INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

LAS FIGURAS DE ANÁLISIS EN GEOMETRÍA. SU UTILIZACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA.

Tesis que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Monica Lorena Micelli

Directora de Tesis:
Dra. Cecilia Crespo Crespo

México, D. F., marzo de 2010

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 10:30 horas del día 19 del mes de febrero del 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática"

Presentada por el (la) alumno(a):

Micelli		Mónica Lorena
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: B 0 7 1 7 4 3

aspirante de:

Maestria en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Cecilia Rita Crespo Crespo

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Gisela Montiel Espinosa

Dra. Gabriela Buendía Abalos

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CICATA IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 22 del mes febrero del año 2010, el (la) que suscribe Mónica Lorena Micelli, alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro B071743, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Cecilia Rita Crespo Crespo y cede los derechos del trabajo intitulado ***"Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática"*** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección monikmathis@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Micelli

Mónica Lorena Micelli

Índice

Capítulo 5

Capítulo 6

Cuadros, diagramas e imágenes

Listado de figuras

Introducción

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Capítulo 6

Listado de cuadros

Capítulo 4

Capítulo 5

Resumen

Los objetivos de la presente investigación son dar a conocer la naturaleza de la figuras de análisis tanto en el discurso matemático escolar como en escenarios no académicos, así como también analizar la brecha que, en algunas ocasiones, separa a las figuras de análisis de su finalidad, como ser un instrumento para llegar a la solución correcta de un problema.

Si se habla de figuras de análisis se entiende, por ello, dibujo realizado a mano alzada en el cual se vuelcan los datos dados en un problema, en una demostración o una construcción. Son representaciones de las imágenes mentales construidas por el sujeto al momento de enfrentarse a un problema a resolver.

El marco teórico en el cual se ha realizado esta investigación es la socioepistemología, considerando a la matemática como un conocimiento de construcción humana, un saber de origen cultural, por lo tanto, se realiza, en este trabajo de investigación, un recorrido histórico que dé evidencia de la utilización de las figuras de análisis, además del estudio de casos de alumnos de nivel terciario, futuros docentes. También se aborda el proceso de visualización y los obstáculos que se presentan en dicho proceso, con el fin de poder interpretar, desde este marco, qué sucede con las figuras de análisis dentro de la clase de matemática, más precisamente de geometría.

Los resultados obtenidos en esta investigación, permiten comprender el uso de las figuras de análisis en las prácticas institucionales, considerando a la graficación como una práctica social que responde, en el caso de las figuras de análisis, a normas que son transmitidas en el discurso matemático escolar. Con respecto al origen de dichas figuras pudo observarse que desde que el hombre hace matemática aparecen representaciones que permiten asistir, en la mayoría de las ocasiones, el proceso de visualización. Pudo comprobarse que las figuras de análisis existen no solo en escenarios académicos como en escenarios no

academicos, por lo tanto son parte de un conocimiento cultural que posee características propias según el grupo social que las confeccione, compartiendo el mismo lenguaje y pudiendo interpretar figuras de análisis ajenas.

Con respecto a las dificultades que presentan algunos alumnos están asociadas a lo que se ha denominado en este trabajo, obstáculos de la visualización; a saber, ilusiones ópticas, prototipos o representaciones pictóricas, entre otros.

Abstract

The objectives of the present investigation are to present the nature of analysis figures as much in the school mathematical speech like in nonacademic scenaries, as well as to analyze the breach that, between the figures of analysis and its purpose, of being an instrument for a correct solution of a problem.

Analysis figures are understood as drawings, realised by raised hand in which the data given in a problem a demonstration or a construction are represented. They are representations of the mental images constructed by the subject at the time of facing a problem to solve.

Socioepistemology is the theoretical frame in which this investigation has been realized. We considere mathematics as an human construction knowledge, and a cultural knowledge. So, an historical route is done in this work of investigation, looking forward analysis figures use. We also present a case study of students, future teachers and some approaches to visualization process and the obstacles that appear in this process, with the purpose of being able to interpret, from this frame, how figures of analysis appear at the class of mathematical, specially in geometry.

Results obtained in this investigation allow us to understand the use of the figures of analysis in the institutional practices, considering “graficación” as a social practice that responds, in the case of the analysis figures, to norms that are transmitted in the school mathematical speech. About the origin of these figures we can observe that since the man makes mathematics, representations appear allowing to attend, in the majority of the occasions, the visualization process. Analysis figures exist not only in academic scenaries but in nonacademic ones, therefore they are part of a cultural knowledge that owns characteristics according to the social group make that them, sharing the same language and being able to interpret figures of other people's analyses.

With respect to the difficulties that present some students are associate to which we have denominated, in this work, like obstacles of the visualization; that is to say, optical illusions, prototypes or pictorial representations, among others.

Glosario

Concepto: “representación simbólica (casi siempre verbal) usada en el proceso de pensamiento abstracto y que posee un significado general correspondiente a un conjunto de representaciones concretas con especto a lo que tienen en común” (Piéron, citado en Fischbein, 1993, p. 1).

Dibujo: representación gráfica de una figura (Torregrosa y Quesada, 2007, p. 278).

Discurso matemático escolar: “es aquel que atiende formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento y caracteristicas, incluyendo aspectos de organización temática y profanidad expositiva” (Castañeda, 2006, p. 255).

Estereotipos: son representaciones gráficas, “un dibujo (habitualmente utilizado en nuestro medio cultural)” (Scaglia y Moriena, 2005, p. 105).

Figura: imagen mental de un objeto físico (Torregrosa y Quesada, 2007, p. 278). Aunque en el desarrollo del siguiente trabajo se hallan enumeradas las imágenes que en el mismo aparecen bajo el término figuras.

Figura de análisis: dibujo realizado a mano alzada en el cual se vuelcan los datos dados en un problema, en una demostración o una construcción. Este dibujo sirve de guía para resolver el problema planteado por lo cual no requiere precisión alguna. Son modelos de las imágenes mentales construidas por el sujeto al momento de enfrentarse a un problema a resolver.

Heurística: estudio de los métodos o procedimientos que conducen al descubrimiento en la resolución de los problemas de cualquier índole.

Imagen: “representación sensorial de un objeto o fenómeno” (Fischbein, 1993, p. 1). Idea opuesta al término de **concepto**.

Prototipo: es un modelo “de imágenes que tienen los alumnos de los conceptos geométricos” (Scaglia y Moriena, 2005, p. 106). Los prototipos están asociados a los esquemas mentales elaborados por los alumnos.

Visualización: “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (Zazkis et al., en Torregrosa y Quesada, 2007, p. 278). Es un proceso en el cual se construyen las imágenes mentales a partir de un dibujo o viceversa (Hershkowitz et al., en Torregrosa y Quesada, 2007, p. 279).

Introducción

"(…) la géométrie est l'art de bien
raisonner sur des figures mal faites"
Poincaré (1913, p. 27)[1]

La presente investigación tiene como objetivo comprender el origen de la utilización de las figuras de análisis al momento de resolver un problema matemático, más precisamente en aquellos enunciados relacionados con geometría, y detectar, por lo tanto, cómo son utilizadas en el discurso matemático escolar y cuáles son los factores que inciden o conducen a confusiones en la lectura o interpretación de las mismas figuras que en lugar de ser una herramienta que favorezca el razonamiento, llevan a errores o conclusiones incompletas.

El marco teórico elegido para dicha investigación es la socioepistemología, teoría que se eleva sobre cuatro pilares fundamentales, a saber lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo social, asumiendo que éstas son las componentes que intervienen en la construcción del conocimiento matemático.

El presente trabajo está conformado por siete capítulos que a continuación se detallan brevemente:

- Capítulo 1, *Presentación del problema de investigación*, en donde se desarrolla el problema que dio origen a la investigación, además de realizarse una descripción del marco teórico en el cual se encuadra la investigación. En dicho capítulo, también se indican algunas investigaciones que sirven de antecedentes al presente trabajo.

- Capítulo 2, que tiene por título *Las figuras de análisis desde la visualización*, es donde se analizan distintos aspectos del proceso de visualización recorriendo distintos modelos cognitivos, en cada uno de ellos se analiza el papel que desempeñan las figuras de análisis, para luego exponer algunos de los

[1] Traducción "La geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas"

obstáculos que se pueden presentar en la visualización, como pueden ser: las ilusiones ópticas u obstáculos relacionados con la transmisión como son, por ejemplo, los prototipos.

- Capítulo 3, *Las figuras a través de la historia.* Como claramente lo deja asentado el título de dicho apartado, se intenta hacer un recorrido histórico por diversas culturas a través de distintas épocas históricas. El recorrido se centra en algunos de los ejemplos en los que se manifiesta cómo distintas culturas emplearon las figuras en la resolución de problemas relacionados con geometría.

- Capítulo 4, titulado *Las figuras de análisis en la resolución de problemas*, capítulo en el cual, luego de definir y clasificar los tipos de problemas, se desarrollan varios procesos heurísticos en los cuales distintos autores establecen un número de fases, entre las cuales se sugiere realizar una figura de análisis, esquema o diagrama para interpretar los datos del problema.

- En los dos siguientes capítulos, *Las figuras de análisis en el discurso matemático escolar* y *Las figuras de análisis en escenarios no académicos*, se estudian, las figuras de análisis, en distintos casos particulares. Con respecto al capítulo 5, específicamente el estudio de caso serán con respecto al escenario académico, para dicho estudio se analizará además de casos puntuales de alumnos del nivel terciario, otros aspectos del discurso escolar como son también que papel cumplen las figuras de análisis en el imaginario de los docentes y los alumnos. También se analizarán los libros de textos como parte del discurso académico. A continuación, en el capítulo 6, se presentan diferentes ejemplos del empleo de figuras de análisis en escenarios no académicos, muchos de ellos relacionados con diferentes oficios así como también al momento de indicar una ruta o crear propias estrategias para estudiar.

- En el último capítulo, *Conclusiones finales*, como su título lo indica, se deja asentado los comentarios finales de la investigación sobre las figuras de análisis.

En la figura 1, puede verse un esquema que resume la estructura de toda la investigación:

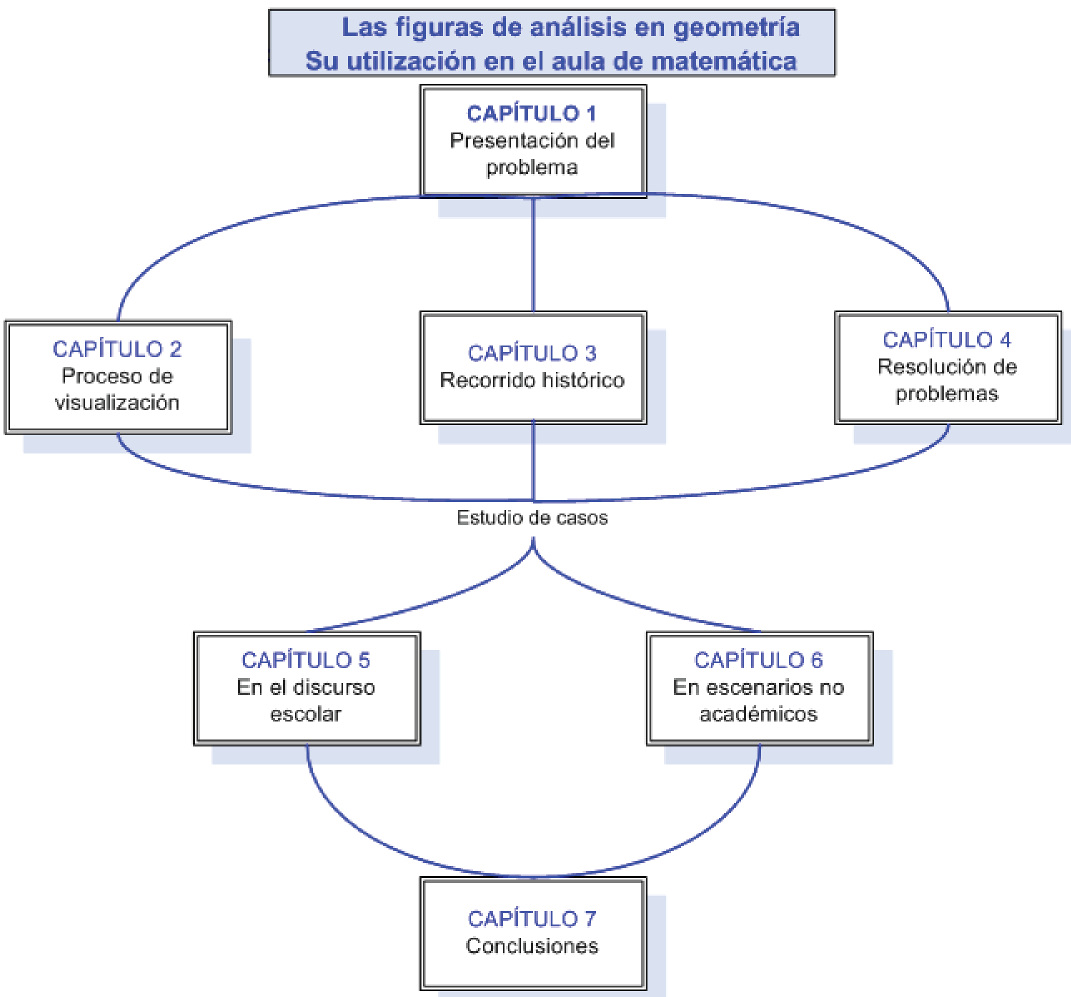


Figura 1: Esquema de la investigación

Capítulo 1

Presentación del problema de investigación

“Los griegos (...) dibujaban las figuras en la arena, que tenía la ventaja de poder borrar, pero faltaba precisión. Por esto se dijo que la Geometría era el arte de sacar consecuencias de figuras mal hechas” (Santaló, citado en Galina, 2008, p. 15).

¿Por qué iniciar este trabajo de investigación con las palabras de Santaló?, porque nos pareció un buen comienzo que apunta al foco de este trabajo, el cual girara alrededor de las figuras realizadas por los alumnos, en la clase de geometría.

“En nuestros días la imagen ha adquirido en todos los niveles comunicativos una importancia capital, sustituyendo en muchos casos a mensajes de otro tipo. (...) El dibujo tiene en Geometría doble interés: como lenguaje para meditar, ejemplificar o representar conceptos y propiedades, y como finalidad de representación fiel y rigurosa” (Alsina, citado en Ferragina, Fisichella y Rey, 1999, p. 32).

1. Problemática detectada y algunas preguntas formuladas

La problemática que da origen a este trabajo es detectada durante la práctica docente en el nivel superior, dentro del aula, observándose una dificultad bien marcada, en los alumnos que concurren a la carrera de profesor de matemática, al usar las figuras de análisis, especialmente en la materia geometría.

Cuando se habla de figuras de análisis se entiende por ellas, aquellos dibujos que pueden ser realizados a mano alzada o con el uso de regla pero sin respetar la medida o estar elaborada según una determinada escala numérica. Es decir, figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción geométrica.

No se debe perder de vista que los objetos que se trabaja en matemática son objetos abstractos pero que existe varios registros para representarlos o abordarlos, tales como: registros algebraicos, numéricos, analíticos y visuales, que permiten representar a dichos objetos y así percibirlos (Olazábal, 2005). Por lo tanto, las figuras de análisis son parte de este registro visual.

Durante las clases comúnmente se observa que los estudiantes no representan correctamente los datos dados en los enunciados del problema o toman figuras que representan casos particulares, obviando situaciones generales llegando, así a conclusiones erróneas o incompletas. Por tal motivo, frente a dicho problema han surgido varias preguntas que se intentará dar respuesta en esta investigación. Dichas preguntas son:

- ¿Cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?
- El uso de las figuras de análisis en geometría, ¿es comprendido por los estudiantes como necesario y útil o como algo impuesto por el discurso matemático escolar?
- ¿Qué factores influyen en el uso que se da a las figuras de análisis en las clases de geometría?

La problemática señalada tiene sus consecuencias a la hora de resolver ejercicios de construcciones geométricas, y en la resolución de problemas, entre otros, pero especialmente conduce a demostraciones incompletas o erradas como ya se mencionó. Por tal motivo, se considera que es importante indagar no sólo en los errores que cometen los alumnos al manipular e interpretar las figuras de análisis sino cuales pueden ser los posibles factores por los cuales los alumnos de nivel superior, futuros profesores de matemática, no usan correctamente las figuras de análisis, en un nivel en el que se supone que tienen el desarrollo cognitivo para realizarlo exitosamente. El objetivo del trabajo será detectar cuáles son dichos factores para poder entender la situación y tenerlo presente en nuestro quehacer diario con la intención de revertir la situación observada. Entre esos factores se intenta descubrir si las figuras de análisis son impuestas por el discurso escolar o

nacen naturalmente en la resolución de problemas de geometría (ya sea: demostraciones, construcciones u otros), si su uso es impuesto por la escuela o si surge de manera espontánea. Por lo tanto, un segundo objetivo es descubrir la naturaleza de las figuras de análisis que a pesar de ser una herramienta auxiliar que como se verá, es considerada de utilidad por la bibliografía, se convierte en algunos momentos en un obstáculo que lleva a resultados erróneos.
Chevallard (1998) hace mención de dos tipos de nociones, por un lado las nociones propias de la matemática las cuales son construidas, como por ejemplo a partir de una definición, mientras que por otro lado hace referencia a las nociones paramatemáticas. Estas nociones, en particular hacen referencia a "nociones-herramientas" y dentro de esta categoría es donde se pueden ubicar a las figuras de matemática ya que no son un conocimiento matemático que se encuentra explicito en el curriculumn de matemática pero que si esta presente en el discurso matemático escolar tanto en el quehacer del docente, en su práctica o también, como se verá en el capítulo quinto, en los libros de textos escolares. Pero aún perteneciendo a una "noción-herramienta", los alumnos presentan dificultades produciendo un conflicto en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2. Línea de investigación y marco teórico

El presente trabajo se encuentra enmarcado dentro de los lineamientos de investigación de la construcción social del conocimiento matemático. Este enfoque ubica a la matemática en un escenario donde se juegan variables sociales, además de las variables didácticas, cognitivas y epistemológicas. Al respecto, Castañeda retoma la idea de Chevallard y señala la existencia de "dos niveles para la difusión del saber: el erudito, generado dentro de un ambiente científico, y el pensado para fines didácticos, que se incrusta en una textura social" (2002, p. 30).

El marco teórico que concuerda con la línea de investigación mencionada, es la socioepistemología. Dentro de este marco se tendrá en cuenta las cuatro componentes que lo conforman: lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo social. La investigación socioepistemológica, según las palabras de Castañeda otorga "un estatus de constructor del conocimiento matemático al sistema social y a sus actores –que no necesariamente pertenecen a la elite erudita-, admitiendo sus prácticas cotidianas y el saber que de ellas se deriva" (2002, p.31).

Así, se comparte la idea desarrollada por Castañeda, quien establece que "la construcción de la matemática responde a ciertos intereses o preocupaciones, ya sea eruditos o socioculturales, pero que se crea con el propósito expreso de ser enseñable, al grado de que no tendría sentido un conocimiento de tal naturaleza", a lo cual añade, con respecto al saber destinado a ser enseñado, el sufre un proceso que se resumen en "un conjunto de transformaciones adaptativas" (2002, p.32).

Por lo tanto, en este trabajo de investigación, se tendrá en cuenta lo mencionado por Cantoral y Farfán (2003). Tomando sus palabras: "La línea de investigación que se desarrolla en el grupo de investigación del Área de Educación Superior del DME considera como necesidad básica, el dotar a la instigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción, del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (p.36).

Apuntando a estos cuatro aspectos, se realizará en los siguientes capítulos un recorrido histórico con el fin de analizar cómo se fueron empleando las figuras de análisis en distintas culturas y épocas históricas, así como también se desarrollarán los conceptos teóricos desde los cuales se estudiarán dichas figuras. Con respecto al aspecto didáctico se tendrá en cuenta, para el mismo análisis, distintos factores que conforman el discurso escolar, a saber, no sólo el estudio de casos particulares tomados del aula, sino también las concepciones de docentes y alumnos (futuros profesores de matemática), además del rastreo de cómo aparecen las figuras de análisis en distintos libros de texto escolares. No se puede dejar de lado el aspecto social, por tal motivo intentando dar respuesta a cuál es el origen de las figuras de análisis, se analizarán casos que se presentan en escenarios no académicos. Recorriendo así en el siguiente trabajo distintos escenarios, académicos y no académicos, esta elección se basa en la propia línea de investigación elegida. Al respecto, plantea Crespo Crespo: "La visión de la socioepistemología acerca de la matemática considera cada una de las caracterizaciones que surgen en cada escenario, y a partir de ellas, considera que matemática es cada una de ellas, es todas ellas. Cada una, como reflejo del escenario correspondiente, pues la ve como una ciencia que se aprende durante toda la existencia del ser humano de cada sociedad, como producto de las construcciones que realiza en relación con los objetos matemáticos que en ella se construyen socioculturalmente" (2007, p. 40). Por tal motivo se intentará dejar registro del empleo de las figuras de análisis en distintos escenarios para poder acercarnos a dichas caracterizaciones.

Con lo que respecta al escenario académico, se intentará responder si las figuras de análisis son parte de las características de las costumbres didácticas que se suceden dentro del aula, pero no se niega la existencia de las figuras en situaciones fuera de la escuela, constituidas en escenarios no académicos.

3. Antecedente, desde la Soci oepistemología, en el uso de gráficas

Hasta el momento sólo se ha hecho referencia a la socioepistemología en su concepto general, en este punto de la investigación se analizará el estudio realizado desde este marco teórico, sobre las gráficas. Aunque los trabajos llevados a cabo por Briceño y Cordero (2008) y Cordero (2006) se encuentran centrados en el estudio de gráficas de funciones con una perspectiva instrumental, sirven de antecedentes para la presente investigación a pesar de no tratar precisamente el tema de las figuras de análisis pero sí el de las gráficas ya que se intenta entender el uso de las mismas.

Referido a las gráficas, se establece que “la graficación son argumentaciones del Cálculo” (Cordero, 2006, p. 11), por tal motivo, en su trabajo, se debate sobre su funcionamiento y su forma desde una mirada socioepistemológica. Para tal fin, se estudia los trabajos de Oresme y Euler, además de analizar los libros de texto, y cómo se presentan las gráficas en ellos. Llegando, así, a la conclusión de que “la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación” (Cordero, 2006, p. 19). Es en este punto, donde puede verse la relación que existe entre dichas gráficas referidas al Cálculo y las figuras de análisis, tema central de la presente investigación, pues las figuras de análisis deberían ser una representación esquemática lo más general posible. Muchas veces, el no tener estas características lleva a errores por parte de los alumnos, como se ha ampliado más arriba al detallarse el problema que dio origen al presente trabajo.

Además las figuras de análisis son un instrumento que favorece a la argumentación, en la resolución de un problema matemático. Este proceso que deben realizar los estudiantes al aprender a utilizar las figuras de análisis, consiste en un proceso de transformación de dichas figuras desde un carácter de artefacto a una verdadera herramienta de utilidad (Trouche, 2005). Para que esto ocurra deben de darse dos puntos esenciales: alcanzar un grado de de familiaridad y aprovechamiento de su uso, sin aquellos, las figuras se resumen en un simple dibujo, un artefacto sin beneficio alguno. En relación a estas ideas, es posible realizar una analogía entre los recursos tecnológicos y los recursos gráficos utilizados en el aula. En este sentido, Briceño y Cordero (2008) abordan las gráficas desde una perspectiva instrumental y hablan de una dualidad, una desde el sujeto hacia el artefacto sobre el cual actúa creando esquemas de uso proceso denominado “instrumentalización”; y por otro lado dirigiendo hacia el sujeto quien desarrolla y se va apropiando de esquemas de acciones instrumentadas, proceso denominado “instrumentación”. En la figura 2 puede verse un esquema que resumen al idea del pasaje de un artefacto a ser un instrumento.

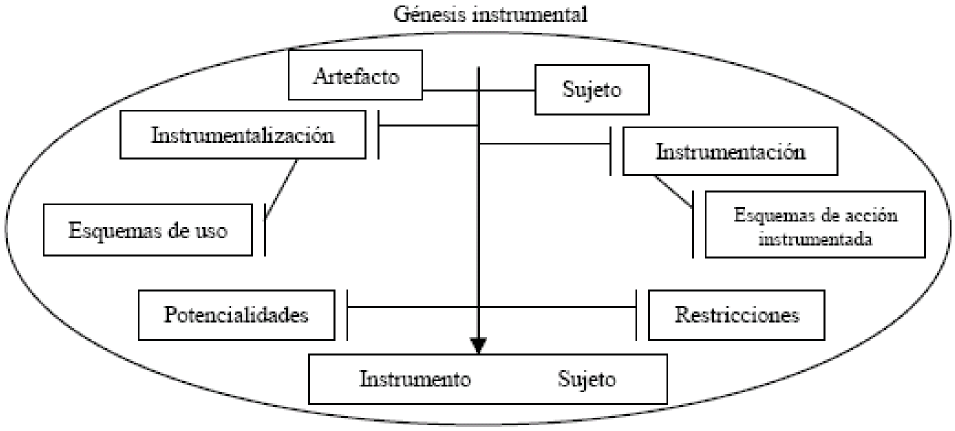


Figura 2: Esquema de la construcción del artefacto al instrumento [1]

Retomando la idea de las gráficas desde la socioepistemología, trabajos que sirven de antecedente para la presente investigación, siendo tanto las figuras de análisis como las gráficas representaciones esquemáticas, a pesar de que las gráficas pueden hacerse sobre un papel o utilizar otras técnicas como puede ser una calculadora graficadora. Pero aún siendo tan distintas, cada una de ellas tiene ciertas pautas de construcción, algunas de las cuales comparten como es la generalidad.

Con respecto a la graficación, Briceño y Cordero afirman que "es esencial el estudiar la actividad humana en su intento por transformar su realidad social o material y a su vez esta actividad humana está *normada* por diferentes prácticas sociales. Para dar respuesta a problemáticas proporcionando una matemática funcional concebimos a la graficación como una práctica social donde se desarrolla estudios a través del '*uso de las gráficas'* en prácticas institucionales" (2008, p. 4).

Por tal motivo, en los siguientes capítulos se intentará registrar cuáles son algunas posibles normas que hacen a las figuras de análisis para permiten comprender el uso de estas figuras en las prácticas institucionales, considerando a la graficación como una práctica social.

[1] Imagen tomada de (Briceño y Cordero, 2008, p. 2)

4. Algunas menciones en el uso de figuras de análisis en el aula de matemática

Puede verse en diversas investigaciones, el uso de figuras de análisis realizadas por los alumnos, pero dichos trabajos no se centran en las mismas, solo son incorporadas a la investigación sin un análisis profundo a modo de reportar las construcciones de los alumnos y partir de los mismos desarrollar el tema propio de la investigación. A modo de ejemplo se presentan algunos trabajos de los cuales se han tomado algunos ejemplos:

- Tesis para obtener el grado de maestría de Plasencia (2000), “Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos”

Frente al problema cuyo enunciado es “si colocas un queso en un platillo de una balanza y ¾ partes del queso más un peso de ¾ kilos en el otro platillo, la balanza se equilibra. ¿Cuánto pesa el queso?”. Puede verse como el estudiante resuelve el problema registrando los datos mediante una figura de análisis figurativa del problema en sí, sin realizar ninguna abstracción sobre el enunciado. Al respecto, Plasencia establece que: “Podemos decir que Kevin sigue un pensamiento lógico en este problema. Al no disponer de las herramientas algebraicas, tiene dificultad para comunicar sus estrategias. La forma en que exterioriza sus imágenes y representaciones mentales es haciendo un dibujo, que apenas nos es accesible a los demás. Sin embargo, Kevin expresa todos los conceptos e ideas y la solución en ese dibujo. Es la profesora la que no valora las reglas de interpretación de su representación, por lo que no le puntuó” (2000, p. 174).

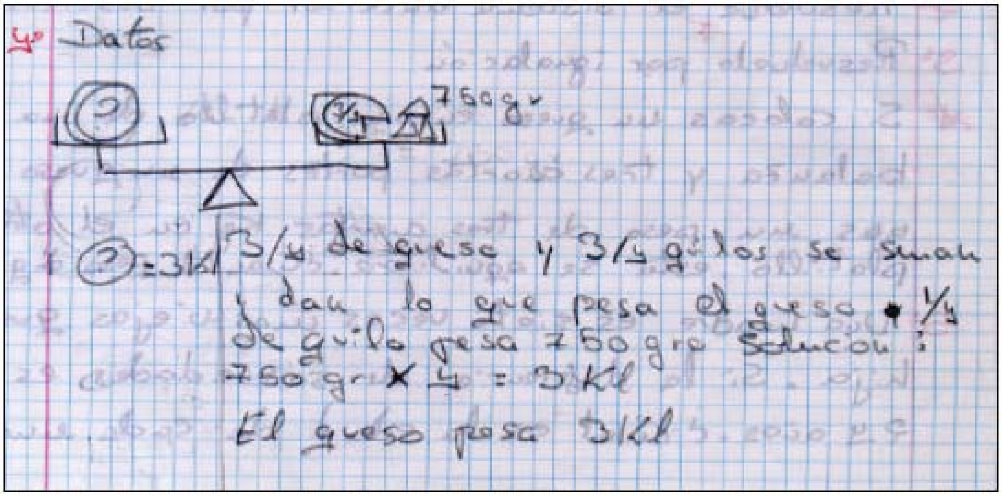


Figura 3: Ejemplo de una figura pictográfica en la resolución de un problema aritmético [2]

- Tesis de maestría de Crespo Crespo (2005), "El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo".

En el siguiente ejemplo se presentan las figuras realizadas en situaciones donde la figura no colabora en la deducción por reducción al absurdo, al respecto se menciona que "el punto E figura en dos lugares del plano simultáneamente: uno en el interior del círculo y el otro en el exterior. De esta manera, la alumna que la dibujó afirmó que consideraba una u otra posición según para qué momento de la demostración. Al preguntársele acerca de si esto no era un problema, afirmó que 'es la única manera de ver intuitivamente lo que sucede' y de poder 'mantener al punto E fuera de la circunferencia', pues 'como estamos razonando sobre una afirmación falsa, no es posible pensar coherentemente'" (Crespo Crespo, 2005, p. 154).

[2] Imagen tomada de (Plasencia, 2000, p. 174)

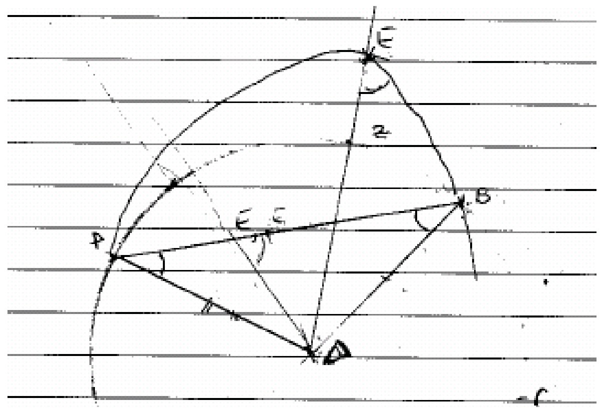


Figura 4: Ejemplo realizado al demostrar por el absurdo [3]

- Tesis de maestría en Olazábal (2005), "Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto".

La siguiente imagen es un ejemplo tomada de la secuencia didáctica llevada a cabo por la autora, en donde puede observarse que ante la resolución del problema el alumno realiza una figura de análisis donde se vuelcan los datos y se registran las incógnitas, con las letras "x" para una de las aristas y para la otra la letra empleada es "y", para luego realizar una resolución algebraica del problema planteado.

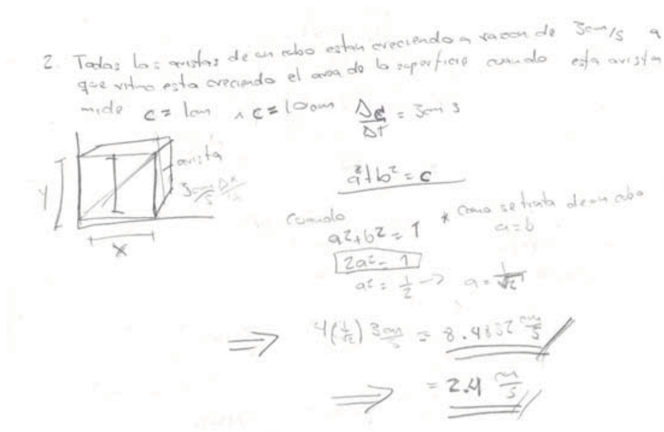


Figura 5: Ejemplo de una representación en dos dimensiones de un cubo [4]

[3] Imagen tomada de (Crespo Crespo, 2005, p. 154)
[4] Imagen tomada de (Olazabal, 2005, p. 62)

- Tesis de maestría de Blanco (2009), "Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones".

El ejemplo tomado de esta tesis es una de las representaciones realizadas por uno de los alumnos frente a un problema en el cual en la representación no puede realizarla con éxito.

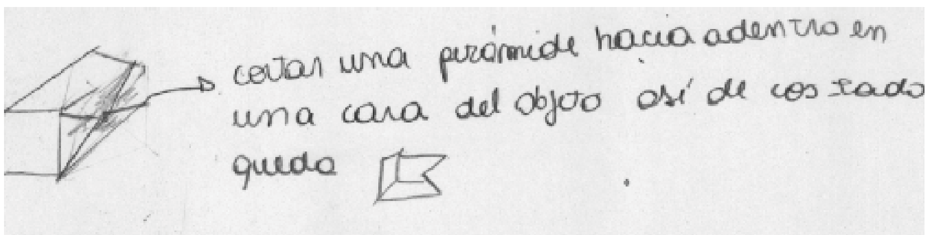


Figura 6: Ejemplo de la representación de un objeto de 3 dimensiones[5]

- Trabajo de Ferrero (2009) de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina, "Caracterización de representaciones visuales en una demostración en geometría".

En esta investigación, la autora realiza un estudio de casos puntuales aplicando la teoría de Hegarty y Kozhevnikov que tiene por hipótesis que el tipo de representaciones utilizadas en la resolución de un problema de matemática tiene su influencia en el resultado obtenido, considerando que las representaciones esquemáticas pueden conducir a un buen resultado mientras que las representaciones pictográficas harán más difícil el camino y la llegada a la meta deseada. Por lo tanto, en la investigación, Ferrero analiza dichos casos en una categorización que consiste en clasificar las figuras realizadas en representaciones esquemáticas o representaciones pictóricas, tema que se desarrollara el final del siguiente capítulo.

[5] Imagen tomada de (Blanco, 2009, p. 99)

Una de las producciones que es analizada se transcribe a continuación donde puede percibirse las trazas que son parte de los razonamientos que se realiza sobre la misma figura de análisis, de gran irregularidad en su traza.

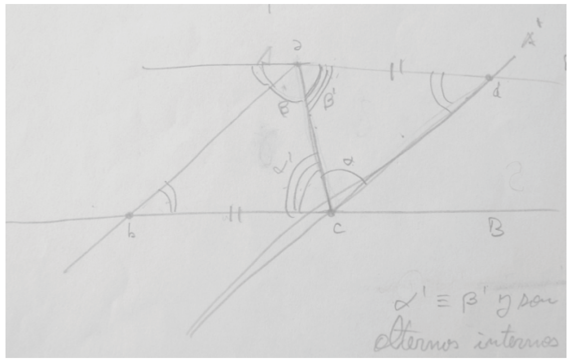


Figura 7: Figura de análisis en una demostración sobre cuadriláteros[6]

Como hemos visto las figuras de análisis son parte del registro elegido para la resolución de un problema, por tal motivo en el siguiente capítulo se estudiará dichas figuras desde el proceso de la visualización, apuntando al aspecto cognitivo, uno de los cuatro pilares de la socioepistemología.

5. En resumen

En el presente capítulo se han fijado las bases sobre las cuales se sustentará nuestra investigación. Algunos de los pilares que conforman dichas bases son: la problemática detectada en la formación de alumnos del profesorado de matemática que da origen al planteo de una serie de preguntas a las cuales se tratará de dar respuesta a través de los siguientes capítulos.

Mientras que otro pilar importante es la socioepistemología, marco teórico del presente trabajo el cual, a su vez, se apoya sobre cuatro piedras fundamentales: lo epistemológico, lo didáctico, lo cognitivo y lo social. Desde este enfoque es que se tratará de interpretar qué factores inciden en los errores cometidos por los alumnos del profesorado al emplear figuras de análisis en la resolución de problemas de geometría.

[6] Imagen tomada de (Ferrero, 2009, p. 6)

Y dentro de las bases se puede señalar los antecedentes encontrados, tanto en el empleo de gráficas desde una mirada sociopistemológica como el registro del uso de representaciones y figuras de análisis en distintos trabajos de investigación.

Como una conclusión importante a destacar perteneciente a el presente capítulo es el haber identificado a las figuras de análisis, objeto de estudio central de esta investigación, dentro de las nociones que Chevallard (1998) denomina como paramatemáticas, pues el docente en su discurso frente a sus alumnos puede hacer mención a las ventajas del uso de dichas figuras, que características pueden tener en forma general, puede dicho discurso estar acompañado por el libro de textos donde el autor recomienda, por ejemplo, elaborar una figura que permita representar y ubicar los datos dados, así como también las incógnitas, pero en todos estos casos no hacen referencia a una noción o concepto matemático, las figuras de análisis no se encuentran entre los conocimientos matemáticos presentes en el curriculum.

Volviendo a las bases fijadas, éstas son las que permitirán construir sobre ellas la presente investigación, comenzando en el siguiente capítulo por el estudio del proceso de visualización y los obstáculos que en él se generan.

Capítulo 2

Las figuras de análisis desde la visualización

En este capítulo, se abordará el tema de la visualización con el fin de poder comprender el proceso en el cual las figuras de análisis están inmersas, para así luego poder detallar los factores que llevan a una mala interpretación de las mismas y conducen a errores detallados en el capítulo anterior.

Por tal motivo, en la primera parte nos referiremos al proceso de visualización, entendiendo por éste, “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (Zazkis et al., en Torregrosa y Quesada, 2007, p.278), ampliando el marco teórico se ha realizado un recorrido por distintos modelos que hacen referencia a dicho proceso, para luego centrar el tema en las dificultades que se pueden presentar.

Relacionados con las figuras existen variados y múltiples estudios realizados sobre las imágenes tanto mentales como físicas o pictóricas. Estos trabajos aunque hacen referencia a las imágenes en general son de gran importancia pues permiten hacer un acercamiento a las figuras de análisis.

Al referirse primero a las figuras geometrías se debe diferenciar entre los dibujos que son “modelos materializando las entidades mentales con las que el matemático trata” (Fischbein, 1993, p.2) y las propias figuras geométricas que “no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual”. Esta imagen mental se debe a la existencia de la propiedad de poderlas pensar y representar mentalmente sin necesidad de un papel de por medio, propiedad que no poseen todos los conceptos o ideas generales no sensoriales. Lo importante es que las figuras de análisis son dibujos en donde el individuo que las realiza trata de volcar todo al papel, es decir, todos aquellos datos que se encuentran en su imagen mental creada al leer el problema. Por lo tanto, las figuras de análisis no son una representación del concepto sino que son un dibujo que da idea de la construcción de la imagen mental necesaria para asociar los datos ya sea tanto de un ejercicio, una demostración geométrica o una construcción geométrica, es entonces una representación de una imagen mental. Esta diferencia implica analizar desde la psicología las relaciones que existen entre imágenes mentales y conceptos.

Las figuras de análisis, en este trabajo, fueron definidas como un dibujo a mano alzada, por eso es importante la distinción realizada por Fischbein quien establece que “una figura geométrica es una imagen mental, las propiedades de ella son controladas completamente por una definición; un dibujo no es la figura geométrica en sí, sino una personificación material gráfica o concreta de él (….)” (1993, p.8). En estas líneas se puede notar una marcada diferencia entre lo que es una “imagen conceptual” y un dibujo. Similar distinción hacen Torregrosa y Quesada (2007) aunque los términos que ellos utilizan son diferentes, el vocablo “figura” es entendido como “imagen mental”, mientras que el objeto físico es el “dibujo”.

La diferencia entre dibujos y las figuras geométricas, también, es abordada por Rodríguez Herrera al trabajar el aprendizaje de la demostración en geometría en la educación secundaria y se refiere a ellos con las siguientes palabras “el alumno pasa así del ‘universo de los dibujos’ al ‘universo de las figuras’. Este pasaje requiere una serie de rupturas en donde el alumno deberá aprender que no todo lo que se ve es verdadero y que una figura es una representación de los objetos geométricos ‘perfectos’ o ‘ideales’” (2005, p.1).

1. Las figuras de análisis en distintos modelos cognitivos

Diversos investigadores estudiaron el proceso de visualización en la resolución de problemas, encontrando así varios modelos donde se aborda el análisis de imágenes y figuras, utilizando cada autor terminología específica y diferente. A continuación se detallará algunos de los modelos que dará un marco teórico a las figuras de análisis, tema central de este trabajo de investigación.

Es importante aclarar que la mayoría de estos estudios no están referidos, en un principio a la geometría o a la matemática específicamente, sino que son estudios sobre el conocimiento en general y las representaciones mentales y visualización de dichos conceptos. Lo que se pretende es examinar las figuras de análisis desde cada uno de los modelos desarrollados por cada pensador, para luego, en los siguientes capítulos, seguir el análisis desde otros aspectos como puede ser lo histórico, pedagógico y en el propio discurso escolar, entre otros.

1.1. Modelo de Fischbein

Volviendo al artículo de Fischbein, el autor menciona dos teorías referidas a conceptos e imágenes:

- La teoría del código dual, en la cual se enfatizan la naturaleza simbólica de la imagen y se diferencia los procesos verbales. Paivio, Piaget e Inhelder son algunos de los cuales se han dedicado a investigar esta teoría.
- La teoría proposicional: enfatiza que un dibujo puede expresarse en palabras y a su vez las ideas pueden expresarse mediante ilustraciones, entre los investigadores de esta teoría se encuentran Pylyshyn y Anderson.

Con respecto a la geometría, Fischbein plantea que en ella se trabaja con "entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales" (citado en Fernández, Cajaraville y Rodino, 2006, p.2). Figurales porque reflejan propiedades espaciales como pueden ser las formas, la posición o el tamaño entre otros aspectos pero que a su vez poseen cualidades conceptuales como son la abstracción, la generalidad o la idealidad de la que nos hablan los autores. Por lo que vale destacar que los conceptos y las imágenes son considerados como dos categorías diferentes de dichas entidades mentales. Para ampliar sobre estas dos categorías se tomará las definiciones que de ellas da Fischbein en su artículo "La teoría de los conceptos figurales" (1993), en el cual para dar explicación a que se entiende por "concepto", toma las palabras de Piéron, quien define un concepto como la "representación simbólica (casi siempre verbal) usada en el proceso de pensamiento abstracto y que posee un significado general correspondiente a un conjunto de representaciones concretas con especto a lo que tienen en común" (Piéron, citado por Fischbein, 1993, p.1). Mientras que en oposición a esta idea se presenta la "imagen", entendiendo por imagen mental a "una representación sensorial de un objeto o fenómeno" (Fischbein, 1993, p.1).

Las figuras de análisis son pues dibujos que sirven de "modelos materializados" de estas imágenes mentales que el individuo construye para resolver el problema planteado y en el cual vuelca los datos dados y señala sobre dicho dibujo las deducciones, producto de este proceso mental que va realizando al relacionar conceptos con la imagen mental y el dibujo. Por lo tanto, puede decirse que en las figuras de análisis confluyen la relación entre lo conceptual y las imágenes mentales.

1.2. Modelo de Duval

En el modelo que presenta Duval, se establecen tres tipos de aprehensiones que realiza el observador frente al dibujo, pudiendo ser una aprehensión perceptiva, discursiva o una aprehensión operativa. Estas últimas son las que se ponen en juego en forma coordinada a la hora de la resolución de un problema de geometría. A continuación se amplían cada una de ellas para una mayor comprensión del tema:

- "La aprehensión perceptiva se caracteriza como la identificación simple de una configuración" (Torregrosa y Quesada, 2007, p.281). Es la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del sujeto al tratarse de un proceso intuitivo.

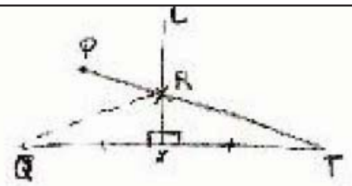
- La aprehensión discursiva se caracteriza por ser un proceso en el cual se asocian la configuración con definiciones, axiomas, teoremas o cualquier otra idea matemática. Según el sentido de esta transferencia a la cual se conoce bajo el nombre de “cambio de anclaje”, pude dividirse en dos:
    - Según sea “del anclaje visual al anclaje discursivo”, es decir del dibujo a un concepto matemático.
    - Según sea “del anclaje discursivo al anclaje visual”, es decir de un enunciado que en nuestro caso puede ser un problema a un dibujo.

- La aprehensión operativa se caracteriza porque el sujeto realiza alguna modificación a la configuración inicial, este proceso puede ser:
    - De cambio figural: donde se agregan o retiran algunos elementos geométricos a la figura original.
    - De reconfiguración: donde se reorganizan los elementos ya dados.

Dentro de la aprehensión discursiva es donde se puede ubicar a las figuras de análisis, pero dichas figuras pueden trabajarse en los dos sentidos que puede presentar el anclaje, detallados anteriormente. Durante la elaboración de dichas figuras de análisis, el individuo se encuentra en el segundo sentido, “del anclaje discursivo al anclaje visual”, pues del enunciado el sujeto toma los datos necesarios ya sea para elaborar este bosquejo o agregar a un dibujo dado todos los datos pertinentes que se mencionen en el enunciado del problema. Pero una vez elaborada la figura de análisis, el sentido del anclaje se modifica y el proceso se invierte, el sujeto toma el dibujo ya elaborado a partir de su propia interpretación de los datos, para dar respuesta al problema pudiendo hacer uso de afirmaciones aritméticas geométricas que partieron de los datos del dibujo. Puede ocurrir que los datos no sean suficiente y comience a trabajar sobre la figura de análisis para identificar otros elementos geométricos, pasando ahora a otro tipo de aprehensión, la operativa, más precisamente “la aprehensión operativa del cambio figural”.

Por lo tanto, como se ha detallado en la explicación anterior, las figuras de análisis dentro del modelo de Duval, pueden encontrarse en ambas acciones, tanto en la aprehensión discursiva como en la operativa, por tal motivo es que Torregrosa y Quesada hablan de un “proceso configural” en donde existe una coordinación entre ambas, pues como consecuencia de la fase de aprehensión operativa “puede necesitar nuevas asociaciones, que a su vez, pueden implicar nuevos cambios, repitiéndose el ciclo aprehensión discursiva/aprehensión operativa de manera coordinada, hasta que se alcanza la solución o se abandona la estrategia seguida” (2007, p.289). En este “proceso configural” también podría resumirse como la estrecha conexión entre visualización y razonamiento, siendo las figuras de análisis un lazo entre ambos procesos tan heterogéneos. Es por tal motivo que Duval afirma que “la actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la construcción” (Torregrosa y Quesada, 2007, p.277), tres procesos que se encuentran resumidos en la figura de análisis.

En trabajo de dichos autores, se ha incluido la resolución de dos problemas en los cuales los alumnos emplean figuras de análisis. Puede verse, más precisamente en la figura 8, que los dibujos fueron realizados a mano alzada ya que los segmentos no guardan la rigurosidad que podría tener una construcción geométrica. También puede observarse la presencia de algunos símbolos que serán propios de un lenguaje de las figuras de análisis como puede ser indicar la amplitud de un ángulo recto con un rectángulo, lo cual indicaría que su amplitud es igual a 90º sin que el dibujo sea exactamente esa medida.

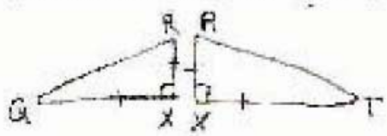


1)

2) La mediatriz L es perpendicular a QT (forma ángulos rectos)

3) Hay que demostrar que la distancia RQ es la misma que la de RT.

4) Determino los triángulos $Q\overset{\triangle}{R}X$ y $T\overset{\triangle}{R}X$ y tengo:



5) congruencia LAL

6) Lado RX ?XR (lado común)

7) ángulo $R\hat{X}Q$?$R\hat{X}T$ (La mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $R\hat{X}Q$ =90º $R\hat{X}T$ =90º)

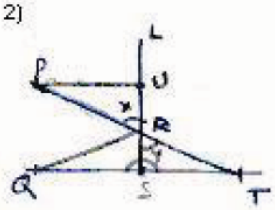
8) Lado QX ?TX (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio).

Figura 8: Ejemplo de figura de análisis en una demostración[1]

1) Demostrar

mPT = mPR + mPQ

2)



4)QS ?ST ? Ya que al estar cortada por la mediana, la corta en dos partes iguales.

5) Por lo tanto deducimos que QR ?RT

6) Para demostrar PR ?RT ? $P\overset{\triangle}{R}U$?$R\overset{\triangle}{S}T$

7) 1) RU ?RS

8) 2) ST ?PU × lados opuestos a ángulos congruentes.

9) 3) $P\hat{X}U$?$T\hat{Y}S$

10) LAL, por lo que $P\overset{\triangle}{R}U$?$R\overset{\triangle}{S}T$? PR ?RT

11) Por lo que RT ?RQ

12) PT = PR + RT

Figura 9: Ejemplo de otra figura en una demostración geométrica[2]

1.3. Modelo de Presmeg

[1] Imagen tomada de (Torregrosa y Quesada, 2007, p.290)
[2] Imagen tomada de (Torregrosa y Quesada, 2007, p.292)

Presmeg (citado en Gutiérrez, 1991) distingue y caracteriza diferentes tipos de imágenes mentales, tales como:

- Imágenes concretas pictóricas: son las imágenes de objetos físicos.
- Imágenes de fórmulas: son imágenes mentales de fórmulas o esquemas.
- Imágenes de patrones: son imágenes de esquemas visuales que corresponden a relaciones abstractas donde se visualiza alguna representación grafica de su significado.

Independientemente de esta clasificación pueden a su vez agruparse según el movimiento del sujeto, a saber:

- Imágenes cinéticas: son tanto las imágenes físicas como las mentales en las cuales influye el movimiento del cuerpo del sujeto, ejemplo de ello puede mencionarse representaciones que según la posición del observador hace que varíe su percepción y pueda identificar distintos objetos.
- Imágenes dinámicas: son imágenes mentales donde alguno de sus componentes se mueven (Gutiérrez, 1991).

Según este encuadre, las figuras de análisis pueden ubicarse dentro de la caracterización realizada por Presmeg, como "imágenes de patrones", pues pueden tratarse "de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas (...) no se visualiza la relación propiamente dicha, sino alguna representación gráfica de su significado" (Gutiérrez, 1991, p.45).

Además, esta gráfica no es necesario que se represente con la rigurosidad que posee un concepto geométrico. Para ejemplificar que las figuras de análisis son imágenes de patrones, puede señalarse que una figura posee un ángulo recto sin necesidad de las rectas que contienen a dos segmentos sean perpendiculares, como se pudo observar en la figura 8, ejemplo dado por Torregrosa y Quesada, sino simplemente basta con realizar un marca especifica sobre el papel que de la idea que la amplitud de dicho ángulo es igual a un ángulo recto, como puede verse más claramente en la figura 10, donde puede leerse que el cuadrilátero abcd es un rectángulo, a partir de las marcas trazadas y no por lo que realmente ven nuestros ojos. Estas marcas pueden considerarse como símbolos de un lenguaje propio de estos patrones, en este caso símbolos que son transmitidos en el discurso escolar.

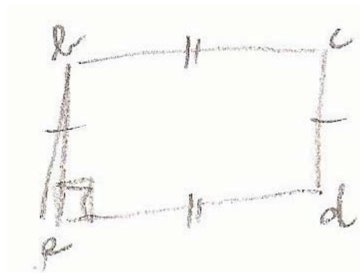


Figura 10: Figura de análisis de un rectángulo

1.4. Modelo de Bishop

En el siguiente modelo, Bishop (en Gutiérrez, 1991) no distingue al referirse a imágenes si éstas pueden ser físicas o mentales y establece que las imágenes (en cualquiera de sus dos formas) son el objeto que se pone en juego el proceso de la visualización, a través de dos procedimientos diferentes e inversos, como son:

- El procedimiento visual: que es la construcción misma de la imagen visual a partir de los datos abstractos conocidos.
- El procedimiento de información figurativa: que consiste en el proceso por el cual el sujeto extrae la información comprendida en una representación, una imagen física a través de la visión.

Las figuras de análisis pueden encontrarse en ambos procesos, según el momento en que el sujeto se encuentre al resolver el problema: en un primer momento, en la elaboración de las mismas a partir de la interpretación de los datos que comprende el “procedimiento visual”, y tras su elaboración le sigue el “procedimiento de información figurativa”, momento en el cual se interpreta todos los datos recogidos en la figura de análisis y se establece relaciones entre ellos.

1.5. Modelo de Tall y Vinner

Tall y Vinner han marcado, en forma similar al modelo planteado por Fischbein, dos términos que permiten diferenciar entre el concepto y la idea que el sujeto elabora del mismo. Ellos ubicaron bajo el concepto de “definición conceptual” aquellos significados formales y matemáticos del objeto con el cual se trabaja. Por otro lado, emplearon el término “imagen conceptual” aludiendo a los conceptos figurales empelados en geometría, por ejemplo. Con la palabra imagen no se hace referencia a lo que nuestro sistema ocular logra ver sino a la reconstrucción mental del objeto matemático involucrado, esta reconstrucción aún al tratarse de ideas abstractas como son los entes matemáticos se ven teñidas por el aspecto subjetivo del individuo. Al respecto, Tall describe a la “imagen conceptual” como “la estructura cognitiva total que está asociada con el concepto que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Es construido a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo, cambiando cuando el individuo se enfrenta a nuevos estímulos y madura” (Fischbein, 1993, p.9).

Con estos dos conceptos se intentó describir el estado de los conocimientos que siente el individuo frente a un concepto matemático, que no tiene porque pertenecer únicamente al campo de la geometría.

Dentro de este modelo, se puede conjeturar que las figuras de análisis intentan ser una representación gráfica de esa “imagen conceptual” que el alumno tiene sobre aquellos objetos geométricos que se encuentran involucrados en determinado problema. Por ejemplo, si el problema hace referencia a un rectángulo, se puede observar que generalmente los alumnos grafican un determinado tipo de rectángulo para analizar la situación, que dicho rectángulo guarda la relación de ser el lado mayor el que se considera base, sobre el cual se dibuja “apoyado” el cuadrilátero, que de darle nombre a dicho polígono, por lo general utilizaran las cuatro primeras letras del abecedario. Todos estos datos, no están dados en el problema ni son parte de la “definición conceptual” del rectángulo sino que son parte de la “imagen conceptual” que los alumnos han elaborado en su recorrido educativo. El tema esta relacionado con la idea de “los prototipos” y “estereotipos", que se tratará en este mismo capítulo, entre unos de los ítems del apartado “Obstáculos de la visualización”.

1.6. Modelo de Pallascio

Es Pallascio quien establece cinco niveles en el proceso de visualización, donde cada nivel posee una dificultad mayor que el anterior. Dichos niveles son:

“♦ Visualización: después de haber observado un objeto, la visualización radica en memorizar imágenes parciales a fin de reconocer objetos iguales o semejantes a través de un cambio de posición o de escala, entre un conjunto de objetos ante un mismo diagrama.

- Estructuración: una vez visualizado el objeto, la estructuración reside en el reconocimiento y reconstrucción del objeto partiendo de sus elementos básicos.
- Traducción: se basa en el reconocimiento de un objeto a partir de una descripción literaria y viceversa.
- Determinación: reside en el reconocimiento de su existencia partiendo de la descripción de sus relaciones métricas.
- Clasificación: reside en el reconocimiento de clases de objetos equivalentes de acuerdo a distintas pautas de clasificación” (en Blanco, 2009, pp.22-23).

De ubicar a las figuras de análisis en alguna de estas etapas, no cabe duda que deben encontrarse dentro del nivel de Traducción, pues estas figuras son una traducción que realiza cada sujeto de los datos que se desprenden del problema y a su vez tras la deducciones realizadas sobre ese mismo dibujo, es que se vuelve a traducir argumentando la demostración o los datos encontrados fundamentándolos por alguna propiedad o teorema.

2. Obstáculos en la visualización

Aunque la problemática planteada no sea precisamente las demostraciones, las figuras de análisis están muy vinculadas con las mismas en las clases de geometría. Crespo Crespo y Farfán mencionan, al respecto, “las figuras de análisis dificultan la comprensión de los razonamientos cuando se utiliza argumentaciones por el absurdo” (2005, p.303). Esta afirmación fija un antecedente en el cual se deja evidencia de que las figuras de análisis no siempre cumplen con su objetivo de facilitar la compresión del problema o demostración para llegar a la solución correcta.

Pero una de las preguntas a la que se intenta dar respuesta con esta nueva investigación no está acotada sólo a las demostraciones por reducción al absurdo, sino a la correcta utilización de las figuras de análisis con la intención de detectar cuales pueden ser los factores que obstaculizan su correcto empleo en cualquier tipo de problema geométrico.

De Guzmán le otorga un papel importante al proceso de visualización en el quehacer matemático, es por ello que menciona: “Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las áreas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo”. A lo cual agrega: “la visualización constituya un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática es algo totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática” (citado por Blanco, 2009, p.13). Pero a pesar de ello, también afirma que “la visualización conduce a errores” (de Guzmán, 1996), entre los motivos que presenta da referencia a las “falacias de tipo geométricas” o también llamadas ilusiones ópticas.

2.1. Ilusiones ópticas

Los dibujos realizados en geometría, aún utilizando los instrumentos geométricos con gran precisión, no son perfectos por lo tanto no puede valerse de ellos para justificar, por ejemplo, propiedades según lo que ven los ojos humanos, pues estos pueden engañar. Sí se puede a partir de datos y el empleo de teoremas, extraer una conjetura para que mediante una demostración lógica se pueda conocer su valor de verdad, pero la figura sólo sirve para relacionar esos elementos y no como justificación. Además los datos a utilizar son los dados por el problema o los que pueden deducirse de otros teoremas y no de los datos observados directamente a través de la visión porque, como ya se ha mencionado, estos pueden engañar y conducir a conclusiones erróneas. A continuación se presentarán una serie de imágenes para mostrar cuánto pueden engañar estas imágenes al ojo humano. Estas imágenes no son otra cosa que ilusiones ópticas.

Muchas veces, los alumnos afirman, en el problema, que dos rectas son paralelas a partir del dibujo, sin que los datos conocidos confirmen lo mismo y justifican dicha afirmación lo que observa en la figura. En las figuras 11 y 12, las imágenes muestran como uno puede pensar que dichas rectas no son paralelas porque a simple vista sus segmentos son oblicuos, pero si se toma una escuadra y regla puede comprobarse que la afirmación anterior no es correcta y que sí corresponde al dibujo de rectas paralelas. Esto se debe a los segmentos oblicuos que cortan a cada una de las rectas que dan la idea de no paralelas, estas ilusiones corresponde, la primera a Zollner quien la presentó en 1860 y la segunda es una versión de Hering basada en el mismo principio.

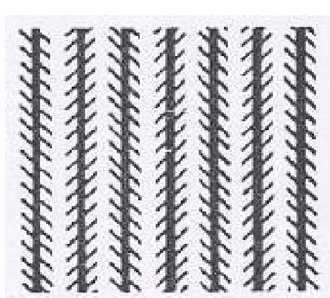


Figura 11: Ilusión de

Figura 12: Ilusión basada

Zoller: paralelismo[3]   en la de Zollner[3]

Estos no son los únicos casos, en las figuras 13 y 14, puede verse otros ejemplos donde el paralelismo parece ser modificado por el o los haces de rectas, según el caso, que cortan a las otras dos rectas.

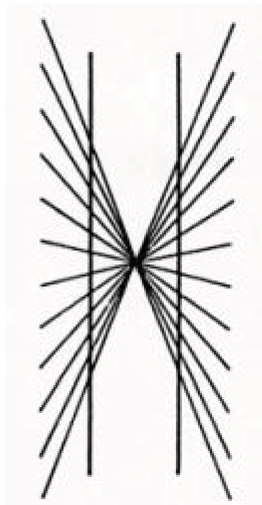


Figura 13: Ilusión de Hering: paralelismo[4]

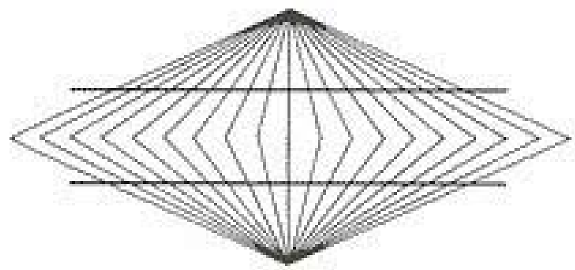


Figura 14: Ilusión de Wundt: paralelismo[5]

Luego existe variaciones a este tipo de ilusiones ópticas, que refieren a conceptos geométricos, pues hay ilusiones ópticas que apuntan a otros aspectos como puede ser: figuras imposibles, figura fondo o que dan la idea de movimiento, pero en este trabajo se tomarán como ejemplos aquellas que refieren a algún concepto geométrico, como se vio anteriormente con respecto al concepto de paralelismo. Siendo el tema central de este trabajo las figuras de análisis se mencionarán aquellas ilusiones ópticas que pueden presentarse y alterar las conclusiones que surgen a partir de dichas figuras de análisis la resolución de un problema geométrico.

Otro error que a veces cometen los alumnos es suponer que se trata de un cuadrado o triángulo equilátero, guiándose sólo por la estimación de la longitud de los segmentos de los lados de dicha polígono según lo observan en su dibujo, sin

[3] Imágenes tomadas de www.ilusionario.es/GEOMETRICAS/lineas.htm
[4] Imagen tomada de www.ilusionario.es/GEOMETRICAS/muller_lyer.htm
[5] Imágenes tomadas de www.ilusionario.es/GEOMETRICAS/lineas.htm

fundamentar dicha afirmación, sólo valiéndose del gráfico. En las siguientes ilusiones, puede observarse que la percepción puede verse alterada con respecto a la longitud de un segmento según la posición del dibujo con respecto a otros datos dados que sirven de referencia, como es el caso de la figura 15 perteneciente al psicólogo Ponzo donde a simple vista los dos segmentos parecen tener longitudes distintas aunque dicha afirmación no es correcto. Dicha ilusión es dada por las rectas entre las cuales se encuentran ambos segmentos congruentes mientras que en la ilusión de Jastrow (figura 16), la longitud de los segmentos a, b, c y d, **parece** ir en aumento a medida que la amplitud de los ángulos que tienen centro en los puntos extremos de dichos segmentos va en aumento, se resalta la palabra "parece" pues los cuatro segmentos poseen la misma longitud.

Figura 15: Ilusión de Ponzo: longitud[6]

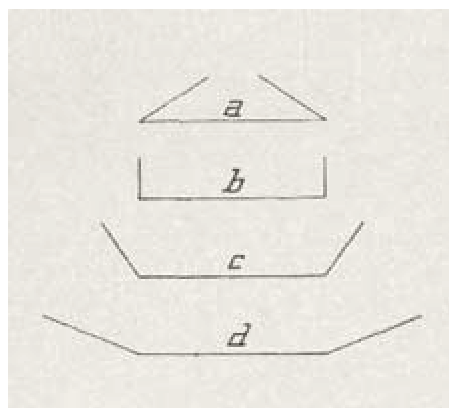


Figura 16: Ilusión de Jastrow: longitud[7]

A través de los años, psicólogos, pintores, filósofos y otros destinaron su tiempo al estudio de estas ilusiones ópticas, pero hubo matemáticos que también se centraron en estas imágenes, así es como nos encontramos con un comentario de Euler, al respecto: "Los pintores son los que con más frecuencia saben convertir en provechosa esta percepción ilusoria general y afín a todos" (citado en Perelman, 1975, p.1).

[6] Imagen tomada de www.ilusionario.es/GEOMETRICAS/ponzo.htm
[7] Imagen tomada de www.ilusionario.es/GEOMETRICAS/muller_lyer.htm

Y para finalizar este apartado se tomarán tres ejemplos relacionados con polígonos, que Perelman (1975) presenta en su libro "Problemas y experimentos recreativos", más precisamente en el capítulo quinto en donde hace una recopilación de diversas ilusiones ópticas.

Primer ejemplo: En la figura 17, "el rectángulo cruzado a lo largo (a la izquierda) parece más largo y más estrecho que su igual cruzado transversalmente" (Perelman, 1975, p.8).

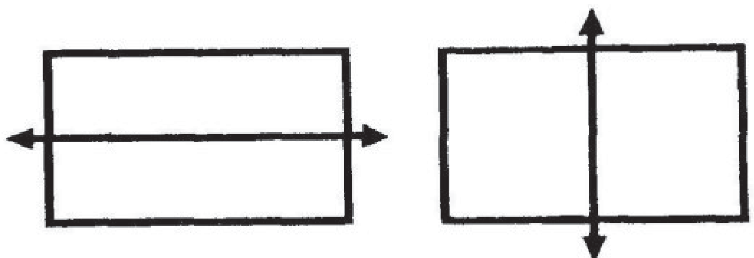


Figura 17: Ilusión óptica sobre rectángulos[8]

Segundo ejemplo: En le paralelogramo que se puede ver en la figura 18, "las distancias AB y AC son iguales, sin embargo, la primera parece más larga" (Perelman, 1975, p.9).

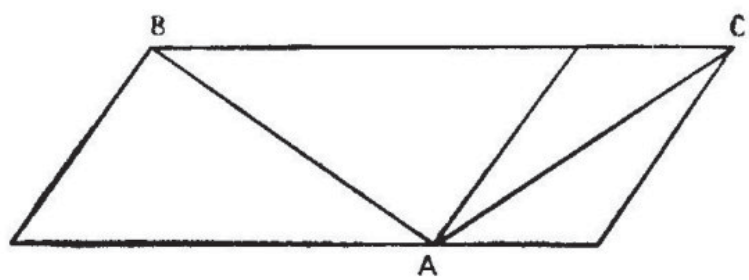


Figura 18: Ilusión de Sander: longitud[9]

Tercer ejemplo: "las alturas de los triángulos (...) están cortadas por la mitad, aunque parece que la parte próxima al vértice es más corta" (Perelman, 1975, p.10).

[8] Imagen tomada de (Perelman, 1975, p.8)
[9] Imagen tomada de (Perelman, 1975, p.9)

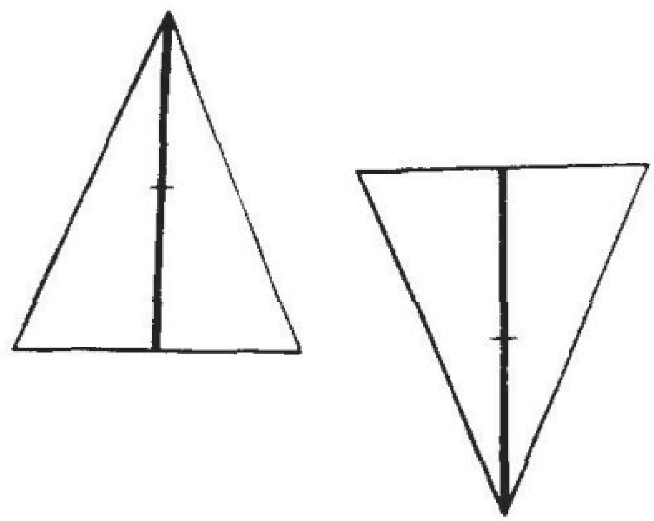


Figura 19: Ilusión óptica sobre triángulos[10]

Para finalizar con estas "falacias geométricas", de Guzmán (1996) establece que algunas veces, "la situación visual nos induce a aceptar relaciones que son tan engañosamente transparentes que ni siquiera se nos ocurre pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas". ¿Son nuestros alumnos capaces de no caer en las trampas oculares de estas ilusiones?

2.2. Otro obstáculo: la transmisión

De Guzmán no es el único que hace referencia a diferentes obstáculos en el proceso de visualización, al respecto Bishop advierte que "en el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la Geometría se encuentra el aspecto de la visualización" (citado por Blanco, 2009, p.14).

Volviendo a las ideas de Guzmán (1996), él habla de una preparación en el uso de imágenes para el proceso de visualización, una ejercitación que permita una "familiarización con las tareas de descodificación de la imagen. Si esta preparación está ausente lo que para otros es un ejercicio descansado y agradable resultará un jeroglífico angustiosamente incomprensible". Para que este proceso sea provechoso debe existir una preparación previa, "educación que no

[10] Imagen tomada de (Perelman, 1975, p.11)

muchos matemáticos son capaces de transmitir" (de Guzmán, 1996). Lo que se puede conjeturar a partir de estas palabras es dar una posible respuesta a una de las preguntas planteadas en este trabajo de investigación, ¿cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?, por las palabras de Guzmán, puede deducirse que dichas figuras de análisis no surgen en forma natural sino que son transmitidas por otros, matemáticos o docentes, pero esto desemboca en nuevos interrogantes como pueden ser ¿esto ocurrirá siempre o será sólo uno de los posibles orígenes de las figuras de análisis?, los interrogantes van en aumento.

El autor sigue haciendo referencia a distintos tipos de transmisión del uso de la visualización en la resolución de problemas apuntando a otro aspecto del discurso escolar como son los libros de textos. Al respecto menciona: "el medio de transmisión hasta ahora utilizado tanto en los artículos como en los textos que manejan nuestros estudiantes es, fundamentalmente, la letra escrita, un medio estático que no se adapta en absoluto a los procesos de visualización. (...) En un libro, en un artículo se transmite normalmente sólo el producto final, la imagen última con todos los elementos acumulados en ella, lo que resulta extraordinariamente engorroso de interpretar" (de Guzmán, 1996).

Mas no es el único de Guzmán quien plantea las dificultades que se pueden presentar en el proceso de visualización y asociado a la transmisión de este proceso en la enseñanza, se encuentra el trabajo de Eisenberg y Dreyfus, titulado "Sobre la resistencia para visualizar en matemática". Trabajo en el cual establecen tres posibles causas de estos obstáculos frente al proceso de visualización. Es interesante ver que las tres causas tienen distintos orígenes y atañen a distintos aspectos que forman parte de la noosfera donde se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Una causa cognitiva: "lo visual es más difícil" que el proceso analítico.
- Una causa de orden sociológica: "Lo visual es más difícil de enseñar".
- Un causa que atañe a las creencias sobre la naturaleza de los entes matemáticos: "lo visual no es matemático" (Ramírez, 2008, p.42).

En su tesis, “La resolución de problemas mediada por la visualización. Un estudio de casos”, Ramírez menciona otras razones relacionadas con “una traducción e interpretación flexible y adecuada entre las representaciones visuales y analíticas de la misma situación” y continúa explicando detalladamente las posibles opciones al respecto, “muchas de las veces, por que el diagrama puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar. O de las veces por que la situación visual nos induce a aceptar relaciones que son engañosamente transparentes y ni siquiera se nos ocurre pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas” (2008, p.45). En esta frase se puede leer la palabra “diagrama”, que no es otra cosa que aquellos dibujos que en este trabajo se ha denominado como “figuras de análisis”. Cuántas veces, se ha escuchado decir a los alumnos “es un triángulo equilátero” y cuando el docente solicita que justifiquen dicha respuesta, ellos sólo aclaran “¡Pero si es un triángulo equilátero, se puede ver!”, para estos alumnos lo visto por sus ojos es suficiente como fundamentación para avalar que una figura es un triángulo equilátero sin apoyarse en ningún dato preciso y sólo en el dibujo, que como se analizó anteriormente en las ilusiones ópticas, este dibujo puede engañarlos.

Para retomar la idea presentada en el trabajo de Eisenberg y Dreyfus, es Adams quien en lugar de hablar de dificultades frente a la visualización, hace referencia a “bloqueos mentales”, entendiendo por ellos a las “barreras que nos impiden percibir un problema en la forma correcta y encontrarle solución” (en Nieto Said, 2004, pp.6-7).

A estos bloqueos mentales los clasifica en:

- Bloqueos perceptivos: “estereotipos, dificultad para aislar el problema, delimitar demasiado el espacio de soluciones, imposibilidad de ver el problema desde varios puntos de vista, saturación, no poder utilizar toda la información sensorial” (en Nieto Said, 2004, p.7). En esta clase se pueden ubicar a las figuras de análisis cuando son los alumnos quienes representan casos particulares en lugar de dibujar la situación lo más general posible, por ejemplo si el problema hace referencia a un triángulo cualquiera, dibujan un triángulo isósceles y siguen toda su construcción hasta llegar a una solución que en el caso de ser correcta, sólo es válida para dicho triángulo pero se perdió de vista la generalidad del problema.

- Bloqueos emocionales: relacionados con miedo a fracasar y cometer errores, o falta de interés, de creatividad o de estímulo, son algunos de los ejemplos que menciona el autor.
- Bloqueos culturales: donde se pone en juego toda la tradición con sus mitos y tabúes.
- Bloqueos ambientales: entre estos bloqueos el autor hace referencia obstáculos exteriores que provocan distracción o desinterés.
- Bloqueos intelectuales: "inhabilidad para seleccionar un lenguaje apropiado para el problema (verbal, matemático, visual); uso inadecuado de las estrategias; falta de información o información incorrecta" (en Nieto Said, 2004, p.7). En estos obstáculos también podemos encontrar a las figuras de análisis cuando no representan correctamente la situación planteada en el problema.
- Bloqueos expresivos: "técnicas inadecuadas para registrar y expresar ideas (a los demás y a uno mismo)", y si se refiere a registrar no pueden faltar las figuras de análisis, no tanto para expresar las ideas a otros sino sobre todo para comprenderlas uno mismo.

Aunque en las últimas líneas se hizo mención al aspecto cultural y a la transmisión de ciertas figuras geométricas con características particulares, se considera que es un aspecto esencial por lo tanto tendrá un apartado espacial en el siguiente punto, para detallarlo y darle la importancia pues es considerada una de las dificultades que presentan los alumnos a la hora de emplear las figuras de análisis.

2.3. Aspecto social: los prototipos

Otra de las dificultades relacionadas al proceso de visualización, se encuentra relacionada con el aspecto social. El trabajo de investigación de Scaglia y Moriena (2005) consiste en el análisis de las dificultades que presentan los alumnos para reconocer un concepto geométrico cuando su representación gráfica difiere de los prototipos establecidos culturalmente como pueden ser la posición espacial, cierta clase de triángulos o cuadriláteros, que sólo son casos particulares. Estos prototipos generan una imagen mental que puede observarse en las figuras de análisis cuando los alumnos realizan casos particulares, tema a investigar en este trabajo. Entendiendo por "prototipos" aquellos "ejemplos que tienen un mayor 'parecido familiar' con el resto de los ejemplos del concepto" (Scaglia y Moriena, 2005, p.109), pero estos prototipos son imágenes mentales que el sujeto construye en la interacción con representaciones gráficas de figuras geométricas que tienen determinadas propiedades. "Estas representación gráfica constituye (...) una representación gráfica estereotipada, porque es la que se encuentra con mayor frecuencia, y forma parte desacerbo cultural por diversas razones, entre otras, porque es más adecuada para trabajar en los primeros años de escolaridad o porque simplifica razonablemente la representación gráfica" (Scaglia y Moriena, 2005, p.117). Dando en estas palabras con una beta importante según la línea de investigación escogida para dicho trabajo, la socio-espistemología, puede observarse que el aspecto social incide en la construcción de las figuras de análisis, como las autoras fundamentan que dichas construcciones están asociadas con la matemática educativa perteneciente a la realidad del aula.

Como es sabido estos dibujos deben representar "una clase de objetos y no un objeto en particular" (Skemp, en Dal Maso, 2007, p.26), pero como ya se mencionó es Adams quien habla de "bloqueos culturales" que se aúnan con los bloqueos perceptivos", y entre estas dos clases se puede asociar con las dificultades que mencionan las autoras en su trabajo.

A continuación se hará un listado de diferentes prototipos presentados en distintos trabajos de investigación:

- Triángulo rectángulo: se encuentran graficados “con el ángulo recto en la posición vertical-horizontal” (en Plasencia, 2000, p.54).
- El cuadrado “como ejemplo prototipico de los cuadriláteros” (Scaglia y Moriena, 2005, p.110). Lo cual puede conducir a errores, pues el cuadrado posee propiedades particulares que no todos los cuadriláteros poseen.
- “Triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos deben tener una base horizontal” (Matos citado por Scaglia y Moriena, 2005, p.110).
- La altura de un triángulo debe estar contenida en el mismo (Scaglia y Moriena, 2005, p.109).
- El rombo dibujado a partir de sus diagonales cuya posición es vertical y horizontal (Scaglia y Moriena, 2005, p.114).
- Triángulo isósceles: “con una base horizontal y el ángulo desigual opuesta o a la misma” (Plasencia, 2000, p.54).

Y con respecto a los prototipos en el espacio se tomará algunos ejemplos presentados por Rey:

- “Para el cubo se utiliza siempre este prototipo en el cual se encuentra en posición ‘de apoyo’ sobre una superficie inexistente”.
- “El cilindro se encuentra en la gran mayoría de los casos ubicado en posición vertical con una de las superficies circulares como base, y además con una relación ‘alto-ancho’ lo suficientemente amplia para mostrar un ‘cilindro estilizado’”.
- “Las pirámides son siempre rectas y con una de sus caras actuando como base, y de medidas también ‘estilizadas’” (2004, p.7).

Estos son algunas generalidades que se pueden observar y que están registradas en distintas investigaciones. La idea de presentar estos ejemplos es verificar que estas situaciones se repiten en las figuras de análisis y que muchas veces pueden ser un obstáculo y generar una confusión para los alumnos.

Es cierto que las figuras de análisis por el sólo hecho de ser un dibujo concreto es de naturaleza distinta a la abstracción y a la generalidad que caracteriza a los entes matemáticos pero se pretende que dichas figuras de análisis sirvan de referencia y faciliten la representación mental que el sujeto elabora frente al problema. Esta es una de las dificultades que se observa en muchos de los alumnos cuando se ven presos del dibujo sin poder ver más allá de las trazas dibujadas con imprecisión. Para resumir este punto de los prototipos y generalizar los ejemplos mencionados, Matos (citado por Scaglia y Moreina, 2005, p.110) hace referencia a las características generales que están asociadas a los prototipos:

- Una posición preferida: es decir una determinada posición de la figura geométrica en el plano.
- Una forma balanceada globalmente, aludiendo a determinadas proporciones que guardan las figuras.
- Simetría: preferencia por las figuras simétricas, como es el caso de los triángulos isósceles.

Analizando estas características puede observarse que las dos primeras no hacen referencia a ideas matemáticas, pero que a su vez juegan un papel importante en la clase de matemática que tienen sus orígenes en la experiencia que del sujeto tanto en el contexto escolar como en el contexto fuera de la escuela.

2.4. Distintos tipos de representaciones

Otro obstáculo en el proceso de visualización asociado a las figuras realizadas en la resolución de un problema, es el tipo de representación que se dibuja. Al respecto Hegarty y Kozhevnikov (citado en Ferrero, 2009) identifican dos tipos de representaciones diferentes, por un lado representaciones esquemáticas las cuales en este trabajo de investigación se a denominado como figuras de análisis, mientras que la segunda representación, en esta clasificación, se denomina pictóricas.

Como se ha dicho el obstáculo sería estas mismas representaciones pictóricas, pues según las autoras, en estas ilustraciones se detallan datos que no son relevantes, perdiendo la conexión con el enunciado del problema. Por lo tanto, son pobre en la abstracción y conducen a resultados poco exitosos. Las relaciones que sobre estos dibujos se confeccionan, están basadas en lo visual, perdiendo de vista la abstracción del proceso deductivo que sobre ellas se lleva a cabo, por lo cual se considera un obstáculo

3. La visualización en el descubrimiento científico

La importancia de la visualización no sólo ha importado a personas quienes estudian el proceso de enseñanza-aprendizaje sino también despertó el interés de diversos pensadores como Aristóteles quien afirmaba que "el pensamiento es imposible sin una imagen" (Ramírez, 2008, p.30). Pero el rol que juega estas representaciones en el propio descubrimiento también motivó a científicos de distintas épocas de la historia, ejemplo de ello se percibe en las mismas palabras de Einstein (1879–1955) pertenecientes a una carta que iba dirigida al matemático francés, Hadamard (1865–1963):

> "Las palabras o el lenguaje como escritos o hablados no parecen jugar ningún papel en mi forma de pensamiento. Las entidades físicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son ciertos signos y más o menos claras imágenes que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas. Estas combinaciones parecen ser la características esencial en el pensamiento productivo, antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas en palabras y otros tipos de signos que puedan ser comunicadas a otros" (Hadamard, 1945, traducido por Plasencia, 2000, p.46).

En este capítulo se ha querido centrar en el proceso de visualización, presentando los distintos modelos que tratan las imágenes mentales y los dibujos, para luego analizar las diferentes dificultades que pueden generarse en dicho proceso: las ilusiones ópticas como así también los prototipos. El siguiente capítulo se hará un recorrido histórico dando repuesta a cómo distintas culturas, en épocas variadas emplearon el proceso de visualización en la resolución de problemas haciendo uso de las figuras de análisis.

Capítulo 3

Las figuras a través de la historia

Para acercarse a una posible respuesta a una de las preguntas que se han planteado en el inicio de la investigación: ¿Cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?, en este capítulo se realizará un relevamiento histórico en busca de figuras de análisis o aproximaciones de las mismas en trabajos matemáticos pertenecientes a diferentes culturas, en distintas épocas históricas y acercarse así a un enfoque epistemológico del objeto de estudio de este trabajo; las figuras de análisis. No se pretende hacer una evolución histórica completa y minuciosa de las figuras de análisis sino analizar el uso de estas figuras en distintas épocas de la historia y cómo el uso de las mismas en cada civilización esta relacionada con su propia cultura y el proceso de visualización desarrollado en el capítulo anterior.

Si se observan variados documentos matemáticos de distintas partes del mundo se puede encontrar, en ellos, enunciados donde se debe resolver un cierto problema matemático y este enunciado es acompañado en su resolución por un dibujo. Investigaremos, pues entonces, si estos dibujos se tratan de una simple representación del enunciado o consiste en una figura de análisis, conjeturando que dichas figuras sirvieron de guía, tanto para la persona que resolvió el problema como para la persona que lo leía luego.

1. Egipto antiguo

Provenientes del antiguo Egipto se encuentran diversos papiros, verdaderos testimonios de cómo resolvía este pueblo los problemas matemáticos. De estos papiros se tomarán algunos problemas a modo de ejemplo para analizar las figuras que aparecen junto a los problemas.

Uno de los principales documentos matemáticos egipcios que han llegado hasta nuestros días, es el Papiro de Rhind o Ahmes que data aproximadamente del año 1650 a.C. Entre su lista de 87 problemas se encuentra, en particular, el problema número 48: “Comparar el área de un círculo con la del cuadrado circunscrito” (López, 1997a).


Figura 20: Problema 48 del Papiro Rhind o de Ahmes[11]

En la segunda imagen de la figura 20, puede observarse en detalle la escritura que no muy nítidamente se puede ver en la foto del papiro original que se encuentra a la izquierda. Es así cómo se identifica claramente que en la parte superior se encuentra un dibujo que presenta bastante imprecisión pero que responde a la definición que se ha dado de figura de análisis en este trabajo, pues la figura que se encuentra en el interior de este cuadrado no corresponde precisamente a un círculo del cual hace referencia el problema pero es suficiente para dar una idea de éste y a partir de la figura comenzar un análisis sobre la misma y avanzar en la resolución del problema hasta llegar a la correcta solución.

No es el Papiro de Ahmes el único ejemplo que se encuentra en el Antiguo Egipto, existen otros papiros en los cuales también hay presentes figuras geométricas que acompañan los enunciados de los problemas. Recordemos que los problemas geométricos de este pueblo estaban muchas veces asociados a los problemas de división del terreno a partir de las crecientes del río Nilo, por tal motivo los problemas en general y más aún los geométricos eran de carácter práctico.

[11] Imágenes tomadas de www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Por ejemplo, en el Papiro de Moscú, el problema número 14 es muestra de lo dicho. A partir de los datos que se observan, dice López (1997b) "En este problema se pide calcular el área de la figura, que parece ser un trapecio isósceles, pero realmente se refiere a un tronco de pirámide cuadrangular" y continúa diciendo" (...) parece ser que lo que se busca es calcular el volumen del tronco de pirámide cuadrangular de altura 6 y bases superior e inferior de 2 y 4".

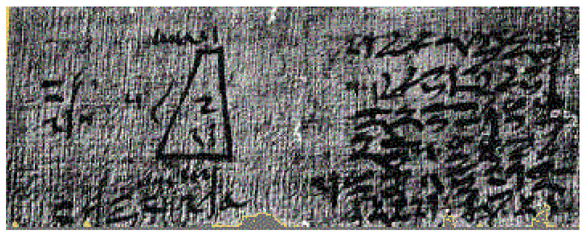


Figura 21: Problema 14 del Papiro Moscú [12]

Aunque se pide el volumen de la pirámide truncada puede verse en la imagen que la figura que aparece, en cuyo interior y alrededores puede diferenciarse signos hieráticos que corresponden a las dimensiones que se dan como datos del problema, se trata de un trapecio, figura obtenida tras realizar un corte transversal al cuerpo del cual se quiere calcular su volumen con un plano perpendicular al de la base; lo que implica una abstracción y una visualización del cuerpo con el que se esta trabajando.

Esta forma de representar los cuerpos no es casual pues el pueblo egipcio tenía por costumbre representar los cuerpos de tres dimensiones como figuras planas, siendo particular en esta cultura los bajorrelieves o las pinturas de cuerpos humanos esbozados de frente pero, a su vez, su rostro se observa en una postura de perfil, como así también sus piernas, en la mayoría de los casos. Pero lo más curioso, es que en estos rostros que se dibujan de perfil, sus ojos se encuentran como vistos de frente, como puede verse en la figura 22, pintura que se encuentra en la tumba del faraón Ramsés I.

[12] Imagen tomada de www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm

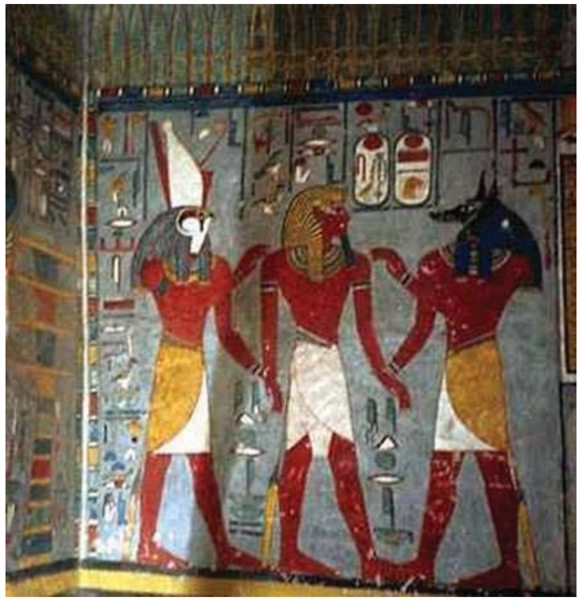


Figura 22: Ramsés I con Horus y Anubis[13]

Pero si nos centramos en las figuras referidas a matemática, puede notarse que las figuras realizadas tienen un alto nivel de imprecisión, dichas irregularidades geométricas darían la impresión que sólo se realizaban como ayuda para el escriba que resolvía el problema. Recordemos que para estos tiempos, la matemática que este pueblo desarrolló es solo de orden práctico, no había aún teorizado las ideas geométricas, con lo cual puede afirmarse que las figuras representadas son una figura de análisis de la situación planteada y no representan un generalización pues si se trataba de una figura geométrica, como en el caso de la pirámide truncada, es para un ejemplo especifico, de la cual se dan sus valores, y no se puede generalizar para cualquier pirámide truncada.

2. Civilización Sumeria

Del mismo modo se puede encontrar ejemplos del uso de figuras al momento de resolverse un problema en las tablillas pertenecientes a los distintos pueblos que ocuparon la Mesopotamia Asiática, comprendida entre los ríos Eúfrates y el Tigres,

[13] Imagen tomada de http://www.cossio.net/actividades/pinacoteca/p_02_03/egipcios.htm

hacia 3300 a.C. Varios de estas tablillas muestran figuras geométrica donde los datos dados en el problema pueden observarse dentro de la figura.

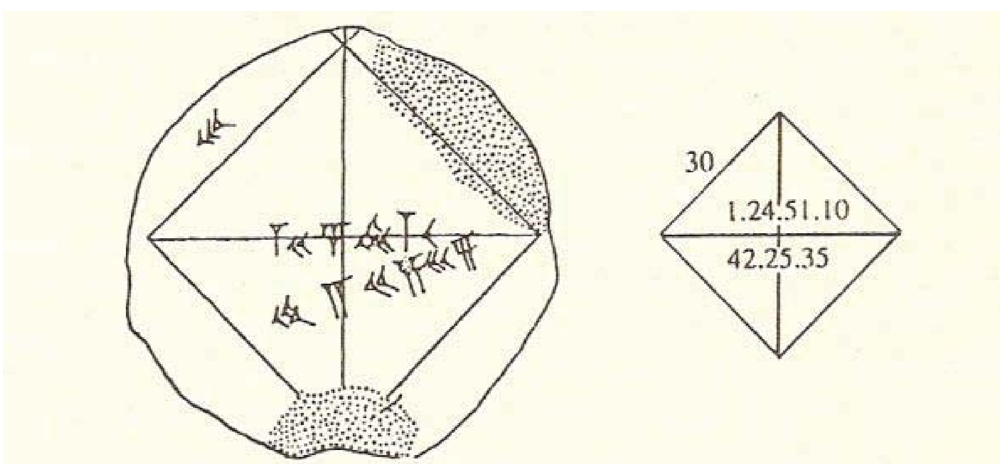
Figura 23: Tablilla con una aproximación de $\sqrt{2}$.[14]

En esta tablilla puede observarse un cuadrado de lado 30 con una de sus diagonales dibujadas y sobre ella los símbolos cuneiformes que corresponden a los 1.24.51.10 y 42.25.35 (debe recordarse que el sistema de numeración de estos pueblos es de base 60 y toda su escritura era cuneiforme). En otra interpretación de lo representado en esta tablilla, Maza propone que esta última expresión (42;25.35) es una aproximación de raíz cuadrada de dos. Pero esta gráfica no es casual pues otro ejemplo similar se presenta, como puede verse en la figura 24, en la tablilla YBC 72 (perteneciente a la Yale Babylonian Collection), que se encuentra fechada entre los años 1900 y 1600 a.C. Puede observarse que aún siendo otra tablilla los datos son los mismos que el caso anterior.

[14] Imagen tomada de http://personal.us.es/cmaza/mesopotamia/plimpton.htm

En la foto de la figura 24, puede advertirse la irregularidad de la figura ya que los segmentos internos darían la idea de diagonal pero es notorio que sus extremos no coinciden con los vértices del cuadrado; irregularidades que no se trasladan al diagrama que realizaron Neugeubauer y Sachs de la tablilla mencionada, como puede observarse en la figura 25.

Figura 24: Tablilla YBC 72



(*da: Neugeubauer & Sachs*, Mathematical Cuneiform Texts, *American Oriental Society, Yale Babylonian Collection)*

Figura 25: Interpretación de la Tablilla YBC 72 [15]

Para tomar otros ejemplos, se mostrarán a continuación dos tablillas, denominada como VAT 6598 y BM 96957 ya que debe sus dos nomenclaturas por encontrarse partida pero que pertenecen a una sola. En el diagrama de la tabla se ha señalado con rojo los diagramas que pertenecen a los últimos tres problemas de un total de 25 problemas que no se encuentran, todos ellos, en forma completa. A diferencia de los casos anteriores, la figura es un rectángulo donde se dan los datos de la base y la altura o uno de ellos y la diagonal, pero en todos ellos implica un conocimiento del teorema de Pitágoras (como se lo conoce en la actualidad), pero esta tabla fue encontrada en Sipar y pertenece al año 1650 a.C. aproximadamente, época anterior al nacimiento de Pitágoras.

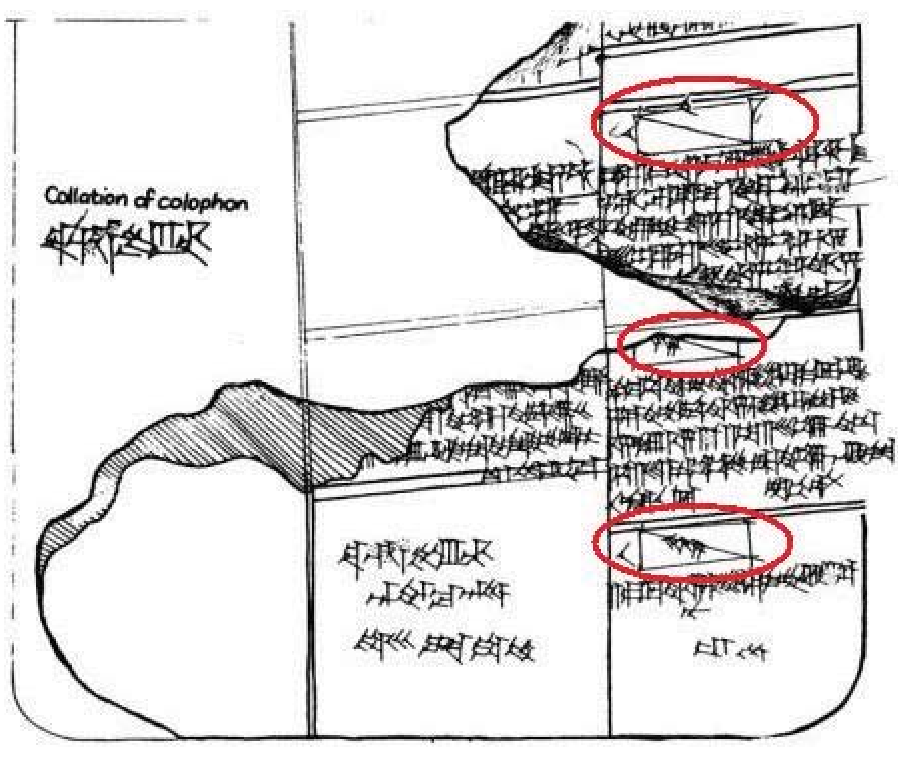


Figura 26: Tablillas VAT 6598 y BM 96957[16]

[15] Imagen tomada de www.fisicamente.net/FISICA/index-1540.htm, perteneciente a Da Pichot.
[16] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/Babilonia/VAT6598.htm

La última tablilla elegida se contrapone a las anteriores porque aunque posee figuras geométricas, estas no contienen inscripciones con datos del problema como ocurría en todos los casos anteriores.

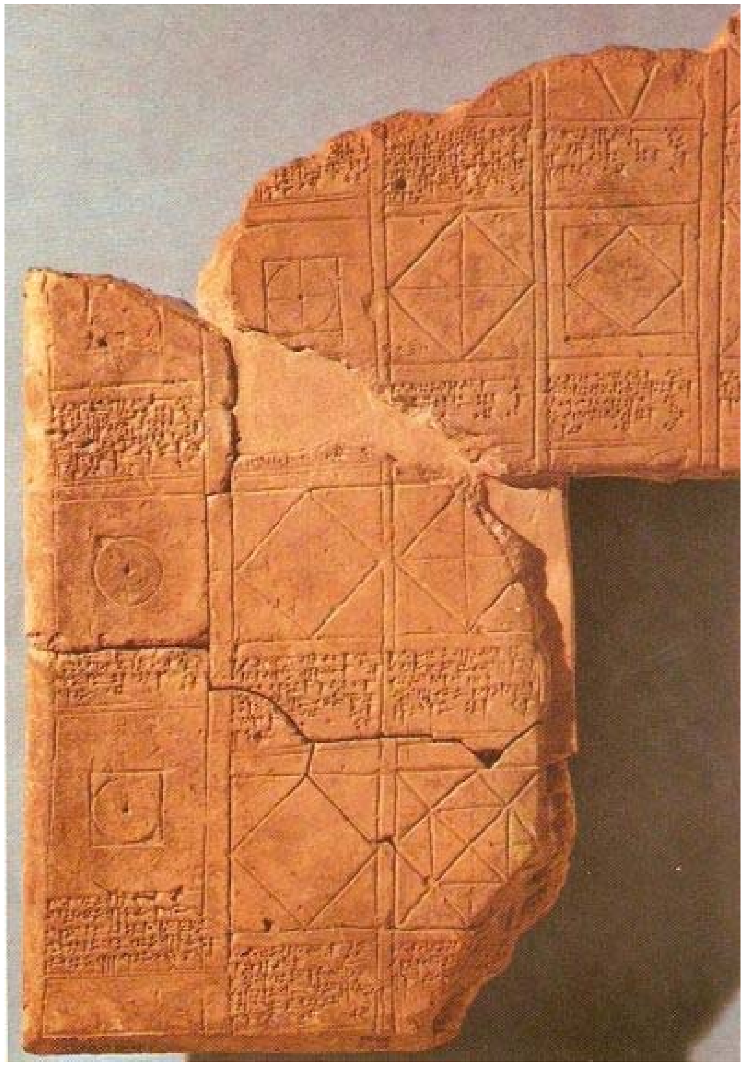


Figura 27: Tablilla que se encuentra en el Museo Británico, Londres[17]

En la tablilla de la figura 27, puede observarse una serie de figuras geométricas todas ellas formadas por un cuadrado en el cual se encuentra inscripto un círculo o un cuadrado.

[17] Imagen tomada de www.fisicamente.net/FISICA/index-1540.htm.

Como puede verse en todas las tablillas presentadas páginas arriba, las figuras realizadas presentan poca precisión, puede suponerse por lo rudimentario de escribir sobre barro húmedo que al secarse guardaría eras irregularidades por cientos de siglos, pero puede también suponerse que sólo servían de apoyo para la resolución de problemas. Con respecto a lo dicho, es importante señalar que estas tablillas, se estima, que tenían una utilidad didáctica y por tal motivo representaban los problemas cuya solución iban descubriendo. También, no puede dejarse de lado, la ambigüedad de algunos de los datos dados en la misma figura y esto es debido a que los pueblos que habitaron la Mesopotamia Asiática poseían un sistema de numeración en base sesenta, posicional pero sin un símbolo para el cero, por lo tanto, el signo correspondiente al número uno, era igual a 60 o cualquier otra potencia de 60. De tal modo, esta ambigüedad de su sistema de numeración también se ve reflejada en dichas figuras de análisis.

3. India

De la matemática india tomaremos las copias de los manuscritos de Bhaskara I (600-680) para hacer referencia a las figuras de análisis. Existen seis copias pertenecientes al siglo XIX aproximadamente ya que los originales se han perdido. Una de sus obras es Aryabhatiyabhasya que comprende un comentario escrito en prosa al trabajo de Aryabhata I al cual se le suma algunos ejemplos de aplicaciones a las reglas o más precisamente problemas (Keller, en Lagarto, 2008).

En esta obra, el autor presenta, además de definiciones matemáticas, diferentes problemas donde se pide calcular el área de figuras geométricas como triángulo, trapecio, círculo; el volumen del tetraedro y la esfera, entre otros problemas de aritmética.

Podrá notarse en la figura 28, 29, 30 y 31 que el manuscrito presenta figuras realizadas con gran falta de precisión, tratándose de un escrito geométrico. Es probable que estas figuras solo sirvieran de análisis para la interpretación del problema planteado y no pretendiera, el autor, hallar una solución geométrica.

Verso 8: Área de un trapecio y longitud de los segmentos interiores

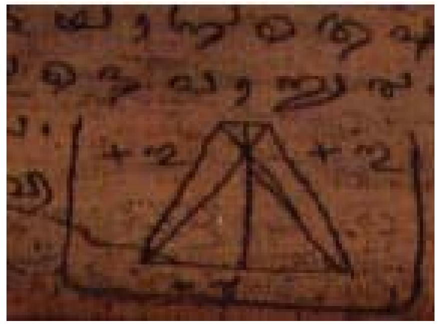


Figura 28: Representación de Bhaskara I: problema de las diagonales[18]

"Que la base [mayor] sea catorce, y la faz (base menor) cuatro unidades. Los dos lados deben medir trece, calcular las líneas que se intersecan (longitud de las diagonales) y el área" (Traducción hecha de Lagarto, 2008) (figura 28).

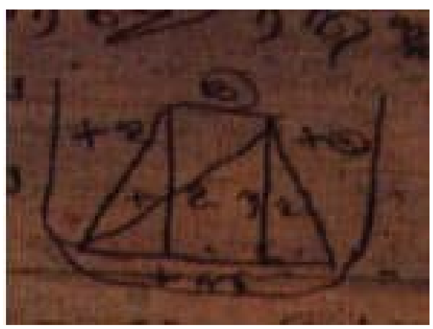


Figura 29: Representación de Bhaskara I: problema de la altura[19]

"Los números veinte aumentado en uno [21], diez y nueve, son mencionados, como, respectivamente, la base [mayor], los lados y la faz (base más pequeña). Calcular el campo (área) y las líneas que encalen por sí (altura)" (Traducción hecha de Lagarto, 2008) (figura 29).

[18] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/India/BhaskaraI1.htm#Verso_6
[19] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/India/BhaskaraI1.htm#Verso_6

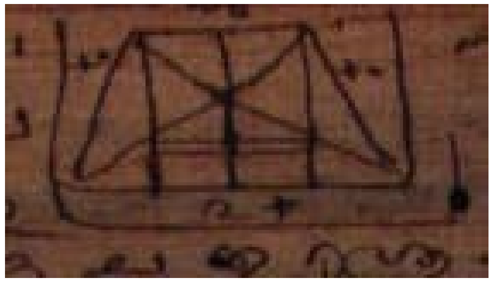


Figura 30: Representación de Bhaskara I: problema del área del trapecio[20]

"Treinta aumentado de tres es la base [mayor], es mencionado que los otros son diecisiete. ¿Cuál es la cantidad del campo (área) y de las dos líneas que encalen por sí (altura)?" (Traducción hecha de Lagarto, 2008) (figura 30).

Verso 22: El sólido hecho por una pila de cuadrados y los sólidos hechos por una pila de cubos

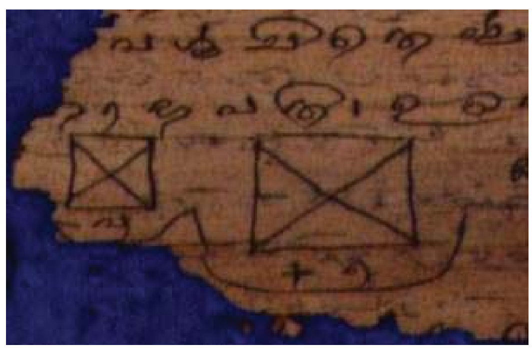


Figura 31: Problema de los números cuadrados, dibujo de Bhaskara I [21]

"Números cuadrados: Hay pilas cuadrangulares teniendo cada una siete, ocho y diecisiete capas. Las capas son los términos y son designados por cuadrados. Debe ser dicho el número de las unidades apiladas.
Solución: 140, 204 y 1785, respectivamente" (Traducción hecha de Lagarto, 2008) (figura 31).

[20] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/India/BhaskaraI1.htm#Verso_6
[21] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/India/bhaskaraI4.htm

Figura 32: Problema de la pila de cubos, dibujo de Bhaskara I[22]

"Pila de cubos: Hay pilas de sólidos (cubos), teniendo cinco, cuatro y nueve capas. Debe ser dicho, por orden el número de los ladrillos cúbicos partidos en unidades.
Solución: 225, 100 y 2025" (Traducción hecha de Lagarto, 2008) (figura 32).

Y para terminar esta elección que se ha hecho de los problemas teniendo en cuenta para ello, las imágenes que presenta el manuscrito, se ha elegido un tema que fue conocido por varias civilizaciones como es el Teorema de Pitágoras. A continuación, se presenta un diagrama de Bhaskara I, en el cual puede notarse que se trata de una figura de análisis pues los cuatro triángulos rectángulos que tienen sus lados incluidos en los lados del cuadrado original, deben ser congruentes, cosa que no lo son, al igual que los otros cuatro triángulos rectángulos del interior (ver figura 33).

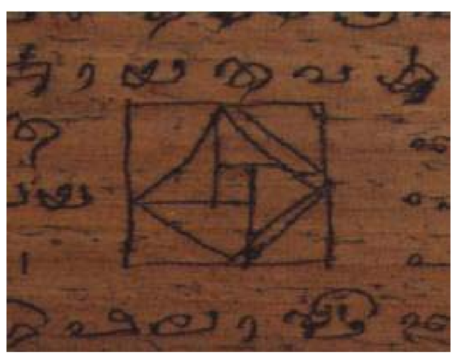


Figura 33: Bhaskara I: diagrama del Teorema de Pitágoras[23]

[22] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/India/bhaskaraI4.htm
[23] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/India/bhaskaraI.htm

Puede observarse en todos estos ejemplos que las figuras representadas, parecen estar realizadas a mano alzada, pues dan muestra de gran irregularidad en todas ellas, con lo cual puede suponerse que solo servía de guía para quien resolvía el problema.

Bhaskara I era un matemático perteneciente a una etapa de la matemática de la India, en donde ya se teorizaban los conceptos matemáticos, en cambio en una etapa anterior los problemas matemáticos eran de orden práctico. En este periodo anterior encontramos los Sulvasutras o “regla de las cuerdas”, definidos por Boyer (1999, p.270) como “un cuerpo de conocimientos” primitivos donde los problemas estaban asociados a la construcción de altares y templos y se resolvían con el tensado y la medición mediante la utilización de cuerdas, acciones similares que llevaban a cabo los pueblos de Egipto antiguo. Este periodo de los Sulvasutras, se refiere hasta el siglo II d.C.

Para esta cultura, las representaciones gráficas eran de gran importancia, pues lo gráfico era suficiente para demostrar un enunciado y determinar su valor de veracidad, ejemplo de ello lo tenemos en el libro Lilávati de Bhaskara, donde a partir de figuras demuestra el Teorema de Pitágoras (ver figura 40).

Esta importancia que le daban los matemáticos hindúes a lo visual, sería tramitado a los árabes y, es así, como se encuentra, en el libro de Al-Khawarizmi, un procedimiento geométrico, basado en lo visual, para hallar la solución de la ecuación $x^2 + 10x = 39$, que consiste en completar el cuadrado que representa el termino cuadrático, agregando por un lado, rectángulos sobre los lados de dicho cuadrado, con un ancho igual a 2,5, que equivalen la suma de los cuatro al término lineal (10x); además de los cuatro cuadrados de lado menor que se incorporan en los vértices del cuadrado original, cuya superficie total equivale a 25. es así que se obtiene un cuadrado de 64 unidades en total, por lo tanto el lado de cuadrado obtenido tiene un lado igual a 8 unidades, deducción que permite deducir correctamente que el primer cuadrado debe tener como lado 3 unidades, luego de restar dos veces 2,5. Este problema es resuelto gráficamente, como se observa en la figura 34, en el capítulo IV del libro de Al-Khowarizmi.

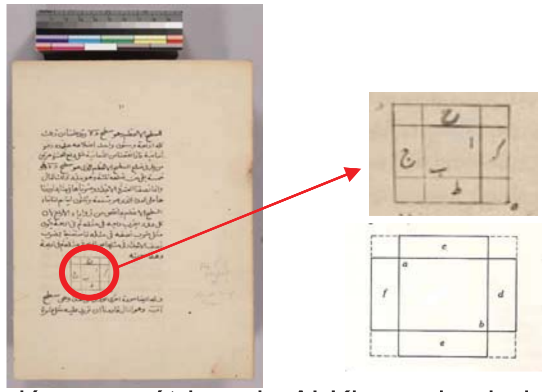


Figura 34: Resolución geométrica, de Al-Khowarizmi, de una ecuación cuadrática[24]

En comparación puede observarse en el manuscrito de Al-Khowarizmi la gran precisión en las figuras realizadas, detalle que no puede verse en los manuscritos anteriores de Bhaskara I.

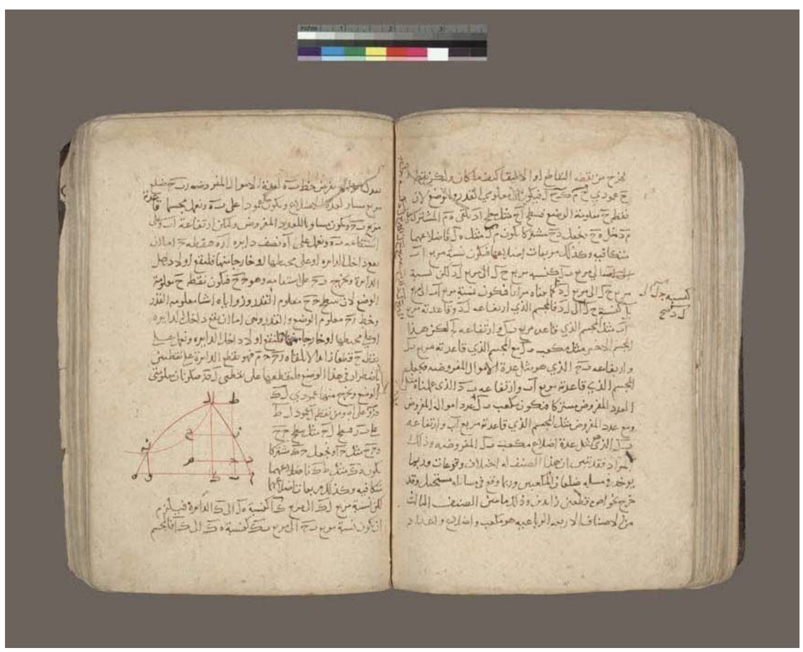


Figura 35: Ejemplo de otro gráfico tomado del libro de Al-Khowarizmi[25]

[24] Imagen tomada de http://mathdl.maa.org/mathDL/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2591&pf=1 y de (Boyer, 1999, p.300)

[25] Imagen tomada de http://mathdl.maa.org/mathDL/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2591&pf=1

La figura 35, es otro ejemplo tomado del libro “Kitab al-jabr wa al-muqabalah”, obra más importante del matemático árabe, Al-Khowarizmi, donde el álgebra va de la mano de la geometría, donde las construcciones tienen una gran precisión, por lo que es suficiente para validar la solución, mientras, como ya se dijo más arriba, en las obras de la India, las figuras que en ellas aparecen dan muestra de una gran irregularidad en su trazado, por lo que puede suponerse que solo servían de guía para el razonamiento, pero algo en común tienen ambas culturas y es la importancia que le daban ambos pueblos a lo visual.

4. China

Las fechas en que los manuscritos de la antigua China fueron escritos son difíciles de precisar pues durante la dinastía Tang (618–907 d.C.) se recopilan los conocimientos matemáticos en la denominada “Suanjing shi shu” (Los Diez Manuales Matemáticos). Las explicaciones y la presentación de problemas son parte de los diálogos que transcurren entre el maestro o sabio y su alumno, estas escrituras además de sus conocimientos matemáticos están teñidas de un carácter espiritual acorde a la filosofía oriental.

Vale aclarar, aunque no es el tema central de este trabajo, que las demostraciones de los sabios chinos eran de carácter visual y estaban basadas primordialmente en la disección geométrica de la figura y el posterior movimiento de sus partes y reubicación construyendo una figura nueva. Este tipo de demostración nada tenía que ver con las demostraciones hipotético – deductivas de los matemáticos griegos (Maza, 2002). Aunque el tema no sea las demostraciones, como se ha mencionado, este tipo de trabajo reflejará el empleo y la importancia que les daba esta civilización a las figuras de análisis, tal era su importancia que no hacía falta palabras para avalar las propiedades que se ponían en juego en el proceso de seccionar la figura y recomponerla de forma distinta a la dada.

A continuación se podrá ver un ejemplo de cómo estas figuras fueron empleadas para la demostración de lo que hoy es conocido bajo el nombre del Teorema de

Pitágoras, que en China sería denominado teorema del “gou gu” debido a que los términos “gou” y “gu” hacen referencia a la base del triángulo rectángulo y la altura respectivamente, mientras que la hipotenusa era denominada “el xian” (Maza, 2002).

Esta demostración pertenece a uno de los primeros escrito chinos de matemática y astronomía, llamado “Zhou bi suan ping” (o “Chou Pei Suan Ching”). El libro fue reescrito durante la dinastía Han (200 a.C. a 220 d.C.). Estos temas están desarrollados entre las líneas de un diálogo llevado a cabo entre un sabio, Shang Gao, y el duque de Zhou (Lagarto, 2008).

“Zhou Kung dirigiéndose a Shang Gao dice: ‘Oí decir que el grande perfecto (Shang Gao) es versado en el arte de la cuenta. ¿Me puedo aventurar a preguntarle cómo es que Fu-Hsi estableció accidentalmente los grados de la esfera celeste? No existen escalones a través de los cuales se pueda ascender a los cielos, y la tierra no es mensurable por una regla. Me gustaba de preguntarle ¿cuál es el origen de estos números?’

Shang Gao responde: ‘El arte de la cuenta provienen del círculo y del cuadrado. El círculo viene del cuadrado y el cuadrado viene del rectángulo (en el original, la escuadra del carpintero). El rectángulo viene de nueve un que son 81 [9 x 9 = 81, o sea de las propiedades de los números]. Por eso, cortamos el rectángulo [por la diagonal] y hacemos 3 de ancho y 4 de largo. La diagonal entre los dos vértices tendrá 5 de largo. Ahora después de diseñar un cuadrado en la diagonal, circunscribámoslo por mitades de rectángulos, como lo que quedó fuera, para formar un cuadrado. Así, los [cuatro] medios rectángulos de afuera de ancho 3, largo 4 y diagonal 5, juntos hacen dos rectángulos [de área 24]; entonces [cuando estos son sustraídos del cuadrado de área 49] lo que sobra tiene una área de 25. Este [proceso] es llamado ‘apilar los rectángulos’ (chi chu)" (Traducción hecha de Lagarto, 2008).

A lo cual Zhao reformulará de otro modo pretendiendo explicar la razón de dichas afirmaciones para lo cual incluirá una serie de diagramas (Maza, 2002).

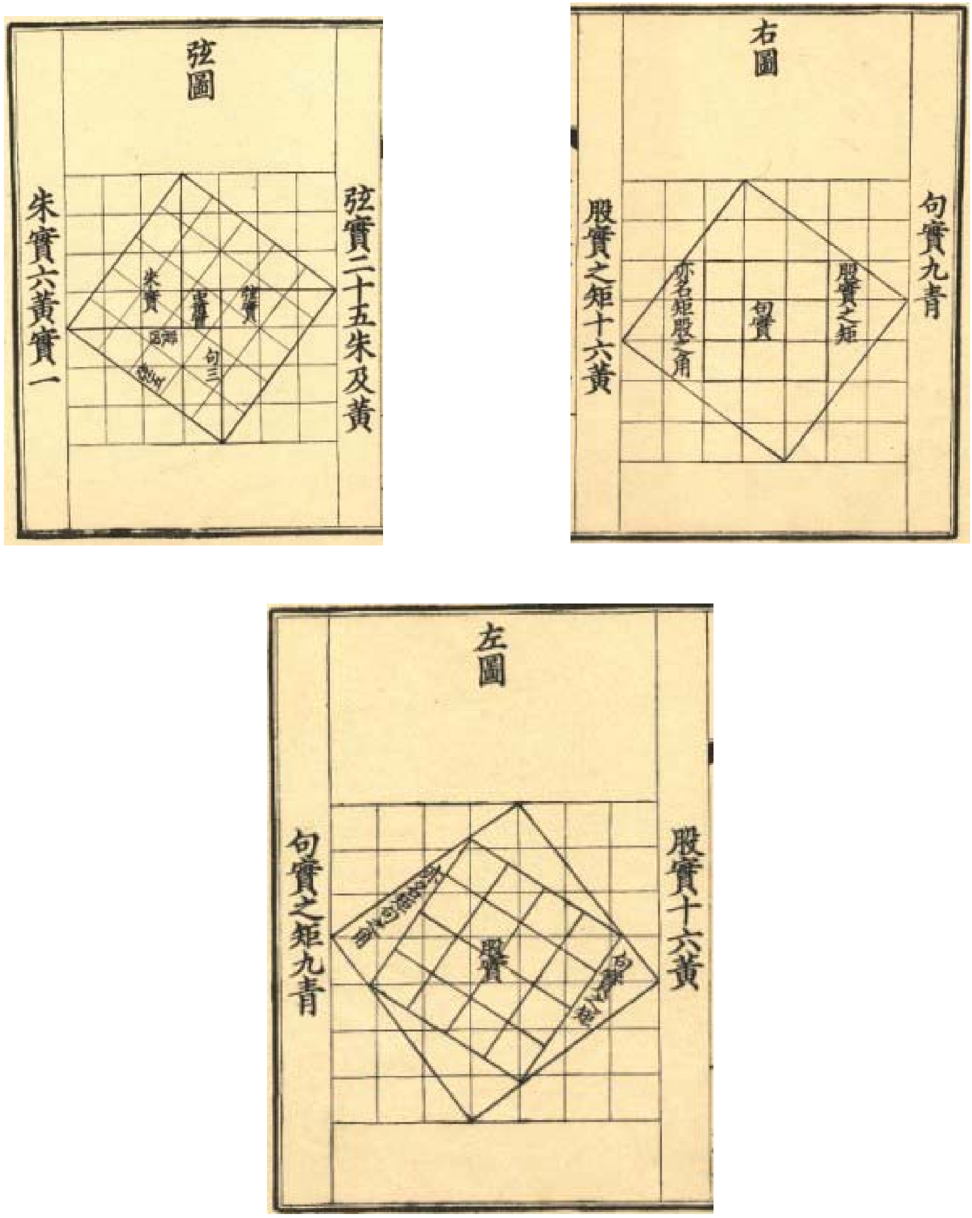


Figura 36: Demostración visual del Teorema del "gou gu"[26]

Para tomar una figura que no pertenece a una demostración como en el caso anterior, nos ocuparemos de otro texto de gran importancia en Oriente pues se utilizó como manual de enseñanza más allá de las fronteras de China por más de 1600 años. Este manuscrito es conocido como los "Nueve capítulos del arte de la Matemática" y su autor es desconocido aunque se cree que varios maestros dieron sus aportes en los 246 problemas que lo conforman junto a la explicación

[26] Imágenes tomadas de www.malhatlantica.pt/mathis/china/Chou.htm

del método empleado para resolverse o la respuesta. Por ejemplo, la figura que analizaremos corresponde al problema 13 que pertenece al Capítulo IX donde se estudian los triángulos rectángulos y la regla que se menciona es la siguiente:

> “Regla Gougu: Adiciona el cuadrado de gou y de gu, quita la raíz cuadrada [de la suma] dando la xian [hipotenusa]” (Traducido de Lagarto, 2008)[27].

> **Problema 13:** “Hay un bambú con 1 zhang de altura, se partió y la parte de la cima toca el suelo a 3 chih de la base del bambú. ¿A qué altura se quiebra? Solución: 4 +11/20 chi[28]” (Traducción hecha de Lagarto, 2008) (figura 37).

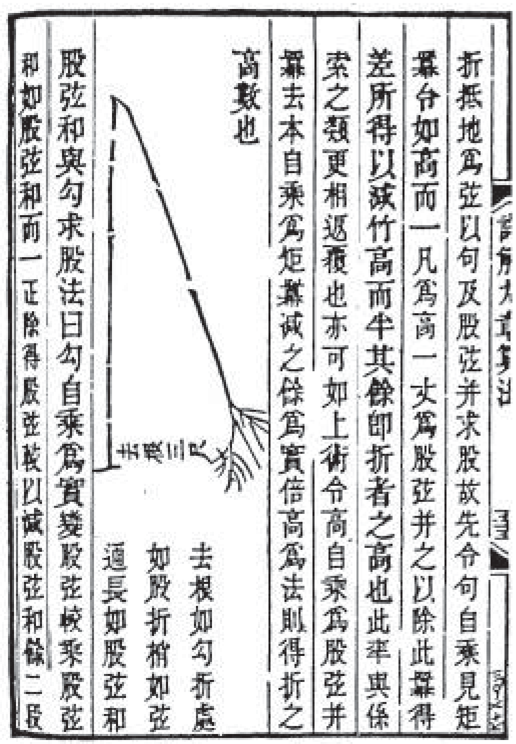


Figura 37: Ilustración de Yang Hui del problema 13 (1261)[29]

---

[27] “**Regra Gougu:** Adiciona o quadrado do gou e do gu, tira a raiz quadrada [da soma] dando a xian [hipotenusa].” (Lagarto, 2008)

[28] 1 *chih* = 10 *cun*, 1 zhang = 10 chih

[29] Imagen tomada de www.malhatlantica.pt/mathis/china/Nove9.htm#Problema%202

Como se ha dicho, los escritos aun siendo de matemática, están teñidos de sus ideas filosóficas, donde se respeta la sabiduría que transmiten los mayores o sabios. En esta cultura se puede notar la existencia de una mirada estática de la matemática ya que como se dijo esta cultura prioriza la contemplación del mundo que los rodea, por lo tanto desarrollaron una matemática en donde lo visual es fundamental para el desarrollo del razonamiento y es suficiente para validar una demostración, como es el caso del Teorema del “gou gu”, donde el procedimiento se basa en un procedimiento visual, como es agregar o mover.

5. Grecia

De la matemática desarrollada en Grecia, no se tomará únicamente, para este recorrido histórico, un documento que presente una figura como en los casos anteriores, sino un documento que trasmite en sus dichos el empleo y la utilidad de las mismas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Más precisamente, el documento que se analizará es una de las obras de Platón (427 a.C./428 a.C.–347 a.C.), mas no se puede dejar de mencionar que Platón poseía una posición idealista de los objetos matemático, razón por la cual algunos de sus comentarios fueron: “los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan” (Boyer, 1999, p.66).

A pesar de esta posición idealista, en la obra “Menón”, al leer varios fragmentos del diálogo llevado a cabo entre Sócrates y el esclavo o servidor (según la traducción de la obra) de Menón, Platón a través del personaje de Sócrates, hace uso de los dibujos para comprender estas propiedades ideales pertenecientes a los objetos matemáticos, en este caso preciso, el cuadrado.

En dicho diálogo, se encuentra un fragmento que comprende una serie de preguntas que Sócrates va realizando al servidor con la intención de guiarlo para que él pueda encontrar la solución a un problema geométrico que se le presenta con el fin mostrarle a Menón que no es lo mismo aprender que recordar. El problema señalado es construir un cuadrado que tenga como área el doble de la de un cuadrado conocido, que tiene como lado dos pies.

> "SÓC. — *(Al servidor.)* Dime entonces, muchacho, ¿conoces que una superficie cuadrada es una figura así? *(La dibuja.)*
>
> SERVIDOR. — Yo sí.
>
> SÓC. — ¿Es, pues, el cuadrado, una superficie que tiene todas estas líneas iguales, que son cuatro?
>
> SERVIDOR. — Perfectamente.
>
> (...)
>
> SÓC. — Si este lado fuera de dos pies y este otro también de dos, ¿cuántos pies tendría el todo[30]? Míralo así: si fuera por aquí de dos pies, y por allí de uno solo, ¿no sería la superficie de una vez dos pies[31]?
>
> SERVIDOR. — Sí.
>
> SÓC. — Pero puesto que es de dos pies también aquí, ¿qué otra cosa que dos veces dos resulta?
>
> SERVIDOR. — Así es" (Platón, 1999, p.6).

Se puede considerar que este dibujo se trata de una figura de análisis pues todas las preguntas que va realizando Sócrates están basadas en la observación de este dibujo, realizado por él, para que el servidor pudiera razonar sobre ella y hallar la respuesta correcta.

Luego de calcular el área del cuadrado dibujado, Sócrates presenta el problema de esta manera:

> "SÓC. — ¿Y podría haber otra superficie, el doble de ésta, pero con una figura similar, es decir, teniendo todas las líneas iguales como ésta?" (Platón, 1999, p.16).

[30] Los griegos no disponían de un término para referirse a pies cuadrados.
[31] Es decir, dos pies cuadrados.

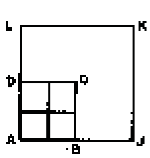
Las primeras respuestas dadas por el servidor de Menón, son en un principio incorrectas ya que el lado del cuadrado que tendrá como área el doble del área dada (ocho pies) responde que debe tener cuatro pies, es decir el doble del lado del cuadrado conocido. Sócrates le muestra que su respuesta es incorrecta con otra figura sobre la cual seguirán el análisis.

> "SÓC. — Dibujemos, pues, a partir de ella, cuatro iguales[32]. ¿No sería ésa la superficie de ocho pies que tú afirmas?
>
> (...)
>
> SÓC. —¿Cuántas veces entonces?
>
> SERVIDOR. — El cuádruple
>
> SÓC. — Entonces, de la línea doble, muchacho, no resulta una superficie doble sino cuádruple" (Platón, 1999, pp.17-18).

Luego al notar que no es correcta su respuesta y siendo guiado por las preguntas de Sócrates analizan que la respuesta buscada debe estar comprendida entre dos y cuatro por lo cual responde tres. Por último, el servidor ya no sabe qué responder pero son las preguntas sobre la figura del cuadrado dibujado originalmente, lo que lo guían a encontrar la respuesta correcta, a poder concluir que el lado del cuadrado que tiene área igual al doble del cuadrado dado en un principio debe tener como lado una medida igual a la diagonal del primer cuadrado.

Se puede ver a través de estos fragmentos la importancia que tiene una imagen, una figura de análisis, en la comprensión de un problema. Es cierto que sin las preguntas de Sócrates, tal vez, el servidor hubiese seguido pensando que su primera respuesta era la correcta, pero dichas preguntas no podían haber sido respondidas sin un dibujo que sirviera de soporte para el análisis de los interrogantes que se le planteaban al servidor.

---

32 

Luego sería su discípulo, Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), uno de los primeros pensadores en considerar a las imágenes mentales sosteniendo que “el pensamiento es imposible sin una imagen” (Aristóteles, citado por Plasencia Cruz, 2000, p.30).

Si se hace referencia a la geometría, no puede dejarse de lado, a quien sería reconocido como el padre de la geometría, Euclides, aunque sabemos que su función fue darle un carácter axiomático a los conocimientos desarrollados hasta el momento. Es sabido también, que su obra, los Elementos, fue un de las obras más importantes griegas por muchos siglos, influenciando en la matemática que luego se desarrollaría durante la Edad Media hasta nuestros días.

De la obra de Elementos se ha seleccionado una de las proporciones del libro I, en la cual se demuestra el Teorema de Pitágoras. La intención de dicha selección es poderla comparar con las otras demostraciones ya analizadas en otras culturas, y observar sus diferencias bien marcadas.

> Proposición I. 47: “En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto” (Euclides, 1991, 260).

Con respecto a la demostración, Boyer explica que “se consigue probando que el cuadrado sobre el lado AC es igual al doble del triángulo FAB o bien al doble del triángulo CAD, es decir, al rectángulo AL, y que el cuadrado sobre el lado BC es igual al doble del triángulo ABK o bien al doble del triángulo BCE, es decir, al rectángulo BL. Luego la suma de los cuadrados es igual a la suma de los rectángulos, es decir, al cuadrado sobre AB” (1999, p.149).

En las siguientes figuras puede observarse la representación que acompaña a dicha demostración en versiones correspondientes a distintos años.

Figura 38: Primera impresión de Elementos (Ratdolt, Venecia, 1482)[33]

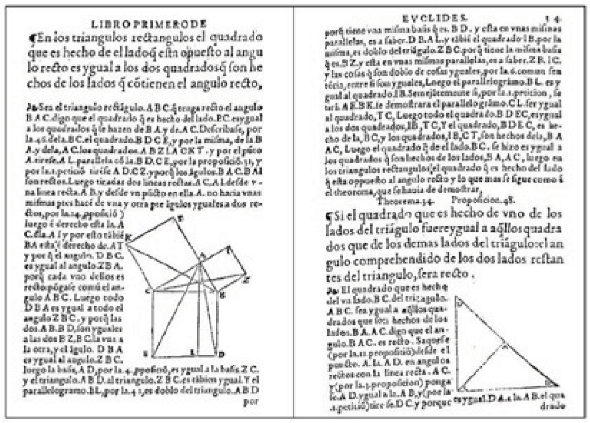


Figura 39: Primera impresión en castellano de Elementos (Camorano, Sevilla, 1576)[34]

Puede notarse que la figura sirve de guía no sólo al matemático sino también al lector para poder seguir la demostración. En las distintas versiones puede observarse que la figura existe pero lo curioso es la versión de Byrne de los primeros seis libros de los elementos de Euclides, versión correspondiente al año 1847. En esta extraña versión el autor reduce lo más posible el texto reemplazándolo por ilustraciones en color, dándole un carácter más didáctico a la obra de Euclides perdiendo la característica del idealismo platónico que posee la obra original.

[33] Imagen tomada de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/AsiLoHicieron/Euclides2/InprimaketaEuclides.asp

[34] Imagen tomada de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/AsiLoHicieron/Euclides2/InprimaketaEuclides.asp

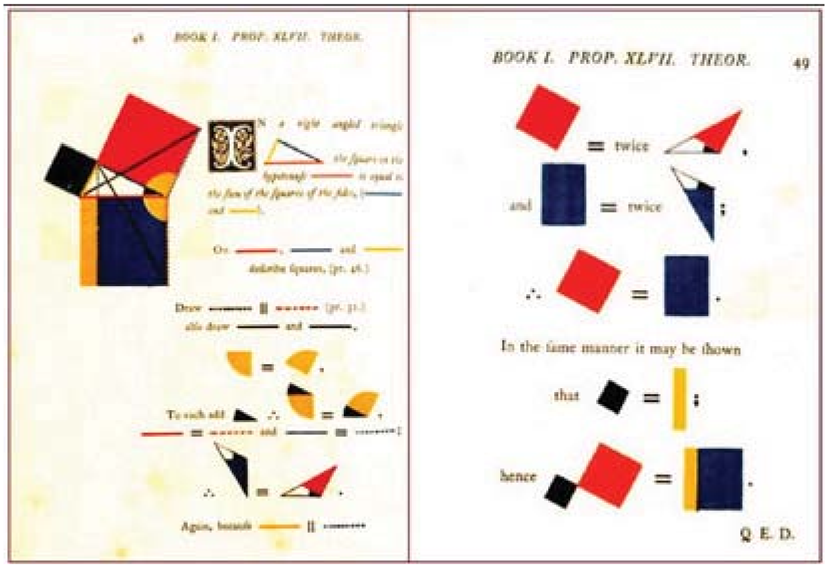


Figura 40: Demostración del Teorema de Pitágoras según Byrne (1847) [35]

En la obra de Byrne, se puede ver como lo visual reemplaza al razonamiento deductivo escrito, pero aún así en la obra original, siendo una transcripción realizada a mano alzada o en imprenta, en todas ellas puede observarse la presencia de figuras que acompaña a la demostración.

Es en Grecia donde la matemática se construye alrededor de la razón humana, característica que va a influir en el tipo de figuras realizadas. En este pueblo, las figuras de análisis son un apoyo para el razonar, como pudo observarse en los fragmentos tomados del libro de Platón, a diferencia de otros pueblos, como los árabes y chinos, donde lo visual era suficiente para dar como verdadero una afirmación. Debe resaltarse que si las figuras que acompañan los escritos griegos, como es el caso de Euclides, no estuviesen uno se vería obligado a realizar una representación de lo enunciado para poder interpretar la demostración llevada a cabo.

6. Edad Moderna

[35] Imagen tomada de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/AsiLoHicieron/Euclides2/InprimaketaEuclides.asp

Otro hallazgo, importante referido al uso de las figuras en la resolución de problemas, se encuentra en el tratado “Regulae ad Directionem ingenii” (“Reglas para la Dirección de la mente”, publicado post mortem en 1701, en “Obras Póstumas”) en donde Descartes (1596–1650) estableció las pautas de su método para la resolución de problemas. En este tratado se hace referencia a un total de veintiuna reglas donde el autor explica, al resto de la humanidad, los pasos a seguir para resolver un problema siguiendo un riguroso método que él describe detalladamente. Entre ellas existen algunas reglas que hacen referencia a las figuras, entendiendo por figura “el límite del objeto extenso”, como lo define el propio Descartes, durante la explicación de la regla XII (1983, p.207).

Más precisamente, las reglas que pueden relacionarse con las figuras de análisis son las que se transcriben a continuación:

> “REGLA XIV: La misma regla debe aplicarse a la extensión real de los cuerpos y propuesta por entero a la imaginación con ayuda de figuras puras y desnudas[36]: de esta manera, en efecto, será comprendida con mucho mayor distinción o claridad por el entendimiento.”
>
> (Descartes, 1983, p.229)

Aunque en ella, no se da el término preciso de “figuras de análisis” se puede conjeturar que estas figuras simples tienen la misma finalidad, ya que en la regla XII también definió, el matemático, que ha de llamar “cosas simples” a aquellas que son puramente intelectuales haciendo alusión a la idea de un término o las puramente materiales en las cuales incluye a las figuras, la extensión, entre otros (Descartes, 1983). Por lo tanto, estas “figuras simples” deben de ser lo más claras posibles para poder a partir de ellas hallar la solución al problema por ello es que las asociamos a nuestro tema de estudio, “las figuras de análisis”.

[36] o simples

> "REGLA XV: Es también útil el trazar de ordinario estas figuras y presentarlas a los sentidos externos, a fin de que sea más fácil por este medio mantener atento nuestro pensamiento."
>
> (Descartes, 1983, p.245)

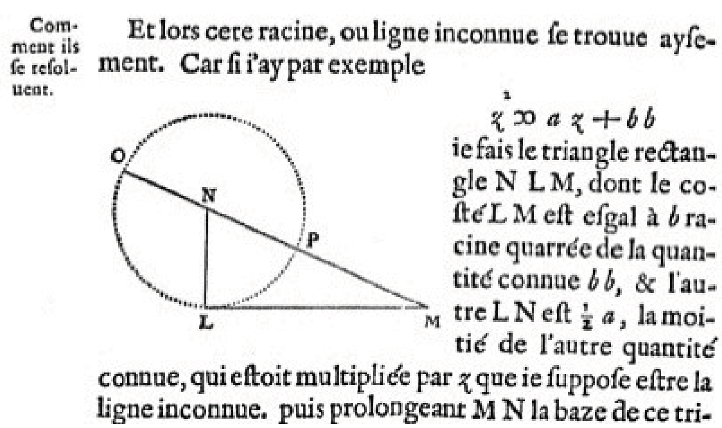
En la representación de las figuras simples, Descartes pone énfasis en la visualización de los datos que intervienen para poder resolver el problema, dándole un papel importante para lograr llegar a una correcta solución, pues como explica en la regla anterior, que es por medio a dichas figuras que uno puede formarse una idea, más continúa con una advertencia importante para la problemática que dio origen a este trabajo de investigación, las dificultades que presentan los alumnos de nivel terciario al elegir casos particulares en las figuras de análisis y a partir de ellas llegar a un resultado erróneo o incompleto. Volviendo a Descartes continúa diciendo: "de (las figuras) sus diversas e innumerables especies, emplearemos aquí solamente aquellas por cuyo medio se expresan más fácilmente las proporciones" (Descartes, 1983, p.242). Por eso, estas figuras deben ser tan simples que no dejen lugar a la existencia de suposiciones que acarrearían una deducción racional errónea.

> "REGLA XVI: Las cosas, empero, que no requieren una atención actual o inmediata de la inteligencia, aún cuando sean necesarias para la conclusión, vale más designarlas por las notaciones más breves que por medio de figuras enteras: de esta manera la memoria no podrá equivocarse y no obstante, durante este tiempo, el pensamiento no se distraerá en el intento de retenerlas, mientras se aplica a otras deducciones."
>
> (Descartes, 1983, p.247)

En esta regla, lo que marca Descartes no es sólo un camino a recorrer en el uso de las figuras, sino que detalla la forma de presentar las notaciones, según él más breves de llevar una idea sobre el papel, a utilizar en la resolución del problema, a saber: "nos serviremos de las letras a, b, c, etcétera, para expresar las magnitudes ya conocidas, y de las letras A, B, C, etcétera, para expresar las desconocidas" (Descartes, 1983, p.248). Así como también señala la forma de indicar la frecuencia o las relaciones que se presentan, con el fin no sólo de economizar palabras sino también de presentar a la vista toda la información útil con una lectura sencilla o simple. Puede notarse que la obra de Descartes es llevar registro de las normas que hacen a las figuras simples.

Una aclaración que es importante hacer es que, para Descartes lo visual era lo relacionado con el uso de la visión, lo que entraba por los ojos únicamente, mientras que lo intelectual, era lo relacionado con la razón. Ésta aclaración se debe a que para otros autores, vistos en el capítulo anterior, la visualización también se encuentra relacionada con un trabajo intelectual y no sólo con el uso de uno de nuestros sentidos, como es la vista.

Si se observa otras obras de Descartes, se puede comprobar cómo el autor lleva a la práctica éstas reglas para la resolución de problemas. En su obra, La Géométrie, publicada en 1637 como apéndice del Discurso del Método, el autor presenta la explicación de cómo resolver ciertas ecuaciones cuadráticas haciendo empleo para ello de figuras que guían la explicación, figuras que le sirven de análisis al lector para poder seguir dicha explicación. A continuación se presentan dos problemas a modo de ejemplo.


Com-ment ils ſe reſol-uent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſe-ment. Car ſi i'ay par exemple

$z^2 \infty az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce tri-

LIVRE PREMIER. 303

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

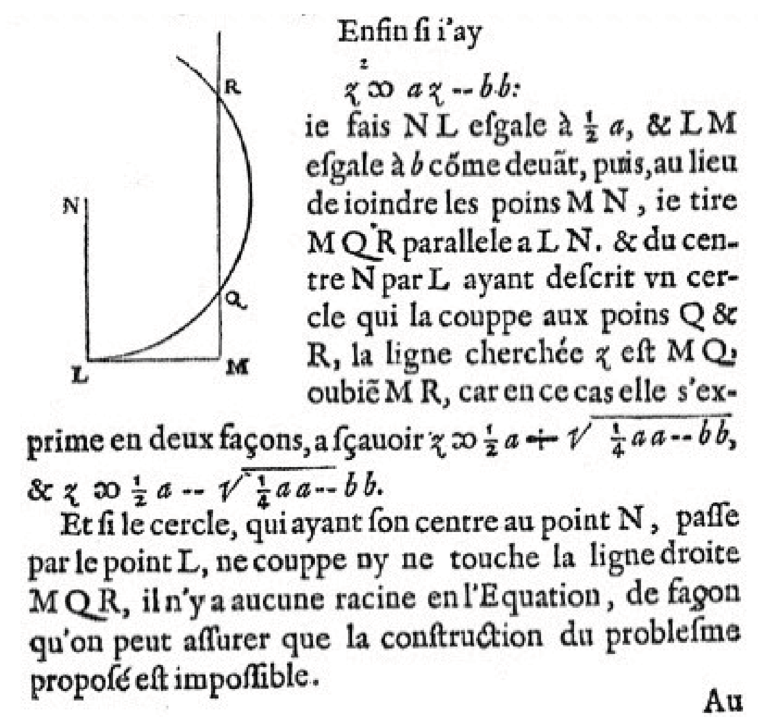
$$z \propto \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}.$$

Figura 41: Resolución geométrica de Descartes, de la ecuación $z^2 = az + b^2$[37]

Traducción del problema

> "Ya que, si tengo, por ejemplo. $z^2 = az + b^2$ construyo el triángulo rectángulo NLM, cuyo lado LM es igual a b (la raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2, y el otro lado LN es a/2, (es decir: la mitad de la otra cantidad conocida, que multiplica a z, que es la línea desconocida). Después, prolongando MN (la hipotenusa de este triángulo) hasta O, de forma que NO sea igual a NL, la línea total OM es la línea z que buscada. Y se expresa de la siguiente forma:
>
> $$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$ " (Descartes, 1997, p.176).

[37]Imagen tomada de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Topicos/AlgebraGeometrica/AlgebraGeometrica6.asp



Enfin ſi i'ay
$\overset{2}{z} \infty az -- bb$:
ie fais N L eſgale à $\frac{1}{2} a$, & L M eſgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant deſcrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z eſt M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a ſçauoir $z \infty \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa -- bb}$, & $z \infty \frac{1}{2} a -- \sqrt{\frac{1}{4} aa -- bb}$.

Et ſi le cercle, qui ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut aſſurer que la conſtruction du probleſme propoſé eſt impoſſible.

Au

Figura 42: Resolución geométrica de Descartes, de la ecuación $z^2 = az - b^2$. [38]

"Finalmente, si tengo: $z^2 = az - b^2$, hago NL igual a a/2, y LM igual a b, como antes. Después, en vez de unir los puntos M y N, trazo MQR paralelamente a LN y, tomando como centro N, trazo un círculo a partir de L, que corta a MQR en los puntos Q y R. La línea buscada, z, es MQ o MR, puesto que en este caso se expresa de dos formas, a saber: $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$ y $z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$

Y si el círculo trazado a partir de L, con centro en el punto N, no alcanza a cortar la línea MQR, entonces no hay raíz en la ecuación, de forma que puede afirmarse con seguridad que la construcción del problema propuesto es imposible" (Descartes, 1997, p.178).

Descartes describe el proceso realizado geométricamente sobre la figura para hallar el segmento que representa a la incógnita de la ecuación pero no realiza justificación de los resultados obtenidos, en ninguno de estos ejemplos.

[38] Imagen tomada de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Topicos/AlgebraGeometrica/AlgebraGeometrica7.asp

Por otro lado, si se hace referencia al siglo XVII, el cálculo “nace con un componente fundamentalmente visual y así se mantiene en su desarrollo a lo largo de los siglos siguientes, en interacción constante con problemas geométricos y físicos” (de Guzmán, 1996). Se encontró que "Lagrange ha expresado con énfasis su creencia en la importancia para el matemático de la facultad de observación; Gauss ha llamado a la matemática una ciencia del ojo..." (Silvestre, citado por de Guzmán, 1996).

En este siglo, la matemática se caracteriza por la síntesis de su conocimiento, y es en dicha síntesis donde los recursos geométricos fueron fundamentales para la construcción del conocimiento de la época, no sólo en la geometría analítica que nacería de la mano de Descartes, sino también con respecto al análisis, en sus interpretaciones geométricas.

Ejemplo de estas interpretaciones geométricas las podemos encontrar en las figuras 43 y 44, pertenecientes a L’Hospital y Agnesi, respectivamente, donde se intenta hacer estudio geométrica del máximo de una función. Se utiliza la palabra “intenta”, pues en el gráfico puede verse un segmento de longitud visible que esta representando un valor infinitesimal. Castañeda (2006), en su estudio sobre la formación de un discurso escolar, analiza en los textos de estos dos autores mencionados que tanto las gráficas como las explicaciones verbales o los ejemplos que se presentan en estas obras, permiten una organización y presentación de las ideas en “forma didáctica”. Es importante aclarar que para el siglo XVIII, no existían libros de textos escolares, sino había libros de difusión, motivo por el cuál es tan importante este aspecto didáctico del cual hace mención Castañeda. A continuación se verá un ejemplo más en detalle de cada uno de los autores mencionados:

“En el capítulo IV, (...) L’Hospital explica el uso de las segundas diferencias, para hallar los puntos de inflexión en una curva. Llama diferencia de diferencia o segunda diferencia a la porción infinitamente pequeña en la que aumenta o disminuye continuamente la diferencia de una cantidad variable, siguiendo con esta lógica, se hace posible hallar las diferencias de orden superior” (Castañeda, 2004, p.135), como Castañeda explica L’Hospital hace referencia a valores infinitamente pequeños pero en sus gráficos los segmentos tienen una longitud destacable, lo que permite ser percibidos por nuestros órganos de la visión, cosa que no podría ocurrir si se representará lo dicho, pues cómo representar rigurosamente algo que tiende a cero. Esto permite afirmar que dichas gráficas no son otra cosa que figuras de análisis, donde se representa una idea que el lector puede seguir, aun no representando fielmente la idea que se expresa.

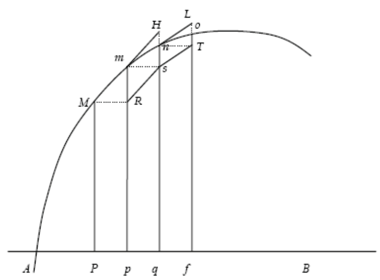


Figura 43: Corolario I, de L’Hospital [39]

Si se analiza la obra de Agnesi, que data del año 1748, puede encontrarse el siguiente fragmento:

> “Sia la curva Am, il di cui asse o diametro AP; e si prenda nella AP prodotta una porzione infinitesima, sarà essa la differenza, o sia la flussione dell’assissa AP, e si potranno considerare per eguali la due AP, Ap, non essedovi proporzione tra la quantità finita AP, e la porzione infinitesima Pp.” (citado en Castañeda, 2004, p.148).

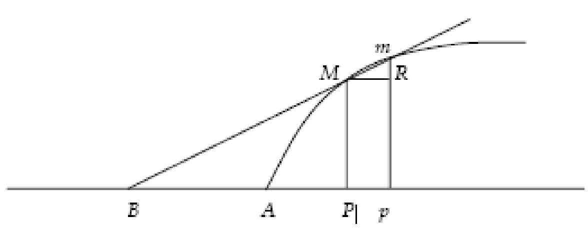


Figura 44: Interpretación geométrica de Agnesi [40]

[39] Imagen tomada de (Castañeda, 2004, p.135)
[40] Imagen tomada de (Castañeda, 2004, p.148)

Puede verse en la figura 44, que el segmento que tiene por extremos los puntos P y p, está representando una porción infinitesimal de la recta BA, idea que se arrastra hasta nuestros días pues puede verse en los libros de Cálculo actuales, gráficos similares aun habiendo pasado varios siglos desde las obras de estos dos matemáticos. Como ya se ha dicho, estos gráficos son figuras de análisis, que expresan la idea de infinitesimal y mediante las cuales el autor puede transmitir una idea que de no existir sería difícil la reconstrucción mental de la idea por parte del lector.
Los gráficos, verdaderas figura de análisis, son un aspecto importante para la interpretación para quien lee sus razonamientos, permitiendo guiar el propio razonamiento del lector para una correcta interpretación. Es así como el análisis nace y crece de la mano de la geometría, a partir de las figuras de análisis que permiten representar diversos conceptos del análisis, como es el máximo o punto de inflexión de una función. Aspecto didáctico, como se ha dicho, que se sigue existiendo en los libros de textos de hoy en día, al respecto Crespo Crespo afirma: “actualmente se reconoce que el lenguaje gráfico desempeña un papel fundamental en la comprensión de los conceptos y esto se pone en evidencia en la presencia abundante de gráficos y dibujos en textos de ediciones actuales” (2005, p.73).

7. Edad Contemporánea

Henri Poincaré (1854 – 1912) en su libro Fundamentos de la Geometría dedica todo un apartado al empleo de las figuras, en él explica las razones de porque no se puede estudiar geometría sin figuras y se debe a que antes de estudiar Geometría uno ya ha tenido experiencias que implican las nociones de espacio sensible. No se estudian las figuras sino que éstas sirven de instrumento para estudiar la geometría.

Además, Poincaré agrega:

> Hemos adquirido la facultad de *representarnos* las experiencias geométricas familiares, sin ser obligados a haber recurrido a sus

> reproducciones materiales; pero todavía no hemos deducido conclusiones.
> ¿Cómo lo haremos? Ante de enunciar la ley, representaremos la experiencia en cuestión de una manera perceptible, despojándola también, lo más completamente posible, de todas las circunstancias accesorias o perturbadoras, exactamente como un físico elimina en sus experiencias las fuentes de errores sistemáticos. Aquí es donde las figuras son necesarias, pero ellas son un instrumento apenas menos grosero que la *tiza* que sirve para trazarlas, y lo mismo que los objetos materiales no pueden ser representados en el espacio geométrico que constituye el objeto de nuestros estudios, no podemos reprensárnoslos sino en el espacio sensible.
>
> (Poincaré, 1948, pp.92-93)

Poincaré se refiere a despojar la representación de todas aquellas circunstancias secundarias, lo mismo que Descartes, siglos atrás, reflejaba en su regla XIV al referirse a figuras desnudas o simples. Ambos pensadores dan importancia en la resolución de problemas a la utilización de figuras que sirvan de instrumento para razonar sobre ellas.
Y para ir finalizando, este incompleto recorrido histórico sobre la utilización de figuras de análisis por parte de los matemáticos, se harán propias las palabras de Rey Pastor (1888–1962): "Hasta los matemáticos que mayor don de abstracción poseen, como el mismo Hilbert, confiesan que, sin la preciosa guía de la intuición geométrica, sin las figuras, no lograrían demostrar los teoremas algo complicados sobre continuidad de funciones, sobre puntos de condensación, etc. Con palabras del mismo Hilbert 'los signos y fórmulas de la Aritmética son figuras escritas, y las figuras geométricas son fórmulas dibujadas; ningún matemático podría prescindir de estas fórmulas dibujadas, como no podría realizar sus cálculos sin paréntesis ni signos operativos'" (Rey Pastor, 1916, p.18).

Pero más allá de la importancia que se ha dado a las figuras de análisis en distintas culturas como se ha visto en este recorrido histórico, no puede dejar de mencionarse que esto no ocurrió siempre, pues hubo matemáticos que se destacaron por escribir libros de geometría que no poseían ni un solo dibujo entre sus páginas. Ejemplo de ello, se puede encontrar en el libro "Mécanique analytique" cuyo autor fue Lagrange y en su prólogo puede leerse "me siento halagado por el hecho de que las soluciones son puramente analíticas y pueden entenderse incluso sin figuras'. Y en cumplimiento de su promesa no hay una sola figura a lo largo de toda la obra" (Boyer, 1999, p.593).

A partir de este último comentario, puede afirmarse que las figuras de análisis no fueron siempre bien vistas, aunque hoy en día es casi impensable un libro de geometría euclidiana sin ningún dibujo en sus páginas. Por otro lado es importante destacar que las figuras de análisis han tenido distintas funciones a través de la historia, pues en ciertos tiempos, era suficiente su presencia para demostrar un enunciado mediante que en otros solo acompañaban una demostración de carácter deductivo, guiando la interpretación.

8. En resumen

Este recorrido histórico tiene como fin presentar distintos escenarios socioculturales en donde la matemática se desarrolló, estas ideas "por su carácter sociocultural, son el reflejo y producto de un determinado escenario" (Crespo Crespo, 2007, p.68).

La geometría desarrollada en Egipto, como así también en la Mesopotamia Asiática, tiene un carácter utilitario pues era empleada como herramienta para distintos fines, limitándose a ser una aritmética aplicada, pues se presenta en algunos casos fórmulas para el cálculo de determinado volumen por ejemplo. Pero así también puede observarse la presencia de figuras que ejemplifiquen la situación planteada en el enunciado del problema y sobre la cual se basará el cálculo aritmético. En sus documentos que se han codificado pertenecientes a estas dos culturas, ya sea papiros o tabillas respectivamente, responden a este aspecto utilitario, pues los problemas que pueden leerse son por ejemplo:

- "Problemas que piden efectuar el reparto de una, dos, seis, siete, ocho o nueve hogazas de pan entre diez hombres" en los primeros seis problemas del papiro de Ahmes (Boyer, 1999, p.35).
- En el problema 10 del papiro de Moscú, se pide calcular "el área de la superficie de lo que parece ser una cesta de diámetro cuatro y medio" (Boyer, 1999, p.42).

Por lo tanto, estas figuras de análisis hacen a la práctica, como herramientas de trabajo, mientras que en el caso de la geometría griega toma su "aspecto filosófico como mejor modelo para conocer e interpretar la naturaleza" según las palabras de Santaló (1962, p.5). Desde la matemática y más precisamente la geometría, puede verse el surgimiento del método deductivo entre los matemáticos griegos, de un razonamiento lógico que en otras culturas no se desarrolló.

Es interesante notar que aún siendo empleada la geometría para un fin práctico o con un fin en sí misma, en ambos casos puede encontrarse el empleo de figuras de análisis en la resolución de problemas (empíricos o teóricos) aunque estos dos aspectos pueden influir en el tipo de figura a realizar. En el caso de un problema de orden práctico, puede ocurrir que la figura de análisis esté asociada a datos dados en el problema, que no hacen a los conceptos matemáticos que se ponen en juego, ejemplo de ello es la figura 37, donde en el problema de origen chino, se hace mención al quiebre de un bambú y en la figura dada se ha dibujado el tallo del bambú, en lugar de dibujar un triángulo que represente la situación presentada. En cambio, en los problemas presentados por Bhaskara están asociados con una geometría teórica y no práctica, por lo tanto las figuras no responden a objetos concretos como en el ejemplo del bambú, sino que son representaciones de los entes geométricos como en el caso de los trapecios y cuadrados. Para este pueblo lo visual tenía un papel importante al momento de fundamentar un enunciado geométrico, ejemplo de esta afirmación es la demostración presentada por Bhaskara en su libro Lilávati, del teorema, hoy conocido como Teorema de Pitágoras, en donde "la demostración consiste en una invitación al lector para mirar, reflexionar y extraer la conclusión correspondiente, mediante la presentación de los gráficos que se presentan a continuación y un texto que dice simplemente: '¡Mira!'" (Crespo Crespo, 2007, p.76).

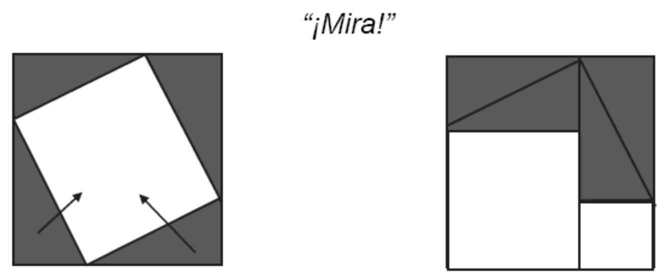


Figura 45: Demostración visual del Teorema de Pitágoras [41]

Demostración que puede asociarse a la presentada en la figura 36, en donde se demuestra, también visualmente, el Teorema de Pitágoras, conocido por la civilización china bajo el nombre del Teorema del "gou gu". Al respecto Crespo Crespo afirma que "la geometría china parece tener su origen en la tradición del estiramiento de cuerdas en la agrimensura. El teorema Gou Gu es utilizado en este área y su demostración china se basa en la manipulación directa de elementos físicos o visibles" (2007, p.80).

Siguiendo el recorrido histórico que se realizó al inicio de este capítulo, el salto efectuado es hasta la Edad Moderna, momento en que nace la geometría analítica, como la fusión entre la geometría clásica y el álgebra, de la mano de René Descartes. Pero no fue el único matemático de la época al cual lo visual, como puede observarse en sus reglas de razonamiento, jugaría un papel importante para el razonamiento matemático. "El uso de diagramas fue aceptado durante el siglo XVIII, por ejemplo, Newton y Euler utilizaban diagramas y gráficos en todas sus presentaciones" (de Guzmán, citado en Blanco, 2009, p.60).

Volviendo a las ideas de Descartes puede concluirse que para este matemático el proceso de visualización tenía un papel primordial, pues no sólo aparece la sugerencia de crear imágenes simples a la hora de resolver un problema, sino que puede encontrarse en sus trabajos figuras que acompañan la demostración. Pero

[41] Imagen tomada de (Crespo Crespo, 2007, p.76)

aún más importante es la presentación que realiza de los cálculos numéricos como son las operaciones de adición, sustracción, empleando métodos geométricos. Es decir, aquí la figura construida, tendrá el mismo valor que un algoritmo, donde el resultado no está dado por un número sino por la longitud de un segmento, resultado a partir de una construcción geométrica. Al respecto Boyer describe la obra de Descartes como "la traducción de las operaciones algebraicas al lenguaje de la geometría. Precisamente el primer capítulo de La Géométrie se titula 'Cómo se relacionan los cálculos de la aritmética con las operaciones de la geometría', mientras que el segundo trata de 'Cómo pueden efectuarse geométricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas'" (1999, p.427).

A modo de ejemplo se presenta en la figura 46, el método para extraer la raíz cuadrada: "si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, le añado FG (que es la unidad) a continuación, y, dividiendo FH en dos partes iguales, con centro en K (que es el punto medio), trazo el círculo FIH y luego la perpendicular por G hasta siendo GI la raíz buscada" (Descartes, 1997, p.168).

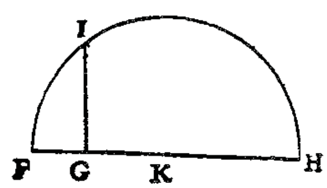


Figura 46: Método geométrico para extraer la raíz cuadrada[42]

Tras el análisis del empleo de figuras de análisis en distintos escenarios académicos, se realizará en el siguiente capítulo qué ocurre con dichas figuras dentro del aula, para luego presentar ejemplos actuales del uso de figuras en escenarios no académicos.

[42] Imagen tomada de (Descartes, 1997, p.168)

Capítulo 4

Las figuras de análisis en la resolución de problemas

"Resolver problemas es un motor esencial de la educación matemática"
(Alsina, 2007, p.13)

Las figuras de análisis como se ha dicho son herramientas que se utilizan al resolver un problema por lo tanto en este capítulo se abordará el tema definiendo, en principio, qué es un problema y los procedimientos requeridos para hallar la resolución del mismo, según distintos modelos, para luego profundizar que rol cumplen las figuras de análisis y cuál es su importancia en este proceso de resolución de problemas.

El detalle de cada modelo permitirá analizar casos puntuales de diferentes alumnos quienes utilizaron figuras de análisis a la hora de resolver un problema de geometría, el siguiente detalle se llevará a cabo en el presente capítulo.

1. Definición del término "problema"

En la bibliografía puede encontrarse diferentes definiciones sobre el término "problema" pero todas en su mayoría tienen elementos en común: el sujeto que se enfrenta al problema (de cualquier índole, no tiene porque ser expresamente de matemática); no conoce la vía de solución y su actitud frente al problema es de carácter activo. A continuación, se transcriben algunas definiciones de diferentes autores y desde variados campos del conocimiento, pero para comenzar se analizará la palabra problema. El vocablo "problema" proviene del griego y se encuentra compuesta por "pro" que significa "delante" y una segunda parte, "blema", que significa "acción de arrojar" (Palacios, Álvarez y Argerami, 1995, p.39), por lo tanto puede decirse que problema equivale al hecho de arrojar o lanzar adelante. Pero ¿qué es lo que se lanza? y ¿qué representa esa dirección hacia adelante?, son los dos interrogantes que surgen ante esta definición. Las palabras de Nieto aclararan dichas dudas: “Un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada” (2004, p.1).

Según otros autores, un problema:

- ✓ Es “buscar de forma conciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata” (Polya, 1965, citado por Rueda y García, 2005, p.259). Polya también completa la idea afirmando que “se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados” (Sigarreta y Laborde, 2004, p.16).
- ✓ “puede pensarse como una discrepancia entre un estado inicial y un estado final que constituye la meta a alcanzar” (Newell y Simon, 1972, citados por Rueda y García, 2005, p.259).
- ✓ “es una tarea que plantea a un individuo la necesidad de hallar una solución, sin contar con un procedimiento directamente accesible que la garantice” (Lester, 1983, citado por Rocha, Almeida, y Ortiz Rodríguez, 2006, p.57).
- ✓ “es una realidad incompleta, una pregunta que demanda una respuesta, una pulsión, una incitación a salir de un estado de desequilibrio a otro de equilibrio. (...) un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata” (Parra, 1990, citado por Rueda y García, 2005, p.259).

- ✓ “plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación” (Parra, 2001, p.14).
- ✓ “es en algún sentido una situación nueva o diferente de lo ya aprendido” (Pozo y Postigo, 1993, citados por Rocha, Almeida, y Ortiz Rodríguez, 2006, p.57).

Desde la visión de un matemático, son las palabras de Hilbert, las que establecen que “por medio de la solución de problemas que se templa la fuerza del investigador, descubriendo nuevos métodos y nuevos enfoques y ganando un horizonte más vasto y más libre” (citado en Tarifa y González, 2000, p.5).

En el caso de los problemas matemáticos, puede utilizarse diferentes tipos de lenguajes para expresar los datos o incógnitas, como son: el leguaje verbal, el simbólico o el gráfico. No siempre puede darse esta última forma de expresión pero puede ser realizado por quien se expone al problema. Al respecto, Doniez establece tres condiciones sobre la realización de un “escrito esquemático” que pueden caracterizar también a las figuras de análisis:

> “a) Se materializa a través de varias simbolizaciones (signos, literales, dibujos, gráficos, tablas, esquemas, etc.).
>
> b) En ella se consignan de manera clara y precisa las condiciones y los requerimientos del problema; para cada condición se señalan los objetos que la integran y sus características.
>
> c) Se consigna aquello que es necesario para la solución; todo lo que es superfluo o que no es esencial se desecha” (Doniez, 2000b, p.6).

Luego continúa describiendo las particularidades que tienen los dibujos o croquis empleados en esta escritura esquemática: debe ser un esbozo esquemático del objeto principal del problema con el cual se debe corresponder al enunciado aunque no es necesario respetar una escala rigurosa. Al referirse a esta correspondencia, el autor presenta como ejemplo que si el problema hace referencia a un trapecio el dibujo no puede ser el de un trapecio isósceles, errores que puede observarse en los alumnos. La pregunta que surge es porqué no realizar un trapecio isósceles si el enunciado del problema hace referencia a un trapecio cualquiera, el inconveniente de realizar una figura particular con propiedades que no cumple cualquier trapecio, podría derivar a soluciones erradas o incompletas, pues la solución solo estaría atendiendo a un subconjunto del conjunto formado por todos los trapecios. Para dar un ejemplo, el alumno al dibujar un trapecio isósceles podría tomar en su resolución que los ángulos de las bases son congruentes o los lados no paralelos tienen longitudes iguales pero dichas propiedades no se cumplen en el caso de ser un trapecio escaleno, con lo cual la resolución basada en un dibujo particular no es correcta. Aunque estas características parecen en una primera lectura obvias, para los alumnos no lo son tan así, como se marcó en el ejemplo y como se verá en algunos ejemplos a continuación, en este mismo capítulo, los alumnos dibujan y trabajan sobre casos particulares cuando se refieren a conclusiones generales, llegando a soluciones incorrectas o parciales.

Pero antes de pasar a los casos particulares, se profundizará el proceso de resolver un problema.

1.1. Problema vs. Ejercicio

En escenarios escolar, muchas veces se hace mención a actividades que refieren a problemas y ejercicios sin distinguir entre ellos y dándolos por casi sinónimos pero bajo un análisis detallado se puede observar que son términos muy distintos y se diferencian en tres elementos que ambos poseen: situación de inicio, vía de solución y situación final. Llivina (citado por Tarifa y González, 2000, p.6) da una clasificación de los ejercicios según el conocimiento o desconocimiento de las combinaciones que se pueden realizar partiendo de estos tres elementos. Clasificación que va desde el ejercicio completamente resuelto en el caso de conocerse los tres componentes hasta la opción opuesta, en donde se desconocen en su totalidad los tres elementos, en este último caso es cuando se trata de una “situación problemática”, siendo que todos los seis puntos intermedios de las combinaciones conforman distintos tipos de ejercicios. Para recorrer las ocho opciones se puede observar el cuadro 1, en donde se detalla si los tres elementos: situación inicial, vía de solución y la situación final son conocidos o no (Lliavina, citado por Tarifa y González, 2000, pp.6-7).

	Situación inicial	**Vía de solución**	**Situación final**
Ejercicio completamente conocido	Conocido	Conocido	Conocido
Ejercicio de determinación de carácter algorítmico	Conocido	Conocido	Desconocido
Ejercicio de demostración o de construcción	Conocido	Desconocido	Conocido
Ejercicio de deducción o problema de determinación	Conocido	Desconocido	Desconocido
Ejercicio inverso de tipo 2	Desconocido	Conocido	Conocido
Ejercicio relacionado con el trabajo hacia atrás o ejercicio inverso tipo 4	Desconocido	Desconocido	Conocido
Exigencia de formar un ejercicio	Desconocido	Conocido	Desconocido
Situación problemática	Desconocido	Desconocido	Desconocido

Cuadro 1: Distintos tipos de ejercicios

En el siguiente cuadro se comparan las diferencias que existen entre los problemas y los ejercicios, elaborada tras la lectura de variada literatura referida al tema (Rocha, Almeida y Ortiz, 2006; Echnique, 2006; Díaz, 2000).

PROBLEMA	EJERCICIO
Se desconoce la forma o el camino para alcanzar el objetivo.	Se usan destrezas o técnicas sobreentendidas (son rutinas ya aprendidas).
Las reglas suponen un reto.	Las reglas se conocen a priori.

Requiere del uso de conceptos, principios y procedimientos.	Son situaciones o tareas ya conocidas.
Requiere del uso de estrategias, de técnicas ya conocidas.	Se resuelve con los medios habituales.
Puede consumir mucho tiempo.	Generalmente requiere poco tiempo.
Puede ser difícil.	Puede ser laborioso pero raramente difícil.
El individuo se implica emocionalmente en la resolución.	No existen lazos especiales entre el ejercicio y la persona que lo resuelve.
Exige esfuerzo mental, imaginación y creatividad.	Se reduce a organizar una serie de conocimientos y procedimientos ya aprendidos, generalmente hace poco tiempo.
Admite varias vías de aproximación y posiblemente varias soluciones.	Está fuertemente relacionado con un algoritmo o rutina y por lo general tiene una única solución.
Busca una reconceptualización de los conocimientos.	Busca la adquisición de una destreza. Son actividades de entrenamiento.
Su evaluación se centra en el proceso utilizado, entonces se requiere criterios específicos.	Se sabe claramente de qué elementos parte y que técnicas se deben utilizar para llegar a la meta. El profesor y muchas veces el alumno pueden evaluar fácilmente si se ha alcanzado la meta.
Suelen ser escasos en los libros de textos.	Son muy numerosos en los libros de textos.

Cuadro 2: Comparación entre problema y ejercicio

1.2. Clasificación de problemas

Como se ha dicho una actividad es un problema, si y sólo si, la vía de solución es desconocida para el sujeto que se enfrenta al problema. Polya clasifica a los problemas en cuatro grupos según su propósito:

"- **Problemas por resolver** , cuyo propósito es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema.

- **Problemas por demostración** , aquí el propósito es mostrar, de un modo concluyente, la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada'.
- **Problema de rutina** , es todo aquel problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en el lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de algún viejo ejemplo.
- **Problemas prácticos** o de aplicación a la práctica" (Tarifa y González, 2000, p.7).

A pesar de esta clasificación propuesta por Polya, puede observarse que en todos ellos es posible la creación de una figura de análisis para resolver sin importar cual es la clase de problema. En la práctica, cuando un individuo se enfrenta a una situación problemática trata de encontrar una solución encontrando cada uno sus propias herramientas como puede considerarse a las figuras de análisis, y en este hacer la persona no se cuestiona sobre dicha clasificación por lo que si una persona tiene el habito de realizar las figuras de análisis en la resolución del problema, lo realizará sin importar el tipo de ejercicio que se trate. A continuación se presentan algunos problemas como ejemplos de cada uno de las clases arriba mencionada, con el fin de analizar, en cada una, las características o particularidades que poseen las figuras realizadas en la resolución de cada uno.

Problema por resolver: como ejemplo de esta clase se tomó una actividad de geometría métrica.

*Ejemplo 1: "**Determinar el centro de una circunferencia dada.**"*

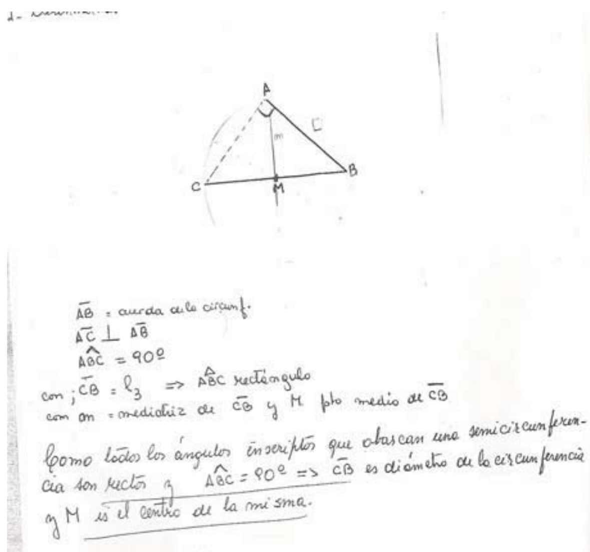


Figura 47: Ejemplo de un problema por resolver

Como puede verse el alumno (de nivel superior), realiza una figura de análisis realizada a mano alzada al cual coloca letras para identificar sus elementos, nomenclatura que utiliza en la resolución, pero como puede notarse en la primera parte del procedimiento establece los elementos, con lo cual el que lee el ejercicio puede interpretar la resolución sin que necesite visualizar la figura realizada, con lo cual dicha figura solo sirvió, puede decirse para la interpretación de los datos y los elementos que se ponían en juego, fue una guía pero no es parte esencial de dicha resolución.

Vale aclarar que el alumno comete un error en la resolución suponiendo que el triángulo determinado es isósceles, conclusión a la que llega a través de la visualización de su dibujo pero que en la demostración general para un cuerda cualquiera no se cumple. Con lo cual su respuesta no es correcta.

Problema por demostración:

Ejemplo 2: ***"Demostrar que en todo cuadrilátero convexo, los puntos medios de los lados son vértices de un paralelogramo."***

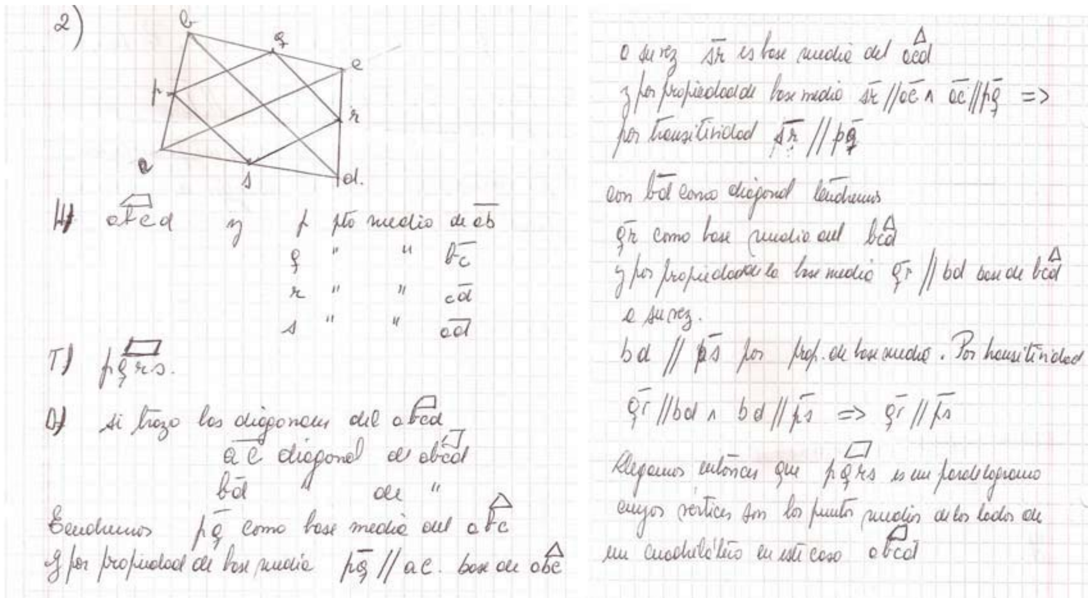


Figura 48: Ejemplo de un problema por demostración

En este ejemplo, puede observarse que antes de la demostración, la alumna realiza una figura la cual le permite ordenar los elementos que se presentan en la hipótesis.

Problema de rutina: según otros autores y otro tipo de categorización puede encontrarse como ejercicio, para el ejemplo se tomó una actividad de construcción, donde los alumnos tienen los datos.

Ejemplo 3: ***"Trazar una circunferencia de radio dado que sea tangente a una recta dada y a una circunferencia dada."***

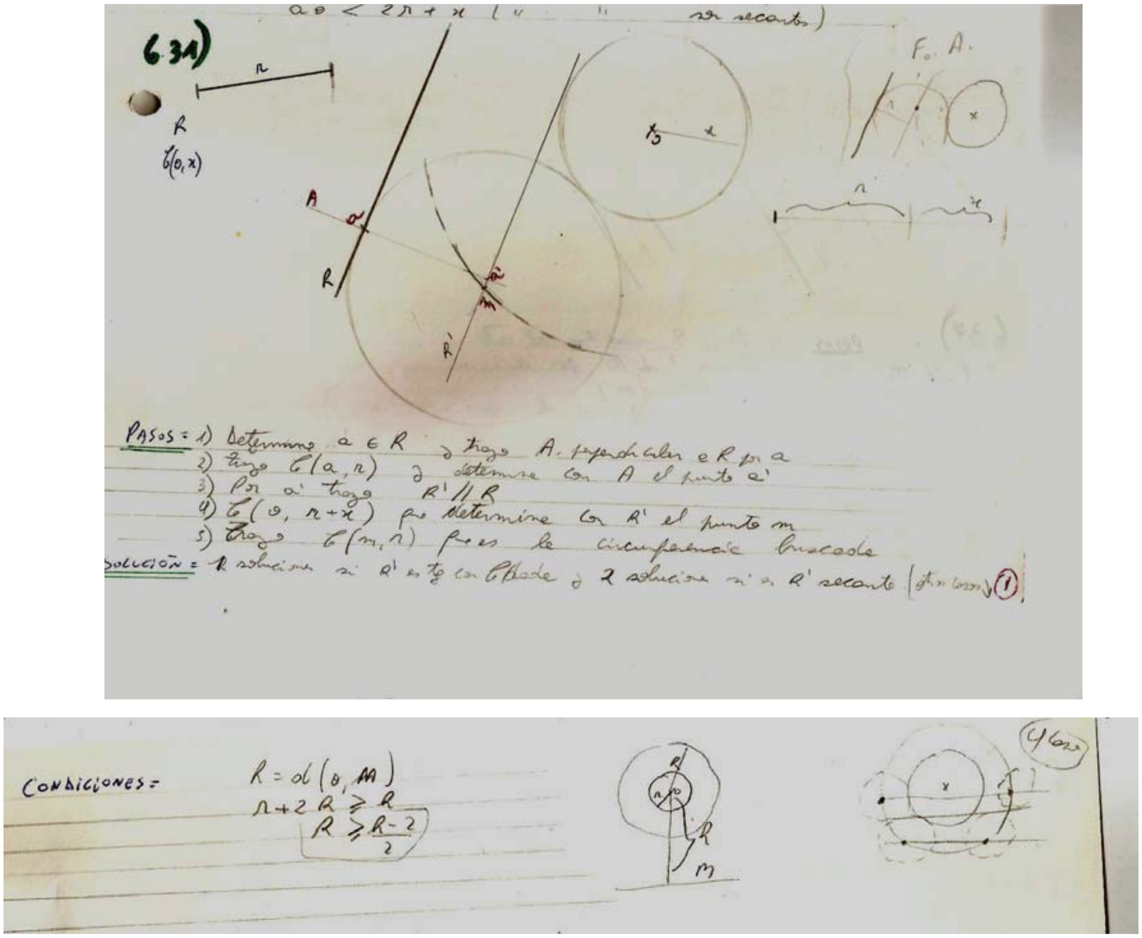


Figura 49: Ejemplo de un problema de rutina

Puede observarse que en esta construcción realizada con regla y compás, existe previa a ella una figura de análisis para interpretar los datos dados y hallar el procedimiento adecuado para dicha construcción. Pero dicha figura de análisis no es la única, al momento de analizar las soluciones posibles con dichos datos, se realiza otra figura, como así también cuando se analiza las condiciones necesarias para los datos dados. Por lo tanto, resumidamente, puede decirse que para cada uno de los puntos de dicha construcción se realizó una figura de análisis para poder dar respuesta a lo pedido.

Problema práctico: en el siguiente problema se deben aplicar conceptos de trigonometría para calcular la altura de una torre, puede observarse como el alumno para interpretar el enunciado realiza una figura de análisis donde vuelta los datos dados necesarios para la resolución, despojando el dibujo (como puede observarse en la figura 50) de toda referencia con la situación planteada, como es por ejemplo el edificio o mástil por ejemplo.

Ejemplo 4: ***"Desde el extremo más lejano del patio de una escuela, ángulos de elevación para observar el pie y el extremo de un mástil, colocado sobre un edificio son de 60º y 65º respectivamente. Calcular la altura del edificio, sabiendo que la longitud del mástil es de 3 m."***

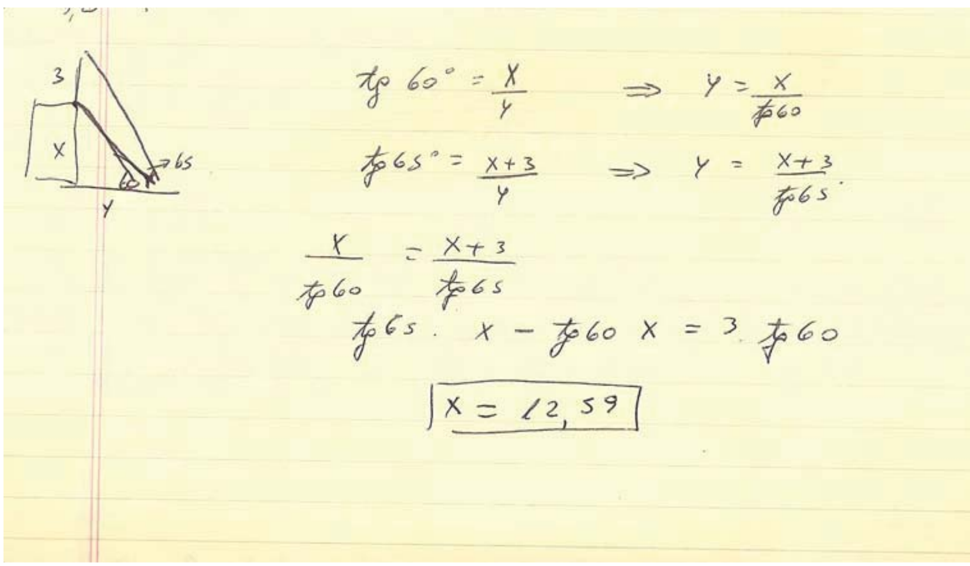


Figura 50: Ejemplo de un problema práctico

2. Resolución de un problema

Haciendo referencia al proceso de resolución de un problema por parte de los alumnos, no únicamente a los referidos al área de matemática, Labarrere (citado en Mazarío, 2000, p.11) señala al respecto: "Es común pensar que el análisis de los problemas se realiza sólo en el plano mental, esto es; con predominancia de la reflexión interior; pero no es totalmente así, en muchas situaciones el análisis del problema transcurre también a partir de acciones en el plano externo; es decir, cuando alumno manipula, opera de manera visible, el problema” y continua diciendo: “El análisis a partir de la acción (operación) en el plano externo, se observa en muchas ocasiones cuando el alumno, para comprender qué se plantea en un problema, y cuáles son sus elementos, emplea procedimientos gráficos, esquemáticos, etc., que en cierta medida reproducen o modelan el problema”.

Como se dijo, en el momento de la resolución de un problema matemático, muchas personas optan por realizar un dibujo para comprender los datos dados y organizarlos en una imagen gráfica que les permita exteriorizar las visualizaciones internas. Al respecto Kruteskii clasifica la forma en que los alumnos resuelven un problema bajo tres categorías distintas:

- Un tipo de pensamiento “No visual o Analítico”, donde prevalece el factor “lógico/verbal” muy bien desarrollado frente al factor “visual/pictórico” que es más tenue. Manejan esquemas abstractos por lo que no usan soportes visuales alguno.
- En otra categoría incompatible a esta, establece un tipo de pensamiento “Visual o Geométrico” donde el componente “visual/pictórico” es más fuerte que el componente “lógico/verbal” que se encuentra poco desarrollado.
- En un punto medio entre estos dos extremos, se encuentra un pensamiento de tipo “Intermedio o Armónico” en donde ambos factores mantienen un cierto equilibrio, pero dentro de esta clasificación Kruteskii realiza una subclasificación. “Dentro de los estudiantes del tipo armónico se diferencian aquellos que pueden usar soportes visuales en la resolución de problemas pero prefieren no hacerlo (armónico abstracto) y aquellos que pueden usar soportes visuales en la resolución de problemas y prefieren hacerlo (armónico pictórico)” (Ramírez, 2008, p.29).

Dentro de este factor “visual/pictórico” es donde se puede ubicar a las figuras de análisis por lo cual esta categorización será de gran importancia a la hora de responder porque algunos alumnos en el momento de resolver problemas de geometría, al utilizar dichas figuras se les presenta dificultades como puede ser el hacer referencia solo a casos particulares sin reparar en ello y llegar a soluciones incorrectas o incompletas. En lugar de ser, las figuras de análisis, una herramienta de utilidad, se transforman así en un obstáculo creado por el mismo alumno.

Otros investigadores también priorizan la utilización de imágenes dando un lugar de gran importancia a la visualización en el proceso del aprendizaje de la matemática. Cunnigham avala que “algunos estudiantes aprenden más eficientemente a partir de discusiones que combinan aspectos visuales con experiencias de trabajo analítico y simbólico” (citado en Ramírez, 2008, p.39).

Como antecedente se encuentra la tesis de maestría de Plasencia Cruz (2000), titulada “Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos”, en donde se utiliza el vocablo “diagrama”, en lugar de “figuras de análisis”, pero coincide en su uso e importancia a la hora de la resolución de un problema matemático.

2.1. Proceso heurístico

La palabra “heurística”, al igual que la palabra problema, provienen del griego, del vocablo “huriskin”, cuyo significado es “‘servir para descubrir’. El término se ha utilizado en filosofía y lógica para referirse a la rama de la ciencia que estudia el razonamiento” (Valverde, 2003, p.16).

Por lo tanto, la palabra heurística hace referencia al estudio de los métodos o procedimientos que conducen al descubrimiento en la resolución de los problemas de cualquier índole, no únicamente los planteados en la clase de matemática (Hernández, 2000). Es importante destacar que este “proceso heurístico”, no garantiza que se llegue siempre a la solución requerida pues solo está constituido por el detalle de los pasos sugeridos por diferentes investigadores, como podrá observarse a continuación cuando se detalle cada uno de los métodos que se enuncian en forma general para cualquier tipo de problema. La elección de los métodos fue seleccionar aquellos en donde se hace referencia a las figuras de análisis (aunque no se emplee dicha denominación pero puede intuirse que son palabras similares como ocurre con diagramas o esquemas).

Haciendo referencia al proceso heurístico o también conocido bajo el nombre de “método heurístico” en escenarios escolar, Torres lo define como “el método mediante el cual la actividad del profesor consiste en conducir al alumno a hallar por sí mismo el conocimiento que se desea que adquiera; el papel del maestro en este método es estimular al alumno al pensamiento reflexivo, guiarlo para que indague e investigue, para que llegue a conclusiones” (citado por Jorge, 2007, p.2).

El proceso heurístico se compone de dos elementos que a su vez están divididos en diferentes categorías según la forma de abordar el problema. Estos elementos son:

- PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS: “son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización conciente de actividades mentales exigentes” (Müller, citado por Jorge, 2007, p.3). Estos procedimientos pueden dividirse en tres, los que, a su vez, se subdividen en otras categorías más específicas:
    1. Principios heurísticos: son las ideas o normas generales que surgen ante la intención de resolver un problema:
        - 1.a. Principio de analogía: es cuando el sujeto asemeja los contenidos nuevos a otros ya adquiridos anteriormente.
        - 1.b. Principio de generalización: es cuando el sujeto a partir de un caso particular infiere una suposición que se cumple en forma general.
        - 1.c. Principio de la movilidad: es cuando el sujeto analiza los cambios que se producen especialmente en elementos geométricos, al mover el objeto y formula relaciones y suposiciones al respecto. Este principio esta íntimamente readicionado al quehacer matemático sobre las figuras de análisis confeccionadas a la hora de resolver un problema geométrico.

1.d. Principio de inducción: es cuando el sujeto a partir del análisis de casos particulares, ya conocidos, obtiene una relación general.

1.e. Principio de medir y probar: es cuando el sujeto a partir de las mediciones y comparaciones realiza suposiciones, también es un proceder inductivo.

1.f. Principio de reducción: es cuando el sujeto comparar con otros problemas similares ya resueltos.

1.g. Principio de casos especiales o casos limites.

2. Reglas heurísticas: son impulsos en la búsqueda de solución, tienen carácter más específico ya que abarcan las acciones y las operaciones en este camino hacia la solución.
3. Estrategias heurísticas o también llamadas estrategias de búsqueda: haciendo referencia a ejemplos de resolución de problemas matemáticos, según las palabras de Jorge (2007, p.7), estas estrategias “constituyen el método principal para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema y para buscar la idea fundamental de solución”. Según Valverde (2003, p.19) las define como “la táctica que se utiliza para lograr encontrar los medios necesarios para resolver un ejercicio”. En matemática, las estrategias utilizadas pueden ser de dos tipos:

3.a. El trabajo hacia adelante o método sintético: se parte de los datos (premisas) para a partir de los conocimientos previos los cuales permiten confeccionar un plan a seguir, y la incógnita es una guía para verificar si el plan pensado es el adecuado.

3.b. El trabajo hacia atrás o método analítico: en este caso, se parte suponiendo que lo buscado es conocido y a partir de ello ir derivando en los resultados parciales.

- MEDIOS AUXILIARES HEURÍSTICOS: Labarrere y Valdivial (citados en Valverde, 2003, p.16), incluyen dentro de estos medios a “distintas imágenes y representaciones de objetos y fenómenos que se confeccionan especialmente para la docencia, que también abarcan objetos naturales e industriales, tanto en su forma normal como preparada, los cuales contienen información y se utilizan como fuente de conocimiento”. Puede concluirse que estas palabras hace referencia a los materiales o recursos didácticos utilizados en la escuela, pero junto a estos medios que son presentados a quien resuelve el problema en un ambiente educativo, puede incorporarse las figuras de análisis, tema de estudio de este trabajo de investigación. Una diferencia bien marcada es que estas figuras de análisis deben ser elaboradas generalmente, por quien resuelve el problema, razón por la cual su uso a veces en lugar de favorecer el procedimiento y lograr llegar a la solución correcta se transforme en un obstáculo. Se ha aclarado que generalmente son realizadas las figuras de análisis por el sujeto frente al problema porque en algunos casos cuando se presenta el problema, por ejemplo en un libro de texto escolar viene acompañado de un dibujo que facilita la interpretación del enunciado.

En el siguiente cuadro, puede resumirse todas las posibles formas en que se puede abordar un problema (Valverde, 2003; Jorge, 2007, Hernández, 2000).

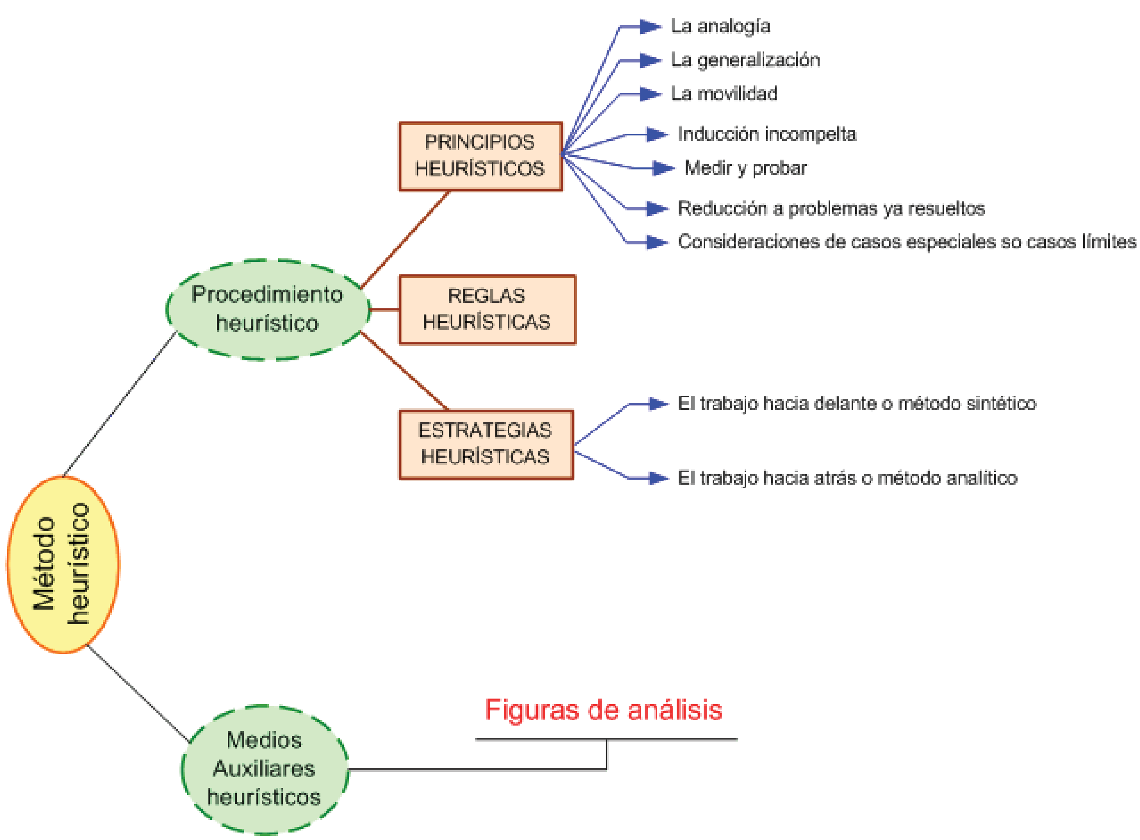


Figura 51: Diagrama del método heurístico

En pocas palabras un procedimiento heurístico puede resumirse como las acciones o modos de actuar de quien se enfrenta a un problema pero que estos caminos, como ya se ha dicho, no garantizan encontrar la solución correcta. Este es un procedimiento que se opone a un procedimiento algorítmico donde también existe sistema de acciones pero en este caso su ejecución implica lograr alcanzar la solución con sólo su hacer, en forma correcta y ordenada (Valverde, 2003).

2.2. Diferentes métodos para resolver un problema

2.2.1. Método de Polya

Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior de este trabajo, el matemático Descartes sugería, en sus reglas, el empleo de figuras enteras, puras y simples para lograr resolver con éxito un problema (Descartes, 1983). No obstante este matemático no fue el único en establecer una serie de pautas con las cuales se puede hacer frente a un problema para llegar a su resolución correcta, en este aspecto, la obra del matemático e investigador Polya influyó, en gran medida, en los trabajos que le prosiguieron sobre el proceso heurístico ante la resolución de un problema, esto se debió a que Polya no sólo diera importancia a la necesidad de enseñar los conocimientos matemáticos sino también la forma de "hacer matemática" (Valverde, 2003, p.15). El método presentado por Polya consiste de cuatro fases (este procedimiento puede ser puesto en acción para problemas no sólo de matemática o escolares, sino también ante cualquier tipo de problemas). A cada una de estas fases le asigna una serie de preguntas que sirven de guía para quien quiere resolver un problema. Estas fases y algunas de las preguntas que formulara Polya son:

- **Comprensión del problema** : en esta fase de identifican la incógnita, los datos, cuales son las condiciones planteadas. En esta fase, haciendo referencia a la resolución de problemas específicos de matemática, Echenique Urdiain (2006) incluye la acción de decodificar el mensaje contenido en el texto, enunciado del problema para traducirlo al lenguaje matemático. Otros autores, como Nieto, establecen que "es imposible resolver un problema del cual no se comprende el enunciado" (2004, p.10).

- **Concepción de un plan** : en esta fase se integran tanto los conocimientos que pondrá en juego el sujeto quien se enfrenta al problema, así también su creatividad. Es decir, es la fusión entre razón e imaginación. Las preguntas que presenta Polya, en esta fase, están dirigidas a llevar el problema a regiones ya conocidas, por ejemplo algunas de estas preguntas son: "¿Se ha encontrado con un problema semejante?", "¿Conoce un problema relacionado con éste?", "¿Podría enunciar el problema en otra forma?"; "¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible?, ¿un problema más general?, ¿un poco más particular?". Pero la pregunta más importante para este trabajo de investigación es la siguiente: "He aquí un problema relacionado con el suyo, y que se ha resuelto ya. (...) ¿Podría utilizarlo introduciendo algún elemento auxiliar?" (Doniez, 2000b, p.4; Nieto, 2004, p.9). Puede conjeturarse que uno de estos "elementos auxiliares" es el incluir en la resolución del problema a las figuras de análisis, tema central de este trabajo. Al respecto, Echenique Urdiain (2006, p.27) no utiliza el término "figura de análisis" sino que recomienda para esta segunda fase el uso de "esquemas".
- **Ejecución del plan** : es la puesta en práctica del plan elaborado en la fase anterior, por eso es que esta etapa sea la más técnica en comparación a las anteriores. Por tal motivo, las preguntas presentadas por Polya hacen referencia si los pasos son correctos y en la forma de justificarlos. El fin de esta fase es llegar a la solución del problema.
- **Visión retrospectiva** : una vez que se ha logrado obtener el resultado buscado, en esta etapa la intención es verificar dicho resultado, expresarlo en forma diferente y si puede ser empleado en otro problema. "La cuarta etapa es muchas veces omitida, incluso por solucionistas expertos. Polya insiste

mucho en su importancia, no solamente porque comprobar los pasos realizados y verificar su corrección nos puede ahorrar muchas sorpresas desagradables, sino porque la visión retrospectiva nos puede conducir a nuevos resultados que generalicen, amplíen o fortalezcan el que acabamos de hallar" (Nieto, 2004, p.11).

En la siguiente descripción de las fases incluidas en el método de Polya a la hora de resolver un problema, puede verse que los autores estudiados (Doniez, 2000b; Nieto, 2004; Echenique Urdiain, 2006) incorporan a las figuras de análisis o esquemas en la segunda fase de acción, pero en cambio se ha encontrado que otros autores (Tarifa y González, 2000, p.8; Sigarreta y Laborde, 2004, p.20) quienes incluyen las "figuras de análisis" en la primera fase donde se analizan los datos y las incógnitas presentes en el enunciado, en este caso, esta figura de análisis sería parte de la decodificación y codificación a la cual hace referencia Echenique Urdiain. En el caso de Sigarreta Almira y Laborde Chacón, el término que emplean es "diagrama", en lugar de figuras de análisis, como es el caso de las otras autoras.

2.2.2. Método de Schoenfeld

Schoenfeld basado en las ideas de Polya determina tres fases para la resolución de un problema, a saber:

- FASE DE ANÁLISIS: donde las acciones a realizar son "trazar un diagrama, examinar casos particulares y probar a simplificar el problema".
- FASE DE EXPLORACIÓN: con respecto a otros problemas con el fin de buscar problemas equivalentes o similares los cuales deberán ser modificados en menor o mayor grado para asemejarse al dado.
- FASE DE COMPROBACIÓN DE LA SOLUCIÓN OBTENIDA: es la etapa en donde se verifica si la solución obtenida responde a los datos dados, para luego analizar si responde a criterios generales o sólo a casos particulares (Rivera, Medina y Revilla, 2008, p.19).

Pero esta variante que se presenta de la idea original del método propuesto por Polya es que no sólo éste influye en la cantidad de fases o más aún, en las acciones a realizar en el propio proceder frente al un problema, sino que el punto esencial es que Schoenfeld (Rueda y García, 2005, p.261) incluye a las operaciones cognitivas también las metacognitivas, determinando cinco componentes que influyen en el comportamiento durante el mismo proceso. Estas operaciones metacognitivas se detallan a continuación:

Conocimiento de base: es el saber que posee el sujeto frente al problema, este saber puede ser de orden formal, informal o intuitivo, además no son únicamente los conocimientos conceptuales sino que también se incluyen en ellos los procedimentales. Ambos saberes integran los "recursos" para el proceso de resolución del problema.

Estrategias heurísticas: son las operaciones mentales que orientan al sujeto para lograr progresar hacia la solución. Entre estas estrategias, como ya se ha mencionado, en la fase de análisis, se encuentra la elaboración de una representación gráfica, llamada diagrama, paraba el presente trabajo determinadas como "figura de análisis".

Metacognición: es "el control" entre los dos componentes anteriores, el conocimiento de base y las estrategias heurísticas. Este control es el que permite al sujeto seguir su plan o modificarlo sobre la marcha según las soluciones intermedias, se encuentra asociada con su "autoevaluación".

Creencias: estos valores son para algunos investigadores en Educación un aspecto relevante en el éxito o no de la resolución de los problemas por parte de los alumnos. Al respecto, Rueda y García sostienen que "estas creencias pueden considerarse la zona de transición entre aspectos cognitivos y afectivos. Modelan las formas en las que un individuo conceptualiza y actúa en relación a la ciencia" (2005, p.261). Estas creencias, pueden vincularse con las figuras de análisis realizadas en la primera fase de la resolución del problema, pues las dificultades que pueden observarse en ciertos alumnos derivan, muchas veces, de la utilización de figuras esteriotipadas, en lugar de bosquejos que representen la situación en su aspecto más general, como se planteó en el segundo capítulo de este trabajo de investigación.

Comunidad de práctica: componente que da a la resolución de los problemas un entorno social, pues el sujeto que se enfrenta al problema no es un individuo aislado sino que pertenece a una sociedad, con su propia cultura, pautas y creencias. Siendo lo social una de las dimensiones de la socioepistemología, marco teórico de este trabajo.

Un punto importante de este modelo, es que brinda una posible explicación a las causas de las dificultades que puede presentar un individuo al resolver un problema, la causa, según Schoenfeld, es la falta de alguna de estas componentes detalladas líneas atrás.

En este recorrido que se ha hecho, a lo largo de este capítulo interpretando todos los alcances del término “problema” y los distintos modelos desarrollados que interpretan las acciones más eficaces para llegar a su correcta solución, se destaca que en su mayoría coinciden en que el problema se compone de datos para llegar a descubrir la solución, el sujeto involucrado con sus conocimientos y estrategias y las acciones llevadas a cabo. Pero en el modelo prestado por Schoenfeld, se incorporan dos componentes que hasta el momento no habían sido consideradas. Componentes que tienen que ver con un aspecto no sólo interno del individuo, sino con el medio socio-cultural al cual pertenece; las “creencias” y la “comunidad de práctica” son dos perspectivas vinculadas con el aspecto social de la resolución de los problemas, muchas veces no tenidos encuentra por los docentes.

En el siguiente diagrama se sintetizan las variables del proceso de resolución de problemas, según el método de Schoenfeld:

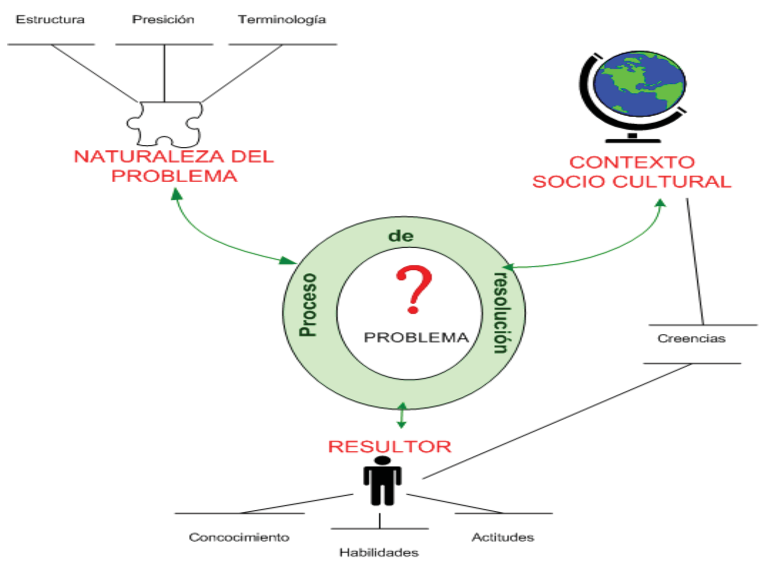


Figura 52: Diagrama del método de Schoenfeld

Referido a estos aportes es que Sigarreta Almira y Laborde Chacón (2004) establecen una serie de estrategias para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural. Dichas estrategias se encuentran agrupadas en cinco acciones: “aproximación al problema”, “profundización en el problema”, “ubicación del problema, “selección y aplicación de una estrategia de trabajo” y “representación y valoración”, en cada una se enmarcan una serie de interrogantes que guían la forma de afrontar el problema y crear el plan a llevar a cabo.

Lo importante para destacar entre estas acciones es que se puede encontrar en la primera acción, interrogantes como “¿Es un problema real? ¿Está relacionado con tu entorno sociocultural? ¿Qué consecuencias traen para la sociedad las relaciones expresadas en el texto del problema?” (Sigarreta Almira y Laborde Chacón, 2004, p.23). En dicha práctica, hay un análisis del problema desde una perspectiva social, aspecto no tenido en cuenta en otros modelos que se detallaran a continuación, pero que es importante incluirlos pues están relacionados con el uso de figuras.

2.3. Otros modelos heurísticos

Los métodos detallados hasta el momento no son los únicos ejemplos que incluyen entre los pasos que se deben seguir en el camino hacia la resolución de un problema a las imágenes. Haciendo una rápida recopilación se encuentran otros modelos no tan conocidos o divulgados como los anteriores.

2.3.1. Modelo de Wheatley

Este modelo es de gran importancia pues le da un valor primordial al uso de figuras o dibujos asociando las representaciones internas, imágenes internas con las imágenes externas o diagramas. Wheatley determina cinco normas en un proceso en el cual se "hace uso de un diagrama, esta representación externa permite a la persona que resuelve el problema tener más espacio mental para construir nuevas imágenes y relaciones" (citado por Ramírez, 2008, p.24; Plasencia Cruz, 2000, p.28).

El proceso al cual se hace referencia es un mecanismo recursivo y consta de los siguientes pasos:

"1. Frente a un problema, se construye una imagen (representación interna),
2. Se hace un dibujo (representación externa).
3. Se vuelve a razonar, tomando base en el dibujo y se construye una imagen más sofisticada.
4. Se construye un dibujo más elaborado.
5. Se repite el proceso" (Wheatly citado por Ramírez, 2008, p.24; Plasencia Cruz, 2000, p.28).

A pesar de haber entre Descartes y Wheatley más de trescientos años de diferencia se observan similitudes que se encuentran entre las reglas planteadas en el siglo XVIII y las cinco normas anteriores establecidas, a decir: ambos sugieren el empleo de una imagen exterior, ya sea llamada: diagrama, dibujo o figura de análisis, sobre la cual se puede examinar y relacionar los datos representados sobre el papel, razonar y hallar el camino para llegar a la solución del problema.

2.3.2. Modelo de Kantowski

Kantowski enumera un serie de pautas en un proceso que Monagas (1998) denomina “proceso heurístico”

1. “Dibujar un diagrama (figura, esquema, tabla).
2. Examinar un caso especial.
3. Identificar lo que se busca y lo que se da.
4. Identificar información relevante e irrelevante (examinar toda la información dada). Trabajar hacia adelante desde el principio con la información dada.
5. Trabajar hacia atrás desde la conclusión.
6. Buscar un patrón-encontrar una generalización.
7. Buscar un problema relacionado (énfasis en estructura similar).
8. Buscar un teorema, definición, operación o algoritmo que se aplique al problema. Resolver parte del problema.
9. Verificar la solución.
10. Examinar si existe otra manera de encontrar la solución (soluciones alternas).
11. Examinar si se puede obtener otra solución (originalidad).
12. Estudiar el proceso de resolución” (Kantowski, citado por Monagas, 1998).

En su trabajo, Monagas (1998) no hace referencia directa a un dibujo o diagrama en el proceso heurístico pero al referirse a una codificación simbólica puede suponerse que dentro de esta codificación se puede incluir a las figuras de análisis que facilita la visualización para realizar una mejor lectura. Por eso sugiere las siguientes pautas:

“Lectura del Problema. Obtener una visión ‘más limpia’ del planteamiento: identificar datos e incógnitas, eliminar redundancias e irrelevancias y reorganizar la información. Esta lectura eventualmente lleva a **reescribir el problema** o **codificarlo simbólicamente**; en algunos casos la reescritura es casi automática, mientras se va leyendo, en otros, si está bastante limpio, es casi automática la codificación; finalmente, a veces el planteamiento puede sugerir la forma de resolución, a la que se puede pasar de una vez” (Monagas, 1998).

2.3.3. Modelo de Fernández

Como último modelo se analizará el propuesto por Fernández, para quien las estrategias puestas en juego en el proceso de resolución de un problema son:

“• Ensayo-error.
• Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
• Manipular y experimentar manualmente.
• Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
• Experimentar y extraer pautas (inducir).
• Resolver problemas análogos (analogía).
• Seguir un método (organización).
• Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).
• Hacer recuente (conteo).
• Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).
• Sacar partido de la simetría.
• Deducir y sacar conclusiones.
• Reformular el problema.
• Suponer que no (reducción al absurdo).
• Empezar por el final (dar el problema por resuelto)” (citado por Rivera Gómez, Medina Bonett, y Revilla Alfaro, 2008, p.20).

Puede observarse que en entre estos pasos a seguir no sólo se incorporan los dibujos, sino que se da importancia al lenguaje utilizado, que se adecue lo mejor posible al problema, incluyendo así, al lenguaje gráfico. Otros modelos no toman en cuenta las diferentes formas de expresarse en matemática y sólo mencionan el interpretar el enunciado pero no integran las tres formas distintas en que puede el individuo expresarse dentro del campo de la matemática: el leguaje verbal, algebraico y el gráfico. Dentro de este último, es donde se encuentran las figuras de análisis por lo tanto es de gran importante y no debe perderse de vista este lenguaje para sólo quedarse con el simbólico o algebraico.

3. Comentarios para concluir

En este capítulo se intentó relevar varias presentaciones acerca de los modelos relacionados con el proceso heurístico, proceso llevado a cabo al momento de resolver un problema. En todos ellos, se describen en forma variada las distintas fases o etapas del proceso pero aún usando términos diferentes, todos ellos hacen mención, en alguna de estas fases, a la realización de un dibujo en el cual volcar los datos y las incógnitas dadas en el enunciado, razón por la cual se consideró importante para este trabajo.

Hasta el momento toda esta investigación consta de un relevamiento de trabajos bibliográficos que reflexionan sobre el proceso de visualización y los obstáculos que se presentan en dicho proceso (segundo capítulo), un recorrido histórico del empleo de figuras en documentos matemáticos (tercer capítulo) y por último en el presente capítulo, la presentación de distintos modelos heurísticos en la resolución de problemas. Todos estos puntos permitirán en el siguiente apartado analizar las figuras de análisis en casos puntuales recogidos de distintos cursos, pero además se incluirán otros aspectos del discurso escolar, como son los libros de textos y que papel juegan las figuras de análisis en ellos.

Capítulo 5

Las figuras de análisis en el discurso matemático escolar

En los capítulos anteriores se tomaron distintos aspectos teóricos a tener en cuenta en el presente trabajo de investigación. Se describieron brevemente las características básicas de la construcción social del conocimiento, línea de investigación de este trabajo, el proceso de visualización y diferentes concepciones sobre los problemas y su resolución, además de un recorrido histórico analizando la forma en que distintas culturas utilizaban la imagen en la resolución de problemas. A partir de este capítulo, se realizará el estudio de campo en escenarios académicos, tomando diferentes aspectos del discurso matemático escolar, más precisamente los aspectos a trabajar son: el estudio de casos puntuales para poder analizar los errores cometidos al emplear las figuras de análisis por parte de los alumnos, la interpretación de los datos recogidos en encuestas para poder examinar el rol que juegan las figuras de análisis en los distintos actores del proceso de enseñanza y aprendizaje y, por último, un relevamiento de libros de textos variados.

1. Estudios de casos

Para iniciar el estudio de casos se tomará un ejemplo en el cual aparecen las figuras de análisis pero no precisamente en un problema referido a conceptos geométricos. La idea de incorporar estos ejemplos es que uno podría llegar a suponer que las figuras de análisis solo están asociadas a problemas geométricos donde se puede suponer que sería más “natural” dibujar alguna figura geométrica. Puede observarse como Diego, un alumno de segundo año de Secundaria Básica, realiza imágenes a la hora de resolver dos ejercicios presentes en la guía de trabajo de aritmética.

Se presenta a continuación los dos ejercicios y la copia de cómo el alumno resolvió cada uno.

*Ejercicio 1: "**Augusto, emperador romano, nació en el año 63 a. C. y murió en el 14 d. C. ¿Cuántos años vivió?**"*

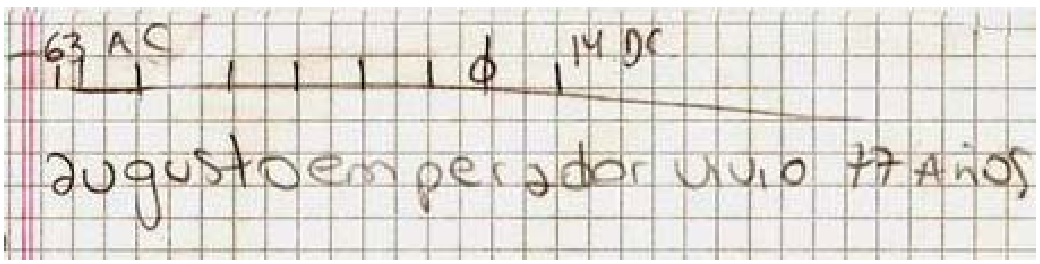


Figura 53: Figura de análisis relacionado con números entero de Diego (A)

*Ejercicio 2: "**Una bomba extraen el petróleo de un pozo a 975 m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 28 m de altura. ¿Qué cantidad de metros recorre el petróleo?**"*

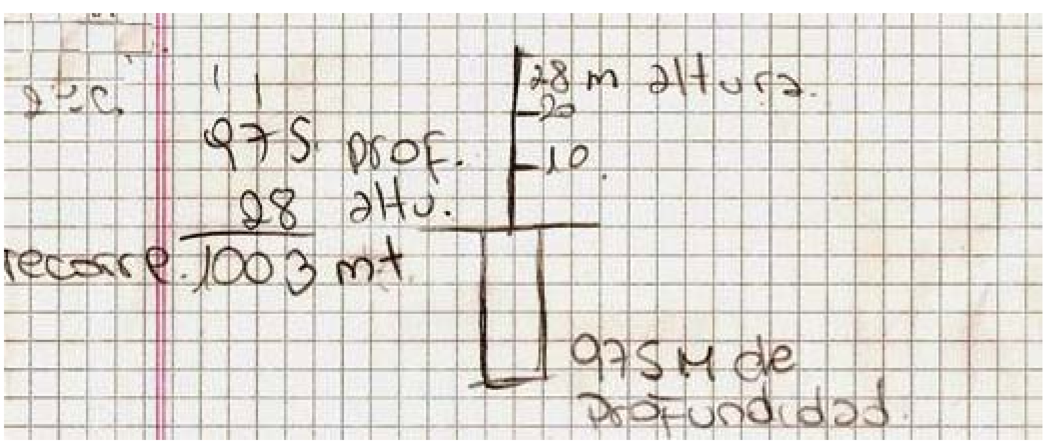


Figura 54: Figura de análisis relacionado con números entero de Diego (B)

En el primer ejercicio, la gráfica que realiza Diego para hallar la edad de Augusto se podría asociar con una recta numérica, no se puede afirmar fehacientemente que se trate de una recta numérica pues no mantiene una escala para los años registrados, por lo tanto sólo es una representación esquemática que le permitió dar un orden a los datos dados y relacionarlos con los números enteros para poder resolver exitosamente el problema.

En cambio, en el segundo problema, en el cual se podría haber realizado también un esquema similar al anterior, asociado a la recta numérica, puede verse que el alumno realizó una gráfica que esta directamente relacionada con la situación planteada en el problema. Por lo tanto, el dibujo tiene una dirección vertical, en lugar de horizontal, debido a que el problema hace referencia a la extracción de petróleo, aunque sigue siendo una representación esquemática y no pictórica (Hegarty y Kozhevnikov, citado en Ferrero, 2009).

Lo que tienen en común, las figuras del alumno, es que en ninguna se establece una escala numérica pero, aún así, colaboraron en la realización de un razonamiento que permitió hallar las respuestas correctas y aunque el objetivo de la guía era el trabajo con números enteros, el alumno lo resuelve sin hacer mención a los números negativos, llegando, en ambos casos, a la correcta solución, apoyando su fundamentación, en las figuras de análisis.

En el siguiente apartado se tomarán casos puntuales donde se emplearon figuras de análisis en ejercicios referidos a contenidos geométricos.

1.1. Figuras de análisis en geometría

Como el foco de este trabajo de investigación se encuentra centrado en el empleo de las figuras de análisis utilizadas durante la resolución de problemas geométricos, por tal motivo, si se hace mención al proceso de aprendizaje de la geometría, no se puede dejar de mencionar el Modelo de Van Hiele, en donde no sólo se determinan cinco niveles en el aprendizaje de la geometría, sino que también se establece que “en la base del aprendizaje de la Geometría, hay dos elementos importantes “el lenguaje utilizado” y “la significatividad de los contenidos" (Fouz y de Donosti, 2005, p. 68) considerándose a las figuras de análisis parte de este lenguaje.

Muchas veces los problemas geométricos que pueden ser tanto de construcción, de cálculo o de demostración, van acompañados de un dibujo, situación que no ocurre en forma general, por lo tanto Nieto Said sugiere en estos casos, "hacerlo [refiriéndose al dibujo] es la primera tarea que debemos realizar", fundamentando que "un dibujo nos ayuda en primer lugar a comprender el problema. Además estimulará nuestra imaginación y es posible que nos sugiera algún plan para hallar la solución. Si tiene a mano instrumentos geométricos úselos; sin embargo incluso un bosquejo aproximado suele ser de mucha ayuda" (2004, p.22).

Manejar este lenguaje no es simple para los alumnos si no poseen un mínimo de conceptos adquiridos, sin esos conceptos la figura de análisis no servirá de mucho pues tendrán dificultades para su realización o será confeccionada con errores basados en la teoría. Siendo un simple artefacto que no logrará transformase en un verdadero instrumento, pues el alumno estará frente a una representación que no le es útil, sin una funcionalidad (Trouche, 2005). Por su parte, González, García y Lamothe puntualizan, al respecto, que "para esbozar una figura de análisis, es necesario tener un conjunto de conocimientos de la Geometría (figuras, cuerpos geométricos, construcciones geométricas, etc.) y un conjunto de habilidades (intelectuales y prácticas) que le permitan, a partir de la imaginación, sintetizar en una figura una situación dada y explicarla. Por ello, asegurar, que el alumno tenga creadas estas condiciones, es un elemento determinante en la consecución del objetivo de aprender a modelar gráficamente" (2005).

Tras haber recorrido, en el capítulo anterior, el empleo de las figuras de análisis en los métodos propuestos por varios investigadores, en este apartado se realizará el estudio de casos tomados en escenarios áulicos. Los casos que a continuación se reportan son ejemplos de cómo las figuras de análisis producen, en algunas ocasiones, que los alumnos o alumnas lleguen a una conclusión errónea o incompleta sin poder avanzar hacia una correcta solución del problema.

Para la recopilación de estos casos puntuales se tuvo en cuenta la definición que se ha asumido para las figuras de análisis y que se ha considerado a lo largo de estos capítulos. Es decir, se entiende, entonces, por figuras de análisis, aquellos dibujos que pueden ser realizados a mano alzada, sin rigurosidad geométrica en donde se vuelca la información dada en el enunciado, acción realizada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, demostrar un teorema o realizar una construcción geométrica. Cuando se habla de "rigurosidad geométrica", debe interpretarse como la necesidad de utilizar los elementos geométricos. La idea de las figuras de análisis no es una construcción geométrica, por eso es que se acepta que sea a mano alzada pues dichos dibujos deben servir solo de guía en la resolución de un problema.

Los siguientes ejemplos han sido tomados de diferentes guías de ejercicios de varias clases de geometría, aunque todos se centren en geometría, su esencia es distinta: algunos tienen que ver con demostraciones geométricas, mientras que otros son ejercicios de aplicación de fórmulas geométricas como puede ser para el cálculo del perímetro o el área de determinados polígonos.

Se analizará a continuación algunos ejemplos tomados de alumnos de distintos años y carreras aunque todos de nivel terciario. En todos ellos, las consignas fueron entregadas a los alumnos quienes solos debieron resolver los problemas planteados; los enunciados pertenecen a guías de estudio o evaluaciones.

1.1.1. Primer caso

- AÑO: 2008.
- ALUMNO/A: de primer año del profesorado de maestra de inicial (provincia de Buenos Aires).
- MATERIA: curso de ingreso a la carrera (ejercicio propuesto en la evaluación, al finalizar el curso).
- CONSIGNA: ***"Calcular el perímetro y el área de un cuadrado sabiendo que un lado mide 3x-1 cm y el otro x+3 cm."***

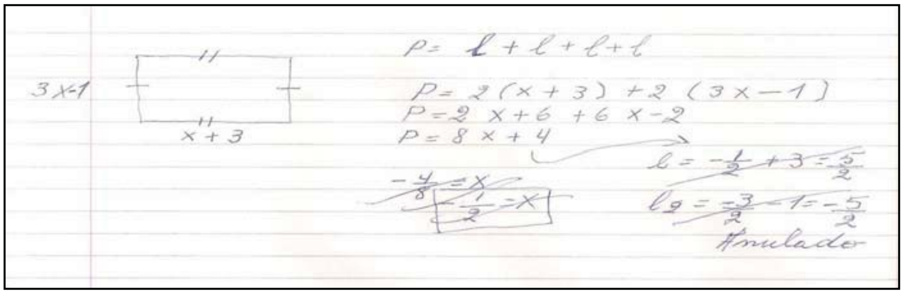


Figura 55: Figura de análisis del primer caso

En este ejercicio que relaciona tanto el trabajo geométrico como el algebraico, la estudiante realiza una figura de análisis para volcar los datos que se brindan en el problema. Pero en la figura de análisis realizada comete un error que se arrastra luego en toda la resolución del problema, percibiendo, al final, la alumna sólo que el resultado al que llega es incorrecto pero sin lograr deducir donde tuvo origen el error.

Se puede observar en la figura 55, que el dibujo realizado responde a los estereotipos desarrollados en el segundo capítulo, es decir: el rectángulo dibujado tiene su base horizontal como uno de los estereotipos desarrollados por Scaglia y Moriena (2005). Por otro lado, un error a considerar es que se haya representado un rectángulo cuando el enunciado se refiere a un cuadrado. El dibujo podría ser un rectángulo (no cuadrado) pero bastaría con simbolizar que sus cuatro lados son iguales pero en este caso en particular la figura geométrica se ha simbolizado que los lados consecutivos son diferentes, perdiendo así uno de los datos importantes para la resolución, puede conjeturarse que el pensarlos como longitudes diferentes de derive de que los lados poseen distintas expresiones.

Además este error se arrastra, no sólo en la figura de análisis, sino también en la resolución algebraica del problema. Error que surge de la mala interpretación de los datos al elaborar dicha figura. Vale aclarar que el error no está en el cuadrilátero sino en las en las marcas realizadas sobre los lados de la figura para señalar cuáles son los lados congruentes y cuáles no, el mismo rectángulo con marcas todas iguales en su cuatro lados daría la idea de cuadrado (imagen mental), a pesar de notar nuestros ojos que dichas longitudes son variadas.

Ya Platón hace más de 24 siglos establecía que “los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan” (Boyer, 1999, p. 125). Por lo tanto, al indicar con esas marcas sólo como congruentes los lados opuestos del cuadrilátero dibujado, el ejercicio no pudo resolverse exitosamente pues faltaban datos, datos que fueron omitidos en la confección de la figura de análisis.

Se puede conjeturar que una vez realizado el dibujo, la estudiante no volvió a releer el enunciado y sólo se guió por los datos volcados en la figura de análisis realizada, pues de haber vuelto a leer la consigna, se conjetura que hubiese descubierto que la figura geométrica de la que se pedía el perímetro y del cual se daban los datos de dos lados consecutivos, era un cuadrado y no un rectángulo cualquiera, por lo tanto la alumna se encuentra con datos incompletos en su proceso de resolución, con lo cual no puede dar una solución al problema.

1.1.2. Segundo caso

- AÑO: 2008
- ALUMNO: del profesorado de matemática (Ciudad autónoma de Buenos Aires).
- MATERIA: curso de ingreso a la carrera (ejercicio propuesto en la evaluación, finalizado el curso).
- CONSIGNA: ***“Las dimensiones de un prisma recto se dan a continuación: ancho 3x+4, largo 3x y alto 3x-6. Hallar la expresión desarrollada del área total del prisma e indicar de qué grado resulta.”***

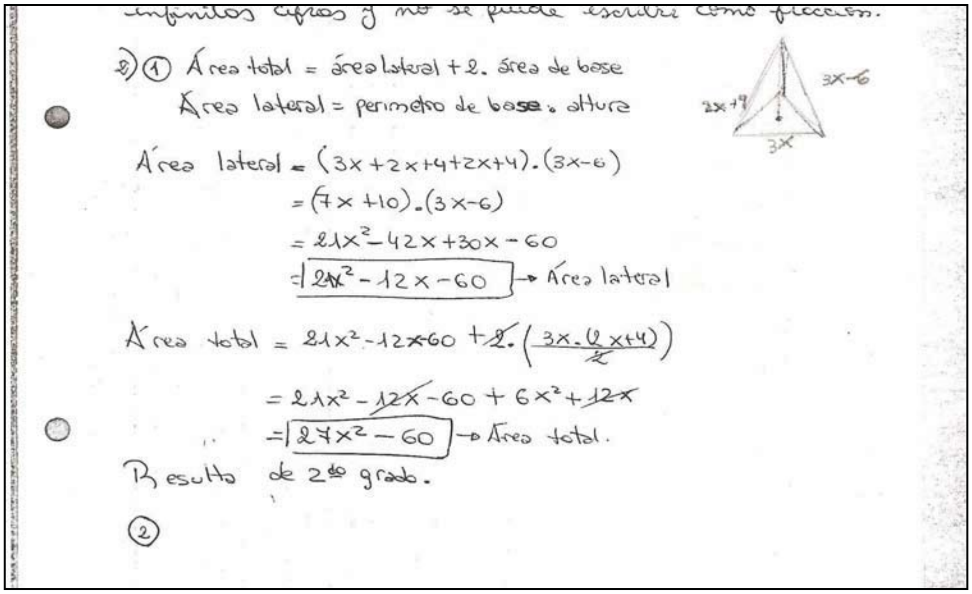


Figura 56: Figura de análisis del segundo caso

En este caso, también es un ejemplo donde se pone en juego no sólo la geometría sino también el conocimiento algebraico para trabajar con expresiones polinómicas, relacionadas con el área lateral y total de un cuerpo, en este caso: un prisma. Pero puede observarse, al igual que en el ejemplo anterior, que todo el trabajo algebraico parte de una figura de análisis en donde el estudiante realiza la interpretación del problema y vuelca los datos del mismo, para que a partir del mismo, lograr elaborar una expresión polinómica.

En este caso en particular, el error se comete porque el alumno dibuja una pirámide de base triangular cuando en verdad el problema se refiere a un prisma recto de base rectangular. Lo interesante para destacar es cómo confundió los datos en la resolución de los datos, porque no sólo erró al dibujar el cuerpo geométrico sino que el polinomio que representa el área lateral tampoco se corresponde con la figura de análisis realizada y mucho menos con el ejercicio en si. Pero lo más llamativo es que, al momento de hallar la expresión del área total, considera que el cuerpo tiene dos bases, oponiéndose a lo realizado en la figura de análisis. Pero además ese no es el único error que se comete sino que a la hora de escribir la altura del triángulo lo que hace es escribir la expresión (*2x+4*) que empleó anteriormente como uno de los lados. Por lo tanto, no hay una correlación entre los datos del problema y la figura de análisis, y entre ésta y la última parte de la resolución del ejercicio. La figura de análisis no ha adquirido, para este estudiante una funcionalidad, aunque es él quien la construye no logra familiarizarse con la representación realizada pues, como se ha señalado, no existe una conexión entre dados del problema, figura y resolución del problema, los tres aspectos de la resolución apuntan a distintas ideas y representaciones mentales.

Si se analiza la figura de análisis podemos no sólo mencionar, como ya se ha dicho, que la figura corresponde a una pirámide de base triangular en lugar de un prisma de base rectangular, lo cual estaría asociado a un "bloqueo expresivo", presentado por Adams (en Nieto, 2004). Bloqueo referido al uso inadecuado de una técnica al registrar una idea, además se puede mencionar también un bloqueo intelectual pues no sólo existe un error en el dibujo sino una mala comprensión del problema como errores en la deducción de las áreas del poliedro, como se ha dicho, la deducción no se corresponde ni con los datos del problema ni con la figura de análisis realizada.

1.1.3. Tercer caso

- AÑO: 2008
- ALUMNOS: cuarto año del profesorado de matemática para tercer ciclo y polimodal (provincia de Buenos Aires).
- MATERIA: Geometría (los alumnos tienen en el la cursada Álgebra y Geometría I y II).
- CONSIGNA: ***"Toda paralela a la mediana de un triángulo abc, determina en las rectas de los lados*** $\overline{ab}$ ***y*** $\overline{ac}$ ***segmentos*** $\overline{ar}$ ***y*** $\overline{ae}$ ***proporcionales a esos lados."***

A continuación se presentan tres casos en donde distintos estudiantes intentan demostrar una misma consigna ya detallada líneas arriba.

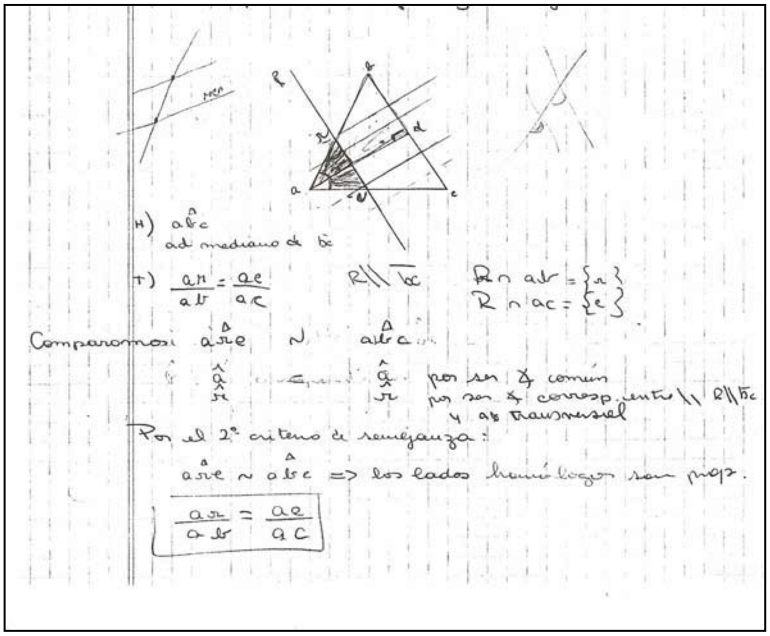


Figura 57: Figura de análisis del tercer caso, alumno A

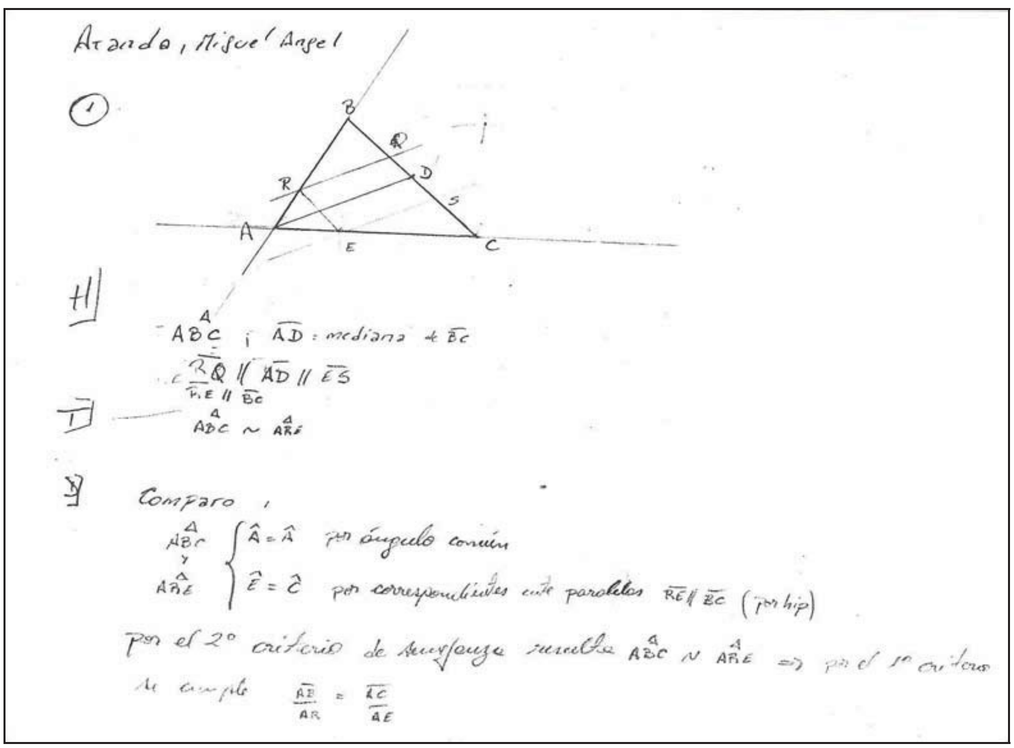


Figura 58: Figura de análisis del tercer caso, alumno B

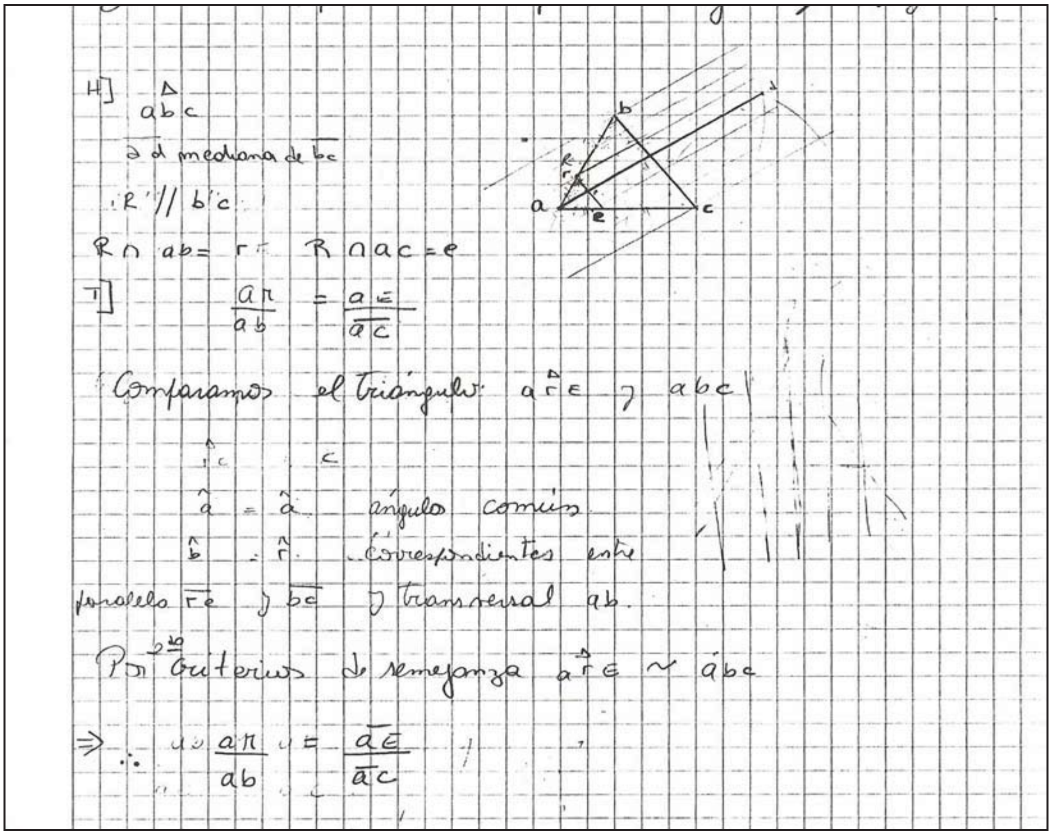


Figura 59: Figura de análisis del tercer caso, alumno C

Esta consigna fue tomado como ejemplo para analizar la forma en que se utiliza la figura de análisis en una demostración geométrica, porque como menciona Crespo Crespo, en su tesis doctoral, “las figuras de análisis resultan de gran utilidad para la práctica social de la demostración, se recurre a ellas para lograr representaciones generales, pero como el apoyo de un caso, que podríamos decir, es particular” (2007, p.170).

En primer lugar, es muy interesante comparar las tres figuras de análisis realizadas por distintos alumnos para observar las grandes similitudes que en ellas se presentan. En todas las figuras, los triángulos trazados son escalenos y acutángulos coincidiendo con uno de los estereotipos señalado por Scaglia y Moriena; “la altura de un triángulo debe estar contenida en el mismo” (2005, p. 109), para que la altura se encuentre contenida en el figura, el triángulo debe de ser un triángulo acutángulo. Si se trata de estereotipos, las tres figuras también tiene otra coincidencia con estos estereotipos trasmitidos culturalmente, en todos ellos, el lado mayor coincide con la base que posee, además, una dirección horizontal. Se recuerda que a los alumnos solo se les entregó la consigna y ellos, en forma individual la resolvieron, porque al analizar estas figuras uno podría pensar que fueron las tres figuras copiadas de una figura dada, pero no fue así. Al respecto, los estereotipos establecidos culturalmente (Scaglia y Moriena, 2005) como pueden ser la posición espacial, cierta clase de triángulos o cuadriláteros, que sólo son casos particulares, generan una imagen mental, un prototipo, que puede observarse en las figuras de análisis cuando los alumnos realizan casos particulares, prototipos que se instalan en sus esquemas mentales. Otra similitud que puede observarse es que las rectas paralelas, trazadas en cada ejemplo, mantienen una dirección similar.

Por otro lado, puede notarse que las rectas paralelas, trazadas por los alumnos B y C (figuras 58 y 59 respectivamente), son equidistantes, perdiendo la generalidad que debe tener toda figura de análisis, pues en caso contrario se esta representando un caso particular, error que luego es arrastrado a la demostración. En el caso del alumno B, éste plantea en la hipótesis que los segmentos $\overline{re}$ y $\overline{bc}$ son paralelos, pero si se analiza la consigna, la hipótesis real del problema es solo: *ad* es mediana del triángulo *abc* y la recta *er* es paralela a la recta *ad*. El estudiante afirma que las rectas *re* y *bc* son paralelas a raíz de visualizarlas en el dibujo, sin llegar a analizar que esto se debe al haber trazado las rectas *rz* y *rs* equidistantes a la mediatriz incluida en la recta *ad*. Así también, el alumno C realiza el mismo error trazado las rectas paralelas equidistantes, lo que lo lleva a afirmar que las rectas *re* y *bc* son paralelas.

En el caso del alumno A, más allá de no haber trazado en la figura de análisis rectas equidistantes y cambiar las letras con la que se nombra a la recta determinada por los puntos de intersección de las dos rectas paralelas a la mediana y los lados del triángulo, también justifica, en su demostración, que la recta *R* (*re*) es paralela a la recta *bc*, afirmación que sólo puede deducirse de la figura de análisis y no de otro punto de la demostración.

Como puede verse en estos tres casos de la resolución de una misma demostración, los estudiantes no han interpretado correctamente la consigna de la demostración, lo que los llevó a realizar una figura de análisis no solamente errónea sino que además se ha analizado que dicha figura perdió toda generalidad (más allá de estar equivocada). Es interesante observar, además, las similitudes ya detalladas líneas arriba.

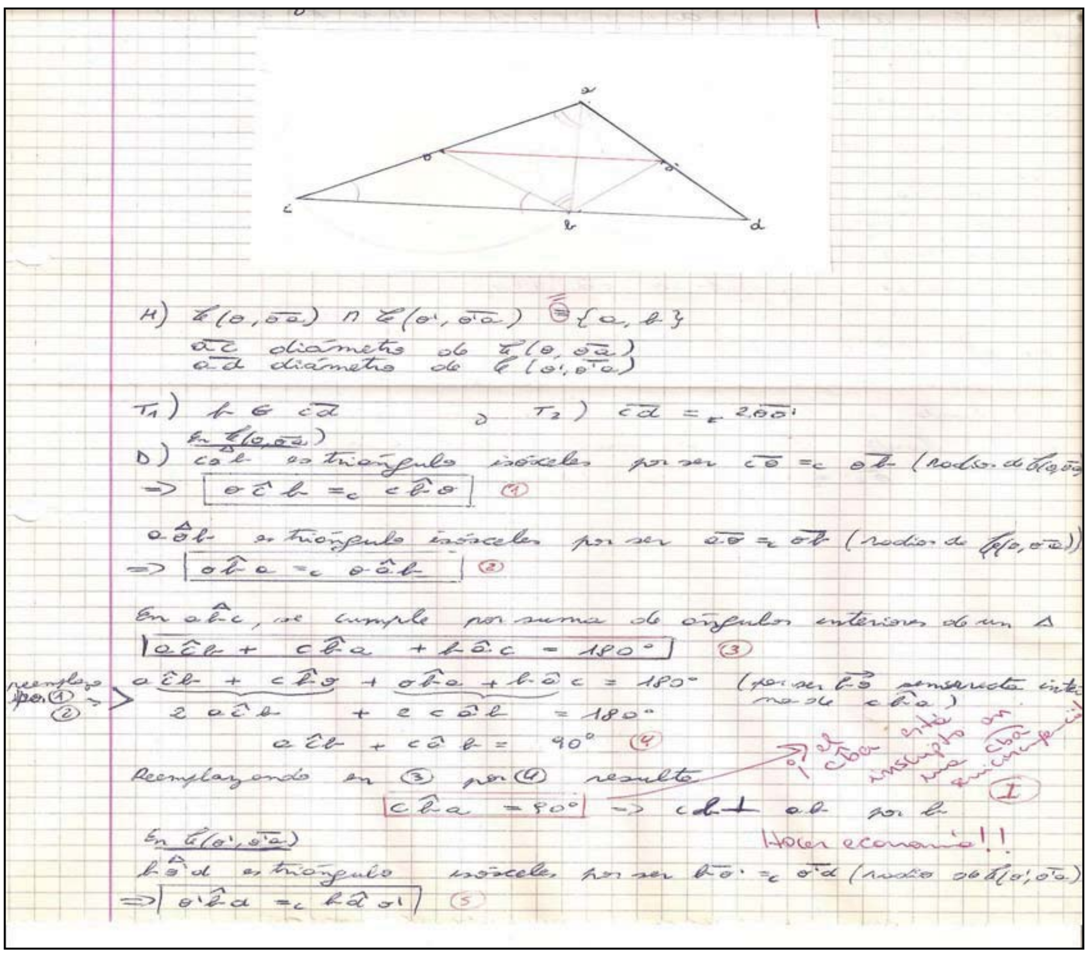
Ningún estudiante interpretó que la recta que se debía trazar era única y determinaba con el lado $\overline{ab}$ o su prolongación, el punto *r* y con el lado $\overline{ac}$ o su prolongación, el punto *e*.

1.1.4. Cuarto caso

- AÑO: 2007
- ALUMNOS: primer año del profesorado de matemática (Ciudad autónoma de Buenos Aires)
- MATERIA: Geometría I
- CONSIGNA: ***"Si dos circunferencias secantes se cortan en a y b siendo*** $\overline{ac}$ ***y a*** $\overline{ad}$ ***sus diámetros, demostrar que*** $\overline{cd}$ ***pasa por b y*** $\overline{cd}$ ***es doble de las distancias entre los centros de las circunferencias."***

El siguiente ejemplo también se refiere a una demostración geométrica. La figura de análisis confeccionada no esta realizada a mano alzada sino haciendo uso del compás y la regla, (aunque en la figura escaneada no puede llegar a percibirse las circunferencias trazadas, por haberse empleado un lápiz muy suave).

Puede verse que la extensa demostración que realizó el estudiante, para llegar en forma incorrecta a demostrar que el punto *b* pertenece al segmento $\overline{cd}$ (se encuentra remarcado con color rojo e indicado con T1). Lo que en verdad ha llegado ha demostrar, el estudiante, hasta ese momento, es que el punto *b* pertenece a la recta *cd* y no al segmento $\overline{cd}$ (verdadera tesis de la demostración). Por lo tanto, el alumno se apoya en la figura de análisis para afirmar que el punto *b* pertenece al segmento cuando en verdad en el proceso de deducción no se ha llegado a justificarlo, es decir la demostración de la primera tesis, no ha sido demostrada.


H) $\mathcal{C}(o,\overline{oa}) \cap \mathcal{C}(o',\overline{o'a}) = \{a, b\}$
$\overline{ac}$ diámetro de $\mathcal{C}(o,\overline{oa})$
$\overline{ad}$ diámetro de $\mathcal{C}(o',\overline{o'a})$

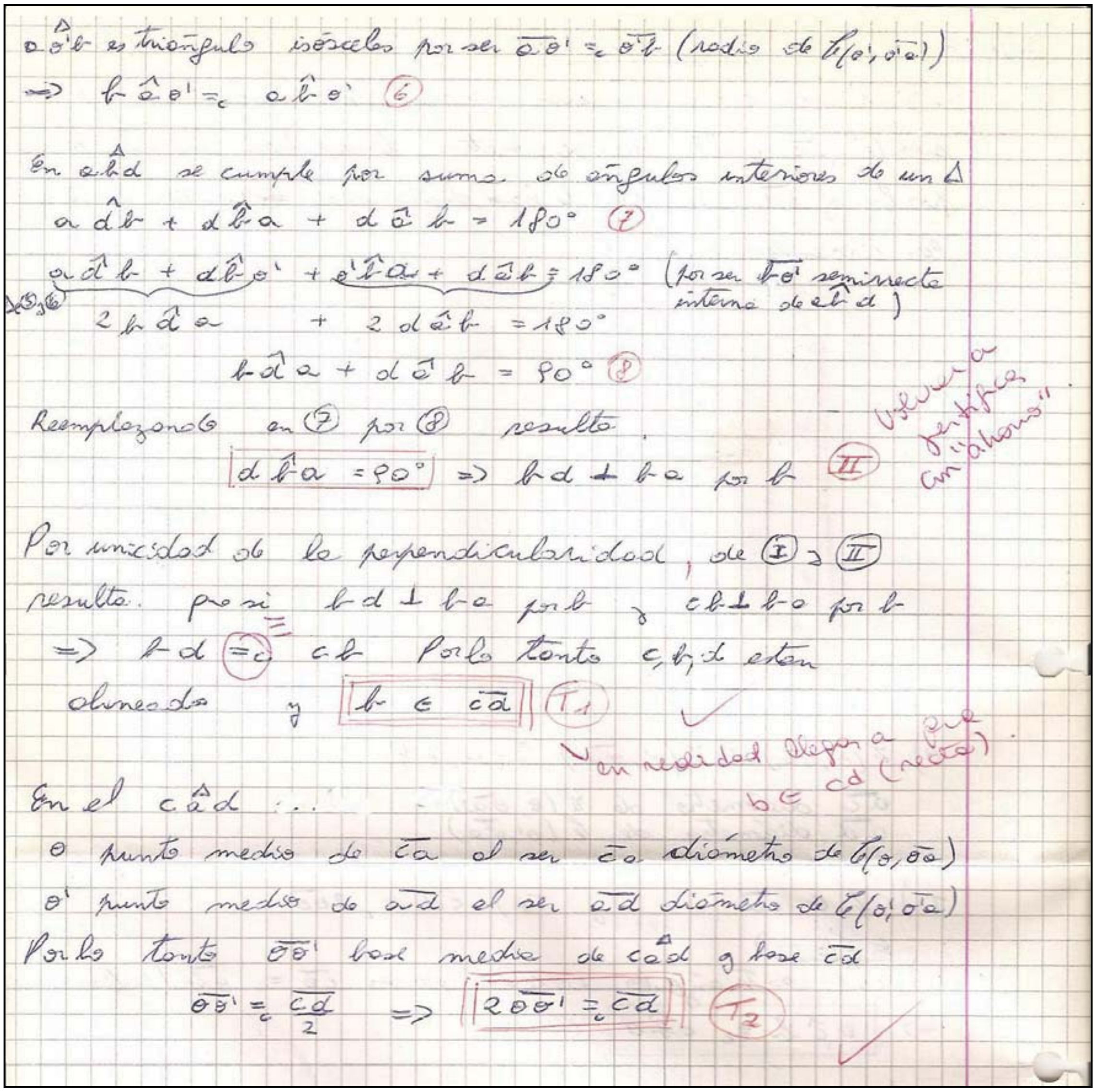
T1) $b \in \overline{cd}$; T2) $\overline{cd} =_c 2\overline{oo'}$

D) En $\mathcal{C}(o,\overline{oa})$
$c\hat{o}b$ es triángulo isósceles por ser $\overline{co} =_c \overline{ob}$ (radios de $\mathcal{C}(o,\overline{oa})$)
$\Rightarrow \boxed{o\hat{c}b =_c c\hat{b}o}$ (1)

$a\hat{o}b$ es triángulo isósceles por ser $\overline{ao} =_c \overline{ob}$ (radios de $\mathcal{C}(o,\overline{oa})$)
$\Rightarrow \boxed{o\hat{b}a =_c o\hat{a}b}$ (2)

En $a\hat{b}c$, se cumple por suma de ángulos interiores de un $\triangle$
$\boxed{a\hat{c}b + c\hat{b}a + b\hat{a}c = 180°}$ (3)
reemplazo por (1) (2) $\Rightarrow$ $\underbrace{a\hat{c}b + c\hat{b}o}$ + $\underbrace{o\hat{b}a + b\hat{a}c}$ = 180° (por ser $\vec{bo}$ semirrecta interna de $c\hat{b}a$)
$2\,a\hat{c}b + 2\,c\hat{a}b = 180°$
$a\hat{c}b + c\hat{a}b = 90°$ (4)
Reemplazando en (3) por (4) resulte
$\boxed{c\hat{b}a = 90°} \Rightarrow cd \perp ab$ por b
¡el $c\hat{b}a$ está inscripto en una circunferencia! (I)
Hacer economía!!

En $\mathcal{C}(o',\overline{o'a})$
$b\hat{o'}d$ es triángulo isósceles por ser $\overline{bo'} =_c \overline{o'd}$ (radio de $\mathcal{C}(o',\overline{o'a})$)
$\Rightarrow \boxed{o'\hat{b}d =_c b\hat{d}o'}$ (5)



$\overset{\triangle}{ao'b}$ es triángulo isósceles por ser $\overline{ao'} \cong \overline{o'b}$ (radio de $C(o', \overline{o'a})$)

$\Rightarrow b\hat{a}o' \cong a\hat{b}o'$ (6)

En $\overset{\triangle}{abd}$ se cumple por suma de ángulos interiores de un $\triangle$

$a\hat{d}b + d\hat{b}a + d\hat{a}b = 180°$ (7)

$\underbrace{a\hat{d}b + d\hat{b}o'}_{2\,b\hat{d}a} + \underbrace{o'\hat{b}a + d\hat{a}b}_{2\,d\hat{a}b} = 180°$ (por ser $\overrightarrow{bo'}$ semirrecta interna de $a\hat{b}d$)

(5),(6) $2\,b\hat{d}a + 2\,d\hat{a}b = 180°$

$b\hat{d}a + d\hat{a}b = 90°$ (8)

Reemplazando en (7) por (8) resulta

$\boxed{d\hat{b}a = 90°} \Rightarrow bd \perp ba$ por b (II)

Volver a justificar con "ahora"

Por unicidad de la perpendicularidad, de (I) y (II) resulta: pues $bd \perp ba$ por b y $cb \perp ba$ por b

$\Rightarrow bd \equiv cb$ Por lo tanto c, b, d están alineados y $\boxed{b \in \overline{cd}}$ (T1)

en realidad llega a que $b \in cd$ (recta)

En el $\overset{\triangle}{cad}$ ...

o punto medio de $\overline{ca}$ al ser $\overline{ca}$ diámetro de $C(o, \overline{oa})$

o' punto medio de $\overline{ad}$ al ser $\overline{ad}$ diámetro de $C(o', \overline{o'a})$

Por lo tanto $\overline{oo'}$ base media de $\overset{\triangle}{cad}$ y base $\overline{cd}$

$\overline{oo'} \cong \frac{\overline{cd}}{2} \Rightarrow \boxed{2\,\overline{oo'} \cong \overline{cd}}$ (T2)

Figura 60: Figura de análisis cuarto caso

En este ejemplo, a diferencia de los otros ya analizados, el alumno no llega a un resultado errado sino incompleto, basado en una figura de análisis que fue bien construida y que apunta a la generalidad, diferencia que también se aleja de los otros ejemplos anteriores, donde en la figura de análisis, se han cometido errores al volcar los datos se representó casos particulares, omitiendo la generalidad del enunciado o la consigna. La idea de tomar este caso como cuarto ejemplo fue presentar una demostración incompleta basada solo en la lectura de la figura de análisis realizada.

1.1.5. Quinto caso

- <u>AÑO</u>: 2009
- <u>ALUMNOS</u>: de primer año del profesorado de maestra de inicial (provincia de Buenos Aires).
- <u>MATERIA</u>: curso de ingreso a la carrera (ejercicio propuesto en la evaluación, finalizado el curso).
- <u>CONSIGNA</u>: ***“Calcular el área de un rectángulo sabiendo que la base y la altura miden respectivamente 9x-5 cm y 5x+7 cm, y cuyo perímetro es de 172 cm.”***

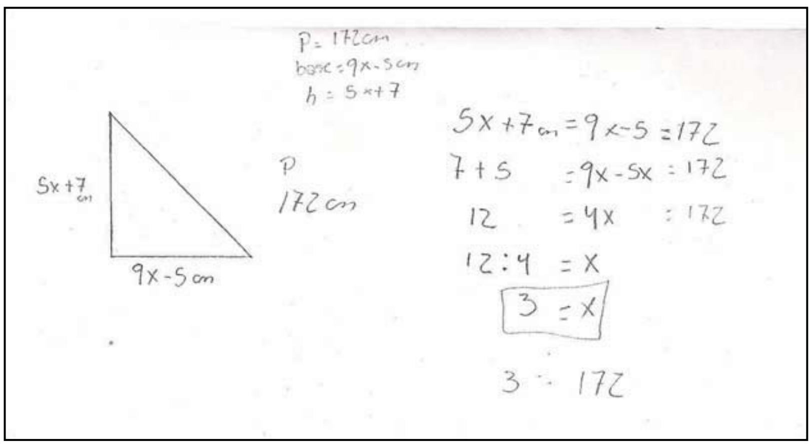


Figura 61: Figura de análisis del quinto caso, alumno A

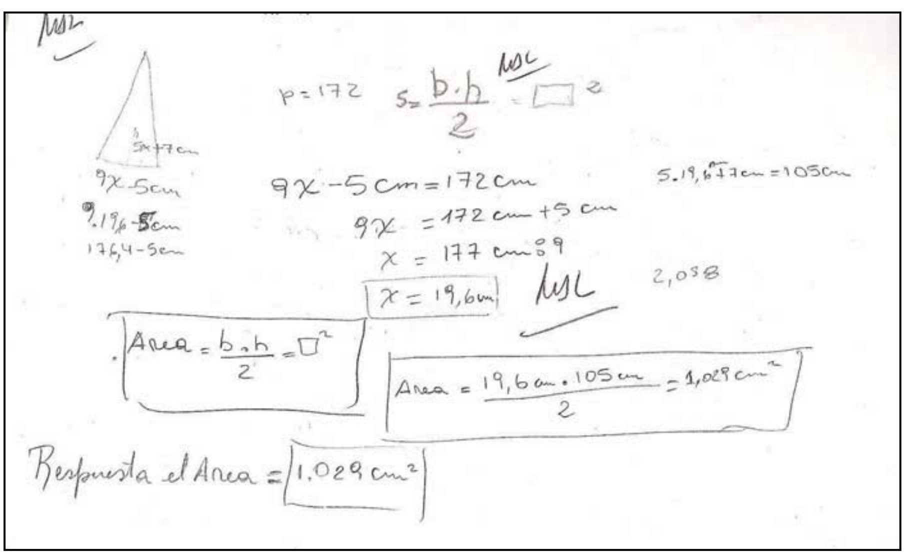


Figura 62: Figura de análisis del quinto caso, alumno B

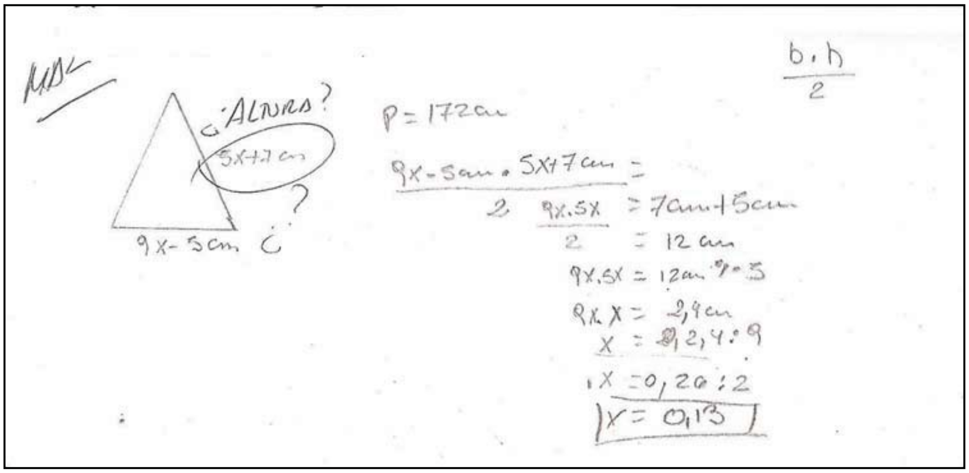


Figura 63: Figura de análisis del quinto caso, alumno C

En este caso, también, puede observarse tres diferentes resoluciones de un mismo ejercicio, pero que a su vez, aún realizado por distintos alumnos, presentan grandes similitudes. En los tres ejemplos puede notarse claramente la falta de manejo de los conceptos geométricos ya que en el enunciado se hace referencia a un rectángulo y los tres alumnos grafican, en la figura de análisis, un triángulo. Todos ellos respondiendo a los estereotipos ya mencionados, por ejemplo: todos ellos se encuentran “apoyados” sobre una de las bases.

Es evidente la confusión del alumno A conjeturándose que al leer la palabra “rectángulo” la imagen mental que construyó fue un “triángulo rectángulo” según su dibujo, pero en el caso de los alumnos B y C, el triángulo dibujado tampoco responde a un triángulo rectángulo, pues se trata de triángulos isósceles acutángulos. Pero si se hace mención a la condición de isósceles, esta propiedad también puede verse que se cumple en la figura de análisis del alumno A (figura 61), condición que es empleada en la resolución algebraica del problema ya que el alumno iguala la expresión correspondiente a las señaladas, en el dibujo, a ambos lados, aún más igualándola al valor del perímetro, con lo cual no sólo se observa un error conceptual referido al reconocimiento de polígonos sino errores conceptuales referidos al concepto de perímetro. Error similar presenta en su resolución el alumno B, más aún, este alumno, siguiendo su interpretación del problema, escribe en la parte superior la fórmula correspondiente al área del triángulo cuando el problema se refiriere a un rectángulo, como expresa con un rectángulo dibujado a mano alzada con un dos en la parte superior, lo cual podría interpretarse como el área del rectángulo, aunque como ya se dijo la fórmula expresada no corresponde al rectángulo sino al la figura de análisis realizada. Tanto el alumno B como el alumno C, calculan el área de un triángulo guiados por su propia figura de análisis.

1. 2. Una conclusión sobre el análisis de los casos particulares

En todos los casos tomados para ejemplificar errores cometidos por los alumnos de diferentes años y carreras, puede notarse la presencia de los estereotipos en las figuras de análisis, estereotipos que tienen que ver con una transmisión social y con las representaciones mentales que los alumnos construyen frente a dichos estereotipos. Pudo ejemplificarse errores cometidos en la interpretación del enunciado del problema, errores cometidos al representar casos particulares en lugar de generalizar la figura de análisis lo más posible, con el fin de garantizar no emplear propiedades especiales de determinada figura, o una solución incompleta basada únicamente en la figura de análisis y no en el procedimiento deductivo. Puede notarse como las representaciones mentales se llevan al dibujo y se toma la figura de análisis como parte de la demostración, como es el ejemplo del cuarto caso.

En todas las figuras de análisis tomadas para su estudio en esta sección, éstas responden a representaciones esquemáticas, tal vez por el carácter general de las consignas, pues ninguno de los ejercicios hacía referencia a situaciones reales. Por otro lado, también, puede afirmarse que para estos alumnos, las figuras están en su hacer frente a un problema pero aún no han alcanzado el carácter de instrumento, pues su uso es distorsionado por errores o por la falta de familiaridad con los conceptos geométricos volcados a la figura. No pudiendo hacer propias dichas figuras.

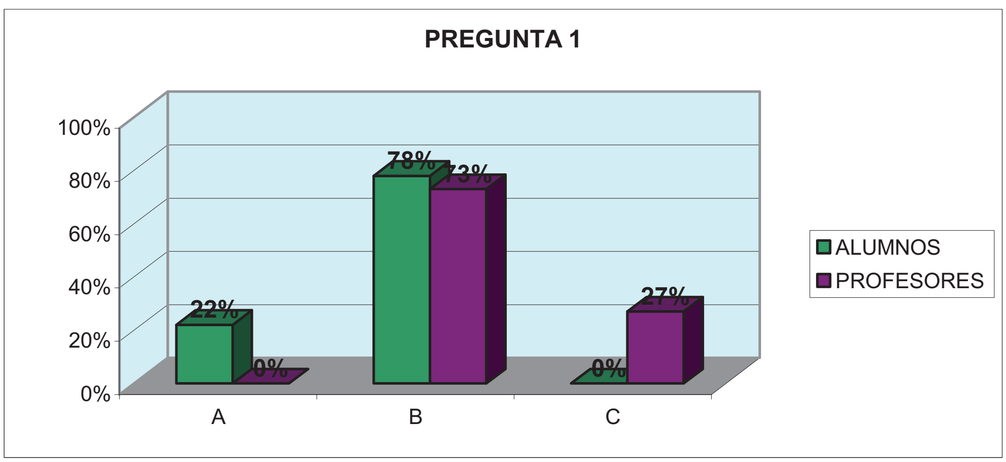
2. Visión de docentes y alumnos sobre las figuras de análisis

El fin de la presente encuesta es, a partir del análisis de las respuestas obtenidas, poder encontrar alguna evidencia principalmente al interrogante ¿si las figuras de análisis son un objeto institucional, impuesto por el docente o que no surgen en forma natural a la hora de resolver un problema, demostración o construcción? Para dicho análisis, a continuación se presentan: la pregunta, los gráficos realizados a partir de los datos obtenidos, tanto al encuestar a docentes como alumnos, seguidos los gráficos de un breve análisis sobre cada una de las respuestas obtenidas.

2.1. Encuesta

A continuación se observan los gráficos de los datos recogidos de las encuestas llevadas a cabo a doce profesores de matemática y a nueve alumnos del profesorado de matemática de distintos institutos donde se trabaja con figuras de análisis.

- ¿Qué entiende por “figura de análisis?

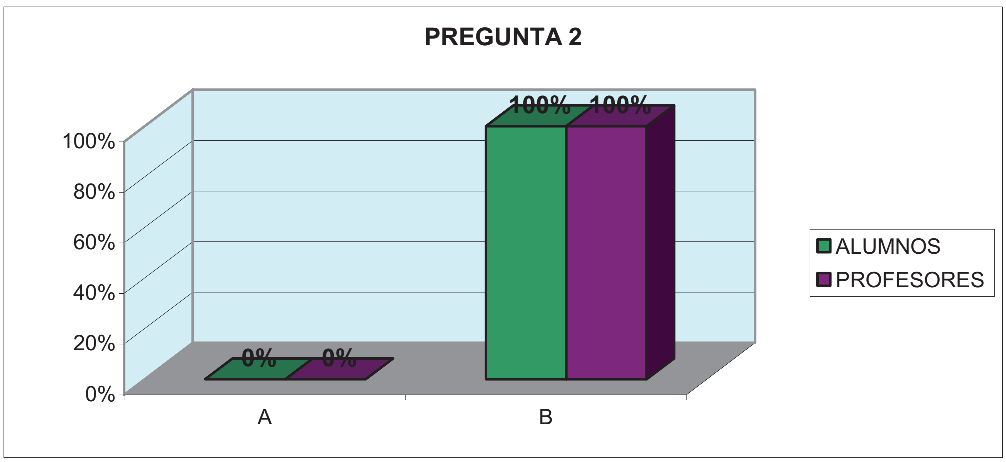


REFERENCIAS	
A	Un dibujo preciso, exacto que se realiza al resolver un problema o realizar una demostración.
B	Un dibujo a mano alzada que se realiza al resolver un problema o realizar una demostración.
C	Un gráfico dado con el enunciado del problema.

Figura 64: Gráficos de las respuestas Nº 1 de la encuesta

Puede observarse en los resultados obtenidos en las encuestas, tanto en el caso de docentes como de los alumnos, se considera a las figuras de análisis como un dibujo que se realiza al momento de resolver el problema y que no viene dado junto al enunciado del mismo problema. Entre ellos, la mayoría, en ambos casos, reparan en que no es importante la precisión de dicho dibujo, al responder que puede realizarse a mano alzada. Es importante destacar, aunque los porcentajes son distintos, que no se observa una diferencia significativa entre las respuestas dadas por docentes como por los alumnos.

- ¿Utiliza, usted, habitualmente figuras de análisis?

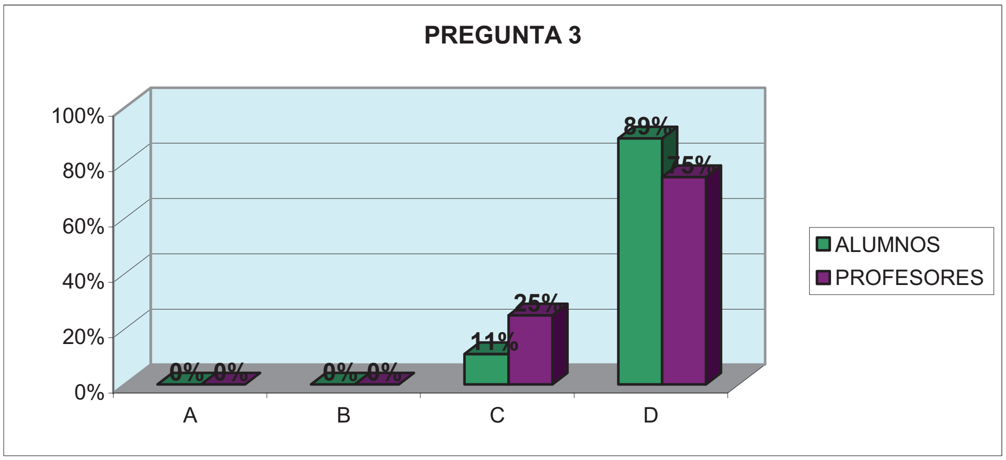


REFERENCIAS	
A	No
B	Si

Figura 65: Gráficos de las respuestas Nº 2 de la encuesta

Es notable que todos los encuestados, en un cien por cien, sin importar su rol en el escenario escolar, respondieron que usan habitualmente las figuras de análisis, lo cual les brinda, a las figuras de análisis, un papel importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La pregunta que prosigue intenta cuantificar este término de “habitualmente”.

En el caso de haber respondido si a la pregunta anterior, ¿con qué frecuencia las realizas a la hora de resolver un problema o realizar una demostración relacionados con geometría?

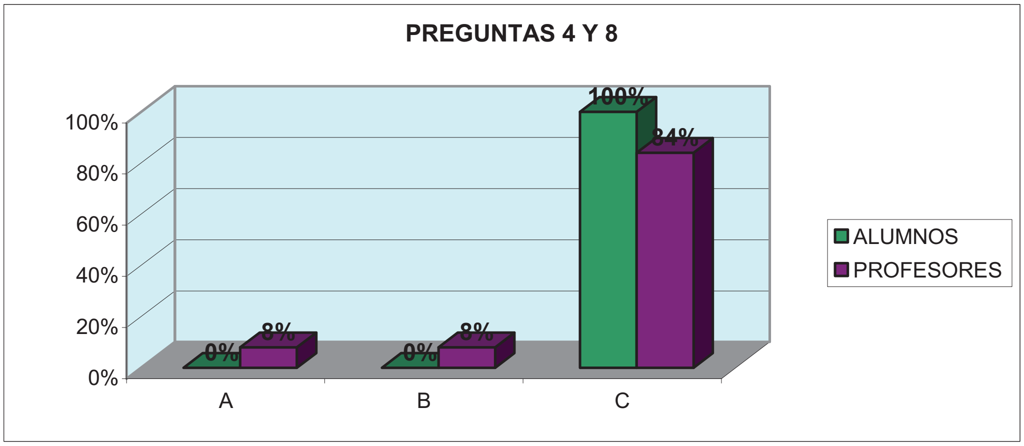


REFERENCIAS	
A	Rara vez.
B	Pocas veces.
C	Algunas veces.
D	Siempre.

Figura 66: Gráficos de las respuestas Nº 3 de la encuesta

Al momento de responder con que frecuencia emplean las figuras de análisis en la resolución de un problema, las opciones elegidas fueron "algunas veces" y en su mayoría "siempre". Lo más notable para destacar es que el porcentaje de alumnos que respondieran "siempre" es mayor en comparación de los docentes que eligieron esta opción. Desprendiéndose la idea de que las figuras de análisis son más útiles para los alumnos que para los docentes, al menos en la muestra tomada para esta encuesta.

- Su utilización la definiría como:

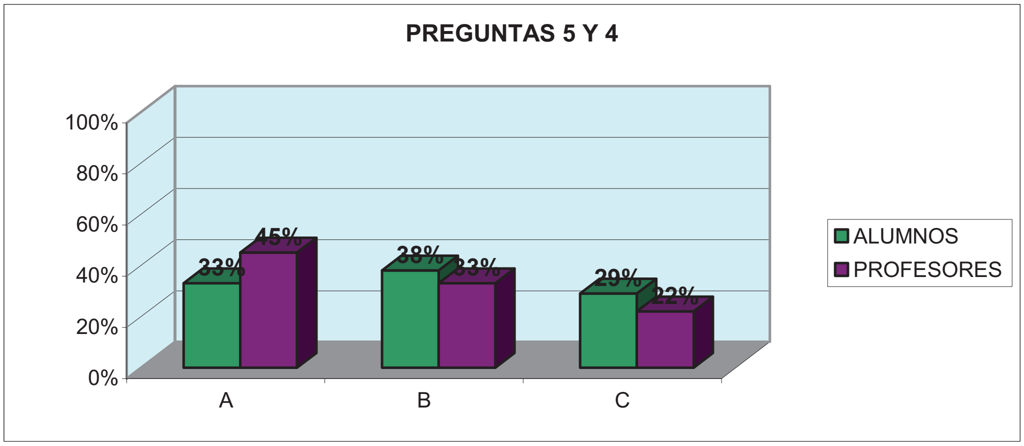


REFERENCIAS	
A	Poco útil, no siempre permite entender el problema.
B	Útil, ya que permite ver todos los datos dados en el problema.
C	Muy útil porque permite no solo volcar los datos dados en el problema sino además tener una visión más general de la situación.

Figura 67: Gráficos de las respuestas Nº 4 y 8 de la encuesta

Y confirmando lo que se analizó en la pregunta anterior, a la hora de responder sobre la utilidad de las figuras de análisis son los alumnos, en su totalidad quienes repoden sin dudar que dichas figuras son "muy útiles", mientras que entre las respuestas que dieron los docentes se puede hallar una gama que va desde "poco" a "muy útil". Lo que lleva a preguntarse porqué aquellos docentes que lo consideran a las figuras de análisis poco útiles siguen utilizándolas ya que como se observó en la pregunta Nº 2 todos decían utilizar las figuras de análisis al resolver un problema aún pensando que no son útiles, entonces ¿por qué realizarlas?, interrogante que quedará pendiente.

¿En qué momento emplea las figuras de análisis? (puede señalar más de una respuesta)

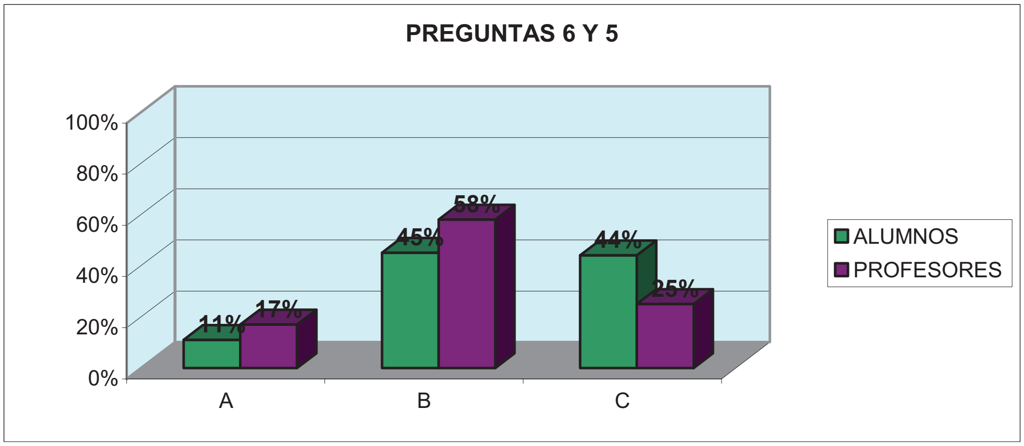


REFERENCIAS	
A	A la hora de resolver un problema geométrico.
B	Realizar una demostración geométrica.
C	En un construcción geométrica.

Figura 68: Gráficos de las respuestas Nº 5 y 4 de la encuesta

Dejando de lado la frecuencia de su utilización, la pregunta Nº 5 para los alumnos como la cuarta para los docentes hace referencia frente a que clase de actividades son empleadas las figuras de análisis. Se recuerda que en todos los casos la idea era trabajar en la clase de geometría por tal razón entre las opciones no se incluyeron opciones que pueden encontrarse fuera de este campo. Las respuestas abarcan las tres opciones dadas: resolver un problema, una demostración o una construcción geométrica, siendo la última de ellas la menos elegida pero con porcentajes con una diferencia no muy marcada entre las otras dos opciones. Vale destacar que entre los alumnos responden en mayor parte usar las figuras en la demostración geométrica mientras que los docentes eligieron en mayor parte utilizarlas a la hora de resolver problemas.

◆ Si recuerda las primeras veces que realizó estas figuras de análisis, fue durante su trayectoria por:



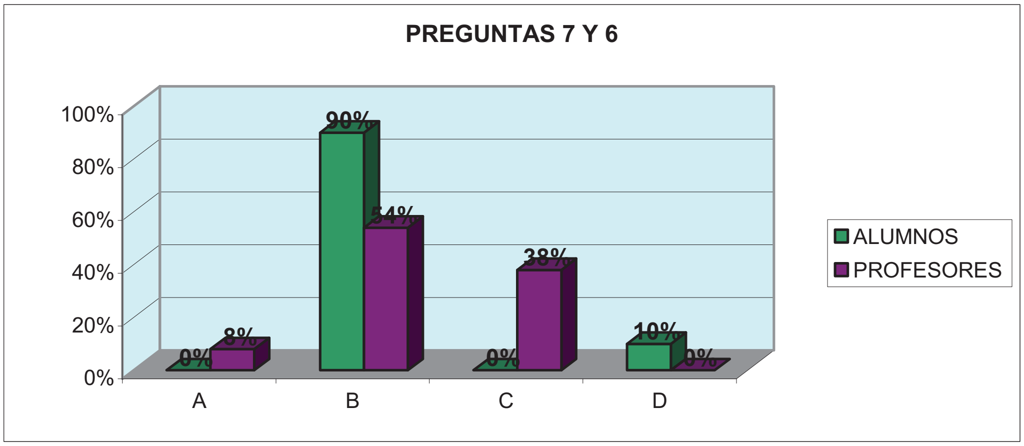
REFERENCIAS	
A	En la escuela primaria.
B	En la escuela secundaria.
C	En el nivel terciario.

Figura 69: Gráficos de las respuestas Nº 6 y 5 de la encuesta

Intentando responder a la pregunta de cuál es el origen de las figuras de análisis, se tomó como base que las figuras de análisis se utilizan en el escenario académicos y se consideró los tres niveles de educación recorridos por los alumnos quienes eran encuestados.

Tanto alumnos como docentes, coinciden en que la minoría responde que es en el nivel primario cuando las empleaban por primera vez, aquí si con porcentajes bien marcados. En cambio, las cantidades entre las respuestas de los alumnos entre el nivel secundario y terciario es mínimo, en cambio en el caso de los docentes la diferencia es más marcada, pero en ambos casos es el nivel secundario donde la mayor parte responder haber utilizado las figuras de análisis por primera vez.

Volviendo a estas primeras veces que utilizó las figuras de análisis piensa que su origen fue dado por:

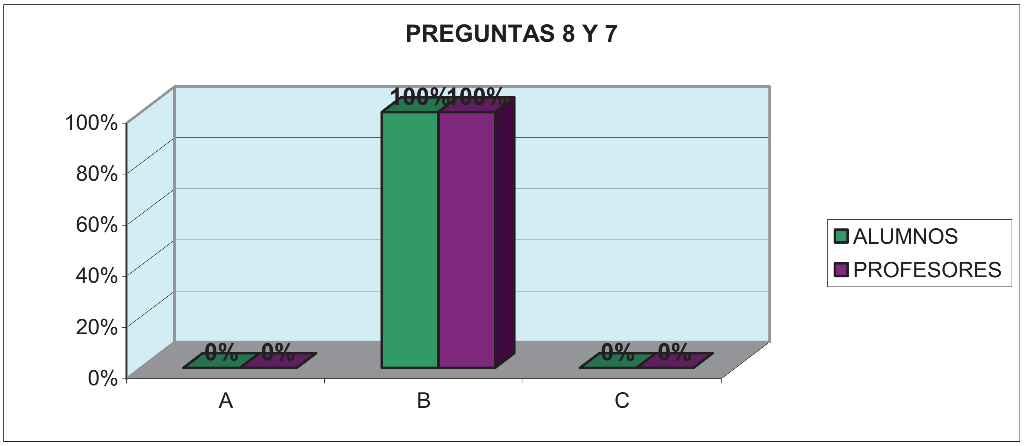


REFERENCIAS	
A	Una elaboración personal que nació naturalmente.
B	Aportes y sugerencias del docente.
C	La imposición del docente.
D	En los libros de textos.

Figura 70: Gráficos de las respuestas Nº 7 y 6 de la encuesta

En la pregunta Nº 7 para los alumnos y la sexta para la encuesta realizada a los docentes, es la primera ocasión en el presente análisis, en donde se encuentra una diferencia bien marcada entre la visión que tienen los alumnos y los docentes sobre el origen de las figuras de análisis. Aunque en ambos casos, la mayoría responde que su origen se debe a los aportes y sugerencias de los docentes, los porcentajes son muy diferenciados. En el caso de los alumnos, las respuestas dan idea de que las figuras de análisis tienen su origen en el discurso matemático escolar: tanto teniendo en cuenta a los docentes como a los libros de textos. En cambio, en las respuestas de los docentes, ellos no tienen en cuenta los libros de textos y por otro lado, si señalan la diferencia entre ser “sugeridas” como “impuestas” por el docente, un 8% sólo responde que provienen de una “elaboración personal que nació naturalmente”, aspecto que no fue tenido en cuenta entre las respuestas de los alumnos.

- Como futuro docente: ¿aconsejaría a sus alumnos a utilizar estas figuras de análisis? ¿En qué forma lo haría?



REFERENCIAS	
A	No las recomendaría/ recomiendo.
B	Sí, las aconsejaría/aconsejo confeccionar.
C	Sí, las obligaría/obligo su confección.

Figura 71: Gráficos de las respuestas Nº 8 y 7 de la encuesta

Y en esta última pregunta como alumnos del profesorado de matemática, se les ha preguntado si como docentes aconsejarían el empleo de las figuras de análisis, puede observarse que tanto alumnos, futuros docentes, como los docentes ya en labor, coinciden en un cien por cien, que aconsejarían confeccionarlas pero no con un carácter obligatorio.

2.2. Diferentes ideas sobre las figuras de análisis

Aunque en el punto anterior se ha analizado cada una de las respuestas dadas, se considera que es importante hacer algunos comentarios sobre la última pregunta en donde los encuestados debían explicar las razones de haber optado por las opciones de: no aconsejar el uso de figuras, aconsejar su empleo o darle un carácter obligatorio, ya sea como profesores o a los alumnos como futuros docentes.

La mayoría de los docentes encuestados habla de aconsejar a sus alumnos el uso de las figuras de análisis, en uno solo de ellos emplea la palabra imposición diciendo: “porque si bien en un primer momento fueron impuesto, ahora son un instrumento de gran ayuda para resolver distintas situaciones” (profesora con 25 años de antigüedad).

Así también en la mayoría de las explicaciones se mencionan las figuras de análisis como: “(…) una forma de organizar los datos y relaciones descubriendo el camino para averiguar datos faltantes” (profesora con 16 años de antigüedad), de este modo, otro encuestado establece que la figura de análisis “permite visualizar posibles relaciones, los elemento de la figura, muchas veces, nos traen a la mente, propiedades, conceptos matemáticos que no estamos usando con frecuencia o que creemos que no son significativos” (profesora con 14 años de antigüedad). Estos son dos ejemplos que reflejan la relación que existe entre las figuras con el hecho de volcar en las mismas los datos e incógnitas dadas en el enunciado del problema, casi todos dejan registro de esta relación entre el dibujo y los datos dados. Además, otros docentes se refieren al proceso de la visualización pero solo uno de ellos enfoca su decir al proceso cognitivo, respondiendo: “la visualización es el punto fuerte de las figuras de análisis y permite agilizar el pensamiento formal” (profesora con 8 años de antigüedad).

A diferencia de los docentes, en las respuestas que dan los alumnos, como futuros profesores, puede verse que en su mayoría aconsejan el uso de las figuras, con lo cual es clara la evidencia de que las figuras de análisis existen en forma explicita en el discurso matemático escolar, aunque no como un elemento obligado, impuesto por el docente, sino recomendado. Es así que encontramos respuestas como:

“Las aconsejaría por que ayudan para resolver problemas o demostraciones. Permiten ver los datos que uno tiene y obtener otros que no brindan los datos. No las obligaría a usar porque no considero que este bien obligar a nadie a hacer algo, además cada persona resuelve de formas distintas las cosas" (alumno encuestado de 2º año del profesorado).

"En primer lugar, las recomendaría en tanto a mí me resultan de gran utilidad en la medida en que me permiten poder interpretar un enunciado abstracto. Tanto en construcciones, como en demostraciones. Considero que la figura de análisis representa un primer acercamiento al ejercicio planteado y permite vislumbrar el camino que se tomará para dar inicia a su resolución" (alumna encuestado de 2º año del profesorado).

Puede decirse que aunque los alumnos encuestados respondan que son de gran utilidad, las figuras de análisis, en la resolución de problemas, es un hacer muy personal, y que tal vez una figura de análisis confeccionada por una persona no pueda ser utilizada o comprendida por otra quien se enfrenta al mismo problema, esto se debe a que al elaborar la figura se pone en juego las imágenes mentales del individuo y se exteriorizan mediante el dibujo o símbolos sobre el mismo. Pero aún siendo la representación misma algo tan personal del sujeto que actúa frente al problema puede verse que existen regularidades en las respuestas, tanto de alumnos como docente. En todos los casos, se deja evidencia que frente a la lectura del enunciado, se realiza una representación, en la cual se vuelcan los datos, se señalan las incógnitas y luego se trabaja sobre los mismos. Estos puntos estarían tratando de normar una práctica institucional, corroborando lo que afirma Briceños y Cordero al concebir "a la graficación como una práctica social donde se desarrolla estudios a través del 'uso de las gráficas' en prácticas institucionales" (2008, p.4).

Volviendo al análisis de los resultados obtenidos en la encuesta, aun siendo alumnos, ellos también hacen referencia al proceso de visualización justificando el uso de las figuras diciendo: "porque esta les permitirá visualizar todos los datos que fueron dados en dicho problema y a partir de allí poder encontrar las distintas alternativas para resolverlos" (alumna encuestado de 4º año del profesorado).

De esta manera se intentó dar registro de las opiniones que tienen dos de los elementos que participan en el discurso matemático escolar: docentes y alumnos. A continuación se analizará otro factor del discurso como son los libros de texto.

3. Las figuras de análisis en los libros de textos y otros

Los libros de textos cumplen un rol importante en el discurso matemático escolar, al respecto Castañeda establece que, entre algunas de sus funciones, son "fuente de consulta del saber que se estudia, así como la de organizador en la creación de programas de estudio, estructuración de cursos y seminarios" (2006, p.254). Es así como el autor habla de dos funciones referidas: una el contenido en si, mientras que la otra, hace referencia a la organización y estructuración de dichos contenidos. Por tal motivo, es que se considera importante para la presente investigación indagar como se presentan las figuras de análisis en los libros de textos.

En los trabajos de Puig (2008) y Siñeriz (2002) se hace referencia a las figuras de análisis o figuras auxiliares como uno de los tres métodos para la resolución de problemas con regla y compás, junto al método de dos lugares y figura semejante. Siendo otro de los componentes que llevó, junto a los aportes de Castañeda, al análisis de diversos libros de textos escolares o tutoriales on-line, en los cuales puede encontrarse autores de distintas nacionalidades quienes sugieren la utilización de "figuras de análisis" o "figuras auxiliares" en la resolución de problemas matemáticos.

En el siguiente cuadro, se resumen los datos recogidos en la exploración de los textos, para su fácil lectura se han tomado como referencia además del o los autores, el título, año y país de pertenencia de la obra. Así como también, se ha confeccionado una clasificación de los textos según sean: tutoriales on-line, libro de textos escolares, libros de didáctica u otros, como pueden ser programas o evaluaciones, en el caso de los textos escolares se ha detallado el nivel educativo para el cual están destinados y la materia pues algunos no pertenecen al área de matemática. El orden dado en el cuadro es arbitrario.

Clase de texto	Autor/es	Título	Año y País	Observación
Tutorial on-line Matemática	Escuela Agrotécnica	Una aventura matemática: El teorema de Pitágoras	2005 Argentina	En el apartado referido a las aplicaciones del teorema de Pitágoras, antes de presentar un problema se sugiere: “Cuando un problema indica una figura geométrica, es recomendable dibujar .A esa representación grafica se la llama figura de análisis. Conviene, asimismo volcar en ella los datos e incógnitas y nombrar además, los datos y vértices que fuesen necesarios. A partir de este dibujo resulta más sencillo elaborar un plan para organizar la resolución.” Y en la resolución del problema, se enumeran una serie de pasos pudiendo leerse en el segundo ítem la siguiente recomendación: “Hacer una figura de análisis y elaborar un plan”.
Tutorial on-line Matemática	Fuxman J. y Laplagne, S.	Curso Interactivo de Geometría, con el Cabri	2000 Argentina	A pesar de ser una página sobre construcciones geométricas a partir del empleo de un software especifico, en el nivel avanzado se presenta el siguiente problema “Construir el triángulo ABC sabiendo que BAC = 60° y que el perímetro del triángulo es igual a 4 veces la altura desde A” y continúan explicando los autores que la forma de pensar el problema antes de pasar a la utilización de la computadora es: “La idea acá, es colocar los tres lados del triángulo sobre una recta y ver que podemos obtener de ello. Hagamos, entonces, una figura de análisis”.
Texto escolar Matemática Nivel: superior	Cobos, C., Cobos, C., Rodríguez, A. y Salinas, J.	Geometría para ingenieros	2001 España	“Utilizaremos como figura de análisis la determinación de la intersección del cono y el cilindro (…)” (p. 297), aunque esta referencia se establece al determinar los puntos notables de la intersección y no en la resolución de problemas en general.
Texto escolar Matemática Nivel: superior	Coló, A. y Patritti, H.	Congruencia, homotecia y semejanza	2008 Uruguay	Puede leerse al comienzo de varias soluciones de problemas geométricos, frases similares a la siguiente: “consideremos la figura de análisis indicada donde suponemos el problema resuelto” (p. 116).

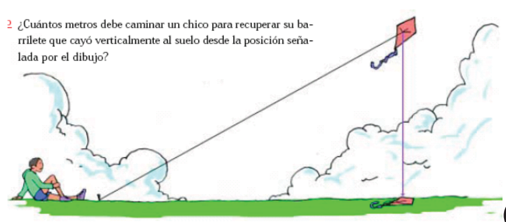
Tutorial on-line Matemática	Fuxman, J.	Misceláneas Curso interactivo de matemática: Clase 6 - Vectores y geometría.	2001 Argentina	En este tutorial puede leerse ante la resolución de un problema referido a vectores cuyos extremos se encuentran en la superficie de una esfera: “Hagamos una figura de análisis para comprender mejor lo que vamos a hacer, aunque desgraciadamente no podemos hacerlo en 3D (…)”.
Texto escolar: Dibujo técnico Nivel: medio	Rendon, A., Banegas, R. y Quintana, J.	Dibujo técnico 2º (Bachillerato) Cuaderno de actividades 2	2004 España	Al trabajarse en el capítulo Nº 3, referido a geometría métrica, los temas de rectas tangentes, los autores recomiendan a la hora de realizar una construcción: “Lo que, naturalmente, obliga a elegir y trazar una figura de análisis previa, situando en ella los datos necesarios y ‘volcando’ sobre la misma cuantos contenidos teóricos se piensen, a priori, que contribuirá a la solucionar el problema” (p. 33). También añaden que esta figura de análisis permitirá estudiar la cantidad de posibles soluciones al problema planteado.
Texto escolar: Matemática Nivel: superior	Universidad Nacional de Mar del Plata	Matemática ingreso Función polinómica	Año: n.d. Argentina	En este texto se presentan problemas junto a su correspondiente figura de análisis para que el alumno los resuelva, en todos estos casos el trabajo de interpretación del problema por parte del alumno ya se encuentra resuelto al dar el dibujo con los datos y su incógnita. Por ejemplo, en un ejercicio relacionado con física se puede leer: “en la siguiente figura de análisis, tenemos una lente (una lupa es una lente, y es común quemar papel por la concentración de los rayos del sol con la lupa), se pueden determinar dos focos f y f* son simétricos respecto del centro de la lente (punto 0)” (p. 16), donde puede notarse que también se fija la simbología a utilizar.
Texto escolar Matemática Nivel: superior	Echegaray, J.	Introducción a la geometría superior	1868 España	El autor hace referencia a un método llamado “transformación de figuras”, utilizado en lo que denomina “la moderna geometría”. Explicando este método, el autor propone “transformar la figura propuesta en otra, en la que sea más fácil que en aquella determinar ciertas relaciones, y pasar de esta segunda figura auxiliar a la primitiva” (p. 36) y continua afirmando que este método es eficaz cuando debe estudiarse la proyección de las cónicas.
Texto escolar Matemática Nivel: superior	Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M.	Matemática Básica. Volumen 1 Funciones	2002 Argentina	En unos de los problemas resueltos en este libro, las autoras presentan un dibujo que es acompañado por la siguiente leyenda “realizando un figura de análisis de la cabaña (…)” (p. 143) y continúan con la resolución algebraica del problema.

Texto escolar Matemática Nivel: superior	Fernández, E., Moretto, G., et al.	Matemática para el Ingreso (ingreso a la Universidad Nacional del Litoral	2007 Argentina	"Hagamos primero una figura de análisis y demos nombre a los elementos de esa figura" (p. 264), es así como comienza la solución a un problema en el cual debe calcularse el perímetro de un rectángulo.
Texto escolar Matemática Nivel: medio	Fuster, T.	Matemática - Cuarto año Ejercicios propuestos en escritos y pruebas semestrales	Año: n.d. Uruguay	"7) a) Escribe la definición de semirrecta (puedes usar una figura de análisis para ayudarte) 8) a) Escribe la definición de segmento (puedes usar una figura de análisis para ayudarte)" (p. 1). Aunque en ambos casos se solicita una definición de un concepto geométrico, igualmente se sugiere utilizar una figura de análisis que permita la visualización del concepto a definir. La cuestión es saber que clase de definición espera el autor si se parte de un dibujo de la figura, por ejemplo en el caso del segmento, ¿una gráfica del mismo permite llegar abstraer una definición como que el segmento es el conjunto de puntos determinados por la intersección de dos semirrectas de igual dirección pero sentido opuesto?
Texto escolar Dibujo técnico Nivel: superior	Mira, J. y Gomis, J.	Ejercicios de dibujo técnico sistemas de representación	1993 España	En las soluciones de varios problemas de construcción de un dibujo técnico se hace mención a las figuras auxiliares para ubicar determinadas posiciones de los elementos geométricos. Se detallan dos frases a modo de ejemplo: "En una figura auxiliar se ha obtenido tres segmentos (…) con los cuales se ha construido un triángulo" (p.6 4). "para materializar este proceso, en una figura auxiliar, se ha dibujado el triángulo (…)" (p. 216).
Texto didáctico	Roanes, E. y Roanes, E.	Nuevas tecnologías en geometría	1994 España	En uno de los ejercicios referidos a la construcción de circunferencias tangentes se menciona "tratar de prever aproximadamente la situación de las figuras auxiliares que van apareciendo en el proceso de construcción" (p. 74). Puede verse que durante la construcción que se realiza utilizando un software se recomienda estas figuras auxiliares para reducirlo a problemas ya resueltos.
Reglamento Matemática Nivel: medio	Hogar Escuela "María Benita Arias"	Reglamento general del intercolegial de matemática	2008 Argentina	Es interesante ver como a pesar de ser muy útiles las figuras de análisis en este reglamento se ha detallado entre los criterios de evaluación que "No se aceptarán como válidas: Justificaciones hechas con mediciones sobre la figura de análisis" (p. 2).

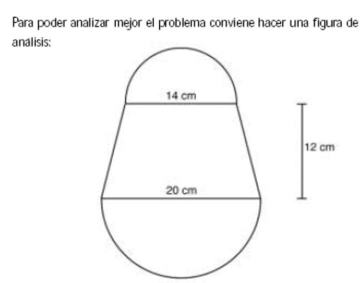
Texto escolar Matemática Nivel: medio	Quintero, A. y Costas, N.	Geometría	1994 Puerto Rico	Al demostrar geométricamente a partir del cálculo del área de rectángulos el desarrollo algebraico del cuadrado de un binomio, las autoras afirman que "para probar deductivamente este teorema [del área del rectángulo] debemos acudir a la siguiente figura auxiliar que facilita grandemente la comprensión de todo el proceso deductivo" (p. 236). Luego al demostrar el teorema de Pitágoras, también se recurre a una figura auxiliar y se sigue un proceso deductivo similar al mencionado en el primer caso.
Texto escolar Matemática Nivel: medio	Liceo Nº 4	Matemática 1. Trabajo práctico: funciones	Argentina	En dos ejercicios donde se solicita el cálculo de los ángulos interiores o exteriores de triángulos donde se dan dos datos se puede leer entre los ítems, antes de enunciar lo que se debe calcular se detalla "Hacé figura de análisis del triangulo (…)" (p. 37).
Programa de cátedra Dibujo técnico Nivel: medio	Universidad de Extremadura	Dibujo técnico I y II	1997 España	Aunque el dibujo técnico tiene como objetivo realizar gráficos precisos como se plantea en el texto, también puede leerse la utilización de dibujos simples utilizados como una técnica para llegar a realizar el dibujo solicitado, "(…) aplicando las distintas estrategias de resolución de problemas (figura de análisis, justificación de los pasos, considerar el ejercicio resuelto, etc.)" (p. 209).
Texto didáctico	Sessa, C.	Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas	2005 Argentina	"(…) como cuando realizamos una figura de análisis que nos permite encontrar las relaciones necesarias para una construcción. A este tipo de tratamiento se le da el nombre de análisis" (p. 47), proceso que se opone al tratamiento por síntesis donde se procede de los datos a las incógnitas a revelar en el problema. En cambio las figuras de análisis explica la autora son de análisis pues los datos e incógnitas están ambas presentes en el mismo momento al igual que en una ecuación, si se refiere al álgebra en lugar de la geometría.
Texto escolar Matemática Nivel: medio	Dirección Gral. De Cultura y Educación. Gob. De la provincia de Buenos Aires.	Matemática 7. Cuaderno de trabajo Nº 1	2006 Argentina	Al iniciar las actividades integradoras, casi al final del libro, los autores mencionan entre las sugerencia para trabajar en matemática, las siguientes: "Leéla atentamente. Tratá de explicarla con tus propias palabras y usá tablas, diagramas o gráficos, si te resulta necesario" (p. 143)

Texto didáctico	Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J.	Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje	1997 España	En un problema donde se pide calcular la distancia al horizonte, los autores aclaran "aquí no disponemos de ningún método material para efectuar concretamente la medición y deberemos recurrir a un 'modelo gráfico' de la situación" y continúan explicando haciendo referencia precisa del problema a resolver, "la Tierra será 'un círculo' (considerando un corte transversal), el observador estará en lo alto del círculo (…)", para luego resolver el problema detallando "Hagamos una figura en un trozo de papel tranzando (…)" (p. 50).
Texto escolar Matemática Nivel: medio	Dieudonné, J.	Álgebra Lineal y Geometría Elemental	1964	En el prólogo de este libro puede leerse el siguiente comentario: "Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto (...). Es deseable liberar al alumno cuanto antes de la camisa de fuerza de las figuras" (citado por Doniez, 2000a, p. 9). Este libro de texto es un ejemplo de cómo el espíritu algebraico oscureció el trabajo geométrico, cómo concebir un libro de geometría sin ningún gráfico.
Texto escolar Matemática Nivel: superior	Gutiérrez, A.	Didáctica del análisis, la geometría y la probabilidad y la estadística de la enseñanza secundaria. Geometría	2008-09 España	Es importante destacar las recomendaciones que da el autor en este módulo para la licenciatura de Matemática de la Universidad de Valencia: "si no sabes cómo empezar a resolver el problema [construcción de un trapecio dados los dos lados paralelos], usa la siguiente sugerencia: - Dibuja a la derecha la figura solución, es decir un trapecio con los nombres de los lados (…)" (p. 8).
Texto didáctico	de Guzmán, M.	¿Cómo trabajar en Matemáticas?	2000 Chile	Haciendo el autor referencia a los pasos a tener en cuenta en el procedimiento de un problema matemático, en el tercer punto, presenta: "Dibuja a tu modo. Repite a tu modo las gráficas, imágenes y esquemas que el texto te va proporcionando. Hazte tú mismo las que te puedan ayudar a dominar lo que lees" (p. 1).
Texto didáctico	Itzcovich, H.	Iniciación al estudio didáctico de la geometría	2005 Argentina	El autor expone un problema en donde se debe establecer si las áreas de dos triángulos determinados por las diagonales de un trapecio son iguales. En el libro se presentan dos figuras, en un principio, un caso particular de un trapecio isósceles, y donde la respuesta es "fácil de identificar", pero en un segundo caso se presenta un trapecio escaleno y al respecto se menciona que "(…) la figura de análisis bien podría 'sugerirles' a algunos alumnos que las áreas son diferentes" (p. 57). En otro problema vuelve a recomendar una figura de análisis aunque afirma que "(…) la figura de análisis no es suficiente para resolver el problema" (p. 57) y agrega "una figura de análisis ayuda a comprender un poco mejor qué relaciones están establecidas, y cuales hay que demostrar" (p. 58).

<table>
<tr>
<td>Texto escolar
Matemática
Nivel: medio (adultos)</td>
<td>Ministerio de Educación de la Nación</td>
<td>Matemática 6</td>
<td>Año: n.d.
Argentina</td>
<td>Para trabajar el tema de resolución de triángulos rectángulos, se señala antes de iniciar con las actividades: “es necesario hacer una figura de análisis que nos permita visualizar la situación que se está considerando. Por ello le proponemos que al resolver los siguientes problemas comience por hacer la representación gráfica de cada uno de ellos” (p. 55). Enumera una serie de ejercicios referidos al teorema de Pitágoras y entre uno de ellos se presenta una situación mediante un dibujo (o representación pictográfica) pero utiliza el término “dibujo” pues no es una figura de análisis ya que con la definición que se ha dado en este trabajo de investigación, en dicho dibujo no se vuelca ningún dato o incógnita, como ocurre en paginas más adelante donde si se presenta otro dibujo pero utilizando el término “figura de análisis”.



(p.55)



(p. 87)
Pero esta diferencia es bien marcada en el recorrido de las actividades porque luego en la actividad 29 se establece “En este caso como en el anterior usted no está haciendo una figura de análisis. Está dibujando en escala para poder medir una longitud que desconoce” (p. 93) y sólo puede observarse un triángulo rectángulo donde únicamente esta indicado el ángulo recto.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Evaluación Dibujo técnico</td>
<td>Universidad Complutense de Madrid</td>
<td>Pruebas de acceso a los estudiantes universitarios de los alumnos de Bachillerato Logse. Materia Dibujo técnico</td>
<td>2001 España</td>
<td>En este examen de la materia dibujo técnico se presenta una serie de problemas y su resolución. En la explicación de la solución de una construcción de un cuadrado bajo ciertas condiciones comienza diciendo “imaginada la solución en una figura de análisis, puede observarse que (…)” (p. 9) y continua la explicación de todo el procedimiento para llegar a dibujar el cuadrado indicado.</td>
</tr>
<tr>
<td>Texto didáctico</td>
<td>Castillo, L.</td>
<td>El estudio de los conceptos matemáticos. Enseñanza y aprendizaje en la educación tecnológica</td>
<td>2006 Colombia</td>
<td>Se plantea una serie de reglas metodológicas para docentes y alumnos para llegar a la correcta resolución de de ejercicios de fundamentación y demostración de Conceptos matemáticos. Estas reglas heurísticas y sus correspondientes impulsos se presentan en un cuadro que las vincula
<table>
<tr><th>IMPULSOS HEURÍSTICOS</th><th>REGLAS</th></tr>
<tr><td colspan="2">FASE 1: DE ORIENTACIÓN</td></tr>
<tr><td>Lean varias veces el enunciado</td><td rowspan="3">Conocer la incógnita, los datos y las condiciones que relacionan los datos</td></tr>
<tr><td>Determinen lo dado" y "lo buscado"</td></tr>
<tr><td>¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?</td></tr>
<tr><td>Piensen sí os conveniente una representación grafica</td><td rowspan="2">Confeccionar una figura de análisis</td></tr>
<tr><td>Introduzcan notaciones adecuadas
Qué letra designaría la incógnita?</td></tr>
<tr><td>Expresen las tesis considerando las notaciones introducidas</td><td>Transformar la tesis en una expresión equivalente</td></tr>
</table>
Mas las figuras de análisis no sólo tienen su importancia en esta primera fase “de orientación” sino que en una segunda fase denominada “de elaboración” se sigue dando forma a esta figura, como puede observarse en la siguiente cuadro
<table>
<tr><td colspan="2">FASE 2: DE ELABORACIÓN</td></tr>
<tr><td>¿ Conocen algún problema semejante?</td><td rowspan="2">Recordar un problema conocido de estructura análoga</td></tr>
<tr><td>¿Pueden enunciar el problema de otra forma?</td></tr>
<tr><td>¿Qué fórmulas conocemos para llegar a la tesis?</td><td>Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.</td></tr>
<tr><td>¿Han empleado todos los datos?</td><td rowspan="3">Analizar datos y tesis</td></tr>
<tr><td>¿Han tenido en cuenta todas las Condiciones?</td></tr>
<tr><td>Compare la tesis con la fórmula ¿En cuáles elementos se diferencian?</td></tr>
<tr><td>Es necesario introducir elementos auxiliares en la figura?</td><td>Completar la figura por medio de construcciones auxiliares.</td></tr>
</table>
(p. 13).</td>
</tr>
<tr>
<td>Progama curso de capacitación</td>
<td>García, J., Rodríguez, F., Leal, M., et. al.</td>
<td>Programa de preparación nacional para profesores de Matemática de la Educación Preuniversitaria y Técnico Profesional</td>
<td>2007 Cuba</td>
<td>La recomendación presente en este documento de capacitación para profesores de matemática es “En muchas ocasiones el alumno no es capaz de interpretar un problema geométrico si no se le da la figura o no es capaz de hacer una figura genérica o incorpora información no dada a partir de la figura” (p. 13).</td>
</tr>
</table>

Texto para el docente	Gómez, J., García, F., Pina, et. al.	Matemáticas. Profesores de Enseñanza Secundaria	2003 España	Aunque no se hace mención a la utilidad o se da alguna definición de una figura de análisis, puede encontrarse en este libro que en las demostraciones de los teoremas se apoyan en figuras de análisis, aunque el término utilizado no es este sino simplemente dibujo. Algunos ejemplos son "Observando el dibujo tenemos que PO = P'O (…)" (p. 186) o "Atendiendo al dibujo, prolonguemos AP (...)" (p. 192).

Cuadro 3: Resultados del relevamiento de textos escolares

En el cuadro anterior puede observarse que las figuras de análisis o figuras auxiliares no sólo están presentes en textos referidos a matemática sino también por ejemplo se indican varios casos de su presencia en libros referidos a dibujo técnico, esto no es algo azaroso pues para la confección de determinadas construcciones de esta materia se requiere gran conocimiento de los conceptos geométricos como puede ser el trazado de rectas tangentes a una circunferencia, por ejemplo.

Si se analiza cronológicamente se puede observar que el abanico de libros consultados cubren una margen de años comprendidos entre el 1868 a 2008, una amplia gama, pudiendo así descartar que el concepto de "figura de análisis" no es algo reciente en las aulas. Además otro punto importante para destacar es la variabilidad de las nacionalidades de los materiales consultados que comprenden los países de Argentina, Colombia, Cuba, España, Puerto Rico y Uruguay, lo que muestra que las figuras de análisis no son un objeto perteneciente a un grupo restringido de docentes de una determinada cultura.

En el caso de los textos referidos a la didáctica de la geometría en todos ellos, los autores recomiendas enseñar a los alumnos un proceso para la exitosa resolución e incluido en este proceso heurístico se encuentra una forma gráfica de ordenar y organizar los datos dados y las incógnitas para poderlas relacionar y hallar así la solución. Coincidiendo los datos recogidos en los libros de textos con los procesos heurísticas detallados en el capítulo cuarto de esta investigación. Lo que intentan hacer implícitamente los autores de los libros referidos a la didáctica de la matemática, al dar indicaciones para la construcción y uso de figuras de análisis, es normar el uso de ellas al momento de resolver un problema.

Otro punto importante para destacar, es que en varios libros, en especial en los de textos escolares, se recomienda o se menciona el uso de dichas figuras pero en ninguno de ellos existe un apartado donde se mencione una definición o una explicación de la importancia de su uso o den explicación a su razón de ser.

Otro punto, a destacar en este análisis, es que ya sea al utilizar solo regla y compás o con el empleo de nuevas tecnologías como software específicos de geometría, como puede ser el Cabri, en ambos casos por igual se recomienda el empleo de figuras de análisis para la buena interpretación de los datos dados, antes de realizar la construcción ya sea en un papel o en la pantalla a través del uso del software. Es decir, la figura de análisis no esta asociada a la tecnología a utilizar sino que es parte del mismo proceso de resolución.

4. Conclusiones

El objetivo de este capítulo fue presentar distintos elementos del discurso matemático escolar para interpretar como se encuentran presentes las figuras de análisis dentro del aula, ya sea a través de casos puntuales, de encuestas realizadas tanto a docente como así también a alumnos de la carrera del profesorado de matemática, entre otros.

Otro factor analizado fue los libros de textos escolares, libros de didáctica de la matemática y otros, con el fin de responder ¿cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?, o si el uso de las figuras de análisis en geometría, ¿es comprendido por los estudiantes como necesario y útil o como algo impuesto por el discurso matemático escolar?

A la segunda pregunta planteada puede responderse que los alumnos les asignan, a las figuras de análisis, un papel importante y muy útil en la resolución. Respuesta que coincide con la lectura de los libros de textos, donde se recomienda y sugiere el realizar una figura de análisis antes de iniciar la resolución del problema, ya sea en textos propios de geometría, matemática o dibujo.

Pero intentando dar una respuesta completa a ¿qué factores influyen en el uso que se da a las figuras de análisis en las clases de geometría?, en el siguiente capítulo se presentarán casos en donde se emplean figuras de análisis pero en escenarios no académicos. El hilo de investigación del presente trabajo fue: en principio un análisis de las figuras de análisis en diversas culturas a través del tiempo, para dar con el análisis actual de las figuras en escenarios escolares para finalizar con el estudio de figuras realizadas en ámbitos no escolares.

Capítulo 6

Las figuras de análisis en escenarios no académicos

En el presente capítulo se presentarán casos que dan muestra del empleo de figuras de análisis en escenarios no académicos. Muchos de estos escenarios relacionados con distintas labores, en los cuales los individuos realizan dibujos que sirven de análisis de una determinada situación, por lo tanto dichos dibujos pueden clasificarse como figuras de análisis, pues no se trata, en su mayoría, de representaciones pictóricas a pesar de estar asociados a situaciones puntuales de la vida cotidiana.

En diversas situaciones los individuos se enfrentan a una explicación que viene acompañada de una representación que favorece la interpretación de lo narrado, como puede ser los manuales de distintos artefactos electrónicos, como se observa en la figura 72, donde se explica mediante un dibujo la forma en que debe conectarse un modem para su instalación. Pero estas imágenes no pueden considerarse figuras de análisis pues no son realizadas por el sujeto que se enfrenta al problema de instalación del artefacto, pero es importante destacar estos ejemplos porque ponen en evidencia el rol que juega la visualización frente a lo que puede ser un problema. Este tipo de dibujos está asociado con las representaciones pictóricas, en la clasificación que dan Hegarty y Kozhevnikov (en Ferrero, 2009).

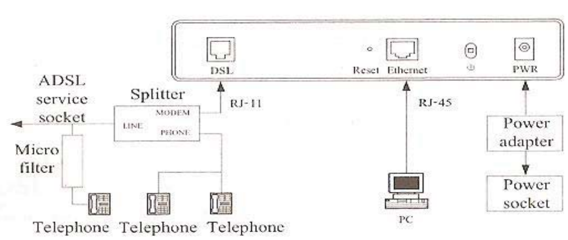


Figura 72: Esquema de conexión de un modem[33]

En el siguiente capítulo se presentan algunos ejemplos de figuras de análisis, realizadas por las personas que se enfrenta a distintos problemas que no se encuentran enmarcados dentro de una clase de matemática, sino en situaciones cotidianas, muchas de ellas realizadas en su quehacer laboral.

1. El empleo de figuras al momento de estudiar

Es cierto que este caso, en particular, no se aleja mucho de los escenarios académicos, pues está asociado a la acción de estudiar y a las técnicas que cada uno construye para el mejor rendimiento de su estudio. Vale destacar dos puntos al respecto: por un lado, las figuras de análisis aquí citadas, no surgen entro del aula o para resolver un problema planteado por el docente, sino que es el propio individuo quién decide realizar las figuras como parte de la técnica propia de estudio, que como se verá a continuación, no la favoreció del todo; y en segundo lugar, la especialidad de la materia de estudio no se encuentra relacionada con el área de matemática.

1. 1. Presentación del caso

Estos dibujos surgen en una conversación con una médica psiquiatra mientras me explicaba sus técnicas para estudiar al comenzar su carrera universitaria. En medio de la conversación realizó los dibujos que pueden observarse en las figuras 73 y 74.

Ellos responden a la idea de figura de análisis empleada en esta investigación, pues no tienen una precisión en su construcción y sirven para volcar los datos y analizarlos para resolver el problema, en este caso en particular, el problema consistía en elaborar una técnica propia y eficaz para el estudio universitario, más

[33] Imagen tomada del Manual del Usuario de ZXDSL 831/831B/831II/831BII

precisamente, que permitiera registrar la ubicación de los órganos en el cuerpo humano. Cuando la medica realizó el diagrama A (figura 73), fue para ejemplificarme la técnica que llevaba a cabo para estudiar, la cual consistía en realizar un dibujo que no se correspondía con los que ella observaba en los libros de texto, y a modo de ejemplo realizó el diagrama B (figura 74) que coincidía con la posición del corazón en el cuerpo humano como puede verse en la figura 75, ejemplo de cómo se representa habitualmente. Para su mayor claridad se ha decido incluir la figura 76, tomada de un libro de anatomía humana para comparar estas dos últimas imágenes.

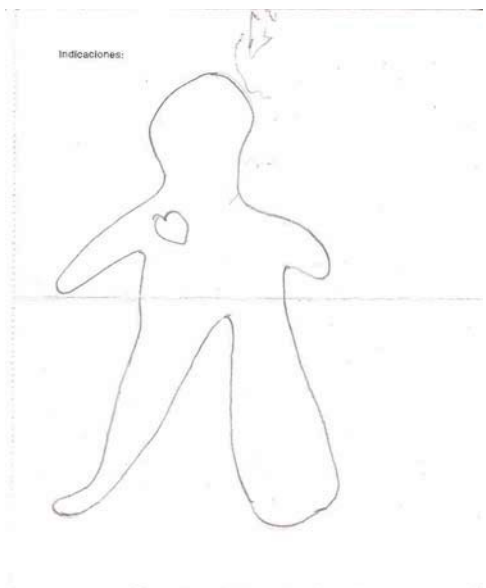


Figura 73: Diagrama A
estudio de anatomía

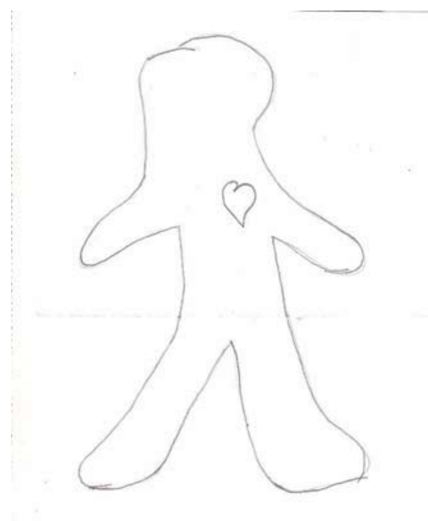


Figura 74: Diagrama B,
boceto de anatomía

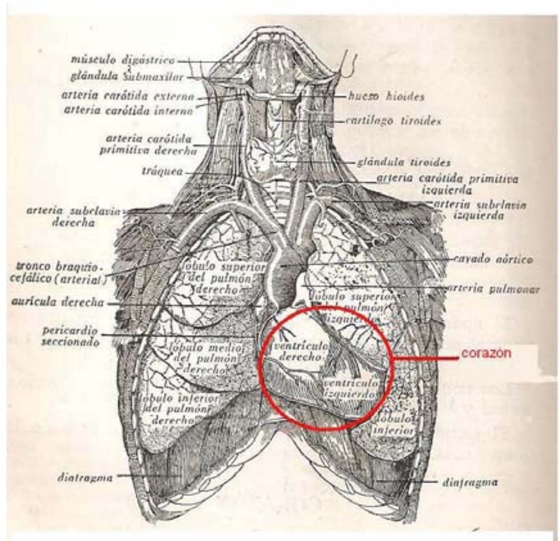


Figura 75: Ubicación del corazón en el cuerpo humano [34]

Frente a dichos diagramas se realizó luego una entrevista para interpretar con profundidad que factores llevaban a realizar un dibujo que no se correspondía con el que se presentan en los libros de textos de anatomía. A continuación se copian algunos fragmentos de la entrevista para su interpretación.

1. 2. Entrevista y comentarios

A continuación se transcriben algunos de los fragmentos de la entrevista semiestructurada llevada a cabo a la médica psiquiatra, realizada luego de tener las dos figuras ya detalladas. La entrevista completa puede encontrarse en el anexo 2 del presente trabajo.

> **E. (Entrevistador):** *¿Por qué realizaba un dibujo tan distinto del que aparecía en los libros de textos? ¿Qué la llevó a realizar algo tan diferente?*
>
> **M.P. (Médica psiquiatra):** *Se me ocurrió un método para acordarme qué órganos estaban a la derecha y qué cosa estaba a la izquierda*. (…)

[34] Imagen tomada de Dembo, A. (1938). Curso de anatomía y fisiología. Estudio del cuerpo humano. Buenos Aires, Argentina: Cesarini Hnos. Editores.

Es que lo que está en el cuerpo humano a la izquierda, en el dibujo que realizaba también está a la izquierda (del lector).

Puede notarse en este fragmento que las figuras de análisis surgen como parte de un método propio para registrar con mayor rapidez y precisión la ubicación de los órganos en el cuerpo humano. El problema podría ser el memorizar la posición los distintos órganos y frente a tal problema, la estudiante de medicina elabora un propio proceso, que como se vio en el cuarto capítulo donde distintos autores, en el proceso heurístico sugieren crear una figura auxiliar o de análisis como uno de los primeros pasos al enfrentarse a un problema. En este caso, nos encontramos con figuras resueltas fuera de la clase de geometría o de matemática, donde su origen esta dado por las propias necesidades del sujeto y no vienen sugeridas del exterior (libros de textos o docentes). Con respecto a las dificultades de un entorno distinto a las propias construcciones la entrevistada responde:

E.: *Pero todo parece muy confuso, ¿se le presentaron dificultades por variar lo que convencionalmente aparecía en los libros de textos?*

M.P.: *Sí (responde con mucho énfasis). Más adelante acepté a regañadientes que el criterio del libro era más conveniente, que mi dibujo.*

E.: *¿Podría precisar más detalladamente cuáles fueron las dificultades que le ocasionaron los dibujos que confeccionaba para estudiar?*

M.P.: *Sí, el tema es que se iba complejizando la materia (anatomía), y cada vez, había más gráficos y era preferible aceptar la convención de dibujarlo enfrente de uno.*

Puede verse que sus propias figuras de análisis, dibujos como lo llama ella, solo produjeron dificultades en lugar de facilitar la compresión, tantas fueron las dificultades que se acepta lo impuesto por el medio, por su entorno conformado por los docentes de la cátedra y los libros de textos. Ella habla de “convención”, nosotros podríamos ampliar el término diciendo que sus dibujos no respondían a las normas de graficación empleadas y referidas a la materia anatomía.

Al preguntarle por las figuras de análisis las define como:

> ***M.P.:*** *Es un gráfico o dibujo que da cuenta de un proceso abstracto, otorgándole "figurabilidad".*

> ***E.:*** *¿A qué se refiere con la palabra "figuralidad"? ¿Podría explicar el término?*

> ***M.P.:*** *Colocar una imagen para ejemplificar un concepto abstracto, y hacerlo más asequible.*

En su primera respuesta relaciona las figuras de análisis con conceptos abstractos aunque el ejemplo sea de algo concreto pero poco visible por lo tanto se continua la entrevista relacionándolas con su labor.

> ***M.P.:*** *Sí que las uso (…). Más o menos, en un cincuenta por ciento de las cosas que debo explicar.*

> ***E.:*** *Pero ¿cuándo con mayor frecuencia?*

> ***M.P.:*** *Cuando se me ocurre alguna manera de graficarlo, que ayude a figurarse mejor un concepto abstracto.*

Como en la explicación se continúa con la idea de representar solo conceptos abstractos, que sería correcto si uno trabaja con conceptos geométricos puros, pero si realiza una aplicación a una situación real la representación sería sobre algo concreto, por tal motivo se retoma el ejemplo de la ubicación del corazón que es un hecho concreto.

> ***E.:*** *Pero en el caso de su primer ejemplo la ubicación del corazón no es un concepto abstracto, ¿qué entiende por "concepto abstracto"?*

> ***M.P.:*** *Razonamientos que ayudan a entender procesos físicos o psíquicos que no se pueden ver ni tocar. Son sólo razonamientos, pero al graficarlos, se vuelve algo más familiar, que permite su aprehensión.*

Así se comprende que lo que la entrevistada entendía por la palabra "abstracto" no era el mismo significado que se le puede dar al mundo de las ideas del cual hablaba Platón sino que se refería abstracto al razonamiento que se realiza sobre la figura, sin importar si ésta representaba una idea o un objeto, sino que hace alusión a las representaciones mentales del sujeto. Al respecto aporta una mirada desde su profesión:

> ***M.P.:*** *Me resultan muy útiles a la hora de entender mecanismos complejos. (…) En el mecanismo de la idealización: se le atribuyen al objeto idealizado cualidades extraordinarias, que en realidad provienen del yo ideal del sujeto. Este queda con su libido objetal disminuida y el objeto idealizado, queda engrandecido a sus ojos. El sujeto está convencido de que el poder se irradia desde el objeto idealizado cuando en realidad las cualidades le son propias, y él las ha proyectado en el objeto. Como el objeto está en posesión de "sus" cualidades, el sujeto lo necesita cerca, ya que de alejarse se "llevaría consigo" todo la libido objetal depositada en él.*
>
> ***E.:*** *¿Cómo se relaciona su profesión con las figuras?*
>
> ***M.P.:*** *Estos complejos mecanismos, se pueden entender rápidamente, si uno dibuja al sujeto, con sus cargas libidinales, al objeto a ser idealizado, recibiendo las mismas, y las flechitas que van de uno al otro…, también se puede dibujar, como en una historieta, en un segundo cuadro, al sujeto idealizado agrandado, y al otro achicando que lo mira con ojos tristes…*

En otro momento de la entrevista, se retoma el concepto de abstracción cuando se entiende que las figuras de análisis son una materialización de una situación (en forma pictográfica o esquemática), al preguntarle como es la forma en que asocia a estas representaciones con un proceso abstracto, responde:

> ***M.P.:*** *Sería como ponerle alguna figura concreta, (una carita, una flecha, un dibujo alusivo), a algo que no la tiene , como para poder "operar" mentalmente con ese concepto, sin que se "escape" de la mente, por dificultad para imaginar nada en relación a él.*

Cuando se le pregunta por la naturaleza de las figuras de análisis responde:

> ***M.P.:*** *Algunas surgen de la propia imaginación y otras son aportadas por diversos autores.*
>
> ***E.:*** *Cuando habla de autores, ¿está pensado en el ejemplo de los diagramas de inicio?*
>
> ***M.P.:*** *Sí, porque en algunos textos hay gráficos y muchos docentes usan las propias. (…)*
>
> *Tiene como origen la necesidad de transmitir de forma clara, concreta, e incluso lúdica mecanismos, situaciones o razonamientos no muy sencillos de explicar, o a personas que necesiten otro tipo de acercamiento a dichos temas, que no es el modo convencional.*
>
> ***M.P.:*** *Cualquier proceso o mecanismo, ya sea concreto o abstracto, puede verse beneficiado por un gráfico o expresión gráfica, con el objetivo de poder ser aprehendido, o transmitido.*

Como la entrevistada también ejerció como maestra en una escuela rural se intentró indagar si su visión se encuentra influenciada por su rol docente, anterior a su carrera de medicina.

> ***E.:*** *(…) ¿empleaba con sus alumnos figura de análisis?*

M.P.: *Sí… (…) Muchas veces como factor motivador al principio de la clase, para despertar su curiosidad o interés. Y otras veces como herramienta para graficar una situación problemática, por ejemplo si había que calcular cuantos chicos iban en total, en 12 micros con 20 chicos cada uno, dibujábamos los 12 micros y a los 20 chicos adentro. (…) porque los niños tienen pensamiento concreto, la abstracción la van alcanzando al adquirir cierta madurez, por lo tanto consideraba que era más fácil, "ver" los micros, que imaginarlos. También para evitar que los chicos se pregunten "este problema es de "Por" o de "qué".*

Puede deducirse del comentario que las figuras de análisis favorecen a los alumnos el razonamiento abstracto, pudiendo "ver", en la situación representada los datos del problema y a partir de ellos poder operar con ellos o deducir conclusiones que permitan llegar al resultado final.

Con el presente caso pudo verse que las figuras de análisis no surgen únicamente al momento de elaborar un plan para resolver un problema matemático, sino que son un soporte a la hora de exteriorizar una representación mental o construirla, como es el caso de la técnica de estudio llevada a cabo por esta médica, la cual no pudo mantenerse en el tiempo por no cumplir con ciertas reglas establecida por el grupo social al cual ella intentaba pertenecer.

2. Uso de las figuras de análisis en distintos oficios

A continuación se analizarán distintas representaciones asociadas a diversos oficios, señalando que características tienen en cada caso, en particular. Para este fin se han tomado distintos oficios como son el de tejedora, modista, albañilería, entre otros.

2.1. Las figuras de análisis al tejer

Puede observarse a través de las hojas del cuaderno de esta tejedora que en cada página existen varios dibujos realizados a mano alzada con ciertas irregulares, dibujos que se encuentran acompañados de una serie de números, como los que pueden verse en las figuras 56 y 57. Para entender más sobre estos dibujos se realizó una entrevista semiestructurada a la tejedora y a continuación se cita algunos fragmentos significativos para la investigación (a entrevista completa puede encontrarse en el anexo 3 del presente trabajo).

> ***E.:*** *¿Cómo aprendió a tejer?*
>
> ***T.****: Por lo que me explicó mi mamá pues yo no fui a hacer ningún curso, me las ingenié con lo que ella me explicaba.* ***(…)***
>
> ***E.:*** *¿Cómo fue que aprendió este método para realizar los cálculos como usted los llama?*
>
> ***T.****: Por la experiencia de aprender a tejer a mano, porque esa no fue sacada de ningún libro. Porque hay muchos sistemas, parecidos pero no iguales.*

Como puede verse todo el conocimiento relacionado al tejido fue aprendido en forma asistemática, dependiendo, mayormente, por la propia experiencia que fue perfeccionando para poder obrar en su oficio. Oficio que aprendió de sus mayores, en una transmisión oral de la cultura.

A continuación la tejedora explica el procedimiento que realiza al confeccionar las prendas:

> ***T.****: Hay que sacar cálculos de acuerdo las medidas, se hace una muestra de 50 puntos por 50 vueltas, se hace descansar. Luego se mide 10 cm de largo y 10 cm de alto y en base a la cantidad de puntos y vueltas que entraron se realiza los cálculos con las medidas tomadas de otro pullover.*

E.: ¿Cuáles son los cálculos que son necesarios realizar, una vez medidos en la muestra?

T.: Supongamos que la muestra da en 10 cm 20 puntos es 2 puntos por centímetro y da 30 vueltas son 3 vueltas por centímetro y luego se multiplica por las medidas necesarias. Es una cuenta de regla de tres simple.

Puede así entenderse las relaciones que la tejedora establece entre las medidas buscadas, las obtenidas en la muestra y los cálculos que realiza, al respecto Perinat establece que "el cuerpo humano es un cuerpo geométrico irregular, con evidentes diferencias de proporciones y de formas de unos individuos a otros, pero con las suficientes constantes como para establecer entre ellos ciertos rasgos comunes. El cuerpo geométrico semejante al cuerpo humano es un cilindro y, por tanto, el rectángulo correspondiente al desarrollo de este cilindro podría ser el rectángulo que envolviera al cuerpo humano, con las modificaciones indispensables para adaptarlo al cuello, brazos y piernas" (citado en Elguero, 2009, pp. 68-69). Esto se cumple tanto para los cálculos que confeccionan las modistas como las tejedoras, en base al cuerpo humano.

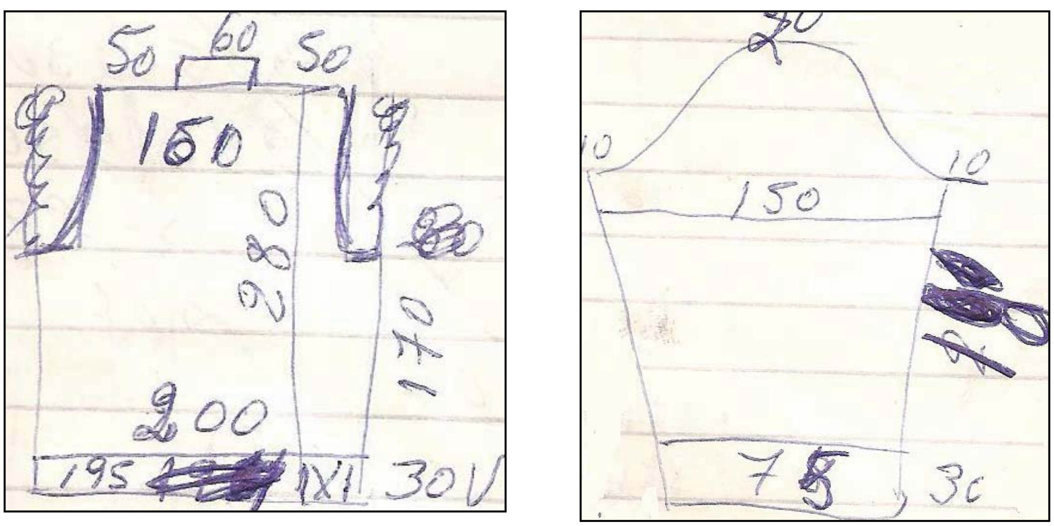


Figura 76: Croquis para un pullover

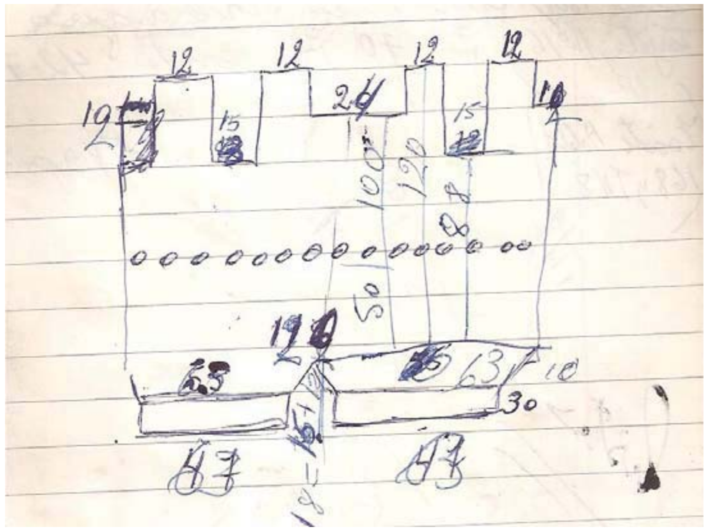


Figura 77: Croquis para un conjuntito de bebé

Haciendo foco en los dibujos, tema de esta investigación, los comentarios recogidos en la entrevista fueron:

> ***T.**: Primero hago el dibujo y luego lo completo con los resultados de los puntos y con las vueltas de las cuentas que hago. (…) Los números que están ubicados en forma vertical representan las vueltas y los horizontales los puntos necesarios.*

Donde puede notarse que los dibujos sirven de soporte para volcar en ellos el registro de los puntos y vueltas necesarios para la confección de la prenda. Con respecto a la medida de los dibujos y su confección se amplía el tema de la siguiente manera:

> ***E.:** Recorriendo el cuaderno puede notarse que todos los dibujos son de tamaño similares aunque las prendas, al ser para distintas personas, tienes medidas distintas, ¿a qué se debe esto?*
>
> ***T.**: Lógico, es un croquis para poner los puntos y las vueltas pero no necesita tener las medidas reales de la prenda. Es un croquis que se hace. (…)*

E.: En los dibujos, que usted denominó croquis, *¿es importante si las líneas son rectas?*

T.*: Sería mejor por prolijidad pero igual no influye.*

E.: En los dibujos, que usted denominó croquis, *¿es importante si las líneas son rectas?*

T.*: Sería mejor por prolijidad pero igual no influye.*

Aunque se refiere a los dibujos realizados con el término "croquis", se podría afirmar que dichos dibujos no son otra cosa que figuras de análisis realizadas para volcar en ellas los resultados de los cálculos obtenidos para conocer la cantidad de puntos y vueltas necesarios para confeccionar una determinada prenda. Donde no es importante la medida y la rigurosidad en la construcción de dichas representaciones ya que son solo un esquema para dar una idea de la prenda a confeccionar.

A pesar de ser, estas figuras de análisis, producto de la propia experiencia y no de una educación sistemática, la entrevistada da un papel importante a sus estudios escolares.

E.: *¿Podría decir que sus estudios primarios influyeron en este método para realizar prendas tejidas a medida?*

T.*: Y si porque sino no podría hacer las cuentas, no podría dividir o multiplicar para saber donde hay que hacer los ojales o las disminuciones.*

Puede concluir que estos croquis son figuras de análisis confeccionadas y creadas por la propio sujeto para responder a sus necesidades laborales, que amoldó los métodos explicados en libros a su propio conocimiento y experiencia para crear un método propio.

2.2. Las figuras de análisis en la costura

Otro oficio que esta muy relacionado con la geometría del cuerpo humano es el de las modistas y los sastres, quienes deben realizar cálculos distintos al de la tejedora pues no pueden disminuir las cuentas a la proporcionalidad directa que existe entre la longitud buscada y la cantidad de puntos o la cantidad de vueltas. Pero aun siendo distinto el proceso de construcción de los moldes puede observarse que en su quehacer también confeccionas dibujos borradores de los moldes donde se vuelcan las medidas necesarias. Para ello se han tomado los dibujos realizados en la entrevista realizada en las tesis de Elguero (2009) a una modista.

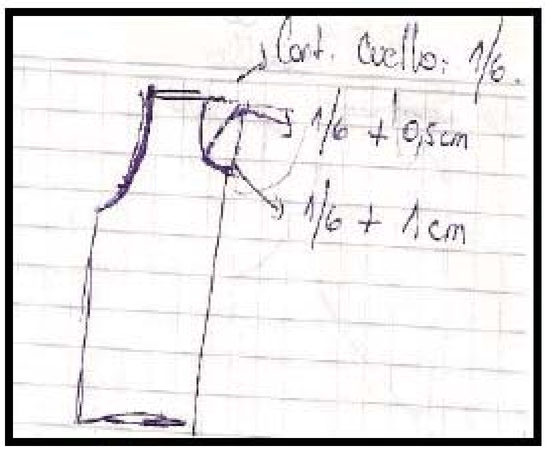


Figura 78: Explicación gráfica de una modista [35]

Con respecto a una de las reglas para la construcción de un molde puede verse el reconocimiento de la simetría del cuerpo humano. “El cuerpo humano está compuesto por dos partes simétricas: derecha e izquierda. Ésta es la primera norma a tener en cuenta para el desarrollo del cilindro; es decir, el rectángulo en el que se van a trazar los patrones es el correspondiente a 1/2 rectángulo del total del cilindro. Este medio rectángulo abarca desde el centro de la espalda al centro del delantero, a lo largo de todo el cuerpo” (Perinat, citado en Elguero, 2009, p. 69). Por tal motivo, puede verse, en la figura 58, que sólo se confecciona la mitad del molde que correspondería al tronco del cuerpo humano.

[35] Imagen tomada de Elguero (2009, p.91)

Como puede observarse la explicación gráfica dada por la modista coincide con la idea de figura de análisis y al igual que en el caso de la tejedora, nos encontramos frente a ejemplos de figuras que son creadas para poder volcar en ellas las medidas necesarias ya sea para crear un molde o para registrar los puntos o vueltas, en el caso del tejido.

En el siguiente fragmento de la entrevista llevada a cabo por Elguero en sus tesis, puede observarse como los cálculos realizados para confeccionar una falda con volados son acompañados por una figura de análisis:

"H: Para hacer cada volado agrego un 50% más al volado anterior. Si lo querés con menos pliegues aumentás la tercera parte, por ejemplo... Si el primero mide un metro veinte, el segundo mide (en voz alta hace el cálculo mental 1,20:3 +1,20) un metro sesenta" (Elguero, 2009, p.108).

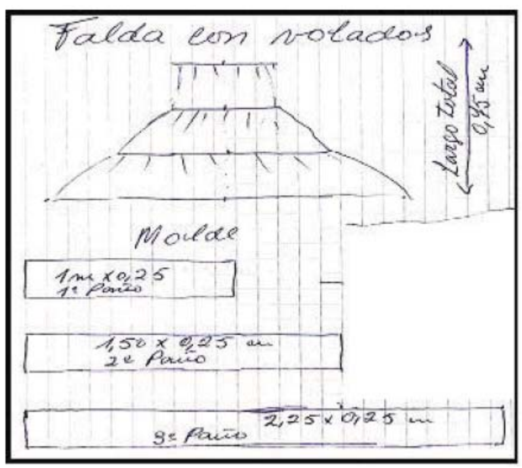


Figura 79: Dibujo del molde de una falda[36]

2.3. Las figuras y la albañilería

Pero no sólo se encuentran figuras de análisis en oficios que están relacionados con el cuerpo humano, sino en otros que están relacionados con construcciones. Por lo tanto, se puede hallar las figuras que realizan albañiles o carpinteros al

[36] Imagen tomada de Elguero (2009, p.108)

tomar las medidas de una futura construcción, volcando en dicho croquis las medidas y las relaciones que existe entre las partes, pero dicho croquis responde al concepto de figura de análisis que se ha trabajado en esta investigación.

A modo de ejemplo puede verse en la figura 80, el bosquejo para la construcción de un toldo fuera de la casa. No pude hablarse de planos de arquitectura porque en estos dibujos, en primer lugar no se tiene rigurosidad geométrica al confeccionarlo y no responde a ninguna escala numérica como ocurre en los planos. No hay rigurosidad, ni precisión.

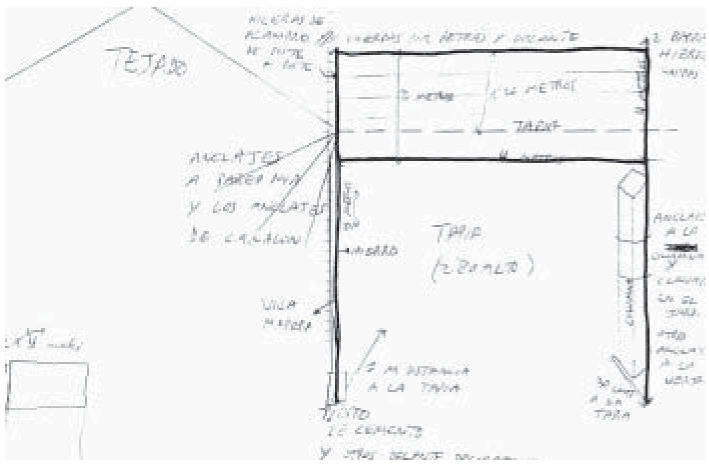


Figura 80: Construcción de un toldo [37]

2.4. Conclusiones sobre las figuras de análisis en los diversos oficios

Resumiendo lo analizado hasta el momento en este apartado: se han registrado diferentes oficios que en su labor, pueden encontrarse la confección de figuras de análisis, aún siendo oficios tan diferentes, tienen una característica en común, en todos ellos se construye, ya sea una prenda o una pared por ejemplo, y para

[37] Imagen tomada de http://www.facilisimo.com/foro/planosyproyectos/c%C3%B3mo-pido-la-licencia-para-un-toldo-qu%C3%A9-pongo-qu%C3%A9-dibujo_11254.html

dicha construcción se debe tener previamente una visualización de los datos necesarios para que la construcción responda a las necesidades requeridas. Por tal motivo, es que se han seleccionado estos oficios que a simple vista son tan diferentes pero como se ha analizado tiene un eje en común, todos giran en torno a la construcción.

En este proceso de visualización es que se realizan las figuras de análisis para luego llevarlo a cabo y confeccionar lo buscado. Es decir, el problema a resolver en todos estos oficios es la construcción y entre los diferentes pasos realizados, según el oficio, en todos ellos, se encuentra la confección de un dibujo los más simple posible, como decía Descartes, un dibujo lo más desnudo posible.

Los individuos que poseen un mismo oficio pertenecen a un determinado grupo social, la comunidad comparte ciertas normas como puede ser el lenguaje o los gráficos. Es decir, aun desarrollando una propia técnica como es el caso de la tejedora, los gráficos realizados por ella, podrían ser interpretados por otra tejedora y difícilmente comprendidos por alguien que no pertenezca a este grupo social. Por lo tanto, la graficación corresponde a una práctica social, con sus propias normas (Cordero Osorio, 2006).

3. Las figuras de análisis en el deporte

Las figuras 81 y 82 son fotos de entrenadores de equipos de fútbol y básquet respectivamente, donde en una pizarra registran una determinada jugada o un cambio técnico. A continuación se analizará con profundidad dichas pizarras.

Figura 81: Pizarra de una jugada de fútbol [38]

Figura 82: Entrenador de básquet realizando un diagrama [39]

Sin importar el deporte, puede encontrarse diagramas confeccionados en dichas pizarras en donde se registran una jugada ya realizada para analizar la estrategia llevada a cabo o también para que el entrenador mediante el uso de la pizarra explique una futura jugada. Es decir los dibujos representan una jugada, los movimientos realizados por los jugadores de cada equipo.

En la siguiente figura puede verse el diagrama realizado sobre un partido de básquet, mientras que la figura 84 se representan ejercicios para mejorar el tiro propuesto en una página destinada a entrenadores de fútbol. En todos ellos hay elementos en común, como puede ser la representación de una parte del campo de juego, la posición de los jugadores y el registro de sus movimientos.

[38] Imagen tomada de http://www.evisos.cl/fotos-del-anuncio/62690
[39] Imagen tomada de http://www.diariosur.es/20090607/deportes/unicaja/armas-para-esperanza-20090607.html

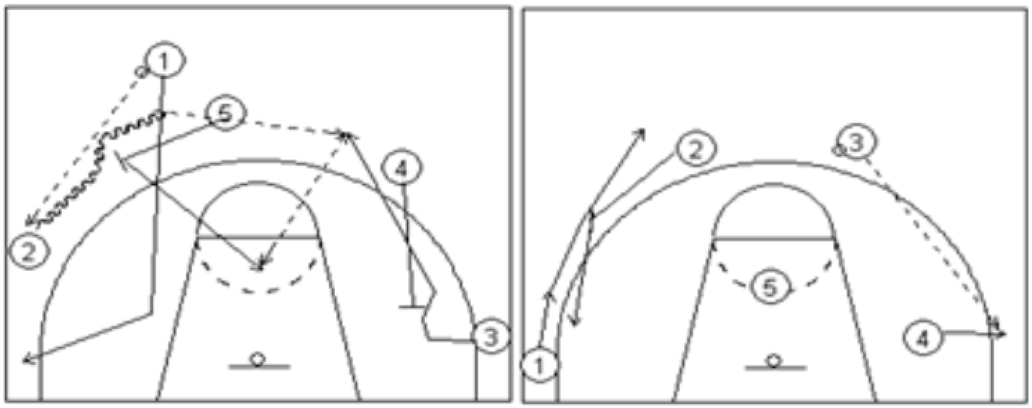


Figura 83: Diagramas de jugadas de básquet [40]

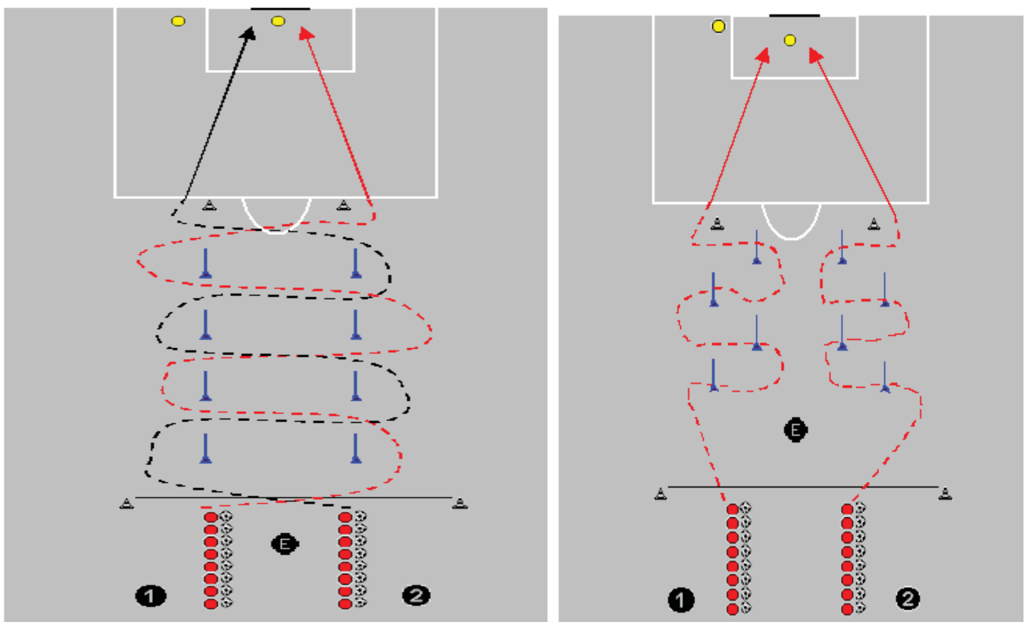


Figura 84: Diagramas de ejercicios técnicos de fútbol [41]

Estos dibujos pueden ser tomados como figuras de análisis realizadas en escenarios no académicos, pero a diferencia de las figuras de análisis realizadas por un estudiante al resolver un problema, en este caso el diagrama no debe servir sólo a la persona que lo confecciona sino que debe ser decodificado por otro, en este caso los jugadores, por lo tanto debe existir un lenguaje en común para poderse interpretar correctamente el diagrama. Con lo cual puede concluirse que estas representaciones pertenecen a un determinado grupo social que

[40] Imagen tomada de http://www.andaluzabaloncesto.org/index.php?page=266&ampliar=5194
[41] Imagen tomada de http://entrenadordefutbol.blogia.com/temas/ejercicios-tecnicos.php

comparten un lenguaje simbólico para la representación y reglas de confección de dichas representaciones esquemáticas.

Por ejemplo, en la figura 85, se representa en el diagrama una jugada de fútbol americano y a su lado se codifica el lenguaje empleado para que pueda ser interpretado por todos y no solo por el grupo de jugadores o entrenadores.

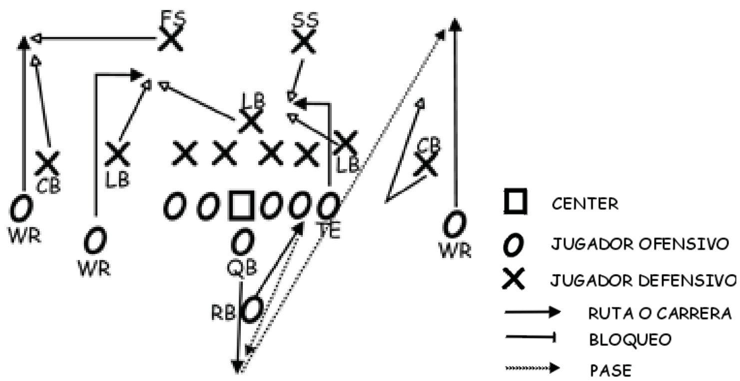


Figura 85: Esquema de una jugada de fútbol americano [42]

Pero más allá de poder haber un lenguaje general, puede decirse que en las figuras de análisis realizadas en la clase de geometría, también existen algunos símbolos que son generales como puede ser señalar que un ángulo es un ángulo recto. Estos diagramas son considerados figuras de análisis porque son una representación figural o esquemática (según el autor; Presmeg o Hegarty y Kozhevnikov respectivamente) de una situación dada, donde se registran datos dados, como es la posición de los jugadores y sus movimientos.

4. Croquis y mapas

En el aprendizaje de nociones geométricas, varios autores establecen que las relaciones espaciales constituyen un aspecto de gran importancia. Estas relaciones espaciales se incluyen en la cognición o conocimiento ambiental que el

[42] Imagen tomada de http://warriors.com.pa/reglas.php

sujeto va construyendo el espacio que lo rodea, a través de representaciones espaciales denominadas mapas cognitivos. Downs y Stea definen al mapa cognitivo como “un constructo que abarca aquellos procesos que hacen posible a la gente adquirir, codificar, almacenar, recordar y manipular la información acerca de la naturaleza de su ambiente social” (citado por González y Weinstein, 2001, pp.101-102). En este codificar, el espacio que nos rodea es que se realizan croquis para explicar mediante un dibujo, a un tercero como llegar a un determinado lugar. Estos croquis están conformados por dos elementos importantes, a saber:

- Mojones: “elementos del entorno que llaman especialmente la atención o que se perciben y se recuerdan fácilmente, alrededor de los cuales, el sujeto, coordina sus acciones y decisiones” (González y Weinstein, 2001, p.102). Por lo tanto estos mojones pueden variar para cada persona pero deben ser elementos básicos, simples.

- Ruta: es lo que permite al individuo moverse de un mojón a otro.

Por lo tanto, los croquis son realizados para indicar por ejemplo el camino a un determinado lugar, estos croquis están compuestos por mojones que sean comunes tanto a la persona que lo elabora y la persona quien va a decodificar el mapa y reconocer en su entorno dichos mojones para poder seguir la ruta marcada. En la figura 86 puede verse dos croquis que se indican en Internet para poder llegar a el rancho ecuestre El Zentauro, en dichos croquis puede identificarse diferentes mojones como: el puente, silos, algún cartel, entre otros y la ruta indicada para recorrer el camino que de con el rancho.

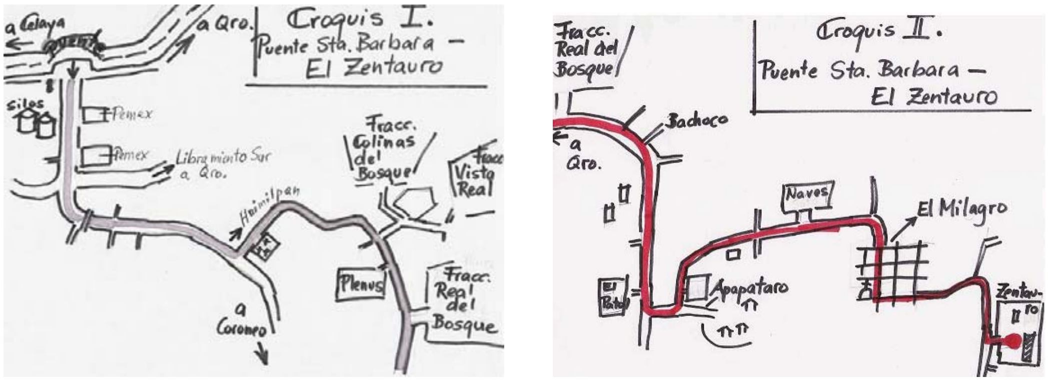


Figura 86: Croquis, para llegar a El Zentauro [43]

Estos croquis no son otras cosas que una figura de análisis que uno realiza para indicar un camino para llegar a un lugar determinado, porque responde con la definición de figura de análisis adoptada en esta investigación. son dibujos realizados a mano alzada y no son poseen rigurosidad geométrica, por ejemplo no se puede hablar de un mapa porque no existe una escala proporcional como puede verse en la figura 87 que es un plano a escala donde se ha indicado el recorrido para llegar a la estancia, ubicada en las tierras de Santiago de Querétaro, México.

Figura 87: Mapa para llegar a El Zentauro [44]

En el croquis, al igual que en las figuras de análisis el sujeto vuelca los datos conocidos que en este caso coinciden con los mojones reconocidos en el lugar a

43 Imagen tomada de http://elzentauro.com/ubica.php
44 Imagen tomada de http://elzentauro.com/ubica.php

describir mediante el dibujo. A diferencia de las figuras de análisis confeccionadas frente a un problema geométrico, en el caso de los croquis, al ser compartidos por otros, deben de tener un lenguaje en común, en cambio en el caso de un problema de matemática no es necesario a veces compartir la información volcada al dibujo, por lo tanto esta representación no requiere un lenguaje común con terceros.

5. Conclusiones

Estos hallazgos dan evidencia de que las figuras de análisis no tienen limitada su naturaleza a las actividades realizadas dentro del aula, sino que existe en el quehacer de distintos oficios. Así como también en actividades sociales relacionados con la comunicación como puede ser el ejemplo de la confección de un croquis para indicar la ruta para llegar a un determinado lugar.

Algunas figuras de análisis son más figurales y menos pictográficas (según Presmeg, detallado en el capítulo dos) que otras pero en todas ellas, aún siendo pictóricas no se trata de un dibujo a escala, donde se mantengan las proporciones del objeto que se quiere representar, solo son bosquejos a mano alzada que representan un serie de datos como es el caso de los bocetos realizados por la modista.

Algunas de esta figuras de análisis son aprendidas en un quehacer determinado, como son los ejemplos de los oficios o en el deporte pero otros se construyen intuitivamente como son los ejemplos de los croquis o el caso particular de la médica psiquiatra en donde, como se ha mencionado en el inicio de este capitulo, sus primeras figuras fueron parte de elaborar una técnica de estudio propia que en un principio la favoreció pero que luego no pudo mantener al complejizarse la materia de estudio.

Por lo tanto, en el presente capítulo, hemos encontrado y estudiado distintos casos de variadas figuras de análisis que se realizan en escenarios no académicos dando evidencia que estas figuras no sólo existen en la clase de matemática o, con una mirada más amplia, dentro del aula en una actividad académica. Aspecto que está asociado a uno de los pilares de la socioepistemología, como es el bagaje social, cultural, ya que determinado tipo de figuras de análisis se encuentran presentes en un determinado grupo social relacionado con sus trabajos, como es el ejemplo de los dibujos realizados por modista y por la tejedera que son similares pues ambas representan prendas a confeccionar.

Capítulo 7

Conclusiones finales

Mediante este trabajo de investigación se intentó indagar sobre las figuras de análisis, más precisamente las figuras realizadas por los alumnos de nivel terciario, al resolver problemas geométricos. El marco teórico en el cual se gestó y creció esta investigación es la socioepistemología.

En la línea de investigación de la construcción social del conocimiento, se reconoce que el conocimiento matemático, en cualquiera de sus niveles, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas que obedecen a necesidades de naturaleza práctica. La socioepistemología establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos (Cantoral, 2003). Al hablar de construcción social del conocimiento matemático se orienta este marco teórico al conjunto de las interacciones, explícitas o implícitas, que se establezcan entre los procesos del pensamiento, la epistemología de la matemática y las prácticas humanas. Se reconoce de esta manera a la matemática como una actividad humana que se lleva a cabo en escenarios determinados tanto de carácter académico como no académico.

La actividad humana es la que permite que el conocimiento, en particular el saber matemático, adquiera sus significados propios, sus contextos y su intención (Cordero, 2001). La fuente de la reorganización del conocimiento matemático es, por lo tanto, la actividad humana, normada a través de práctica social.

En las actividades humanas se pueden considerar tres aspectos principales: un plan previo, el proceso de elaboración y la obra en sí misma que es producto de la actividad. En este último se obtiene un producto elaborado, en el caso de la matemática podría tratarse de la obra matemática o dependiendo de qué actividad matemática se trate, de la resolución de un problema. Al hablar de proceso de elaboración, se ponen de manifiesto el uso de herramientas y estrategias en las que entra en juego, por ejemplo la tecnología. En el caso del plan previo, se realiza con el fin de garantizar el resultado buscado y en él se generan propósitos y explicaciones. Estos tres aspectos resumen los diversos pasos de los distintos métodos heurísticos tratados en el cuarto capítulo de este trabajo de investigación.

Las figuras de análisis se realizan durante la etapa de confección de un plan, en ellas se vuelca la información que se posee y se identifican cuáles son los propósitos que se desean alcanzar. Sin embargo la utilidad de estas figuras no termina en esta etapa. Durante el proceso de elaboración, las figuras de análisis son asumidas como una herramienta que facilita la visualización y en muchas oportunidades son trabajadas y modificadas por quien está realizando la actividad matemática, registrando los nuevos datos que se concluyen. La utilidad de las figuras de análisis, por lo general, no termina en el proceso de elaboración. En la presentación del producto elaborado, de la obra matemática, la figura de análisis tiene una función básicamente de comunicación: el lector puede a través de la lectura del texto y del análisis de la figura, reconstruir la secuencia que se realizó a lo largo de la actividad.

Podría afirmarse que las figuras de análisis tienen varias funciones en la construcción del conocimiento matemático. Por una parte, es posible identificar en su uso un apoyo a las circunstancias cognitivas puestas de manifiesto: al volcar en ellas los datos conocidos y los objetivos planteados, actúan facilitando procesos como la visualización, tanto en actividades académicas como no académicas. Las funciones didácticas y sociales de las figuras de análisis son indiscutibles: se utilizan como herramientas que apoyan la transmisión de ideas por ejemplo entre docentes y estudiantes o entre autores y lectores de los libros de textos matemáticos.

Para los estudiantes, aprender a utilizar las figuras de análisis, es aprender a transformarlas en herramientas útiles en el proceso de aprendizaje y también en la resolución de problemas. En muchas oportunidades, como los ejemplos que se han mencionado en el capítulo 5 de esta tesis, las figuras no han pasado de su carácter de artefacto (Trouche, 2005), no alcanzando el grado de familiaridad y aprovechamiento de su uso, puntos esenciales para que un artefacto obtenga el grado de instrumento.

El objetivo de este trabajo, no es estudiar a las figuras de análisis como una representación de conceptos matemáticos, sino comprender su uso y a partir del un marco de referencia interpretar su funcionamiento y sus características en el discurso matemático escolar.

Además se ha establecido, a través de los trabajos de Cordero Osorio (2001, 2006) que la graficación es una práctica social, por ende, esta práctica esta normada, ejemplo de este intento de normar las figuras de análisis, se encuentra presente desde el siglo XVII con la obra de Descartes, donde mediante una serie de reglas intentó pautar las acciones a realizar ante un razonamiento. Hoy en día, dentro del discurso matemático escolar existen pautas dadas por los docentes en forma oral o en forma implícita, adquiridas por los estudiantes a través de la imitación de las acciones del docente al momento de resolver un problema, o también copiando de los libros de texto escolares que, en su mayoría, presentan los problemas o ejercicios acompañados de representaciones esquemáticas.

A continuación se intenta dar respuesta a las preguntas que surgieron al detectar el problema referido a las dificultades que presentan los alumnos de carreras docentes en el uso de las figuras de análisis.

- ¿Cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?

Para acercarnos a una posible respuesta, se tendrán en cuenta dos puntos desarrollados en este trabajo. Por un lado el recorrido histórico, llevado a cabo en el capítulo 3, donde se ha analizado distintos documentos matemáticos que han llegado hasta nuestros días. En dicho capítulo se pudo concluir que aún a pesar de las distancias históricas abarcadas y las diferentes culturas, los problemas registrados, ya sea en un papiro, una tablilla o en papel, tanto en occidente como de oriente, en todos ellos hay problemas geométricos acompañados de figuras. Figuras que presentan gran imprecisión, suponiéndose que sólo eran una guía para quien resolviera el problema, como así también lo fueron para quien leyera la resolución pudiendo interpretar el proceso realizado por otro. Ya con la difusión de la matemática en libros, pudo observarse que las figuras perdían su imprecisión, pero seguían acompañando no sólo la resolución de los problemas sino explicaciones como ocurre en los libros de L'Hospital y Agnesi, donde aún no siendo libros de textos escolares, al ser libros de difusión matemática puede observarse la transposición didáctica que se realiza sobre los conceptos abordados. Este aspecto didáctico influye también en los gráficos que aparecen, siendo verdaderas figuras de análisis que puede considerarse como instrumentos de pensamiento.

El otro punto importante para dar respuesta a ésta pregunta, es el análisis del discurso escolar que se intentó realizar a través de las encuestas realizadas, tanto a alumnos como a docentes, y también el estudio de libros de textos escolares. Por medio de este estudio, es posible que la confección de figuras de análisis no sólo sean transmitidas de docentes a alumnos, transmisión que también se ve reflejada en los libros de textos donde se sugiere la construcción de una figura, diagrama o esquema para interpretar los datos de un problema. Asociado a los consejos dados por los autores de libros, hay que destacar las ideas de Descartes, quien mediante sus reglas intentó normar el uso de las figuras de análisis, que a pesar de no determinarla con dicho nombre puede inferirse que al hablar de figuras simples se trataba de esquemas y no representaciones pictográficas.

- El uso de las figuras de análisis en geometría, ¿es comprendido por los estudiantes como necesario y útil o como algo impuesto por el discurso matemático escolar?

A través de las encuestas puede concluirse que los estudiantes consideran a las figuras de análisis un instrumento útil, así lo demuestra los casos mencionados aunque no llegaran a una respuesta correcta. Y aunque las figuras de análisis son sugeridas en distintos aspectos del discurso matemático escolar, como puede ser los dichos del docente o los libros de textos escolares, los alumnos no lo perciben como una imposición sino una sugerencia. Tal vez esto se deba a que pudo comprobarse, en el capítulo anterior, que el hombre utiliza figuras en escenarios no académicos, para dar registro de un determinado lugar y poderse ubicar geográficamente o en quehaceres referidos a distintos oficios.

Por lo dicho, se llega a la conclusión que las figuras de análisis que se sugieren dentro del aula de matemática son tomadas de transmisiones culturales de escenarios no académicos.

- ¿Qué factores influyen en el uso que se da a las figuras de análisis en las clases de geometría?

Para dar repuesta a esta inquietud, se puede decir que se ha observado que los alumnos aún habiendo alcanzado un nivel de educación terciario, no han elaborado, en muchos casos, un lenguaje gráfico de símbolos propios o compartidos culturalmente, para realizar las figuras de análisis al momentos de resolver exitosamente un problema geométrico. Por lo tanto, las figuras de análisis, en lugar de ser un instrumento, en algunas oportunidades pierden su utilidad convirtiéndose en un obstáculo que es difícil de franquear; en otras son utilizadas de manera adecuada, pero esto último no se observa en todos los casos observados. Se pudo observar, además, el uso de figuras de análisis de distintas características fuera de escenarios escolares, en los que se ponen de manifiesto la presencia de reglas propias de los grupos que las usan, poniendo de manifiesto su carácter cultural.

Si se refiere al momento de construcción de las mismas figuras de análisis los errores registrados son de distinta naturaleza:

- Puede observarse representaciones pictóricas que dan muestra de la falta de abstracción de los datos dados en el problema. Se fija la atención en detalles que no hacen a la figura de análisis, perdiendo el registro de los datos importantes o la asociación de los mismos.
- Aun siendo representaciones no pictóricas, esquemáticas, se puede observar la falta de generalidad en la construcción, error que conlleva a soluciones incorrectas o incompletas porque solo son respuestas sobre un caso particular, perdiendo de vista la generalidad del problema. Asociado a estas representaciones se encuentran los prototipos, ideas mentales que construyen los alumnos basados en los estereotipos transmitidos culturalmente que se reflejan, muchas veces, en las figuras que se encuentran en los libros de textos escolares, componente del discurso matemático escolar, entre otros.

Siguiendo con los errores observados, el siguiente no hace a la construcción de las figuras de análisis en sí, sino al momento de lectura que los alumnos realizan de las propias representaciones, más precisamente errores cometidos en el proceso de visualización. En estos casos las figuras de análisis representan acertadamente los datos dados en el enunciado del problema pero los errores son cometidos en la lectura, aún habiendo utilizado un lenguaje de símbolos propios ya que las figuras de análisis son un objeto personal que no tiene porqué ser comprendido por terceros, sean estos pares o el mismo docente. Errores que están relacionados, por lo general, con deducciones de propiedades geométricas basadas únicamente en lo visual. Punto que esta conectado con las ilusiones ópticas, uno de los obstáculos del proceso de visualización, desarrollado en el capítulo 2. Obstáculo que se encuentra asociado con lo que nuestros órganos de la visión perciben pudiendo llevar al engaño, si uno se basa únicamente en lo que observa en el gráfico y no como conclusión de los datos o propiedades que se pueden inferir a partir de ellos.

Posibles formas de continuar esta investigación

Toda investigación siempre es la puerta abierta a otras, pues despierta inquietudes que, en un primer paso, no pudieron ser analizadas.

✓ En principio, el campo sobre el cual se trabajo, en esta investigación, fue sólo ver lo que ocurría en el nivel terciario, con alumnos que están estudiando para docentes, ya sea profesores o maestros, y donde se supone que han alcanzado un nivel de abstracción mayor que en otros niveles. Podría investigarse que ocurre con las figuras de análisis en otros niveles, si los errores que cometen los alumnos en el nivel superior son arrastrados de los niveles educativos anteriores.

✓ Por otro lado, se ha analizado, en el presente trabajo, las figuras de análisis siempre asociadas a problemas referidos a geometría. ¿Existen figuras de análisis en problemas matemáticos que no sean geométricos?, es una interesante pregunta para analizar, en caso de existir, si las represtaciones son pictóricas o no.

✓ Otra línea de investigación podría ser, determinar, si existe, una categorización entre las figuras de análisis y el concepto matemático con el cual se esta trabajando. Determinar, por ejemplo, si las figuras de análisis realizadas en el estudio de funciones tienen las mismas características que las realizadas en geometría. Es decir, la pregunta a responder sería: ¿las figuras de análisis se encuentran condicionadas por el concepto matemático que se pone en juego en el problema a resolver?

✓ Considerando a las figuras de análisis como una práctica social, buscar cuáles son las normas que actualmente tienen, dentro de la clase de matemática, dichas figuras de análisis realizadas en al resolver un problema de matemática. Analizar luego si esas pautas recogidas pueden llevarse a cabo al confeccionarse una figura de análisis en cualquier problema de matemática, o dependen del concepto matemático que se aborda en el enunciado del problema.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). *Educación Matemática e Imaginación*. Unión. Número 11, pp. 9-17.

Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones.* Tesis de Maestría no publicada, Cicata - IPN, México.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Briceño, E. y Cordero, F. (2008). *El uso de las gráficas bajo una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico.* 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, México.

Cantoral, R. (2003). *La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente.* Conferencia durante la XI CIAEM.

Cantoral, R. y Farfán R. (2003). *Matemática educativa: una visión de su evolución.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1), 27-40.

Castañeda, A. (2002). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 5(1), 27-44.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de Doctorado no publicada, Cicata - IPN, México.

Castañeda, A. (2006). *Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2), 253-265.

Castillo, L. (2006). *El estudio de los conceptos matemáticos*. Politécnico Mario Fidel Suarez, Enseñanza y aprendizaje en la educación tecnológica. Colombia. Recuperado el 23 de marzo de 2009, de http://www.pmfs.edu.co/espanol/ingenieria/archivos/PROYECTO_AULA.pdf

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Cobos, C., Cobos, C., Rodríguez, A. y Salinas, J. (2001). *Geometría para ingenieros*. Madrid: Tebar.

Coló, A. y Patritti, H. (2008). *Congruencia, homotecia y semejanza.* Montevideo, Uruguay: Universidad del Trabajo del Uruguay.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana.* Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2006). *El uso de las gráficas en el discurso del Cálculo escolar. Una visión socioepistemológica.* En Cantoral, R., Covian, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo, A. (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*: *Un reporte iberoamericano*. (pp.265-286). México: Diaz de Santos.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada, Cicata - IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada, Cicata - IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). *Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 8(3), 287-317.

Dal Maso, M. (2007). Dificultades en las demostraciones en geometría. Premisa. 9(35), 26-36.

de Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización. En de Guzmán, M. El Rincón de la Pizarra.* Madrid: Pirámide.

de Guzmán, M. (2000). *¿Cómo trabajar en Matemáticas?* Recuperado el 31 de marzo de 2009, de http://www.uvm.cl/educacion/publicaciones/integra/Integras/Integra_04/10-guzman.pdf

Descartes, R. (1983). *Reglas para la dirección de la mente* (de Samaranch, F., Trad.). Barcelona: Gráficas Ramón Sopena, S.A. (Trabajo original publicado en 1701).

Descartes, R. (1997). *La geometría*. En J. Newman (Ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Vol. 1. (pp. 166-178). Barcelona: Grijalbo.

Díaz, M. (2000). *Cambios en la Enseñanza de la Matemática: énfasis en la Resolución de Problemas.* Universidad de Viña del Mar, Chile.

Recuperado el 31 de marzo de 2009, de http://www.uvm.cl/educacion/publicaciones/integra/Integras/Integra_04/07-diaz.pdf

Dirección Gral. De Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2006). *Matemática 7. Cuaderno de trabajo Nº 1*. Buenos Aires.

Doniez, R. (2000a). *El secreto ruido de las Demostraciones sin Palabras* Universidad de Viña del Mar, Chile. Recuperado el 30 de marzo de 2009, de www.uvm.cl/educacion/publicaciones/integra/Integras/Integra_04/05-doniez.pdf

Doniez, R. (2000b). *Fragmentos encontrados sobre la Resolución de Problemas*. Universidad de Viña del Mar, Chile. Recuperado el 30 de marzo de 2009, de http://www.uvm.cl/educacion/publicaciones/integra/Integras/Integra_04/08-doniez.pdf

Echegaray, J. (1868). *Introducción a la geometría superior*. Madrid: Imprenta de la viuda de Aguado e hijos.

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas. Educación primaria*. Gobierno de Navarra, Departamento de Educación. España.

Elguero, C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural del trabajo.* Tesis de Maestría no publicada, Cicata - IPN, México.

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2002). *Matemática Básica*. *Funciones*. Vol. 1. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Escuela Agrotécnica – Maciá (2005). *Una aventura matemática: El teorema de Pitágoras.* Entre Ríos, Argentina. Recuperado el 9 de febrero de 2009, de http://www.oni.escuelas.edu.ar/2005/ENTRE_RIOS/1022/aplica.html

Euclides. (1991). *Elementos:Libros I-IV.* Madrid: Gredos.

Fernández, E., Moretto, G., et al. (2007). *Matemática para el ingreso*. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Fernández, T., Cajaraville, J. y Godino, J. (2006). *Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial.* Recuperado el 28 de mayo de 2008, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/razonamiento_espacial_EOS_29abril07.pdf

Ferragina, R., Fisichella, L. y Rey, G. (1999). *Matematizando*. Buenos Aires:UPR, Un problema resuelto.

Ferrero, M. (2009). Caracterización de representaciones visuales en una demostración en geometría. En VIII CAREM. Sociedad Argentina de Matemática. Buenos Aires.

Fischbein, E. (1993). *La teoría de los conceptos figurales*. (de Larios Osorio, V. Trad.). Revista Educational Studies in Mathematics. – CICB, UAQ; México. Recuperado el 28 de mayo de 2008, de http://www.uaq.mx/matematicas/vlarios/cursos/tem-txt31.pdf

Fouz, F. y de Donosti, B. (2005). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría* En Ibáñez, R. y Macho, M. (Eds.), *Un Paseo por la Geometría* (pp. 67-82). España: Centro de divulgación de las matemáticas. Recuperado el 9 de octubre de 2007, de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf

Fuster, T. (n.d.). *Ejercicios propuestos en escritos y pruebas semestrales. Matemática* - Cuarto año. Liceo N° 2, Héctor Miranda Montevideo, Uruguay. Recuperado el 22 de marzo de 2009, de http://www.x.edu.uy/miranda/escritos_y_pruebas.pdf

Fuxman J. y Laplagne, S. (2000). *Curso Interactivo de Geometría, con el Cabri. Clase 12 - Problemas I.* Argentina. Recuperado el 22 de marzo de 2009, de http://www.oma.org.ar/omanet/educabri/00-12.htm

Fuxman, J. (2001). *Misceláneas Curso interactivo de matemática: Clase 6 - Vectores y geometría.* Recuperado el 22 de marzo de 2009, de http://www.oma.org.ar/omanet/misc/01-06.htm

Galina, E. (2008). *Medida, geometría y el proceso de medir*. LVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. XXXI Reunión de Educación Matemática. XX Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemática. Mendoza.

García, J., Rodríguez, F., Leal, M., et al. (2007). *Programa de preparación nacional para profesores de Matemática de la Educación Preuniversitaria y Técnico Profesional.* Curso escolar 2007–2008. Ministerio de Educación. Dirección Docente Metodológica. Cuaba. Recuperado el 23 de marzo de 2009, de http://www.cubaeduca.rimed.cu/model/asig/Matematica/Info/Documentos%20Metodol%C3%B3gicos/Programas%20preparaci%C3%B3n%20metodol%C3%B3gica%202008/Programa%20%20de%20preparaci%C3%B3n%20Preuniversitario%20y%20ETP.rtf.

Gómez, J., García, F., Pina, E., et al. (2003). *Matemáticas*. Vol. II. Madrid: MAD-Eduforma.

González, A. y Weinstein, E. (2001). *¿Cómo enseñar matemática en el jardín? Número, medida, espacio.* Buenos Aires: Colihue.

González, M., García, L. y Lamothe, M. (2005). *Resolución de problemas geométricos a través de la modelación gráfica.* Instituto Superior Pedagógico “Raúl Gómez García”, Guantánamo, Cuba. Recuperado el 16 de marzo de 2009, de http://www.revistaciencias.com/publicaciones/EEEluVAupkSELGakrT.php

Gutiérrez, A. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial.* Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat., Valencia, España, pp. 44-59.

Gutiérrez, A. (2008-09). *Didáctica del análisis, la geometría y la probabilidad y la estadística de la enseñanza secundaria. Geometría*. Modulo libre, licenciatura en Matemáticas y técnicas estadísticas. Universidad de Valencia, España. Recuperado el 15 de agosto de 2009, de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/facultad/Geometria_F.pdf

Hernández, R. (2000). *La heurística y el conocimiento matemático especifico en la solución de problemas.* En Colectivo de autores de Universidad del Ministerio de Educación Superior (Eds.), *Resolución de problemas,* pp. 26-29. Cuba: Editorial Universitaria del Ministerio de Educación Superior.

Hogar Escuela "María Benita Arias", (2008). *Reglamento general del intercolegial de matemática.* Recuperado el 22 de marzo de 2009, de www.intermatematica.com.ar/Reglamentos.doc

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Jorge, M. (junio 2007). *Los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la matemática.* La Revista Internacional. "Alammi".

Lagarto, M. J. (2008). *História da Matemática - história dos problemas Bhaskara I (600-680).* Recuperado el 10 de febrero de 2009, de http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/bhaskaraI.htm.

Liceo Nº 4, Matemática 1. (n.d.) *Trabajo práctico: funciones.* Recuperado el 22 de marzo de 2009, de http://www.scribd.com/doc/3206036/funciones

López, F. (1997a). Las *Matemáticas en el Antiguo Egipto. El papiro de Moscú. La Tierra de los Faraones*. Egiptologia.org. Recuperado el 9 de febrero de 2009, de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm

López, F. (1997b). *Las Matemáticas en el Antiguo Egipto. El papiro Rhind. La Tierra de los Faraones.* Egiptologia.org. Recuperado el 9 de febrero de 2009, de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Maza, C. (2002). *Matemáticas en la Antigüedad*. Universidad de Sevilla, España. Recuperado el 9 de febrero de 2009, de http://personal.us.es/cmaza/

Mazarío, I. (2000). *Propuesta de un sistema de acciones para estructurar la habilidad resolver problemas*. En Colectivo de autores de Universidad del Ministerio de Educación Superior (Eds.), *Resolución de problemas,* pp. 10-15. Cuba: Editorial Universitaria del Ministerio de Educación Superior.

Ministerio de Educación de la Nación (n.d.). *Matemática 6.Tercer Ciclo de Educación General Básica para adultos modalidad semipresencial*. Argentina.

Mira, J. y Gomis, J. (1993). *Ejercicios de dibujo técnico sistemas de representación*. Valencia: Ed. Universidad Politécnica.

Monagas, O. (1998). *Resolución de problemas, autorretrato heurístico y protocolos.* Revista Paradigma, Venezuela. Vol. XIX, Nº 1.

Nieto, J. (2004). *Resolución de problemas Matemáticos*. Material de apoyo de un taller de formación matemáticas en la Licenciatura de Matemáticas. Maracaibo. Recuperado el 30 de marzo de 2009, de http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf

Olazábal, A., (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto.* Tesis de Maestría no publicada, Cicata - IPN, México.

Palacios, A., Álvarez, A. y Argerami, O. (1995). *Biografías de palabras. Pesquisas en el lenguaje matemático.* Buenos Aires: Editorial Magisterio del Río de La Plata.

Parra, B. (2001). *Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas.* En *Arriaga Coronilla, A. y Barrón Rodríguez, H. (*Eds.) *La enseñanza de las en la escuela secundaria matemáticas,* pp. 13-32. México.

Perelman, Y. (1975). *Problemas y experimentos recreativos*. Moscú: Mir.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de La Laguna, España.

Platón. (1999). *Menón*. Madrid, España: Biblioteca Nueva.

Poincaré, H. (1913). *Dernières pensées*. París: Flammarion.

Poincaré, H. y Einstein, A. (1948). *Fundamentos de la geometría*. (de Rey Pastor, J., Trad.). Buenos Aires: Colección infinito. Serie 3, Filosofía de la Ciencia, Vol. 1. Ibero América. (Trabajo original publicado en 1891).

Puig, L. (2008). *Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos*. Revista PNA, España. 2(3) (Marzo 2008), (pp. 87 – 107).

Quintero, A. y Costas, N. (1994). *Geometría*. Puerto Rico: Editorial Universidad de Puerto Rico.

Ramírez, L. (2008). *La resolución de problemas mediada por la visualización. Un estudio de casos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Rendon, A., Banegas, R. y Quintana, J. (2004). *Dibujo técnico 2º (bachillerato): cuaderno de actividades 2.* Madrid: Tebar.

Rey Pastor, R. (1916). *Fundamentos de la Geometría*. Madrid, España: Fortanet.

Rey, J. L. (2004). *Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuando los modelos ayudan, pero no tanto*. Premisa. 6(22), 3 – 12.

Rivera, G., Medina, N. y Revilla, M. (2008). *La resolución de problemas matemáticos en nuestra vida cotidiana*. Perú. Recuperado el 31 de marzo de 2009, de http://www.ame.cisneros.org/ProgramaAME/Presentacion/Matematele%20P10-2.pdf

Roanes, E. y Roanes, E. (1994). *Nuevas tecnologías en geometría.* España: Editorial Complutense.

Rocha, F. Almeida, H. y Ortiz, F. (2006). *Matemática*. México: Pax.

Rodríguez, R. (2005). *El aprendizaje de la demostración en geometría: el pasaje de la geometría experimental a la geometría deductiva*. IUFM de Basse-Normandie Caen Francia. Recuperado el 12 de enero de 2009, de www.math.unicaen.fr/irem/internat/Ruben/geometria.doc

Rueda, S. y García, A. (2005). *Análisis y Comprensión de Problemas Curso de nivelación para ingresantes a carreras de Ciencias e Ingeniería de la Computación,* JEITICS 2005 - Primeras Jornadas de Educación en Informática y TICS en Argentina.

Santaló, L. (1962). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la geometría*. Conferencias pronunciadas en el Instituto Superior del Profesorado. Sección Matemáticas y Cosmografía.

Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). *Prototipos y estereotipos en geometría*. Educación Matemática. 17(3), 105-120.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sigarreta, J. y Laborde, J. (2004). *Estrategias para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural.* Premisa. 6(20), 15-28.

Siñeriz, L. (2002). *La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la Escuela Media*

Argentina: estudio de dos casos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 5(1), 79-101.

Tarifa, L. y González, R. (2000). *Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas matemáticos.* En Colectivo de autores de Universidad del Ministerio de Educación Superior (Eds.), *Resolución de problemas* (pp. 5-9). Cuba: Editorial Universitaria del Ministerio de Educación Superior.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en geometría.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 10(2), 275-300.

Trouche, L. (2005). *Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools, with differential effects*. En Guin,D., Ruthven, K. y Trouche, L. (Eds.). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Springer (pp. 9-40).

Universidad Complutense de Madrid. (2001). *Pruebas de acceso a los estudiantes universitarios de los alumnos de Bachillerato Logse. Materia Dibujo técnico*. España. Recuperado el 21 de marzo de 2009, de http://www.ucm.es/info/ucmp/cont/descargas/documento1244.pdf

Universidad de Extremadura. (1997). *Programa de Dibujo técnico I y II*. España. Recuperado el 22 de marzo de 2009, de http://www.unex.es/unex/servicios/sofd/archivos/ficheros/bachillerato/0607/prog_dibujo_tec.pdf

Universidad Nacional de Mar del Plata (n.d.). *Matemática ingreso. Función polinómica.* pp. 77-114. Argentina.

Valverde, L. (2003). *Los métodos de enseñanza-aprendizaje*. Sesión 4. La heurística. Diplomado en didáctica Universitaria. Universidad de Medellín, Colombia. Recuperado el 22 de marzo de 2009, de http://webapps.udem.edu.co/RenovacionCurricular/Descargas/DiplomadoDidactica/OtroDocumentos/La%20Heuristica.pdf

Anexo 1

Instrumentos para las encuestas

A continuación se presenta los cuestionarios, instrumentos utilizados para las encuestas que se realizaron a profesores de matemática del nivel medio, y a alumnos que cursando el profesorado de matemática.

1. Cuestionario para profesores

Nombre:________________________________ Fecha:________________

Antigüedad en la docencia:___________________________

Carrera que estudió:________________________________

Lugar donde realizó sus estudios:____________________________

Marque con una cruz (x) la respuesta correcta:

1. ¿Qué entiende por “figura de análisis?

    ☐ a. Un dibujo preciso, exacto que se realiza al resolver un problema o realizar una demostración.

    ☐ b. Un dibujo a mano alzada que se realiza al resolver un problema o realizar una demostración.

    ☐ c. Un gráfico dado con el enunciado del problema.

2. ¿Utiliza, usted. habitualmente figuras de análisis?

    ☐ a. Sí

    ☐ b. No

3. En el caso de haber respondido si a la pregunta anterior, ¿con qué frecuencia las realizas a la hora de resolver un problema o realizar una demostración relacionados con geometría?

☐ a. Rara vez

☐ b. Pocas veces

☐ c. Alguna veces

☐ d. Siempre

4. ¿En qué momento emplea las figuras de análisis? (puede señalar más de una respuesta)

   ☐ a. A la hora de resolver un problema geométrico

   ☐ b. Realizar una demostración geométrica

   ☐ c. En una construcción geométrica.

5. Si recuerda las primeras veces que realizó estas figuras de análisis, fue durante su trayectoria por:

   ☐ a. La escuela primaria

   ☐ b. La escuela secundaria

   ☐ c. En el nivel terciario

6. Volviendo a estas primeras veces que utilizó las figuras de análisis piensa que su origen fue dado por:

   ☐ a. Una elaboración personal que nació naturalmente

   ☐ b. Los aportes y sugerencias del docente

   ☐ c. La imposición del docente

   ☐ d. Los libros de textos

7. ¿Aconseja a sus alumnos a utilizar estas figuras de análisis? ¿En qué forma lo hace?

   ☐ a. No las recomiendo

   ☐ b. Si, las aconsejo confeccionar.

   ☐ c. Si, con carácter de obligatorio su confección

8. ¿Cuánto útil cree ustedes que son las figuras de análisis para sus alumnos a la hora de la resolución de problemas geométricos?

☐ a. Poco útil, no siempre permiten entender el problema.

☐ b. Útil ya que permite ver todos los datos dados en el problema.

☐ c. Muy útil porque permite no solo volcar los datos dados en el problema sino además tener una visión más general de la situación.

9. De una explicación del por qué de las últimas dos respuestas anteriores.

GRACIAS por su colaboración, toda respuesta es útil para esta investigación.

Mónica

2. Cuestionario para alumnos

Nombre:_________________________________ Fecha:________________

Edad:__________

Carrera que estudia:________________

Lugar donde realiza sus estudios:_________________

Año que cursa: ______________________

Marque con una cruz (x) la respuesta correcta:

10. ¿Qué entiende por “figura de análisis?

- ☐ a. Un dibujo preciso, exacto que se realiza al resolver un problema o realizar una demostración.
- ☐ b. Un dibujo a mano alzada que se realiza al resolver un problema o realizar una demostración.
- ☐ c. Un gráfico dado con el enunciado del problema.

11. ¿Utiliza habitualmente figuras de análisis?

- ☐ a. Sí
- ☐ b. No

12. En el caso de haber respondido si a la pregunta anterior, ¿con qué frecuencia las realizas a la hora de resolver un problema o realizar una demostración relacionados con geometría?

- ☐ a. Rara vez
- ☐ b. Pocas veces
- ☐ c. Alguna veces
- ☐ d. Siempre

13. Su utilización la definiría como:

- ☐ a. Poco útil, no siempre permiten entender el problema.
- ☐ b. Útil ya que permite ver todos los datos dados en el problema.

☐ c. Muy útil porque permite no solo volcar los datos dados en el problema sino además tener una visión más general de la situación.

14. ¿En qué momento emplea las figuras de análisis? (puede señalar más de una respuesta)

☐ a. A la hora de resolver un problema geométrico

☐ b. Realizar una demostración geométrica

☐ c. En una construcción geométrica.

15. Si recuerda las primeras veces que realizó estas figuras de análisis, fue durante su trayectoria por:

☐ a. La escuela primaria

☐ b. La escuela secundaria

☐ c. En el nivel terciario

16. Volviendo a estas primeras veces que utilizó las figuras de análisis piensa que su origen fue dado por:

☐ a. Una elaboración personal que nació naturalmente

☐ b. Los aportes y sugerencias del docente

☐ c. La imposición del docente

☐ d. Los libros de textos

17. Como futuro docente: ¿aconsejaría a sus alumnos a utilizar estas figuras de análisis? ¿En qué forma lo haría?

☐ a. No las recomendaría

☐ b. Si, las aconsejaría a confeccionar.

☐ c. Si, las obligaría a confeccionar

18. De una explicación del por qué de la respuesta anterior.

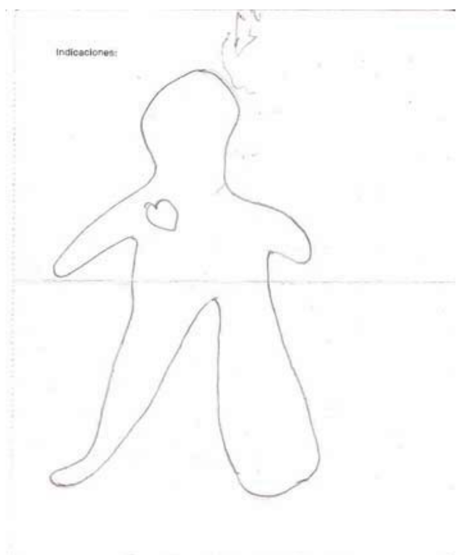
GRACIAS por su colaboración, toda respuesta es útil para esta investigación.

Mónica

Anexo 2

Entrevista a una médica psiquiatra

Estos dibujos surgen en una conversación con una médica psiquiatra quien me explicaba sus técnicas para estudiar al comenzar su carrera universitaria. En medio de la conversación realizó los dibujos que pueden observarse a continuación y a partir de los cuales se lleva, luego, la siguiente entrevista semi-estructurada.



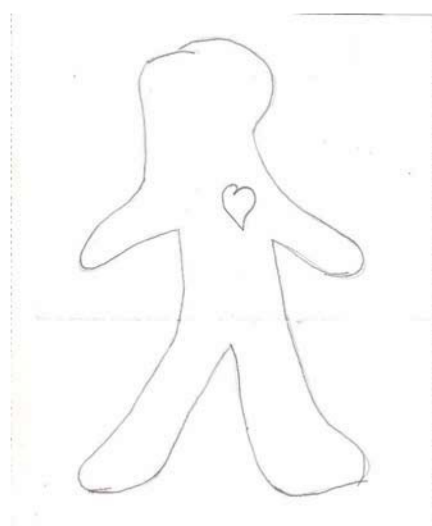


Diagrama A **Diagrama** **B**

Entrevistador (E.): *Estos son los dos diagramas que alguna vez dibujara explicándome como estudiaba ¿cuál era el que realizaba para estudiar? Y ¿cuál era el que aparece en los libros?, pues para mí son ambos muy similares.*

Médica psiquiatra (M.P.) : *El que dibujaba era el que se detalla con la letra A, en cambio el que aparece en los textos es el denominado diagrama B.*

E.: *¿Por qué realizaba un dibujo distinto al que aparecía en los libros de textos? ¿Qué la llevó a realizar algo tan distinto?*

M.P.: *Se me ocurrió un método para acordarme qué órganos estaban a la derecha y qué cosa estaba a la izquierda*.

E.: ¿Qué beneficios veía a la hora de realizar dichos dibujos tan distintos a la generalidad?

M.P.: *Es que lo que está en el cuerpo humano a la izquierda, en el dibujo que realizaba también está a la izquierda (del lector).*

E.: *Haber si entiendo mejor, en nuestro ejemplo, el corazón se encuentra en el cuerpo humano a la izquierda y en su dibujo también estaba a la izquierda, por lo tanto ¿su dibujo era como verse en un espejo, en lugar de ser una foto del cuerpo humano, como cuando aparece en los libros?, su dibujo como la imagen reflejada en un espejo en lugar de ser otro cuerpo enfrentado a uno mismo. ¿Estoy en lo correcto?*

M.P.: *si…*

E.: *Pero todo parece muy confuso, ¿se le presentaron dificultades por variar lo que convencionalmente aparecía en los libros de textos?*

M.P.: *Si (responde con mucho énfasis). Más adelante acepté a regañadientes que el criterio del libro era más conveniente, que mi dibujo.*

E.: *¿Podría precisar más detalladamente cuáles fueron las dificultades que le ocasionaron los dibujos que confeccionaba para estudiar?*

M.P.: *Sí, el tema es que se iba complejizando la materia (anatomía), y cada vez, había más gráficos y era preferible aceptar la convención de dibujarlo enfrente de uno.*

E.: *¿Qué entiende por "figura de análisis"?*

M.P.: *Es un gráfico o dibujo que da cuenta de un proceso abstracto, otorgándole "figurabilidad".*

E.: *¿A qué se refiere con la palabra "figuralidad"? ¿Podría explicar el término?*

M.P.: *Colocar una imagen para ejemplificar un concepto abstracto, y hacerlo más asequible.*

E.: *Volviendo a su profesión, ¿utiliza figuras, diagramas o dibujos habitualmente?*

M.P.: *Si que las uso.*

E.: *¿Podría precisar con qué frecuencia?*

M.P.: *Más o menos, en un cincuenta por ciento de las cosas que debo explicar.*

E.: *Pero ¿cuándo con mayor frecuencia?*

M.P.: *Cuando se me ocurre alguna manera de graficarlo, que ayude a figurarse mejor un concepto abstracto.*

E.: *Pero en el caso de su primer ejemplo la ubicación del corazón no es un concepto abstracto, ¿qué entiende por "concepto abstracto"?*

M.P.: *Razonamientos que ayudan a entender procesos físicos o psíquicos que no se pueden ver ni tocar. Son sólo razonamientos, pero al graficarlos, se vuelven algo más familiar, que permite su aprehensión.*

E.: *¿Qué valor de utilidad le asigna a dichas figuras?*

M.P.: *Me resultan muy útiles a la hora de entender mecanismos complejos.*

E.: *¿Cómo cuáles? ¿Podría dar un ejemplo?*

M.P.: *En el mecanismo de la idealización: se le atribuyen al objeto idealizado cualidades extraordinarias, que en realidad provienen del yo ideal del sujeto. Este queda con su libido objetal disminuida y el objeto idealizado, queda engrandecido a sus ojos. El sujeto está convencido de que el poder se irradia desde el objeto idealizado cuando en realidad las cualidades le son propias, y él las ha proyectado en el objeto. Como el objeto está en posesión de "sus" cualidades, el sujeto lo necesita cerca, ya que de alejarse se "llevaría consigo" todo la libido objetal depositada en él.*

***E.:** ¿Cómo se relaciona su profesión con las figuras?*

***M.P.:** Estos complejos mecanismos, se pueden entender rápidamente, si uno dibuja al sujeto, con sus cargas libidinales, al objeto a ser idealizado, recibiendo las mismas, y las flechitas que van de uno al otro…, también se puede dibujar, como en una historieta, en un segundo cuadro, al sujeto idealizado agrandado, y al otro achicando que lo mira con ojos tristes…*

***E.:** Si recuerda las primeras veces que realizó figuras de análisis en la escuela, ¿fue durante su trayectoria en la primaria o la secundaria?*

***M.P.:** Creo que empezó en la primaria, o en la secundaria.*

***E.:** ¿Cree que las figuras surgen naturalmente o son impuestas?*

***M.P.:** Algunas surgen de la propia imaginación y otras son aportadas por diversos autores.*

***E.:** Cuando habla de autores, ¿está pensado en el ejemplo de los diagramas de inicio?*

***M.P.:** Sí, porque en algunos textos hay gráficos y muchos docentes usan las propias.*

***E.:** Resumiendo las ideas expuestas, ¿considera que el origen de estas figuras tiene por un lado la imaginación del sujeto y por otro lado tienen un factor externo como puede ser los libros o el rol del docente? ¿Qué piensa al respecto?*

***M.P.:** Tiene como origen la necesidad de transmitir de forma clara, concreta, e incluso lúdica mecanismos, situaciones o razonamientos no muy sencillos de explicar, o a personas que necesiten otro tipo de acercamiento a dichos temas, que no es el modo convencional.*

***E.:** ¿Piensa que las figuras o dibujos para resolver un problema solo se emplean a la hora de resolver problemas o ejercicios matemáticos o referidos a un proceso educativo?*

***M.P.:**¡No!*

E.: *¿Podría explicar el porqué?*

M.P.: *Cualquier proceso o mecanismo, ya sea concreto o abstracto, puede verse beneficiado por un gráfico o expresión gráfica, con el objetivo de poder ser aprehendido, o transmitido.*

E.: *Ha mencionado en varias ocasiones el proceso abstracto diferenciándolo del concreto, pero si las figuras de análisis pertenecen a una materialización, ¿cómo lo asocia con un proceso abstracto?*

M.P.: *Sería como ponerle alguna figura concreta, (una carita, una flecha, un dibujo alusivo), a algo que no la tiene , como para poder "operar" mentalmente con ese concepto, sin que se "escape" de la mente, por dificultad para imaginar nada en relación a él.*

E.: *Si mal no recuerdo usted, antes de ser médica ha trabajado como maestra, ¿esto es así?*

M.P.: *SI…*

E.: *¿Qué grado tenía?*

M.P.: *De 1º a 7º porque era una escuela rural de personal único …..*

E.: *Y en un rol distinto como es el de ser docente, ¿empleaba con sus alumnos figura de análisis?*

M.P.: *Sí…*

E.: *¿En qué momento, más precisamente?*

M.P.: *Muchas veces como factor motivador al principio de la clase, para despertar su curiosidad o interés. Y otras veces como herramienta para graficar una situación problemática, por ejemplo si había que calcular cuantos chicos iban en total, en 12 micros con 20 chicos cada uno, dibujábamos los 12 micros y a los 20 chicos adentro.*

E.: *¿Recomendaba a sus alumnos realizar figuras en la resolución de problemas matemáticos?*

M.P.: *Sí.*

E.: *¿Por qué las recomendaba?*

M.P.: *Los niños tienen pensamiento concreto, la abstracción la van alcanzando al adquirir cierta madurez, por lo tanto consideraba que era más fácil, "ver" los micros, que imaginarlos. También para evitar que los chicos se pregunten "este problema es de "Por" o de "qué".*

E.: *Muchas gracias por su tiempo, y dedicación al responder a estas preguntas.*

Anexo 3

Entrevista a una tejedora

Estos dibujos surgen en una conversación con una médica siquiatra quien me explicaba sus técnicas para estudiar al comenzar su carrera universitaria. En medio de la conversación realizó los dibujos que pueden observarse a continuación y a partir de los cuales se lleva, luego, la siguiente entrevista semi-estructurada.

***Entrevistador (E*.):** *¿Hace cuánto que teje?*
***Tejedora (T.)**: Desde los cuatro años que tejo a mano a dos agujas y con la máquina desde mayo del setenta.*

***E.:** ¿Cómo aprendió a tejer?*
***T.**: Por lo que me explicó mi mamá pues yo no fui a hacer ningún curso, me las ingenié con lo que ella me explicaba.*

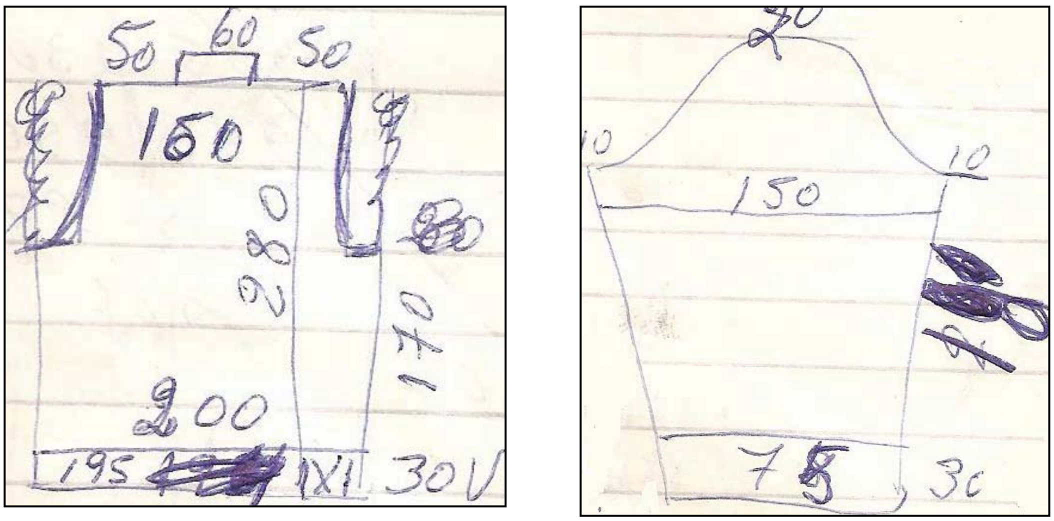
***E.:** Pero darle forma a una prenda no debe de ser sencillo, ¿podría explicarme el procedimiento para que la prenda terminada coincida con las medidas requeridas?*
***T.**: Hay que sacar cálculos de acuerdo las medidas, se hace una muestra de 50 puntos por 50 vueltas, se hace descansar. Luego se mide 10 cm de largo y 10 cm de alto y en base a la cantidad de puntos y vueltas que entraron se realiza los cálculos con las medidas tomadas de otro pullover.*

***E.:** ¿Qué es una muestra, si se habla de tejido?*
***T.**: Como ya dije es un tejido que se hace de 50 puntos por 50 vueltas, que se realiza con la lana o hilo que se va a usar y en el punto elegido para luego tomar sobre ella las medidas.*

E.: *¿Cuáles son los cálculos que son necesarios realizar, una vez medidos en la muestra?*

T.*: Supongamos que la muestra da en 10 cm 20 puntos es 2 puntos por centímetro y da 30 vueltas son 3 vueltas por centímetro y luego se multiplica por las medidas necesarias. Es una cuenta de regla de tres simple.*

E.: *¿Cuándo es que se realiza los dibujos que se ven en estos cuadernos?*

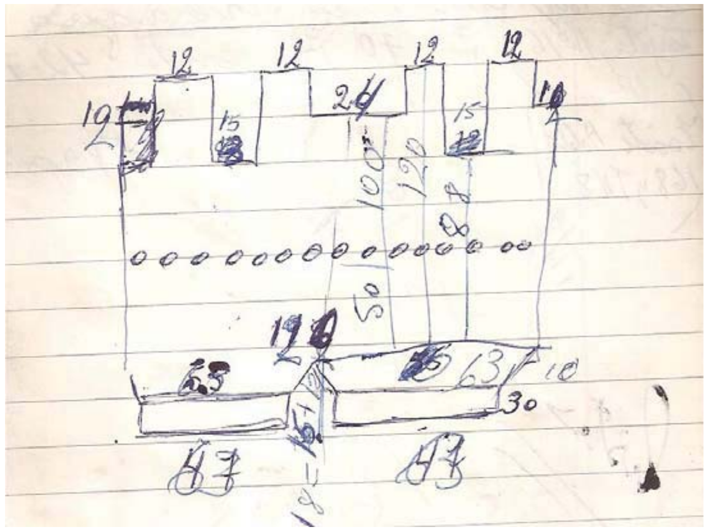


Bosquejo para un pullover

T.*: Primero hago el dibujo y luego lo completo con los resultados de los puntos y con las vueltas de las cuentas que hago.*

E.: *En esta página puede verse un dibujo que no responde al modelo de un pullover, ¿de qué prenda se trata?*

Se muestra la siguiente figura que se encuentra en una de las páginas del cuaderno de la propia tejedora.



***T.**: El dibujo corresponde a un conjutito de bebé, sin mangas. Los agujeritos que se ven es para hacer un calado y pasar un pasa cinta que coincide con la cinturita del bebé.*

***E.:** ¿Cómo fue que aprendió este método para realizar los cálculos como usted los llama?*
***T.**: Por la experiencia de aprender a mano, porque esa no fue sacada de ningún libro. Porque hay muchos sistemas, parecidos pero no iguales.*

***E.:** Volviendo a los dibujos: los números que se leen, ¿son centímetros?*
***T.**: Los números que están ubicados en forma vertical representan las vueltas y los horizontales los puntos necesarios.*

***E.:** Recorriendo el cuaderno puede notarse que todos los dibujos son de tamaño similares aunque las prendas, al ser para distintas personas, tienes medidas distintas, ¿a qué se debe esto?*
***T.**: Lógico, es un croquis para poner los puntos y las vueltas pero no necesita tener las medidas reales de la prenda. Es un croquis que se hace.*

***E.:** Si no le molesta mi pregunta, ¿qué estudios tiene?*

***T.**: Terminé la primaria.*

***E.:** ¿Podría decir que sus estudios primarios influyeron en este método para realizar prendas tejidas a medida?*

***T.**: Y si porque sino no podría hacer las cuentas, no podría dividir o multiplicar para saber donde hay que hacer los ojales o las disminuciones.*

E.: En los dibujos, que usted denominó croquis, *¿es importante si las líneas son rectas?*

***T.**: Sería mejor por prolijidad pero igual no influye.*

***E.:** Muchas gracias por su tiempo, y dedicación al responder a estas preguntas.*