

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

ESTUDIO DIDÁCTICO DEL CERO

Tesis que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:

Alma María Cataño Barrera

Director de Tesis:

Dr. Apolo Castañeda

México, D. F., Octubre de 2007





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de octubre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

“Estudio didáctico del cero”

Presentada por la alumna:

CATAÑO

Apellido paterno

BARRERA

materno

ALMA MARÍA

nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	3	9	1
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa



CICAIA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

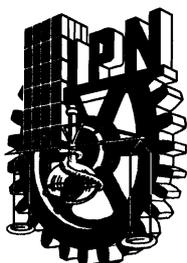
Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

M. en C. Luis Arturo Serna Martínez

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de México D. F. el día 5 del mes de Noviembre del año 2007, la que suscribe **Cataño Barrera Alma María**, alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro: A050391 Adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Apolo Castañeda Alonso

Y cede los derechos del trabajo intitulado **Estudio didáctico del cero** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de Investigación. Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: **acatano@itesm.mx** si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Alma María Cataño Barrera

*Cuando un trabajo se concluye
no siempre se debe al empeño
que pusimos en realizarlo,
es un conjunto de factores
que están detrás de cada línea o palabra;
generalmente personas e instituciones
que nos apoyaron y
que creyeron en nosotros.*

Al Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus San Luis Potosí
Departamento de Ingeniería y Ciencias

Al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología
Avanzada,
Instituto Politécnico Nacional
Matemática Educativa

A mis maestros de la Maestría

A mis compañeros de trabajo y escuela

A mi familia

"El agradecimiento es la memoria del corazón."

Lao Tse

Índice

Glosario de términos	iv
Índice de figuras	vi
Resumen	1
Abstract	3
Introducción	5
Capítulo 1. Antecedentes de la investigación	7
Capítulo 2. Elementos teóricos	15
Capítulo 3. Revisión histórica del cero	19
Capítulo 4. El cero en los libros de texto	28
Capítulo 5. Indagación sobre las ideas relativas al cero	
5.1. Preliminares a la Entrevista	32
5.1.1. Entrevista Cero	33
5.2. Objetivos de la Entrevista	
5.2.1. Implementación de la Entrevista Cero	36
5.2.1.1. Estudiantes del ITESM Campus San Luis	37
5.2.1.2. Estudiantes en el CICATA	38
Capítulo 6. Análisis de los resultados	40
6.1. Bloque A. Entrevistas aplicadas en marzo del 2007 en el ITESM C.SLP	
6.2. Bloque B. Entrevistas aplicadas en abril del 2007 en el CICATA ..	53
6.3. Surgimiento de la Entrevista clínica.....	64
6.4. Objetivos de la Entrevista e Implementación	
6.4.1. Estudiantes del ITESM	65
6.4.2. Estudiantes en el CICATA	75
Capítulo 7. Conclusiones del análisis	83
Referencias Bibliográficas	86

Glosario de términos

Algoritmo.- m. Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución a un problema. Método y notación en las distintas formas del cálculo.

$Ax^2 + Bx + C = 0$ “es un algoritmo.

Balance.- Resultado de algún asunto. Estabilidad, situación de una cosa que, pese a no tener una base sólida, se mantiene sin caerse. El término en este trabajo es una combinación de los enunciados previos, pues se considera como un resultado que muestra cierto equilibrio.

Categorización.- Acción que realiza el estudiante que conlleva la inclusión de un elemento (cero) en diferentes grupos básicos en los que puede incluirse dentro del conocimiento general de las matemáticas.

Conceptualización.- Acción que realiza el estudiante cuando asimila una idea, genera una representación mental de un algoritmo o de algo real.

Construcción social.- Ordenamiento y disposición de un concepto en la rama del conocimiento. Se realiza a través de las distintas funciones que dicho concepto o elemento adquiere o la sociedad le atribuye en relación al tiempo.

Convenciones.- Normas o prácticas admitidas que responden a precedentes o costumbres. En matemáticas es un acuerdo establecido sobre distintas propiedades o excepciones en el manejo de cierto elemento.

Entrevista.- Instrumento escrito integrado por una serie de preguntas y respuestas que utilizamos en este trabajo que buscaba recolectar opiniones relativas al concepto estudiado.

Epistemológico.- Relativo a la forma en que se establecen fundamentos sobre un concepto, utilizando métodos del conocimiento científico para validarlo.

Escenarios.- Conjunto de circunstancias que se consideran en el entorno de un suceso.

Indagación.- Investigación efectuada para averiguar algo que se desconoce.

Implementación.- En este trabajo se considera como la acción de poner en práctica la entrevista a fin de recolectar la mayor cantidad posible de información.

Jerarquía.- Organización por categorías, grupos o grados de importancia.

Noción.- Conocimiento o concepto elemental que se obtiene de algo.

Remedial.- Nombre asignado a los cursos preliminares o introductorios a cursos de matemáticas por especialidad o nivel académico. Generalmente con académicos muy amplios y variados con la intención de los alumnos recuerden los temas, no precisamente que los aprendan.

Secuencia.- Debe considerarse como un conjunto de preguntas u ordenamientos específicos sobre el área de matemáticas. Estos están agrupados de determinada manera para lograr la utilización de un proceso específico.

Situación.- Conjunto de realidades o circunstancias que se producen en un momento determinado que determinan la existencia de un concepto.

Trabajo asistido.- Grupo de trabajo de colaboración integrado por profesores de distintas instituciones, coordinados para obtener un específico resultado. En este caso, utilizando medios de comunicación a distancia: Internet y skipe.

Valor posicional.- Relativo a la posición que ocupa un vacío en alguna de las casillas de una cantidad numérica: unidades, decenas, centenas, etc. El lugar vacío en dichas casillas es sustituido por el cero.

Índice de figuras

Figura 1. Representaciones del cero hindú y árabe.....	20
Figura 2. Numeración sexagesimal babilónica.....	21
Figura 3. Distintas representaciones del cero maya	22
Tabla 1. Respuesta 1- Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP	40
Tabla 2. Respuesta 2- Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP	43
Tabla 3. Respuesta 3- Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP	45
Tabla 4. Respuesta 4- Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP	47
Tabla 5. Respuesta 5- Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP	49
Tabla 6. Respuesta 6- Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP	51
Tabla 7. Sección 2/ Operaciones –	
Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP	52
Tabla 8. Respuesta 1 - Análisis de estudiantes del CICATA	54
Tabla 9. Respuesta 2 - Análisis de estudiantes del CICATA.....	56
Tabla 10. Respuesta 3 de los estudiantes del CICATA.....	58
Tabla 11. Respuesta 3- Análisis de estudiantes del CICATA.....	58
Tabla 12. Respuesta 4- Análisis de estudiantes del CICATA.....	59
Tabla 13. Respuesta 5- Análisis de estudiantes del CICATA.....	60
Tabla 14. Respuesta 6- Análisis de estudiantes del CICATA.....	61
Tabla 15. Sección 2/ Operaciones –	
Análisis de estudiantes del CICATA.....	63

Este trabajo de investigación realiza un estudio didáctico del cero que permitió identificar sus usos y las formas en cómo lo han construido los estudiantes. La información permitirá en un futuro, dotar de significado y nuevos usos a este concepto matemático. Tuvo como motivación las diferentes interpretaciones del cero en el aula y el casi nulo espacio dentro de los planes de estudio de matemáticas.

En las primeras secciones de esta tesis se incluye información que en la mayor parte está conformada por los antecedentes de la investigación, los elementos teóricos que la soportan, así como una revisión histórica y de libros de texto donde encontramos el concepto del cero.

Otra sección incluye el diseño e implementación de una entrevista sobre el manejo escolar del cero, cuya intención era la indagación de ideas que los estudiantes tienen sobre el Cero. Dicha entrevista tomó como marco de referencia estudiantes del nivel inicial del área de ingeniería. Los grupos muestra fueron seleccionados de dos Universidades: el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus San Luis Potosí y el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Posteriormente se presenta el análisis de la implementación de dicha entrevista.

Es importante mencionar que durante el proceso de implementación de la entrevista se hizo uso de las nuevas tecnologías de comunicación (Internet y Skipe) para completar dichas entrevistas. Situación que llevo también a la conformación de un equipo de apoyo integrado por profesores de ambos institutos y una servidora.

Dentro de las conclusiones obtenidas en el proceso del este análisis se presenta una reflexión final, sobre el manejo didáctico del cero que se construyó a partir de las observaciones realizadas en la investigación. Se incluye también la definición y el significado del concepto del cero a través de lo mostrado en esta tesis y algunas observaciones en el contexto de la multiplicación y división por cero.

This thesis does a didactic research of the concept of Zero. It allowed identify their applications and the ways in which the students had been made up of the concept. In the future, the information will allow give meaning and new applications to this mathematic concept. The motivation of this thesis was the different interpretations of Zero in the classroom and almost the null space into the academic programs of mathematics.

In the first sections of this thesis, I included information about of the prior research, the theoretical elements, some historical revisions, and many explanations from textbooks where I could find the concept of Zero.

Other section includes the design and the application of one interview. The interview was about the school handling of the concept of Zero, but the intention was to recollect the student's ideas about zero. This interview was applied to students in the first level of the engineering area. The samples were selected between two Universities: the "Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus San Luis Potosí" and the "Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Aplicada del Instituto Politécnico Nacional". After that, I present the analysis of the results of this interview.

During the process of the interviews, I had to use some new technologies of communications (e.g. Internet and Skipe) to complete the different stages. In fact, it occurred with the support of a group of professors of both Universities in collaboration with me.

In the conclusions, I present a final reflection about the didactic handling of the concept of zero and how it was building through the observations recollected during the research. Also this thesis includes one definition of the concept of zero and some observations in the context of multiplication and division by zero.

La presente investigación tiene por objetivo conocer interpretaciones del cero en el aula, pues creemos, no está suficientemente estudiado y en la clase se le ha dedicado poco y casi ningún espacio en los planes de estudio de matemáticas.

En un acercamiento histórico observamos que los seres humanos se han dedicado a explicar los fenómenos de la naturaleza a partir de lo “contable” con lo que impulsó a muchas culturas a construir nuevos conceptos, como por ejemplo el **cero**. No obstante, hacer un estudio sobre los orígenes del concepto “cero”, sería hacer un trabajo de investigación puramente epistemológico y no es la intención. El motivo de este trabajo es realizar un estudio didáctico del cero que permita identificar sus usos y las formas en cómo lo construyen los estudiantes. Esta información permitirá en un futuro, generar diversos tipos de actividades que permitan dotar de significado y nuevos usos a este concepto matemático.

Una primera parte de esta tesis, conformada por dos capítulos, presenta una investigación sobre trabajos preliminares que fundamentan esta investigación e incluye información sobre algunos fundamentos teóricos de la misma.

Una segunda parte de esta tesis, corresponde al análisis histórico-epistemológico, el cual se presenta a través de dos puntos de vista: uno con respecto a su carácter histórico y el otro de acuerdo a su tratamiento actual en libros de texto.

En una tercera parte de esta tesis, se presenta el diseño e implementación de una entrevista sobre el manejo escolar del cero. Se explican los objetivos de la entrevista y los detalles de su implementación. Posteriormente se presenta el análisis de esta implementación.

En el último capítulo se presentan las conclusiones obtenidas en el proceso del este análisis como una reflexión final sobre el manejo didáctico del cero, que se construyó a partir de las observaciones realizadas en la investigación. En este documento se discute la definición y el significado del concepto del cero a través de lo mostrado en esta tesis y algunas observaciones en el contexto de la multiplicación y división. Dicho documento se propone como un apéndice o un capítulo específico para el curso de Matemáticas Remedial en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

El marco de referencia en el que está inmersa esta investigación es el que denominamos: Construcción social del conocimiento. En el desarrollo del trabajo nos hemos podido dar cuenta de que efectivamente fue la misma necesidad de explicar ciertos procesos y el desarrollo de las matemáticas el que impulsó a que este concepto surgiera. El cero es un número especial, es un número que guarda las características esenciales de todo número entero, pero cuenta además con particularidades en cuanto a su naturaleza y su manejo.

La lectura y revisión de asuntos relativos a la idea de *ecuación* en matemáticas que se estudia en los distintos sistemas educativos de la región centro y norte del país, llevó a la definición de un problema para la presente investigación: la reflexión sobre el concepto del cero fue por un lado motivada por el escaso debate del mismo dentro del ámbito escolar al considerarlo un elemento matemático con un manejo casi transparente; sin aparente problemática y por otro por la constante incertidumbre y las dificultades que enfrentan los alumnos al trabajar este elemento por ejemplo; el caso de las operaciones de multiplicación y división.

Para realizar la investigación se tomaron diversas fuentes de información; tesis de posgrado y actas de reuniones de trabajo. Se incluyeron libros que abordan el tema y que comparten inquietudes similares así como libros de texto actualmente usados en universidades e institutos a nivel preuniversitario y otros que sirven de guía para la admisión a programas de estudios profesionales dentro del área de ingeniería.

Un hecho que resaltó inmediatamente en esta investigación se obtuvo de la investigación histórico-epistemológica; el cero fue adoptado por ciertas civilizaciones, y otros nunca lograron definirlo y usarlo. En aquellas que lo inventaron lo utilizaban bajo ciertas condiciones del entorno. Su surgimiento responde más a una necesidad utilitaria y no tanto conceptual. Lo usaron como indicador de un lugar vacío y como un número sin valor. Estos diferentes manejos se vinculan a situaciones reales, como respuesta a problemas definidos.

El sentido de utilizarlo como indicador de un lugar vacío, proviene de situaciones derivadas de las condiciones del contexto donde se desarrolló. En el año 400 a.n.e. se encuentran evidencias de que los babilónicos realizaron tales distinciones. (Hernán, M. 2006).

Los primeros en ocuparse del manejo del cero dentro de un contexto de operaciones aritméticas, fueron los matemáticos hindúes. Brahmagupta se ocupa de la multiplicación de cero por cero, sin embargo, al tratar de usar su misma definición para explicar el concepto de división, afirman que $n/0$ es cero. Doscientos años más tarde, Mahavira intenta mejorar la definición previa y llega a otro pronunciamiento: *Un número permanece sin cambio cuando es dividido por cero*. No muchos años después, a quinientos años del Brahamagupta, el matemático Bhaskara siguió reforzando este mismo tema de la siguiente manera:

Una cantidad dividida por cero se convierte en una fracción cuyo denominador es igual a cero. Esta fracción tiene como valor una cantidad infinita. En esta cantidad en la cual el cero es el divisor, no hay alteración aunque se sumen o se resten muchos; así como no tuvieron lugar cambios en el infinito e inmutable Dios cuando se crean o se destruyen los mundos, aunque numerosos órdenes de seres sean absorbidos o creados.

Tales diferencias al intentar definir el proceso de división por cero, podrían sugerir que todos los números son iguales pues; $0 \text{ veces } \infty$ debe ser igual a todo número n . Es por ello que veo importante analizar más sobre este proceso de multiplicación y división utilizando el cero.

La tesis: *La Matemática Náhuatl: Estudio del Sistema de Numeración Náhuatl* (Espinoza, P., 2006) asume el gran reto de revisar dos situaciones: el origen de la construcción del lenguaje matemático en contextos socioculturales y el tratamiento de la matemática un contexto escolar. Para la primera situación, es importante reconocer que este concepto surge como respuesta a situaciones socioculturales en distintos momentos históricos y en distintas culturas, más como una necesidad de expresar “algo” que como una forma de representación de un conocimiento científico. Ante la carencia de un elemento que reflejara en algunos casos ausencia, en otros casos transición e incluso complementariedad; el cero

muestra la forma en que el lenguaje matemático se concibe como un medio de comunicación no solo de cantidades sino de cualidades.

En la tesis: *¿ $A \cdot B=0 _ A=0 \vee B=0$? Reflexiones e implicaciones en la enseñanza de la matemática* de Ochoviet, C, (2004). El autor se concentró en la puesta en práctica de una propiedad y encontró que los alumnos tenían el conocimiento teórico suficiente, sabían la propiedad, pero a al momento de aplicarlo no tenían los argumentos suficientes para explicar sus resultados. Los argumentos expuestos fortalecen el interés de que en esta investigación la búsqueda de resultados apoye a los alumnos a fortalecer el uso cero en operaciones de multiplicación.

Ya hemos mencionado que el cero tiene un significado de ausencia. Cuando en álgebra se iguala una ecuación a cero, definitivamente no quiere decir que no halla nada, sino que refiere a una noción de igualdad, equilibrio. La ecuación es igual a cero cuando se encuentran valores específicos que siguiendo las operaciones que describe la misma ecuación permite alcanzar un valor de cero. Esto no es ausencia, es definir un momento matemático para el cual se cumple la condición descrita en la ecuación.

Sin embargo seguir reflexionando sobre las diferentes metodologías didácticas para la enseñanza del cero no tendría sentido sin analizar el proceso por el que un conocimiento se construye. (Castañeda, A., 2004)

Una serie de convenciones y reglas aplicables a las operaciones de multiplicación y división no es suficiente. Esto solo quedaría como una intención de adquirir dominio sobre un algoritmo. De aquí se desprende la intención de dirigir esfuerzos para desarrollar una

secuencia en un contexto específico con intenciones diagnósticas y de evaluación para conocer más acerca del tratamiento e ideas relacionadas con el cero en la escuela.

En el artículo de *Desarrollo de Habilidades del Pensamiento en Forma de Conceptos* (Toledo, T. & Fernández, V., 2005). Se muestra una propuesta para el desarrollo de las habilidades del profesor asociadas a la elaboración de conceptos matemáticos. La detenida revisión de experiencias que el maestro tiene para el desarrollo de sus propias habilidades intelectuales, ayudó a plantear las preguntas sobre la forma o los medios por los que el concepto del cero puede ser adquirido por los alumnos.

Entonces es importante discutir una ruta para el estudio del cero, particularmente nos interesa bajo el contexto específico de la multiplicación y división; me refiero a un instrumento didáctico que permita al profesor involucrar a sus estudiantes a escenarios de estudio-análisis del cero.

En el trabajo de *La Enseñanza del Concepto de Número Real en Ambientes Virtuales Interactivos* (Salas, N. & Castillo, H., 2005) se explica que el cero es también un número real, por tanto comparte algunas propiedades, dentro de este contexto numérico el “cero” tiene dos esquemas para su enseñanza. Dichos esquemas estudiados a fondo en el trabajo de Salas y Castillo relacionan a los números reales desde una perspectiva didáctica con el contexto de otras ciencias. Este hecho permitió rescatar las características de “individualidad” del concepto del Cero, un entero que no puede definirse como positivo o negativo, que es par, que es el elemento neutro en la adición y que cuando se utiliza en la multiplicación siempre dará por resultado él mismo cero. En el estudio de Salas se establecen categorías para los números reales, algunas de las cuales nos servirán en la tesis para definir la participación del cero en

las operaciones de multiplicación y división. De esta clasificación se rescató solo aquellos elementos que permiten revalorar el cero como elemento constitutivo del conjunto de los números reales y se utilizó como punto de partida para iniciar la descripción del concepto ante situaciones de enseñanza. Cabe mencionar que no estoy totalmente de acuerdo en la forma en que los maestros Salas y Castillo clasifican los números reales. Al menos no en lo particular para el Cero. Por ejemplo, ¿el cero está en el grupo de los números positivos? ¿Con qué argumento lo colocan ahí? Si recordamos el concepto de la recta numérica, el cero es un elemento de transición, no pertenece a los números negativos, pero tampoco está en el de los positivos. Otra divergencia está en su tabla de estudio de los números reales, el cero no cumple en todos sus espacios con las propiedades de los números reales. Entonces el cero es un caso especial, difícil de incorporar al grupo de números reales si no se explican algunos comportamientos específicos.

El interés en esta investigación es conocer la idea que actualmente tienen los alumnos sobre el cero; saber cómo lo identifica dentro de los sistemas numéricos, las características que le asignan, etc... Citemos un ejemplo: el cero es el elemento neutro en la suma y la resta; el cero en la multiplicación y división establece excepciones y reglas, mismas que serán el motivo de esta tesis.

Dentro de esta reflexión y categorización del cero, se busca identificar al cero como un producto social. En particular, la historia así lo muestra: los mayas utilizaban el cero como una consecuencia de la concepción que se tenía del tiempo y del universo. “Utilizaban el cero para referirse a las fechas y períodos de tiempo en diversos momentos y textos. Sin embargo, en ocasiones, éste no representaba la ausencia de unidades, el conjunto vacío o nada, sino que denotaba la terminación de un período de tiempo o fecha y el inicio del siguiente. La transición era su principal característica”. (Cantoral, R. & Covián, O., 2005).

En la mayoría de las situaciones en las que los alumnos ven involucrado un cero, no realizan una reflexión más allá, sólo se limitan a intentar dar una respuesta, entonces resulta importante generar escenarios en los que aporten más significados más allá de las reglas algorítmicas (operaciones invalidas o erróneas).

Al revisar los usos del cero en las operaciones de multiplicación y división se tomaron dos estrategias. Por un lado la revisión de textos específicamente que hablaran de propiedades y procedimientos propios de estas operaciones y por otro encontrar evidencias sobre la naturaleza de este número en cuanto a sus características y sus específicas. En mi búsqueda de reflexiones encontré el trabajo: *Estrategias de solución ante problemas multiplicativos. Estudio exploratorio*. (García, L., 2004), la autora expone diferentes propiedades de la multiplicación, por ejemplo: la propiedad de cerradura, las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva, además destaca el papel que juegan tanto el cero como el uno dentro de la multiplicación;...*cuando se ve implicado el cero en el proceso de la multiplicación, queda implícito un conjunto vacío, por lo que el producto tendrá que ser cero.* [García, L., 2004]. Esta apreciación se convierte en punto de partida y a la vez oportunidad de análisis, con la finalidad de revisar si es una convención estudiada y si garantiza el resultado. El compromiso de esta tesis es definir qué papel juega entonces el cero en la multiplicación y si es sólo un paso previo a la ausencia de un valor numérico. Algunas fuentes, en particular el estudio de García, muestran la inquietud que se tiene por clarificar que existen elementos especiales en el lenguaje matemático; sin embargo, aseveraciones tales como: “*queda implícito un conjunto vacío*”, enclaustran el significado del cero y reducen la posibilidad de mostrar otros significados del mismo concepto. Y es precisamente lo que se busca en esta investigación.

En *Aprendiendo Matemáticas desde los conceptos* (Ángel, ME., Polola, L., Fernández, G. & Bortolotto, M., 2004) explican que para lograr la conceptualización, se estudió el desarrollo de actividades que llevan a la misma. Pero hacía falta algo más, revisar más fuentes, entre ellas, rescatar las guías de estudio para la presentación de exámenes de admisión a estudios universitarios, en las cuales se pudo descubrir lo poco que se revisa las propiedades de este concepto tan especial que es el cero. Reflexionemos ahora sobre el cómo. La construcción conceptual del cero se buscará llevar a través del diseño y aplicación de actividades específicas, elemento que justificará a futuro la elaboración de secuencias para los alumnos en vez de solo entregarles información de carácter teórico.

En el trabajo de *Algoritmos de las Operaciones con Números Enteros* (Galván, 1967) nos recuerda el autor la indefinición de la división para el caso del cero, y como algunas expresiones carecen de significado cuando se involucra el cero. Esta aseveración llevó a retomar algo que el mismo autor expone sobre las relaciones que existen entre las cuatro operaciones fundamentales. Material que será motivo de estudio para los capítulos referentes a la multiplicación y división por cero.

En este primer capítulo se han presentado algunas definiciones, usos y particularidades del cero, todas ellas muestran la evolución que el concepto del cero ha tenido a través del tiempo y el proceso de significación al que ha sido sometido. El material revisado en estos referentes introduce al estudio del concepto y al comportamiento de dos operaciones fundamentales: la multiplicación y la división. El propósito en los capítulos siguientes será:

- a) Desarrollar una historicidad del concepto del cero
- b) Describir y analizar la forma de definir las operaciones de multiplicación y división en un contexto didáctico.

c) Buscar una conexión entre el significado, uso y aplicación del cero en estas dos operaciones básicas

d) Generar ideas para el trabajo con los alumnos.

Esta investigación aborda un estudio del cero, surge como una inquietud originada durante el trabajo continuo con alumnos de los primeros grados de ingeniería. Estos alumnos frecuentemente se topan con problemas donde se involucra al cero, sobre todo en aquellos donde el proceso implica operaciones de multiplicación o división por cero.

El interés es conocer las interpretaciones que tienen los alumnos ante casos específicos en los cuales se trabaja con el cero.

En la investigación que aquí se presenta, se analizarán las ideas que los estudiantes tienen sobre el conocimiento matemático del cero. Una primera parte del análisis de las ideas, es la correspondiente al estudio de las respuestas sobre el manejo del cero por parte de los estudiantes.

La segunda parte tiene que ver con el diseño de una encuesta y el análisis a priori. Se formuló un documento que sirvió para realizar el estudio de ideas considerando un análisis a priori sobre el manejo e interpretación que los alumnos de inicio de Ingenierías designan al cero. En un apartado se explica como se seleccionó los problemas y ejercicios comprendidos en la entrevista.

La tercera parte es el análisis, se comenta sobre la situación que envuelve la implementación de ésta.

¿A qué se enfrentan los estudiantes? ...Yo claramente recuerdo el día en que dejé de amar las matemáticas. Yo estaba en cuarto grado y nosotros estábamos haciendo divisiones. El

examen era escrito y se trataba de resolver algunas divisiones. Yo recuerdo que escribí: $4 \div 0 = 0$. Mi maestra tachó mi respuesta, comentando: “Esto es incorrecto” Cuando yo le pregunté “Pero, ¿porqué? Esto es 0. Ella respondió: “Esto no tiene respuesta, es una regla, y tu tienes que recordarlo”...

Yo me sentí furiosa... Y a partir de ese momento, empecé a odiar las matemáticas... y me quedé con la idea de que las matemáticas tienen reglas que hay que memorizar y que muchas veces no tienen sentido.

(Entrevista a una estudiante del 10° grado)

En el primer tema de los libros de introducción a matemáticas para ingenierías, se empieza con números reales y conjuntos. Se tiene que dar estructura a los números reales y se explican algunas operaciones y sus propiedades. Se presentan a los números como positivos, negativos o cero. Pero después, ¿qué hacemos con el cero, se nombra, se ubica, pero no se explica? Se retoma el cero, mencionándolo como una propiedad o como un elemento especial. Y con esto, ¿queda claro al alumno porque se vuelve un caso especial multiplicar o dividir por cero?

Es notable observar como se introducen conceptos como “la recta numérica”, útil para representar sistemas numéricos gráficamente. En la cual el cero es el protagonista estelar, pues organiza y clasifica los números en positivos y negativos y se constituye como el punto de partida para el conteo Sin embargo cuando hablamos de la manera de contar, siempre empezamos por el número 1, 2,3.... ¿Qué sucede cuando no hay nada?

La recta numérica, para representar gráficamente un grupo de números. Organiza y distingue los números positivos, negativos y el cero. El conocimiento de estas características y el dominio de sus reglas, garantiza la correcta participación del cero ante estas operaciones.

Adler en su libro *A New Look at Arithmetic, with diagrams*, dedica un capítulo a la explicación de algunas características del cero y menciona lo que sucede si tratamos de dividir un número entre 0. Para Adler existen dos casos a considerar. Un primer caso; al usar como dividendo un número que no sea cero. En el segundo caso; cuando usamos el cero como dividendo.

Caso I: Suponga que tratamos de identificar $3/0$. Esto te exige preguntarte, ¿Qué número cardinal multiplicado por 0 da por resultado 3? La respuesta es que no hay un número cardinal, porque si tomamos la tabla de multiplicación vemos que cero veces cualquier número da cero como producto. Consecuentemente, el símbolo $3/0$ no tiene significado. En general si un “a” no es cero, $a/0$ no tiene significado por la misma razón.

Caso II: Suponga que tratamos de identificar $0/0$. Esto te exige preguntarte, ¿Qué número cardinal multiplicado por 0 da por resultado 0? La respuesta ahora es cualquier número cardinal, porque cero veces cualquier número cardinal es 0. Aquí la división es posible, pero el resultado no es único, entonces nosotros tenemos un símbolo como a/b tiene justo un significado, cuanto esta tiene cualquier significado en todos los casos, nosotros nunca usaremos el símbolo $0/0$, que tiene tantos posibles significados.

Combinando las anteriores observaciones en el caso I y el caso II, nosotros podemos decir que nunca divididas por cero porque la división es tanto, imposible o no es única. (Adler, 1964).

Al igual que Adler, algunos estudiosos han tratado de encontrar los elementos teóricos suficientes para establecer reglas o convenciones para la utilización del cero ante la multiplicación y división; sin embargo, el problema está en cómo y cuándo hay que darlas a conocer a los alumnos. Los alumnos llegan a los grados universitarios con un desconocimiento de su aplicación y tal vez solo con la idea de que son reglas que había que memorizar. El estudio didáctico del cero que aquí se presenta busca responder en parte al cómo reinformar o redefinir el concepto del cero y sus aplicaciones a los alumnos de los primeros grados de ingeniería.

En la India, se encontraron vestigios del uso del cero no solo como elemento de valor de posición en un sistema decimal de nueve cifras, sino también se utilizó en fechas y asegura el señor Boyer, citando a D.E. Smith (History of Mathematics, Boston, 1923-1925) que la primera vez que se tiene referencia del uso del cero en una inscripción fue en el año 876 (Apuntes para una Historia de las Matemáticas y Astronomía, pág. 9).

El origen del cero aconteció en la cultura Maya y en Asia - Europa de forma separada, ambos utilizaban el cero desde fechas muy antiguas. Desgraciadamente la divulgación de este conocimiento en la cultura maya no llegó a otros sitios (como Europa) donde se escribía la ciencia en los libros hasta el siglo XIX, por lo cual a muchas de sus aportaciones científicas parecieran no atribuirles su autoría. En el caso del cero hindú este fue divulgado a otras civilizaciones vecinas y adoptado para su uso, pero aun en nuestros días existe controversia en cuanto a su origen

Otra civilización que disputa la autoría de la creación del cero, son los árabes, quienes rescatados por Lancelot Hogben recibieron el crédito de dicha invención de la siguiente manera:

La invención del cero o Sunya liberó al intelecto humano de los barrotes aprisionantes del ábaco. En toda la historia de las matemáticas no ha habido hecho más revolucionario que el que dieron los hindúes cuando inventaron el signo "0" para significar la columna vacía. (Hogben L. Mathematics for the Million, pg 41, 285)

Y por G. P. Halsted, quien dice:

Nunca se puede exagerar la importancia de la creación del cero. Este dar a la nada etérea no solo una morada local y un nombre, una imagen, sino también un poder de ayuda, es la característica de la raza hindú de donde surgió. Es como acuñar el Nirvana en dínamos. Ninguna creación matemática ha sido más potente para el avance general de la inteligencia y el poder (G. P. Halsted, On the Foundation and Technique of Arithmetic).

Por que no citar a B. B. Dutta cuando explica:

Los hindúes adoptaron la escala decimal muy pronto. Ninguna otra nación tiene un lenguaje numérico tan científico y que haya alcanzando tan alto estado de perfección como la India antigua. El simbolismo, logró con diez signos, expresar cualquier número muy elegante y sencillamente. Es esta belleza de la notación numérica hindú lo que llamó la atención a los pueblos civilizados de todo el mundo y los conquistó para que la adoptasen. (The Present Mode of Expressing Numbers, en Tirthaji Maharajá, Jagadguru Swami Sri Bharati Krsna: Vedic Mathematics, pág. XLII)

¿Se puede aseverar que hubiera otras civilizaciones que al mismo tiempo o antes estuvieran usando un elemento con su misma función que lo hicieron los hindúes? Surgen entonces las preguntas: ¿quienes también lo usaron y, cómo?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
Nagari numerals around 11th century A.D.									
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Los números del tratado de Al-Sijzi de 969									

Fig. 1. Representaciones del cero hindú y árabe. (Armesto J., 2006)

De acuerdo a Barrow, J. D. (2000) En *el Libro de la Nada*, menciona que los babilonios para el año 2000 a.C. y los chinos para el 200 a.C. usaban el cero como un sistema de valor posicional en un sistema de signos de base 10. Para los babilonios además de su uso

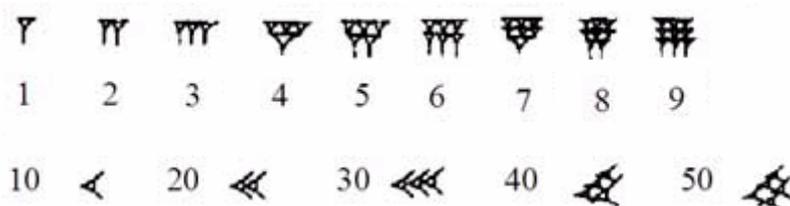


Fig. 2. Numeración sexagesimal babilónica

como notación posicional lo interpretaron como “espacio vacío” en el registro de cuentas y como “nada” en su concepto babilónico. Y los hindúes con el significado de vaciedad o ausencia, espacio, firmamento, la bóveda celeste, atmósfera y el éter, nada, cantidad a no tomar en cuenta o elemento insignificante. Significados que por su variedad muestran un múltiple uso del cero tanto para razones científicas como cotidianas. Estos significados se definieron en el periodo del 350 a.C. y el 458 d.C. Sin embargo, los mayas del otro lado del mundo entre el 500 a.C. al 925 introdujeron el cero; significaba para ellos ausencia de entradas en un nivel de la torre de números. Los mayas representaron este número de diversas formas, como caracol y como concha bivalva. También se encontró fuera de los códices mayas, representado por una flor a veces completa, pero otras de manera incompleta. “En el cero maya se une la cualidad de ausencia de unidades y la de señalar que un período, una fecha o cantidad se completa” (Tonda, J. & Noreña, F, 1994).

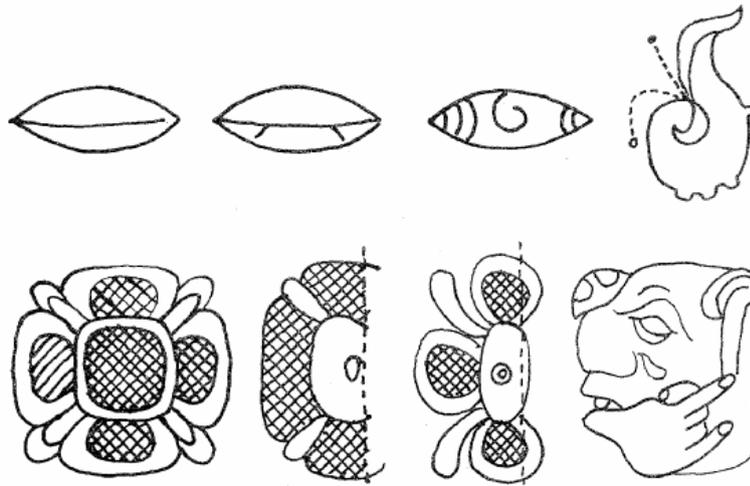


Fig. 3. Distintas representaciones del cero maya. (Tonda, J. & Noreña, F., 1994).

En *Los Secretos del Cero el conocimiento matemático en Mesoamérica*, de Tonda y Noreña se muestra que la innovación del cero es anterior a las inscripciones encontradas en las construcciones de la India antigua. Además de poner de manifiesto el doble significado de la nada, el conjunto vacío, por un lado y el de la terminación o cabalidad por otro (Tonda, 1994).

La diferencia entre la utilización del cero como elemento de valor posicional por parte de los babilónicos y los mayas es que los primeros tenían un sistema semi-posicional y de base 60, resolviendo el problema de dos formas; primero dejaron un espacio y después asignaron un símbolo para evitar confusiones. Este es un primer cero. Este cero solo se empleo como espacio y nunca se uso para resolver operaciones. Los segundos, los mayas desarrollaron el concepto del cero en un sistema posicional de base mixta. Los mayas utilizaron el concepto de lugar valor aumentando en múltiplos de veinte, por ejemplo: 1, 20, 400, 800. Este concepto no implicaba la ausencia ni la negación, el cero poseía un sentido de plenitud. (Struik, 1994)

Larios, V. (2000) hace alusión a los *Sistemas numéricos en México Prehispánico* y mencionan que en los códices el cero se representa con una concha o un caracol, ambos símbolos asociados con la muerte, la ausencia de vida y el fin de un ciclo; otras variantes como la llamada “forma humana”, presentan características de la muerte y adornos referentes a los dioses de inframundo, mientras que la mano atravesada en la mandíbula significa completamiento o la mano que ata los días y los años en haces completos: por otro lado la variante monumental tiene la forma de una flor calendárica, que es el símbolo del calendario sagrado, el emblema de la eternidad, del tiempo y de la regularidad cósmica. Por otro lado, el cero hindú es denominado Surya, que significa “nada” y el cero maya posiblemente como Xixim, que es el nombre de la concha que lo representa.

Abundando en el significado que los mayas otorgaron al cero Dictinio Díaz en su libro *Los Conocimientos Matemáticos en Mesoamérica* explica que la figura de cara que se usa para expresarla con frecuencia lleva una mano cruzada bajo la mandíbula, a la que se le atribuye el significado de completamiento, esta cara también lleva atributos de muerte, por eso ha insistido por algunos autores en el sentido del completamiento o fin de una cuenta que el cero tiene en las inscripciones calendaricas y que esto se advierte con la representación de la muerte como término de algo. Es evidente que los mismos mayas daban una enorme importancia a este descubrimiento pues en las inscripciones pétreas lo simbolizaban con la flor calendárica, el símbolo del calendario sagrado, emblema de la eternidad, del tiempo y de la regularidad cósmica.

No se puede tratar de ajustar el cero occidental y el cero maya, ambos expresan valores dentro del sistema posicional, ya sea cuando están colocados a la derecha de los números o cuando cierran un periodo de tiempo. Pero en el caso del cero maya, sabiendo las peculiares preocupaciones filosóficas en torno a la idea del tiempo al que indisolublemente

está vinculado, no es de asombrar, que la concha en los códices, pueda significar ausencia de vida y, por lo tanto, el fin de algo, la muerte, o aquello que está vacío.

El modelo matemático Maya del mundo era en síntesis una gran concepción unitaria precedida por sus constantes, por sus simetrías y por sus proyecciones expresadas a través de una red cada vez más amplia de cálculos entrelazados, que se cerraban dentro de un gran sistema. Para ellos la contemplación del cielo se tornó en una conciencia de la regularidad como ley, fue una asombrosa respuesta a los enormes enigmas del universo.

Si nos remontamos a la historia del cero contada de acuerdo a Manuel Hernán Capitán, encontramos que al cero se le atribuyen dos usos específicos, ambos de suma importancia, pero algo distintos. El uso que hasta ahora hemos estado manejando como indicador de un lugar vacío en nuestro sistema numérico de valor posicional y un segundo uso como un número en sí mismo, en la forma como actualmente lo usamos. Además vale la pena mencionar que además de ser importante su uso es importante descubrir de donde sale su notación y nombre. El nombre de “Cero” deriva para algunos autores del árabe “Sifr” el cual también nos da la palabra “cifra”.

El mismo Hernán Manuel Capitán nos invita ver como se introdujo al cero como número, a través de una apreciación personal de la historia de las matemáticas y a que volvamos nuestra investigación socio-epistemológica; citando así a tres grandes matemáticos hindúes: Brahmagupta, Mahavira y Bhaskara quienes en tres importantes libros intentaron dar respuesta a ciertas inquietudes con explicaciones teóricas como:

- a) Se considera al cero, como el número neutro de la adición $a + 0 = a$

Hernán Capitán menciona que Brahmagupta (en el siglo séptimo) intentó dar las reglas para la aritmética teniendo en cuenta el cero y los números negativos....

La suma de cero y un número negativo, es negativo, la suma de un número positivo y cero es positivo, la suma de cero y cero es cero.

Un número negativo restado de cero es positivo, un número positivo restado de cero es negativo, cero restado de un número negativo es negativo, cero restado de un número positivo es positivo, cero restado de cero es cero.

b) Cero es el resultado de la suma de los inversos de un número:

$$x + (-x) = 0$$

c) Cualquier número a es divisor (factor) de 0 ya que: $0 = a \times 0$

(Propiedad de la multiplicación por cero).

Al respecto el mismo Brahmagupta dice:

Cualquier número multiplicado por cero es cero. Sin embargo tiene dificultades con la división.

Un número positivo o negativo cuando es dividido por cero es una fracción con cero como denominador. Cero dividido por un número positivo o negativo es o cero o expresado como una fracción el cero como numerador y una cantidad finita como denominador. Cero dividido por cero es cero.

d) Dividir entre un número distinto de cero es lo mismo que multiplicar

por su recíproco, así, si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces: $a\left(\frac{1}{c}\right) = b\left(\frac{1}{c}\right)$ es decir $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

¿pero cuando ese número es cero?

Los datos recabados por Capitán muestran que en el pasado hubo diversas opiniones sobre el concepto del cero y sus diferentes propiedades; he aquí otra opinión del matemático hindú Bhaskara (quinientos años después) quien escribió:

Una cantidad dividida por cero se convierte en una fracción cuyo denominador es igual a cero. Esta fracción tiene como valor una cantidad infinita. En esta cantidad en la cual cero es el divisor, no ha alteración aunque se sumen o se resten muchos; así como no tuvieron lugar cambios en el infinito e inmutable Dios cuando se crean o destruyen los mundos, aunque numerosos órdenes de seres sean absorbidos o creados.

Bhaskara intentó resolver el problema escribiendo que $n/0 = \infty$ (escrita en simbología moderna). Situación que con el tiempo se comprobaría que era incorrecta, cabe mencionar que no todas las afirmaciones que escribió dicho matemático fueron incorrectas pues también dijo que $0^2=0$ y que $0 = 0$.

Los griegos introdujeron el cero como un símbolo especial. Este cero se usaba más a menudo solo que en la representación de cifras. El cero sexagesimal griego se modificó con el tiempo. El símbolo empleado sobre papiro en el siglo II era un círculo pequeño con una barra encima de longitud de varias veces el diámetro del círculo y terminando en extremos de diversas formas. Mas tarde la barra superior se redujo a una longitud igual al diámetro, similar a la moderna $\overline{0}$, que aún era utilizada en documentos árabes de la Baja Edad Media en los que se usasen números alfabéticos.



Fig. 4. El Sistema de Numeración Griego

Para algunos autores actuales, entre ellos Baldor y Balderas (Ver capítulo 4), otro significado de este concepto se encuentra el de “conjunto vacío”, pues es importante aceptar que existen colecciones de objetos que no tienen elementos, se encuentran vacías, entonces se utiliza el símbolo 0 (cero) para representar la ausencia de elementos y se expresa como $0 = \{ \}$.

Los hindúes, los mayas, los árabes, los babilonios y los griegos, en su momento lo definieron como un elemento de valor de posición. Sin embargo cada cultura le añadió significados particulares que enriquecieron su concepción como un elemento único. Además de usarlo para contar y representar grandes cantidades, como los romanos y griegos; los hindúes le asignaron significados como firmamento, bóveda celeste, atmósfera o nada. Significados un tanto antagónicos que también se pusieron de manifiesto con los mayas. Los mayas le asignaron el significado de ausencia de unidades, pero también para señalar el fin de algo, de un período o la muerte.

Capítulo 4. El cero en los libros de texto.

Para abordar el tema del concepto del cero se incluyeron definiciones de este concepto en diccionarios actuales de matemáticas.

En el diccionario de matemáticas de *Valiente Barderas*, lo define como: “*cardinal del conjunto vacío. $N(\emptyset)=0$. Elemento idéntico o neutro aditivo, que tiene la propiedad de que al ser sumado con cualquier número no lo altera. Número que tiene las propiedades siguientes:*

1. *Multiplicado por cualquier número, da siempre cero.*
2. *No es admitido como divisor, pues la operación no queda definida. $a/0$ no está definida.*
3. *Restado a cualquier número no lo altera”.* (Valiente, S. 1998,38).

De un libro que es frecuentemente utilizado en los cursos previos a profesional o en los cursos remediales de ingeniería el de Aritmética Teórico Práctica del Dr. Aurelio Baldor. En este texto se denomina al concepto como la cifra cero. El autor lo define: “*El cero representa los conjuntos nulos o conjuntos que carecen de elementos. Así pues, la cifra cero carece de valor absoluto y se emplea para escribirla en el lugar correspondiente a un orden cuando en el número que se escribe no hay unidades de ese orden. La palabra cero proviene de la voz árabe ziffero, que significa lugar vacío”* (Baldor, A., 2002, 27). Sin embargo en capítulos posteriores donde muestra algunas propiedades de las operaciones básicas no hace ninguna distinción especial cuando se trata de hacer divisiones por cero.

Entre los libros que podemos considerar parte de la bibliografía básica que consultan los estudiantes, cuando aspiran a ser parte de una carrera profesional en el área de Ingeniería, el libro *Cracking the GRE* (Lurie, K. Pecsénye, M. & Robinson, A., 2006, págs. 146-159). En

este libro se busca entrenar al estudiante para presentar su examen de admisión a profesional. El autor ofrece algo de vocabulario básico y propiedades de los números. Con respecto al cero dice:

“El cero es un número pequeño y especial. Es un entero, pero no es positivo ni negativo. Sin embargo:

- *0 es par*
- *0 sumado a cualquier otro número es igual a ese otro número.*
- *0 multiplicado por cualquier otro número es igual a 0.*
- *0 es uno de los diez dígitos*
- *0 no es un número primo*
- *Técnicamente, el cero es múltiplo de todo número.*
- *Un número elevado a la potencia 0 es 1, no importando que número sea.*

Por ejemplo, $1000^0 = 1$. Note, sin embargo, que 0 a la potencia 0 es indefinido”.

Ante una noción fraccionada del cero, esto surge la inquietud de encaminar este trabajo de investigación hacia el desarrollo de diseños didácticos para que los alumnos en el comienzo de sus estudios tengan información suficiente acerca de la naturaleza y significado del cero, y específicamente sobre su relación con dos operaciones fundamentales: la división y la multiplicación. Sin embargo, este proceso es muy prolongado, por lo que la investigación abordará en principio el estudio histórico y una descripción de la problemática didáctica.

Esto nos lleva sin lugar a duda a responder varias preguntas, por ejemplo:

- Estudiar ¿cual es el uso que actualmente le dan nuestros alumnos de pre-universidad?
- Observar los efectos de una enseñanza que reconoce la importancia de la naturaleza del cero.

Las respuestas a estas interrogantes son parte de la investigación de campo sobre las pruebas de admisión a escuelas profesionales.

Dos operaciones especiales cuando se trata del cero: multiplicación y división.

A los alumnos se les informa de la relación entre los factores considerando varios casos. El caso especial que nos ocupa es el que involucra al cero. “Si el multiplicador es cero, el producto es cero”. (Baldor, A, 2002, 91). En este punto los alumnos no tienen muchas dificultades, pues lo especial de este número radica en que cuando su función es de factor, el resultado siempre es igual a sí mismo. Pero el caso de la división es mucho más especial.

Baldor explica que la división es una operación inversa de la multiplicación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente). Los ejemplos que se les proporciona a los alumnos respecto a la división entre cero es escasa o nula. Así vemos como Baldor, no menciona nada acerca de casos específicos sobre el cero como divisor. Otros autores como Fuenlabrada, dan algunos bosquejos generales:

“Cuando el dividendo es cualquier número diferente de cero el cociente es cero”. Por ejemplo: $0/7 = 0$. “Cuando el dividendo es cualquier número diferente de cero y el divisor es cero el cociente no existe”. (Fuenlabrada, S. 1998, 35). Por ejemplo: $6/0 =$ no existe. El mismo Fuenlabrada señala que otros textos manejan expresiones donde esa división si tiene respuesta y cita el caso de: $\tan 90^\circ = a/0$ o que substituyen el término *no existe* por el símbolo ∞ (infinito).

Estas son algunas frases escolares de denotan sus propiedades,

- El cero es un número neutro para la suma y la resta
- El cero multiplicado por cualquier número es cero
- El cero no es admitido como divisor pues la operación queda indefinida.

El valor numérico que se le asigna al cero, se rige de acuerdo a reglas (escolares) específicas

- “Cero por cualquier número es cero”
- “La división de un número cualquiera entre cero esta indefinida”, porque la operación es imposible.
- “La división de cero entre cero es también indefinida”, porque podría realizar dicha operación pero el resultado no es único.

5.1. Preliminares a la Entrevista

Como se mencionó en la introducción de esta tesis un punto crucial para el desarrollo de la misma fue el hecho de que se ha llevado a cabo por un trabajo de campo “asistido”. Es para mi muy importante destacar este concepto de trabajo de campo “asistido”, ya que le da un significado especial a esta tesis.

Por motivos personales después de conformar una parte del modelo de la tesis, tuve que cambiar mi residencia al extranjero. De este modo mi grupo de alumnos, con el cual pretendía desarrollar esta investigación, se estaba desvaneciendo. Sin embargo, surgió la idea de continuar a distancia el proceso de investigación de campo. Fue entonces como se fue desarrollando un grupo muy interesante de trabajo “asistido”.

Por un lado en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus San Luis Potosí, los maestros del área de Matemáticas específicamente el Dr. Leopoldo Zúñiga y la Maestra Ing. Elia Monsivais se convirtieron en los seguidores de este proceso.

Por el otro en el Instituto Politécnico Nacional, en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada el Dr. Castañeda también me propuso seguir el proceso.

A través del correo electrónico y algunas entrevistas por *Skype* se mantuvo el enlace con ambos grupos de trabajo y fue entonces como decidí el diseño de un documento para recoger ideas relativas al cero para que se aplicara a los alumnos de los primeros semestres del área de Ingeniería. El documento se conforma de problemas dentro del contexto de la Ingeniería, en los cuales no fuera tan evidente que durante el proceso de resolución se toparan

con un cero. ¿Qué tipo de cero pueden estar encontrando los alumnos? Ceros en los datos del problema, ceros en el proceso del problema y ceros en los resultados. La intención radica entonces en obtener información acerca de las ideas que tienen los alumnos al trabajar con ceros.

5.1.1. Entrevista Cero

Como parte de un trabajo de Tesis para la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa se pide tu apoyo para contestar el siguiente cuestionario.

La instrucción a los estudiantes fue: *Por favor, no omitas nada que creas de interés para expresar tus dudas o inquietudes sobre el tema.*

Datos generales:

Sexo _____ Edad _____ Curso _____

Escuela _____

I. Para los siguientes planteamientos responde explicando cuantas ideas sientas estén relacionadas con el tema. Nos interesa conocer qué conceptos sientes que están envueltos en los cuestionamientos y cuales recuerdas haber aprendido en tus cursos previos de matemáticas. Principalmente estas preguntas están orientadas a que reflexiones en torno a la idea del cero.

1. Si un día hace cero grados de temperatura, y al día siguiente hace el doble de frío ¿qué temperatura hará?

Esta es una pregunta que se construyó considerando expresiones cotidianas (cultura popular) que se usan normalmente para expresar que en una mañana se sintió mucho

frío. Por otro lado estaba la intención de conocer el manejo de los números negativos de mayor a menor y por el otro, una primera aproximación al producto por cero.

2. Cierta grupo de ayuda humanitaria tiene gran cantidad de despensas para ser repartidas entre los damnificados de un tornado. Afortunadamente las medidas preventivas generaron que no hubiera damnificados por atender. Después del tornado, ¿cuántas despensas tendrá el grupo de ayuda humanitaria?

En esta pregunta se planteaba al estudiante a analizar una situación donde el cero tiene un significado dentro del contexto del problema; llevándolo hasta una división entre cero. Es decir, el alumno puede responder que no tendrá que hacer operación alguna o que tiene como divisor al cero.

3. Al comparar el servicio que prestan algunas compañías de telefonía celular, se encontró que las condiciones de los contratos son muy contrastantes: La compañía A solicita un consumo mínimo de 50 minutos al mes, y el aparato telefónico tiene un costo de \$720 conservado el contrato al menos un año. La compañía B solicita un consumo mínimo de 100 minutos al mes, pero el aparato telefónico es gratis al conservar el contrato al menos un año. ¿Cuál compañía ofrece mejor servicio si ambas cobran el minuto a \$1.20?

En esta pregunta se busca que el alumno compare situaciones y cantidades, por consiguiente encuentre la diferencia numérica o el balance.

4. En el siguiente grupo de números tenemos números racionales, números irracionales, números positivos y números negativos. ¿Podrías agruparlos en dos subconjuntos identificando los positivos de los negativos?

$$U = [25, 0/7, -3, 0.002, -8/0, 61, 0/0, -49, 13/5, 5]$$

Este problema que se planteó como el de mayor dificultad, porque involucra que el alumno recuerde algunos conceptos básicos de geometría analítica, como cual es una línea tangente a una curva, y después que es la pendiente de una recta.

II. Para esta sección resuelve las siguientes operaciones sin usar ninguna herramienta adicional, como calculadora:

$$1050 + 906 + 3004 - 101 - 2075 =$$

$$2060(4003) =$$

$$94100 \div 713 =$$

$$0.006305(274) =$$

$$-\frac{12}{15} + \frac{4}{7} - \frac{36}{105} =$$

Para esta segunda sección del cuestionario, se les presenta a los alumnos algunas operaciones aritméticas con el fin de observar manejo del cero dentro del sistema posicional y observar las propiedades del cero en la suma y resta y en la multiplicación y división.

Comentarios adicionales:

Alma María Cataño Barrera

Estudiante de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa.

CICATA- IPN. Marzo 2007.

5.2. Objetivos de la Entrevista

5.2.1. Implementación de la Entrevista Cero

Cuando se realizó la exploración tenía a mi cargo un grupo de alumnos del primer semestre de Ingenierías a nivel universitario; después las condiciones se modificaron y tuve que continuar esta consulta a distancia.

Con la valiosa cooperación por un lado de mis compañeros del Departamento de Ingeniería y Ciencias del Tecnológico de Monterrey, Campus San Luis Potosí; la implementación de la Encuesta se hizo posible.

Estando en los Estados Unidos en la ciudad de Boston, MA., y utilizando el correo electrónico y software para comunicación, coordiné la implementación de la encuesta en dos bloques. Un primer bloque, que denominaré Bloque A, es el correspondiente a la implementación de la encuesta en San Luis Potosí. Y un segundo bloque, que denominaré Bloque B, estará comprendido por los trabajos en la ciudad de México.

En ambos bloques se buscó que la aplicación de la encuesta tuviera como receptores alumnos en vías a ser parte de carreras de Ingeniería o bien que estuvieran cursando los primeros semestres. Prepararé la Encuesta Cero y la envié a ambos bloques. No se pidió una preparación previa para los alumnos antes de contestar dicha encuesta.

La aplicación del cuestionario ocurrió más o menos en momentos similares, y los resultados fueron escaneados para que se me enviaran para su posterior análisis

5.2.1.1. Estudiantes del ITESM Campus San Luis

En el Bloque A, los estudiantes del Tecnológico de Monterrey, fueron seleccionados por el maestro el Dr. Zúñiga, los cuales eran parte de el grupo de la clase de Matemáticas I para Ingeniería y Administración Financiera. El maestro les aplicó la encuesta sin ninguna preparación previa y se les dio un tiempo de aproximadamente 35 minutos. Durante la

realización de la encuesta los alumnos no consultaron ninguna bibliografía y tampoco utilizaron calculadoras personales.

El grupo estuvo integrado por seis estudiantes, tres hombres y tres mujeres. Las edades de estos estudiantes oscilaron entre los diecisiete y diecinueve años, y estaban cursando el primer semestre de ingeniería.

En general las respuestas se enfocaron a responder brevemente lo que se les estaba preguntando, existió la constante de que no profundizaron en las respuestas. Los estudiantes estaban buscando una respuesta de tipo numérica, más que una explicación al fenómeno que se les planteó.

5.2.1.2. Estudiantes en el CICATA

En el Bloque B, los estudiantes corresponden a la Universidad Tecnológica de Nezahualtcoyotl, fueron seleccionados por el maestro Castañeda, los cuales eran parte del grupo de la Carrera de Telemática. El maestro les aplicó la encuesta sin ninguna preparación previa. Durante la realización de la encuesta los alumnos no consultaron ninguna bibliografía y tampoco utilizaron calculadoras personales.

El grupo estuvo integrado por un grupo de dos estudiantes, Emilia y Patricia. Las edades de estos estudiantes eran cerca de los veinte años.

En las respuestas puede observar dos puntos de vista muy distintos, por un lado, Emilia, se enfocó a responder adicionando valiosos comentarios con respecto a la manera en que intentó argumentar sus respuestas, lo cual fue una gran aportación a esta investigación. Por el otro lado, Patricia, se enfocó más en la búsqueda de explicaciones en el campo de las matemáticas en el cual tratar de ubicar la pregunta o el problema. Esta búsqueda no le permitió profundizar ampliamente en las respuestas.

La indagación de ideas sobre el cero entre los dos bloques de alumnos entrevistados resultó una valiosa herramienta para conocer como los alumnos enfrentan al concepto del cero.

Aunado al objetivo principal, también se recuperaron ideas sobre la manera en que los alumnos argumentan sus respuestas. Algunas veces ellos hacen mezclas entre el lenguaje matemático, entre lo didáctico y lo cotidiano. En el siguiente capítulo abordaré con más precisión el resultado de estas indagaciones.

6.1. Bloque A. Entrevistas aplicadas en marzo del 2007 en el ITESM Campus San Luis Potosí.

Las seis encuestas fueron aplicadas en la ciudad de San Luis Potosí, a un grupo de alumnos de estudios universitarios en el Instituto Tecnológico de Monterrey Campus San Luis Potosí. Los encargados de aplicar dicha encuesta fueron los profesores: Leopoldo Zúñiga y Elia Monsivais, ambos titulares de materias del área de matemáticas del Instituto.

Para la aplicación de esta encuesta no se dio ninguna preparación previa a los alumnos y se les dio un tiempo promedio de treinta y cinco minutos para resolverlo. De igual manera se les solicitó que no utilizaran ningún material adicional o equipo electrónico para llegar a las respuestas.

Los seis jóvenes encuestados; un grupo de tres hombres y tres mujeres entre diecisiete y diecinueve años de edad. Los seis son estudiantes eran del área de ingeniería y son alumnos del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus San Luis Potosí.

Preguntas:

1. Si un día hace cero grados de temperatura, y al día siguiente hace el doble de frío ¿qué temperatura hará?

#E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	<i>Dependiendo de la escala. Según el punto de definición como caliente (20°) entonces pasaron - 20° de caliente a frío (0°). Por lo</i>	Al involucrar la estudiante una escala de termómetro se enfrenta a asignar cualidades a esos números. Consideramos que el cero, que se

	<i>tanto, frío recorre otros -20° para llegar al doble de frío (-20°)</i>	maneja como referencia, puede aparecer en la discusión y lo que deseamos es cuestionar al estudiante sobre el significado que le asigna, quizá como frontera o paso límite, punto de congelación del agua, etc.
B	<i>No se cuanta temperatura hará, pero va a hacer menos que 0 grados.</i>	El alumno identifica el problema, sin embargo no encuentra la manera de expresar una posible solución. Reconoce que existen valores abajo del cero y que estos son menores.
C	<i>Pues se supondría que el doble de cero grados, pero ¿cuál es el doble de cero grados?</i>	El alumno se concentra en el hecho de la cantidad y que para encontrar su doble necesita multiplicar, pero al encontrar que su elemento es cero.
D	<i>La pregunta es capciosa, lo único que se es que la temperatura disminuyó y que es cierto grados bajo cero.</i>	El alumno reconoce no tener elementos para contestar la pregunta. Menciona como una posible solución que existen valores abajo del cero.
E	<i>Pues...si hace el doble d' frío la temperatura tendría que bajar de cero pero...el doble de cero es cero entonces, no sabría</i>	El alumno trata de asociar dos sistemas de referencia distintos, por un lado la escala del termómetro y por otro la escala con la que percibimos la

	<i>que valor darle.</i>	sensación de frío o calor. Esto lo confunde y lo asocia erróneamente con multiplicar “ $2 \times 0 = 0$ ”
F	<i>Pues esta pregunta está un poco extraña y la verdad nunca había pensado en eso. Creo que no se puede determinar pues el doble de cero es cero, pero si hace el doble de frío no puede ser la misma temperatura.</i>	Al igual que el alumno E, relaciona el problema con algo que aprendió sobre el cero, pero agrega que el valor numérico “Cero” para esta pregunta no es adecuado, el resultado debe ser un “Número diferente.”

Tabla 1. Respuesta 1–Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP.

1) Una reacción fue que el alumno decidió combinar estas dos ideas. Este fue el caso de los alumnos C, D y F. Sin embargo, solo el alumno F descubrió que este resultado no le llevaba a una respuesta adecuada y que tendría que analizar un poco más los elementos involucrados.

2) Cuatro de los alumnos, A, B, D y E, reconocen que el cero es un elemento de referencia. Es decir, el cero se establece como una expresión que divide por un lado los números positivos y negativos, y por otro, establece una forma de agrupar a los números en mayores y menores. Solo en el caso de A se puede asegurar que identifica que los números mayores corresponden a los positivos y los menores a los negativos.

3) En su búsqueda de una respuesta numérica, los alumnos encuestados a excepción de A y F, la pregunta les invitó a suponer que el camino adecuado para dar respuesta al problema implicaba más que solo una operación matemática.

El Cero es un número neutro que sirve como elemento de transición entre los números positivos y negativos. El valor numérico que se le asigna al cero, de acuerdo a reglas específicas, como que “Cero por cualquier número es cero”, en ocasiones imposibilita al alumno en la utilización de las matemáticas. Es decir, dependiendo del contexto en el cual se solicite la presencia del cero puede tener diferentes concepciones.

2) Cierta grupo de ayuda humanitaria tiene gran cantidad de despensas para ser repartidas entre los damnificados de un tornado. Afortunadamente las medidas preventivas generaron que no hubiera damnificados por atender. Después del tornado, ¿cuántas despensas tendrá el grupo de ayuda humanitaria?

#E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	<i>La misma cantidad de despensas.</i>	El alumno no explica su razonamiento.
B	<i>Las mismas que tenía antes del tornado, si no hubo damnificados por atender pues no repartieron nada.</i>	El alumno percibe que no es necesario efectuar ningún cálculo.
C	<i>Las mismas despensas que tenían al principio, dado que no fueron ocupadas estas despensas.</i>	El alumno explica porque no hace nada y su respuesta es correcta.
D	<i>El grupo se quedará con todas las despensas xq' no hay</i>	El alumno identifica un grupo un total. También que todas las

	<i>personas por atender.</i>	despensas están intactas. En consecuencia, al no haber personas damnificadas.
E	<i>Puede tener las mismas que ya tenía si las resguardan del tornado, se pudieron haber perdido todos o una parte si no fueron resguardadas.</i>	El alumno sabe que no se dividirá la cantidad, pero asume la posibilidad de que existan otros factores que la alteren.
F	<i>Pues la misma gran cantidad de despensas que tenía antes del tornado, pues no hubo damnificados.</i>	Al igual que los demás alumnos identifica que no habrá que dividir la cantidad, pero identifica que el problema citaba una cantidad específica y que dicha cantidad no fue modificada

Tabla 2. Respuesta 2–Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP.

El alumno pudo responder que no se tendría que hacer cálculo alguno, pero ninguno supuso que la operación a realizar tenía como divisor al cero. Lo que los alumnos encontraron fue lo siguiente:

1) Solo un alumno (el alumno F) pudo identificar en el problema que se estaba haciendo referencia a una división de una cantidad muy grande entre cero, pero no lo expresó en términos simbólicos.

3) Al comparar el servicio que prestan algunas compañías de telefonía celular, se encontró que las condiciones de los contratos son muy contrastantes: La compañía A

solicita un consumo mínimo de 50 minutos al mes, y el aparato telefónico tiene un costo de \$720 conservado el contrato al menos un año. La compañía B solicita un consumo mínimo de 100 minutos al mes, pero el aparato telefónico es gratis al conservar el contrato al menos un año. ¿cuál compañía ofrece mejor servicio si ambas cobran el minuto a \$1.20?

#E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	<p><i>No sabemos cual ofrezca mejor servicio (mayor calidad). Pero la más barata es la compañía B.</i></p> $100 \times 1.2 = 120$ $120 \times 12 = 1440$ $50 \times 1.2 = 60$ $60 \times 12 = 820$ $820 + 720 = 1540$	<p>En las operaciones que realizó, tuvo un error al multiplicar 60×12 que obtuvo 820.</p>
B	<p><i>Pues depende del uso que tu des al teléfono, porque al final, cumpliendo las condiciones mínimas de las dos compañías, se gasta lo mismo.</i></p>	<p>El alumno comprendió el problema y añade posibles factores adicionales antes de dar una respuesta definitiva.</p>
C	<p><i>Ambas ofrecen el mismo servicio, ya que al año se pagarían las mismas cantidades 1440.</i></p>	<p>El alumno no explica su respuesta, pero es correcta.</p>
D	<p><i>La compañía B porque no</i></p>	<p>El alumno toma la idea de</p>

	<i>te cobra el teléfono solo los 100 minutos mínimo, más el contrato.</i>	gratis=nada, cero. Además que agrega un factor que no se consideró en el problema, el costo de contrato. Se enfoca en el tiempo que la compañía brindará servicio al cliente y establece en función de ese hecho que la compañía B dará mejor servicio.
E	<i>Ofrecen el mismo servicio ya que al año en ambas compañías pagarás 1440.</i>	Su respuesta es igual que el alumno C.
F	<i>Pues resulta lo mismo pues en ambas compañías terminas pagando en un año 1440 pesos. Pero si al segundo año ya no cambias tu teléfono y los precios siguen igual en ambas compañías te conviene mas la A.</i>	Este alumno explicó perfectamente el problema y añade un factor que le permite establecer una razón de comparación muy confiable.

Tabla 3. Respuesta 3–Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP.

En esta pregunta el alumno debía comparar situaciones y cantidades, por consiguiente encontrar la diferencia numérica o el balance.

La mayoría de los alumnos pudieron encontrar y evaluar las dos situaciones y solo uno de ellos consideró otro escenario. Es notable como existe asociación entre ciertas palabras y la

ausencia de valor. Por ejemplo, gratis es considerado como nada o cero. El problema es que el alumno cuando se encuentra con un dato esencial cuyo valor asignado es cero, le confiere mayor importancia y en ocasiones no sabe que operaciones efectuar (el caso del alumno D).

4) En el siguiente grupo de números tenemos números racionales, números irracionales, números positivos y números negativos. ¿Podrías agruparlos en dos subconjuntos identificando los positivos de los negativos?

$$U = [25, 0/7, -3, 0.002, -8/0, 61, 0/0, -49, 13/5, 5]$$

#E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	$P=\{25, 0.002, 61, 13/5\}$ $N=\{-3, -49\}$	El alumno no supo que hacer con $0/7, -8/0, 0/0$ y 5 .
B	$P=\{25, 0/7, 0.002, 61, 0/0, 13/5, 5\}$ $N=\{-3, -8/0, 0/0, -49\}$ "No estoy seguro de lo que hice"	El alumno duda de su respuesta, aparentemente tiene el concepto de números positivos o negativos, sin embargo cuando trata de clasificar el cero lo involucra en ambos conjuntos.
C	$P=\{25, 0.002, 61, 13/5, 5\}$ $N=\{-3, -49\}$	El alumno no incluye $0/7, -8/0$ y $0/0$.
D	$P=\{25, 0.002, 61, 13/5, 5\}$ $N=\{-3, -49\}$	Su respuesta es igual que C.
E	$P=\{25, 0.002, 61, 13/5\}$ $N=\{-3, -49\}$ El cero no es (+) ni (-)	Aunque el alumno parece coincidir con C y D, establece claramente que el cero es un número

	$(0/7=0)$ <i>No puedes dividir un No/0</i> $(-8/0)$ y $0/0$ es un error.	neutro y menciona que “A/0 y 0/0 son errores”, quizá porque es lo que las calculadoras de bolsillo dicen, pero no profundiza en sus afirmaciones. Será necesario encontrar más información al respecto.
F	$P=\{25,0/7,0.002,61,13/5,5\}$ $N=\{-3,-49\}$	El alumno clasifica los números en positivos y negativos, pero no tiene seguridad sobre algunos conceptos y solo se atreve a clasificar $0/7$, de los demás no opina ni propone.

Tabla 4. Respuesta 4–Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP.

En este problema se destacaba la intención de revisar tanto el orden numérico, como algunos conceptos y convenciones, de tal manera que:

- 1) El alumno puede distinguir lo positivo de lo negativo.
- 2) Los alumnos en general no clasifican al cero como un elemento neutro, y en algunos casos dudan de si es positivo y negativo a la vez.
- 3) Los alumnos tienen un conocimiento vago o nulo sobre convenciones relativas al cero.

5) ¿Cuáles son las coordenadas $[x, y]$ cuando $x = \frac{25 \times 2 + 45/9 \times 10}{75/3 \times 4 - 100}$

$$y = \frac{75/3 \times 4 - 100}{25 \times 2 + 45/9 \times 10} ?$$

#E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	$\left(\frac{-0}{100}, \frac{100}{0} \right)$	El alumno tuvo dos omisiones: el signo y el acomodo de las coordenadas.
B	$\left(\frac{100}{0}, \frac{0}{100} \right)$ <p><i>Los resultados son algo extraños, no sé como se puede expresar esto.</i></p>	El alumno obtiene la respuesta correcta pero no está seguro de sus resultados.
C	$\left(\frac{100}{0}, 0 \right)$ <p><i>Siguiendo la jerarquía de los signos se obtienen esos resultados.</i></p>	El alumno habla del procedimiento.
D	$(-0.538, -1.856)$ <p><i>Traté de seguir el orden de las operaciones.</i></p>	En su respuesta se encuentran varias situaciones equivocadas, aparecen signos negativos y los valores no concuerdan. Y en su comentario, muestra que no está seguro de las operaciones que efectuó.
E	$\left(\frac{100}{0}, \frac{0}{100} \right)$ <p><i>En x no existe y en y es cero.</i></p>	El alumno obtiene el resultado y trata de interpretar el resultado.
F	<i>La ordenada x no existe</i>	El alumno responde igual que

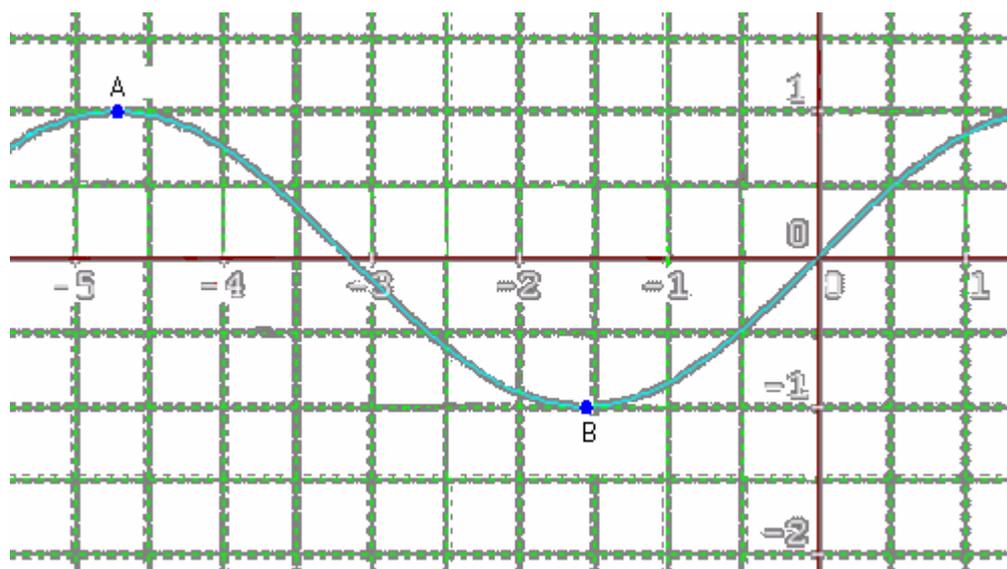
	<p><i>pues da 100/0 y la y 0 porque da 0/100</i></p>	<p>E y agrega el nombre a la x, lo que significa que está ubicando el problema dentro de un área específica.</p>
--	--	--

Tabla 5. Respuesta 5–Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP.

1) El alumno tiene problemas con la jerarquía de las operaciones aritméticas, tanto en su aplicación manual, como en su aplicación con elementos electrónicos. Sobretudo cuando vemos que el alumno D llega a un resultado muy distanciado del que se esperaba.

2) Los alumnos en general no fueron más allá de su resultado numérico y al no reflexionarlo no se dan cuenta de equivocaciones, en este caso los signos negativos.

6) Define el valor de la pendiente de las tangentes que pasan por los puntos A y B de la curva que se describe abajo.



#E	PREGUNTA	COMENTARIO
A	<i>El valor = 0</i>	El alumno da la respuesta y no la explica.
B	<i>La pendiente de la tangente de cada punto es 0.</i>	Responde igual que el alumno A.
C	<i>Las tangentes son cero ya que están totalmente horizontales a la curva.</i>	El alumno define el significado de horizontalidad de una línea con respecto a su pendiente.
D	<i>A es igual a $y=1$ B es igual a $y=-1$ Las tangentes en este caso se definen por el valor de "y"</i>	Su respuesta ya está en términos de geometría analítica.
E	<i>Tangente de $A=0$ Tangente de $B=0$</i>	El alumno responde igual que A y B.
F	<i>En A la pendiente es 0 y en B también.</i>	La respuesta coincide con la de los alumnos A, B y E.

Tabla 6. Respuesta 6–Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP.

Este problema que se planteó como el de mayor dificultad, porque involucra que el alumno recuerde algunos conceptos básicos de geometría analítica, como cual es una línea tangente a una curva, y después que es la pendiente de una recta. Contrario a lo esperado los alumnos están buscando problemas más focalizados cuando se les examina en la escuela. Así se encontró que:

- 1) El alumno interpretó el significado de una recta de pendiente cero.
- 2) El alumno C recordó que una línea horizontal tiene pendiente cero.

3) Los alumnos C y D, que ya se metieron en el contexto de la geometría analítica recordaron la ecuación de la recta. Por un lado el alumno C menciona la recta horizontal y por el otro el alumno D vuelve a mencionar la recta horizontal pero de manera algebraica utilizando su escritura como $y = 1$. Evidentemente ellos recuerdan que la recta se puede escribir como $y = mx + c$

Para la segunda sección de la encuesta, se les presentó a los alumnos ciertas operaciones señaladas solo para observar el manejo del cero como valor de posición para observar el manejo de las propiedades del cero en la suma y resta y en la multiplicación y la división.

Las operaciones fueron las siguientes:

OPERACIONES	COMENTARIOS A LAS RESPUESTAS
<p>SUMA Y RESTA</p> $1050 + 906 + 3004 - 101 - 2075 =$ $-\frac{12}{15} + \frac{4}{7} - \frac{36}{105} =$	<p>El 83% de los alumnos no tienen problemas con las sumas y restas de enteros o fracciones que involucran ceros como elementos de posición.</p>
<p>MULTIPLICACION Y DIVISION</p> $2060(4003) =$ $94100 \div 713 =$ $0.006305(274) =$	<p>En el 39% de las operaciones donde se involucra el cero como elemento de posición en la multiplicación y división, los alumnos tuvieron errores de precisión, de procedimiento y en el menor de los casos en la identificación del punto decimal.</p>

Tabla7. Sección 2/Operaciones–Análisis de estudiantes del ITESM Campus SLP.

Los comentarios a la encuesta en general, de parte de los alumnos fueron:

- a) Algunas preguntas eran algo extrañas, pero el último ejercicio fue bueno para practicar las operaciones básicas.

- b) Las preguntas supuestamente son fáciles pero tienen más que nada una complejidad pues son más para razonar y buscar una posible solución.

- c) Las preguntas están capciosas y las operaciones son muy largas.

- d) Que bueno que pida operaciones sin calculadora, pero por la falta de práctica se me complican.

El análisis de estas respuestas me llevó a la conexión con el origen del concepto del cero. La actual del cero también tiene diferentes significados dependiendo de la forma en que se utiliza. Por un lado las respuestas en las que se involucra al cero como un elemento meramente numérico; tenemos que los alumnos lo conectan con el significado que confirieron principalmente los árabes: un elemento organizador que permite llenar algunas casillas vacías cuando se cambia al otro nivel de cifras, como valor de posición. Pero cuando el cero es encontrado por los alumnos en problemas de razonamiento; el concepto tiene reminiscencias de los mayas, quienes asociaban diferentes significados según el contexto en el cual se estaba trabajando. Ejemplo de ello es, cuando los alumnos identifican al cero con el significado de nada.

6.2. Bloque B. Encuestas aplicadas en abril del 2007 en el CICATA

Este grupo está formado por Emilia y Patricia. Las encuestas fueron aplicadas en la ciudad de México, D.F. Las alumnas tienen 21 y 23 años, y están cursando sus estudios universitarios en la Universidad Tecnológica de Netzahualcoyotl, en la carrera de telemática. El encargado de aplicar dicha encuesta fue Apolo Castañeda.

Para la aplicación de esta encuesta no se dio ninguna preparación previa a los alumnos. De igual manera se les solicitó que no utilizaran ningún material adicional o equipo electrónico para llegar a las respuestas.

Preguntas:

1. Si un día hace cero grados de temperatura, y al día siguiente hace el doble de frío ¿qué temperatura hará?

#E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	<p><i>Si hace cero grados de temperatura estamos hablando de una escala centígrada (Celsius), lo que significa que el movimiento de los átomos es muy lento, recordando, que entre más frío esté se hace más lento el movimiento de los átomos y entre más calor los átomos son más rápidos.</i></p> <p><i>Si habláramos de 0° Kelvin, hablaríamos de que se detuvo el</i></p>	<p>Emilia hace una interesante conversión para atacar el problema, sin embargo, reconoce que algunas veces las matemáticas pueden llevar a resultados difíciles de comprender o hacia caminos diferentes. Ella bien expresa en su nota que le quedaron dudas al analizar la respuesta.</p>

	<p><i>movimiento de los átomos. Sin embargo si consideramos que tenemos varias escalas de temperatura como son: la Celsius, Kelvin y Fahrenheit puedo hacer una conversión de para obtener el doble</i></p> <p><i>0° Celsius = 273.15 ° Kelvin</i></p> <p><i>Entonces utilizaré la fórmula</i></p> <p><i>C °= K- 273.15</i></p> <p><i>273.15 x 2 = 546.30</i></p> <p><i>C ° = 546.30-273.15</i></p> <p><i>C ° = 273.15</i></p> <p><i>Entonces cuando tenga el doble de frío utilizando otra escala obtengo una temperatura muy elevada, la pregunta que surge de este razonamiento es que ¿porqué en lugar de obtener temperaturas bajo cero obtengo temperaturas más altas?</i></p> <p><i>Nota: Decidí cambiar la escala de Centígrados a Kelvin para poder manejar el valor de forma matemática y luego convertirla nuevamente a la escala que se mide para nosotros.</i></p>	
	<p><i>0° de temperatura, desde mi</i></p>	<p>Patricia en cambio está más</p>

B	<i>punto de vista este ejercicio está relacionado con el cálculo ya que el cálculo es un concepto que nos permite realizar una estimación de resultados.</i>	preocupada por relacionar el problema con alguna rama de las matemáticas. No hace ninguna reflexión en sí del problema.
---	--	--

Tabla 8. Respuesta 1 –Análisis de estudiantes del CICATA.

Lo que Emilia encontró fue que las matemáticas son una herramienta que tendrá diferentes “lecturas” dependiendo del contexto en el cual estén siendo aplicadas.

2. Cierta grupo de ayuda humanitaria tiene gran cantidad de despensas para ser repartidas entre los damnificados de un tornado. Afortunadamente las medidas preventivas generaron que no hubiera damnificados por atender. Después del tornado, ¿cuántas despensas tendrá el grupo de ayuda humanitaria?

#E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	$n = \text{cantidad de despensas}$ $d = \text{damnificados}$ $n = ? \quad d = 0 \quad \text{donde } n = d$ <i>por tanto $n = 0$</i> <i>Si consideramos el hecho de que se previno no tener damnificados entonces no tendría</i>	Emilia hace un interesante planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales. Asignó el valor de cero a la variable d y luego igualó las dos ecuaciones para encontrar el valor de n.

	<i>despensas, pero si aún así consideraron tener n cantidad de despensas entonces se quedaron con la misma cantidad n que tuvieron al inicio, ya que ninguna fue repartida.</i>	
B	<i>Todas porque no repartió ni una. Al igual que el primer ejercicio lo enfoco dentro del cálculo.</i>	La alumna contesta adecuadamente, pero no establece ninguna evidencia de su razonamiento.

Tabla 9. Respuesta 2 –Análisis de estudiantes del CICATA.

Lo que las alumnas encontraron fue lo siguiente: Emilia pudo responder que no se tendría que hacer operación alguna. Contrario a ello, Patricia buscó las variables del problema y los organizó de manera de formar un sistema de ecuaciones.

- Al comparar el servicio que prestan algunas compañías de telefonía celular, se encontró que las condiciones de los contratos son muy contrastantes: La compañía A solicita un consumo mínimo de 50 minutos al mes, y el aparato telefónico tiene un costo de \$720 conservado el contrato al menos un año. La compañía B solicita un consumo mínimo de 100 minutos al mes, pero el aparato telefónico es gratis al conservar el contrato al menos un año. ¿cuál compañía ofrece mejor servicio si ambas cobran el minuto a \$1.20?

Ambas alumnas encontraron y presentaron un análisis muy similar mismo que muestro a continuación:

COMPañÍA A	COMPañÍA B
50 minutos al mes mínimo Aparato \$720 Contrato de un año Minuto \$1.20 Costo al mes \$ 60 Costo anual \$ 720 Gastos totales al año Aparato \$ 720 + Costo anual \$ 720 Total \$ 1440 Usando la cantidad mínima de minutos al año.	100 minutos al mes mínimo Aparato gratis Contrato de un año Minuto \$1.20 Costo al mes \$ 120 Costo anual \$ 1440 Gastos totales al año Costo anual \$ 1440 Usando la cantidad mínima de minutos al año.

Tabla10. Respuesta 3 de estudiantes del CICATA.

E	RESPUESTA	COMENTARIO
A	<i>Si consideramos estos datos obtenemos que gastamos lo mismo con cualquiera de las dos compañías, ya que mientras una te ofrece menos minutos te vende el aparato y la otra al contratar más minutos te incluye el valor del aparato, sin embargo considerando la cantidad de minutos la compañía B nos permitiría hablar por más tiempo, es</i>	La forma en que la alumna responde es mucho más analítica, trata de ir más allá de un simple balance.

	<i>decir, el doble que la compañía A. Lo que implicaría que si se sobrepasara de minutos la compañía B a 100 pagaría más mientras que la A estaría dentro del rango por el mismo precio mínimo que tendría que pagar, por tanto quien da mejor servicio es la compañía B.</i>	
B	<i>El servicio en costo es el mismo solo que es distribuido de diferentes maneras.</i>	La alumna da una respuesta concisa basada en su análisis.

Tabla 11. Respuesta 3- Análisis de estudiantes del CICATA.

Ambas alumnas pudieron encontrar y evaluar las dos situaciones y solo una de ellas consideró otro escenario y explicó ampliamente a través de un análisis muy completo.

4. En el siguiente grupo de números tenemos números racionales, números irracionales, números positivos y números negativos. ¿Podrías agruparlos en dos subconjuntos identificando los positivos de los negativos? $U = [25, 0/7, -3, 0.002, -8/0, 61, 0/0, -49, 13/5, 5]$

	RESPUESTA	COMENTARIO
E	$P = \{25, 0.002, 61, 13/5, 5\}$	La alumna no supo que hacer

	$N=\{-3,-49\}$	con $0/7,-8/0, 0/0$.
	$P=\{25,0.002,61,0/0,13/5,5\}$ $N=\{0/7,-3,-8/0,-49\}$ <i>Este se relaciona con el diagrama de Venn donde se hace la clasificación de los números.</i>	En el primer subconjunto parecía tener claro el concepto de números positivos o negativos, sin embargo ubica el $0/7$ dentro de los negativos. ¿Que le hace dudar de su respuesta?

Tabla 12. Respuesta 4- Análisis de estudiantes del CICATA.

En este problema se destacaba la intención de revisar tanto el orden numérico, como algunos conceptos. De las respuestas encontradas se observa:

1. El alumno tiene claro el concepto de positivo y negativo siempre que este trabajando números enteros.
2. Los alumnos en general dudan al tener que clasificar al cero.

5. ¿Cuáles son las coordenadas $[x, y]$ cuando $x = \frac{25 \times 2 + 45/9 \times 10}{75/3 \times 4 - 100}$

$$y = \frac{75/3 \times 4 - 100}{25 \times 2 + 45/9 \times 10} ?$$

	RESPUESTA	COMENTARIO
E	$\left(\frac{100}{0}, \frac{0}{100} \right)$ <i>Es decir, mientras en las abscisas</i>	La respuesta conlleva un significado interesante, para Emilia

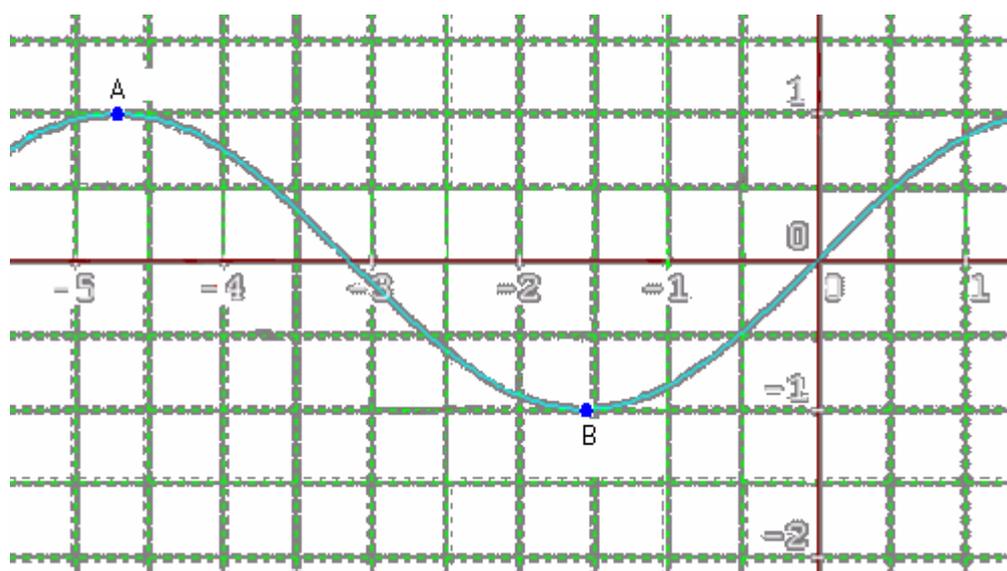
	<i>tengo un valor gigantesco en las ordenadas tengo un valor muy pequeño</i>	100/0 dará un resultado gigantesco y 0/100 un valor muy pequeño.
	$x \approx 1.05 \rightarrow y \approx 1.05$ <i>Este se puede relacionar con álgebra pero también con geometría ya que estamos hablando de coordenadas en el plano cartesiano.</i>	La alumna obtiene la respuesta incorrecta, aunque no encontré evidencias sobre el origen del error.

Tabla 13. Respuesta 5- Análisis de estudiantes del CICATA.

La primera estudiante no tiene problemas con las operaciones, pero al generar algunas afirmaciones como “gigantesco” o “muy pequeño” vemos que se necesitará mayor análisis.

6. Define el valor de la pendiente de las tangentes que pasan por los puntos A y B de la curva que se describe abajo.

7.



	RESPUESTA	COMENTARIO
--	-----------	------------

E		
	<p><i>La pendiente es igual a 0.3174</i></p> $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 1}{-1.6 - 4.7} = \frac{2}{6.3}$	<p>Aun cuando existe un error en la respuesta el planteamiento para evaluar el valor de la pendiente permite visualizar que Emilia se concentró en encontrar el valor de la pendiente y perdió de vista la parte conceptual que involucraba la definición de línea tangente.</p>
	<p>$m = -3.5$</p> <p><i>Este problema se relaciona con la geometría y nos dice que mientras más grande sea el valor de la pendiente, mayor será la inclinación.</i></p>	<p>Aquí se muestra una respuesta que denota un posible conocimiento del tema, pero no analiza la respuesta.</p>

Tabla 14. Respuesta 6- Análisis de estudiantes del CICATA.

1. Las alumnas omitieron el significado de rectas tangentes y se ubicaron en el valor de la pendiente de una recta que tocara los puntos A y B.
2. Al tener ambas respuestas numéricas erróneas no se puede definir si pueden hablar fluidamente del tema.

Para la segunda sección de la encuesta, se les presentó a los alumnos ciertas operaciones aritméticas para observar el manejo del cero en la suma y resta y en la multiplicación y la división. Las operaciones fueron las siguientes:

OPERACIONES	COMENTARIOS A LAS RESPUESTAS
<p>SUMA Y RESTA</p> $1050 + 906 + 3004 - 101 - 2075 =$ $-\frac{12}{15} + \frac{4}{7} - \frac{36}{105} =$	<p>El 75% de las respuestas relacionadas con las sumas y restas de enteros o fracciones que involucran ceros como elementos de posición fueron <i>correctas</i>.</p>
<p>MULTIPLICACION Y DIVISION</p> $2060(4003) =$ $94100 \div 713 =$ $0.006305(274) =$	<p>Las alumnas no tuvieron problemas en estas operaciones.</p>

Tabla 15. Sección 2/Operaciones - Análisis de estudiantes del CICATA.

Los comentarios a la encuesta en general, de parte de los alumnos fueron:

- a. Los problemas estuvieron muy interesantes, considero que como alumnos muchas veces olvidamos hacer operaciones sin usar calculadora, ya que hoy en día el uso de la tecnología nos hace la vida más fácil.
- b. Los ejercicios son relativamente básicos sin embargo si los temas son trabajados frecuentemente, suele haber problemas en lo más básico.

En el caso particular del Bloque B, encontré que existe una marcada diferencia entre la forma de conceptualizar al cero. Por un lado la tendencia a explicar comparando y

contextualizando, muy analítica, explicando a través de reglas que en análisis posteriores fueran aceptadas como falsas o verdaderas. Y por otra de manera funcionalista.

6.3. Surgimiento de la Entrevista clínica

Después del análisis de los comentarios hechos por los alumnos en la Encuesta Cero, quedaron algunas inquietudes. Dichas inquietudes estaban relacionadas con respuestas poco claras o reducidas y fue entonces como una prolongación a la encuesta se decidió extender la encuesta hacia una entrevista.

El problema era como implementarla, pues como se ha comentado anteriormente el proceso de implementación dependía de mi grupo de trabajo “asistido”. De tal manera les hice tres propuestas, vía correo electrónico a los maestros de San Luis Potosí. Estas fueron:

- 1) Señalarles las dos encuestas y en ellas las preguntas que me gustaría que ellos explicaran con más detalle. Hacer la aportación por escrito y que me enviaran escaneada la solución.
- 2) Que ellos platicaran con los dos alumnos involucrados y grabaran sus respuestas. Luego hicieran un respaldo en MP3 o en un CD cualquiera y me lo enviaran vía correo electrónico.
- 3) Que los involucrados, los estudiantes y la investigadora nos conectáramos en una cuenta de skipe para escuchar las opiniones de los chicos.

En cualquiera de los casos, la conducción de la entrevista se deseaba que estuviera a cargo del alumno(a) ya que lo que estamos buscando es que nos diera mayor información de lo que sabe o no sabe y de lo que le gustaría saber sobre el cero. La segunda persona que

intervendría directamente serían los profesores o asistentes a distancia, ya que ellos eran los que conocían los antecedentes del alumno(a) y podrían rescatar más fácilmente información. Mi posición en realidad se resumió como espectadora, y al análisis de la nueva información que sirvió para establecer nuevas conclusiones.

6.4. Objetivos e Implementación de la Entrevista

De acuerdo al plan elaborado se tomaron del Bloque A, los alumnos del Tecnológico de Monterrey dos encuestas y se prepararon las correspondientes entrevistas. Para el Bloque B, de la ciudad de México se invitó a las dos alumnas y se prepararon las correspondientes entrevistas.

6.4.1. Estudiantes del ITESM Campus San Luis

Los alumnos seleccionados del ITESM Campus San Luis, fueron Xenia y Ernesto. A ambos les envié vía correo electrónico la entrevista. Como ya he comentado, este trabajo de recuperar la información se hizo más complicado si consideramos que los estudiantes se encontraban en la Ciudad de San Luis Potosí y yo estuve analizando el material en la Ciudad de Boston. Sin embargo, el Prof. Leopoldo Zúñiga, parte del equipo de trabajo asistido, se ofreció a darme apoyo nuevamente para que entrevistara de manera personal a los dos estudiantes. Él utilizó el mismo formato que le fue enviado a los alumnos y lo implementó con ligeros cambios según se fue dando oportunidad en la entrevista.

Desafortunadamente, solo fue posible realizar la entrevista de la estudiante Xenia, he aquí algunos fragmentos de sus respuestas:

Para la extensión a la pregunta 1 de la encuesta se dijo:

Profesor: *Tú contestaste la encuesta sobre el problema 1 que si hace el doble de frío la*

temperatura tendría que bajar de cero

¿Para ti que significa bajar de cero?

Xenia: *Temperaturas menores a cero grados, como menos 1, menos 2, que implicaría que hiciera más frío.*

Profesor: *¿Como relacionas el doble de frío con bajar de cero?*

¿Que significaría que sea el doble de frío con el hecho de bajar de cero?

Xenia: *Al bajar de cero la temperatura será cada vez mas fría*

La temperatura es más fría

Profesor: *¿Que significaría el doble de frío?*

Xenia: *Más fuerte que el primero*

Profesor: *Estas partiendo de que la temperatura es cero grados, ¿que significaría el doble de frío?*

Tiene que ver con bajar de cero, pero al doble, ¿que significaría?

Xenia: *Al doble de frío, seguiría siendo cero, en número quedaría fijo*

En clima se sentiría más frío

Profesor: *El que tu afirmes que el doble de cero es cero ¿qué significa?*

Xenia: *Por las propiedades numéricas significa multiplicar 0 por dos; o sumar $0+0$*

Profesor: *En el contexto del frío, es decir, en el contexto de la temperatura.*

Xenia: *Tendría que tomar otra escala para poder dar una medición*

Poner un punto de referencia, que no fuera el cero

Profesor: *¿Porque crees que el cero sería un problema tomarlo como punto de referencia?*

Xenia: *Porque aunque haga el doble, el triple o el número que sea siempre dará cero.*

Profesor: *Tu afirmas que no sabrías que valor darle. ¿A la temperatura o al cero?*

Xenia: *A la temperatura, pues no sabría que temperatura habría cuando se tenga el doble de frío. No se puede medir, en el ambiente o en la vida práctica. Si hace el doble de frío las personas tienen que tomar ciertas medidas.*

De sus respuestas puedo concluir que para la estudiante las temperaturas frías le permitieron definir:

- 1) Las cantidades bajo cero como cantidades negativas.
- 2) Existe la noción (poco clara) de incremento de temperatura, en este caso del doble, y los grados centígrados de referencia.
- 3) La estudiante recordó que como propiedad numérica la multiplicación de cualquier cantidad por cero siempre dará cero, pero fue un asunto complicado de explicar por la estudiante.
- 4) Cuando en un problema se tiene como punto de referencia el número cero, para la alumna le resultó más conveniente antes de aplicar directamente propiedades numéricas, cambiar dicho punto, utilizando otro número que no requiera un manejo especial.

En la pregunta número dos relacionada con un problema de repartición de despensas entre damnificados la estudiante contestó por escrito, “que se tendrían las mismas”, sin embargo en la entrevista quise que la estudiante argumentara su respuesta. He aquí un fragmento de sus respuestas:

Profesor: *Tú escribiste que podrías tener las mismas si las resguardas del tornado. ¿En qué estabas pensando?*

Xenia: *Se pudieron haber perdido todas*

Profesor: *Existe algún procedimiento que te permita resguardar cantidades.*

Xenia: *No se*

Profesor: *Como puedes conservar cantidades, como lo puedes escribir esa situación con símbolos o operaciones matemáticas*

Xenia: *¿Que permanezca una cantidad fija?*

Las operaciones que se hagan... se pueden poner otra operación que haga lo contrario para dejar el mismo resultado.

Profesor: *Para el caso de las despensas cual sería una operación elemental para conservar las despensas... una operación simbólica analítica si no se repartieron despensas*

Por ejemplo:

El tornado dejó damnificados pero muy pocos, se tuvieron que repartir despensas.

¿Qué operaciones haces?

Xenia: *Una resta*

Profesor: *Si no hubo despensas que repartir.*

Xenia: *Pues no hago nada, si Tú quieres resguardar multiplicar por uno*

Profesor: *Si repartes unas cuantas*

Xenia: *restas*

Profesor: *si no repartiste ningunas.*

Xenia: *restar cero*

Observamos tres situaciones interesantes:

1) No hay necesidad de realizar operaciones, no es un problema complicado, pero hay una tendencia a afrontar estos problemas a través de ellos.

2) Que se efectúen operaciones contrarias.

Por ejemplo: restar y sumar o restar cero;

3) Otra forma que mencionó fue el hecho de multiplicar por uno.

Para la pregunta tres de la encuesta relacionada con el problema de las dos compañías que prestan servicio telefónico, la estudiante contestó que ambas daban el mismo servicio. Sin embargo, se insistió en que identificara una como la mejor. He aquí un fragmento de la entrevista:

Profesor: *Tú hiciste algunas operaciones, concluyes que ofrecen el mismo servicio*

Si Tú tuvieras que elegir solo una, ¿cual elegirías?

Xenia: *uhm!, la segunda, es decir, 100 minutos y teléfono gratis*

Hablaría mas, no se me dificultaría cumplir el mínimo, la ventaja es que no pagaría por el teléfono y no se me haría difícil cumplir con el requisito.

Profesor: *Cual es la diferencia si tomas en cuanto solo el dinero.*

Xenia: *en ambas pagas lo mismo, La diferencia es nada o sea cero.*

En esta situación se observa que la estudiante está más familiarizada con las comparaciones entre cantidades. Cuando habla de cantidades iguales afirma que no hay

diferencia, sin embargo, cuando se le insiste en que elija una compañía, aquella que da el mejor servicio, duda, pero finalmente da una respuesta correcta. Cabe mencionar que la estudiante hace una diferencia interesante: *Nada es cero*.

En la siguiente pregunta relacionada con los subconjuntos de números positivos y negativos, me llamó la atención que la estudiante pudo sin dificultad encontrar acomodo para casi todos los números, pero dejó tres pendientes. El interés es escuchar porque no los clasificó en ninguno de los subconjuntos. He aquí un fragmento de la entrevista:

Profesor: *...Tres números no los pusiste en ninguno de los dos subconjuntos y aclaras que el cero no es positivo ni negativo y para los otros dices que el cero no puede ser dividido entre cero y que un número no puede ser dividido por cero que esto da error.*

Entonces como defines el cero,

Xenia: *Es neutro.*

Profesor: *Que sería neutro*

Xenia: *Como... como no tiene ningún signo no afectaría a ningún otro número, en agregar valor*

Profesor: *Tal vez si estas pensando en operaciones elementales como sumas y restas, pero en el caso que nos ocupa, multiplicaciones*

Xenia: *No importa que signo tiene el cero, como sabemos que la respuesta es un error no importa que signo tiene.*

Profesor: *En el caso $0/7$, cual es el resultado y que signo tiene*

Xenia: *La operación da cero*

Profesor: *Porque al hacer una operación con un número que tiene signo al dividirlo entre uno que no lo tiene y que el resultado te da otro número, como explicas que no puedes definir su signo.*

Xenia: *Es como una regla, una excepción a la regla de negativo entre positivo da negativo, cuando el resultado es cero, es cero*

Profesor: *Es una convención, respecto a la otra situación cuando da $-8/0$ y $0/0$, es un error, en base a que dices es un error. Tú sabes que no se puede dividir $0/0$.*

Xenia: *Es una operación no permitida*

Profesor: *Por que o solo porque la calculadora dice*

Xenia: *Me imagino que por una ley matemática.*

Es algo acordado, pero no se en base a que dice esto.

Profesor: *Por ejemplo tres naranjas entre 4 personas.*

En este contexto que significado tendría dividir entre $3/0$.

Xenia: *No puedo dividir y directamente tomo 3.*

Es decir tengo algo al dividirlo entre cero, es que no lo dividiría.

Por tanto no puedo tomar una parte de algo que no he dividido.

La estudiante manifiesta que el cero es neutro, entendiendo como neutro que no posee ninguno de los dos signos, ni positivo ni negativo. En el caso de un número entre cero y cero entre un número, le queda claro que existen convenciones o reglas que se tratan de seguir.

Aunque las calculadoras personales no informan al respecto solo manifiestan la operación como no válida.

En la pregunta 5 de la encuesta donde los estudiantes tenían que encontrar los valores de una coordenada (x, y) a través de una operación larga, la estudiante encontró los valores acertadamente, sin embargo agrega un comentario que me interesó analizar con más detalle, para lo cual añado el siguiente fragmento de la entrevista:

Profesor: *Mencionas que $100/0$ es un número que no existe. ¿Porqué no existe la coordenada, la x ?*

Xenia: *Porque aplicaría la regla anterior, no habría nada.*

Profesor: *Cual es el problema de no poder dividir entre cero, no te da un número*

Xenia: *Como no me da un número entonces no podría representarlo en una gráfica.*

Profesor: *Cómo punto coordenado que significa para ti que no exista un valor para las abscisas, y que el valor de las ordenadas ($100/0$) si.*

Xenia: *que hay un punto en el origen*

Profesor: *Pero hay un punto ordenado*

Xenia: *Creo que no, pues no puedo ubicarlo porque necesito los dos valores, puedo saber que hay un punto en el origen pero no a que altura esta. Es posible que se tenga un punto pero no lo puedo representar en un plano.*

Profesor: *Entonces las coordenadas originales podrían o no representar un punto coordinado. O no tienen sentido.*

Xenia: *Si se podría encontrar un lugar, pero si altero un poco las operaciones, o las reglas de asociación.*

Profesor: *Sin redefinir ninguna operación, puede o no encontrarse una representación de un punto con dichas coordenadas*

Xenia: *No*

En la pregunta número 6 de la encuesta teníamos una gráfica con la intención de tocar los temas de líneas tangentes y pendiente de la recta. Se decidió averiguar un poco más acerca del significado real de su respuesta. He aquí algunos de sus comentarios:

Profesor: *Tú llegas a la conclusión de que ambas tangentes son cero. Tiene algún significado que el valor de la pendiente cero y como lo calculaste*

Xenia: *Se que las líneas resultantes son horizontales y su pendiente es cero.*

Profesor: *Te acuerdas como llegas al valor.*

Xenia: *No, solo recordé que una línea horizontal tiene pendiente cero.*

Profesor: *En términos de pendientes, ¿Qué sería la pendiente cero?*

Xenia: *Es que tanto está inclinada, es decir 180°*

Profesor: *Respecto a los ejes, ¿Cómo lo dirías?*

Xenia: *Paralela al eje x.*

En esta parte de la encuesta, se observa que la estudiante tiene mayor dominio en el área de geometría o bien recuerda mejor el tema de la pendiente de una recta. Es importante mencionar que nunca revisó el concepto de tangente y que asocia el valor de cero en la pendiente de una recta con dos situaciones:

- 1) No tiene inclinación o la puede definir como 180°
- 2) La línea que se forma es paralela al eje de las x

Por ultimo en la encuesta que contestó la estudiante se le pedía que realizara ciertas operaciones aritméticas, sumas, multiplicaciones y divisiones. Algunas de ellas contenían fracciones. La estudiante solo tuvo error en la que involucraba fracciones. Me pareció conveniente informarle y solicitarle su punto de vista al respecto. Ella dijo:

Profesor: *A que le atribuyes que te hallas equivocado en las fracciones y no en las otras operaciones*

Xenia: *Es que hice las operaciones por separado. Creo que entre tanto cambio de operaciones omití algún signo.*

Profesor: *Crees Tu que fue en el proceso*

Xenia: *Si*

Profesor: *Crees Tu que el uso de las calculadoras personales disminuiría la posibilidad de error.*

Xenia: *Si, porque de forma manual siempre da correcto, facilita el proceso.*

En general la estudiante reconoce que es fácil que los estudiantes cometan errores pues están muy acostumbrados a manejar las calculadoras personales. Así mismo está convencida que con las calculadoras estos errores se disminuyen.

6.4.2. Estudiantes en el CICATA

Para el Bloque B, fueron se decidió hacerle seguimiento a ambas alumnas, Patricia y Emilia. Sin embargo, como ya he comentado, este trabajo de recuperar la información se hizo más complicado si consideramos que los estudiantes se encontraban en la Ciudad de México y yo estuve analizando el material en la Ciudad de Boston. Se decidió efectuar esta entrevista utilizando el sistema de comunicación electrónica “Skype”. Me puse en contacto con ambas alumnas, pero desafortunadamente solo fue posible la entrevista con Emilia quien nos apoyó utilizando el Skipe en su versión escrita.

La entrevista por Skipe sobre la Encuesta Cero se llevó a cabo el viernes 25 de mayo de 2007. He aquí algunos fragmentos de ella:

Maestra: *La intención de esta plática es charlar contigo con respecto las respuestas que Tú diste a la “Encuesta Cero”. Dichas respuestas me parecieron muy interesantes, pero quisiera que las ampliaras un poco más.*

En la pregunta 1, sobre "el doble de frío" después de tus conversiones te preguntas ¿porque en lugar de obtener temperaturas bajo cero obtengo temperaturas más altas?

¿Pensaste en cantidades negativas, en restar en vez de sumar o buscar otro parámetro de comparación?

Emilia: Si de hecho pensé que el resultado me arrojaría cantidades bajo cero

Maestra: ¿Cuales son las cantidades bajo cero, según tu definición?

Emilia: Cantidades negativas

Maestra: Entonces si hubieras obtenido un valor menor a 273.15 te habrías sentido satisfecha con tu respuesta

Cabe mencionar que la estudiante durante la encuesta hizo una conversión de grados Celsius a grados Kelvin, de tal manera que, $0^{\circ} \text{C} = 273.15^{\circ} \text{K}$

Emilia: Lo que sucede es que manejar temperaturas centígradas y hacer conversiones me lleva a valores y escalas distintas que probablemente las veo disparatadas sin embargo, si hubiéramos hablado de un cero absoluto, es decir con escala Kelvin, en una conversión a Fahrenheit mis valores si eran negativos.

Lo que sucede es que en estos casos uno piensa que cuando estamos a cero grados Celsius el doble debe ser más frío, pero como podemos tener esa certeza si nos limitamos a no buscar otras escalas

Tal vez salir del error o cuestionarse el porque no es más frío

Maestra: Así es, realmente necesitabas un criterio de comparación, pues la sensación de frío o calor no está directamente asociada con un valor numérico, quizá con estándares, pero eso sería complicar demasiado la respuesta.

De sus respuestas puedo concluir que para la estudiante el hecho de haber cambiado de escala en un principio le permitió intentar una comparación; sin embargo, cuando ella regresó sus resultados a la escala original, no encontró la liga adecuada.

De todos modos se observa que la estudiante define:

- 1) Las cantidades bajo cero como cantidades negativas.
- 2) La estudiante para evadir la operación con el cero, realiza una conversión.
- 3) Su escala de referencia resultó inconveniente y no pudo interpretar su resultado.

En la pregunta número dos relacionada con un problema de repartición de despensas entre damnificados la estudiante agregó:

Maestra: *Bien, pasemos a la pregunta 2, en el segundo problema sobre las despensas me pareció muy buena tu aportación haciendo un sistema de ecuaciones lineales*

Pero, ¿porqué decides igualar las dos cantidades n (despensas) y d (damnificados)?

Emilia: *Porque en el enunciado dice que juntaron n despensas pensando d cantidad de damnificados, es decir que se llegó a pensar que n despensas abastecerían a d damnificados, pero si no hubo ninguno, entonces no se junto ninguna despensa*

Maestra: *Quieres decir que no efectuaste ninguna operación*

Emilia: *Un sistema de ecuaciones ayuda a obtener el valor de incógnitas, pero aquí en este caso no había valores que sumar ni que restar, porque no había ningún valor de x despensas, por ello creo (claro puedo estar en un error) que si no tengo damnificados no hay despensas tampoco, o si se juntaron dichas despensas entonces me quedaron todas una cantidad x porque no te tomo ninguna para damnificados*

Maestra: *Entiendo entonces que utilizaste el sistema de ecuaciones para justificar tu respuesta que de antemano sabías que era cero.*

Emilia: *si*

En este ejercicio vemos como la estudiante sabía de antemano el resultado y necesitaba formular una respuesta en términos matemáticos. La utilización de un sistema de ecuaciones lineales pudo servirle para argumentar su respuesta original. Sin embargo, vale la pena rescatar que en esta acción la estudiante trata de relacionar el término “cero” como:

1) Estabilidad. No cambio

Para la pregunta tres de la encuesta relacionada con el problema de las dos compañías que prestan servicio telefónico, la estudiante contestó de manera muy clara por lo cual no creí necesario que la retomáramos nuevamente. He aquí un fragmento de la entrevista cuando analizamos la respuesta 4:

Maestra: *En la pregunta 4, se trataba de organizar ciertos números en positivos y negativos.*

¿Qué pasó con $0/7$, $-8/0$ y $0/0$? ¿Porque dudaste en asignarlos a uno u otro grupo?

Emilia: *En este caso decidí no colocar estos dentro de alguno de los grupos porque estos entran dentro de los números irracionales, además, ¿dónde se coloca $0/0$? si cero es un numero que se encuentra como centro al origen en un sistema de coordenadas, es neutro no esta ni en el rango positivo, ni en el negativo, y por otro lado pasando a los otros dos casos donde obtengo infinito no sabría donde ubicarlos*

Maestra: *Estoy de acuerdo con tu definición de $0/0$; pero no me queda claro si para ti, ¿tanto $0/7$ como $-8/0$ dan infinito?*

Emilia: *Sí, para mí dan infinito, porque 0 una cantidad muy pequeña dividida entre 7 debe dar valores muy, muy pequeños, el hecho de que las calculadoras nos marquen error al querer hacer una división como esta, no quiere decir que 0 no sea un valor, y en el otro caso $-8/0$ el nominador es un valor negativo dividido entre un valor muy pequeño entonces debe dar como resultado valores grandísimos, claro es escalas negativas.*

Maestra: *Estoy de acuerdo contigo, y de hecho esto lo resumes en la respuesta 5 donde asocias $0/100$ con un valor muy pequeño y $100/0$ con una cantidad gigantesca. Pero volviendo a la ubicación de estos números en positivos y negativos ¿tu crees que $0/7$ es "infinito" positivo y $-8/0$ un "infinito negativo"?*

Emilia: *Sí, por supuesto que creo que tengo un valor infinito negativo y un positivo, pero ahora me surge otra pregunta ¿puedo llamarle valor a algo que no conozco pero que se que uno saldrá positivo y otro negativo y ubicarlos dentro de dicha agrupación que se me pide?*

La estudiante durante la ampliación a sus respuestas elabora una definición del cero donde: manifiesta que el cero es neutro, ni positivo ni negativo. En el caso de un número entre cero y cero entre un número, ella recuerda que el resultado será para uno cero y para el otro infinito. Menciona a las calculadoras personales y tiene un buen concepto de porque informan al respecto una operación como errónea.

En la encuesta en la pregunta número seis teníamos una gráfica con la intención de tocar los temas de líneas tangentes y pendiente de la recta. La estudiante entrevistada dio una respuesta en la Encuesta, sin embargo, decidí averiguar un poco más acerca del significado real de su respuesta. He aquí algunos de sus comentarios:

Maestra: *En esta parte se te pedía encontrar el valor de la pendiente de las tangentes que pasan por los puntos A y B*

Antes de revisar la respuesta que diste me parece importante aclarar el sentido que yo le di al enunciado pues tiene dos partes: 1) Definición de línea tangente y 2) Definición de pendiente

Emilia: *Si creo que en esta pregunta únicamente tome en consideración la pendiente*

Maestra: *En tu respuesta tu fórmula para evaluar la pendiente es correcta, pero tuviste un error en el signo del denominador ($x_2 - x_1$) el menos afecta al (-) del valor de x*

Tratando de recordar lo que tu sepas de tangentes, ¿que significado o relación tiene la tangente con la pendiente de una recta?

Emilia: *Para mi la tangente es la que toca en un punto a la curva*

Maestra: *Recuerda que en el ejemplo tanto A como B estaban ubicados respectivamente en la cresta y el valle de la curva*

¿Cómo sería la pendiente de la recta que pasa por A y que solo toca el punto A?

Emilia: *si mal no recuerdo la figura es la función seno verdad, la tangente seria igual a su función trigonométrica*

Oh! me equivoco, es que tal vez no se como decirlo

Maestra: *Efectivamente, no me queda claro lo de función trigonométrica ¿qué quieres decir con ello?*

Emilia: *Es que tengo el valor de A que es un punto ubicado dentro del seno de una función y para obtener la tangente me falta el valor del coseno para poder realizar el cociente y ubicarlo dentro del plano*

Maestra: *La recta o el segmento de recta que pasa por A, para que no toque nuevamente la función, tendría que ser horizontal es decir de pendiente 0 y sólo sería válida en un periodo de la curva*

Emilia: *Es decir solo sería válida en una sola vuelta a la circunferencia, ya ve que el programas como Cabri el trazado es en base a una circunferencia y posteriormente se hacen los trazos necesarios para obtener el seno, coseno, tangente, etc. y hacer la transferencia de medidas para que los veamos de forma grafica como se ve en el dibujo*

Maestra: *Si, en realidad esta era la pregunta más compleja y en el contexto de mi investigación sobre "El cero" me interesa más abordar fenómenos que giran solo en torno a este concepto.*

En general, la estudiante contestó la encuesta de manera muy argumentativa. Revisó algunos conceptos relacionados con el uso del cero, sin embargo su intención no fue asociar el valor de cero con los problemas estudiados. La estudiante estuvo más preocupada por dar respuestas matemáticamente argumentadas que explicar el fenómeno en sí.

En el seguimiento de la indagación de ideas sobre el cero, se consideró adecuada la entrevista con más detalle a alumnos tanto del Bloque A como del B. Este procedimiento permitió un acercamiento con la interpretación que los alumnos tienen del concepto, pero a la vez permitió verificar al cero un concepto diferente y especial, su conceptualización está llena de matices. Esta variedad en su interpretación tiene raíces indiscutiblemente históricas; tiene que ver con la construcción humana, pero también de tipo conceptual y didácticas. Queda mucho por descubrir y plantear de cómo estudiar y enseñar el cero pero espero que algunas de las conclusiones que presentó en el siguiente capítulo colaboren con este estudio.

Las intenciones que se plantearon al redactar y aplicar el documento para indagar las ideas relativas al cero fueron las siguientes:

- Observar el manejo de los números negativos de mayor a menor y la multiplicación por cero.
- Observa el caso de la división entre cero.
- Observar el manejo de cantidades en operaciones donde aparece el cero.
- Observar las interpretaciones del alumno en relación al cero en la tangente a una curva, y pendiente de una recta.

Una vez aplicada la entrevista y como resultado del análisis de las respuestas, consideré necesario ampliar algunas de ellas, lo cual motivó a la realización de dos entrevistas particulares, una a un alumno de cada bloque de estudio. Como resultado de este proceso puedo decir que:

-
- Hay diferentes y muy variados manejos de los significados del cero en el ámbito escolar.
 - Es notable como existe asociación entre ciertas palabras y la ausencia de valor. Por ejemplo, gratis es considerado como nada o cero. El problema es que el alumno cuando se encuentra con un dato esencial cuyo valor asignado es cero, le confiere mayor importancia y en ocasiones no sabe que operaciones efectuar.
 - El alumno tiene claro el concepto de positivo y negativo siempre que este trabajando números enteros.

- Los alumnos en general no clasifican al cero como un elemento neutro, y en algunos casos dudan de si es positivo y negativo a la vez.
- Los alumnos tienen un conocimiento vago o nulo sobre expresiones como $0/0$
- Los alumnos en general no van más allá de un resultado numérico, es decir, el contexto tiene importancia para expresar un resultado.
- Cuando los alumnos relacionaron el concepto del cero con temas de geometría: interpretaron el significado de una recta de pendiente cero; recordaron que una línea horizontal tiene pendiente cero; algunos recordaron la ecuación general de la recta $y = mx + c$; y otros omitieron el significado de rectas tangentes.

Una vez terminado el proceso de indagación de ideas relacionadas con el cero y presentadas ciertas conclusiones al respecto, queda algo más, cómo vincular el asunto didáctico del manejo de los libros y lo histórico con la indagación de ideas.

La concepción histórica del cero se puede agrupar en tres grandes ramas: argumentativa, simbólica y funcional.

1. Para la primera que yo relaciono con los hindúes, vale la pena rescatar su interés por establecer reglas y explicarlas. Es nuestro compromiso rescatar ese interés y encontrar el momento académico adecuado para que el alumno tenga las herramientas necesarias para asimilar nuevas ideas sobre el cero pero también para que las pueda contextualizarlas en sus estudios profesionales.
2. Para la segunda, la cuestión simbólica, para mí ampliamente representada por los mayas; es importante infundir en los alumnos la inquietud de asociar la representación numérica, con la gráfica y la algebraica. De tal manera que se

considere natural pasar de uno a otro lenguaje y en cada uno de ellos encontrar el concepto del cero: como número, como conjunto vacío o como elemento de balance en una ecuación.

3. Por último para la tercera rama, la funcional, mantener al alumno familiarizado con el manejo del cero. Y ese es sin lugar a duda es compromiso del maestro que deberá introducir más frecuentemente ejercicios, actividades o situaciones que involucren el cero desde las etapas tempranas de la enseñanza y que lo conviertan en un elemento familiar, no extraño o poco conocido.

Para su introducción en los libros, es necesario que se le de un sitio independiente, especial pero no para los alumnos que entraran a estudios superiores en ingeniería. Es necesario que los libros de texto introduzcan el concepto desde etapas tempranas y que además lo refuercen en las subsecuentes para que se convierta en sí, en una idea amplia.

El Cero es un número neutro que sirve como elemento de transición entre los números positivos y negativos. Como número independiente significa ausencia de valor o elementos. Dentro de un contexto específico su significado puede variar para establecer un espacio vacío en alguna casilla de unidades en una cantidad, es decir como elemento de valor de posición; hasta ser un elemento para determinar balance o estabilidad, como sería en el caso de una ecuación.

Referencias bibliográficas

- Adler, I. (1964). *A New Look at Arithmetic, with diagrams*. USA: The John Day Company
- Ángel, M.E., Polola, L., Fernández, G. y Bortolotto, M. (2004). Aprendiendo Matemáticas desde los conceptos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(1), 448-454.
- Armesto J. (2006). La numeración árabe. Recuperado de http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo_3891_la_numeracion_arabe.htm
- Baldor, A. (2002). *Aritmética Teórica Práctica*. México: Compañía Editorial Ultra.
- Cantoral, R. y Covian, O. (2005). Los Usos Sociales de la Matemática en Las Ciencias Prácticas de la Cultura Maya: Un Estudio Socio-epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18(Adenda), 813 -818.
- Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México, D.F., México.
- Espinoza, P. (2006). *La Matemática Náhuatl: Estudio del Sistema de Numeración Náhuatl*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México, D.F., México
- Fuenlabrada, S. (1994). *Matemáticas I. Aritmética y Álgebra*. México: McGraw- Hill Interamericana de México.
- Galván, F.A. (1967). *Algoritmos de las Operaciones con Números Enteros*. National Council of Teachers of Mathematics. México: Trillas.
- García, LI. (2004). Estrategias de solución ante problemas multiplicativos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(1), 69-74.
- Hernández, F. (2004). Un milenio después... Recuperado en <http://laberintos.itam./hx/PDF/num7/186>
- Hernán, M. (2006). Historia de las Matemáticas: El Cero. Recuperado en <http://www.astroseti.org/vernew.php?codigo=2056>
- Jarero, M. (2006). *Elementos para el Diseño de una Secuencia Didáctica para el Estudio de la Ecuación Vectorial de la Recta*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México, D.F., México.
- Larios, V. (2000). Sistemas Numéricos en el México Prehispánico. Departamento de Matemáticas, CICFM, Facultad de Ingeniería. UAQ. Recuperado en <http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n15/en1507.pdf>

- Lurie, K., Pecsénye, M. y Robinson, A. (2006). *Cracking the GRE with DVD*. 2007 Edition. New York, U.S.A: The Princeton Review.
- Ochoviet, T.C. (2004). *¿ $A \cdot B=0$ $A=0$ v $B=0$? Reflexiones e implicaciones en la enseñanza de la matemática*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México, D.F., México.
- O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. (2000). Indian Numerals. Recuperado de http://www-groups.dcs.stand.ac.uk/~history/HistTopics/Indian_numerals.html
- Oteyza, E., Hernández, C. y Carrillo, A.M. (2004). *Aritmética y preálgebra*. México: Pearson-Educación.
- Salas, N. y Castillo, H. (2005). La Enseñanza del Concepto de Número Real en Ambientes Virtuales Interactivos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18 (1), 681- 686.
- Silva, M., Lazo, A. y Hernández, M.E. (2005). *Algebra pre- universitaria*. México: Limusa-Noriega.
- Struik, D.J. (1994). *Historia Concisa de las Matemáticas*. México: IPN.
- Tsamir, P., Sheffer, R. y Tirosh, D. (2000). Intuitions and Undefined Operations: The Cases of Duvusuib by Zero. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 22 (Winter edition 1), 1-16.
- Toledo, T. y Fernández, V. (2005). Desarrollo de Habilidades del Pensamiento en Forma de Conceptos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18(1), 411-416.
- Tonda, J. y Noreña, F. (1994). Los secretos del cero. En *Los señores del cero, el conocimiento matemático en Mesoamérica*, (pp.31-35). México, D.F., México: Pangea editores.
- Valiente, S. (1998). *Diccionario de Matemáticas*. Cero. México: Addison Wesley, Longman de México.
- WordReference (2005). Diccionario de la lengua española. Espasa-Calpe, S.A., Madrid. Recuperado en <http://www.wordreference.com/definicion/>