca de las funciones cognitivas involucradas en la resolución de un problema matemático particular, y por otro, diseñar la experiencia de aprendizaje *en* el contexto de la ingeniería para el análisis cognitivo de los estudiantes en actos específicos de aprendizaje del cálculo en términos de la teoría de las *funciones cognitivas* de Feuerstein y la interpretación del triángulo conceptual de Godino y Recio, ya descritos en la sección de este documento sobre el marco teórico.

Se explica enseguida tanto el trabajo como los resultados obtenidos en esta fase de la investigación.

2.1.1 Revisión del plan de estudios

Esta revisión se realizó consultando los documentos oficiales de la carrera de Ingeniero Industrial y de Sistemas del Sistema Tecnológico de Monterrey. Se describe el perfil del egresado, la perspectiva laboral, las ventajas de formarse como ingeniero en este Sistema, el plan de estudios de la carrera y las observaciones realizadas en el marco de la investigación.

<u>Perfil del egresado</u>:

En este aspecto se señala que:

"La tendencia actual a la competitividad y globalización aunada a los constantes cambios en los ámbitos sociales, económicos y tecnológicos, entre otros, que caracterizan el medio ambiente dinámico por el que pasa nuestra sociedad, hacen necesario que las organizaciones busquen nuevas opciones y formas de operar, que les permita optimizar la utilización de sus recursos, de tal manera que puedan ofrecer bienes y/o servicios de clase mundial y así lograr los objetivos que persiguen, tales como generar riqueza, tener un crecimiento sostenido, ser líderes en su área, incrementar su participación en los mercados globales y contribuir al desarrollo de la sociedad.

El Ingeniero Industrial y de Sistemas (IIS) es un profesionista que trabaja con gente para hacer las cosas mejor, más rápidas y más seguras, a fin de buscar que cada área de la organización trabaje de la mejor manera posible hacia el logro de los objetivos comunes. El IIS tiene la capacidad de:

** Diseñar sistemas integrados de manufactura.*

** Administrar la ingeniería de sistemas y de procesos operativos en las organizaciones.*

** Analizar el control estadístico de la calidad en las empresas.*

** Contribuir a los sistemas de soporte para la toma de decisiones".*

Perspectiva laboral:

Se considera que:

"El IIS puede laborar tanto en la industria de la transformación como en empresas de servicio. Su formación le permite ocupar puestos en las siguientes áreas:

** Sistemas productivos y de soporte administrativo en una organización, tales como administración de la producción y de proyectos.*

** Ingeniería económica y de planta, planeación estratégica y operativa, manufactura, y aseguramiento de la calidad.*

** Consultoría profesional, iniciando su propio negocio".*

Ventajas del IIS egresado del Tec de Monterrey:

"El IIS:

** Emplea los conocimientos de optimización de recursos de la ingeniería industrial y los incorpora a la ingeniería de sistemas con el fin de lograr las metas de la organización.*

** Desarrolla valores, actitudes y habilidades para aplicar en forma eficiente y humana los conocimientos propios del área de su especialidad que adquiere a lo largo de sus estudios.*

** Cuenta con la posibilidad de realizar estudios en las universidades extranjeras con las que el Tec de Monterrey mantiene convenios. De esta manera adquiere una ventaja competitiva en su desempeño profesional".*

Plan de estudios

Cursos Remediales:

Cb00801 Introducción a la computación
F00801 Física remedial
H00801 Inglés remedial I
H00802 Inglés remedial II
H00803 Inglés remedial III
H00804 Inglés remedial IV
H00809 Inglés remedial V
H00806 Redacción en español
Ma00801 Matemáticas remediales

Primer Semestre:

F00811 Física I
H00810 Lengua extranjera
H00808 Análisis de la información
Ec00821 Economía
In00811 Introducción a la ingeniería
Ma00815 Matemáticas para ingeniería I
Q00811 Química

Segundo Semestre:

Cb00821 Computación para ingeniería
Ri00801 Sociedad y desarrollo en México
F00812 Física II
Op00091 Curso sello optativo I
M00822 Estática
Ma00816 Matemáticas para ingeniería II

Tercer Semestre:

M00823 Dinámica
M00831 Dibujo computarizado
Is00831 Ingeniería de sistemas en las organizaciones
Ma00817 Matemáticas para ingeniería III
Ma00835 Probabilidad y estadística
Op00092 Curso sello optativo II

Cuarto Semestre:

Ma00843 Algebra lineal
Ma00841 Ecuaciones diferenciales
Cf00810 Contabilidad financiera
Is00841 Análisis de regresión
F00813 Física III
Op00093 Curso sello optativo III

Quinto Semestre:

In00852 Control estadístico de calidad
Cf00855 Sistemas de costeo
In00851 Diseño del trabajo
In00841 Investigación de operaciones I
Is00851 Dinámica de sistemas
Is00852 Análisis y diseño de experimentos

Sexto Semestre:

In00842 Investigación de operaciones II
In00861 Evaluación de proyectos
In00862 Planeación de plantas industriales
Is00861 Metodología de sistemas
M00863 Procesos de manufactura
Va00801 Tópicos I

Séptimo Semestre:

Is00872 Sistemas de información
In00875 Administración de proyectos
In00893 Investigación de operaciones III
In00881 Administración de la producción I
Is00871 Modelación estructural de sistemas
Va00802 Tópicos II

Octavo Semestre:

In00882 Administración de la producción II
In00884 Sistemas integrados de manufactura
In00981 Laboratorio de producción
In00984 Laboratorio de sistemas integrados de manufactura
Is00881 Diseño de sistemas
Or00801 Desarrollo de emprendedores
Va00803 Tópicos III

Noveno Semestre:

Is00895 Proyectos de ingeniería
In00874 Sistemas de calidad
In00894 Factibilidad de proyectos
Is00891 Sistemas de planeación
Or00803 Valores en el ejercicio profesional
Va00804 Tópicos IV

Observaciones

Como se puede ver, tanto en el perfil del egresado como en la perspectiva laboral del plan de estudios de la carrera, se menciona como un aspecto de importancia central, la capacidad del IIS para optimizar la utilización de los recursos, para analizar el control estadístico de la calidad en las empresas y para contribuir en los sistemas de soporte para la toma de decisiones.

El desarrollo de estas capacidades involucra la componente científica en la formación del futuro ingeniero, y por consiguiente, el lugar propicio para indagar sobre el papel de los conocimientos de cálculo en ese desarrollo.

De acuerdo al plan de estudios de la carrera, esas capacidades se adquieren en los cursos de especialidad de la ingeniería, es decir, los cursos que aparecen del cuarto semestre en delante (en este caso, de los cursos del cuarto semestre, los de Álgebra lineal, Física III y Ecuaciones Diferenciales, pertenecen al tronco común, pero los de Contabilidad financiera y Análisis de regresión son ya de la especialidad).

En particular, después de revisar los contenidos de los programas analíticos, se pudo establecer que la adquisición de las capacidades mencionadas se ha de realizar en los cursos siguientes: del cuarto semestre, Análisis de regresión; del quinto semestre, Análisis y diseños de experimentos, Control estadístico de la calidad e Investigación de operaciones (que se estudia en quinto, sexto y séptimo semestres en serie, es decir, Investigación de operaciones I, II y III); del sexto semestre, Evaluación de proyectos , Planeación de plantas industriales, Metodología de sistemas y Procesos de manufactura; del séptimo semestre, Modelación estructural de sistemas; del octavo, Sistemas integrados de manufactura, Laboratorio de producción, Laboratorio de sistemas integrados de manufactura y Diseño de sistemas; del noveno, Proyectos de ingeniería, Sistemas de calidad y Factibilidad de proyectos.

De estos cursos, se pueden distinguir tres grupos, cuya clasificación se establece según los conocimientos matemáticos que requieren: un primer grupo compuesto por los cursos de Sistemas de calidad, Factibilidad de proyectos, Planeación de plantas industriales, Procesos de manufactura y Sistemas integrados de manufactura, que prácticamente emplean sólo conocimientos elementales de matemáticas como aritmética, álgebra y geometría. Un segundo grupo integrado por los cursos de Investigación de operaciones, Evaluación de proyectos, Metodología de sistemas, Modelación estructural de sistemas y Diseño de sistemas, que además de los conocimientos matemáticos señalados en el grupo anterior, requieren de conocimientos de Álgebra Lineal. Y el tercer grupo, con Análisis de regresión, Análisis y diseños de experimentos, Control estadístico de la calidad, Procesos de manufactura, Sistemas integrados de manufactura, Laboratorio de producción, Laboratorio de sistemas integrados de manufactura y Proyectos de ingeniería, que son los que, en teoría, requieren conocimientos de cálculo.

Es entonces este último grupo el que interesa. Aquí, el curso de Control estadístico de la calidad, requeriría conocimientos de cálculo sólo por la definición de algunos de los conceptos que se tratan, por ejemplo en (Walpole, R. & Myers, R., pág. 83) se indica que *"La media de una distribución de probabilidades es una medida de su tendencia central. Matemáticamente se define la media (simbolizada por m) como:*

$$m = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy & \text{para y continua} \\ \sum_{\text{toda y}} yp(y) & \text{para y discreta} \end{cases}$$

De forma similar se presentan conceptos como la media en términos del valor esperado a largo plazo de la variable aleatoria, la varianza, que mide la dispersión de una distribución de probabilidad, etc. Sin embargo, en la práctica se recurre, a lo más, al uso de algunas fórmulas de integración para hallar la solución a problemas típicos de los textos y que nunca se relacionan a situaciones donde se requiera mayor profundidad en el conocimiento de la integral.

Por otra parte, de ese mismo tercer grupo, los cursos de Procesos de manufactura, Sistemas integrados de manufactura, Laboratorio de producción, Laboratorio de sistemas integrados de manufactura y Proyectos de ingeniería, se supone, emplearían conocimientos adquiridos en los cursos de Análisis de regresión y Análisis y diseño de experimentos, que a su vez, son los que requieren conocimientos de cálculo, como hemos podido establecer después de analizar los contenidos de sus programas de estudio. Lo cual se describe en el siguiente apartado.

2.1.2 Análisis de programas analíticos de estudio

Se presentan a continuación los programas de estudio de los cursos de Análisis de regresión y Análisis y diseño de experimentos, así como las observaciones que se hacen al respecto en función del propósito de este estudio.

Is00841. ANALISIS DE REGRESION.
(3-0-8. Requisito: Haber aprobado Ma00835 y cursar Ma00843).

OBJETIVO GENERAL DE LA MATERIA
Que el alumno conozca, comprenda y utilice diferentes herramientas estadísticas para la optimización de procesos, que le sirvan como el apoyo a la toma de decisiones.

OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO
Que el alumno conozca, comprenda y utilice los conceptos relacionados con análisis de regresión y de series de tiempo, en el contexto de la optimización de procesos.

TEMAS Y SUBTEMAS DEL CURSO
1. INTRODUCCION A LOS MODELOS DE PRONOSTICOS
1.1 Definición de pronóstico y de modelo.
1.2 Características de los modelos de pronósticos.
1.3 Clasificación de los modelos de pronósticos.
1.4 Marco conceptual de un modelo de pronósticos.
1.5 Criterios de desempeño de los modelos de pronósticos.
1.6 Usos y aplicaciones de los modelos de pronósticos.
2. MODELOS DE REGRESION
2.1 Definición de regresión, correlación, ecuación de predicción, optimización, modelos lineales, modelos no lineales.
2.2 Usos de los modelos de regresión.
2.3 Regresión lineal simple.
2.3.1 Modelo de regresión lineal simple.
2.3.2 Estimación de parámetros por los métodos de mínimos cuadrados.
2.3.3 Análisis de varianza, explicación de los elementos que lo componen y determinación de usos y aplicaciones.
2.3.4 Prueba de hipótesis para la ecuación de regresión.
2.3.5 Prueba de hipótesis para los parámetros individuales.
2.3.6 Intervalo de confianza de los parámetros de la ecuación de regresión.
2.3.7 Intervalo de confianza de la respuesta media de la variable independiente.
2.3.8 Intervalo de confianza de la predicción de nuevas observaciones de la variable independiente.
2.3.9 Coeficiente de determinación, coeficiente de determinación ajustado y coeficiente de correlación.
2.3.10 Supuestos de la regresión lineal.
2.3.11 Pruebas de normalidad de los residuos: gráfica de los residuos en papel probabilístico normal, prueba de bondad de ajuste, prueba Smirnov-Kolmogorov.
2.3.12 Prueba de independencia de los residuos mediante el estadístico Durbin-Watson.
2.3.13 Análisis gráfico de residuales para probar la homocedasticidad.
2.3.14 Identificación de "outliers" mediante errores estandarizados y PRESS.
2.3.15 Transformación de variables.

2.4 Regresión lineal múltiple.
2.4.1 Modelo de regresión lineal múltiple
2.4.2 Estimación de parámetros por los métodos de mínimos cuadrados.
2.4.3 Prueba de hipótesis para la ecuación de regresión.
2.4.4 Prueba de hipótesis para los parámetros individuales.
2.4.5 Prueba F parcial.
2.4.6 Intervalo de confianza de los parámetros de la ecuación de regresión.
2.4.7 Intervalo de confianza de la respuesta media de la variable independiente.
2.4.8 Intervalo de confianza de la predicción de nuevas observaciones de la variable independiente.
2.4.9 Coeficiente de determinación, coeficiente de determinación ajustado y coeficiente de correlación.
2.4.10 Supuestos de la regresión lineal.
2.4.11 Pruebas de normalidad de los residuos: gráfica de los residuos en papel probabilístico normal, prueba de bondad de ajuste, prueba Smirnov-Kolmogorov.
2.4.12 Prueba de independencia de los residuos mediante el estadístico Durbin-Watson.
2.4.13 Análisis gráfico de residuales para probar la homocedasticidad.
2.4.14 Identificación de "outliers" mediante errores estandarizados y PRESS.
2.4.15 Definición de multicolinealidad.
2.4.16 Fuentes de multicolinealidad.
2.4.17 Efectos de la multicolinealidad.
2.4.18 Diagnóstico de la multicolinealidad.
2.4.19 Métodos para tratar la multicolinealidad.
2.5 Regresión polinomial.
2.5.1 Modelos polinomiales en una variable.
2.5.2 Estimación de parámetros por el método de mínimos cuadrados.
2.5.3 Prueba F parcial para evaluar la contribución de los términos polinomiales.
2.5.4 Posibles problemas al utilizar regresión polinomial.
2.6 Selección de variables.
2.6.1 Problema de elaboración de modelos.
2.6.2 Procedimiento de todas las posibles regresiones.
2.6.3 Búsqueda dirigida en t.
2.6.4 Regresión por pasos.
2.6.5 Selección hacia adelante.
2.6.6 Selección hacia atrás.
3. MODELOS DE SERIES DE TIEMPO
3.1 Definición de una serie de tiempo y clasificación de los diferentes patrones de series de tiempo.
3.2 Modelos de pronósticos para series de tiempo.
3.3 Metodología Box-Jenkins para series de tiempo no estacionales.
3.3.1 Series de tiempo estacionaria u horizontales.
3.3.2 Transformación a una serie de tiempo estacionaria.
3.3.3 Identificación del modelo.
3.3.4 Estimación de parámetros del modelo.
3.3.5 Verificación del modelo.
3.3.6 Utilización del modelo para pronosticar.
3.4 Metodología Box-Jenkins para series de tiempo estacionales.
3.4.1 Identificación del modelo.
3.4.2 Estimación de parámetros del modelo.
3.4.3 Verificación del modelo.
3.4.4 Utilización del modelo para pronosticar.

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE APRENDIZAJE POR TEMA
1. Conocer las bases de los modelos de pronósticos.
2. Conocer, comprender y utilizar los diferentes modelos de regresión.
3. Conocer, comprender y utilizar los diferentes modelos de series de tiempo.

LIBRO(S) DE TEXTO
Douglas C. Montgomery y Elizabeth A. Peck
Introduction to linear regression analisys
Wiley, 2a. edición, 1992.

LIBRO(S) DE CONSULTA
Bruce L. Bowerman y Richard T. O'Connell
Time series forecasting: unified concepts and computer implementation
Duxbury Press, 2a. edición, 1987.

Is00852. ANALISIS Y DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

(3-0-8. Requisito: Haber aprobado Ma00835 o Is00841.).

OBJETIVO GENERAL DE LA MATERIA
Que el alumno conozca, comprenda y utilice diferentes herramientas estadísticas para la optimización de procesos, que le sirvan como el apoyo a la toma de decisiones.

OBJETIVO GENERAL DEL CURSO
Que el alumno conozca, comprenda y utilice los conceptos relacionados con análisis y diseño de experimentos, en el contexto de la optimización de procesos.

TEMAS Y SUBTEMAS
1. INTRODUCCION AL ANALISIS Y DISEÑO DE EXPERIMENTOS
1.1 Definición de experimento, diseño de experientos y análisis de experimentos, variable de respuesta, factor, niveles, tratamientos, réplicas.
1.2 Características de los modelos de entradas y salida en el contexto de los procesos productivos.
1.3 Comparación de diferentes metodologías de experimentación (Montgomery, Hicks, Centro de Calidad).
1.4 Consideraciones prácticas de la experimentación: evaluación económica, medición de la respuesta (metrología), calibración.
1.5 Requerimiento de aleatorización de los experimentos.

2 . EXPERIMENTOS CON UN SOLO FACTOR
2.1 Prueba de hipótesis para la media de una y dos muestras.
2.2 Prueba de hipótesis para la media de k muestras: Análisis de varianza.
2.3 Modelo estadístico de efectos fijos.
2.4 Hipótesis a evaluar.
2.5 Cálculo de las sumas de cuadrados, caso balanceado y desbalanceado.
2.6 Tabla de Análisis de varianza.
2.7 Criterio de rechazo de la hipótesis nula.
2.8 Estimación de la variable de respuesta.
2.9 Comparación de medias de tratamientos individuales.
2.9.1 Contrastes ortogonales.
2.9.1.1 Definición de combinación lineal.
2.9.1.2 Definición de contraste.
2.9.1.3 Definición de ortogonalidad.
2.9.1.4 Comparación de medias con contrastes ortogonales.
2.9.2 Método de Scheffé.
2.9.3 Método de la mínima diferencia significativa.

2.9.4 Método de Duncan.
2.9.5 Método de Dunnett
2.10 Supuestos del Análisis de Varianza.
2.11 Pruebas de normalidad de los residuos: gráfica en papel probabilístico normal, prueba de bondad de ajuste.
2.12 Pruebas de independencia de los residuos: gráfica de residuos contra secuencia de experimentación, prueba Durbin-Watson.
2.13 Pruebas para varianza constante de los residuos: gráfica de los residuos contra valores ajustados, prueba de Bartlett.
2.14 Transformación de la variable de respuesta.
2.15 Selección del tamaño de muestra para un diseño con un solo factor.
3. EXPERIMENTOS CON UN SOLO FACTOR POR BLOQUES
3.1 Definición de bloque.
3.2 Necesidad de utilizar un diseño por bloques.
3.3 Diseño aleatorizado por bloques completos.
3.3.1 Modelo estadístico.
3.3.2 Hipótesis a evaluar.
3.3.3 Cálculo de las sumas de cuadrados.
3.3.4 Tabla de análisis de varianza.
3.3.5 Criterio de rechazo de la hipótesis nula.
3.3.6 Estimación de la variable de respuesta.
3.3.7 Comparación de medias.
3.3.8 Verificación de los supuestos del análisis de varianza.
3.4 Diseño de cuadrado latino.
3.4.1 Modelo estadístico.
3.4.2 Hipótesis a evaluar.
3.4.3 Cálculo de las sumas de cuadrados.
3.4.4 Tabla de análisis de varianza.
3.4.5 Criterio de rechazo de la hipótesis nula.
3.4.6 Estimación de la variable de respuesta.
3.4.7 Comparación de medias.
3.4.8 Verificación de los supuestos del análisis de varianza.
4. DISEÑOS FACTORIALES.
4.1 Definición de diseño factorial.
4.2 Ventajas de los diseños factoriales.
4.3 Definición de interacción.
4.4 Diseño factorial de dos factores.
4.4.1 Modelo estadístico.
4.4.2 Hipótesis a evaluar.
4.4.3 Cálculo de las sumas de cuadrados.
4.4.4 Tabla de análisis de varianza.
4.4.5 Criterio de rechazo de la hipótesis nula.
4.4.6 Estimación de la variable de respuesta.
4.4.7 Comparación de medias.
4.4.8 Verificación de los supuestos del análisis de varianza.
4.5 Diseño factorial de tres factores.
4.5.1 Modelo estadístico.
4.5.2 Hipótesis a evaluar.
4.5.3 Cálculo de las sumas de cuadrados.
4.5.4 Tabla de análisis de varianza.
4.5.5 Criterio de rechazo de la hipótesis nula.
4.5.6 Estimación de la variable de respues ta.
4.5.7 Comparación de medias.
4.5.8 Verificación de los supuestos del análisis de varianza.
4.6 Diseño factorial general.
4.7 Coeficiente de determinación y coeficiente de determinación ajustado.

5. DISEÑO FACTORIAL 2k
5.1 Definición de diseño factorial 2k
5.2 Ventajas del uso de diseños factoriales 2k
5.3 Diseño factorial 22.
5.3.1 Modelo estadístico.
5.3.2 Codificación de las sumas de la variable de respuesta en combinaciones entre factores.
5.3.3 Representación gráfica del las sumas de la variable de respuesta.
5.3.4 Efectos promedio de factores e interacciones.
5.3.5 Contrastes de factores e interacciones.
5.3.6 Hipótesis a evaluar.
5.3.7 Cálculo de las sumas de cuadrados utilizando contrastes.
5.3.8 Tabla de análisis de varianza.
5.3.9 Criterio de rechazo de la hipótesis nula.
5.3.10 Estimación de la variable de respuesta.
5.3.11 Comparación de medias.
5.3.12 Verificación de los supuestos del análisis de varianza.
5.4 Diseño factorial 23.
5.4.1 Modelo estadístico.
5.4.2 Codificación de las sumas de la variable de respuesta en combinaciones entre factores.
5.4.3 Representación gráfica del las sumas de la variable de respuesta.
5.4.4 Efectos promedio de factores e interacciones.
5.4.5 Contrastes de factores e interacciones.
5.4.6 Hipótesis a evaluar.
5.4.7 Cálculo de las sumas de cuadrados utilizando contrastes.
5.4.8 Tabla de análisis de varianza.
5.4.9 Criterio de rechazo de la hipótesis nula.
5.4.10 Estimación de la variable de respuesta.
5.4.11 Comparación de medias.
5.4.12 Verificación de los supuestos del análisis de varianza.
5.4.13 Algoritmo de Yates para sumas de cuadrados.
5.5 Diseño 2k con una sola réplica.
5.5.1 Efectos promedio de factores e interacciones.
5.5.2 Análisis de efectos significativos mediante la gráfica en papel probabilístico normal.
5.6 Diseños factoriales fraccionados de 2k.
5.6.1 Definición de los diseños factoriales fraccionados.
5.6.2 Ventajas de los diseños factoriales fraccionados.
5.6.3 Fracción un medio del diseño 2k.
5.6.3.1 Definición de generador, relación definitoria,alias, fracción principal y resolución de un diseño.
5.6.3.2 Aplicación de los conceptos de generador, relación definitoria, alias, frácción principal y resolución de un diseño.
5.6.4 Fracción un cuarto del diseño 2k.
5.6.5 Diseños de resolución III.
5.6.6 Diseños de resolución IV y V.
6. METODO TAGUCHI
6.1 Filosofía de Taguchi.
6.2 Método de Taguchi para el diseño de parámetros.
6.3 Ventajas y desventajas del método Taguchi.

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE APRENDIZAJE POR TEMA
1. Conocer las bases del análisis y diseño de experimentos.
2. Conocer, comprender y utilizar el diseño y el análisis de modelos con un solo factor.
3. Conocer, comprender y utilizar el diseño y el análisis de modelos con un solo factor por bloques aleatorizados, cuadrados latinos y diseños relacionados.
4. Conocer, comprender y utilizar los diseños factoriales.
5. Conocer, comprender y utilizar el diseño factorial 2k objetivo. Conocer los conceptos de Taguchi respecto al diseño de experimentos.

LIBRO(S) DE TEXTO
Douglas C. Montgomery y Elizabeth A. Peck
Diseño y análisis de experimentos
Grupo Editorial Iberoamérica, 1a. edición en español, 1991.

LIBRO(S) DE CONSULTA
George E. P. Box, William G. Hunter y J. Stuart Hunter
Estadística para investigadores
Editorial Reverté, 1a. edición en español, 1988.
Charles R. Hicks
Fundamental concepts in the design of experiments
Holt, Rinehart & Winston, Second Edition, 1973.

Observaciones

Lo primero que llama la atención es el hecho de que ninguna de las materias de Matemáticas para ingeniería (I, II y III, cuyos contenidos son todos de cálculo) son requisitos para estos cursos. Para *Análisis de regresión* se requisita "haber aprobado Ma00835 y cursar Ma00843", es decir, haber aprobado el curso de *Probabilidad y estadística* y cursar el de *Álgebra lineal*. Para Análisis y diseño de experimentos se requisita "haber aprobado Ma00835 o Is00841", o sea, haber aprobado *Probabilidad y estadística* o *Análisis de regresión*. Entonces, tiene sentido cuestionarse ¿qué papel juega el estudio del cálculo en la carrera?, ¿se considera sólo como un conocimiento del tronco común a manera de cultura general en la formación del futuro ingeniero? Estas son cuestiones que asaltan en el estudio pero que bien pueden ser objeto de otra u otras investigaciones.

Por otra parte, resulta que los objetivos planteados en ambos cursos, son exactamente los mismos. La optimización de procesos es la meta central. Al respecto, por ejemplo, en el libro de texto del curso de *Análisis y diseño de experimentos* (Montgomery, Douglas C., 1997), en uso en el Sistema Tecnológico de Monterrey, el autor señala que *"Experimental design methods have found broad application in many disciplines. In fact, we may view experimentation as part of the scientific process and as one of the ways we learn about how systems or processes work. Generally, we learn through a series of activities in which we* *make conjectures about a process, perform experiments to generate data from the process, and then use the information from the experiment to establish new conjectures, which lead to new experiments, and so on.*

Experimental design is a critically important tool in the engineering world for improving the performance of a manufacturing process. It also has extensive application in the development of new processes. The application of experimental design techniques early in process development can result in

1. *Improved process yields.*
2. *Reduced variability and closer conformance to nominal or target requirements.*
3. *Reduced development time.*
4. *Reduced overall costs..*

Experimental design methods also play a major role in ***engineering design*** *activities, where new products are developed and existing ones improved. Some applications of experimental design in engineering design include*

1. *Evaluation and comparison of basic design configurations.*
2. *Evaluation of material alternatives.*
3. *Selection of design parameters so that the product will work well under under a wide variety of field conditions, that is, so that the product is robust.*
4. *Determination of key product design parameters that impact product performance.*

The use of experimental design in these areas can result in products that are easier to manufacture, products that have enhanced field performance and reliability, lower product cost, and shorter product design and development time".

En este marco, se realizó la tarea de analizar los programas de los dos cursos mencionados líneas arriba y se encontró que ambos se basan en conocimientos de métodos numéricos y estadística. Uno de los métodos de mayor uso es el llamado de *mínimos cuadrados***.** En el curso de *Análisis de regresión* se emplea en la Unidad 2 del programa analítico de estudios, titulada "modelos de regresión", en los temas de regresión lineal simple, regresión lineal múltiple y regresión polinomial. En el curso de *Análisis y diseño de experimentos* es la base para determinar parámetros de ajuste en diversos temas: en la Unidad 2 "experimentos con un solo factor" se usa en el tema "modelo estadístico de efectos fijos"; en la Unidad 3 "experimentos con un solo factor por bloque", en el tema de "diseño aleatorizado por bloques completos"; en la Unidad 3 "diseños factoriales", en el tema de "diseño factorial de dos factores".

La razón de la importancia del método de mínimos cuadrados en estas áreas de la ingeniería industrial, es sencilla: es uno de los métodos más elementales (en varios de los temas mencionados es referencia para deducir otros métodos) y de los que mejor funcionan para modelar un fenómeno con datos empíricos en el que las variables aleatorias están distribuidas en forma normal.

Y para el caso que concierne a la investigación, su importancia radica en que para la construcción del método se necesitan conocimientos de cálculo multivariable. Específicamente, conocimientos de funciones de dos variables y de derivadas parciales. Que más que simples conocimientos de uso común, constituyen el fundamento matemático del método.

Sin embargo, en cursos como el de *Análisis de regresión* y *Análisis y diseño de experimentos*, cuando se requiere del método, simplemente se usan las fórmulas últimas producto del mismo, es decir, el método como tal, no se utiliza, sólo las fórmulas -con propiedades casi mágicas ante la vista de los estudiantes- que permiten ajustar una tabla de datos numéricos a una recta, a una parábola, etc.

Y es que hay un hecho sumamente importante: en el plan de estudios no se encuentra curso alguno de la carrera de IIS donde se estudie el método de mínimos cuadrados como tal, como un conocimiento matemático. Y es que este método se considera un contenido de

Análisis numérico, un área de la matemática que ni siquiera está en la currícula de la carrera.

De esta forma, cuando más, los profesores "deducen" el método la primera vez que necesitan de él, sin otorgarle mayor importancia pues, como ellos mismos dicen a sus estudiantes "a fin de cuentas lo que se va a emplear son las fórmulas que resultan". Y en el mejor de los casos, remiten a los alumnos a consultar algún libro de Métodos Numéricos.

Se hace mención de que este hecho resulta de suma importancia porque normalmente se esperaría que en algún curso de Matemáticas se incluya este tema y que entonces, el problema fuera, en todo caso, su desvinculación con las áreas de especialidad, es decir, su descontextualización, pero resulta que ni siquiera ocurre eso; el estudio del método de mínimos cuadrados aparece hasta los cursos de especialidad en Ingeniería Industrial y de Sistemas y se aborda suponiendo (en el mejor de los casos) que los estudiantes no tienen problema alguno con el conocimiento matemático de la diferenciación parcial.

Pues bien, siguiendo con el propósito de esta parte del trabajo, se realizó el análisis de los textos en uso sobre estas áreas de interés, como se describe a continuación.

2.1.3 Análisis de libros de texto

En este aspecto, se debe aclarar primero que tanto la revisión de programas de estudio como el análisis de textos, se realizaron prácticamente a la par. De hecho, parte de los resultados ya se han comentado en los párrafos anteriores.

Primero se realiza una revisión general sobre los contenidos de los textos (se indican al final de este escrito, en la bibliografía) de todas las materias de la carrera que tienen que ver con matemáticas. El objetivo es determinar los cursos donde se usa el cálculo. Una vez obtenido esto, se estudia en forma particular sobre el concepto, noción o tema elegido.

De acuerdo a los resultados ya mencionados en la sección anterior, se ha determinado continuar el trabajo en torno al *método de mínimos cuadrados,* dada la importancia en el área de especialidad de la Ingeniería Industrial y de Sistemas y a su directa relación con el cálculo diferencial de dos variables.

De esta forma, el análisis se enfoca sobre lo que se ha encontrado específicamente en relación al método de mínimos cuadrados en los textos de los cursos de *Análisis de regresión* y *Análisis y diseño de experimentos,* así como también en un libro de Métodos Numéricos.

Se estudiaron los textos siguientes: en *Análisis de regresión*, el texto del mismo nombre de (Montgomery & Peck, 1992); en *Análisis y diseño de experimentos*, el texto "Design and análisis of experiments" de (Montgomery, Douglas C., 1997) y de Métodos Numéricos, el texto de (Nieves, 1996).

De acuerdo a los resultados previos ya comentados, el primer encuentro de los estudiantes con el método se da en el curso de *Análisis de regresión*. En el texto base (Montgomery & Peck, 1992) se presenta como sigue:

"Se desea determinar la relación entre una sola variable de regresión x *y la respuesta* y*. Usualmente se supone que la variable de regresión x es continua y controlable por el experimentador. Entonces, si el experimento está diseñado se eligen los valores de* x *y se observan los valores correspondientes de* y*.*

Supongamos que la relación real entre x *e* y *es una línea recta y que la observación* y *a cada nivel de* x *es una variable aleatoria. Ahora bien, el valor esperado de* y *para cada valor de* x *es*

$$E(y/x) = b_0 + b_1 x$$

en donde los parámetros de la recta, b_0 *y* b_1*, son constantes desconocidas. Se supone que cada observación, y, puede describirse mediante el modelo*

$$y = b_0 + b_1 x + e \qquad (2)$$

en donde e *es un error aleatorio con media cero y variancia* s^2. *También se supone que las* $\{e\}$*constituyen un conjunto de variables aleatorias no correlacionadas. A menudo, el modelo que contiene una sola variable de regresión, se conoce como modelo de regresión lineal simple.*

Los parámetros del modelo b_0 *y* b_1, *pueden estimarse mediante mínimos cuadrados si se tienen* n *pares de datos* $(y_1, x_1), (y_2, x_2), ..., (y_n, x_n)$. *Usando la ecuación 2 se obtiene la siguiente expresión*

$$y_j = b_0 + b_1 x_j + e_j \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

y la función de mínimos cuadrados es

$$L = \sum_{j=1}^{n} e_j^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j - b_0 - b_1 x_j)^2 \qquad (3)$$

La minimización de la función de mínimos cuadrados puede simplificarse si el modelo, ecuación 2, se expresa mediante

$$y = b_0' + b_1 (x - \overline{x}) + e \qquad (4)$$

en donde

$$\overline{x} = (1/n) \sum_{j=1}^{n} x_j \;\; \text{y} \;\; b_0' = b_0 + b_1 \overline{x}.$$

En la ecuación 4 simplemente se corrigió la variable de regresión mediante su promedio. El resultado es una transformación de la ordenada en el origen. Con frecuencia la ecuación 4 se denomina modelo de regresión lineal simple transformado, o simplemente modelo transformado. Además de simplificar el problema de la estimación, el modelo transformado permite que otras tareas de inferencia se realicen con mayor facilidad.

Empleando el modelo transformado, la función de mínimos cuadrados es

$$L = \sum_{j=1}^{n} [\, y_j - b'_0 - b_1 (x_j - \bar{x})\,]^2$$

Los estimadores de mínimos cuadrados de b_0 *y* b_1*, es decir,* $\bar{b}_0$ *y* $\bar{b}_1$*, deben satisfacer*

$$\frac{\partial L}{\partial b'_0} = -2\sum_{j=1}^{n} [\, y_j - \bar{b}'_0 - \bar{b}_1 (x_j - \bar{x})\,] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = -2\sum_{j=1}^{n} [\, y_j - \bar{b}'_0 - \bar{b}_1 (x_j - \bar{x})\,](x_j - \bar{x}) = 0$$

Después de simplificar estas dos ecuaciones se obtiene

$$n\,\bar{b}'_0 = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$\bar{b}_1 \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j\,(x_j - \bar{x})$$

Estas expresiones se conocen como ecuaciones normales de mínimos cuadrados. Su solución es

$$\bar{b}'_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j = \bar{y}$$

$$\bar{b}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\,(x_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2}$$

Por lo tanto, $\bar{b}_0$ *y* $\bar{b}_1$ *son los estimadores de mínimos cuadrados de la ordenada en el origen y la pendiente de la recta, respectivamente".*

Como se puede observar, el método de mínimos cuadrados se explica en este libro en un contexto del uso de la estadística en el diseño de experimentos (aunque no es la materia de estudio), pero, dada la presentación, podemos inferir que se supone un conocimiento previo por parte del estudiante sobre el método. Éste se menciona y se usa sin mayor explicación sobre los fundamentos matemáticos que lo soportan.

Por otra parte, en el texto base de *Análisis y diseño de experimentos* (Montgomery, Douglas C., 1997), la primera ocasión en que se hace referencia al método, ocurre, como ya se había señalado, en el tema de "experimentos con un solo factor", subtema "modelo estadístico de efectos fijos", y se trata en el proceso de resolución de un ejercicio a manera de ejemplo, como sigue:

"...we could try fitting a quadratic model to the data, say

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + e$$

where b_0, b_1 *and* b_2 *are unknown parameters to be estimated and* e *is a random error term. The method often used to estimate the parameters in a model such as is this is the method of least squares This consists of choosing estimates of the* b*`s such that the sum of the squares of the errors (the* $e$*`s) are minimized. The least squares fit in our example is*

$$\overline{y} = -39.9886 + 4.596x - 0.0886x^2$$

(If you are unfamiliar with regression methods, see Chapter 13)".

En el mencionado Capítulo 13 del texto se ofrece una introducción al análisis de regresión. Aparece hasta entonces porque en el Capítulo 14 se necesita para abordar un tema denominado *"Response Surface Methods and Other Approaches to Process Optimization"*, que por cierto, no está en el programa de estudios del curso en cuestión.

Finalmente, se revisó también el texto de Métodos Numéricos (Nieves, 1996) que frecuentemente los profesores sugieren a los estudiantes para consulta cuando lo consideran pertinente. Allí, el método se trata así:

"A veces, la información numérica tiene errores significativos; por ejemplo cuando proviene de medidas físicas; en estas circunstancias no tiene sentido pasar un polinomio de aproximación por los puntos dados, sino sólo cerca de ellos. Sin embargo, esto crea un

problema, ya que se puede pasar un número infinito de curvas entre los puntos. Para determinar la mejor curva se establece un criterio que la fije y una metodología que la determine. El criterio más común consiste en pedir que la suma de las distancias calculadas entre el valor de la función que aproxima $p(x_i)$ *y el valor de la función* $f(x_i)$ *dada por lo datos numéricos, sea mínima (ver figura), es decir, que*

$$\sum_{i=1}^{m} |\, p(x_i) - f(x_i) \,| = \sum_{i=1}^{m} d_i = \text{mínimo}$$

Para evitar problemas de diferenciabilidad, se acostumbra utilizar las distancias d_i *elevadas al cuadrado, es decir*

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^{\,2} = \text{mínimo}$$

Si se quiere aproximar mediante una recta, se usa $p(x) = a_0 + a_1 x$ *. Entonces el problema es el de minimizar*

$$\sum_{i=1}^{m} \left[a_0 + a_1 x - f(x_i)\right]^2$$

Así, del número infinito de rectas que pasan entre los puntos, se escoge aquella cuyos coeficientes a_0 *y* a_1 *minimicen la suma anterior. En este caso tenemos una función por minimizar de dos variables, entonces el procedimiento consiste en determinar las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables e igualar a cero cada derivada, con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones en las incógnitas* a_0 *y* a_1*; o sea*

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\left[\sum_{i=1}^{m} (a_0 + a_1 x_i - f(x_i))^2\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left[\sum_{i=1}^{m} (a_0 + a_1 x_i - f(x_i))^2\right] = 0$$

Derivando tenemos

$$\sum \frac{\partial}{\partial a_0}\left[a_0 + a_1 x_i - f(x_i)\right]^2 = \sum 2\left[a_0 + a_1 x_i - f(x_i)\right](1) = 0$$
$$\sum \frac{\partial}{\partial a_1}\left[a_0 + a_1 x_i - f(x_i)\right]^2 = \sum 2\left[a_0 + a_1 x_i - f(x_i)\right](x_i) = 0$$

y desarrollando las sumatorias se tiene

$$\left[a_0 + a_1 x_1 - f(x_1)\right] + \left[a_0 + a_1 x_2 - f(x_2)\right] + \ldots + \left[a_0 + a_1 x_m - f(x_m)\right] = 0$$
$$\left[a_0 x_1 + a_1 x_1^{\,2} - x_1 f(x_1)\right] + \left[a_0 x_2 + a_1 x_2^{\,2} - x_2 f(x_2)\right] + \ldots + \left[a_0 x_m + a_1 x_m^{\,2} - x_m f(x_m)\right] = 0$$

que simplificadas quedan

$$m a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) x_i$$

se resuelve este sistema y se tienen los parámetros a_0 *y* a_1*...”*

Que es una presentación similar a la que se indicó líneas arriba sobre el texto de *Análisis de regresión*, con la diferencia de que ésta última está sólo en el contexto del análisis numérico.

Considerando los diversos elementos encontrados, se puede concluir que:

1) Los conocimientos de cálculo que se contemplan en los cursos de Matemáticas para Ingeniería en el Sistema Tecnológico de Monterrey, se encuentran totalmente desvinculados de los procesos académico-formativos en las áreas de especialidad en la Ingeniería Industrial y de Sistemas.

2) Existen áreas de especialidad de la ingeniería industrial, como es el caso del *Análisis de regresión* y el *Análisis y diseño de experimentos*, donde se emplean conocimientos de cálculo.

Esta situación permite continuar con las fases planeadas en la investigación. Se ha identificado un conocimiento de especialidad, el método de mínimos cuadrados, donde se usan conocimientos de cálculo: funciones de dos variables independientes, la derivada parcial y el cálculo de extremos de funciones.

De esta forma, la fase correspondiente a los estudios en el contexto de la ingeniería en el desarrollo de la investigación, se enfocará sobre el diseño de una experiencia de aprendizaje en el contexto de la Ingeniería Industrial y de Sistemas, en particular sobre el método de ajuste de curvas llamado de mínimos cuadrados.

CAPÍTULO 3

LAS FUNCIONES COGNITIVAS EN UN PROBLEMA DE CÁLCULO DE DOS VARIABLES

Se describe el análisis cognitivo preliminar de las experiencias de aprendizaje en base al sistema tradicional y algunas consideraciones y resultados previos.

3.2 Estudios cognitivos preliminares

Una vez realizada la primera parte de la fase I del método de investigación, es decir, el estudio didáctico sobre la ubicación de conocimientos de cálculo en áreas de especialidad de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas, se procedió a realizar el estudio didáctico preliminar, en términos del mapa y las funciones cognitivas de Feuerstein, a fin de obtener elementos de referencia sobre los factores cognitivos involucrados en el uso de las ideas, nociones y conceptos que atañen al método de mínimos cuadrados en una situación de enseñanza tradicional, así como del estado de aprendizaje de los conceptos de función de dos variables y la derivada parcial, para posteriormente realizar la experiencia de contextualización sobre los mínimos cuadrados en fenómenos de regresión lineal y su análisis correspondiente.

Es importante señalar que el objetivo en esta parte era contar con un referente a nivel de análisis cognitivo, entre lo que ocurre en la mente de los estudiantes en relación a su aprendizaje en una situación de enseñanza no contextualizada en la ingeniería y otra donde el proceso se da en un contexto específico de la misma. Sin perder de vista que este último, como se ha indicado en el objetivo general de la investigación, es la meta central del trabajo. Es decir, se considera conveniente tener un referente sobre lo que sucede con los procesos cognitivos de los estudiantes en una experiencia de aprendizaje tradicional, que involucre la derivada parcial, y que posibilite contar con más elementos sobre los factores implicados en la problemática que propicia la total desvinculación de las matemáticas, y en particular del cálculo que se enseña en carreras de ingeniería, y las áreas de especialidad en las mismas. Esto se volvió necesario dado que no se tienen investigaciones antecedentes a las que se pueda recurrir en términos de esa problemática, misma que ya señalamos desde la introducción y justificación de este trabajo. No se han realizado estudios sobre las *funciones cognitivas* (como las define Feuerstein) de estudiantes en situación de aprendizaje respecto al método de mínimos cuadrados, ni en contexto ni en alguna otra forma de enseñanza.

Entonces, la experiencia y el análisis realizado y que se presenta a continuación, sobre las funciones cognitivas de alumnos en una experiencia de aprendizaje sin contexto en la ingeniería, se llevó a cabo con el fin de contar con un apoyo referente en la investigación, que posibilitara, como se ha señalado, contar con los elementos para caracterizar los factores de orden cognitivo implicados y recopilar información a fin de analizar, específicamente, las *funciones cognitivas* particulares que se presentan al resolver un problema matemático particular.

De esta forma, se aclara que no fue un objetivo el realizar una confrontación o estudio de contraste entre los análisis cognitivos sobre el aprendizaje de conceptos del cálculo de un escenario común en la enseñanza, no contextualizado, y otro que sí se diseña en un contexto especifico de la ingeniería. Más bien, esta fase de la investigación se realizó a fin de contar con un estudio de carácter didáctico preliminar en el proceso, que además de poder ofrecer luz sobre el diseño de la experiencia en contexto en relación al funcionamiento cognitivo de los estudiantes, permitiera tener elementos de referencia acerca de lo que sucede en la mente del que aprende, específicamente al resolver un problema matemático en el área del cálculo y en base a la teoría cognitiva de Feuerstein.

Esta parte de la investigación se llevó a cabo mediante dos actividades: una experiencia en el aula con un grupo de estudiantes y la realización de dos entrevistas.

3.2.1 La experiencia en el aula y análisis de resultados

La experiencia se realizó en un escenario de enseñanza común en el sistema tradicional, esto es, mediante clases típicas donde el profesor asume el rol principal, expone los temas y propone ejercicios y problemas a resolver a los estudiantes. Esto, siempre siguiendo el programa de estudios oficial y en base al libro "Cálculo: conceptos y contextos (Stewart, 1999)", mismo que es el texto que se emplea en el curso de Matemáticas para Ingeniería III, donde aparecen los contenidos relacionados a la derivada parcial.

Este estudio se realizó con un grupo de 13 estudiantes con edades entre 19 y 21 años, del curso señalado, en la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas del ITESM Campus San Luis Potosí.

Para los fines de la experiencia, primero se revisó el libro de texto respecto a las partes del mismo donde aparece o se menciona el método de los mínimos cuadrados. El resultado fue el siguiente: sólo aparece en dos lugares; 1) al inicio (Stewart, 1999, pág. 77), en una sección de la primera unidad (correspondiente al tratamiento de funciones en una variable real) donde el autor escribe sobre la importancia de los modelos matemáticos en general y, 2) en la sección de ejercicios propuestos del tema de máximos y mínimos de funciones de varias variables (Stewart, 1999, pág. 820). Aquí es donde aparece *el único problema* referente a los mínimos cuadrados y que es, precisamente, el que se decide emplear en la experiencia. Cabe enfatizar que los mínimos cuadrados se mencionan, como se ha indicado, únicamente en la sección de ejercicios propuestos; no aparece en ningún momento en el desarrollo de las presentaciones respecto a los contenidos de los temas que se abordan en el texto.

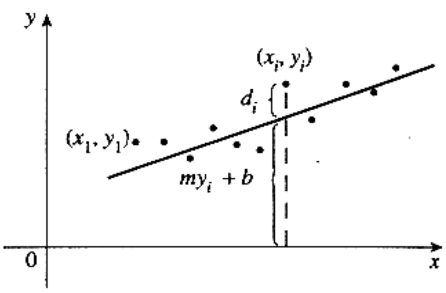
El problema

Suponga que un científico tiene razones para creer que dos cantidades, x y y se relacionan en forma lineal; es decir y = mx + b, cuando menos de manera aproximada para algunos valores de m y de b. El científico lleva a cabo un experimento y recopila datos en la forma de los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2),...(x_n, y_n)$ *y los grafica. Los puntos no se encuentran exactamente en una recta, así que el científico desea determinar las constantes m y b de modo que la recta y = mx + b se "parezca" a los puntos tanto como sea posible (véase la figura). Sea* $d_i = y_i - (mx_i + b)$ *la desviación vertical del punto (x, y) con respecto a la recta. El método de los* ***mínimos cuadrados*** *determina a m y a b, de modo que minimiza* $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ *que es la suma de los cuadrados de dichas desviaciones. Muestre que, de acuerdo con este método, la recta que más se "parece" se obtiene cuando:*

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Por lo tanto, la recta se determina resolviendo estas dos ecuaciones con las dos incógnitas m y b.



La experiencia se realizó de la siguiente forma: primero se presentó el problema a los estudiantes, distribuidos en tres equipos de tres integrantes y uno de cuatro, en una sesión de clase de 30 minutos y se les pide que realicen lo que se indica en él. Después, al término de la sesión se les plantearon las siguientes preguntas para realizar en trabajo extra clase:

Contesten y argumenten en la forma más amplia posible, las preguntas siguientes.

a) ¿En qué consiste el método de los mínimos cuadrados?

b) ¿Qué significa minimizar y qué conocimientos matemáticos se requieren para lograrlo?, ¿Porqué?

c) ¿Qué es la derivada parcial?

Se les pidió entregar por escrito, en la clase siguiente, la solución al problema y respuestas a las preguntas.

La finalidad, como se ha indicado, fue estudiar las funciones cognitivas de los estudiantes en el marco del mapa y las funciones cognitivas de Feuerstein y explorar además, sobre el estado de sus conocimientos matemáticos.

3.2.1.1 Resultados sobre la experiencia en el aula

El mapa cognitivo.

Primero, se describe a continuación lo referente a las especificaciones generales del mapa cognitivo como es concebido por Feuerstein, para el problema planteado:

Contenido: función de dos variables y derivadas parciales a nivel operativo.

Modalidad: verbal, simbólica y gráfica.

Operaciones: analogías, comparaciones y relaciones.

Fases: en la *fase de entrada*, se requiere que el estudiante perciba que en el enunciado se describe en qué consiste la idea básica del método de mínimos cuadrados y entonces lo que se pide es sólo minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ para llegar a las ecuaciones propuestas. En la *fase de elaboración*, primero es necesario que los alumnos, una vez que tienen claro lo que se pide en el enunciado, sean capaces de acotar lo que se debe realizar a nivel operativo (por ejemplo, sustituir $d_i = y_i - (mx_i + b)$ en $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ para enseguida derivar parcialmente respecto a las variables m y b) y, en su caso, averiguar lo que sea necesario. Deben tener la capacidad de recordar sus conocimientos sobre sumatorias e identificar que en la información aparece una función de dos variables. Después, se debe recurrir a los conocimientos previos sobre la forma de determinar un mínimo y emplear la simbología adecuada en el proceso de diferenciación. Finalmente, en la *fase de salida*, los estudiantes sólo deben verificar las ecuaciones que se proponen en el propio enunciado y externarlo verbalmente.

Nivel de complejidad: medio-alto (los conocimientos y operaciones requeridos no requieren por completo de altos niveles de abstracción).

Nivel de abstracción: medio-alto (intervienen varias nociones y símbolos de matemáticas avanzadas, tanto del curso en cuestión como de otros precedentes).

Nivel de eficiencia: medio. No es un nivel alto porque es considerable el grado de automatización requerido.

El análisis.

Se observaron dificultades para comprender lo que se plantea en el enunciado. A pesar de estar familiarizados con la simbología que se usa, se manifestaron conflictos en la comprensión. Estos conflictos van desde dudas sobre lo necesario para minimizar la sumatoria y que se reflejan, por ejemplo, en preguntas como *"¿lo que debemos hacer es derivar?"*, hasta otros más profundos y observables, como por ejemplo, cuando alguno de los equipos no entendió la explicación que se da sobre el método de mínimos cuadrados ni lo que se pide realizar.

En términos de las funciones cognitivas de Feuerstein, se puede inferir que la función de *percepción clara* se ve afectada en los estudiantes debido a la aparición de estimulación novedosa en el enunciado del problema, por ejemplo, con el término "mínimos cuadrados"; también al nivel de complejidad, que el estudiante percibe en la simbología empleada, e incluso, a la amplitud del texto, lo que repercute en un conocimiento impreciso de los datos de la información. Esta situación está estrechamente relacionada con la pobre *exploración sistemática* observada. La *impulsividad* aparece en forma notable, por ejemplo, cuando los estudiantes advierten que se debe derivar, intentan hacerlo aún antes de tener claro cuál es la función a tratar y las variables involucradas (esto se presenta incluso después de trabajar extra clase, como se describe más adelante), al grado de que en dos de los equipos de trabajo empiezan a derivar parcialmente respecto a x_i y y_i (cuando las variables independientes en el problema son m y b).

Es importante señalar que estas funciones cognitivas se ven afectadas también en forma considerable por otros dos aspectos fundamentales: la *falta de motivación* y la consecuente *falta de atención* al abordar el problema. Aquí, es importante considerar que en el aspecto motivacional, intervienen directamente *sesgos de pensamiento* como los determinados por la creencia (o al menos duda permanente) de que las matemáticas no les son útiles en su futuro ámbito profesional. Es decir, intervienen de manera decisiva factores de carácter sociocultural. Muchos estudiantes realizan la actividad que se les pide (resolver el problema) sólo por la motivación de obtener una nota, de acreditar un curso. Cuando se enfrentan a un problema, predomina una actitud esquiva, tratan de evitar el enfrentarlo lo más posible, privilegiando aspectos superficiales del planteamiento por encima de los datos relevantes. Por ejemplo, durante la sesión en cuestión, al momento de iniciar la lectura del enunciado del problema, un alumno pregunta "*¿Y esto para qué nos puede servir a nosotros?..., aquí dice que le interesa a un científico...no es para un ingeniero*".

Es evidente que estos problemas en la fase de entrada no son consecuencia de factores asociados al desarrollo cognitivo de los alumnos, sino a "vicios" de pensamiento adquiridos a lo largo de su vida escolar. Situación que concuerda con lo señalado por Vergnaud (1990) cuando habla de su teoría de los campos conceptuales aplicada a niños y adolescentes, en el sentido de que los elementos teóricos que la estructuran se refieren también a los procesos de aprendizaje del adulto, pero que estos últimos suceden "*bajo restricciones que son más del orden de los hábitos y de sesgos de pensamiento adquiridos que relativos al desarrollo del aparato psíquico*", y que a la vez, se puede soportar en las ideas de Piaget sobre las etapas de desarrollo intelectual, considerando que este trabajo se realiza con estudiantes de 19-21 años de edad.

Por otro lado, se observa que los alumnos tienen dificultades también con la función de *organización de la información*, aunque se puede decir que éstas no se deben a una incapacidad para realizarla, sino, más bien, a la incertidumbre en que se cae como producto de las situaciones ya mencionadas, así como a las características de la recuperación de información en la memoria a largo plazo respecto al prototipo que tienen los estudiantes de lo que es una función de dos variables (y cuáles son las variables) y a la noción de sumatoria. Por ejemplo, en dos de los equipos, en forma explicita, aparecen inquietudes en torno a esta última: de su conocimiento previo, lo que aflora y predomina es el significado sobre los símbolos. Asocian el símbolo $\sum$ a las series numéricas infinitas, lo cual implica el uso de la función cognitiva de *conducta* *comparativa*, perdiendo de vista la información en el enunciado del problema y en consecuencia, la necesidad o conveniencia del uso de este símbolo en el planteamiento. Aparecen comentarios como *"sólo debemos derivar la serie, ¿no?"*, y *"¿cómo se deriva una serie?...ha... eso lo vimos en Mate II* (aludiendo al curso previo de cálculo integral en una variable y series numéricas infinitas)".

En la fase de elaboración, como consecuencia de los conflictos observados en la parte inicial, se ven afectadas las funciones de *percepción y definición del problema, selección de información relevante, interiorización y representación mental, y la clasificación cognitiva.*

Las funciones de *percepción y definición del problema*, y la de *selección de información relevante*, están directamente relacionadas a las de *percepción clara* y *exploración sistemática*, y afectadas por ellas en términos de las observaciones indicadas anteriormente.

Respecto a la *interiorización y representación mental*, se puede inferir su afectación en algunas acciones de los estudiantes, por ejemplo, cuando perciben que la función involucrada es de dos variables independientes, pero les causa conflicto el que no aparezca en forma explícita la variable dependiente (alguien comentó que "*la función no tiene nombre*"), además aparecen dudas respecto a si la sumatoria es o no una función (y por tanto, susceptible de diferenciación o no). Esto provoca que al momento de derivar no usen una simbología apropiada, por ejemplo, no indican qué cosa van a derivar, sólo escriben el resultado.

La *clasificación cognitiva* es una función que a su vez depende de otras funciones, entre ellas las de percepción clara, uso de distintas fuentes de información, conducta comparativa y distinción de información relevante, todas ellas afectadas desde la fase de entrada. Pero además, se presentan dificultades en ella debido a que los alumnos tienen deficiencias conceptuales respecto a las nociones previas necesarias tales como sumatoria, función de dos variables, derivada parcial, valor mínimo de una función de dos variables, etc.

Finalmente, en la fase de salida, sólo se observaron conflictos en la función de *comunicación explícita* y en la de *precisión y exactitud de la respuesta*. Algunos estudiantes llegan a las ecuaciones indicadas pero no escriben la respuesta en forma explícita. Es decir, de acuerdo a la teoría, presentan una comunicación egocéntrica: no consideran necesario mayor explicación sobre la solución, creen que cualquier otra persona que vea su trabajo lo comprende bien.

3.2.1.2 Resultados sobre los reportes escritos

Algunos de los conflictos y deficiencias observadas prevalecen aún después del trabajo extra clase que realizaron los estudiantes.

Respecto a la primera pregunta:

Ningún equipo contesta (recordemos que la pregunta era, *¿en qué consiste el método de los mínimos cuadrados?*) haciendo referencia explícita al enunciado del problema. Todos los estudiantes se dieron a la tarea de investigar al respecto y presentan en su reporte resúmenes, partes e incluso copias exactas de libros donde se trata el método. Esta es una situación esperada puesto que, de acuerdo a lo observado durante la sesión en el aula, el enunciado del problema resultó no ser suficiente para la comprensión del método.

Respecto a la segunda pregunta:

No interiorizan adecuadamente, como ya se señaló antes, debido a factores conceptuales sobre sus conocimientos previos, por ejemplo, uno de los equipos, como parte de su respuesta a la pregunta *¿Qué significa minimizar y qué conocimientos matemáticos se requieren para lograrlo?, ¿Porqué?,* escribe, *"Minimizar significa reducir a su mínimo volumen, en este caso específico se refiere a buscar el mínimo de una función, es decir hallar el límite inferior al que puede reducirse. Para encontrar dicho mínimo se utiliza la derivada ya que es el único procedimiento por el cual se encuentran mínimos ya que al integrar se encuentra el máximo pues es esta se suman las diferenciales".*

Parece ser que la concepción de minimizar en estos estudiantes gira en torno a la noción de volumen. Así, minimizar significa *buscar el mínimo de una función* o determinar el *límite inferior* al que puede reducirse (el volumen). Esta concepción se hace más evidente cuando escriben que *"Para encontrar dicho mínimo se utiliza la derivada ya que es el único procedimiento por el cual se encuentran mínimos ya que al integrar se encuentra el máximo pues es esta se suman las diferenciales".* Parece ser que el conocimiento que tienen respecto a derivar e integrar, quedó codificado en la memoria a largo plazo como quitar y agregar, respectivamente, y es eso lo que recuperan de los conceptos implicados al pensar sobre la pregunta. Derivar, entonces, significaría reducir al mínimo un volumen (restar) e integrar, por el contrario, permitiría encontrar el máximo (sumar).

Por otra parte, respecto a la idea del procedimiento analítico para determinar el mínimo escriben que *"...a partir de las raíces de la derivada podemos apreciar en la gráfica los puntos críticos que en ella existen, entonces encontramos el mínimo relativo o absoluto y por ende se encuentra el error mínimo posible. Se hallará la derivada parcial de primero orden, en este caso con dos variables, se derivará con respecto de ambas variables, se iguala el resultado a cero con el fin de encontrar las raíces y así los puntos críticos y se resuelve para encontrar los valores".* Se puede observar aquí que el elemento central en estas ideas queda constituido por las raíces de la derivada. Los estudiantes asumen que la función derivada tiene raíces y entonces sólo es cuestión de encontrarlas. No es posible determinar con precisión si los estudiantes tienen claro que la función del problema, por sus características, siempre tiene un mínimo y por eso el derivar parcialmente, igualar a cero y resolver el sistema, funciona siempre. Sus argumentos pueden deberse a esto, pero también (y se cree que es lo más probable) pueden ser consecuencia de que el algoritmo *derivar-igualar a cero-resolver* es el conocimiento que ha quedado en su memoria y que es aplicable a toda función de dos variables sin necesidad de considerar otras posibilidades de valores extremos (por ejemplo el mínimo en el "pico" de un cono que "abre" hacia arriba).

Por otra parte, es evidente que para estos estudiantes la posibilidad de hallar un punto crítico correspondiente a un máximo queda descartada (es seguro, desde la perspectiva de ellos, que con ese procedimiento lo que se determina es un mínimo dado que se está derivando; integrar corresponde a máximo).

Se debe aclarar que estas observaciones y reflexiones son un intento de explorar las causas de los aspectos conceptuales que intervienen en los procesos cognitivos al abordar un problema, en particular sobre las funciones cognitivas como las concibe Feuerstein, pero no se pretende realizar un estudio exhaustivo en este sentido (tal vez se requeriría emprender un nuevo proyecto). Lo que sí se puede decir en relación a los objetivos de la investigación es que estas concepciones previas de los estudiantes influyen decisivamente en su funcionamiento cognitivo, en particular sobre las funciones de *interiorización y representación mental* y la *precisión y exactitud en la respuesta.*

Respecto a la tercera pregunta:

El resultado más importante aquí fue el que todos los equipos inician su respuesta a esta pregunta *(¿qué es la derivada parcial?)* describiendo la forma de calcular una derivada parcial. No contestan de entrada qué es, sino, cómo calcularla operativamente. Posteriormente mencionan la definición en términos de límites (copiada de libros) y sólo tres de los equipos, al final de su respuesta, presentan la interpretación geométrica. Evidentemente, del manejo conceptual que tienen los alumnos sobre la derivada parcial, la parte operativa es la que predomina. En sus esquemas, primero está el registro algebraico, la forma de determinar una derivada (la idea de que al derivar una función de dos variables respecto a una de ellas, la otra se trata como constante), y después las definiciones e interpretaciones geométricas.

Finalmente, es importante comentar que en las entrevistas se intentará profundizar sobre los aspectos que en esta etapa sólo se han podido estudiar parcialmente, a fin de contar con elementos para determinar con mayor precisión las causas de las conductas de los estudiantes, en particular respecto a las dificultades y/o deficiencias cognitivas que enfrentan en el proceso de resolución del problema.

3.2.2 Las entrevistas

El propósito de esta actividad era el de obtener información respecto a las funciones cognitivas y analizar cuáles de ellas se presentan, en qué momentos del proceso y en qué forma. Esto es, estudiar las funciones cognitivas implicadas en el procesamiento de la información en el acto mental de resolver un problema matemático, sobre todo las que se presentan y provocan dificultades en el estudiante.

En este sentido, este estudio constituye un complemento del ya descrito en la parte inmediata anterior de esta fase de la investigación.

El problema que se usa con los entrevistados es el mismo de la experiencia en el aula.

Se presenta a continuación una relación de las preguntas diseñadas previamente para el desarrollo de la entrevista, así como una breve explicación sobre lo que se desea conocer por medio de cada una de ellas.

Para la fase de entrada:

¿De qué trata el problema?

Con esta pregunta se pretende obtener información del sujeto respecto a la situación de las funciones cognitivas *a nivel de entrada*. En particular sobre la función de *percepción clara*.

¿Qué información se da?

Se intenta saber si el sujeto tiene clara la información respecto a los datos que se proporcionan, si organiza esa información en forma efectiva y si explora sistemáticamente el enunciado del problema.

Para la fase de elaboración:

¿Cómo piensas que debería ser el procedimiento para resolver el problema?

La respuesta a esta pegunta da luz para analizar propiamente el proceso de resolución del problema. Desde la percepción y definición del problema por parte del sujeto, hasta la selección de información relevante, la planificación de su conducta, la interiorización y representación mental; si aparece o no una conducta comparativa, el pensamiento hipotético y la evidencia lógica (más abajo se describe una serie de preguntas de apoyo para obtener información específica en esta fase).

Para la fase de salida:

¿Cuál es la solución del problema?

Se desea obtener información acerca de la forma en que el sujeto externa su respuesta al problema.

¿Cuáles son los alcances de la solución? (describe para qué puede servir la solución).

Se pretende indagar si el sujeto percibe la utilidad de la solución encontrada.

Para el proceso de resolución, en la *fase de elaboración* del acto mental al abordar el problema (inmediatamente después de la pregunta ¿cómo piensas que debería ser el procedimiento para resolver el problema?), se contemplan las siguientes preguntas como auxiliares en la búsqueda de información sobre las funciones cognitivas y las operaciones mentales usadas por el sujeto.

¿En qué consiste el método?

¿La sumatoria es una función?, ¿Qué tipo de función? , ¿Cuáles son las variables?, ¿Cómo están relacionadas?

¿Tú crees que siempre tendrá un mínimo (la función)?

¿Porqué derivar?

¿Porqué igualar a cero las derivadas?

3.2.2.1 Entrevista 1.

Transcripción de la grabación en video.

M.- Mario (sujeto entrevistado)

L.- Leopoldo (entrevistador)

L.- Bueno, entonces vamos a empezar. Mira, primero te voy a pedir que leas el problema, que lo veas, y ahorita que ya termines de verlo, te voy a hacer una serie de preguntas y lo que quiero es nada más que...que vayas contestando una por una. A ver, entonces te doy tiempo para que lo leas, luego vemos las preguntas.

(Mario lee el problema)

L.- ¿Listo Mario?

M: Ya.

L: Este lo puedes dejar para referencia (refiriéndose al texto del problema).

L: Entonces, dime, ¿de qué trata el problema?, ¿cómo describirías de qué se trata?

M: ¿De qué se trata?...se trata...de aproximar una recta a una serie de…de puntos aleatorios y esta recta de...implica una característica de que se debe acercar lo más posible a ellos...aproximar.

L: Ok.

M: Bueno, pero dentro del problema nos pide que pues, demostremos que esa recta se obtiene a partir de estas dos ecuaciones (señala el sistema de ecuaciones), entre otras cosas,...que la distancia del punto a la recta es ésta,...y que...está la sumatoria de las distancias de los puntos a la recta, al cuadrado.

L: Bien, digamos que esa es la situación, eso es lo que se pide y es, este,...el contexto del problema. Y para eso, ¿qué información se da?

M: Mmm...para empezar,...todo lo que se da es información, pero yo lo primero que recalcaría sería la distancia.

L: ¿Qué distancia?

M: La distancia de cualquier punto a la recta...es un primer dato, el segundo,..dice (lee el enunciado del problema) usando el método de los mínimos cuadrados, dice que...este método determina el valor de la pendiente y de la...de la ordenada al origen, este, característicos de la...de la recta que estamos buscando y que la sumatoria de las distancias de cada uno de los puntos a la recta al cuadrado,...que hay que minimizar la sumatoria de esas distancias al cuadrado,...y qué más sería?...como datos, creo que son esos, aparte que te dan...te dan las rectas o te dan las ecuaciones a las que tienes que llegar,...y la gráfica.

L: Bien, entonces con...teniendo lo que trata el problema y la información que se da, ¿me puedes describir por favor, cómo crees o cómo piensas que debería ser el procedimiento para resolver el problema?

M: Hay cosas que no sé,... por ejemplo, dice que el método de los mínimos cuadrados minimiza la suma de todas estas distancias al cuadrado, ¿porqué es al cuadrado?, no lo sé, pero así dice que es el método y bueno, lo voy a obedecer. Este,...dice que la sumatoria de esas dist,.... este,...que al analizar esas distancias al cuadrado, este, que es como se determinan los valores de *m* y *b*. Dice que la distancia de cada punto a la recta está dado por,...por esta ecuación (se refiere a $d_i = y_i - (mx_i + b)$). Al empezar, esta ecuación, sería cosa de sustituir y de ahí,...que sea un mínimo, eso sólo viendo la ecuación,...yo diría que...sólo graficándola, dándole valores a las incógnitas *m* y *b*. Pero si ahí mismo me dice que se minimiza, este,...que debe dar un mínimo, cuando yo derive esta ecuación de la distancia del *i-ésimo* punto a la recta,...y por el método, derivando parcialmente, igualando a cero y encontrando puntos críticos. De alguna manera se quiere verificar que se puede,...se quiere saber que es un mínimo, se puede sust...de alguna manera,...

L: O sea, ¿un criterio para determinarlo?

M: Sí.

L: Bueno, de acuerdo a lo que dices sobre el método, se trata de minimizar la expresión de esta sumatoria (señala la expresión $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$) y que entonces operativamente sería cosa, por ejemplo, de sustituir esta ecuación dada para la *d* aquí (indica la misma expresión de la sumatoria) y luego trabajar con ella ¿no?, derivarla y demás...Este, ¿porqué crees que...o porqué dudas que pueda tener un mínimo?

M: ¿Porqué dudo?...pues no sería tanto dudar sino verificar. De hecho, esta distancia...de esta ecuación,...

L: Sí, ¿de la *d*?

M: Sí, la distancia para,...para,...cualquier cosa que estemos graficando, siempre va a ser la misma, es la distancia de un punto a una recta, esto no varía. Esto debe ser una función (señala la ecuación para *d*) todo está en función,...o depende de dos variables,...es una función en tres dimensiones. Habría que graficarla a ver qué tipo de función es y esa función es la que siempre vamos a derivar,...entonces, dependiendo de esa función sabemos si siempre va a ser un mínimo o un máximo relativo...

L: Te refieres a la sumatoria o a la otra (señala la ecuación para *d*).

(Mario lee la parte del problema donde se describe sobre la ecuación de las *d* y la sumatoria)

M: *d* cuadrada,...las distancias al cuadrado (señala la sumatoria).

L: De la sumatoria.

M: Ajá.

L: La formulita de la distancia (señala la ecuación de la *d*),...es para cada una de las distancias, pero por separado.

M: Ajá.

L: Entonces, ¿tiene sentido que uno diga que si suma todas esas distancias y luego las quiere minimizar,...que se pueda lograr eso?, ¿o no?

M: ¿Si tiene sentido?

L: Sí, tratar de minimizar eso.

M: No,... no entiendo la pregunta.

L: Sí, es decir, el método se basa en la construcción de esas diferencias (señala la ecuación de la *d* y el dibujo en el texto del problema), de esas distancias ¿no?, entre los puntos experimentales y la recta que andamos buscando.

M: Ajá.

L: Este...la pregunta es si tú crees que, bueno, la idea del método es minimizar eso, o sea, ¿tiene sentido minimizar? Porque entonces si sí tiene sentido pues es como responder a la duda que tienes, ¿no?,...o sea, esa función, ¿debería tener un mínimo?, o más, ¿tendría sentido preguntarse si podría haber un máximo allí?,... ¿Qué significaría maximizar las distancias?

M: No, en ese caso no tendría sentido,...pues un máximo de esas distancias sería...infinito.

L: ¿Podría ser infinito? Estamos hablando de distancias.

M: Ajá.

L: Entonces, ¿Cuál es la idea del método? O sea, la idea básica,...olvídate de las distancias y los puntos y eso,...la idea es, -ya me la habías dicho, pero retomándola-,...es,...

M: Dada esta serie de puntos.

L: Ajá. Construir,...dada esa serie de puntos...

M: Construir...

L: Sí.

M: Construir, deducir...una ecuación lineal...la ecuación o una recta, la recta óptima,...

L: ¿Cuál sería?

M: Que se asemeje más a estos puntos.

L: Eso, ¿qué significa en términos de las distancias?,...¿Qué significa que se asemejen?

M: Que se acerquen, que,...que la distancia de la recta a los puntos sea mínima.

L: Entonces, ¿cómo hacer eso?

M: Como lo plantea ahí,..minimizando,..o bueno, no tanto minimizando, sino encontrando puntos críticos que van a ser mínimos, que ya vemos que se minimizan,...que van a ser mínimos, este,... de esas distancias.

L: Ok.

M: Bueno, de la que viene de la,...de la derivada de esas distancias,... derivar la ecuación, igualarla a cero,...en términos analíticos,...

L: Bueno, a ver, entonces, se trataría de derivar la ecuación, ¿no?, la ecuación... ¿cuál ecuación?, o sea ¿cuál es la que vamos a tratar,...la que vamos a tratar de minimizar?

M: La de las distancias al cuadrado.

L: Ok. La de distancias al cuadrado. Que es una ecuación,...bueno,...primero, ¿es una ecuación esa?

M: Pues, una función,...podría ser.

L: ¿Es una función?, ¿cómo la,..

M: Pues sí, sí,...

L: Así como está...

M: Sí, sí,...tiene un igual ahí (señala la ecuación de la *d*),... pues sí es una ecuación.

L: No, pero me refiero a la de las sumas, no a la de la *d*.

M: Mmm,...no indep...independientemente de la sumatoria, no; *d* cuadrada sí,...

L: Es que me dices que la que vas a derivar es la de la sumatoria, ¿no?, ¿o la *d*?

M: No, sí, la sumatoria.

L: La que hay que minimizar es la sumatoria.

M: Sí.

L: Ok. Me refiero a eso, la pregunta es, ¿esa sumatoria es una función, es una ecuación, o qué es?,...así como está ahí.

M: Así como está ahí...

L: Claro, a sabiendas de que la *d* es esa (señala la ecuación de la *d*).

M: Pues sí, es una ecuación.

L: A ver, ¿porqué crees que es una ecuación?

M: Porque *d* cuadrada es una ecuación,...y la sumatoria de esa ecuación...me quedaría una serie de ecuación.

L: La *d* es una ecuación. En eso estoy de acuerdo, pero cuando tú evalúas,...eso que dijiste de que podías sustituir en la sumatoria,...a la hora que sustituyes,...ya no sustituyes toda la ecuación, sustituyes la equivalencia, en este caso la equivalencia de la *d*.

M: Ajá.

L: Nada más. Imagina que ya hiciste eso, o hazlo si quieres, no sé...eso que quedó,..¿es una ecuación?,

M: A ver (escribe).

L: Sustituye la *d*, si gustas.

(realiza la sustitución)

M: Listo. Mmm,...entonces, si todo esto (encierra con su bolígrafo lo que escribió)...

L: Exactamente, si esa expresión es una ecuación, es una función, es,..o, ¿qué es?

M: ¿Todo esto?

L: Sí, todo. Incluyendo la sumatoria y la expresión que sustituiste.

(Observa la expresión que escribió)

M: No, bueno, ecuación no,...creo que me queda claro porqué no es,...esto es la distancia (señala lo que sustituyó en la sumatoria) de un punto a la recta, al cuadrado. Si yo sumo estas distancias no tiene ninguna relación con,...una función, no,...una ecuación,...una ecuación,...no, yo creo que tampoco.

L: Pero, ¿porqué crees que no?,...¿qué te hace pensar que no es una ecuación?

M: Para tener una ecuación necesito un igual, ¿no?

L: Ok.

M: Que esto sea igual a:...eso no lo tengo en ningún lado,...no sé,...no sé ,...una expresión.

L: Ok. Entonces no sería una ecuación. ¿Crees que eso represente una función?

M: ¿La sumatoria de (señala la sumatoria)...?

L: Esa, esa misma expresión que tienes (señala la sumatoria).

M: No.

L: ¿Y porqué?, ¿Porqué crees que no representa una función?

M: Si yo lo veo así,...esto,...viene siendo la distancia de un punto, cualquier punto, a la recta que estamos buscando,...que sea al cuadrado, pues no,...deja de ser lineal, cambian las cosas, vamos a tener otra cosa,...alguna otra función,...no sé,..pero como yo sumo todas estas distancias al cuadrado,...no tiene porqué darme una función.

L: Ok. Bueno, entonces, hace rato me dijiste que la idea del método, así como lo entiendes de acuerdo a lo que está planteado ahí (señala el enunciado del problema), es sustituir, eso que tú hiciste ahí, la equivalencia de las *d`s*, ¿verdad?, de las diferencias, en la sumatoria que se propone en el método. Eso es lo que tienes ahorita. Y luego me dices que esa sumatoria es la que hay que trabajar, que esa es la que hay que derivar, igualar a cero, para ver dónde tiene sus puntos críticos. Qué, según me dijiste también, pues van a depender de las variables ¿no?, que serían la m y la b.

M: Sí.

L: Ok. ¿Se vale derivar algo que no es función?

M: Mmm,...muy buena pregunta,...¿se vale derivar...?, no, espérame,...

L: Porque de acuerdo a todo esto que me estás diciendo, eso es lo que harías,...derivarías.

M: Sí, es cierto.

L: Entonces, esta cosa (señala la sumatoria) es función ¿o no?

M: Sí, debería ser.

L: Y en todo caso, si fuera función, ¿que tipo de función sería? Ya me dijiste que las variables serían *m* y *b*, pero, ¿qué variables?, ¿dependientes?, ¿independientes?, ¿cómo estarían relacionadas la *m* y la *b*?,...¿O hay alguna otra?

M: Mmm,...*x*, bueno, *x* y *y*,...son los puntos, este,...estos que tengo aquí,...¿cómo se dice?,...

L: Es tu colección de puntos.

M: Ajá,..*m* y *b* son,...son desconocidos para mí,...son variables,..que pueden tomar valores,...los valores que yo ando buscando,...¿de que tipo de función...?

L: Sí, me refiero a que tipo porque dices que *m* y *b* son las variables, pero ¿qué variables?, ¿son independientes las dos?, ¿una es dependiente de la otra?, porque a fin de cuentas eso me va a decir qué tipo de función es. Si es función, yo tengo que tener claro cuál o cuáles son dependientes, cuál o cuáles son independientes, ¿verdad?

M: Pues, yo diría,...(piensa e iguala a "*z*" la expresión que había escrito) que son variables independientes.

L: ¿*m* y *b* serían independientes?

M: Sí.

L: Y esta *z* a que tú igualas ahí (señala la ecuación),...¿ahora sí es una ecuación, también?

M: Sí.

L: Ok. Esa *z*, ¿qué sería?

M: La función como tal.

L: En el problema de nosotros, ¿qué significa esa *z*?

M: ¿Esa *z*?,...mmm,...es la función que obtenemos al elevar al cuadrado esta distancia y que nos va a determinar el que sea un mínimo, máximo,...y entre ese mínimo o máximo, que tipo es,...relativo,...este,...absoluto, etc.

L: Ok. Entonces, ¿es como ponerle nombre a la función?

M: Sí.

L: O sea, es una forma de llamarle a la función

M: Sí, *z* de *m*, *b* (escribe *z(m, b)*).

L: Ok. Si es *z* de *m* coma *b*, entonces ¿qué tipo de función es?, ¿cuántas variables hay?

M: Son dos.

L: ¿Dependientes?, ¿independientes?, o ¿cómo?

M: Independientes.

L: ¿Y la z?

M: Dependiente de estas variables (señala *m* y *b*).

L: Bien, ¿entonces la z sería una variable que depende de m y b?

M: Ajá.

L: Entonces tenemos una función de dos variables independientes.

M: En tres dimensiones.

L: ¿En tres dimensiones?

M: Sí.

L: Ok. Bien, entonces, volviendo al problema, esa sería la función que habría que trabajar, ¿no?

M: Sí.

L: Entonces, de acuerdo a lo que se plantea en el problema, ¿qué seguiría?

M: Pues, si yo quisiera ser estricto,...yo graficaba esto (señala la función),...no es por desconfiar del libro (se refiere al enunciado del problema),...pero pues me interesaría saber porqué esta función, este,...se repite lo mismo, aquí lo único que va a cambiar es el valor de ,...este,...*y* y de *x* en un principio y los valores que tengamos finalmente de m y b,... entonces me interesaría saber esta,...conocer esta función gráficamente y saber porqué siempre es un mínimo.

L: Ok.

M: Ya ahí pues entro a lo analítico. Lo que seguiría sería derivar esta función, parcialmente porque tengo dos variables independientes, igualar a cero, encontrar puntos críticos, etc.

L: ¿Tú crees que siempre tendría un mínimo?

M: Yo creo que sí,..sí porque, este,...si te dice el problema “minimiza esto”, quiere decir que siempre habrá un mínimo, y nada más uno, sino al método,...o no sé,...me darían algún punto para el cual sería el mínimo de esta función,... no sé,...otra cosa,...

L: O sea, ¿tú crees que la gráfica, o sea, la función ésta, tiene un valor extremo mínimo y que no depende de los valores de *x* y *y*?

M: Sí.

L: O sea que, ¿independientemente de los valores que te den, por ejemplo, en una tabla, al ponerlos, esa función debe tener un mínimo?

M: Sí.

L: Ok. Entonces, ¿qué es lo que seguiría para hallar ese valor extremo mínimo?

M: Los puntos críticos. Los valores para m y b.

L: ¿Qué es lo que harías?

M: Este,...derivar,...todo esto, lo que está adentro de la sumatoria. Derivando, este, parcialmente.

L: A ver, sí, haz eso, por favor, nada más eso,...es un renglón o dos,...bueno, depende cómo lo hagas...

(Mario realiza el cálculo de las derivadas parciales)

L: Listo.

M: Sí. Analíticamente pues este es el primer paso.

L: Ok.

M: Bueno, aquí derivé esto (señala la expresión dentro de la sumatoria) pero me faltarían las sumatorias,...pero es cosa de agregarlas,...así...(escribe los símbolos de sumatoria en las derivadas que obtuvo).

L: O sea, las propiedades de la sumatoria te permiten hacer esa derivada directamente...

M: Sí. Dejo la sumatoria de la serie y derivo lo de adentro...y derivar....De aquí lo que seguiría es igualar a cero...

L: ¿Porqué igualar a cero?

M: ¿Porqué?, porque en este caso es un mínimo, pero independientemente de eso, de si haya un máximo o un mínimo relativo o absoluto, lo que sea, ahí siempre va a haber un plano tangente, y habrá un plano tangente porque está en tres dimensiones y un plano tangente... que va a tener una pendiente igual a cero...

L: Ok. ¿Y eso ocurre siempre?

M: ¿Qué cosa exactamente?

L: Sí, que en un máximo o en un mínimo, indistintamente, va a haber un plano tangente con pendiente cero

M: Ah, claro.

L: No hay posibilidad de que ocurra otra cosa,...

M: Que en un máximo o un mínimo,...no siempre la pendiente,..o hay un plano,...

L: Que el plano tangente no tenga pendiente cero,...u otra cosa rara,...no sé,.

M: No.

L: ¿No es posible?

M: Hasta donde yo he visto, no.

L: Si tú tuvieras un cono abriendo hacia arriba, un cono hacia arriba -es como los de tomar agua, ¿no?-, con el vértice justo en el origen, dirías que esa función,...si tuviéramos la función que modela esta cosa, ¿tiene un mínimo, o no?

M: No...¿ahí?...A ver...

L: La pregunta es si tiene mínimo o no, no si tiene derivadas o no,...visualmente, hay un mínimo o no hay.

(Mario dibuja el cono)

M: ¿Si aquí hay un mínimo? (se refiere al dibujo del cono, el cual ha dibujado sin sistema de referencia)

L: Sí, puede estar de entrada donde sea (se refiere al dibujo del cono), pero supongamos que el pico éste (señala sobre el dibujo) está en el origen, en el sistema tridimensional, ¿verdad?

M: Sí.

L: Es un cono, es un sólido,...en el sistema tridimensional (insiste para ayudar a que Mario dibuje los ejes coordenados).

M: A ver, sí, ¿qué fue lo que me preguntaste?, ¿qué si aquí hay un mínimo? (encierra con su bolígrafo el área del dibujo alrededor del origen)...

L: Sí, que si la función que está representada por ese cono, tiene o no tiene un mínimo.

M: Mmm...se supone que sí,...no sé,...

L: ¿Sí debería tener un mínimo o no?

M: Sí debería tener...porque aquí hay un punto,...donde aquí la pendiente puede ser cero,...sí. Yo diría que hay un mínimo.

L: ¿Y qué pasa con las derivadas ahí?, ¿Hay un plano tangente con pendiente cero ahí?

M: A ver...sería verlo analíticamente,...no, creo que no, creo que en clase ya habíamos visto esto...

L: A ver, te lo pregunto porque hace rato tú me comentaste que en un sólido suave (hace indicaciones con sus manos) como un paraboloide, es lógico que si yo trazo planos tangentes justo en el valor más pequeño, ahí se va a hacer horizontal, va a ser pendiente cero, porque es natural asociarle planos tangentes ahí, ¿pero en un pico?

M: Sí ese es el problema...Si hubieras dicho aquí (señala un punto sobre uno de los "lados" del cono) luego te diría que no...yo te diría que no hay una recta,...

L: O un plano...

M: ¿Que toque nada más ese punto?

L: No,...en este caso tocaría todos...¿pero es tangente?

M: ¿Es tangente? Pero que toque un solo punto,...que sea,...que sea la pendiente en ese punto,...no sería la pendiente,...porque estas son rectas (remarca los "lados" del cono)...

L: ¿Qué es un plano tangente?

M: ¿Un plano tangente?

L: ¿Qué significa?,...en idea, en concepto, no fórmulas,...cuando hablas de plano tangente, ¿a qué te refieres?, ¿Qué significa que sea tangente?

M: Es un plano que,...que toca a una función en un solo punto...Digo,...no sé como explicarle todo...que toque por afuera (señala sobre el dibujo).

L: Si lo tocara en más, ¿ya no sería tangente?

M: No...no ya no.

L: O sea, en términos de lo que estás diciendo, si tuviéramos aquí un cono real (hace simulaciones con sus manos) y tuviéramos un plano y se lo pegáramos a un lado,...¿ése no sería tangente?

M: No. Hasta donde yo sé debe tocar un solo punto de la función.

L: Ok. Bueno, volviendo al problema, este,...nos quedamos en que tú tienes esto (señala la función que Mario escribió) que es una función tridimensional, la derivas parcialmente, aplicas las propiedades de la sumatoria, pero nada más,...¿cómo puedes tú garantizar que igualándola a cero y sin fijarte en alguna otra cosa, te va a dar la solución?, ¿No crees que la gráfica de esta cosa (señala la función) pudiera ser tal que tuviera una cosa así (señala el pico del cono en el dibujo)?

M: ¿Así con sólo verla?...esto está al cuadrado (señala sobre la función),...

L: ¿Qué te indica el cuadrado?

M: De alguna manera,... (hace un dibujo como el de un paraboloide),...así.

L: ¿Tú crees que la gráfica de esa función debería tener esas características?, ¿No esperarías que tuviera un pico?

M: No, porque,...

L: ¿Cómo te imaginas una función que pudiera tener pico?, ¿qué haría la diferencia con esta (señala la función)?

M: Mmm...por ejemplo, si yo desarrollara esta función,...digo,...me refiero a desarrollar esto al cuadrado,...tendría varios términos al cuadrado,..y a la hora que yo quiera graficar,.en tres dimensiones,...entonces para poder graficar eso,...yo tengo dos variables independientes,...entonces tendría nada más que encontrar esos puntos....

L: ¿Cómo?

M: Por,...para hallar esos puntos (indica los planos de intersección de los ejes coordenados en el dibujo),...¿cómo se llama?,...cuando omites una variable independiente.

L: ¿Trazas?

M: Trazas....gracias. Este,...pues manejo trazas, y a la hora que omita una variable independiente me va a quedar otra variable independiente que voy a graficar y me quedan unas parábolas,...como éstas (dibuja parábolas sobre el dibujo que ya tenía del paraboloide),...esta para el caso de,...este,...*y*, *z* (señala una parábola que dibujó en el plano yz), otra de *z*, de *x*, y debe haber otra por acá,...para el caso del plano xy,..son trazas (indica círculos paralelos al plano xy).

L: Ok. Entonces esas trazas te indican que la figura debería tener formas tipo parábola,...

M: Sí.

L: Formas parabólicas. Entonces no tiene picos.

M: No.

L: Ok. Entonces, por eso entonces tiene sentido que,...derivando e igualando a cero, ya eso te da la respuesta.

M: Sí. Bueno,...ahí si hay un mínimo,...sacando la derivada confirmo eso,...y si igualando a cero me da igual,...bueno,...un conjunto,...donde mi función nada más tiene un,... punto crítico, que es un mínimo.

L: Ok. Eso sería para,...digamos,...una posibilidad, respecto a los planos tangentes que decías, ¿no hay ninguna otra posibilidad de que igualarla a cero no sea suficiente?, ¿O que vaya a salir algo que no es el mínimo que andas buscando?

M: No sé....

L: por ejemplo, esta función (señala la expresión que tiene Mario anotada),...

M: Ajá...

L; ¿Es continua o no?

M: Sí.

L: Porque tal vez pueda ocurrir que a la hora de igualar a cero tengas un plano tangente, como tú dices, pero en algo que ahí se acaba (hace simulación con las manos), digamos, ¿no?,... o que tiene un salto, una especie de asíntota, este, o lo que sea lo análogo a una asíntota de las funciones de una variable.

M: Ajá...

L: Una especie de abismo, no sé,...

M: No,…por su forma.

L: Ok. Tiene forma,...¿de qué?, ¿qué tipo de función es?,...¿racional?, ¿cuadrática?,...

M: Cuadrática.

L: Cuadrática. ¿Tiene forma de... polinomio?

M: Sí.

L: ¿Eso te indica que no hay problemas en ese sentido?

M: Sí.

L: ¿Es continua?

M: Sí. Por definición debe ser continua.

L: Ok,...bien, entonces, -esto ya no lo hagas- pero, ya derivaste, ya igualaste a cero, ¿qué seguiría?

M: Buscar puntos críticos.

L: ¿Cómo se encuentran los puntos críticos?

M: Este,...despejando. Son los valores para b y m.

L: Ok. El objetivo sería despejar m y b.

M: Este, para hallar,...

L: Puntos críticos.

M: Sí.

L: Ahora, supongamos que eso ya lo hiciste,...

M: Bueno...

L: Sí, dime...

M: Otra cosa, para poder encontrar se debe necesitar sustituir,...los valores de *xi* y de *yi*,...

L: Sustituir los valores.

M: Sí, porque,...sí, sí tendría que hacer eso porque sino tuviera cuatro incógnitas y dos ecuaciones,...soluciones infinitas.

L: Y dijimos que lo que había que sustituir ahí es,...¿cuáles valores?

M: Ah, los puntos que me habían dado al principio.

L: Entonces, necesitarías sustituirlos y ya trabajar con la *m* y la *b*.

M: Un valor correspondiente de *x* para *y*.

L: Ok. Ya que resuelves estas ecuaciones, ¿a dónde esperas llegar?

M: ¿A dónde espero llegar?,...A encontrar,...a,...(traza un dibujo de puntos y una recta "entre ellos" en el plano xy),...¿qué voy a encontrar?,...yo quiero encontrar,...la pendiente....y la ordenada al origen,...que más se aproximen a estos datos (señala los puntos que acaba de dibujar).

L: Esos valores,...esos valores de *m* y *b*, tú los encontrarías después de lo que ya me dijiste, ¿no?

M: Ajá.

L: De resolver estas ecuaciones (señala sobre lo que ha escrito Mario) para *m* y *b*.

M: Sí.

L: Entonces ya tendrías esos valores, para *m* y *b* de la recta que se anda buscando, la recta que se menciona en el método, ¿no?

M: Sí, ya con eso, pues ya tengo los valores de *x* y *y*.

L: ¿De *x* y *y*?

M: Perdón,...para *m* y *b*.

L: Entonces, ¿qué seguiría?

M: ¿Qué seguiría?,..pues encontrar las gráficas (señala el dibujo de los puntos y la recta),...

L: ¿Para qué?

M: Pues para,... no sé,...este,...de manera visual,...tendría si esa recta pasa por los puntos. No podría determinar si esa recta es correcta o no,... si yo en el planteamiento hice lo correcto, yo creo que sí, esa es la que más se aproxima,...y este,... y los valores que yo asigne,...porque finalmente voy a tener una recta,...

L: De acuerdo,...entonces, con todo esto que me has dicho, ¿cuál es la solución del problema?

M: ¿Cuál es la solución?

L: Ajá.

M: Aquí dice que....(lee el enunciado del problema), pues según dice que debo llegar a estas dos ecuaciones (señala sobre el enunciado).

L: Entonces tu respuesta, ¿cuál es?

M: O sea la solución a...

L: Sí, tú tienes el problema, te lo plantean, ya le entendiste a dónde quieres llegar, etc., entonces, ¿tú qué respondes?, ¿cuál es tu respuesta después de todo lo que hiciste?

M: Que sí,...sí es cierto, aunque no haya seguido todo el procedimiento,...

L: Pero si tu resuelves esto que me decías (señala las ecuaciones que escribió Mario)...para *m* y *b*,...

M: Tengo que llegar a esto (señala el sistema de ecuaciones sobre el texto del problema),...y si llego a esto,...ya pues lo demás es por inercia, ya sería despejar,...

L: ¿Y para qué quieres despejar?

M: No, en este caso no,...no me interesa,...no me piden, nada más me dice que demuestre eso,...ni siquiera me dan puntos,...si quisiera resolver un problema de alguna variable física,...

L: Entonces de acuerdo a todo esto que me estás diciendo, ¿Cuál sería tu respuesta de este problema?, ¿Cómo terminarías?, ¿Qué dirías al final?

M: Ah, que esto es cierto (señala el sistema de ecuaciones en el texto del problema),...que a través de estas dos ecuaciones determino los valores de *m* y *b*, este,...que corresponden a la recta que más se asemeja,... que más se acerque.

L: Ok. Una última pregunta: ¿cuáles son los alcances de la solución?, o sea ¿tú cómo describirías para que puede servir la solución?

M: Pues, mira, lo que pasa es que hasta ahorita, que yo haya utilizado el método,...pues no, ¿cómo se podría decir?,...de una manera seria, todavía no.

L: ¿Qué significa que sea seria?

M: Bueno,...mmm,...de una manera seria para resolver un problema.

L: Un problema....¿qué sería un problema?

M: ¿Un problema?

L. Sí. ¿Qué tipo de situaciones?,…

M. Ah, ¿para qué situaciones?, uuuh,...

L: Sí.

M: Hasta donde yo sé creo que esto se usa en economía, exactamente dónde,... no sé, o en un proceso, este,...no sé,...la temperatura,...la temperatura de un,...de una caldera,...todos estos puntos me representan las diferentes temperaturas,...si yo grafico la temperatura respecto al tiempo,...este, a través de esa recta yo puedo buscar un valor nominal de la temperatura...pero no sé,…se me ocurre,…estoy suponiendo pero creo que para algo han de servir ¿no?

L: Ok. Este tipo de situaciones, ¿no las has usado con el método?

M: Analíticamente no,...no.

L: Bien, Mario, esto es todo,...¿algo más que quieras agregar?

M: Mmm,...No.

L: Bien, pues muchas gracias.

3.2.2.2 Entrevista 2

Transcripción de la grabación en video.

E: Edith (sujeto entrevistado).

V: Verenice (sujeto entrevistado).

L: Leopoldo (entrevistador).

L: Bueno, vamos a empezar. Les voy a pasar el problema para que lo lean y luego vemos lo de las preguntas.

L: ¿Listo?

E: Sí.

V: Sí, ya.

L: Entonces, la primera pregunta: ¿Cómo describirían de qué trata el problema?

V: Este...cómo encontrar...encontrar una distancia en la que se aproximen estos puntos (señala sobre el enunciado), porque estos puntos...o sea,...están dispersos, entonces quiere encontrar más o menos una recta que esté entre estos puntos.

L: ¿Entre los puntos?

V: Ajá, sí, encontrar entre esos puntos...una...

E: Pues sí, una...como una ecuación que le ayude a describir el comportamiento...como que...

L: Bien, ¿eso es lo que trata el problema?

E: Sí.

V: (asiente con la cabeza)

L: ¿Qué datos se dan para lograr eso?, o sea, ¿qué información se da?

E: Los puntos, o sea, lo que ya el científico investigó, los puntos, este, que están dispersos.

L: ¿Qué más?

V: También dan la fórmula de la distancia que hay entre, o sea,...bueno, entre los puntos, entre un punto y otro,...para encontrar...

L: ¿Entre los puntos o entre los puntos y la recta?

E: Los puntos y la recta.

V: Sí, entre los puntos y la recta.

(Silencio)

L: ¿Qué más?, ¿Se da más información?

E: Pues ya lo que se supone que se conoce, lo de la pendiente de la recta y la ordenada al origen...

L: ¿Se conoce la pendiente?

E: Bueno, no, pero se puede conocer con los puntos ¿no?

L: ¿Ese sería entonces el objetivo del problema o cómo es?

E: Pues es que la recta que queremos que se parezca al comportamiento, pues responde un poco a lo de $y = mx + b$.

L: Tiene esa forma.

E: Ajá.

V: Sí.

L: Y para hallar esa *m* y la *b* ...

V: Se utiliza,...es lo que nos,...bueno, es lo que dice aquí que se utiliza el método de los mínimos cuadrados, o sea, mediante ese método encontrar la pendiente y la ordenada de modo que minimiza,...o sea,...

E: Ajá.

L: Entonces en la información se dan los puntos, o sea x_1, y_1,…x_1, y_1, x_2, y_2, etc., se da la formulita de la distancia entre los puntos y la recta que se anda buscando...

E: Ajá.

V: Ajá, sí.

L: ¿Y nada más?

(Edith y Verenice asienten con la cabeza)

L: ¿Cómo creen ustedes, o cómo piensan, que debería ser el procedimiento para resolverlo?

E: Bueno, pues se supone que, hay que buscar que, .que esas, este...esas distancias (señala sobre el enunciado del problema) sean mínimas... o sea, para que se parezcan más a la recta...

L: ¿Y eso cómo se haría?

V: Se haría de...derivando...derivando esas distancias, o sea las distancias que hay entre los puntos a la recta, derivando se va encontrando un valor mínimo...que se aproxime a la recta....

E: Sí.

L: ¿Y porqué derivar?

V: Derivar porque....

E: Porque cuando derivas e igualas a cero...puedes obtener un mínimo o un máximo.

L: Bien, digamos que ese es un procedimiento, derivar e igualar a cero, pero lo que pregunto es ¿porqué?, ¿porqué derivar?,...¿porqué no integran o hacen otra cosa?

V: Porque integrar es...es una sumatoria...la integración es una sumatoria...

L: ¿Y la derivada?

V: La derivada es...es como reducir...a un...como a un mín...bueno no como a un mínimo, pero...

E: A algo más sencillo.

V: A algo...a una fórmula...

L: ¿Reducir?, ¿en qué sentido? Dices que integrar es una sumatoria...

E: Como juntar...

V: Ajá.

L: Y derivar... ¿qué sería?

V: Lo contrario.

L: ¿Lo contrario?

E: Sí, bueno...

L: ¿Qué sería lo contrario?

E: Restar.

L: ¿Restar? Aquí (señala el enunciado del problema) cómo relacionarían esa idea de restar... ¿cómo sería eso?

V: Restar...o sea de donde están los puntos...a la línea recta, ¿no?

L: Ok. Pero ese restar más bien es como una diferencia, o sea, no es restar de “quitar”, ¿o sí?

E: Como una diferencia, sí.

L: Porque puede haber varias interpretaciones...

E: Ajá.

L: ¿Restar en el sentido de la distancia que hay entre una cosa y otra (señala la fórmula de *d* en el enunciado), entre los puntos y la recta?

E: Sí

V: Sí.

L: No es que le quitemos algo...

E: No, no...

V: No.

L: ¿O es así?, yo sólo digo...

E: No, es una diferencia...

L: Ok. Bien, entonces, me dicen que el procedimiento consiste en derivar e igualar a cero...pero, derivar.... ¿derivar que?

V: Las distancias al cuadrado...o sea la....la...no...

E: Sí, ¿no?

V: Las distancias, sí,...estas...la de *di* (señala la ecuación en el enunciado del problema).

L: O sea, esta *d* (señala la ecuación de *di* en el enunciado) al cuadrado.

V: d al cuadrado, sí.

E: Sí, esa ecuación.

L: ¿Esa ecuación?

V: No,...no, la sumatoria (señala la expresión de la sumatoria) de todas esas distancias al cuadrado.

E: Ajá.

V: De todas las distancias que hay de cada punto que encontró el científico a la recta...

L: Entonces derivaríamos ésta (señala la expresión de la sumatoria).

E: Ajá.

V: Sí.

L: Y... ¿se vale derivar eso?

E: ¿Cómo que si se vale?...

V: Aaa...

E: Pues sí, ¿no?...

(Se hace un silencio prolongado)

L: A ver, les ayudo tantito. Ustedes me dicen que hay que derivar esta sumatoria (señala sobre el enunciado del problema), pero esta sumatoria, ¿es una función?,... ¿es una ecuación?

E: Es una...ecuación.

L: Es una ecuación...estamos hablando de la sumatoria, ¿verdad?

E: Sí.

L: ¿Porqué crees que es una ecuación?, ¿qué la hace ser ecuación?

E: No,...sería más bien una función.

L: Bueno, la misma pregunta, ¿por qué crees que es una función?

E: Porque,...va a depender de,...de,...pues de x y de y ¿no?

V: Ajá.

L: Es una función que va a depender de x y de y, dices...

E: Ajá.

V: Sí.

L: Entonces, ¿cuál es la función?

(Silencio)

L: ¿Sí me explico? Porque me dices que es la "que va a depender",... ¿de qué es lo que va a depender?

E: De las d´s, ¿no?

L: Bueno, las d´s (señala sobre el enunciado) dependen de x y y,...y de m y b, ¿no?

E: Ajá.

V: Sí, también,...hay variables.

L: Si decimos que es una funció n (señala la sumatoria en el enunciado), exactamente, como dices, debe haber variables,... ¿cómo están relacionadas esas variables?, ¿cuáles serían?

V: Una de las variables dependientes podría ser la pendiente, la m...

L: Una de las variables independientes, ¿o dependientes?

V: No, dependientes.

L: Dependiente,...la m.

V: Ajá.

E: Y la,...la b.

V: La b, sí.

L: ¿Por qué creen que son dependientes?, ¿de qué dependen?

E: De x y de y, ¿no?

L: m y b van a depender de x y de y,...¿y qué son x y y?

E: Los puntos...los datos de los puntos...

L: ¿De los puntos experimentales?

E: Sí.

(Verenice asiente)

L: Ok,... ¿tú estás de acuerdo? (pregunta a Verenice)

(Se hace silencio)

E: Bueno, todavía no tengo clara la idea pero,...o sea, va a ser una función,...que va a depender de los puntos, de x y de y...

L: De los puntos datos experimentales.

E: Ajá.

(Silencio)

L: A ver, en esta ecuación de la d (señala sobre el enunciado), que como dicen da la distancia entre los puntos y la recta que andamos buscando, este,...hay x, y, hay m y b,

V: Sí

E: Aja, sí.

L: De esas cuatro "letras", cuatro símbolos que aparecen ahí,... ¿son variables las cuatro?

V: No, las únicas que varían son y y x.

E: Ajá.

L: ¿La m y la b no varían?

V: La m y la b no porque esas serían las de la ecuación de la recta,... de la que queremos encontrar.

E: Sí, así.

L: ¿Entonces los valores "que cambian" son los de x y y?

V: Sí.

E: Sí

L: A ver,...x y y como datos, así como empieza el problema (señala el enunciado), ¿son datos conocidos?, ¿o son cosas que no sabemos qué son?

V: ¿x y y?

L: Sí.

V: No, son valores que no conocemos,...sólo sabemos que son x_1, y_1,...bueno así como nos dan el problema,… (Silencio)

L: A ver, según el enunciado del problema, como está escrito, que hay una serie de datos, x_1, x_2, etc., nos están dando a entender que este científico conoce estos valores, que tiene esa colección de datos,…

E: Ah,… ajá,…

L: No los tiene explícitamente, es cierto, pero son conocidos, si los tuviéramos, ¿serían valores constantes, datos conocidos?

E: Serían variables.

L: ¿Por qué crees que serían variables?

V: Porque si fueran constantes, si fueran,….o sea son variables porque están dispersos,…o sea no,…no,…

(Silencio)

E: No, pero ya teniendo este (señala el punto (x_i, y_i) sobre el enunciado), ya es ése ¿no?, o sea,…

L: Es un dato…

E: Ya lo tienes.

L: Ya no va a cambiar…

E: No.

V: Ah, ya,…

E: O sea, cambian porque obviamente no se comportan igual, porque si se comportaran igual sería una línea,… más fácil.

L: O sea, ¿cambian en el sentido de que no son los mismos puntos?

E: Ajá, sí.

L: Todos tienen diferentes posiciones, diferentes coordenadas…

E: Ajá.

L: En ese sentido varían los datos….

L: Pero yo pregunto en otro sentido.

E: Ah, ok, ya entendí.

L: O sea, son datos que nosotros conocemos.

E: Ajá.

V: Sí.

L: Ok. En la ecuación de la recta aparecen *x, y*, *m* y *b*, y ya dijimos que *x* y *y* son números, son datos conocidos, fijos, entonces ¿cuáles son las variables?

V: Serían *m* y *b*, pero,… (Duda)

L: Recuerden que variable o incógnita…

E: Son lo mismo…por eso entonces son las *d´s.*

L: ¿Cuáles son las incógnitas?

E: Las *d´s*.

L: Pero las *d´s* dependen de *x*, *y*, *m* y *b*,…

E: Ajá,…

L: O sea, esas *d´s* son, en cierta forma incógnitas, pero están dependiendo de las otras,…

E: Ajá.

L: ¿Ustedes conocen *m* y *b*?

E: No.

V: No.

L: ¿Entonces?

E: Son incógnitas.

L: Cuando las encontramos, al final, dejan de serlo,..

E: Sí es cuando ya sabemos,…

L: Pero en este proceso, son las incógnitas.

E. Sí.

L: Las que no son incógnitas son *x* y *y*. Son los datos numéricos.

E: Ajá.

V: Sí.

L: Ok. Entonces *m* y *b* son incógnitas.

E: Sí.

L: ¿Independientes o dependientes?

(Silencio)

L: Estamos pensando que esto es una función (señala sobre el enunciado). ¿*m* y *b* son las únicas incógnitas?, si es así, ¿cuál es independiente y cuál dependiente?, y si no es así, ¿falta alguna?, ¿cómo estarían relacionadas?, … ¿qué dicen ustedes?

E: No, sí son las únicas, no?

L: Estás de acuerdo Vere?

V: Sí.

L: ¿Y cómo están relacionadas? ¿Son independientes las dos, o dependientes, o una y una,…cómo?

E: Son las únicas,…

L: ¿Entonces?

E: Una debe depender de la otra, no?

(Silencio)

E: ¿La independiente no sería *b*?

L: ¿Porqué?,… ¿entonces *m* es la dependiente?

(Silencio)

V: La pendiente depende de la ordenada al origen,…

L: Por ejemplo, las rectas que pasan por el origen,…

E: No tienen *b*…

L: ¿Entonces?, ¿Su pendiente depende de que pasen por el origen?

V: No.

E: No,…pueden estar inclinadas como sea y pasar por cualquier punto en *b*.

(Silencio)

L: Bien. ¿Algo está raro, no? Piensen en la situación general del problema, no sólo vean a *m* y a *b* como elementos de una recta,…porque si fueran las únicas variables de la situación, a fuerza una debería depender de la otra, pero según lo que dicen parece que no,…

E: Sí, está raro, como que falta algo,…

L: Esta expresión (señala la sumatoria en el enunciado) si es que es una función,… ¿qué función es entonces?

(Silencio)

L: La pregunta es por esto: estoy considerando lo que me decían sobre que la derivan (se refiere a la sumatoria), la igualan a cero y ya veremos qué mas,…allí nos quedamos,…

E: Sí.

L: Si ustedes me dicen que la van a derivar, es porque es una función, ¿no?, ¿O uno puede derivar lo que sea?

E: No. Sólo las funciones.

V: Sí, tienen que ser función,… *m* y *b* son las variables y dependen de la distancia,…no, la distancia depende de la pendiente y de la ordenada al origen.

L: La distancia depende de esas (*m* y *b*) aquí (señala la expresión que define *di*), pero la que estamos analizando es ésta (indica la sumatoria).

V: Ajá,…

L: A ver, supongamos que ya van a derivar,… ¿qué harían,…cómo, que derivarían?

E: Pues la sumatoria.

L: ¿Cómo?

V: Así no se puede,…es una función,… ¿cómo se llama?,.. las variables están revueltas,…

L: ¿Implícita?

V: Ajá, eso.

L: ¿Por qué crees que es implícita?

V: Porque cuando es una función explícita es cuando ya te dicen que un valor es igual a este otro valor,…

L: ¿Cómo?

V: Debe haber una igualdad,…la *di* sí es explícita pero esta (la sumatoria) no tiene igualado nada,…porque si ya estuviera con igual,… es cuando ya se deriva parcialmente respecto a *x* y *y*,…

E: Es cierto, sí.

L: A ver, entonces están pensando derivar parcialmente.

E: Sí.

L: Entonces ¿qué tipo de función debe ser?, ¿se puede derivar cualquier función parcialmente?

E: No,…debe de tener dos o más,…

L: ¿Variables?

E: Sí,…

L: ¿Dependientes, independientes? Piensen en algún ejemplo particular del tipo de funciones que ustedes conocen,…

(Silencio)

L: Cuando ustedes derivan una función, por ejemplo de una variable, $y = f(x)$, respecto a qué derivan?

E: Respecto a x,…porque y es la función,…

L: Entonces, en nuestro problema,…

E: Ah, ya, aquí hay dos variables independientes,…, y la función es la que depende de esas,…

V: Es cierto…

L: ¿Y cuál es la función? Debe haber una variable dependiente, ¿no?

E: Sí

V: Claro…la dependiente es la distancia,…

L: ¿Cuál distancia?

E: Es que…

V: No…

E: Pues la variable dependiente debe ser y, no?

L: ¿Cuál y?

E: No, pero esta y (señala *yi* en el enunciado) es de los puntos,…

V: ¿Cuál? …

E: La y de la recta,…, de la que queremos encontrar,…

V: No pero esta es aparte, es sólo de la recta, no de la sumatoria.

E: Sí,…

(Silencio)

L: A ver, ustedes dijeron que iban a derivar esto (la sumatoria),…

E: Ajá.

V: Sí.

L: Háganlo, por favor. Escriban la derivada,…

E: Es u a la n,… entonces sería….(escribe)

L: Ok. Ya está. ¿Porqué escribes $\frac{\partial f}{\partial m} = ?$, ¿Qué es f ?, ¿porqué el igual?

E: ¿f? Es que así se escriben las derivadas, ¿no?...es mecánico….

L: ¿Pero porqué f?, estás derivando la sumatoria,…

E: Ah, sí, es que esa es la función,…debería estar desde acá (señala al final de la expresión de la sumatoria y escribe " $=f$ ")

L: Entonces, ¿es como ponerle nombre a la función?

E: Sí, ajá.

V: Claro, debe tener nombre porque ésa es la función, o sea,…el símbolo para decir que ésa es…

E: Ah, pues sí, es como en Mate I, la variable independiente era la x y y la función…

L: Entonces, aquí, ¿cuál es la variable dependiente?

V: La f, sí.

E: Sí, porque es la que va a depender de m y b.

L: De acuerdo, entonces, regresando a lo que habían dicho: la derivan y… ¿luego, qué más?

E: La derivamos y la igualamos a cero.

L: ¿Y porqué la igualan a cero?

E: Porque…se supone que la derivada como tal es la pendiente y bueno, entonces, si la pendiente es igual a cero, pues entonces quiere decir que hay un mínimo o un…

L: Pero porqué, ¿qué características tiene la pendiente ahí?, ¿Porqué cero?

E: Porque está así (con sus manos hace como si hubiera una superficie con un plano tangente horizontal e inmediatamente dibuja una curva con un valor mínimo y una recta tangente horizontal en él)

L: Ok. Por eso igualas a cero, porque la pendiente es nula.

E: Sí.

L: Bien,…esta función, ¿es una de éstas, planas (señala el dibujo que acaba de hacer Edith)?

V: ¿Cómo?

E: El dibujo…

L: Sí, me refiero por ejemplo a que si hicieran el dibujo,…como,… ¿qué características tendría?

(Silencio)

L: ¿Es una función de las de Mate I?, … ¿En qué sistema coordenado estaría?

E: En *xyz*, no?

L: O sea que sería un dibujo tridimensional.

E: Sí.

L: ¿Cuántas variables hay?

V: La *m* y la *b*.

E: Y la *f*.

V: Sí.

E: Sí, la *f* es como la *z*, es la que depende de las otras.

L: Ok. Entonces el dibujo no sería éste (señala el dibujo último) sino una situación parecida,..

E: Sí.

V: Claro, es como muchas parábolas así (hace con su mano derecha como un paraboloide),..¿Cómo se llama?

L: Como un paraboloide.

V: Ajá, eso.

L: Bueno, entonces me dicen que igualan a cero porque ahí ocurren cosas como estas (indica sobre el dibujo), donde hay una pendiente cero.

E: Sí.

V: Ajá.

L: ¿Y porqué están seguras de que hay algo así?, ¿no hay posibilidad de ocurra otra cosa?

E: ¿Cómo?

L: Por ejemplo, ¿no será posible que esta función (señala la sumatoria) tenga un mínimo o un máximo donde haya pendientes que no sean cero?

(Silencio)

L: ¿O siempre, cualquier función, igualándola a cero se encuentra su mínimo, o su máximo?

E: Que las pendientes no sean cero…

V: Sí puede tener otro valor la pendiente…

L: Piensen en un ejemplo.

(Silencio)

L: La pregunta es por esto: si no hay posibilidad de ocurra un valor extremo, un máximo o un mínimo, en otras situaciones que no sean donde las derivadas son cero, entonces sí tiene sentido sólo derivar e igualar a cero sin cuidar cualquier otra posibilidad.

E: Ajá…

L: Pero, ¿eso es cierto?

E: Habría que sacar los puntos críticos y…

L: ¿De dónde se obtienen los puntos críticos?

E: Al igualar a cero.

L: Bueno, entonces, el igualar a cero ¿seguro te van a salir los puntos críticos del mínimo o máximo?

E: Bueno, puede ser que no, y por eso…es que sí me imagino cómo podría ser pero no puedo explicar así como que…

(Silencio)

L: A ver, dinos lo que estás pensando, no importa cómo…

E: ¿No es eso de los picos? (hace un dibujo de una gráfica con "pico" hacia abajo)

L: A ver cómo es eso de los picos…

E: Pues que eso no es un mínimo.

L: ¿No es un mínimo?

(Silencio)

L: ¿Qué es un mínimo?

V: Pues es el valor,…el mínimo al que llega esa función,.. esa…

L: Por ejemplo si vemos esta función (señala el dibujo último) ese pico, como dicen, ¿observan ahí un valor mínimo, o no?

E: ¿Aquí? (señala el pico sobre la gráfica)

E: Lo que pasa es que…que sí, pero la pendiente no es cero.

L: Eso es precisamente lo que estoy preguntando,…o sea ¿hay mínimo o no?

E: Sí.

V: Sí, si hay.

E: Pero la pendiente ahí no es cero, entonces…

L: La pendiente no es cero…

E: No.

L: ¿Porqué?

E: Porque….

(Silencio)

L: ¿Tú que dices, Vere?, ¿Estás de acuerdo en que no es cero la pendiente?

V: Sí, no es…

L: ¿Porqué?

V: Porque tiene muchas (dibuja rectas con diversas pendientes sobre el pico),…puede haber muchas rectas…

L: O sea que las pendientes ahí no son cero.

E: No, no es como aquí (señala el dibujo de la curva suave con su recta tangente horizontal)

L: De acuerdo, entonces sí puede haber otras posibilidades de máximos o mínimos además de aquellas en las que derivar e igualar a cero es suficiente…

E: Sí.

V: Sí hay.

L: Bien,…la función que estamos tratando (señala la sumatoria), ¿es de características tales que no le puede ocurrir eso? (señala la gráfica con el pico).

E: No, porque….bueno, no sé,….porque al…porque al derivarla ya la conviertes en,…no espérame…

(Silencio)

L: Piensen en la estructura que tiene (señala la función de la sumatoria).

(Silencio)

V: Yo creo que no porque está elevada al cuadrado y debería tener la forma como de un paraboloide,…o sea, que está así como un tazón…y no podría ser como pico…

L: Por que está al cuadrado…

V: Sí,…

L: Las cosas que están al cuadrado, ecuaciones funciones en este caso, ¿no pueden tener picos?

V: Ajá, sí.

L: ¿Podrías explicar, argumentar más sobre eso?

(Silencio)

L: ¿Qué tipo de función es esa? (indica la sumatoria). Con tipo me refiero a sí es una función polinomial, es una función racional, es una función trigonométrica… ¿De qué tipo es esa función?

L: ¿Tiene forma de división?

E: No.

L: ¿Entonces?, ¿De qué tipo es?

E. Es polinomial ¿no?

V: Sí es polinomial…

L:¿Cómo sería el mostrar que es polinomial?...Lo que habías dicho del cuadrado (se refiere a Verenice).

E: Pues sería elevándolo al cuadrado.

L: ¿Cómo?, ¿Desarrollas?

E: Sí.

L: ¿Qué sería? Un trinomio….

E: Sí, trinomio al cuadrado.

L: Esa es una expresión polinomial.

E: Sí.

V: Sí.

L: Las funciones polinomiales, entonces, ¿no pueden tener picos?

(Silencio)

E: Es que aquí sí le influye el cuadrado, ¿no?

L: Sí, el hecho de que esté al cuadrado y que sea un trinomio al cuadrado, implica que es una función polinomial, que se puede "desarrollar", y entonces se tendría una expresión polinómica con *m, b, x* y *y*.

E: Ajá. Por eso no le pasa eso, o sea, no tiene picos porque las de forma de polinomios no tienen…

L: ¿Por qué?, ¿Cómo explicas eso?

(Silencio)

L: A ver, si derivamos esta función (*f(m,b)*), ¿qué tipo de función queda?, ¿Sigue quedando una polinomial?, es decir, ¿la derivada también tiene forma de polinomio?

E: Sí.

V: Sí, debe quedar otra polinomial.

L: Bueno, entonces, las funciones polinomiales, al igualarlas a cero, nos dan respuestas,…

E: Sí.

V: Ajá, siempre.

E: Puede ser que sean raíces negativas, pero sí hay respuesta,….cuando no se vale es cuando queda dividido entre cero, pero esta no es división (señala la función de la sumatoria).

V: Sí, es por eso, siempre se puede resolver un polinomio.

E: Claro, por eso no puede tener picos, ahí no se podría resolver,…

L: Bien, entonces,….pasemos a otra cosa, ¿Cómo explicarían qué significa minimizar?

E: ¿Minimizar?,….pues es como reducir,...

L: Reducir,…. ¿qué?

V: En este caso, la función.

L: Reducir la función ¿a qué o cómo?

(Silencio)

L: La pregunta es por lo siguiente: aquí dice (señala en el enunciado del problema) "*El método de los mínimos cuadrados determina a m y a b, de modo que minimiza* $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ *que es la suma de los cuadrados de dichas desviaciones*". Entonces, en este sentido, ¿qué quiere decir minimizar?

V: Es minimizar las distancias de estos puntos (señala sobre el enunciado),…

E: Sí, todas las distancias,….es la sumatoria la que se minimiza.

L: Ok. Una vez que ya derivaron e igualaron a cero, ¿qué seguiría?

E: Pues encontrar los,….

V: Los puntos críticos…

L: ¿Cómo, que harían?

E: Igualas a cero y despejas,…, pues,…, m y b.

L: m y b, ¿porqué m y b?

E: Porque son las variables.

L: ¿Y qué significa despejarlas?,….porque son dos derivadas.

V: Sí,…se despeja la pendiente (m) de una y b de la otra,…

E: No pero, están revueltas,…hay que despejarlas para que ya queden solas,…

(Silencio)

E: Ah sí, es un sistema de ecuaciones. Entonces hay que resolverlo.

L: Ok. Supongamos que ya lo hicimos. Ya resolvimos el sistema. ¿Qué seguiría?

V: Bueno, ya tenemos la pendiente,…y la ordenada al origen y entonces ya tenemos la recta que se aproxime entre esos puntos,… que esté mas cercana a los puntos.

L: Ok. ¿Y qué más? Estamos resolviendo el problema…

E: Ajá,…pues ya encontramos la recta, pero,…sí, ... ahora sí sería la función que estábamos buscando, no?

L: Ah,…no sé. A ver, ¿de qué se trata el problema?

E: De encontrar, de encontrar la,…

(Leen el enunciado)

V: No, es que,…no, tenemos que demostrar esto (señala el sistema de ecuaciones en el enunciado). Entonces tenemos que hallar todas las sumatorias de todas las *x* y *y*,…

E: Sí, hay dos ecuaciones,…

(Silencio)

L: ¿Qué se pide en el problema?

V: Pues a estas dos ecuaciones,…comprobar que estas dos son las que,…para encontrar esta recta (señala sobre el enunciado). Se pide encontrar m y b,…

L: ¿Encontrar m y b?, ¿Dónde dice? (Se refiere al enunciado).

V: Pero por ése método (se refiere a los mínimos cuadrados),…por ese método determinar *m* y *b*,…

L: A ver, Edith, ¿tú estas de acuerdo en que ahí se pide determinar *m* y *b*?

E: No, dice que el método hace eso, que determina *m* y *b*,….pero,…

L: A ver, según lo que hemos estado platicando, ya tenemos el procedimiento para determinar *m* y *b*.

E: Sí.

V: Ajá.

L: Entonces, ¿ya terminamos el problema, ya lo resolvimos?

V: No.

L: ¿Qué faltaría?

E: Pues sustituir aquí, no? (señala el sistema de ecuaciones en el enunciado).

L: ¿Sustituir qué?

E: Pues *m* y *b*.

L: A ver, pero si sustituyes *m* y *b*, una vez determinadas, ¿Para qué?

E: Sí, no, ya tendría puros números,…

L: A ver, volvemos a la pregunta ¿Qué se pide en el problema?

(leen el enunciado)

E: Dice que se muestre que con este método se obtiene la recta que más se parece,…cuando se cumple esto (señala el sistema de ecuaciones en el enunciado) como quién dice,…

(Silencio)

E: Ah pues no queda,…el chiste es nada más que esto sea igual,…o sea que se cumplan estas dos fórmulas (el sistema de ecuaciones en el enunciado), si se cumplen, entonces la recta que obtuvimos con esa *b* y con esa *m*,…quiere decir que sí se,.. que si este, que sí es la recta que más se parece, la que andamos buscando.

L: Entonces, de lo que hemos dicho, ¿ya acabamos?

V: Ya.

L: ¿Cuál es la respuesta? ¿Qué decimos como respuesta al problema?

E: La respuesta,…

V: Con la *m* y la ordenada al origen, al sustituir en estas (señala el sistema de ecuaciones en el enunciado),…no,…no…

L: A ver, ¿para qué son estas ecuaciones?, ¿qué dice en el problema?

V: Son las derivadas de,…una con respecto a *m* y otra con respecto a *b*. Después de igualarlas a cero.

L: Bueno, entonces, ¿cuál es la respuesta del problema?

(Silencio)

L: ¿Cómo terminarían ustedes?,…La respuesta debe estar en función de lo que se pide, ¿no?

E: Sí.

(Vuelven a leer el enunciado)

L: ¿Qué es lo que les piden mostrar en el problema?

E: Ah, sólo se pide mostrar que con el método se llega a estas ecuaciones, ¡de veras, no se pide hallar *m* y *b*!

L: Entonces, ¿Cómo contestan al problema?

E: Entonces decimos nada más que con este método sí se determinan *m* y *b* con estas ecuaciones, porque son las que salen de derivar e igualar a cero acá (señala sobre lo que estaban escribiendo).

L: Bien, entonces ya tenemos la solución. Una última pregunta, ¿Qué alcances puede tener la solución de este problema en cuanto la utilidad que puede tener para ustedes?

V: Bueno,…es que sólo se deriva y se deja lo que queda de igualar a cero,…no sé,…yo creo que podría tener más utilidad si se resuelve completo y se usa para aplicarlo,…pues no sé, a algo práctico,…o algo así,…o si alguien va a ser científico…

E: Sí, yo también creo eso porque el problema así como está sólo nos están diciendo cómo funciona el método este de,… ¿cómo…(busca en el enunciado del problema).

L: Mínimos cuadrados.

E: Ajá, de mínimos cuadrados,…no nos dice nada más, es sólo la forma matemática,…pero creo que nos podría servir si un día tenemos unos datos así (señala sobre los supuestos datos experimentales en el problema).

L: Ok. ¿Algo más que quieran agregar?

E: No.

V: No, tampoco.

L: Bien, entonces aquí terminamos, esto es todo lo que quería preguntarles sobre el problema. Y pues, muchas gracias.

3.2.3 Análisis de las entrevistas

Como ya se ha señalado, el objetivo de estas entrevistas es complementar el estudio preliminar previo y profundizar sobre las funciones cognitivas que aparecen y explorar sus causas. Entonces, es un análisis de carácter cualitativo donde se busca caracterizar las funciones cognitivas de los estudiantes en su intento de resolución de un problema no contextualizado en la ingeniería.

Dado que el problema utilizado en las entrevistas es el mismo que se empleó en la experiencia en el aula, el mapa cognitivo de referencia para el análisis, es también el mismo, a saber:

Contenido: derivada parcial a nivel operativo.

Modalidad: verbal, simbólica y gráfica.

Operaciones: analogías, comparaciones y relaciones.

Fases: en la *fase de entrada*, se requiere que el estudiante perciba que en el enunciado se describe en qué consiste la idea básica del método de mínimos cuadrados y entonces lo que se pide es sólo minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ para llegar a las ecuaciones propuestas. En la *fase de elaboración*, primero es necesario que los alumnos, una vez que tienen claro lo que se pide en el enunciado, sean capaces de acotar lo que se debe realizar a nivel operativo (por ejemplo, sustituir $d_i = y_i - (mx_i + b)$ en $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ para enseguida derivar parcialmente respecto a las variables m y b) y, en su caso, averiguar lo que sea necesario. Deben tener la capacidad de recordar sus conocimientos sobre sumatorias e identificar que en la información aparece una función de dos variables. Después, se debe recurrir a los conocimientos previos sobre la forma de determinar un mínimo y emplear la simbología adecuada en el proceso de diferenciación. Finalmente, en la *fase de salida*, los estudiantes sólo deben verificar las ecuaciones que se proponen en el propio enunciado y externarlo verbalmente.

Nivel de complejidad: medio-alto (los conocimientos y operaciones requeridos no requieren por completo de altos niveles de abstracción).

Nivel de abstracción: medio-alto (intervienen varias nociones y símbolos de matemáticas avanzadas, tanto del curso en cuestión como de otros precedentes).

Nivel de eficiencia: medio. No es un nivel alto porque es considerable el grado de automatización requerido.

Se debe recordar que por la naturaleza del estudio que se realiza, el análisis se basa fundamentalmente en el elemento del mapa cognitivo correspondiente a las *fases* del acto mental, es decir a las fases en que se desarrolla, en este caso, la resolución del problema.

3.2.3.1 Análisis de la entrevista 1

Realizada a Mario (el sujeto), estudiante de tercer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas. 19 años de edad.

Fase de entrada

De acuerdo a las respuestas del sujeto ante la pregunta ¿de qué trata el problema?, se puede observar que tiene algunas dificultades con la percepción del problema que se le plantea además de que no hace explícito lo que se pide en él. Aparece entonces una *percepción borrosa*, disfunción asociada a la función cognitiva de *percepción clara de una situación de aprendizaje.* La estructura del problema y la cantidad de información provocan que el sujeto hable tanto de lo que trata el problema, como de parte de la información que se ofrece. El sujeto comenta:

“¿De qué se trata?...se trata...de aproximar una recta a una serie de..de puntos aleatorios y esta recta de...implica una característica de que se debe acercar lo más posible a ellos...aproximar”.

Se observa que lo que está diciendo corresponde a la información que se ofrece en el enunciado sobre el método de mínimos cuadrados, no sobre el problema mismo. Y prosigue,

“bueno, pero dentro del problema nos pide que pues, demostremos que esa recta se obtiene a partir de estas dos ecuaciones (señala el sistema de ecuaciones en el enunciado del problema), entre otras cosas,...que la distancia del punto a la recta es ésta,...y que...está la sumatoria de las distancias de los puntos a la recta, al cuadrado”.

El sujeto no tiene completamente claro el problema, de hecho no realiza la *definición del problema*, función cognitiva básica en el tránsito entre la fase de entrada y la de elaboración. Mezcla la información sobre lo que se pide y lo que respecta al propio método de mínimos cuadrados. Entiende lo que se debe (pide) mostrar en el enunciado pero lo concibe como *parte del* problema no como *el* problema. En otras palabras, el sujeto comprende en forma global la situación que se le presenta, pero no delimita con precisión el problema específico en términos de la meta a la que se quiere llegar.

Su respuesta a la pregunta ¿qué información se ofrece?, indica que el sujeto identifica completamente todos los datos proporcionados, realiza una adecuada *organización de la información* y hace una *exploración sistemática* inicial de la situación. No se observan dificultades en este aspecto. Sin embargo, se puede ver que su imprecisión inicial sobre el problema, en la fase de entrada, afecta su interpretación como “dato” sobre el sistema de ecuaciones al que se pide llegar en el enunciado. Su respuesta fue:

“La distancia de cualquier punto a la recta...es un primer dato, el segundo,..dice (lee el enunciado del problema) usando el método de los mínimos cuadrados, dice que...este método determina el valor de la pendiente y de la...de la ordenada al origen, este,

característicos de la...de la recta que estamos buscando y que la sumatoria de las distancias de cada uno de los puntos a la recta al cuadrado,...que hay que minimizar la sumatoria de esas distancias al cuadrado,...y qué más sería?...como datos, creo que son esos, aparte que te dan...te dan las rectas o te dan las ecuaciones a las que tienes que llegar,...y la gráfica".

Fase de elaboración

A la pregunta expresa: *¿me puedes describir por favor, cómo crees o cómo piensas que debería ser el procedimiento para resolver el problema?* El sujeto contesta:

"hay cosas que no sé,... por ejemplo, dice que el método de los mínimos cuadrados minimiza la suma de todas estas distancias al cuadrado, ¿porqué es al cuadrado?, no lo sé, pero así dice que es el método y bueno, lo voy a obedecer. Este,...dice que la sumatoria de esas dist,.... este,...que al analizar esas distancias al cuadrado, este, que es como se determinan los valores de m y b. Dice que la distancia de cada punto a la recta está dado por,...por esta ecuación (se refiere a $d_i = y_i - (mx_i + b)$). Al empezar, esta ecuación, sería cosa de sustituir y de ahí,...que sea un mínimo, eso sólo viendo la ecuación,...yo diría que...sólo graficándola, dándole valores a las incógnitas m y b. Pero si ahí mismo me dice que se minimiza, este,...que debe dar un mínimo, cuando yo derive esta ecuación de la distancia del i-ésimo punto a la recta,...y por el método, derivando parcialmente, igualando a cero y encontrando puntos críticos. De alguna manera se quiere verificar que se puede,...se quiere saber que es un mínimo, se puede sust...de alguna manera,..."

En este punto, aparentemente, el sujeto tiene la idea general del procedimiento a seguir, aparece la función cognitiva de *planificación de la conducta*. Sin embargo, la forma de presentación de la información sobre el método de mínimos cuadrados le crea conflictos. Se puede inferir que piensa que es incompleta la explicación que se da sobre el método en el enunciado.

Por otra parte, la descripción que ofrece se limita al uso de un procedimiento para minimizar, pero pierde de vista lo que se pide en el problema. El centrar su atención en el proceso a seguir, le provoca conflicto con el objetivo. La *percepción borrosa* inicial del problema (en la fase de entrada) se hace presente debido al esquema que el sujeto tiene respecto al método que describe, es decir, la idea de que el método para minimizar no termina hasta determinar puntos críticos y clasificarlos, actividad que no es necesaria en el problema. Todo esto tiene como consecuencia que la función cognitiva de *percepción y definición de un problema* permanezca afectada. El sujeto, en este momento no tiene claro a dónde se quiere llegar, es decir, ha perdido de vista la meta.

Por otra parte, el sujeto parece comprender la idea del método de mínimos cuadrados pero confunde la expresión a minimizar, él dice,

"... derivar la ecuación, igualarla a cero,...en términos analíticos,...
L: Bueno, a ver, entonces, se trataría de derivar la ecuación, ¿no?, la ecuación...¿cuál ecuación?, o sea ¿cuál es la que vamos a tratar,...la que vamos a tratar de minimizar?
M: La de las distancias al cuadrado.
L: Ok. La de distancias al cuadrado. Que es una ecuación,...bueno,...primero, ¿es una ecuación esa?
M: Pues, una función,...podría ser.
L: ¿Es una función?, ¿cómo la,..
M: Pues sí, sí,...
L: Así como está...
M: Sí, sí,...tiene un igual ahí (señala la ecuación de la d),... pues sí es una ecuación.
L: No, pero me refiero a la de las sumas, no a la de la "d".
M: Mmm,...no indep...independientemente de la sumatoria, no; d cuadrada sí,...
L: Es que me dices que la que vas a derivar es la de la sumatoria, ¿no?, ¿o la d?
M: No, sí, la sumatoria.
L: La que hay que minimizar es la sumatoria.
M: Sí.

Es probable que esta confusión sea provocada por la evocación en la mente del sujeto del tipo de expresiones que se pueden derivar, es decir, ecuaciones, "cosas igualadas". El sujeto está utilizando la función cognitiva de *conducta comparativa.* Una expresión simbólica sin un signo de igual (la sumatoria del enunciado) es una expresión extraña, que no tiene significado asociado en sus esquemas mentales presentes. Por eso es que su atención se desvía hacia la expresión simbólica que representa una ecuación. El proceso cognitivo del sujeto implica una comparación (operación mental) entre la información del problema y sus esquemas sobre el tipo de expresiones a las que es aplicable el procedimiento para calcular un mínimo (según su perspectiva), y entra en conflicto.

Este conflicto permanece aún al hacerse una pregunta explícita sobre la naturaleza de la expresión con sumatoria:

L: Ok. Me refiero a eso, la pregunta es, ¿esa sumatoria es una función, es una ecuación, o qué es?,...así como está ahí.
M: Así como está ahí...
L: Claro, a sabiendas de que la d es esa (señala la ecuación de la d).
M: Pues sí, es una ecuación.
L: A ver, ¿porqué crees que es una ecuación?
M: Porque d cuadrada es una ecuación,...y la sumatoria de esa ecuación...me quedaría una serie de ecuación.

El sujeto visualiza la expresión $\sum_{I=1}^{n} d_i$ como una ecuación debido a una concepción errónea de la sustitución, en sus propias palabras: *...y la sumatoria de esa ecuación...* Como si la sustitución fuera no sólo de la equivalencia de d_i, sino de la ecuación misma. Esto implica un *pensamiento hipotético* respecto a lo que resulta al relacionar la expresión para d_i con la de la sumatoria, en este caso, el sujeto realiza transferencia de propiedades de una expresión a otra. Por otra parte, de su frase *"…me quedaría una serie de ecuación",* se puede inferir que el sujeto está interpretando la expresión $\sum_{I=1}^{n} d_i$ como una serie (*función cognitiva de conducta comparativa*).

Hasta el momento en que se le pide realizar la sustitución en el papel, advierte que no hay un signo de igual, y que entonces la expresión de sumatoria no es una ecuación, argumenta que *"para tener una ecuación necesito un igual, ¿no?"*. Recurriendo nuevamente a su concepción previa sobre lo que es una ecuación.

Por otra parte, respecto al concepto de función, el sujeto explica que esa expresión (con sumatoria) no representa una función, esto con base en argumentos sobre su origen, pero no lo relaciona con su noción de ecuación (no aparece aquí una *conducta comparativa*) y pierde de vista, además, el momento en que se encuentra respecto al proceso de resolución del problema que él mismo consideró al principio, como podemos ver en esta parte de la entrevista:

L: Ok. Entonces no sería una ecuación. ¿Crees que eso represente una función?
M: ¿La sumatoria de (señala la sumatoria)...?
L: Esa, esa misma expresión que tienes (señala la sumatoria).
M: No.
L: ¿Y porqué?, ¿Porqué crees que no representa una función?
M: Si yo lo veo así,...esto,...viene siendo la distancia de un punto, cualquier punto, a la recta que estamos buscando,...que sea al cuadrado, pues no,...deja de ser lineal, cambian las cosas, vamos a tener otra cosa,...alguna otra función,...no sé,… pero como yo sumo todas estas distancias al cuadrado,...no tiene porqué darme una función.
L: Ok. Bueno, entonces, hace rato me dijiste que la idea del método, así como lo entiendes de acuerdo a lo que está planteado ahí (señala el enunciado del problema), es sustituir, eso que tú hiciste ahí, la equivalencia de las d`s, ¿verdad?, de las diferencias, en la sumatoria que se propone en el método. Eso es lo que tienes ahorita. Y luego me dices que esa sumatoria es la que hay que trabajar, que esa es la que hay que derivar, igualar a cero,

para ver dónde tiene sus puntos críticos. Qué, según me dijiste también, pues van a depender de las variables ¿no?, que serían la m y la b.

M: Sí.

L: Ok. ¿Se vale derivar algo que no es función?

M: Mmm,...muy buena pregunta,...¿se vale derivar...?, no, espérame,...

Es muy probable que el sujeto, sin la intervención del entrevistador, hubiera realizado el proceso que tenía en mente sin siquiera preguntarse si la expresión en cuestión representaba o no una función. Es decir, hubiera derivado parcialmente la expresión $\sum_{i=1}^{m}[y_i - (mx_i + b)]^2$, igualado a cero los resultados y resuelto para *m* y *b*, tal como sucedió en la experiencia en el aula ya descrita en la sección anterior de este capítulo. No aparece reflexión alguna sobre la naturaleza de las expresiones que se están manipulando, sólo se aplican los "pasos" que se deben realizar para determinar un valor extremo. La utilización de métodos y procesos algorítmicos por encima de la comprensión de conceptos se hace presente.

En este momento el sujeto se da cuenta de que la expresión en cuestión debería considerarse como una función, recupera su idea inicial de que *m* y *b* son variables, relaciona su noción de función con la notación simbólica que él conoce (*conducta comparativa*), $z = f(x, y)$, y advierte que sólo necesita igualar la expresión con *z*. Como darle un nombre a la función. Este acto lo acepta en forma natural, no le crea conflicto.

Enseguida se le cuestiona sobre lo que sigue para resolver el problema:

L: Entonces, de acuerdo a lo que se plantea en el problema, ¿qué seguiría?

M: Ya ahí pues entro a lo analítico. Lo que seguiría sería derivar esta función, parcialmente porque tengo dos variables independientes, igualar a cero, encontrar puntos críticos, etc.

El sujeto sigue sin tener una percepción clara de la meta, vuelve a repetir el procedimiento que conoce. En sus esquemas mentales predomina ese procedimiento como lo importante en el problema, no reflexiona sobre lo que falta en función de lo que se plantea en el enunciado. Se puede interpretar esta situación como una consecuencia de que el estudiante ha aprendido que dicho procedimiento se aplica siempre hasta determinar y clasificar los puntos críticos, que no se puede interrumpir antes.

Por otra parte, el sujeto considera que la función que está tratando tiene un mínimo porque así se señala en el enunciado del problema, sin tener ninguna otra opción para explicarlo. Para él es más importante considerar las aseveraciones que se hacen en tal enunciado, que el tener claridad sobre la naturaleza de la función. De hecho, no es algo que el sujeto considere necesario. A la pregunta *¿Tú crees que siempre tendría un mínimo?,* él responde: *Yo creo que sí,..sí porque, este,...si te dice el problema "minimiza esto", quiere decir que siempre habrá un mínimo, y nada más uno, sino al método,...o no sé,...me darían algún punto para el cual sería el mínimo de esta función,... no sé,...otra cosa,...*

Esta es una situación provocada por la propia presentación del problema. En la explicación que se da sobre el método de mínimos cuadrados se asume que el estudiante no tiene dificultades con los conocimientos involucrados. Esta situación predispone la actitud y las acciones del sujeto.

El proceso de derivación no le causa problema. Realiza la derivada de la expresión simbólicamente en forma correcta aunque se basa en sus conocimientos previos sobre series (conocimientos estudiados en el curso antecedente de cálculo, Matemáticas para Ingeniería II), lo cual implica, nuevamente, una *conducta comparativa* respecto a sus conocimientos previos. Textualmente dice:

M: Bueno, aquí derivé esto (señala la expresión dentro de la sumatoria) pero me faltarían las sumatorias,...pero es cosa de agregarlas,...así,..., (escribe los símbolos de sumatoria en las derivadas que obtuvo).

L: O sea, las propiedades de la sumatoria te permiten hacer esa derivada directamente...

M: Sí. Dejo la sumatoria de la serie y derivo lo de adentro...y derivar....De aquí lo que seguiría es igualar a cero...

Continuando, cuando se le pregunta porqué igualar a cero, contesta:

M: ¿Porqué?, porque en este caso es un mínimo, pero independientemente de eso, de si haya un máximo o un mínimo relativo o absoluto, lo que sea, ahí siempre va a haber un plano tangente, y habrá un plano tangente porque está en tres dimensiones y un plano tangente... que va a tener una pendiente igual a cero...
L: Ok. ¿Y eso ocurre siempre?
M: ¿Qué cosa exactamente?
L: Sí, que en un máximo o en un mínimo, indistintamente, va a haber un plano tangente con pendiente cero.
M: Ah, claro.
L: No hay posibilidad de que ocurra otra cosa,...
M: Que en un máximo o un mínimo,...no siempre la pendiente,..o hay un plano,...
L: Que el plano tangente no tenga pendiente cero,...u otra cosa rara,...no sé,.
M: No.
L: ¿No es posible?
M: Hasta donde yo he visto, no.

El sujeto está recuperando su conocimiento interiorizado respecto a la concepción de función de dos variables, en particular sobre las posibles formas gráficas de superficies, y no hay en sus esquemas, al menos en un status relevante que le permita recordar en ese momento, formas de superficies en donde ocurra que en algún punto no exista un plano tangente con pendiente cero pero que sí corresponda a un valor extremo. Esto provoca que no considere necesario analizar el tipo de función que está tratando en el problema.

Fase de salida

Se insiste en lo que falta por realizar en la resolución del problema:

L: Ok,...bien, entonces, -esto ya no lo hagas- pero, ya derivaste, ya igualaste a cero, ¿qué seguiría?
M: Buscar puntos críticos.
L: ¿Cómo se encuentran los puntos críticos?
M: Este,...despejando. Son los valores para b y m.

La *percepción borrosa* respecto a la meta, permanece, el sujeto no se percata de que lo que pretende hacer es innecesario de acuerdo a lo que se pide en el problema.

Más adelante, cuestionándosele sobre a dónde quiere llegar, dice:

¿A dónde espero llegar?,...A encontrar,...a,...(traza un dibujo de puntos y una recta "entre ellos" en el plano xy),...¿qué voy a encontrar?,...yo quiero encontrar,...la pendiente....y la ordenada al origen,...que más se aproximen a estos datos (señala los puntos que acaba de dibujar).

Todo esto tiene como consecuencia que no sea capaz de realizar una *comunicación explícita de la respuesta* y por esta razón, carece de *control* sobre la misma. Estas son funciones cognitivas que se ven afectadas en la fase de salida, como se puede observar en la siguiente fracción de la entrevista:

L: De acuerdo,...entonces, con todo esto que me has dicho, ¿cuál es la solución del problema?
M: ¿Cuál es la solución?
L: Ajá.

M: Aquí dice que....(lee el enunciado del problema), pues según dice que debo llegar a estas dos ecuaciones (señala sobre el enunciado).

L: Entonces tu respuesta, ¿cuál es?

M: O sea la solución a...

L: Sí, tú tienes el problema, te lo plantean, ya realizaste un proceso de resolución, etc., entonces, ¿tú qué respondes?, ¿cuál es tu respuesta después de todo lo que hiciste?

M: Que sí,...sí es cierto, aunque no haya seguido todo el procedimiento,...no sé,…

L: Pero si tu resuelves esto que me decías (señala las ecuaciones que escribió Mario)...para m *y* b*,...*

M: Tengo que llegar a esto (señala el sistema de ecuaciones sobre el texto del problema),...y si llego a esto,...ya pues lo demás es por inercia, ya sería despejar,...

L: ¿Y para qué quieres despejar?

M: No, en este caso no,...no me interesa,...no me piden, nada más me dice que demuestre eso,...ni siquiera me dan puntos,...si quisiera resolver un problema de alguna variable física,...

L: Entonces de acuerdo a todo esto que me estás diciendo, ¿Cuál sería tu respuesta de este problema?, ¿Cómo terminarías?, ¿Qué dirías al final?

M: Ah, que esto es cierto (señala el sistema de ecuaciones en el texto del problema),...que a través de estas dos ecuaciones determino los valores de m y b, este,...que corresponden a la recta que más se asemeja,... que más se acerque.

Finalmente, cuando se le pregunta sobre la utilidad que podrían tener estos conocimientos, el sujeto contesta:

M: Pues, mira, lo que pasa es que hasta ahorita, que yo haya utilizado el método,...pues no, ¿cómo se podría decir?,...de una manera seria, todavía no.

L: ¿Qué significa que sea seria?

M: Bueno,...mmm,...de una manera seria para resolver un problema.

L: Un problema....¿qué sería un problema?

M: ¿Un problema?

L. Sí. ¿Qué tipo de situaciones?,…

M. Ah, ¿para qué situaciones?, uuuh,...

L: Sí.

M: Hasta donde yo sé creo que esto se usa en economía, exactamente dónde,... no sé, o en un proceso, este,...no sé,...la temperatura,...la temperatura de un,...de una caldera,...todos estos puntos me representan las diferentes temperaturas,...si yo grafico la temperatura respecto al tiempo,...este, a través de esa recta yo puedo buscar un valor nominal de la temperatura...pero no sé,…se me ocurre,…estoy suponiendo, pero creo que para algo han de servir ¿no?

Aunque esta parte de la entrevista tiene como objetivo indagar sobre aspectos que no entran en la teoría cognitiva de Feuerstein, se puede observar un hecho relevante en esta investigación: la concepción que un estudiante tiene respecto a la importancia de los contenidos matemáticos que estudia. Para este estudiante, tales contenidos no se abordan *con seriedad* en los cursos comunes de cálculo porque no se utilizan en la resolución de problemas. Se puede interpretar, desde la perspectiva de este estudiante, que no es serio (o no tiene sentido) estudiar contenidos matemáticos si no se aplican. Esta observación es importante porque refleja el tipo de creencias que tienen los alumnos respecto al estudio de contenidos matemáticos en su formación profesional y es congruente con las argumentaciones ofrecidas en la introducción y justificación de este reporte.

3.2.3.2 Análisis de la entrevista 2

Realizada a Verenice (sujeto 1) y Edith (sujeto 2), ambas estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas, de 19 y 20 años de edad, respectivamente.

<u>Fase de entrada</u>

En general, se observan las mismas dificultades que en la entrevista 1 respecto a la función cognitiva de *percepción clara*. Las estudiantes entrevistadas otorgan prioridad el proceso para determinar un valor extremo sobre la comprensión de ideas y conceptos y entonces aparece una *percepción borrosa* de lo que trata en forma global el problema. Esta situación prevalece hasta el final de la entrevista.

Además, se aprecia una disfunción sobre la *organización de la información*, la cual es provocada, se infiere, tanto por la estructura del enunciado y la cantidad de información, como por el hecho de que no es clara para las estudiantes la explicación que se da sobre el método de mínimos cuadrados, como se puede observar en la siguiente parte de la entrevista:

L: ¿Qué datos se dan para lograr eso?, o sea, ¿qué información se da?
E: Los puntos, o sea, lo que ya el científico investigó, los puntos, este, que están dispersos.
L: ¿Qué más?
V: También dan la fórmula de la distancia que hay entre, o sea,...bueno, entre los puntos, entre un punto y otro,...para encontrar...
L: ¿Entre los puntos o entre los puntos y la recta?
E: Los puntos y la recta.
V: Sí, entre los puntos y la recta.
(silencio)
L: ¿Qué más?, ¿Se da más información?
E: Pues ya lo que se supone que se conoce, lo de la pendiente de la recta y la ordenada al origen...
L: ¿Se conoce la pendiente?
E: Bueno, no, pero se puede conocer con los puntos ¿no?
L: ¿Ese sería entonces el objetivo del problema o cómo es?
E: Pues es que la recta que queremos que se parezca al comportamiento, pues responde un poco a lo de $y = mx + b$.
L: Tiene esa forma.
E: Ajá.
V: Sí.
L: Y para hallar esa m y la b ...

V: Se utiliza,...es lo que nos,...bueno, es lo que dice aquí que se utiliza el método de los mínimos cuadrados, o sea, mediante ese método encontrar la pendiente y la ordenada de modo que minimiza,...o sea,...

E: Ajá.

L: Entonces en la información se dan los puntos, o sea x_i, y_i,...x_1, y_1, x_2, y_2, etc., se da la formulita de la distancia entre los puntos y la recta que se anda buscando...

E: Ajá.

V: Ajá, sí.

L: ¿Y nada más?

(Edith y Verenice asienten con la cabeza)

Se observa además que las estudiantes no realizan una *exploración sistemática de la información*, consideran las expresiones simbólicas sólo como datos, sin entender su origen y significado con claridad.

Fase de elaboración

Las situaciones conflictivas observadas en la fase de entrada, prevalecen aún a preguntas explícitas sobre la fase de elaboración. Cuando se les cuestiona sobre el procedimiento para resolver el problema, contestan todavía reflexionando sobre la información que se da en el enunciado:

L: ¿Cómo creen ustedes, o cómo piensan, que debería ser el procedimiento para resolverlo?

E: Bueno, pues se supone que, hay que buscar que, .que esas, este...esas distancias (señala sobre el enunciado del problema) sean mínimas... o sea, para que se parezcan más a la recta...

Esto tiene como consecuencia que no se *perciba y defina con precisión un problema*. Nuevamente, como en la entrevista 1, las argumentaciones de las estudiantes giran en torno al procedimiento que conocen para determinar un valor extremo, derivar, igualar a cero y resolver. A pregunta explícita sobre ¿por qué derivar?, ellas responden:

V: Derivar porque....
E: Porque cuando derivas e igualas a cero...puedes obtener un mínimo o un máximo.

Continuando,

L: Bien, digamos que ese es un procedimiento, derivar e igualar a cero, pero lo que pregunto es ¿porqué?, ¿porqué derivar?,...¿porqué no integran o hacen otra cosa?
V: Porque integrar es...es una sumatoria...la integración es una sumatoria...
L: ¿Y la derivada?
V: La derivada es...es como reducir...a un...como a un mín... bueno no como a un mínimo, pero...
E: A algo más sencillo.
V: A algo...a una fórmula...
L: ¿Reducir?, ¿en qué sentido? Dices que integrar es una sumatoria...
E: Como juntar...
V: Ajá.
L: Y derivar... ¿qué sería?
V: Lo contrario.
L: ¿Lo contrario?
E: Sí, bueno...
L: ¿Qué sería lo contrario?
E: Restar.

Aparece la misma situación que en la experiencia en el aula, respecto a sus concepciones sobre la derivada y la integral: integrar es sumar, derivar es restar. Desde la perspectiva de estas estudiantes, como ya está dada una sumatoria, y ésta es una integral, entonces para resolverla lo que se debe hacer es lo contrario, o sea, derivar. Se da entonces, un *pensamiento hipotético* en función de una concepción errónea: el considerar toda sumatoria como una integral. Además, el término minimizar tiene dos acepciones, por una parte, se asocia al proceso para hallar el valor extremo (como hemos visto en preguntas anteriores), y por otra, a una imagen conceptual que se refiere a una resta como una operación de reducción a "algo más sencillo".

Por otro lado, cuando se les cuestiona sobre la naturaleza de la expresión con sumatoria, ellas dicen que es una función porque existen variables, *m* y *b* dependientes, *x* y *y* independientes. La razón es que *m* y *b* van a depender de los valores que tomen *x* y *y*. Tanto *x* como *y* son variables porque varían, toman distintos valores numéricos en la tabla. Atribuyen a *m* y *b* un carácter estático mientras que a *x* y *y* un carácter dinámico. Esta situación implica el uso de la función cognitiva de *evidencia lógica*. Estas estudiantes reflexionan y dirigen su conducta de acuerdo a su interpretación (lógica) sobre la información del problema y su concepción de variable. Sus argumentos no están sobre el concepto de variable en una función, sino que se basan más en una idea intuitiva de lo que significa variar.

Esta problemática se diluye cuando aparece el término "incógnita":

L: ¿Ustedes conocen m y b?
E: No.
V: No.
L: ¿Entonces?
E: Son incógnitas.
L: Cuando las encontramos, al final, dejan de serlo,..
E: Sí, es cuando ya sabemos,…
L: Pero en este proceso, son las incógnitas.
E. Sí.
L: Las que no son incógnitas son x y y. Son los datos numéricos.
E: Ajá.
V: Sí.

Se les cuestiona entonces sobre la forma en que están relacionadas esas incógnitas considerando su idea de que la expresión en estudio es una función, y lo primero que aparece es la idea, -producto del funcionamiento cognitivo de la *conducta comparativa*- de que una debe depender de la otra. Sin embargo, intentan despejar y ante la imposibilidad, reflexionan y consideran que tanto *m* como *b* son de la misma naturaleza, las dos deberían ser incógnitas independientes.

Entonces se retoma la idea de derivar la expresión en cuestión y se les pide lo realicen en papel:

E: Es u a la n,… entonces sería… (Escribe).

L: Ok. Ya está. ¿Porqué escribes $\frac{\partial f}{\partial m} = ?$*, ¿Qué es f?, ¿porqué el igual?*

E: ¿f? Es que así se escriben las derivadas, ¿no?...es mecánico….

L: ¿Pero porqué f?, estás derivando la sumatoria,…

E: Ah, sí, es que esa es la función,…debería estar desde acá (señala al final de la expresión de la sumatoria y escribe " = f ")

L: Entonces, ¿es como ponerle nombre a la función?

E: Sí, ajá.

V: Claro, debe tener nombre porque ésa es la función, o sea,…el símbolo para decir que ésa es…

E: Ah, pues sí, es como en Mate I, la variable independiente era la x y y la función…

L: Entonces, aquí, ¿cuál es la variable dependiente?

V: La f, sí.

E: Sí, porque es la que va a depender de m y b.

Se observa que una vez que han considerado a *m* y *b* como "incógnitas independientes", realizan la derivación utilizando los símbolos que ellas acostumbran y advierten entonces que de acuerdo a su notación, necesitaban un símbolo más *(f)* para indicar la función.

Nuevamente aparece la *conducta comparativa*, en este caso, respecto a la forma en que se denota una función de una variable.

Respecto al cuestionamiento sobre porqué se iguala a cero la derivada, se encontraron aquí resultados muy similares a la entrevista anterior: las estudiantes aplican esta idea (igualar a cero) sin reflexionar sobre la naturaleza de la función, es decir, dan por hecho que eso funciona y es suficiente.

<u>Fase de salida</u>

Por otra parte, e igual que en la entrevista uno, permanece durante todo el proceso la *percepción borrosa* inicial sobre la meta, aplican el procedimiento que conocen para determinar un valor extremo y como consecuencia se pierde de vista lo que se pide en el enunciado del problema. De hecho, todo lo que resta de la entrevista (a excepción de la última pregunta) es una discusión sobre la respuesta al problema. Sí aparece la función cognitiva de *comunicación explícita de la respuesta* e incluso la de *precisión y exactitud en la respuesta*, pero en términos de una respuesta equivocada. No hay entonces realmente, un *control sobre la respuesta*, dado que no se tiene claridad sobre la meta en la resolución del problema.

Finalmente, cuando se pregunta sobre la utilidad de la solución al problema, ellas contestan:

V: Bueno,…es que sólo se deriva y se deja lo que queda de igualar a cero,…no sé,…yo creo que podría tener más utilidad si se resuelve completo y se usa para aplicarlo,…pues no sé, a algo práctico,…o algo así,…o si alguien va a ser científico…
E: Sí, yo también creo eso porque el problema así como está sólo nos están diciendo cómo funciona el método este de,…, ¿cómo…? (busca en el enunciado del problema).
L: Mínimos cuadrados.

E: Ajá, de mínimos cuadrados,…no nos dice nada más, es sólo la forma matemática,…pero creo que nos podría servir si un día tenemos una tabla de datos así (señala sobre el problema). No sé, tal vez en alguna materia después.

Lo que indica concepciones similares a las encontradas tanto en la experiencia en el aula como en la entrevista 1: es un problema que involucra conocimientos matemáticos, métodos, procedimientos, etc., pero que no es útil sino se aplica en "algo práctico".

Finalmente, es preciso aclarar que para poder indagar sobre el funcionamiento cognitivo en los términos en que se planeó la investigación, es decir, tratando de cubrir las tres fases del procesamiento de la información en la resolución del problema, fue necesario que el entrevistador interviniera con preguntas y comentarios a manera de guía en el proceso. De otra forma no se hubiera podido obtener la información de tal funcionamiento (al menos no con el detalle que se logró) porque al aparecer una disfunción cognitiva, los estudiantes se limitaban a tratar de resolver el problema en base al uso del método que ya conocían para determinar un valor extremo mínimo de una función de dos variables, sin considerar la naturaleza de los objetos matemáticos que operaban. Esta situación no permitía observar lo que sucedía respecto al uso de las funciones cognitivas al tratar las nociones y conceptos involucrados, simplemente porque los estudiantes no abordaban tales nociones y conceptos. De hecho, la intervención del entrevistador tenía como finalidad motivar al estudiante a tratar los contenidos matemáticos desde su significado conceptual porque lo que interesaba en la investigación era, precisamente, la observación de los factores de carácter cognitivo implicados en los procesos de aprendizaje, y no la simple resolución operativa del problema.

3.3 Resumen de resultados previos

Se presenta a continuación una breve argumentación teórica de los resultados sobre las funciones cognitivas en relación a los análisis cognitivos preliminares presentados en la sección inmediata anterior.

En la fase de entrada:

- La comprensión implica tener una *percepción clara* tanto de los datos que se ofrecen en el enunciado, como del estado final o meta a la que se quiere llegar (los datos proporcionan una descripción completa del contexto del problema y de los parámetros bajo los cuales se debe operar).

- A su vez, para el logro de la percepción clara es necesario que las funciones cognitivas de *exploración sistemática de una situación de aprendizaje* y la de *organización de la información*, aparezcan en forma eficiente.

En la fase de elaboración:

- La resolución del problema implica la búsqueda de una vía de solución (una vía que conecte el estado inicial con el estado meta), pero antes de esta búsqueda, es necesario que el sujeto sea capaz de percibir y definir con precisión el problema, lo cual implica que su función cognitiva de *percepción y definición de un problema* aparezca en forma eficiente. Este es un momento crucial en el proceso porque constituye el enlace entre la comprensión de la situación problemática y lo que es propiamente la resolución del problema.

En el estudio cognitivo se pudo observar que aún cuando los estudiantes muestran capacidad para comprender (en el sentido explicado líneas arriba) la situación problemática en la fase de entrada, tienen dificultades en la fase de elaboración cuando no definen con precisión el problema en términos de la meta a la que se quiere llegar.

- La búsqueda de una vía de solución implica la *planificación de la conducta* (una función cognitiva que está presente en todo el proceso de resolución), así como la recuperación de esquemas en la memoria a largo plazo que involucran conocimientos matemáticos, y la cual a su vez requiere de una *conducta comparativa*.

- El proceso de pensamiento para el uso, adecuación o modificación de esquemas previos en la construcción de las nuevas ideas, nociones o conceptos matemáticos, involucra al menos, la capacidad de *pensamiento hipotético* y la *conducta comparativa*.

- La construcción de conocimiento requiere para la codificación de la información correspondiente a las nuevas ideas, nociones y conceptos, de la función cognitiva de *interiorización y representación mental,* que es de hecho, una de las funciones más importantes. Como se señala en (Prieto, 1992), *"La interiorización es el pilar básico del aprendizaje y de la adaptación y, por tanto, de la inteligencia"*.

<u>En la fase de salida</u>:

- La respuesta ha de emitirse utilizando un lenguaje claro y preciso en función de la meta final del problema formulado, es decir, se debe observar una *comunicación explícita* de tal respuesta.

- Se debe observar capacidad para pensar y expresar la respuesta correcta al problema, así como para reflexionar antes de comunicarla, es decir, debe haber *precisión y exactitud en la respuesta* y un *control* en la emisión de la misma.

De esta forma, se determina que el modelo de procesamiento de la información, *entrada-elaboración-salida*, tiene los siguientes elementos básicos:

Entrada	?	*Comprensión* de la situación problemática.
Elaboración	?	*Proceso de resolución* del problema.
Salida	?	*Respuesta* al problema.

Las *funciones cognitivas* que emergieron en el proceso de resolución del problema de cálculo de dos variables ya analizado en las secciones anteriores, son las siguientes:

A nivel de entrada:

- *Percepción clara.*
- *Exploración sistemática de una situación de aprendizaje.*
- *Organización de la información.*

A nivel de elaboración:

- *Percepción y definición de un problema.*
- *Interiorización y representación mental.*
- *Planificación de la conducta.*
- *Conducta comparativa.*
- *Pensamiento hipotético.*
- *Evidencia lógica.*

A nivel de salida:

- *Comunicación explícita.*
- *Precisión y exactitud en la respuesta.*
- *Control de la respuesta.*

CAPÍTULO 4

LAS FUNCIONES COGNITIVAS EN LAS EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE EN CONTEXTO

Se describe a continuación el diseño de la situación problemática en el contexto de la Ingeniería Industrial y de Sistemas, la experiencia en el aula, la realización de la entrevista y el análisis de resultados.

4.1 El diseño y las actividades en el aula

Atendiendo los objetivos de la investigación y los resultados previos del análisis preliminar respecto a las concepciones de los estudiantes en cuanto a que no encuentran sentido al estudio del cálculo si no está vinculado a la resolución de algún problema, se tomó la decisión de diseñar un escenario en el contexto de la Ingeniería Industrial, que estuviera relacionado con alguna situación real en el ámbito socioeconómico y geográfico regional en que se ha desarrollado esta investigación.

De esta manera, y dadas las características (descritas en la primera parte del estudio preliminar) de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas, se decidió aprovechar una situación que desde hace años es un problema ambiental en ciertas zonas aledañas a la ciudad de San Luis Potosí: la contaminación por residuos de sustancias químicas de algunas empresas. De hecho, algunos casos han sido documentados y dados a conocer a la opinión pública en medios informativos como la prensa y la televisión. Incluso, investigadores de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, han realizado estudios experimentales (toma de muestras y su análisis) que han sido tema para estudios de postgrado –referencias de comunicaciones personales-.

Esta problemática se dio a conocer y se discutió con los estudiantes previo al desarrollo de la experiencia, y constituyó, de hecho, uno de los factores (de acuerdo a la noción de contexto que empleamos y que se explica en la sección sobre el marco teórico) que dieron sentido al problema matemático estudiado en el aula y que situó el escenario didáctico global en el contexto específico de la Ingeniería Industrial.

Además, para el diseño, se consideraron los resultados previos del estudio didáctico preliminar sobre el plan de estudios y los programas analíticos de la carrera en cuestión –lo cual constituye otro de los factores esenciales que conforman el contexto en la ingeniería-, es decir, se pensó en una situación problemática que permitiera tratar el método de mínimos cuadrados y entonces analizar el funcionamiento cognitivo cuando se abordan los contenidos matemáticos necesarios tales como el concepto de función de dos variables independientes y la derivada parcial.

El diseño producto de esta situación es el que se presenta enseguida.

El problema

Uno de los problemas más desafiantes para el control de la contaminación del agua lo presenta la industria del curtido de pieles. Los deshechos de esta industria son químicamente complejos. Se caracterizan por valores elevados en la demanda de oxígeno bioquímico, los sólidos volátiles y otras mediciones de contaminación.

Actualmente se tiene un problema serio con este tipo de contaminación en las cercanías de la ciudad de San Luis Potosí y se les está invitando a contribuir en la solución del problema. De acuerdo a los estudios realizados, lo que se necesita en estos momentos es determinar un modelo matemático para el comportamiento de este fenómeno y poder entonces estimar elementos en relación a la contaminación producida.

Considérense los datos experimentales de la tabla de abajo los cuales se obtuvieron de 33 muestras de desperdicios que se tratan químicamente en un estudio realizado en la empresa potosina Pieles Naturales del Centro, durante el periodo comprendido entre agosto de 2001 y enero de 2002. Se presentan las lecturas de la reducción porcentual del total de sólidos (x) y de la reducción porcentual de demanda de oxígeno químico (y) para esas 33 muestras.

¿Qué modelo matemático propondrían para el comportamiento de estos datos experimentales?

Reducción de sólidos, x (%)	*Demanda de oxígeno químico, y (%)*
3	5
7	11
11	21
15	16
18	16
27	28
29	27
30	25
30	35
31	30
31	40
32	32
33	34
33	32
34	34
36	37
36	38
36	34
37	36
38	38
39	37
39	36
39	45
40	39
41	41
42	40
42	44
43	37
44	44
45	46
46	46
47	49
50	51

La experiencia se realizó con un grupo de 12 estudiantes con edades entre 19 y 21 años, del curso de Matemáticas para Ingeniería III de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas del ITESM, Campus San Luis Potosí.

Se organizó al grupo en 4 equipos de 3 estudiantes cada uno y se realizó el trabajo en 6 sesiones de 75 minutos cada una.

Es muy importante mencionar que, a diferencia de la experiencia realizada en el ámbito del sistema didáctico tradicional, en este estudio presentamos a los estudiantes el escenario diseñado **antes** de abordar cualquier contenido de cálculo diferencial en varias variables. El objetivo es que la situación problemática motive y dé sentido al estudio de los conocimientos matemáticos necesarios para resolverla, como se establece en la matemática en contexto (Camarena, 2000).

Secuencia de actividades para la resolución del problema

1ra. Sesión

- Presentación de la situación problemática (por escrito).
- Los estudiantes leen y discuten sobre ella (en trabajo colaborativo).
- Se les pide que describan (por escrito) lo que se pide, lo que conocen y lo que desconocen así como el planteamiento de una estrategia de solución.
- Se les pide investigar sobre lo que desconocen de la situación (extra clase).

2ª. Sesión

- Se discute sobre lo investigado y en base a ello se induce a los estudiantes a trabajar con la idea básica del método de mínimos cuadrados.

- Se deduce en interacción grupal (y por equipos) la expresión matemática[6] que resulta del uso de la idea mencionada en el punto anterior.
- Se cuestiona a los estudiantes sobre qué es lo que se debe hacer ahora para continuar con el proceso de resolución.
- Se discute sobre la naturaleza de la expresión última (*).
- Se les pide realizar un ejercicio particular con sólo cuatro datos numéricos (extra clase).

3ra. Sesión.

- Se discute sobre el trabajo realizado en la tarea extra clase y la expresión (*).
- Se dedica la sesión al estudio de funciones de dos variables.

4ª. Sesión.

- Se discute sobre las condiciones para que ocurra un valor extremo (en términos de pendientes de rectas y planos).
- Se estudia el concepto de derivada parcial y la forma de calcularla

5ª. Sesión.

- Se continúa con la última actividad de la sesión anterior.
- Se deduce el criterio para determinar valores extremos.
- Se les pide analizar la expresión (*) ya escrita como función y en términos de todo lo estudiado hasta el momento.

---

[6] $\sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (mx_i + b) \right]^2$

6ª. Sesión.

- Se determina en forma general, el sistema de ecuaciones para determinar la pendiente y la ordenada al origen y se resuelve.
- Se pide a los estudiantes que entreguen por escrito todo el proceso de resolución del problema.

Es importante recordar aquí que parte del interés en la investigación está sobre la significación de los objetos matemáticos para los estudiantes en su proceso de aprendizaje en una situación en contexto y que, como se explicó en el primer capítulo de este reporte, se decidió apoyar el trabajo en la teoría específica de la tripleta conceptual interpretada por Godino y Recio para este fin, misma que constituye un referente teórico de apoyo específico para la interpretación de significados respecto a la relación entre ideas matemáticas, el sistema de signos y la situación problemática particular, para el análisis de las funciones cognitivas específicamente en la fase de elaboración. Además de que es un elemento teórico que complementa (o al menos orienta) el marco general de las funciones cognitivas, en función de los objetivos de la Matemática Educativa, en particular sobre lo que respecta al estudio de la enseñanza y el aprendizaje específico de nociones y conceptos matemáticos en situación escolar.

Además, antes de presentar el desarrollo de la experiencia y el estudio cognitivo correspondiente, es muy importante mencionar un hecho que resultó fundamental durante el proceso de implementación de las actividades diseñadas: la necesidad de definir los elementos teóricos en base a los cuales se habría de realizar el análisis cognitivo respecto a los actos de aprendizaje en todo el proceso de resolución de la situación problema en contexto. Para el diseño particular en cuestión, era necesario precisar el papel que jugaban actos concretos como los de reconocer o interpretar la expresión $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ como un ente matemático susceptible de diferenciación, las ideas y nociones matemáticas involucradas en la conceptualización de la derivada parcial, y el acto de aprendizaje del método para calcular un extremo de una función de dos variables. Y resulta fundamental porque no había un término, ni en la teoría de Feuerstein ni en la tripleta conceptual de Godino y Recio, con el que se pudieran ubicar dentro del marco teórico tales actos de aprendizaje. Entonces, para vertebrar los elementos centrales del análisis cognitivo, es decir, las funciones cognitivas implicadas, los conceptos matemáticos de estudio y sus relaciones en términos de las generalizaciones, fenomenologías y notaciones, se tuvo la necesidad de asignarle nombre a dichos actos y definir lo que significan en el análisis realizado. De esta forma, se definió el término *acto matemático-cognitivo*, y se precisó a la vez lo que se entiende por *escenario didáctico* y *procesos interpretativos*, como sigue:

El *escenario didáctico* está constituido por todos los elementos que conforman el contexto de la situación problemática (en este caso en la ingeniería), y es el que determina y da sentido al estudio de las ideas, nociones y conceptos matemáticos necesarios para la resolución del problema que se plantea en tal contexto. Esto incluye también los factores extra matemáticos y extra escolares que dan origen al diseño de la situación problema en contexto real. Por ejemplo, para el escenario ya descrito líneas arriba y el cual es la base para esta parte de la investigación, tales factores están conformados por el problema de contaminación ambiental que se tiene en las cercanías de la ciudad de San Luis Potosí. Entonces, en este caso, el contexto en la ingeniería queda determinado tanto por los resultados del estudio didáctico preliminar sobre el uso de conocimientos matemáticos dentro del ámbito académico de la formación de los estudiantes en ingeniería, como por la situación social del problema de contaminación mencionado, el cual está relacionado al área de especialidad de la Ingeniería Industrial.

Por otra parte, con *acto matemático-cognitivo* nos referimos al hecho concreto del acto mental en que sucede el aprendizaje de una idea, noción o concepto matemático (o incluso un proceso algorítmico) y que está constituido por al menos un *proceso interpretativo* que a su vez contiene las tres entidades básicas del modelo conceptual de Godino y Recio (ya descrito en la sección sobre el marco teórico): fenomenologías, notaciones y generalizaciones. Un *proceso interpretativo* es cada elemento simbólico que interviene en el acto mental de resolver un problema y está conformado tanto por la notación simbólica, como por lo que representa en el ámbito de ese problema.

El uso de estos elementos teóricos en la investigación es como se presenta enseguida.

Procesos interpretativos para el análisis de las funciones cognitivas

Las palabras y expresiones matemáticas que aparecen tanto en el enunciado del problema en contexto como en el proceso de resolución del mismo y que desencadenan procesos interpretativos, son las siguientes:

Modelo matemático, %, x, y, los números (de la tabla), gráfica, puntos coordenados, función de una variable, función de dos variables, superficie, diferencia de ordenadas, pendiente, ordenada al origen, variables, constantes, sumatoria, igualdad, cuadrado (de potencia), derivada parcial, ecuación, solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Procesos interpretativos:

1. Sobre el enunciado.

    1a. Modelo matemático significa función.

    1b. % representa porcentaje.

    1c. Las letras x, y designan valores numéricos (datos experimentales).

    1d. Los números en las tablas representan valores porcentuales.

2. Sobre el proceso de resolución:

2a. d_i representa las diferencias verticales entre la recta que se busca y los datos numéricos. Se coloca junto al segmento de recta que une un punto con la representación gráfica de la recta que se busca.

2b. x, y representan los datos numéricos.

2c. m y b representan la pendiente y la ordenada al origen de la recta que se busca, respectivamente.

2d. $y = mx + b$ traduce la expresión “forma de una función lineal” (también puede interpretarse como “la ecuación pendiente-ordenada al origen de una recta”).

2e. $y_i - (mx_i + b)$ representa la diferencia entre la ordenada y_i de cada punto dato numérico y la ordenada de un punto de la recta $y = mx + b$.

2f. $d_i = y_i - (mx_i + b)$ representa la equivalencia entre los procesos interpretativos *2a* y *2e*.

2g. $\sum_{I=1}^{n}$ representa una suma de términos. Del primero al *n-ésimo*.

2h. $\sum_{i=1}^{n}[y_i - (mx_i + b)]$ representa la suma de todas las diferencias entre los puntos, datos experimentales y la recta buscada.

2i. $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ determina una forma válida y conveniente para el trabajo en el registro algebraico y representa la suma de las diferencias entre los puntos datos experimentales y la recta, al cuadrado.

2j. $f(m,b)=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ representa una función en las variables independientes m y b (*f(m, b)* resulta de una extensión –generalización– de la notación *f (x)*).

2k. $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial m}$ y $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial b}$ simbolizan las derivadas parciales de f respecto a m y a b.

2l. $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial m}=0$ y $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial b}=0$ son la pendiente nula de f respecto a m y la pendiente nula de f respecto a b.

2m. $\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i-2(mx_i+b)\right](-x_i)$ es la derivada parcial respecto a m, y

$\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i-2(mx_i+b)\right](-1)$ es la derivada parcial respecto a b.

2n. $$\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i-2(mx_i+b)\right](-x_i)=0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i-2(mx_i+b)\right](-1)=0$$

es el sistema de ecuaciones que permite determinar m y b (bajo el conocimiento de que la igualación a cero proporciona los valores de m y b donde *f(m, b)* toma su valor extremo mínimo.

En cada proceso interpretativo se puede reconocer la dialéctica entre las ideas (generalizaciones), el lenguaje simbólico (notaciones) y la situación matemática en que sucede (fenomenologías).

Por ejemplo, en *2c* la idea (generalización) de incógnita o variable está "encapsulada" en la notación "*m*", "*b*", y el hecho fenomenológico, en este acto, lo constituye la representación geométrica donde se ubica (plano cartesiano).

Otro ejemplo: en *2e* la idea de diferencia (como una distancia en el registro gráfico) está representada por la expresión $y_i - (mx_i + b)$ y el hecho fenomenológico es la situación geométrica en que se enmarca.

<u>Actos matemático-cognitivos</u>

El análisis se centra sobre los *actos matemático-cognitivos* de aprendizaje fundamentales en el proceso de resolución del problema en estudio, a saber:

1. La interpretación de $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i - (mx_i + b)\right]^2$ como una función de dos variables.

2. La conceptualización de la derivada parcial.

3. El proceso para determinar un valor mínimo de una función de dos variables.

En este último acto, es preciso señalar que el análisis se realiza considerando los conocimientos matemáticos que entran en juego, es decir, se analiza en función de las ideas, nociones y conceptos en que se basa el proceso al que se refiere, y no sólo en términos del proceso como tal.

4.1.1 Análisis de la experiencia en el aula

Fase de entrada.

1ª. Sesión.

Al inicio no se observan dificultades con la comprensión de lo que plantea el enunciado, sin embargo, en el tránsito al proceso de resolución, aparecen dificultades en la función cognitiva de *percepción y definición de un problema*: los alumnos comprenden lo que trata la situación problemática pero no es inmediata la percepción del problema debido a la aparición de desequilibrios:

- Desequilibrio causado por el enfrentamiento con "cosas que no se conocen".

- Las condiciones en que se aborda la situación problemática provoca un desequilibrio respecto a sus concepciones sobre las formas de enseñanza-aprendizaje a las que han estado expuestos (primero se han de estudiar los contenidos matemáticos y después las aplicaciones).

Estos desequilibrios se van superando en la medida que los sujetos piensan reflexivamente sobre el problema y discuten intentando buscar una definición conveniente, descartando aquellos aspectos que son incompatibles e incongruentes, utilizando todo tipo de información previamente almacenada que tenga cierta relación con el problema presente, lo cual implica el uso de las funciones cognitivas de *exploración sistemática de una situación de aprendizaje* y de *organización de la información*.

En particular, los estudiantes recuperan sus esquemas sobre el concepto de función, su representación simbólica, gráfica y sobre todo la idea de *"lo que hay que hacer cuando lo que se tiene es una colección de puntos (en una tabla)"*: graficar los puntos en un plano coordenado. Esta es la primera idea que aparece en prácticamente todos los equipos de trabajo.

Estos esquemas previos de representación de funciones de una variable les permiten contar con la confianza para una definición precisa del problema y crea un sentimiento de competencia para abordarlo.

Por otra parte, se observa un aspecto de suma importancia en esta fase de entrada: una gran *motivación* en el grupo por tratar con un problema real y en el área de su formación profesional y que se manifiesta en la conducta de los estudiantes. Se percibe en el aula un ambiente propicio para el aprendizaje; se observa disposición en cada participante para abordar el problema y colaborar con los compañeros de equipo. Cabe señalar que esta es una situación ya esperada (dados los resultados de investigación con que se cuenta en este aspecto, mismos que se mencionaron en la sección sobre antecedentes), sin embargo se considera importante comentarla ahora porque condiciona la conducta de los estudiantes para las fases siguientes en el desarrollo de la experiencia (aunque no se puede presuponer el éxito en cuanto al aprendizaje de los contenidos de cálculo involucrados sólo porque se observa motivación y disposición de los alumnos para realizar las actividades diseñadas).

Fase de elaboración.

(1ª. Sesión)

Una vez que los estudiantes graficaron los puntos en el plano *xy*, aparecen ideas diversas sobre la estrategia a seguir para determinar el modelo que se pide en el problema. Sin embargo, en todas se observan patrones de comportamiento muy similares: planifican lo que van a hacer, siguen hipótesis, realizan comparaciones y utilizan la evidencia lógica. Por ejemplo, un equipo de estudiantes, luego de discutir, escribe: *“intentamos graficar los datos dados en el problema y nos dimos cuenta que la gráfica no correspondía a una función, puesto que se repiten varios valores en el eje x”*.

Al platicar con ellos al respecto, comentan que planearon (*planificación de la conducta*) graficar para ver si podían determinar la forma de la función, lo cual implica la suposición (*pensamiento hipotético*) de que los datos numéricos representan, precisamente, una función; luego, aparecieron ideas tales como unir los puntos con segmentos de recta y uno de los estudiantes comentó que eso se parecía a una gráfica como las de "códigos de barras", que no recordaba cómo, pero se hacían con funciones trigonométricas, lo cual implica una *conducta comparativa*; finalmente, advierten que la colección de puntos no representa una función porque hay pares ordenados donde se repite la abscisa. Esto significa que recurren a su conocimiento previo sobre el concepto de función y usan la *evidencia lógica* para describir el comportamiento de los datos y descartar la posibilidad de una función, como habían supuesto inicialmente.

Otro de los equipos escribe: *"Primero vimos que es bidimensional, después graficamos para darnos una idea de la tendencia que tiene la gráfica de la función, al verla se nos ocurre trazar dos líneas paralelas entre las que se encuentran todos los puntos y después trazar una nueva recta paralela y exactamente entre las dos primeras rectas"*

Nuevamente, se planea graficar y se supone que los datos representan una función. Sin embargo, la estrategia que usan para tratar de hallar el modelo que se pide, es diferente. Estos alumnos suponen que es una buena idea, dado el comportamiento de los puntos, dirigir sus esfuerzos a encontrar una recta que pase entre los datos numéricos. Esta conducta implica el *pensamiento hipotético* y el uso de la *evidencia lógica*. Suponen que es una buena idea pensar en un modelo lineal, considerando la evidencia de la forma en que se comportan los datos.

Es en esta parte donde se invita a los estudiantes a reflexionar sobre lo que conocen y lo que desconocen de la situación problemática que están tratando. En discusión, primero en equipos y después grupal, se reflexiona sobre la posibilidad de existencia de métodos para realizar lo que se pide y se acuerda investigar al respecto.

2ª sesión.

Se presentan por equipo los resultados de la tarea encomendada la sesión anterior.

Los estudiantes presentan como posibles, diversos métodos numéricos (el nombre y alguna idea de cómo funciona) tanto de correlación, como de interpolación y extrapolación, entre otros. El profesor entonces, dentro de todas las posibilidades, induce al uso del método de mínimos cuadrados, explicando sobre las ventajas en relación al problema que se está tratando y a los objetivos del curso. Se decide intentar hallar un modelo lineal para los datos, como un propósito del diseño y recuperando, además, la idea de uno de los equipos, como ya se explicó líneas arriba.

Entonces, una vez que se han estudiado las ideas básicas en que se fundamenta el método, es decir, minimizar el cuadrado de la suma de las diferencias entre cada punto dato experimental y la mejor recta de ajuste, y se ha determinado que la expresión que representa estas ideas es $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$, se prosigue en el análisis de las funciones cognitivas en términos de los actos matemático-cognitivos y los procesos interpretativos descritos anteriormente.

<u>Análisis para el acto matemático-cognitivo 1</u>.

Acto matemático-cognitivo:

La interpretación de $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ como una función de dos variables.

Procesos interpretativos involucrados:

2i. $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i - (mx_i + b)\right]^2$ determina una forma válida y conveniente para el trabajo en el registro algebraico y representa la suma del cuadrado de las diferencias entre los puntos datos experimentales y la recta.

2j. $f(m,b) = \sum_{i=1}^{m}\left[y_i - (mx_i + b)\right]^2$ representa una función en las variables independientes m y b (el símbolo *f(m, b)* resulta de una extensión –generalización- de la notación *f (x)*).

En *2i* se tiene una expresión algebraica pero no tiene un significado conceptual (como función) para los estudiantes ni está enmarcada en una situación fenomenológica (que no sea el propio registro gráfico que la origina).

En *2j*, se establece una representación simbólica funcional en las variables m y b. Se tiene entonces un proceso interpretativo con los tres componentes del modelo: una expresión simbólica (notaciones), una idea matemática (noción de función de dos variables) y una fenomenología implícita: el espacio (sistema tridimensional) y la situación que le dio origen (los puntos datos experimentales y la idea básica del método).

Análisis.

Se observan dificultades en algunos estudiantes con la *interiorización* de la expresión en *2i* como una función de dos variables debido a concepciones previas tales como:

- Las variables son x y y: conocimiento fijo en la memoria como producto del abuso en el uso de estas letras para denotar variables en el sistema común de enseñanza.

- No es lo mismo *incógnita* que *variable*. Para los estudiantes, las variables son x y y porque "varían en los datos de la tabla". Esto es, x y y "toman diversos valores"; m y b, por su parte, son *incógnitas* porque "no toman distintos valores, simplemente no sabemos cuánto valen".

Estas concepciones constituyen un obstáculo para la interpretación en *2j* porque una función tiene, por ejemplo, variables independientes no "incógnitas independientes". Además "son muchas (4) variables e incógnitas". Se privilegian los símbolos en juego en la expresión, sobre la forma en que se denota una función. Esto es una consecuencia de que el proceso interpretativo *2i*, en este momento, no tiene una *generalización* ni una *fenomenología* implícita asociadas.

Además, aparece *impulsividad* (disfunción asociada a la función cognitiva de *exploración sistemática de una situación de aprendizaje*) ante la pregunta, ¿Qué es $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$, es decir, qué tipo de expresión matemática es?

Ofrecen respuestas inmediatas tales como *"es la suma de las diferencias entre los puntos y la recta que se busca"*, es decir, se observa tendencia a contestar sin reflexionar sobre la pregunta, sólo en términos de los aspectos previos en la deducción de la expresión (procesos interpretativos anteriores). Entonces se insiste y se les invita a pensar sobre lo que representa como objeto matemático, es decir, si la expresión representa una ecuación, una función, una identidad, etc.

Por ejemplo, algunos estudiantes contestan (impulsivamente) que la expresión representa una ecuación, otros, que una función. Se puede inferir que en su razonamiento subyacen *hipótesis* particulares sobre la naturaleza de la expresión y que los motiva a ofrecer esas respuestas. A su vez, ese razonamiento implica *comparaciones* con sus esquemas previos sobre el tipo de expresión en cuestión. Las funciones cognitivas de *conducta comparativa* y *pensamiento hipotético* entran así en juego, en forma implícita, en esta situación de aprendizaje.

Es importante señalar que la *impulsividad* que se observa en algunos estudiantes, ocurre en ciertos casos, porque no realizan una *exploración sistemática* y reflexiva sobre las características de la expresión en estudio, y no porque no tengan el conocimiento para identificar los símbolos asociados a las notaciones comúnmente usadas para una ecuación o una función.

Además, y también muy importante, esta impulsividad se debe al deseo de participar en el proceso de aprendizaje. Algunos estudiantes que comúnmente no colaboran en el grupo aportando ideas, ofreciendo respuestas, discutiendo, etc., lo hacen ahora. La motivación que subyace a la experiencia de aprendizaje al abordar el problema, crea un ambiente propicio en el que estos estudiantes encuentran sentido a lo que se está estudiando, ponen toda su atención y están dispuestos a participar en las discusiones.

Se debe aclarar que las situaciones de disfunción cognitiva observadas no son generalizadas en el grupo, puesto que tanto los conflictos iniciales respecto al conocimiento previo como la impulsividad, aparecen sólo en algunos estudiantes en los equipos de trabajo. Otros, de inicio proponen que la expresión no es una ecuación "porque no esta igualada con nada", o que sí representa una función "pero le falta el nombre", etc.

En esta parte, para situar las características involucradas en el tránsito del proceso interpretativo $2i$ al $2j$, necesario para la conceptualización de $\sum_{i=1}^{m}[y_i - (mx_i + b)]^2$ como una función de dos variables, se propuso a los estudiantes considerar el siguiente ejercicio particular:

> *Considera los puntos coordenados (2, 2), (4, 11), (6, 28) y (8, 40). Aplica la idea del método de mínimos cuadrados vista en la sesión de clase (sustituye estos valores en la expresión que estamos estudiando), desarrolla la sumatoria, simplifica y grafica en Maple la expresión resultante. Imprime una perspectiva gráfica donde se aprecie lo mejor posible el valor extremo que tiene.*

Observamos que los estudiantes comprenden, una vez que han simplificado y obtenido la expresión $120m^2+4b^2+40mb-1072m-162b+2509$, que ésta es siempre la forma que se obtiene y que no depende de los números en los pares ordenados. Además, cuando se les cuestiona sobre la forma geométrica de esta expresión, algunos de ellos recuperan sus conocimientos sobre graficación de funciones en una variable y ofrecen argumentos como que *"es una cuadrática general que tiene sus términos cuadráticos positivos y entonces debe abrir para arriba,… como una cosa tipo parábola"*. Una vez que se trabaja con este tipo de analogías y comparaciones, los estudiantes no observan dificultad en aceptar que entonces, este tipo de expresión siempre tendrá un valor extremo mínimo.

Cuando los alumnos capturan la expresión en cuestión en Maple, reflexionan sobre su naturaleza considerando que la instrucción *plot3d* en este software, grafica funciones (parte del trabajo extra clase consistía, precisamente, en investigar como utilizar Maple para graficar este tipo de expresiones). Y de hecho, algunos escriben (en su reporte de la tarea) sin dudar, $S=120m^2+4b^2+40mb-1072m-162b+2509$, donde S representa la sumatoria de donde se obtuvo la parte derecha de la ecuación. Los demás estudiantes del grupo aceptan esta notación sin dificultad. Entonces se les pregunta ¿de cuántas variables depende esta expresión?, y prácticamente todos están de acuerdo en que depende de dos: *m* y *b*. Aparecen explicaciones como que *"la sumatoria depende de m y de b"*.

Entonces, en cierta forma, los estudiantes *descubren* que están trabajando con una expresión que representa un nuevo tipo de función y que su representación geométrica es una gráfica en el sistema coordenado rectangular tridimensional.

En este momento, el trabajo de tránsito entre los procesos interpretativos *2i* y *2j* está en una etapa en la que la expresión matemática en *2i* tiene una *notación* explícita asociada, la ecuación $S=120m^2+4b^2+40mb-1072m-162b+2509$, y una *fenomenología* que la soporta, la situación que le dio origen y el registro geométrico tridimensional. Sin embargo, no se ha alcanzado la *generalización,* puesto que si bien los estudiantes intuyen aspectos de las características de este nuevo tipo de función, aun no cuentan con una definición.

3ª. Sesión.

Se dedica esta sesión para estudiar el concepto de función: su definición, notaciones, representaciones gráficas y numéricas. De manera que al término de esta actividad, los estudiantes, en el proceso interpretativo *2j*, tienen ahora también una *generalización* para el concepto de función de dos variables, y en particular para la expresión $f(m,b)=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$.

4ª. Sesión.

En esta sesión se abordan las actividades que propician el aprendizaje de las nociones, ideas y definiciones que conforman el concepto de derivada parcial.

El acto matemático-cognitivo local y los procesos interpretativos en juego aquí, son los siguientes:

Acto matemático-cognitivo:

La conceptualización de la derivada parcial.

Procesos interpretativos involucrados:

2k. $\frac{\partial f(m,b)}{\partial m}$ *y* $\frac{\partial f(m,b)}{\partial b}$ simbolizan las derivadas parciales de f respecto a m y b.

2l. $\frac{\partial f(m,b)}{\partial m}=0$ *y* $\frac{\partial f(m,b)}{\partial b}=0$ son la pendiente nula de f respecto a m y la pendiente nula de f respecto a b.

2m. $$\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i - 2(mx_i + b)\right](-x_i)$$ es la derivada parcial respecto a m, y

$$\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i - 2(mx_i + b)\right](-1)$$ es la derivada parcial respecto a b.

2n. $$\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i - 2(mx_i + b)\right](-x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[2y_i - 2(mx_i + b)\right](-1) = 0$$

es el sistema de ecuaciones que permite determinar m y b (bajo el conocimiento de que la igualación a cero proporciona los valores de m y b donde *f(m, b)* toma su valor extremo mínimo.

En 2k se tiene una notación asociada a una idea, la noción de derivada parcial como pendiente, y una fenomenología constituida por el espacio (tanto el sistema coordenado tridimensional en papel, como el espacio real en que se desarrolla la experiencia, por ejemplo, considerando las paredes y el piso del aula como los planos que conforman el primer octante del sistema coordenado).

En *2l*, está encapsulada la idea de pendiente nula, que implica la idea de recta tangente horizontal, respecto a *m* y respecto a *b*. La componente fenomenológica es la misma que en *2k*.

Para *2m*, hay una notación explícita para las derivadas parciales de $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i - (mx_i + b)\right]^2$, misma que está asociada a la idea de pendiente de las rectas tangentes en las direcciones de *m* y *b* en algún punto arbitrario. La componente fenomenológica es la misma que en los dos procesos anteriores.

En 2n se tiene una notación general asociada a pendientes nulas de rectas tangentes a la superficie *f*. La componente fenomenológica es la misma que en los otros procesos.

Análisis.

Se retoma el ejercicio particular usado en la sesión anterior y se cuestiona a los estudiantes sobre qué estrategia o procedimiento seguirían para determinar el punto *(m, b)* que corresponde al valor más pequeño de la superficie. Se discute en los equipos de trabajo y se ofrecen respuestas tales como:

"Derivando la ecuación con respecto a m y b. Como es de estilo parabólico y abre hacia arriba, no tiene máximos, por lo cual al derivar resultará el valor más pequeño de la superficie. Después de derivar se iguala a cero. El valor obtenido será el más pequeño porque es la tangente, es decir, en ese punto la inclinación es cero".

Se observa que estos estudiantes asumen una *conducta comparativa* sobre la nueva situación respecto a sus conocimientos previos del cálculo diferencial en una variable, en particular los de su noción de derivada como pendiente y la tangente. Aun y cuando en este momento no saben cómo derivar la función, suponen que su procedimiento se puede realizar, lo cual implica un *pensamiento hipotético*.

Otros estudiantes van más allá en sus hipótesis:

"Creemos que una opción es derivar la función e igualar la derivada a 0 para obtener los valores extremos de m y b.
Después podemos sacar la segunda derivada para saber si los extremos son mínimos o máximos. Un resultado (+) revela una concavidad hacia arriba, es decir, un mínimo. Lo contrario sucederá con un resultado negativo.

Por otro lado podemos tomar valores cercanos a los puntos que obtuvimos de la primera derivada (un valor a la izq y uno a la derecha) y sustituirlos en la 1ª derivada. Con ello veremos si la pendiente crece- decrece (+, -) = máximo, o lo contrario (-, +) = mínimo".

Los *supuestos* que asumen estos estudiantes los llevan a transferir características de las funciones en una variable a las de dos, pero sin reflexionar sobre las implicaciones propias del sistema tridimensional. Aparece implícita entonces una *percepción borrosa* de la situación, no se reflexiona, por ejemplo, sobre el significado de izquierda o derecha en el espacio. Aunque parecen claros sus conocimientos sobre los criterios para determinar valores extremos en funciones de una variable, en la nueva situación que enfrentan realizan una *exploración sistemática* deficiente. Este hecho puede ser consecuencia de la *impulsividad* producto de los desequilibrios provocados por el desconocimiento sobre el significado de la derivada para funciones en el espacio y la forma de calcularla algebraicamente.

En esta parte interviene el profesor y explica sobre la interpretación geométrica de la derivada parcial, la simbología que se emplea, y el uso de las reglas de diferenciación, interactuando con los estudiantes en función de sus conocimientos previos.

Se logra sin dificultad la interpretación de $\frac{\partial f(m,b)}{\partial m} = 0 \ \ y \ \ \frac{\partial f(m,b)}{\partial b} = 0$ como la situación geométrica de aquellos puntos *(m, b)* donde la pendiente de las rectas tangentes a la superficie *f*, en la dirección del eje *m* y en la dirección del eje *b*, respectivamente, es nula.

Se discute sobre posibles situaciones geométricas de superficies donde pueda ocurrir que $\frac{\partial f(m,b)}{\partial m} = 0 \ \ y \ \ \frac{\partial f(m,b)}{\partial b} = 0$ pero que no exista un valor extremo (puntos silla). También se trata sobre superficies con valores extremos en puntos donde las derivadas parciales no existen (un cono, por ejemplo).

Inmediatamente después de este tratamiento de la derivada se regresa a la resolución del problema de contaminación y se pide a los estudiantes nuevamente que describan, en función de todo lo que se ha tratado sobre funciones de dos variables y la derivada parcial, el tipo de función que es $f(m,b)=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ y el procedimiento a seguir para determinar sus valores extremos. Sus descripciones son muy similares, por ejemplo:

"La función es una cuadrática como una hoja doblada hacia arriba, por eso tiene un punto mínimo solamente y se puede saber además porque al derivar una cuadrática siempre quedan ecuaciones lineales, entonces al resolverlas, cuando se iguala a cero, nada más queda un solo valor de m y b que es el crítico donde está el mínimo. No se necesita checar nada más de las derivadas parciales porque esta función no tiene picos ni puntos de silla. Además es continua siempre".

Se observa entonces que los estudiantes interaccionan sin dificultad en las componentes conceptuales de notación, generalización y fenomenologías. Las ideas, nociones y definiciones hacen que los conceptos sean significativos en el ámbito en que se han estudiado. En este momento los estudiantes han aprendido tanto el método de mínimos cuadrados como los conceptos de función de dos variables y la derivada parcial, desde la perspectiva teórica que se está manejando.

<u>Fase de salida</u>.

Es claro para los estudiantes que lo que resta por hacer es obtener las derivadas parciales y averiguar para qué valores de m y b se anulan. Se discute en los equipos de trabajo y advierten que de seguir el procedimiento realizado con el ejercicio particular de los cuatro puntos, tendrían que trabajar demasiado en el desarrollo de la sumatoria y que entonces se debe tratar de encontrar las derivadas parciales en forma general, aplicando las fórmulas de diferenciación, y dejando indicados todos los símbolos que involucra *f(m, b)*, para igualar a cero y resolver el sistema para m y b. De manera que se determinan las ecuaciones del proceso interpretativo *2n* y los equipos de trabajo resuelven el sistema con el método que ellos consideran más adecuado. Finalmente, y después de algunas dificultades algebraicas, se llegan a establecer las ecuaciones que permiten determinar las variables m y b.

4.2 La entrevista

Realizada a Eduardo, estudiante de 2º semestre de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas del ITESM Campus San Luis Potosí.
Edad: 19 años.

Es importante señalar que el estudiante sujeto a esta entrevista recién había terminado el primer semestre de su carrera al momento de realizarse la experiencia. Esto significa que había concluido sus estudios sobre cálculo diferencial en una variable (Matemáticas para Ingeniería I) pero nunca había tenido contacto con los contenidos del cálculo diferencial en varias variables (Matemáticas para Ingeniería III). Este aspecto es importante porque de acuerdo a la planeación y diseño del problema, éste debe ser abordado antes del estudio de contenidos del cálculo multivariable. Entonces, en teoría, podría ser abordado por todo estudiante que ha acreditado su primer curso de cálculo de la carrera en cuestión, sin necesidad de haber cursado la materia de Matemáticas para Ingeniería II, correspondiente al cálculo integral en una variable real.

La entrevista se realizó en tres sesiones con un día de diferencia entre cada una. Se siguió el mismo esquema que en la experiencia con el grupo en el aula, es decir, se uso el mismo problema, los actos matemático-cognitivos, y los procesos interpretativos para el análisis de resultados.

Se presenta enseguida la trascripción en tres partes, correspondientes a las sesiones mencionadas.

Primera parte

E: Eduardo (sujeto entrevistado)

L: Leopoldo (entrevistador)

L: Bien, Eduardo, vamos a iniciar. Te presento el problema, léelo por favor y luego continuamos con las preguntas (le proporciona una hoja donde está escrito el problema).

E: Sí.

(Eduardo lee el problema)

E: Ya, ya lo leí.

L: Bien, entonces, ¿me podrías decir de qué trata el problema?

E: Se trata de deshechos de,…que surgen del manejo de químicos para,…en el tratado de pieles y entonces,…que está sucediendo en las cercanías de San Luis Potosí y entonces se da la información de diferentes tipos de residuo y para cada uno se dan datos numéricos (lee el enunciado) para la reducción porcentual del total de sólidos, que son los valores en "x" y,..y la relación porcentual de demanda de oxígeno químico, que representa los valores en "y", o sea, hay una relación entre los tipos de muestra, de la reducción de sólidos con la demanda de oxígeno químico, pero por ejemplo, se puede ver que (señala sobre la tabla de datos numéricos en le problema) se incrementa conforme se obtienen las muestras,…no sé, no sé como se determinarían,… pero hay un incremento, entonces se está pidiendo que se determine un modelo matemático para ver cómo se comportan estos datos de forma experimental.

L: ¿Qué es un modelo matemático?

E: Es una expresión de matemáticas, o sea, con símbolos matemáticos, para modelar algo, o sea, una ecuación o función para saber cómo se comporta algo, como en este caso (señala la tabla de valores numéricos).

L: Ok. Para lo que trata el problema, ¿qué información te dan?

E: La información,…pues este,…está más bien sobre las muestras que se hicieron y se dan en los valores numéricos de la tabla.

L: Y, pensando en el planteamiento del problema,… ¿qué sabes para resolverlo y qué no sabes?

E: Ahorita,…lo que sabemos es solamente los datos de la tabla y cómo están relacionados los datos (señala sobre la tabla y se refiere a la forma de parejas de números) de la reducción de porcentaje de sólidos con la demanda de oxígeno. Tendría que ver en una gráfica cómo se ven,…para ver la forma en que se comportan,…pero no sé más,…tendría que ver la función de los puntos,…de alguna manera, no sé…

L: Haz por favor lo que estás pensando,…aquí hay hojas para que escribas.

E: A ver,…primero hay que graficar en xy (se refiere al plano coordenado cartesiano).

L: Adelante, por favor.

(Traza un plano, observa los números en la tabla y decide una escala numérica en los ejes)

E: Son bastantes (se refiere a la cantidad de puntos).

L: Sí, trata de graficarlos con la mayor precisión posible,…si te tardas un poco no importa.

(Grafica los puntos en el plano)

L: Bien, ya que tienes graficados los puntos, ¿qué seguiría, qué más puedes hacer para resolver el problema?

E: Estoy pensando,…si lo que se necesita es la función, podría juntar los puntos con rectas, o sea, unirlos,…así (une con segmentos de recta cada punto con el siguiente).

Ah, pero aquí ya no se puede (señala el segmento de recta entre los puntos coordenados (30, 25) y (30, 35)), ya no es función, de hecho tampoco en estos que siguen,…no,…así no se va a poder.

L: ¿Por qué dices que ya no es función?

E: Es que estas son rectas verticales y,…y no son funciones,…tienen la misma “x”.

L: Ok. ¿Entonces?

E: Es que yo pensaba que podía sacar la ecuación de cada rectita,…con la pendiente,…y ya tener unas funciones,…pero entonces eso no se va a poder…

L: Bien, ¿qué más se te ocurre?

E: ¿De esto? (señala lo que ha hecho en la gráfica),… ¿o pensar en otra cosa?

L: No, de lo que sea. Puedes seguir intentando con esta idea o pensar en otra.

E: Bueno,…no sé,… ¿la función tiene que pasar por los puntos?,…o sea, ¿pasar exactamente?

L: Considera que son puntos datos experimentales,…alguien fue al sitio contaminado y tomó muestras.

E: Pero son números exactos, enteros.

L: Por eso,… ¿qué significa?, ¿cómo lo puedes interpretar,…considerar?

E: No pues,…están redondeados, supongo,…no creo que hayan salido así,…bueno, en todo caso creo que son aproximaciones…

L: Bueno,…entonces, ¿qué otra forma se te ocurre para encontrar lo que se pide?

E: ¿Y si la función, o sea, la gráfica, nada más pasa por,…entre los puntos?, o sea, aunque no los toque a todos,…pero que tenga la forma como de recta así como están los puntos (señala la gráfica que hizo).

L: Como… ¿de recta?, crees que sería una buena idea tratar de hallar una recta que los modele?

E: Lo que pasa es que están muy juntos y son muchos puntos,…si queremos que pase por todos estaría muy difícil,…no sé…Pero me imagino que todos los puntos están adentro de una recta así como muy ancha, en esta franja (señala sobre la gráfica una "franja" diagonal que incluye todos los puntos)…

L: Ajá, ¿y qué más se te ocurre?

E: Es que si tengo estas dos rectas (las que delimitan su "franja") ya nada más encuentro la recta que está en medio (se refiere a la recta que pasaría paralela justo a la mitad entre las otras dos que limitan la "franja").

L: ¿Y porqué crees que esa recta es una buena opción como modelo de los datos?

E: Pues porque es la que está en medio,…es como hacer un promedio entre las rectas. Si escogiera otra (recta) que estuviera por ejemplo, más pegada para acá (indica la recta imaginaria que limitaría la franja por arriba de los datos) entonces tendría muchos puntos abajo pero muy lejos,…no sería un buen modelo,…no,…creo que como le digo,…es mejor la de en medio.

L: Ok. ¿Y cómo le harías para encontrar las rectas estas (señala sobre la gráfica) que limitan la franja que dices?

E: ¿Para encontrarlas?

L: Sí, para hallar sus ecuaciones…

E: Pero,…a pues sí, ¿verdad? Tengo que hallar las ecuaciones…sino cómo,…no puedo saber cuál es la que está en medio…

L: ¿Entonces?

E: Mmm,…no pero,…si ésta de arriba pasa por estos puntos (señala los dos puntos que están más arriba en su "franja"),…ya no me van a quedar derechas (se refiere a que no tendría rectas paralelas),…no,…tendría que hallar una recta más o menos,…al tanteo,…no sé, probando más o menos con la forma que tiene esto (señala el grupo de puntos en la gráfica)…¿Sí se podría, no?

L: Bueno, claro que se podría, pero ¿cuál sería el criterio para decidir cuál de todas las posibilidades que tendrías sería la mejor? ¿Al tanteo?,…no le puedes decir eso a las personas que te piden ayuda para hallar el modelo…

E: ¿A las personas?,…ah sí, los que están viendo el problema de contaminación.

L: Así es.

E: No pues no,…tengo que justificar,…no sé,… ¿sí verdad? No puedo decir que es al tanteo.

L: No claro. Pero tu idea es buena, el problema es que no se pueden encontrar las ecuaciones de las rectas con un procedimiento o método seguro, que se pueda aplicar en base a conocimientos establecidos…y que funcione siempre…

E: Sí, no,…no se puede.

L: Bien Eduardo,…pues mira,…ya existen métodos para encontrar lo que se te pide en el problema, de hecho hay varios métodos que se basan en distintas ideas,…

E: ¿Ah sí?, no pues eso está muy padre porque ya no sabía qué hacer,…

L: Sí, la intención era ver lo que se te ocurría, nada más, no te preocupes por eso.

E. Ajá.

L: Bueno, mira, dentro de los posibles métodos que se podrían utilizar, a nosotros nos va a interesar uno en particular, se llama mínimos cuadrados, método de mínimos cuadrados. Entonces, yo te voy a explicar en qué consiste la idea en la que se basa este método y luego continuamos con otras preguntas que deseo hacerte, ¿está bien?

E: Sí, claro.

(Se le explica la idea central en que se basa el método hasta llegar a la expresión que representa la suma de las diferencias al cuadrado)

Segunda parte

L: Bien, entonces continuamos con las preguntas. Ya revisamos las ideas básicas del método y determinamos esta expresión matemática. ¿Qué crees tú que seguiría?

E: Bueno,…este,…si el método se trata de minimizar estas diferencias, entonces,…si queremos que sea un mínimo (iguala la expresión con la palabra mínimo),…de esta ecuación, lo más fácil sería derivar para encontrar sus puntos críticos y,…no sé,…con alguna forma,…usando la primera derivada o la segunda, darnos cuenta dónde está su punto mínimo,…porque podría tener también máximos o puntos de inflexión,…picos,…no sé,…

L: Bien. ¿Por qué igualas la expresión con la palabra mínimo?

E: ¿Porqué?...bueno,…es que es la que queremos que sea mínimo,…o sea,…que esas diferencias sean las más pequeñas.

L: Ok. Esta expresión, ¿qué tipo de expresión matemática es?

E: ¿Qué tipo?

L: Sí, me refiero a si es una ecuación, una función u otra cosa.

E: Ah, no pues,…es una ecuación porque hay variables relacionadas,…con el igual.

L: ¿Representa una función?

E: ¿Una función?,…bueno, el mínimo va a depender de la m y de la b,…sí, si hay función, lo que se quiere minimizar depende de m y b,…bueno, eso creo, lo que pasa es que depende de dos variables,…no sé, es como una función implícita.

L: La pregunta es porque me dices que hallarías el mínimo derivando esta expresión.

E: Sí.

L: Entonces, si es una función, ¿cómo están relacionadas las variables?, es decir, ¿cuál o cuáles son independientes y cuál o cuáles dependientes?

E: Mmm, bueno, como m del mínimo depende de m y b, entonces esta m (del mínimo) es la variable dependiente de m y b, que serían las independientes,…sí, es como en los problemas donde el volumen de algo depende del radio y de la altura. Bueno, pero,… es que tengo dos emes,…

L: Bueno, llámale de otra forma al mínimo, no debería haber problema, escoge otra letra,…tú ya sabes que simbolizaría el mínimo,…es una sumatoria,… ¿*S*?

E: Pues sí, es el mínimo de la sumatoria *S* (cambia la *m* de mínimo por *S*). Sí, es que esto es como una función de Mate I,…como *f(x)*, sólo que tengo una variable de más,… ¿eso se vale?

L: Sí, claro, sólo que es una relación funcional que, como dices, tiene una variable más respecto a las que conoces de tu curso de Mate I. Precisamente quisiera preguntarte, ¿qué hay que hacer ante esta situación?

E: No sé, necesito saber cómo son estas funciones. Porque si se grafican igual que las que tienen sólo *x*, no hay mucho problema, pero si no… no sé, tendría que ver…

L: Bien, Eduardo, precisamente lo que vamos a hacer ahora es estudiar un poco este tipo de funciones, el concepto, sus representaciones gráficas, su derivada, etc. Y luego continuamos con las demás preguntas que quiero hacerte.

(Se trata el concepto de función de dos variables, definición, simbología, gráficas en el espacio, la interpretación geométrica de la derivada parcial y la forma de calcular –en el registro algebraico- derivadas parciales)

Tercera parte

L: Bueno, dijimos que el método de mínimo cuadrados consiste en minimizar esta expresión (señala $S = \sum_{i=1}^{m} [y_i - (mx_i + b)]^2$).

E: Sí.

L: ¿Es una función?

E: Sí, de dos variables independientes (señala *m* y *b*) y una dependiente (señala S). De hecho, la puedo escribir como es (escribe *S(m, b)*). Lo demás es constante.

L: Bien, entonces Eduardo, ¿Qué falta por hacer para resolver el problema?

E: Tengo que derivar parcialmente respecto a *m* y a *b*, por separado y luego igualar a cero para ver dónde coinciden las pendientes que no tienen,…este,… ¿que no tienen pendiente?...no, espérame,…no,… las rectas tangentes de la superficie de la función que no tienen pendiente, o sea, donde la pendiente es cero. Sí, ahí donde coincidan debe estar el punto del mínimo.

L: ¿Dónde coincidan?, ¿cómo es eso?

E: Sí, es que puede ser que una de las derivadas sí me de valores al igualar a cero pero la otra no, no sé, depende de la función que se trate, tiene que cumplirse que las dos pendientes sean cero al mismo tiempo.

L: Bien, ¿y para la función que estamos tratando?

E: Bueno, es una sumatoria con un binomio al cuadrado…no hay nada que divida,…ni raíces,… no sé,… no tiene cosas que puedan hacer que las derivadas no existan y que entonces ya no sean cero las pendientes.

L: Ajá…

E: Es que si desarrollo el binomio me quedaría una cosa lineal así (indica con sus manos en un renglón de una hoja),…bueno,…no lineal, si no que es como una ecuación de una recta o una parábola,…no tiene divisiones ni nada.

L: ¿Como un polinomio?

E: ¡Eso!, sí, como un polinomio. De hecho siempre es un polinomio, de grado dos.

L: Ok. ¿Es posible, como me decías al principio, que esta función tenga picos u otro comportamiento donde exista un mínimo pero las derivadas no sean cero allí?

E: Mmm, no,… las funciones de polinomios no tienen picos y además es una cuadrática,…entonces tampoco tiene puntos de inflexión ni asíntotas,…ninguna otra cosa.

L: Bien, ¿quieres calcular las derivadas, por favor?

E: A sí, claro.

(calcula correctamente las derivadas parciales respecto a *m* y *b*)

L: Bien, ¿qué falta para terminar de resolver el problema?

E: A bueno, nada más hay que igualar a cero y resolver las ecuaciones, o sea,… para despejar *m* y *b*.

L: De acuerdo, entonces,… supongamos que ya hiciste eso, que ya despejaste *m* y *b*. ¿Cuál es la solución al problema?

E: Este,… bueno, ya terminamos,… si ya tengo *m* y *b* despejados de aquí (señala el sistema de ecuaciones), ya nada más faltaría sustituir todos los valores de la tabla en las *x´s* y las *y´s* para ver cuánto valen,…

L: Ajá…

E: Y pues ya,… como empezamos el método, *m* es la pendiente y *b* la ordenada al origen, este,… de la recta mejor para los datos. Sólo hay que sustituir esos valores aquí (señala la ecuación $y = mx + b$),…esta es la función que se pedía,…o sea, el modelo matemático que se pedía en el problema.

L: Bueno Eduardo, una última pregunta, ¿Qué alcances o ventajas le ves tu a la resolución de este problema?, o sea, no tanto a esta ecuación (señala $y = mx + b$) como solución, si no al hecho de resolver problemas como este?

E: Bueno,… pues que con todo lo que vimos es como se puede hallar la recta esta que modela mejor los datos y que,… es lo mejor porque así se resuelve el problema, o sea, tiene uno que saber todas las cosas, las definiciones, no sé,…saber cómo se deriva parcialmente, la pendiente como la derivada, o sea, lo que quiere decir la derivada en tres dimensiones,… todo.

L: ¿Qué opinas de las cosas nuevas que tuviste que aprender para resolver el problema?

E: A pues que está muy padre, es como Mate I, o sea,…en los temas, las mismas cosas pero ahora en tres dimensiones, no sé, es como más real,… y pues, más que nada, sirve para resolver un problema,…un problema que sí salió de algo real, y no sé, ha de servir para resolver otros, donde halla datos así (señala la tabla en el enunciado), de muestras como números de cosas reales.

L: Bien, Eduardo, pues esto es todo, muchas gracias.

4.2.1 Análisis de la entrevista

Igual que en la experiencia con el grupo en el aula, el análisis se centra en la fase de elaboración, es decir, sobre los *actos matemático-cognitivos* fundamentales en el proceso de resolución del problema, a saber:

4. La interpretación (reconocimiento) de $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ como una función de dos variables.

5. La conceptualización de la derivada parcial.

6. El estudio del proceso para determinar un valor mínimo de una función de dos variables.

Sin embargo, se realiza también el análisis de las funciones cognitivas en la fase de entrada y de salida en la resolución del problema, para contar con elementos sobre el funcionamiento cognitivo en todo el proceso.

<u>Fase de entrada</u>.

(Primera parte de la entrevista)

El sujeto, una vez que ha leído el enunciado del escenario, tiene una *percepción clara* sobre la situación problemática, e incluso, se observa precisión en la *definición del problema*, como podemos observar cuando se le cuestiona sobre lo que trata dicho problema:

"Se trata de deshechos de,…que surgen del manejo de químicos para,…en el tratado de pieles y entonces,…que está sucediendo en las cercanías de San Luis Potosí y entonces se da la información de diferentes tipos de residuo y para cada uno se dan datos numéricos (lee el enunciado) para la reducción porcentual del total de sólidos, que son los valores en "x" y,..y la relación porcentual de demanda de oxígeno químico, que representa los valores en "y", o sea, hay una relación entre los tipos de muestra, de la reducción de sólidos con la demanda de oxígeno químico, pero por ejemplo, se puede ver que (señala sobre la tabla de datos numéricos en le problema) se incrementa conforme se obtienen las muestras,…no sé, no sé como se determinarían,… pero hay un incremento, entonces se está pidiendo que se determine un modelo matemático para ver cómo se comportan estos datos de forma experimental.

L: ¿Qué es un modelo matemático?

E: Es una expresión de matemáticas, o sea, con símbolos matemáticos, para modelar algo, o sea, una ecuación o función para saber cómo se comporta algo, como en este caso (señala la tabla de valores numéricos)".

De hecho, además de contar con una percepción clara del problema, el sujeto ya está observando características del comportamiento de los datos numéricos que aparecen en el enunciado, conducta atribuible al inicio del trabajo en la fase de elaboración. Esta actitud implica una *planificación de la conducta* en vías de iniciar propiamente la resolución del problema. Además, se observa que se hace una adecuada *exploración sistemática de la situación de aprendizaje* y se *organiza la información* eficientemente.

Los esquemas previos de representación de funciones de una variable con que cuenta el sujeto, hacen que aparezca un sentimiento de competencia para abordar el problema y el sujeto piensa ya, antes de que se le cuestione, en la forma de iniciar con la resolución:

"L: Y, pensando en el planteamiento del problema,…¿qué sabes para resolverlo y qué no sabes?

E: Ahorita,…lo que sabemos es solamente los datos de la tabla y cómo están relacionados los datos (señala sobre la tabla y se refiere a la forma de parejas de números) de la *reducción de porcentaje de sólidos con la demanda de oxígeno. Tendría que ver en una gráfica cómo se ven,…para ver la forma en que se comportan,…pero no sé más,…tendría que ver la función de los puntos,…de alguna manera, no sé…"*

Nuevamente se observa una gran *motivación* para abordar el problema. El sujeto muestra disposición, interés por la actividad que está realizando. Esto es muy importante y adquiere una relevancia mayor porque en esta experiencia no hay una evaluación de por medio que implique, por ejemplo, una calificación en un curso. El sujeto está motivado por el sólo hecho de estar tratando una situación que involucra un problema en su área de especialidad en ingeniería.

Esta *motivación* que experimenta, propicia que el sujeto conteste más allá de lo que se le pide. Es importante aclararlo porque, en otras condiciones, esta conducta podría interpretarse como una disfunción de *impulsividad*. Esta disfunción aparece cuando un sujeto, ante una pregunta, contesta sin pensar, sin reflexionar, sin realizar una *exploración sistemática de la situación* y, como consecuencia, responde en forma errónea (o pudiera contestar correctamente pero sin ser capaz de explicar o justificar lo que dice).

En este caso, por la claridad observada en la comprensión del problema por parte del sujeto, no es necesario que se le cuestione sobre cómo piensa que debe ser el proceso de resolución (pregunta que resultó esencial en las experiencias anteriores), porque, de hecho, ya lo ha iniciado. Sólo se aprovecha esto para continuar con los objetivos de la entrevista. La conducta posterior del sujeto confirma que no se encontraba en una situación de impulsividad en este momento.

<u>Fase de elaboración</u>.

Igual que en la experiencia con el grupo en el aula, el sujeto inicia graficando los puntos datos experimentales en el plano cartesiano y su primera estrategia es unir los puntos con segmentos de recta, sin embargo, enfrenta dificultades inmediatamente:

“Ah, pero aquí ya no se puede (señala el segmento de recta entre los puntos coordenados (30, 25) y (30, 35)), ya no es función, de hecho tampoco en estos que siguen,…no,…así no se va a poder.
L: ¿Porqué dices que ya no es función?
E: Es que estas son rectas verticales y,…y no son funciones,…tienen la misma “x”.
L: Ok. ¿Entonces?
E: Es que yo pensaba que podía sacar la ecuación de cada rectita,…con la pendiente,…y ya tener unas funciones,…pero entonces eso no se va a poder…”

El intento de encontrar ecuaciones para la forma de los datos, con esta estrategia, implica la suposición (*pensamiento hipotético*) de que los datos numéricos representan una función; sin embargo, advierte que la colección de puntos no representa tal, porque hay pares ordenados donde se repite la abscisa. Esto significa que recurre a su conocimiento previo sobre el concepto de función y usa la *evidencia lógica* en la observación del comportamiento de los datos.

Luego piensa en otra estrategia, que ya había aparecido en la experiencia con el grupo en el aula: ubicar todos los puntos dentro de una franja limitada por dos rectas y encontrar una recta que esté justo entre las otras dos. Sin embargo, no encuentra una forma de hallar las ecuaciones de esas rectas; sólo puede realizar “tanteos” de acuerdo a la gráfica que tiene.

En esta parte es donde el entrevistador hace saber al sujeto de la existencia de métodos para tratar el problema y que se estudiará uno en particular: el *método de mínimos cuadrados*. Entonces se tratan las ideas centrales en que se basa el método hasta llegar a la expresión de la suma de los cuadrados de las diferencias entre los puntos datos experimentales y la recta que se busca.

(Segunda parte de la entrevista)

Análisis para el acto matemático-cognitivo local 1.

Acto matemático-cognitivo local:

La interpretación de $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ como una función de dos variables.

Procesos interpretativos involucrados:

2i. $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ determina una forma válida y conveniente para el trabajo en el registro algebraico y representa la suma del cuadrado de las diferencias entre los puntos datos experimentales y la recta.

2j. $f(m,b)=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ representa una función en las variables independientes *m* y *b* (el símbolo *f(m, b)* resulta de una extensión –generalización- de la notación *f (x)*).

Recordemos que:

En *2i* se tiene una expresión algebraica pero no tiene un significado conceptual (como función) para el estudiante ni está enmarcada en una situación fenomenológica (que no sea el propio registro gráfico que lo origina).

En *2j*, se establece una representación simbólica funcional en las variables *m* y *b*. Se tiene entonces un proceso interpretativo con los tres componentes del modelo: una expresión simbólica (notaciones), una idea matemática (noción de función de dos variables) y una fenomenología implícita: el espacio (sistema tridimensional) y la situación que le dio origen (los puntos datos experimentales y la idea básica del método).

Análisis.

En esta experiencia, a diferencia de las cuatro anteriores (incluyendo los estudios preliminares), el sujeto no presenta problemas para interpretar la expresión en cuestión, de entrada, como una ecuación. Esto ocurre de manera natural: el sujeto interpreta la idea de determinar el mínimo de la suma del cuadrado de las distancias, como $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2 = mínimo$. Esto le permite reconocer una ecuación en forma inmediata. Cuando se le cuestiona porqué escribe *"= mínimo"*, contesta:

¿Porqué?...bueno,…es que es la que queremos que sea mínimo,…o sea,…que esas diferencias sean las más pequeñas.

Se puede inferir que el sujeto ha comprendido las ideas básicas del método y que entonces le es natural hacer esa relación. Este es un aspecto relevante porque deja entrever las consecuencias a nivel cognitivo en el que aprende, de la forma en que se presenta una experiencia de aprendizaje. Evidentemente, la situación problema en contexto empleada y la secuencia de actividades planeada, llevan implícita en el diseño la intencionalidad de que el que aprende cuente con los elementos que le posibiliten este tipo de conductas. Es un aspecto central en la teoría de la matemática en contexto y concuerda con las ideas de los supuestos de investigación.

Por otra parte, respecto a la interpretación de la expresión en cuestión como una función, el sujeto responde:

"¿Una función?,…bueno, el mínimo va a depender de la m y de la b,…sí, si hay función, lo que se quiere minimizar depende de m y b,…bueno, eso creo, lo que pasa es que depende de dos variables,…no sé, es como una función implícita."

Interpreta la expresión como una función aún sin conocer la definición de función de dos variables (lo cual, obviamente, le genera dudas). Esta es una observación importante porque el sujeto otorga prioridad a la idea de hallar el mínimo de la suma de la distancias, es decir, en su razonamiento, el punto central es la reflexión sobre de qué depende ese mínimo. No desvía su atención el que haya muchos símbolos en la expresión. Su respuesta implica también que no tiene dificultades con la identificación de x_i y y_i como constantes.

Más aún, el sujeto no duda en decir que *"como m del mínimo depende de m y b, entonces esta m (del mínimo) es la variable dependiente de m y b, que serían las independientes"*. Pone en juego su conocimiento previo sobre el tipo de expresiones que trató en las aplicaciones del cálculo diferencial de una variable: su razonamiento sobre las variables es, en cierta forma, natural, porque *"es como en los problemas donde el volumen de algo depende del radio y de la altura"*. Esto pone en evidencia el tratamiento operativo sobre la expresión en cuestión, por parte del sujeto, en base a la atribución y transferencia de propiedades mediante su *pensamiento hipotético* sobre esta situación particular y en relación al acto matemático-cognitivo en análisis.

En este momento, dicho *acto matemático-cognitivo*, esta en un nivel en que para el proceso interpretativo *2j* se tiene la componente *notacional* en la ecuación que establece el sujeto y una *fenomenología* implícita constituida por las situaciones (tanto los datos numéricos experimentales como las ideas básicas del método) que originan esa notación, pero no hay todavía una *generalización* asociada porque no se tiene una definición para la relación de dependencia que el sujeto observa en su ecuación. Sólo hay ideas intuitivas que le hacen pensar que existe una relación funcional.

Es aquí donde se interviene para tratar el concepto de función de dos variables, definición, simbología, gráficas en el espacio, la interpretación geométrica de la derivada parcial y la forma de calcular –en el registro algebraico- derivadas parciales (todo esto tanto en pizarrón y papel como con el uso del software Maple) para finalmente realizar la última parte de la entrevista.

(Tercera parte de la entrevista)

Una vez que se ha realizado el estudio de las funciones de dos variables, se completa el acto matemático-cognitivo de la interpretación de $S = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (mx_i + b) \right]^2$ como una función de dos variables, por parte del sujeto. Es decir, se ha transitado satisfactoriamente por los procesos interpretativos *2i* y *2j*. Cuando se le cuestiona nuevamente sobre si esta expresión representa una función, él contesta:

"*Sí, de dos variables independientes (señala m y b) y una dependiente (señala S). De hecho, la puedo escribir como es (escribe S(m, b)). Lo demás es constante.*"

Que por sí sola, esta respuesta no nos daría elementos para inferir que eso ha ocurrido, sin embargo, el episodio siguiente en la entrevista nos muestra que el sujeto ha realizado el acto matemático-cognitivo en forma satisfactoria, sin dificultades respecto a la expresión que se está tratando:

L: Bien, entonces Eduardo, ¿qué falta por hacer para resolver el problema?
E: Tengo que derivar parcialmente respecto a m y a b, por separado y luego igualar a cero para ver dónde coinciden las pendientes que no tienen,…este,… ¿que no tienen pendiente?...no, espérame,…no,… las rectas tangentes de la superficie de la función que no tienen pendiente, o sea, donde la pendiente es cero. Sí, ahí donde coincidan debe estar el punto del mínimo.
L: ¿Dónde coincidan?, ¿cómo es eso?
E: Sí, es que puede ser que una de las derivadas sí me de valores al igualar a cero pero la otra no, no sé, depende de la función que se trate, tiene que cumplirse que las dos pendientes sean cero al mismo tiempo.

L: Bien, ¿y para la función que estamos tratando?

E: Bueno, es una sumatoria con un binomio al cuadrado…no hay nada que divida,…ni raíces,… no sé,… no tiene cosas que puedan hacer que las derivadas no existan y que entonces ya no sean cero las pendientes.

L: Ajá.

E: Es que si desarrollo el binomio me quedaría una cosa lineal, así (indica con sus manos en un renglón de una hoja),…bueno,…no lineal, si no que es como una ecuación de una recta o una parábola,…no tiene divisiones ni nada.

L: ¿Como un polinomio?

E: ¡Eso!, sí, como un polinomio. De hecho siempre es un polinomio, de grado dos.

L: Ok. ¿Es posible, como me decías al principio, que esta función tenga picos u otro comportamiento donde exista un mínimo pero las derivadas no sean cero allí?

E: Mmm, no,… las funciones de polinomios no tienen picos y además es una cuadrática,…entonces tampoco tiene puntos de inflexión ni asíntotas,…ninguna otra cosa.

De hecho, el sujeto no sólo tiene una imagen conceptual en términos del acto matemático-cognitivo y los procesos interpretativos involucrados, sino que hace uso de las características del comportamiento de las funciones de dos variables que ha estudiado. Particularmente, en relación al valor de las pendientes en un valor extremo de una función como la del tipo en cuestión. Sin embargo, es importante mencionar que si bien estas conductas son propiciadas por las características del diseño didáctico, también son resultado del nivel de conocimientos previos del sujeto entrevistado, situación que le facilita el tránsito en el proceso.

Los dos primeros procesos interpretativos correspondientes al acto matemático-cognitivo de la conceptualización de la derivada parcial, a saber,

2k. $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial m}$ *y* $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial b}$ simbolizan las derivadas parciales de f respecto a m y b

2l. $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial m}=0$ y $\dfrac{\partial f(m,b)}{\partial b}=0$ son la pendiente nula de f respecto a m y la pendiente nula de *f* respecto a *b*,

ocurren sin que sea necesaria una intervención del entrevistador. El sujeto simplemente usa el saber que posee respecto al comportamiento de las funciones en cuestión y la derivada parcial.

Los dos procesos interpretativos restantes se observan, de igual forma, sin dificultades. Es decir, el sujeto ha interpretado geométricamente las derivadas parciales y las ha determinado en el registro algebraico:

De forma tal que para *2m*, hay una notación explícita para las derivadas parciales de $\sum_{i=1}^{m}[y_i-(mx_i+b)]^2$, misma que está asociada a la idea (generalización) de pendiente de las rectas tangentes en las direcciones de *m* y *b* en algún punto arbitrario. La componente fenomenológica está constituida por el espacio -tanto el sistema coordenado tridimensional en papel, como el espacio real en que se desarrolla la experiencia, por ejemplo, considerando las paredes y el piso del aula como los planos que conforman el primer octante del sistema coordenado-, y además, por las situaciones que le dio origen (los puntos datos experimentales y las ideas básicas del método de mínimos cuadrados).

En *2n* se tiene una notación general asociada a pendientes nulas de rectas tangentes a la superficie *f*. La componente fenomenológica es la misma que en el proceso anterior.

Cuando se le cuestiona al sujeto sobre cuál es entonces la solución al problema, contesta:

"Este,… bueno, ya terminamos,… si ya tengo m y b despejados de aquí (señala el sistema de ecuaciones), ya nada más faltaría sustituir todos los valores de la tabla en las x´s y las y´s para ver cuánto valen,…
L: Ajá…

E: Y pues ya,… como empezamos el método, m es la pendiente y b la ordenada al origen, este,… de la recta mejor para los datos. Sólo hay que sustituir esos valores aquí (señala la ecuación y = mx + b),…esta es la función que se pedía,…o sea, el modelo matemático que se pedía en el problema."

Lo cual hace evidente que el sujeto tiene claridad, después de todo el proceso, sobre la meta a la que se quería llegar; realiza una *comunicación explícita de la respuesta* y con pleno *control* sobre la misma.

Finalmente, observamos que el sujeto conserva la motivación inicial y después del proceso valora los alcances de una experiencia de aprendizaje como ésta:

"L: Bueno Eduardo, una última pregunta, ¿qué alcances o ventajas le ves tu a la resolución de este problema?, o sea, no tanto a esta ecuación (señala y = mx + b) como solución, si no al hecho de resolver problemas como este?
E: Bueno,… pues que con todo lo que vimos es como se puede hallar la recta esta que modela mejor los datos y que,… es lo mejor porque así se resuelve el problema, o sea, tiene uno que saber todas las cosas, las definiciones, no sé,…saber cómo se deriva parcialmente, la pendiente como la derivada, o sea, lo que quiere decir la derivada en tres dimensiones,… todo.
L: ¿Qué opinas de las cosas nuevas que tuviste que aprender para resolver el problema?
E: A pues que está muy padre, es como Mate I, o sea,…en los temas, las mismas cosas pero ahora en tres dimensiones, no sé, es como más real,… y pues, más que nada, sirve para resolver un problema,…un problema que sí salió de algo real, y no sé, ha de servir para resolver otros, donde halla datos así (señala la tabla en el enunciado), de muestras como números de cosas reales."

4.4 Reflexiones sobre los análisis de resultados

La descripción que se realiza en este apartado se hace en base a la información que se presenta en tablas que resumen las principales observaciones realizadas en las experiencias de aprendizaje, respecto a la forma en que aparecen las funciones cognitivas en cada fase del proceso de resolución de los problemas.

Es importante señalar que sólo se describe en forma general sobre las reflexiones entre los dos tipos de experiencias de aprendizaje abordadas en la investigación y en términos del análisis ya descrito, a fin de realizar un estudio exploratorio (no es un objetivo de la investigación), de carácter cualitativo, sobre el funcionamiento cognitivo entre la experiencia basada en el sistema didáctico tradicional y la que se diseñó en el contexto de la ingeniería. Así mismo, la descripción se lleva a cabo en términos de las características propias del tipo de problemas abordados, es decir, considerando que el problema sin contexto en la ingeniería se tomó de una modalidad instruccional típica basada esencialmente en el aprendizaje por recepción y conservando tanto el programa oficial de estudios como el libro de texto utilizado en el curso de Matemáticas para Ingeniería III de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas en el ITESM Campus San Luis Potosi, mientras que el problema en contexto se diseñó a partir de los resultados del análisis preliminar de esta investigación y de la situación real de contaminación del agua en el ámbito regional de la ciudad de San Luis Potosí ya descrita al inicio de este capítulo.

Debe ser claro entonces que la intención no es realizar un estudio comparativo como un propósito formal de la investigación sobre las experiencias de aprendizaje, sino reflexionar sobre las características propias de cada una en términos exclusivamente de la teoría de las funciones cognitivas de Feuerstein.

Se presentan entonces las tablas correspondientes a cada fase del acto mental en el proceso de resolución de los problemas y enseguida se describen las reflexiones sobre el análisis.

Fase de entrada

Tablas de funciones cognitivas a nivel de comprensión de los problemas:

Tabla 1: sobre la experiencia en base a la didáctica tradicional.

Función cognitiva	Resultados
Percepción clara.	Aparece *percepción borrosa* debido a estimulación con información novedosa, nivel de complejidad, y cantidad de símbolos matemáticos.
Exploración sistemática de una situación de aprendizaje.	Aparece *impulsividad*.
Organización de la información.	No sucede en primera instancia debido a que no hay precisión sobre los datos.

Tabla 2: sobre la experiencia en contexto.

Función cognitiva	Resultados
Percepción clara.	Se observa una percepción clara de la situación problemática.
Exploración sistemática de una situación de aprendizaje.	Sucede eficientemente.
Organización de la información.	Se observan dificultades únicamente respecto a la importancia en el problema de las sustancias contaminantes a que se refiere.

En esta fase de entrada destaca que los conflictos observados en la experiencia basada en la didáctica tradicional, son provocados por la estructura del enunciado, no por deficiencias, al menos permanentes, en las funciones cognitivas de los estudiantes. Es decir, las dificultades que enfrentan son consecuencia de la forma en que se presenta el enunciado del problema, principalmente por el exceso de información (el enunciado incluye, de hecho, la explicación del método de mínimos cuadrados). Entonces se presentan disfunciones cognitivas temporales como la *percepción borrosa* y la *impulsividad*.

Además, es importante señalar que esta situación se acentúa debido a la escasa motivación hacia el aprendizaje observada en los estudiantes. El aspecto afectivo es fundamental. Como se ha indicado en el análisis preliminar, la ausencia de motivación tiene como consecuencia una considerable falta de atención a las actividades de aprendizaje. Los estudiantes tratan de eludir lo más posible las situaciones que demanden esfuerzo intelectual y se busca resolver el problema tratando de identificar lo que se ha de realizar operativamente aunque no se comprendan plenamente las ideas, conceptos y métodos involucrados.

Por el contrario, en la experiencia en contexto se observa una gran *motivación* tanto en la experiencia en el aula como en la entrevista, al tratar con una situación problemática real, cercana a su realidad y en el ámbito de su interés. Este resultado es muy importante porque hace una diferencia sustancial sobre la actitud de los estudiantes respecto a la experiencia preliminar: aquí se observa una predisposición para aprender, se crea un ambiente propicio para que los estudiantes estén dispuestos a esforzarse, a colaborar activamente en la resolución del problema. Se tiene entonces un espacio didáctico donde los estudiantes verdaderamente centran su *atención* en la actividad que realizan.

En relación al único punto en que se observó dificultad en esta fase de entrada sobre el problema en contexto, o sea, sobre la importancia de las sustancias contaminantes, inmediatamente después de que los estudiantes realizan la lectura del enunciado, se aclara que esa información se ofrece a fin de que ellos cuenten con datos específicos sobre la situación problema real, únicamente. Se les invita entonces a pensar y discutir sobre la utilidad que puede tener esa información considerando lo que se les pide realizar en el enunciado. No se observa mayor dificultad en este aspecto.

Fase de elaboración

Tablas de funciones cognitivas a nivel del proceso de la resolución de los problemas:

Tabla 1: sobre la experiencia en base a la didáctica tradicional.

Función cognitiva	Resultados
Percepción y definición de un problema.	No se delimita con precisión el problema específico en términos de la meta a la que se quiere llegar.
Interiorización y representación mental.	Aparece sin dificultades aunque la codificación de información es afectada por los conflictos iniciales y los conocimientos previos.
Planificación de la conducta.	Se observa afectada por la *percepción borrosa* inicial.
Conducta comparativa.	No se aprecian dificultades.
Pensamiento hipotético.	Aparece eficientemente pero las concepciones previas provocan conflictos con las interpretaciones de los nuevos objetos de conocimiento.
Evidencia lógica.	Aparece sin dificultades aunque se usa en base a concepciones previas equivocadas.

Tabla 2: sobre la experiencia en contexto.

Función cognitiva	Resultados
Percepción y definición de un problema.	Se observan conflictos provocados por conocimientos y formas de enseñanza y aprendizaje previos.
Interiorización y representación mental.	Sin dificultades.
Planificación de la conducta.	Aparece eficiente durante toda la fase. Las condiciones en algunos momentos del proceso de resolución inducen a modificar lo planeado originalmente.
Conducta comparativa.	Sin dificultades. Es una función básica en todo el proceso de resolución del problema.
Pensamiento hipotético.	Se observa eficiente. Los supuestos e hipótesis aparecen siempre en función de los conocimientos previos (aunque esto provoca inferencias y generalizaciones sin una exploración sistemática de la situación de aprendizaje).
Evidencia lógica.	No se aprecian dificultades.

Respecto a la experiencia sin contexto en la ingeniería, se pudo observar que la *percepción borrosa* (señalada en la fase de entrada) permanece, de alguna manera, durante todo el proceso de resolución. Esto afecta directamente la *percepción y definición del problema*. De hecho, esta situación fue común tanto en la experiencia con el grupo en el aula, como en las entrevistas realizadas. Los estudiantes actúan mecánicamente al poner en práctica el método que conocen para calcular un valor extremo de una función de dos variables, y pierden de vista la meta en la resolución del problema.

Además, las operaciones cognitivas de los estudiantes aparecen siempre determinadas por el conocimiento previo que poseen. Por ejemplo, de las experiencias de aprendizaje en el curso antecedente de cálculo multivariable, estos estudiantes han interiorizado que las funciones de dos variables importantes en el proceso para determinar un valor extremo mínimo (sin importar su origen), son aquellas que tienen en el punto crítico correspondiente, un plano tangente horizontal. Otros tipos de funciones de dos variables (por ejemplo, con puntos silla o picos), aún interiorizadas, quedan en la memoria del estudiante en un nivel de esquemas mentales secundario, debido a que se le da prioridad al estudio de las primeras. Este hecho influye decisivamente en los actos observados. Sin la mediación del profesor, los estudiantes resuelven el problema en base a la *automaticidad*, esto es, emplean el procedimiento que conocen para determinar un valor extremo (derivar, igualar a cero y resolver el sistema de ecuaciones), sin reflexionar sobre la naturaleza de la expresión que están tratando, es decir, sin considerar el tipo de objeto matemático ni el comportamiento que tiene. La propia estructura del enunciado del problema provoca esta conducta puesto que se asume que los estudiantes no tienen dificultades con los conocimientos del cálculo diferencial en dos variables independientes y que entonces sólo se ha de entender lo que se pide para resolverlo.

Este tipo de situaciones no se presentan en las experiencias en contexto. Las características propias del diseño hacen que el problema sea un elemento didáctico que motiva los actos de aprendizaje de las ideas, nociones, conceptos y métodos del cálculo que son necesarios para su resolución. Entonces, el nuevo conocimiento es resultado de la interacción entre los nuevos objetos matemáticos de estudio y el conocimiento previo sobre el cálculo diferencial de una variable real. El funcionamiento cognitivo está orientado hacia la obtención de nuevas metas, hacia el aprendizaje de las herramientas matemáticas que posibiliten dar solución al problema planteado. Por esto es que, por ejemplo, la *planificación de la conducta* en los estudiantes, aparece con características muy distintas respecto a las experiencias basadas en la didáctica tradicional. Mientras que en la experiencia en contexto los esfuerzos están dirigidos a la obtención del nuevo conocimiento, en la otra se limitan a la localización de lo que se pide realizar en el enunciado del problema, para entonces únicamente usar un conocimiento que ya poseen. Algo similar ocurre con el uso de la función cognitiva del *pensamiento hipotético*: los supuestos que los estudiantes asumen en sus procesos de pensamiento para resolver los problemas, son también de características muy diferentes. En la experiencia en contexto tales supuestos aparecen como un elemento de enlace entre el saber previo y la nueva situación de aprendizaje, para la construcción del conocimiento necesario para la resolución del problema. Por su parte, en la experiencia sin contexto en la ingeniería, los supuestos de los estudiantes giran en torno a la viabilidad de emplear lo que ya conocen, a la expresión que se pide minimizar en el enunciado del problema.

En la experiencia de los estudios preliminares, los procesos cognitivos de los estudiantes están influenciados y determinados por las características de la enseñanza tradicional. Resolver un problema significa aplicar un procedimiento, un algoritmo o método ya utilizado previamente en algún ejemplo que ha presentado el profesor. No hay distinción sobre realizar un ejercicio o resolver un problema. Esto condiciona el funcionamiento cognitivo del que enfrenta la situación de aprendizaje. Por ejemplo, en esta experiencia, los estudiantes consideran que la situación que se les presenta sí es un problema, pero esto es debido a la estructura del enunciado, aunque finalmente lo que se requiera para resolverlo sea un procedimiento que ellos ya conocen y que han practicado en innumerables ejercicios. El problema entonces (desde la perspectiva de estos estudiantes), es localizar lo que se pide realizar en el enunciado, sin importar que no se comprenda en qué consiste el método de mínimos cuadrados que allí se explica. De esta forma, el funcionamiento cognitivo involucrado en la conducta que se asume, se limita a la obtención de ese logro. No se presenta mayor esfuerzo cognitivo porque además de que no se necesita, al estudiante no le interesa.

La forma en que se presenta una situación de aprendizaje es determinante en el logro de los objetivos sobre lo que se pretende aprendan los estudiantes. Los recursos didácticos (en cuanto a la estructura de los materiales) usados para tratar una situación de aprendizaje, influyen decisivamente en los formas de conducta que asumen los sujetos a la experiencia. Esto condiciona, definitivamente, su funcionamiento cognitivo. Por ejemplo, en la entrevista realizada sobre la resolución del problema en contexto, al abordar el proceso interpretativo de la interpretación o reconocimiento de la expresión $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ como una función de dos variables, el sujeto, de manera natural, interpreta la idea de determinar el mínimo de la suma del cuadrado de las distancias, como $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2 = \textit{mínimo}$. Esto le permite reconocer una ecuación en forma inmediata y se facilita entonces el tránsito en dicho proceso interpretativo. Se puede inferir que esta conducta ocurre como producto de la forma en que se desarrolla la experiencia de aprendizaje en contexto. Se propicia allí que los estudiantes tengan las condiciones para realizar este tipo de acciones que involucran funciones y operaciones cognitivas específicas, en un nivel de eficiencia que no se observa en las experiencias sin contexto en la ingeniería. Este es un aspecto relevante porque nos deja ver las consecuencias a nivel cognitivo en el que aprende, como se ha señalado, de la forma en que se presenta y desarrolla una experiencia de aprendizaje. Las palabras (y el lenguaje en general), símbolos (matemáticos y de otra índole), la forma en que se estructuran las ideas y los momentos en que se presentan en el proceso de aprendizaje, influyen decisivamente en las conductas e interpretaciones de los receptores de la información.

Fase de salida

Tablas de funciones cognitivas a nivel de respuesta a los problemas:

Tabla 1: sobre la experiencia en base a la didáctica tradicional.

Función cognitiva	Resultados
Comunicación explícita.	Aparece eficiente en general, una vez que los estudiantes tienen claridad sobre lo que se pide en el problema, sin embargo, se observan casos de comportamiento egocéntrico.
Precisión y exactitud en la respuesta.	No ocurre sin la mediación del profesor. (como consecuencia de la disfunción en la percepción y definición del problema)
Control de la respuesta.	Aparece, salvo algunas excepciones, sólo con la intervención del profesor.

Tabla 2: sobre la experiencia en contexto.

Función cognitiva	Resultados
Comunicación explícita.	Aparece sin dificultades cuando es resultado de una pregunta directa, pero algunos estudiantes no redactan su respuesta en términos de lo que se pide realizar en el problema.
Precisión y exactitud en la respuesta.	Se observa sin deficiencias.
Control de la respuesta.	Sin dificultades.

En esta fase de salida se puede señalar que en la experiencia basada en la didáctica tradicional, ninguna de las funciones cognitivas involucradas se manifiesta en forma inmediata. Esto, como consecuencia de la *percepción borrosa* y de la disfunción en la *percepción y definición del problema* que se observó durante todo el proceso de resolución. Estas disfunciones cognitivas impidieron que los estudiantes tuvieran claridad sobre la meta a la que se tenía que llegar. Nunca tuvieron dominio sobre el punto en que debían terminar el procedimiento de carácter cognitivo automático que usaron en la resolución. Como ya se ha explicado, los estudiantes realizaban los pasos que conocían para calcular un valor extremo (derivar, igualar a cero y resolver) sin reflexionar sobre el momento en que ya contaban con los elementos para contestar lo que se pedía.

Cabe señalar que estos hechos no son producto de actos de descuido o de incapacidad para reflexionar sobre el propio proceso de resolución que realizaban estos estudiantes (aunque pudiera haber dificultades en este sentido), sino del efecto de las disfunciones mencionadas. Y también se debe aclarar que tales disfunciones son locales, es decir, suceden en un acto mental específico y son provocadas por la forma en que se abordan y desarrollan las experiencias de aprendizaje. En ningún caso se pueden atribuir a un estado de disfunción permanente ni a factores propios del desarrollo psíquico.

Estas dificultades no aparecen en la experiencia en contexto. La razón principal es que en este caso, sí se requiere realizar todo el proceso que involucra el método de mínimos cuadrados. De hecho, esa es la idea central en el diseño del problema, como ya se ha explicado. Entonces, la propia estructura del escenario propicia que la percepción del problema sea clara de inicio y los estudiantes conservan la meta en todo el proceso de resolución.

Finalmente, es importante señalar que las funciones cognitivas tratadas en estas reflexiones son las que se observaron en las experiencias de aprendizaje ya descritas en las secciones anteriores; no se seleccionaron en forma arbitraria (de hecho no se establecieron previamente) o por diseño (no se determinaron porque hubiera algún interés particular sobre algunas de ellas), sino porque son las que surgieron en el proceso de resolución del problema. Esto no significa, por supuesto, que sean las únicas funciones cognitivas que aparecen en la resolución de un problema matemático, sin embargo, para los fines de esta investigación se consideró importante delimitar el estudio a las funciones cognitivas implicadas en el proceso de resolución del tipo de problemas[7] involucrados en las experiencias de aprendizaje analizadas (sobretodo considerando que este trabajo constituye una primera aproximación al uso de la teoría cognitiva de Reuven Feuerstein en investigación en Matemática Educativa; al menos en lo que se refiere al aprendizaje del cálculo en el nivel superior de enseñanza y en una situación contextualizada). En este sentido es que el análisis cognitivo preliminar sirvió para este propósito.

El hecho de que haya funciones cognitivas que no aparecen en los análisis cognitivos de las experiencias tratadas, se debe principalmente al nivel de desarrollo cognitivo natural de los estudiantes sujetos a la investigación (considerando su edad como principal parámetro). Por ejemplo, en la fase de entrada los estudiantes sujetos a la experiencia no observan dificultad o deficiencia alguna con la función cognitiva de *habilidades lingüísticas a nivel de entrada*, es decir, no muestran incapacidad para entender las palabras y términos usados en el problema en cuanto a su estructura lingüística o reglas verbales. Las dificultades están, más bien, en relación al significado conceptual de algunas palabras y símbolos como "desviación vertical", "mínimos cuadrados", "minimiza", $d_i = y_i - (mx_i + b)$, $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$, etc.). Tampoco aparecen disfunciones asociadas a la *orientación espacial* o a la *orientación temporal*.

De igual forma, en la fase de elaboración, por ejemplo, no se observaron conflictos en el análisis en contexto, sobre la función cognitiva de *selección de información relevante,* porque es una función que de acuerdo a la definición de Feuerstein, se refiere a la información que ya posee el estudiante en su memoria a largo plazo, y las dificultades

[7] Problemas en los que para su resolución se requiere del conocimiento (para el caso de la experiencia basada en la didáctica tradicional) o del aprendizaje (experiencia en el contexto de la ingeniería) de un método matemático particular, el llamado de *mínimos cuadrados*, y que a su vez involucra contenidos específicos (función de dos variables y la derivada parcial) del cálculo diferencial de dos variables reales independientes.

observadas se presentaron sobre todo en relación a la información ofrecida en el enunciado del problema, es decir, en la información novedosa para los estudiantes. Además, los conflictos observados asociados a los conocimientos previos de los alumnos, se presentaron en relación a procedimientos o algoritmos parcialmente olvidados[8] o a concepciones erróneas (como las asociadas al significado del símbolo Σ), pero no en relación a su *capacidad* cognitiva para recuperar tales conocimientos. De la misma forma, tampoco se observaron disfunciones asociadas a la función de *organización y estructuración perceptiva*, es decir, no aparecen deficiencias asociadas a la orientación y establecimiento de relaciones entre las ideas y nociones matemáticas en juego en la resolución del problema. Las dificultades en este sentido se presentaron más bien respecto a las relaciones conceptuales[9] de tales ideas y nociones, pero no como una incapacidad cognitiva.

Respecto a la fase de salida, tampoco se observaron, por ejemplo, las funciones cognitivas de *reglas verbales para comunicar la respuesta* y *respuestas por ensayo-error*. La primera de ellas porque las dificultades observadas no se referían al uso de reglas verbales, sino a disfunciones como la *impulsividad* y el *bloqueo* producto de la no *definición del problema* desde la fase de entrada y la consecuente pérdida de la meta final en el proceso de resolución. La segunda función, porque implica una conducta que no se requiere en el tipo de problemas empleados en estas experiencias de aprendizaje (y no porque los estudiantes sean capaces o no de hacer pruebas de ensayo-error).

[8] Como el procedimiento para determinar un valor extremo mínimo de una función de dos variables reales.
[9] Por ejemplo, las relaciones entre las ideas previas de los estudiantes sobre lo que significa “minimizar” y el significado matemático asociado a este término.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES, OBSERVACIONES Y SUGERENCIAS

Se describen las conclusiones del trabajo de investigación así como algunas observaciones y sugerencias sobre posibles investigaciones futuras en base a los resultados obtenidos.

5.1 Conclusiones

Del análisis e interpretación de la información obtenida en las observaciones a la luz de las teorías cognitivas utilizadas, se obtuvo una amplia descripción del funcionamiento cognitivo del grupo de estudiantes sujetos a las experiencias de aprendizaje.

En particular, respecto al problema de investigación planteado mediante la pregunta ¿qué sucede en el aspecto cognitivo en los estudiantes de cálculo cuando el proceso de aprendizaje se realiza en escenarios contextualizados de la ingeniería?, se concluye que se ha encontrado evidencia (véanse los apartados sobre análisis de resultados del Capítulo 4) de que cuando los conceptos y métodos del cálculo diferencial en dos variables independientes se tratan en escenarios del *contexto de la ingeniería*, el estudio de contenidos matemáticos adquiere *sentido* para los estudiantes y sucede, en términos generales, un aprendizaje con significado particular en el ámbito de su formación profesional. De la misma manera, todo parece indicar que las *funciones cognitivas* y los procesos mentales operativos[10] que permiten una adecuada codificación e interiorización de la información tratada, aparecen en forma eficiente como producto de la *atención* y esfuerzo que los estudiantes brindan a las actividades de aprendizaje, y que a su vez resultan de la *motivación* observada al abordar el problema en un contexto de su interés.

[10] Clasificación, análisis, síntesis, etc.

Respecto a los supuestos de investigación planteados, los resultados del trabajo realizado muestran que en el escenario contextualizado en la ingeniería que se utilizó, el funcionamiento cognitivo de los estudiantes propició un aprendizaje significativo de los contenidos de cálculo abordados, en el ámbito de su área de especialidad en ingeniería. Tal aprendizaje significativo se logró tanto por las características de la situación problemática utilizada (que resultó una tarea potencialmente significativa), como por la actitud positiva de los estudiantes ante esa situación, lo cual es concordante con lo que se señala en Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H., (1978) en el sentido de que un aprendizaje es significativo si el estudiante tiene *"una disposición para relacionar de manera significativa el nuevo material de aprendizaje con su estructura existente de conocimiento"*, y si la tarea de aprendizaje *"consiste en sí de un material razonable o sensible y si puede relacionarse de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva del estudiante particular"*.

Se debe remarcar además, que la eficiencia observada en el funcionamiento cognitivo de los estudiantes en las experiencias en contexto, se debe también, en una parte importante, al propio diseño del escenario empleado y sus implicaciones didácticas, en particular a la idea básica de presentar el problema a los alumnos antes de cualquier contacto con los contenidos del cálculo diferencial de dos variables involucrados, como se establece en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias (Camarena 2000). Esto permitió que la situación problemática, además de proporcionar un contexto específico de interés, fungiera como el elemento rector de las acciones a realizar a fin de resolver la propia situación y representara también, un verdadero problema.

La implementación de esta idea constituye un elemento didáctico de una gran riqueza en la teoría de la matemática en contexto. Como se explicó en la descripción de los resultados (Capítulo 4), el escenario didáctico contextualizado resultó un factor de notable motivación hacia el aprendizaje. Las características propias del diseño (y principalmente la idea en cuestión) motivaron los actos de aprendizaje de las nociones, conceptos y métodos del cálculo que fueron necesarios para su resolución. Así, el nuevo conocimiento fue resultado de la interacción entre los nuevos objetos matemáticos de estudio y el conocimiento previo sobre el cálculo diferencial de una variable real que los estudiantes poseían. El funcionamiento cognitivo estuvo siempre orientado hacia la obtención de nuevas metas, hacia el aprendizaje de las herramientas matemáticas que les permitieran dar solución al problema planteado.

Además, el texto del escenario didáctico hace explícito el tema (en este caso la contaminación provocada por una empresa industrial) que proporciona, en parte, el contexto en la ingeniería. Este es uno de los factores más importantes sobre el aspecto afectivo en los estudiantes, principalmente cuando abordan una experiencia de aprendizaje y tratan de comprenderla, situación cuya importancia es reconocida por varios autores, por ejemplo, Schunk (1997) señala que "*Uno de los factores dirigidos conceptualmente más importantes de la comprensión es el tema general del material. La expectativa del que comprende sobre el tema de un pasaje puede servir como un sistema para la comprensión del material. El tema global de un pasaje puede afectar notablemente a casi todos los aspectos de la comprensión*". Y como se ha señalado, cuando el tema global es además del área de interés de los estudiantes, se puede lograr satisfactoriamente la comprensión del problema y se propician las condiciones para que suceda el aprendizaje de las ideas, nociones y conceptos matemáticos necesarios para encontrar la solución.

Por otra parte, se puede afirmar que se logró el objetivo general de la investigación de *analizar las funciones cognitivas de estudiantes de cálculo en experiencias de aprendizaje de la derivada parcial en el contexto de la ingeniería* (ver Capítulo 4). Este objetivo implicaba, necesariamente, el análisis de todo el proceso para tratar un problema en contexto en los términos en que lo establece Camarena (2000). A su vez, esto condujo a realizar el análisis cualitativo global del aprendizaje en base a los procesos interpretativos y los actos matemático-cognitivos, en relación al método de mínimos cuadrados. Cabe señalar que aún y cuando el objetivo general se planteó en relación al concepto de función de dos variables y a la derivada parcial como conocimientos matemáticos de interés, debido a la implicación mencionada de analizar todo el proceso de resolución del problema, fue necesario también estudiar un algoritmo: el correspondiente al método empleado en cálculo multivariable para determinar un valor extremo, el cual constituyó de hecho, el tercer acto matemático-cognitivo de aprendizaje analizado en la investigación.

De la misma forma, se lograron los objetivos particulares de (1) determinar los contenidos de cálculo que se usan en el área de especialidad académica de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas. Se estableció que tales contenidos aparecen en las áreas de especialidad sobre *análisis de regresión* y el *análisis y diseño de experimentos*, y que los conocimientos matemáticos de mayor relevancia son los que conciernen al método de mínimos cuadrados para correlación de datos experimentales; (2) analizar las funciones cognitivas de estudiantes de cálculo en una experiencia de aprendizaje basada en el sistema didáctico tradicional (se describe en el Capítulo 3); y (3) analizar las funciones cognitivas de estudiantes de cálculo en una experiencia de aprendizaje en el contexto de la ingeniería (descritas en el Capítulo 4). Las funciones cognitivas que aparecieron y fueron objeto de análisis en la resolución de los problemas matemáticos estudiados, fueron las siguientes: a nivel de entrada: *percepción clara, exploración sistemática de una situación de aprendizaje y, organización de la información;* a nivel de elaboración: *percepción y definición de un problema, interiorización y representación mental, planificación de la conducta, conducta comparativa, pensamiento hipotético y evidencia lógica;* a nivel de salida: *comunicación explícita, precisión y exactitud en la respuesta y control de la misma.*

Se debe resaltar que la teoría cognitiva de Reuven Feuerstein permitió realizar el análisis cognitivo en términos de las funciones que subyacen (como prerrequisitos para el aprendizaje, en el sentido en que se definen en la teoría) a las operaciones mentales, en todo el procesamiento de la información al resolver el problema en el contexto de la ingeniería, que era el principal propósito de la investigación. De hecho, sin este soporte teórico no se hubiera podido abordar el problema de investigación en la dirección deseada. La explicación de algunas conductas como la *impulsividad*, la *exploración sistemática*, el *pensamiento hipotético* y la *conducta comparativa*, no se hubieran podido estudiar sin esta teoría, al menos no con los elementos necesarios para justificar las observaciones realizadas.

A su vez, el modelo teórico para el análisis de significados locales en cada *proceso interpretativo*, que se empleó como un soporte de apoyo en las experiencias de aprendizaje, resultó fundamental en las interpretaciones sobre las observaciones realizadas en relación, específicamente, al proceso de aprendizaje de las ideas, nociones y conceptos involucrados en cada *acto matemático-cognitivo* básico en la resolución del problema.

En el estudio previo (y durante el propio diseño) de las características didácticas de la experiencia de aprendizaje en el contexto de la ingeniería, se detectó la necesidad de organizar el análisis en torno a los actos mentales de aprendizaje que involucran los principales conceptos y procesos matemáticos centrales en la comprensión y desarrollo del método de mínimos cuadrados, a saber: el concepto de función de dos variables, el concepto de derivada parcial y el proceso para determinar un valor mínimo. Dadas sus características, se llamó *actos matemático-cognitivos* de aprendizaje a dichos actos mentales. Los cuales, como se explicó en la descripción de la experiencia en el contexto de la ingeniería de este reporte (Capítulo 4, Sección 4.1), consisten de los hechos concretos del acto mental en que sucede el aprendizaje de una idea, noción o concepto matemático (o incluso un proceso algorítmico) y que está constituido por al menos un *proceso interpretativo* (cada elemento simbólico que interviene en el acto mental de resolver un problema y está conformado tanto por la notación simbólica, como por lo que representa en el ámbito de ese problema) que a su vez contiene las entidades básicas del triángulo epistemológico *fenomenologías-notaciones-generalizaciones*. Este elemento teórico permitió la orientación de las observaciones en la investigación y la descripción de los elementos de aprendizaje involucrados en la experiencia. Los procesos interpretativos para el análisis de las componentes conceptuales, es decir, las nociones e ideas matemáticas (fenomenologías), las definiciones conceptuales (generalizaciones) y el sistema de símbolos (notaciones), resultaron, en cierta forma, insuficientes por sí solos para el tipo de estudio que se quería realizar. En particular, se necesitaba de un recurso teórico que permitiera identificar, definir y analizar los puntos medulares en el proceso de resolución del problema, tal y como se concibió en el diseño. Esto es, considerando que ése proceso de resolución implicaba el aprendizaje de los conocimientos necesarios del cálculo diferencial en dos variables independientes, lo que a su vez implicaba el diseño de la secuencia de actividades a realizar en las experiencias de aprendizaje con ese fin. El recurso teórico que hubo necesidad de definir en el proceso, como se ha señalado, es el que constituyen los *actos matemático-cognitivos* de aprendizaje. Para el caso particular de la investigación, los actos objeto de estudio estuvieron constituidos por (1) la interpretación (reconocimiento) de $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ como una función de dos variables, (2) la conceptualización de la derivada parcial y (3) el estudio del proceso para determinar un valor mínimo de una función de dos variables.

Respecto a las funciones cognitivas en particular, es muy importante mencionar que los conflictos observados en la experiencia basada en la didáctica tradicional, no son producto de incapacidades atribuibles a factores propios del desarrollo cognitivo, ni a un estado de disfunción permanente, sino al efecto de las disfunciones locales que aparecieron en actos mentales específicos y que fueron provocadas principalmente por la forma en que se abordaron y desarrollaron esas experiencias de aprendizaje. Es decir, tales disfunciones se observaron como consecuencia de la exposición de los estudiantes al escenario común de enseñanza utilizado (clases típicas donde el profesor asume el rol principal, primero expone los temas y después propone ejercicios y problemas a resolver a sus alumnos) lo que provocó que afloraran sesgos de pensamiento adquiridos en ellos a lo largo de su historia escolar, como la idea de que los conocimientos matemáticos que aprenden no les serán de utilidad y que el saber matemáticas se reduce a la aplicación de fórmulas o al uso de procedimientos y métodos.

De hecho, en la investigación se emplea la teoría cognitiva de Reuven Feuerstein considerando que las funciones cognitivas (como parte del aparato psíquico) están ya desarrolladas en cuanto capacidades mentales en los estudiantes (dada su condición de edad adulta) y entonces los esfuerzos se dirigieron al análisis de las mismas en términos de los factores que las inhiben[11] o provocan un funcionamiento cognitivo deficiente. Este es un aspecto importante porque la teoría en cuestión fue elaborada primeramente para dar cuenta del estudio del funcionamiento cognitivo en niños y adolescentes, susceptibles (como sujetos en desarrollo psíquico) de observar ciertas incapacidades para realizar determinadas funciones cognitivas (Feuerstein, R. 1977). Entonces, el uso de la teoría desde la perspectiva de esta investigación, implica la consideración de que la *madurez mental* no garantiza la eficiencia de las funciones cognitivas en un acto mental de aprendizaje. Sobre todo cuando ese acto mental es afectado por el sistema de creencias, costumbres, hábitos de estudio y otros factores socioculturales respecto al conocimiento que se aborda; en este caso, el conocimiento matemático.

5.2 Observaciones y sugerencias

Se ofrecen a continuación algunas observaciones y sugerencias sobre el trabajo realizado.

Respecto a los elementos teóricos utilizados en la investigación para el análisis de las ideas, nociones y conceptos matemáticos, se considera que los actos mentales de aprendizaje ocurren cuando el estudiante transita adecuadamente por los *procesos interpretativos* involucrados en cada uno, es decir, cuando el estudiante tiene la capacidad de interactuar entre las *fenomenologías*, *notaciones* y *generalizaciones* que constituyen cada proceso interpretativo en el acto mental.

De esta forma, considerando la teoría cognitiva de Feuerstein utilizada para el análisis de un acto mental de aprendizaje específico en la fase de elaboración de la resolución de un problema, se debe establecer el *acto matemático-cognitivo* de interés, identificar los *procesos interpretativos* involucrados y definir las *fenomenologías, notaciones y*

[11] Por ejemplo, se observó que la función de *percepción y definición de un problema* se inhibía en la experiencia basada en el sistema didáctico tradicional, en el tránsito de la fase de entrada a la de elaboración, porque prevalecía en los estudiantes el impulso de iniciar el trabajo analítico de resolución del problema, antes de definir con precisión lo que se pedía realizar en el mismo. Se inhibía entonces, en el sentido de que esta función no aparecía (como consecuencia del impulso mencionado) en el proceso, pero no debido a una incapacidad mental de los estudiantes.

generalizaciones para cada uno de ellos. Una vez que se realiza la experiencia de aprendizaje, se debe analizar el funcionamiento mental operativo (uso de analogías, comparaciones, análisis, síntesis, etc.) en términos de las *funciones cognitivas* que le subyacen. Para el caso particular en la investigación (fase de elaboración), las funciones de *percepción y definición de un problema, interiorización y representación mental, planificación de la conducta, conducta comparativa, pensamiento hipotético y evidencia lógica.*

Estas observaciones son importantes porque muestran la forma en que se integraron los elementos teóricos específicos para el estudio de contenidos matemáticos con los correspondientes a la teoría cognitiva de Feuerstein en el desarrollo del trabajo. Este uso de las teorías que soportaron la investigación permitió, como se ha señalado, analizar el funcionamiento cognitivo de los estudiantes sujetos a las experiencias, desde las funciones cognitivas que permiten la operatividad mental en cuanto a capacidades, hasta la forma en que ocurre el aprendizaje concreto de conceptos matemáticos. Y son importantes además, porque esta investigación no tenía como objetivo estudiar el logro del aprendizaje en sí mismo, sino más bien, el análisis específico del funcionamiento cognitivo. Sin embargo, aunque no era un objetivo en la tesis, esta forma de integración de los elementos teóricos utilizados, posibilita el estudio y a la vez ofrece los referentes para interpretar y explicar, aunque sea en forma incipiente, sobre las capacidades que debe mostrar un sujeto cuando ha realizado satisfactoriamente un acto mental de aprendizaje; lo cual implica el logro del aprendizaje mismo dado que el acto mental tiene ese fin: el acto mental de aprendizaje implica un *proceso* cognitivo y el aprendizaje en sí mismo, es una consecuencia de ese proceso.

Por ejemplo, se puede decir que un estudiante ha interpretado o ha logrado reconocer la expresión $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ como una función de dos variables (acto matemático-cognitivo), lo cual implica aprendizaje de las ideas y nociones en juego, cuando es capaz de (1) establecer una representación simbólica funcional (notación) en las variables *m* y *b*, (2) puede asociar la idea matemática de la noción de función de dos variables (generalización) y (3) muestra competencia en las representaciones geométricas en el sistema tridimensional (fenomenología). La situación que dio origen a esta expresión (los puntos datos experimentales proporcionados en el enunciado del problema y la idea básica del método de mínimos cuadrados) también es parte del aspecto fenomenológico de este acto mental. Y para el logro de esta interpretación es necesario que aparezcan en forma adecuada las funciones cognitivas de conducta comparativa, pensamiento hipotético, evidencia lógica e interiorización y representación mental. Cuando aparecen disfunciones en el acto mental de aprendizaje, los sujetos muestran cierta incapacidad para realizar los puntos señalados. Uno de los ejemplos más claros de esta situación es la presencia de la *impulsividad* cuando se intenta describir qué representa la expresión de sumatoria en cuestión como objeto matemático.

Los *actos matemático-cognitivos* de aprendizaje juegan un papel central en este tipo de interpretaciones del funcionamiento cognitivo porque representan los puntos medulares respecto al aprendizaje de nociones y conceptos matemáticos en el proceso de resolución de un problema. Por esto, se enfatiza que la definición propuesta para "acto matemático-cognitivo" y su uso en el análisis de tal funcionamiento en una situación de aprendizaje en los términos en que se empleó en esta investigación, constituye una contribución a la disciplina de la Matemática Educativa.

Cabe aclarar que independientemente de las posibilidades que este recurso pueda tener como elemento teórico de apoyo en este tipo de investigaciones (considerando que es un elemento que surgió y se definió en la investigación como necesidad en el proceso de diseño y análisis de la experiencia contextualizada), en ésta en particular resultó ser muy valioso para el logro de un análisis más completo del funcionamiento cognitivo de los estudiantes en esta experiencia de aprendizaje en el contexto de la ingeniería.

Otro aspecto importante que se desprende de esta investigación, es la observación de la importancia que tiene en este tipo de experiencias, la *mediación* del profesor en el proceso de aprendizaje. Por ejemplo, se pudo observar que algunos estudiantes enfrentan disfunciones cognitivas que, sin la intervención del profesor, probablemente no serían superadas y como consecuencia, los estudiantes tal vez no reflexionarían, por ejemplo, sobre la importancia de comprender la naturaleza de los objetos que están tratando. Un estudiante bien podría, como se observó en el análisis preliminar, derivar la expresión $\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-(mx_i+b)\right]^2$ (una vez que conoce la forma algebraica para determinar una derivada parcial) y proseguir con el proceso de resolución en términos operativos, sin reparar en la naturaleza de tal expresión y sin considerar, en particular, si representa una función o no. Situación que de acuerdo al modelo teórico y propósito del trabajo, resultó en uno de los actos matemático-cognitivos de aprendizaje básicos en el análisis.

De hecho, se puede indicar como resultado del trabajo, que el diseño de una situación problemática en contexto (y de todo el escenario didáctico y la secuencia de actividades a realizar), con fines de aprendizaje en el sentido en que se ha concebido en esta investigación, implica necesariamente la mediación del profesor. Requiere de su intervención para guiar el proceso, para explicar sobre aspectos particulares de las ideas, nociones y conceptos que se tratan cuando es necesario, y sobre todo, para ayudar al estudiante cuando se enfrenta a una situación de disfunción o ineficiencia de alguna función cognitiva en los actos de aprendizaje.

La mediación fue necesaria incluso en la realización de las entrevistas (como se señaló al final del análisis de las mismas, Capítulo 3, Sección 3.2.3), sobre todo en la experiencia del estudio preliminar, la cual fue basada en la didáctica tradicional. Y fue necesario debido principalmente a las características del problema empleado: la extensión del enunciado, el exceso de información (incluía la explicación del método de mínimos cuadrados) y su completa desvinculación con las áreas de interés de los estudiantes sujetos a la experiencia; lo cual propició la aparición muy temprana –en la fase de entrada- de disfunciones cognitivas como la *impulsividad* y la *percepción borrosa*, mismas que bloqueaban el desarrollo del proceso de resolución e impedían la observación del funcionamiento cognitivo en las fases posteriores. Entonces, sin la intervención del entrevistador como guía en ese proceso, los sujetos no superaban el bloqueo mencionado y se volvía imposible la obtención de la información buscada.

Por otra parte, respecto a las sugerencias que se pueden desprender del trabajo, se consideran las siguientes:

En relación a la fase de entrada en el proceso de resolución de un problema:

De acuerdo a la teoría de las funciones cognitivas y a los resultados obtenidos en la investigación, se puede indicar que *comprender* lo que trata un problema desde un enunciado escrito, significa *explorar sistemáticamente* la situación, *organizar eficientemente la información* dada y como consecuencia, lograr una *percepción clara* del problema. Sin embargo, esta apreciación de lo que significa comprender, surge en el ámbito de la teoría y las experiencias de aprendizaje tratadas, y los resultados del trabajo son parciales en este sentido porque no era un objetivo de la investigación el centrar los análisis sobre esta fase del procesamiento de la información. Entonces, este es un aspecto que requiere de estudios particulares orientados a precisar lo que entendemos por comprensión, desde la perspectiva de la Matemática Educativa y en particular desde la matemática en contexto, porque es un elemento básico cuando se aborda un problema matemático en base a las etapas[12] de esta línea de investigación (el *planteamiento del problema* por parte de quien lo aborda, por ejemplo, requiere de la comprensión sobre lo que trata el mismo).

En relación a la fase de elaboración:

Si bien se logró realizar el análisis propuesto de las funciones cognitivas involucradas en el proceso de resolución del problema matemático en el contexto de la ingeniería, quedan pendientes de investigación algunos aspectos que se desprenden de los resultados de este trabajo, entre ellos: (1) profundizar en el análisis de las relaciones entre el funcionamiento mental operativo (respecto a los esquemas matemáticos ya establecidos en la memoria y los nuevos conocimientos) y las funciones cognitivas subyacentes, considerando que este trabajo constituye en realidad una primera aproximación sobre el uso de la teoría cognitiva

[12] Ver la sección sobre el marco teórico de este reporte (páginas 13 y 14).

de Feuerstein en el cálculo diferencial de dos variables; (2) investigar sobre las funciones cognitivas que no emergieron en esta experiencia y que podrían aparecer en la resolución de problemas que involucran otros contenidos matemáticos del cálculo u otros escenarios didácticos; y (3), realizar estudios de reproducibilidad de la experiencia en contexto. Por ejemplo, implementando el diseño didáctico utilizado en este trabajo con otros estudiantes, con otros profesores y de otras instituciones educativas.

<u>En relación a la fase de salida</u>:

Investigar sobre los factores cognitivos (funciones y operaciones) implicados en las formas en que un sujeto ofrece una respuesta a un problema planteado y las posibles disfunciones asociadas a la incapacidad para dar una respuesta explícita y con precisión, como las observadas en este trabajo respecto a los efectos de no *percibir y definir el problema* desde la fase de entrada, mismas que permanecieron en el desarrollo de las experiencias estudiadas durante todo el proceso de resolución.

Finalmente a manera de reflexión general sobre el trabajo realizado, se puede señalar que este constituye un esfuerzo por entender y explicar el funcionamiento cognitivo de estudiantes sujetos a una experiencia en el contexto de la ingeniería, considerando no sólo el aspecto mental operativo sino también las funciones cognitivas subyacentes, las cuales conforman los prerrequisitos básicos en el procesamiento de la información al resolver un problema. Esta última consideración más la definición y uso de los actos matemático-cognitivos de aprendizaje, los procesos interpretativos y la tripleta conceptual fenomenologías-generalizaciones-notaciones, posibilitó un análisis cognitivo más completo en las experiencias de aprendizaje realizadas. Este cuerpo teórico ofrece una opción en la Matemática Educativa para realizar estudios cognitivos sobre el aprendizaje de las matemáticas en contexto.

Bibliografía.

Artigue, M. (1995*). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp.97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista congnoscitivo*. México: Trillas.

Camarena G. P. (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena, G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en ciencias, especialidad en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Camarena, G. P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Edit. ESIME-IPN, México.

Camarena, G. P. (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. Edit. ESIME-IPN, México.

Camarena, G. P. (2000). *Reporte técnico de investigación titulado: Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería.* Edit. ESIME-IPN, México.

Cantoral, R. & Mirón, H. (2000). *Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 3, Núm. 3, 265-292.

Feuerstein, R. (1977). *Mediated Learning Experience: A theoretical basis for cognitive human modificability during adolescence*. In Mittler P., (ed.), Research to practice in mental functions. Vol. 2, Baltimore, University Park Press.

Feuerstein, R. (1979). *The Dynamic Assessment of Retarded Performes: The Learning Potential Assessment Device, Theory, Instruments and Techniques*. Baltimore: University Park Press.

Feuerstein, R.; Rand, Y.; Hoffman, M. B. and Miller, R. (1980). *Instrumental Enrichment*. Baltimore: University Park Press.

Gardner, H. (1988). *La Nueva Ciencia de la Mente*. Ed. Paidós.

Godino & Recio. (1998). *A semiotic model for analyzing the relationship between thought, language and context in mathematics education*. Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Research Forum), Vol.3: 1-8, University of Stellenbosch, South Africa.

Montgomery, Douglas C. (1997), *Design and analysis of experiments*, John Wiley & Sons.

Montgomery & Peck (1992), *Análisis de regresión*, Grupo Editorial Iberoamérica.

Muro, U. C. (2000). *La serie de Fourier en la transferencia de masa.* Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación de la Enseñanza de las Matemáticas, UAEM.

Nieves (1996). *Métodos Numéricos con aplicaciones*, CECSA.

Pain, S. (1976). *La Psicometría Genética*. Buenos Aires, Nueva Visión.

Piaget, J. (1924). *El juicio y el razonamiento en el niño*. Guadalupe, Buenos Aires.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1977). *The Psychology of the child*. Basic Books, Nueva York.

Piaget, J. (1978). *The principles of Genetic Epistemology* (W. Mays, Trad.), New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Planes y programas de estudio de la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas del Sistema Tecnológico de Monterrey (plan 2000).

Prieto, S. D. (1992). *Modificabilidad cognitiva y P. E. I.* Colección Nueva Escuela. Madrid: Editorial Bruño.

Rey, A. (1954). *Etude du freinage volontarie du mouvement graphique chez l`enfant*. Liege, Cahiers de pedagogie et D`Orientation professionalle.

Ríos, J. G. (2002). *Los proyectos en los cursos de estadística*. La integral, Órgano Informativo y de Divulgación del Departamento de Matemáticas, DECIC, Vol. 1, Núm. 6, ITESM Campus Monterrey, pp.1.

Schunk, D. H. (1997). *Teorías del Aprendizaje*. Pearson Educación. México.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32:49-92.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos*. International Thomson Editores. México.

Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en Didáctique des Mathématiques, CNRS y Université René Descartes, Vol. 10, No. 2, 3, pp. 133-170. (Traducción al español por Juan D. Godino).

Vergnaud, G. (1991a). *La théorie des champs conceptuels*, en Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2,3) pp. 133-170, Francia: Pesé Sauvage Editions.

Vergnaud, G. (1991b). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Editorial Trillas.

Vergnaud, G. (1981). *Quelques Orientations Theoriques et Methodologiques des Recherches Francaises en Didactique des Mathematiques*. Proceedings of the fifth annual conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education (pp. 7-17).

Vergnaud, G. (1983). *Actividad y conocimiento operatorio*, en Psicología Genética y aprendizajes escolares. C. Coll (Comp.). Madrid: Siglo XXI.

Wallon, H. (1976). *Los orígenes del carácter en el niño*. Nueva Visión, Buenos Aires.

Wallon, H. (1979). *Del acto al pensamiento*. Psique, Buenos Aires.

Walpole, R. & Myers, R. (2000). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros y Científicos*. 3ra. Ed., McGraw-Hill. México.