

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA
U. LEGARIA

LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONCEPTO DE SOLUCIÓN

Tesis que para obtener el grado de
Doctorado en Matemática Educativa

Presenta:

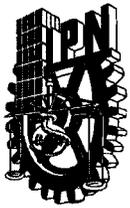
Juan Guadarrama Méndez

Director de Tesis:

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

México, D. F., Diciembre de 2007





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 10 del mes de diciembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"La construcción social del concepto de solución"

Presentada por el alumno:

Guadarrama
Apellido paterno

Méndez
materno

Juan
nombre(s)

Con registro:

A	0	1	0	6	4	4
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Codirector

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón



CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional



Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Dr. Alberto Camacho Ríos

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 10 del mes diciembre del año 2007, el (la) que suscribe. Juan Guadarrama Méndez alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A010644, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ricardo Cantoral Uriza, y Codirector Dr. Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado La Construcción Social del Concepto de Solución, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección jguadarrama2@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Juan Guadarrama Méndez

Nombre y firma

Agradecimientos

Y saldrás de algún lugar a recibirme y abrazarme y recuperaré en ese abrazo todos los soles que me han quitado, en este sentido reconocimiento a esos sentidos diversos por el luchar en la vida y por la vida, para don durito y Ibarra, R. pues hoy ha adquirido su lucha y la herencia de esta lucha un valor no sólo de liberación sino de un sentido ético.

A la memoria de todos mis seres queridos, los que en el pasado me ayudaron de múltiples formas, también los presentes a los que de manera silenciosa están ahí, hombro con hombro, les expreso mi cariño, admiración, estimación, y amor pues me alientan a seguir, gracias, todos ellos personas que quiero, y amo mucho.

Especial reconocimiento y agradecimiento al Dr. Ricardo Cantoral Uriza, en su atinada dirección, al proveer momentos de intercambio de ideas, puntos de vista muy afinados, que posibilitaron el avance, y desde luego su cobertura en el posicionamiento abierto de la socioepistemología que cobija el trabajo, brindándome espacio y apoyo para la construcción y desarrollo del proyecto de investigación doctoral, *la construcción social del concepto de solución*, aspecto de calidez humana, pero no por ella exenta de exigencia profesional, por una búsqueda intensa de su estudio, reflexión, y discusión alrededor del trabajo

Externo también agradecimiento de manera infinita por el apoyo, asesoría, comentarios y la codirección del proyecto de investigación doctoral al Dr. Javier Lezama Andalón, por su preocupación de que todo estuviera en orden y a tiempo.

A las valiosas observaciones e interés mostrado en todos los momentos que pudimos vernos para tratar el tema, dándole e imprimiéndole en sus revisiones la calidad valiosa al trabajo y sus aportaciones, del Dr. Alberto Camacho.

A la Dra. Rosa Maria Farfán, por indicarme de manera aguda sus observaciones, sin que ello hiciera perder el trato amable, cordial, y a la vez muy profesional que observo en ella, muchas gracias

A mi alma mater el Instituto Politécnico Nacional a través del CICATA por formarme, y darme la oportunidad de enriquecerme intelectualmente, al IEEPO y UPN por considerarme asumiendo recíprocamente los compromisos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO I. DEFINICIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO	
I.1 Antecedentes del trabajo de investigación doctoral	13
I.1.1 Delimitación del objeto de estudio. Características contextuales	13
I.1.1.1 Antecedentes de la problemática	13
I.1.1.2 Los trabajos relacionados con esta problemática	14
I.1.1.3 Otros trabajos relacionados con el área de Álgebra Lineal	15
I.1.1.4 Las situaciones de representación gráfica de las tesinas que llamaron la atención	17
I.1.2 Organización de las categorías que centraron el interés	21
I.1.3 Objetivos del trabajo de investigación	25
I.1.3.1 Hipótesis	28
I.1.3.2 Interrogantes generales	29
I.1.3.3 Marco teórico	30
I.1.3.4 Metodología	32
I.1.3.5 El contexto de la entrevista	33
I.1.3.5.1 Características generales de los entrevistados y de la investigación	33
I.1.3.5.2 Análisis de las entrevistas. Observaciones generales a las mismas	34
I.1.4 Resultados y perspectivas a partir de las observaciones generales	39
I.1.4.1 Resultado fundamental	39
I.1.4.2 Otros aspectos	40
I.1.5 Perspectivas para futuros trabajos	40
I.2 Definición de la problemática	43
I.2.1 El problema	43
I.2.2 Nivel y preguntas del proyecto de investigación respecto a la problemática	46
I.2.3 Preguntas de investigación	47
I.2.4 Justificación e interrelaciones del trabajo de doctorado	48
I.2.5 Objetivo general	59
I.2.6 Hipótesis de trabajo del proyecto doctoral	60
CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA	
II.1 Consideraciones geopolíticas del conocimiento	63
II.2 Análisis histórico epistemológico	70
II.2.1 Dos puntos necesarios para el análisis de la noción de solución que se construye	70
II.3 Justificación del por qué crear un horizonte de racionalidad, desde nuestra matriz histórico-cultural para el caso del concepto de solución	83
II.3.1 Las cuatro grandes argumentaciones	85

II.3.2 Observación de modificaciones epistémicas en los momentos de transición	92
II.4 El camino elegido en la idea de su conexión	109
II.4.1 Sustento de la discusión filosófica	116
II.4.2 La filosofía analítica, conformación de la visión	120
II.4.3 La idea de la extensión	122
II.4.4 La convergencia de nuestros elementos	124
II.4.5 La lengua, transmisora de conocimientos e identitaria de los pueblos etnolingüísticas	127
II.4.6 Problemática a estudiarse	128
II.4.6.1 Carácter general	129
II.4.6.2 Carácter específico	130
II.4.7 El plano de lo educativo y la lengua	131
II.4.8 Sobre su aprendizaje	131
II.4.9 Educación y conocimiento cultural	132
II.4.10 El lenguaje	133
II.4.11 Las formas empleadas	137
II.5 Desvinculación entre los lenguajes de uso y el categorial	139
II.6 Cambios de paradigmas o cambios en la validación de la razón instrumental	150
II.6.1 A manera de colofón	160
II.6.2 La discusión continúa con nuevos referentes	161
II.7 El trabajo quedaría incompleto si no se formula ¿qué es un problema?	173
II.7.1 Diversas posiciones teóricas	173
II.7.2 Esquema del proceso de resolución de problemas	174
II.7.3 Antecedentes	174
II.7.4 ¿Qué es la resolución de problemas?	175
II.7.4.1 Definición	178
 CAPÍTULO III. RESULTADOS	
III.1 Qué está ocurriendo con las personas que aprenden matemáticas	181
III.1.1 Con un grupo de profesores del nivel de educación superior	181
III.1.2 Con un grupo de profesores de educación básica	186
III.1.2.1 Primera indagación. Observaciones sobre los procesos de comprensión de los profesores “acerca de un enunciado de un problema matemático”	187
III.1.2.2 Segunda indagación: problemática de significación en los profesores-alumnos de la UPN “correspondencia con su proceso formativo”	188
III.1.2.2.1 Del lenguaje	190
III.1.2.2.2 La inasistencia y la indisciplina	191
III.1.3 Con un grupo de estudiantes del nivel de educación superior	192
III.1.3.1 Diferencias en el lenguaje escolar (grupo 1)	193

III.1.3.2 ¿Qué es la solución para ti? (grupo 2)	198
III.1.3.3 Descripción de las actividades realizadas por los alumnos (grupo 1)	202
III.1.3.4 ¿Qué dificultades tuviste? (grupo 2)	204
III.1.4 Con un grupo de estudiantes de educación básica (una comunidad)	205
 CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES	 215
 BIBLIOGRAFÍA	 222
ANEXOS	
Anexo 1. Para enfrentar el <i>cómo llevar a cabo este proceso de Conocimiento</i>	231
Anexo 2. Instrumento de exploración, primera parte	234
Anexo 3. Instrumento de trabajo de los profesores de Educación Básica	235
Anexo 4. Dos procesos elegidos de los estudiantes-profesores	236

La Construcción Social del concepto de Solución

Resumen

La presente investigación, da cuenta de las indagaciones e inquietudes que se formularon en cuanto a dar respuesta a cómo se efectúa el proceso de construcción social del concepto de solución, cuando se consideran componentes definidas (lengua, identidad y cultura), en la dimensión sociocultural de la aproximación teórica e investigativa de la socioepistemología. La cual pasó por varios procesos dado que se considera que no se había efectuado una investigación con estas características: fijar las componentes en una dimensión de análisis de la aproximación antes indicada, concretamente de la dimensión sociocultural.

Dando cuenta de la importancia de este primer aspecto del proceso de construcción, observar el proceso de definición de la problemática, como también de abordaje de la misma, en la intención de resolver la pregunta central.

Lo que colocó la problemática en un segundo nivel de escalamiento de la complejidad que guarda -por tanto de un mayor acercamiento a la misma-, aumento en la percepción como nitidez en los procesos que operan, cuando se observan procesos de construcción del conocimiento matemático escolar en las personas que aprenden, estableciendo con ello un nuevo miramiento que da posibilidad de considerar, dentro de los resultados que arrojó, evidencias fuertes de la acción e intervención de otros horizontes de racionalidad constituidos en el tiempo y en el espacio, que actúan en el momento de aprender por parte de las personas y que refieren a formulaciones en el plano de lo cognitivo, de lo epistemológico y didáctico que van actuando, por indicar, en una similitud al movimiento del mar, bajo oleadas sistemáticas -con cierta regularidad, y frecuencia-, aunque en cierto sentido caóticas -por las direcciones que adoptan-, con las cuales las personas fijan sus parámetros del aprender para actuar frente a los conceptos matemáticos, en particular el de la solución.

Colocando la problemática y su proceso de investigación, en un nuevo plano ya que este escalamiento de abordar la complejidad de la problemática, esboza procesos sociales de importancia para el *qué hacer* investigativo, así como la postura que asume, y la forma de mirar la problemática.

Llevando varias implicaciones en ello, la primera que tiene que ver con el miramiento de la problemática que se sucede en el aula, en lo escolar, al acercarse más, segundo en la forma de percibir, por tanto implicación al definir la problemática, como de las formas que adopta, que en muchas de las veces se ha desdeñado, invisibilizar lo social, por tanto del carácter metodológico que se adopta al momento de enfrentar la problemática -referida mas hacia la actitud de quien la investiga-, y tercero lo que produce como conocimiento; al establecer un reconocimiento de que existe una matriz cultural que enuncia, que provee el discurso matemático teórico y escolar, por un lado y por otra la de una matriz que constituye y efectúa esta asimilación y construcción en las personas que aprenden.

Por tanto dando cuenta de algo que en la investigación científica, no se considera que actúa al momento de aprender y desde luego del enseñar; la dimensión geopolítica del conocimiento, como otro elemento constituyente en la construcción de los saberes en las personas, invisibilizado por los horizontes de racionalidad, bajo el cobijo de la racionalidad/modernidad, a través de la postura que adopta la misma investigación y el conocimiento que genera, señalando que la ciencia es neutral, desmitificando esta conceptualización, pues dio origen a una reflexión más profunda, la necesidad de observar

estos miramientos sociales, que Mignolo caracterizó como del *locus de enunciación*, que refiere a que enunciados proferidos en lugares diferentes dan cuenta de procesos de cognición y epistemicamente diferenciados por esta condición geopolítica que opera en los conocimientos dando con ello la diferencia, y por tanto evidencia de epistemologías distintas, lo que nos llevó a considerar la intervención en los procesos de aprender, de enseñar de otras epistemologías que se movilizan al momento de aprender, desde donde se pudo tener otro miramiento de la problemática como de los aspectos metodológicos que implico, así como de la consideración al momento de obtención de los resultados en las conclusiones alcanzadas.

La investigación a partir de todas estas consideraciones: cultura, identidad y lenguaje, fijó su atención en el ámbito de los lenguajes, para de ahí observar lo que se detectó en el ámbito de lo didáctico, de lo epistemológico y de lo cognitivo: que el discurso matemático escolar abre círculos de lenguaje epistémicos que no cierra al momento de operar con los conceptos, dejando en el aire el proceso, afectando a las personas que aprenden, por un lado, y por el otro creando nuevos horizontes de racionalidad que evitan que las personas cierren un proceso y abran uno nuevo para la comprensión y entendimiento de un concepto que se esté trabajando, como fue el caso de la *solución*

Lo anterior es relevante porque refleja concepciones particularidades de la enseñanza de las matemáticas, aunque se consideraba que esto no tenía sentido; sin embargo, las apreciaciones y aclaraciones hechas abrieron las puertas de la comprensión, a profesores y alumnos, de otro tipo de fenómenos, posibilidad de conocimiento de entes, procesos sociales y culturales, que les permitieron ver estructuras mentales y conceptuales que conllevaban procesos abstractos de la matemática, lo que conduce a comprender la organización y estructuración del pensamiento avanzado,

Las evidencias mostraron que las personas en su transitar de una experiencia a otra – al trabajar en los distintos niveles educativos-, actúan, bajo las asimilaciones adoptadas entre un horizonte de racionalidad anterior y uno posterior en el que se pudo observar que no abandonaban del todo el anterior horizonte, de una experiencia pasada -dado que el proceso didáctico, cognitivo y epistémico no lo había cerrado-, y otro de recién acuñación –dado que las exigencias racionales establecen una dinámica de ascender en la misma, por tanto de dar cuenta del progresar-, lo que asimismo hace posible observar que en las concepciones y entendimientos de las personas existen momentos de transición entre una epistemología que abandonaban y una nueva que se enunciaba a través de las discursividades, lo que fue identificado como “puntos de entrecruzamiento epistémico en las personas”, producto de las exigencias al enseñar y aprender matemáticas en el ámbito escolar.

Estos entrecruzamientos fueron punto singular de la presente explicación, pues se observó que las exigencias racionales, además de colocar a las personas entre dos epistemologías enunciadas, también abrían, a nivel de lenguaje de uso y categorial, lo que se denomina “un circuito epistémico”, que no era retroalimentado didáctica, cognitiva y epistémicamente, es decir, que en él no intervenía la operación racional en el sentido didáctico, cognitivo y epistémico de efectuar el cierre de dicho circuito para estar en mejores condiciones didácticas y cognitivas para nuevos aprendizajes y la potenciación de los mismos; el estudio del sistema de cultura por ello fue decisivo.

The Social construction of the Solution concept

Abstract

The following investigation, covers research and questions formulated in terms of giving answers on how to elaborate the social construction process of the solution concept, when defined concepts as (language, identity and culture) are considered according to the socio-cultural dimension of the theoretical and research approximation of the socio-epistemology. Which step by step, through several processes, considering that there hadn't been any research work under these characteristics: fixing the components in an analysis dimension of the approximation stated above, the sociocultural dimension specifically.

Considering the importance of this first aspect of the construction process, observing the definition process of the problem, as well as going over it with the intention of solving the main question.

What placed the problem in a second level of the complexity it implies- therefore a closer view of it augmentation on the perception as well as transparency in the process that operate. When construction processes of the scholar mathematical knowledge are observed on people who learn, establishing with it a new view, that gives the possibility to consider, (under the results another it threw), strong evidence of the action and intevenience of other horizons of rationality built-up in time and space, that act in the moment of learning and refer to formulations in terms of cognition, from the epistemological and didactico that keep on acting, by indicating, resembling the movement of sea, under systematic waves, with certain frequency and regularity, even trough in some kaotic extent (for the direction they adopt), with which people fixate their parameters of learning to take action over the mathematical concepts, particularly to that of the solution.

As we place the problem and its process of investigation on a new level, the complexity of the problem sketches social processes of great importance to research, such as the stand it assumes, and the way of looking at the problem.

Taking other implications with it, the first one that has to do with point of view of the problem happening in the classroom, second in the way of perceiving, the problem it defines as well as the forms it may adopt, which in many cases anulates the social part, therefore the methodologic matter that is adopted in the moment of facing the problem, refereed more to the attitude of the person who does the research and third, what it produces as knowledge as it establishes the knowledge that there exists a cultural matrix that promotes the mathematical, theoretical and scholar statement. On the other hand it promotes a matrix that builds up and carries out an assimilation and construction in the people who learn.

Therefore showing something that the scientific investigation does not consider that it happens in the moment of learning and, of course, teaching; the geopolitical dimension of the knowledge, as another constitute live element in the construction of knowledge in people, made invisible by the horizons of rationality, under the coverage of the rationality/modernity, through the posture adopted by the same investigation and the knowledge it generates. Which indicates that science is neutral, unmythifiging this concept, since it originated a more complex reflexion, the need of observing these social points of view that Mignolo characterized as from *locus of enunciation*, which refer to sentences stated in different places that show the processes of cognition and epistemically diferenciaded by this geopolitical condition that operates in knowledge, bring in up with it the difference, and therefore the

evidence of different epistemologies, which led us to consider intervence in the learning processes, of teaching of other epistemologies that move at the from which it was possible to have another point of view about the problem and the methodology aspects that implies as well as the consideration in the moment of gathering results in the conclusions reached.

The investigation derived from these considerations: culture, identity and language threw its attention to languages to start from there exactly to observe what was detected in terms of epistemology and cognition: that the mathematical scholar statement opens language circles of epistemic languages that do not close at the very moment of operating with the close other concepts, leaving the process on the air, affecting people who learn on a side and on the other creating new horizons of rationality which aroid people from closing a process and open a new one for comprehension and understanding of a concept such as the solution.

All what is written above is relevant because reflects particular concepts of teaching mathematics, even though it was considered non sense. However, appreciations and clarifications made opened the possibility of comprehension to professors and alumni, other kinds of phenomena, possibilities of knowledge of entes social and cultural processes whill allowed them view mental structures and conceptual ones which conveyed to abstract processes of Mathematics to the comprehension of the organization and structuring of the advanced thinking.

Evidence showed that people in their transit from one experience to another- working in the different educational levels, act under the adopted assimilations between previous rationality horizon and a posterior one where it could be observed that they didn't abandon entirely the previous horizon, in a past experience, since the didactic, cognitive and epistemological process hadn't closed yet. And another of recent consideration, since rational demands establish a dynamic of ascention in it. Which makes it possible observe that in concepts and understanding of people exist transition periods between an abandoned epistemology and a new one that was sated through explanations which was identified as "point of epistemic crossing between people" product of teaching demands and learning math in school.

These crossings were common point in this explanation, as it was observed that the rational demands besides placing people between to epistemologies stated, also opened (in terms of language of use and categorical) what is known as "epistemic circuit" which was not didactically, cognitive, and epistemically back fed

So to speak, the rational operation did not intervene in terms of didactics, cognition an epistemology when closing the mentioned circuit in order to be in better didactic and cognitive condition to new knowledge and potenciation: the study of the culture system was therefore decisive

INTRODUCCIÓN

*Laadu cadi canábadu
ganna tu tulaadu*

*Cayunidu dxíiña pur
gannatu tu náacadu*

INTRODUCCIÓN

La investigación que por título lleva: *La Construcción Social del Concepto de Solución* que a continuación se presenta, fue dividida en cuatro grandes apartados, llamados capítulos, los cuales dan cuenta del proceso de indagación efectuado respecto a cómo se efectúa el proceso de construcción social de dicho concepto y del dar respuesta a esta pregunta central del proyecto, la cual como todo proceso se fue elaborando hasta alcanzar el objetivo, de dar respuesta a lo alcanzado indagar, en el que se consideraron componentes definidas (lengua, identidad y cultura), en la dimensión sociocultural de la aproximación socioepistemológica de investigación.

Para ello se definió un primer capítulo titulado: *DEFINICIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO*, el que fue dividido en dos partes: la primera correspondiente a los antecedentes del trabajo, y una segunda donde se fue formulando la problemática a la cual se denominó definición de la problemática.

En el caso de los antecedentes, éstos fueron desglosados de acuerdo a una investigación realizada previamente por Guadarrama (2000), cuyos elementos consideraron la delimitación del objeto de estudio, dentro de ella se inicia con las características contextuales, antecedentes de la problemática, los trabajos relacionados con la problemática, la observancia de otros trabajos relacionados con el área de álgebra lineal, las situaciones de representación gráfica de tesinas que llamaron la atención, como segundo elemento constitutivo de los antecedentes consistente en la organización de las categorías que centraron el interés, un tercer elemento los objetivos del trabajo de investigación arriba referido, donde se formuló una hipótesis, las interrogantes generales, el marco teórico, la metodología con la que se procedió en esa experiencia particularizando el contexto de la entrevista, que detalló las características generales de los entrevistados y de la investigación, la sección de análisis de las entrevistas y de las observaciones generales a las mismas, para después pasar a la sección de resultados y perspectivas a partir de las observaciones generales, como del resultado fundamental y otros aspectos.

En el caso de la segunda parte, que como ya se señaló antes, identificada por Definición de la problemática, de este primer capítulo de la investigación doctoral, se ubicó, el problema, centro y preocupación a la vez por establecer las pesquisas necesarias, el nivel de conceptualización alcanzado a través de su precisión sistemática, por lo que hizo necesario definir el nivel y preguntas del proyecto de investigación respecto a la problemática determinada para llevar a cabo la investigación propiamente, formulándose las preguntas que centraron la indagación, la justificación que observamos, acerca del por qué era importante darle un tratamiento de estudio a la problemática de este proyecto y de las interrelaciones que encontrábamos en el trabajo de doctorado, pero también del objetivo general que se formuló para alcanzarlo, como la hipótesis del trabajo del proyecto doctoral, adquiriendo relevancia en el desarrollo y tratamiento del proyecto pues permitió orientar una vez definido el universo de aplicación de la indagación –profesores,

alumnos del nivel superior, y básico-, el papel central de las mediaciones socioculturales en el estudio, proporcionadas por los mecanismos de acción de las personas que aprenden y enseñan matemáticas, localizadas a través de las interacciones sociales que se establecen en el salón de clases, en el ámbito escolar, permitiendo arribar en y con la investigación a un nivel mayor de complejidad, por tanto del colocar la problemática en un plano mayor, de ubicación, caracterización de la misma.

Para el caso del segundo capítulo llamado: *MARCO DE REFERENCIA*, en este se establecieron siete distintos elementos que permitieran crear una base de interpretación teórica que pudiera dar cabida no sólo a las explicaciones necesarias respecto a cómo se ve la problemática desde la creación de un cierto ángulo de colocación necesario para problemática, por tanto de implicación en lo metodológico, que se constituyó, sino que además de establecerse de manera articulada estos elementos, aunado a lo de caracterizarla, dieran pautas para la interpretación de los resultados de la investigación que pudiesen tentativamente explicar con mayor profundidad la problemática y los resultados que se obtendrían, como además generar los aspectos que en las conclusiones y en el resumen se observarían. Para ello se recurrió a establecer estos siete elementos fundamentales los cuales a su vez requirieron desglosarse para dar los sentidos y direcciones de lo que se buscaba predecir.

En este sentido el primer elemento que se consideró a formular fue el de las consideraciones generales del marco de referencia, con carácter teórico, a saber, las consideraciones geopolíticas del conocimiento, dando cuenta de algo que en la investigación científica, no se considera que actúa al momento de aprender y desde luego del enseñar; la dimensión geopolítica del conocimiento, como otro elemento constituyente en la construcción de los saberes en las personas, invisibilizado por los horizontes de racionalidad, bajo el cobijo de la racionalidad/modernidad, a través de la postura que adopta la misma investigación y el conocimiento que genera, que señala que la ciencia es neutral, desmitificando esta conceptualización, pues dio origen a una reflexión más profunda, la necesidad de observar estos miramientos sociales, que Mignolo (2001) caracterizó como del *locus de enunciación*, que refiere a que enunciados proferidos en lugares distintos dan cuenta de procesos de cognición y epistémicamente diferenciados por esta condición geopolítica que opera en los conocimientos dando con ello la diferencia, y por tanto evidencia de epistemologías distintas.

Como segundo elemento se tomó en cuenta como elementos de referencia y que proveyeron ciertas marcas de característica histórica, a saber el análisis histórico epistemológico, donde se ubicaron dos puntos necesarios para el análisis de la noción de solución que se construye, con la que se apeló para dar cuenta lo que otros autores identificaban alrededor del álgebra y de la matemática en general, cuando se está pensando en, qué es la solución.

Sin embargo se tuvo que definir un tercer elemento en este marco de referencia, que tiene el papel central sin la cual no se daría cuenta de esta característica de la investigación que tiene que ver con la geopolítica del conocimiento enunciada antes, la necesidad de establecer la justificación del por qué crear un horizonte de racionalidad, desde el reconocimiento de que en toda enunciación cognitiva y epistémica hay una matriz histórico cultural que está presente, la representa o está atrás de ella, y que sostiene los horizontes de racionalidad que enuncia para efectuar sus implementaciones epistémicas y cognitivas en las personas que aprenden.

Que a su vez se desglosa, considerando cuatro grandes argumentaciones que hace necesario mirar la elaboración de esta sección, desarrollándose para ello un apartado dentro de este tercer elemento que correspondió a la observación de las modificaciones epistémicas en los momentos de transición, dado que al momento de obtener los resultados había con esta herramienta analítica, observarlos y de esta manera identificar y dar cuenta de lo que en la investigación doctoral llamaríamos los puntos de cruce de la las epistemologías emergentes.

Un cuarto elemento que se desarrolló y que se consideró que tenía mucha conexión con lo antes aportado, tenía que ver con la elaboración de una línea aunque fuese tenue pero visible del cómo se observa este proceso de aprender, desde la matriz histórico cultural de enunciación identificada como eurocentrista, para dar cuenta del proceso en términos de su origen, trayectoria, y puntos donde se ancla y encuentra su carácter enunciativo, a la cual se le denominó el camino elegido en la idea de su conexión, de donde se parte del sustento de la discusión filosófica que lo origina, identificando a la filosofía analítica, la que contribuye en la conformación de la visión de implementación de visión de mundo, formulando como segundo aspecto la idea que subyacía de la extensión, como la convergencia de los elementos identificados, en este sentido se ubicó como siguiente aspecto el papel de la lengua, transmisora de conocimientos e identitaria de los pueblos etnolingüísticas, identificando la problemática a estudiar en este ámbito, lo que colocó el carácter general específico de esta problemática a estudiar, posteriormente se indica el plano de lo educativo y la lengua, para pasar a las consideraciones de su aprendizaje, como siguiente subapartado fue la consideración de educación y conocimiento cultural, el lenguaje, y las formas empleadas.

El quinto elemento en esta relación construida se ubica al observar una desvinculación entre los lenguajes de uso y el categorial, que permitirán identificar las expresiones y formas de entendimiento y comprensión que podrían, desde otra mirada, indicar la búsqueda de mediadores en esta relación entre el lenguaje formal y el lenguaje de uso para explicitar sus entendimientos y concepciones dirigidas a capturar lo que el lenguaje formal define por solución en un ámbito analítico, y que no reconoce en el lenguaje de uso, pero también pueden ser entendidas —y esto es sustancial para el presente trabajo doctoral— cómo la presencia de otras epistemologías que se construyen de modo alterno, colocadas por fuera para comprender el discurso matemático teórico-racional de la modernidad.

De ahí formular el sexto el elemento, que analiza en estos horizontes de racionalidad enunciados y construidos han signado cambios de paradigma o han sido enunciaciones relativas a los cambios en la validación de la razón instrumental, donde se establece un subapartado a manera de colofón y un segundo subapartado llamado la discusión continua con nuevos referentes.

Se termina este segundo capítulo, formulando un séptimo elemento en esta relación construida de marco de referencia, que no pudiera ser evitada, el trabajo quedaría incompleto si no se formula ¿qué es un problema?, el cual se construirá a partir de cuatro subapartados, como el que examina diversas posiciones teóricas en torno a la resolución de problemas, que proveyeron el esquema del proceso de resolución de problemas, los antecedentes de los mismos, para finalmente aterrizar con el ultimo subapartado, de este séptimo elemento y por tanto del capítulo, al formular: ¿Qué es la resolución de problemas?, así como el proveer una definición proveniente de un horizonte de racionalidad con incidencia didáctica, cognitiva y epistémica sobre la definición acerca de lo qué es solución

Respecto al capítulo tercero llamado: *RESULTADOS*, en este capítulo, correspondió con lo que su nombre indica, trata del conjunto de indagaciones que se efectuaron entre los profesores de distintos niveles educativos, y los estudiantes de distintos niveles educativos –superior y básico-, con la finalidad de observar las distintas percepciones y elementos contribuyentes relativas al concepto de solución, dedicando la primera sección bajo la pregunta: Qué está ocurriendo con las personas que aprenden matemáticas, con subapartados, Con un grupo de profesores del nivel de educación superior, Con un grupo de profesores de educación básica, y en este se identificó, una primera indagación, llamada: Observaciones sobre los procesos de comprensión de los profesores “acerca de un enunciado de un problema matemático”.

Una segunda indagación: identificada por problemática de significación en los profesores-alumnos de la UPN “correspondencia con su proceso formativo”, con subapartados fijando la atención del lenguaje, la inasistencia y la indisciplina. Pasando a otro momento de los resultados que proveyó la investigación Con un grupo de estudiantes del nivel de educación superior y establecer las diferencias en el lenguaje escolar (grupo 1), la percepción de estos respecto a ¿Qué es la solución para ti? (grupo 2), y la descripción de las actividades realizadas por los alumnos (grupo 1), donde se les formuló a través de los instrumentos de indagación ¿Qué dificultades tuviste? (grupo 2), y pasar de esta manera a observar los procesos de construcción de la solución con un grupo de estudiantes de educación básica (una comunidad).

Se definió un cuarto capítulo llamado: *CONCLUSIONES*, para establecer las conclusiones, una vez analizadas las respuestas aportadas por el capítulo anterior. Acerca de las conclusiones alcanzadas, se indica, escasas son las ocasiones en las que se da atención en la práctica educativa, a las formas con que se comunican las personas, en la intención de que éstas tienen para aproximarse a la creación de sus entendimientos y concepciones que les den idea de la aprehensión de los

conocimientos matemáticos que requieren o que en ese momento están trabajando. Varios son los factores que lo impiden: la necesidad misma de avanzar con el desarrollo del programa, la implantación de actividades, la asignación de tareas, de ejercicios, la realización de evaluaciones, etc. Se ha convertido en una dinámica, si bien particular de cada escuela, homogénea y general, incluso en todo el sistema educativo.

Sin embargo, precisamente estas circunstancias debieran ser razón para fijar nuestra atención en las formas de comunicación, sobre todo al aceptar que conocerlas, clasificarlas, reconocerlas, permite operar con ellas, al considerar las formas de comunicación cotidiana y hacer lo que no es fácil conseguir: comunicarse recíprocamente. En realidad se actúa más por prejuicio al sostener que se ha aprendido a expresarse adecuadamente, en este caso en los saberes matemáticos, o bien, que han entendido de acuerdo a lo que se les requiere, en lugar de mirarse como parte de la misma moneda en el sistema cultural, que actúa y es complementario de esas formas de comunicación, conocimientos y saberes formalizados por la sociedad, institucionalizados a través del salón, la escuela, el colegio, el instituto, la universidad.

Está claro que estos prejuicios obedecen, entre otras razones, a cambios fundamentales inaugurados a partir del siglo XVI, con la “invención” de América, y que si bien se han modificado ciertas condiciones respecto al pasado, siguen actuando hasta la fecha. La racionalidad/modernidad ha operado una dinámica que colocó y coloca fuera, de manera sistemática, no sólo estas formas de comunicación popular, sino también lenguajes y construcciones epistémicas respecto al conocimiento en general y de las matemáticas en particular, en la medida que el conocimiento de occidente fue “progresando”.

Iniciándose esta problemática en sus inicios en las periferias de los centros metropolitanos de la academia. Hoy, ante la extensión y agudización de la problemática de los aprendizajes y enseñanzas -aumento en los niveles de reprobación, aunado a los cambios tecnológicos, como de los resultados internacionales respecto a la poca eficiencia en los aprendizajes matemáticos, desapropiación de formas de aprehensión del conocimiento, reemplazo de epistemologías válidas socialmente por otras nuevas que no necesariamente representan “progreso” en las personas cognitiva y epistémicamente, mucho menos socialmente, etc.— se requiere echar una nueva mirada con una comprensión más profunda a lo habitual que se hace, con la mayor complejidad posible para poder establecer esas formas dialógicas de comunicación entre el lenguaje formal y el lenguaje de uso.

Entre profesores y estudiantes, se indica que tendrán que ser aceptadas para expresar, además de entendimientos, concepciones y nociones, y constituirse, por tanto, en formas que den cuenta del proceso de construcción social de la solución en un problema matemático.

Como de sus dificultades al trabajar con los mismos por parte de los estudiantes, o el de *modificación de los enunciados* por parte de los profesores de

educación básica, que evidencian la desconexión entre lo implementado y las formas de implementar, no sólo en su carácter discursivo, sino algo más profundo aún, que en estos tiempos ha adquirido relevancia: la creación de un pensamiento propio que nos identifica y que forme parte central en la construcción de nuestros pensamientos y acciones, por ser éste el ámbito central que moviliza los entendimientos y concepciones en las personas, para alcanzar un mejor aprendizaje de las matemáticas, con implicaciones fuertes en la enseñanza de las mismas.

Ésta es una muestra de haber encontrado cierta regularidad en el ámbito sociocultural propuesto (Guadarrama, 2001), en relación con el lenguaje empleado, que actúan como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en un determinado discurso, no porque no quieran aprender, pues su asistencia a las aulas es parte de la evidencia de su voluntad, sino más bien, porque hace la inexistencia de mediadores discursivos o reconocidos que establezcan esas relaciones dialógicas que a veces se presuponen y que, sin embargo, no están. Colocando cuestiones como la siguiente: cómo se da este proceso de construcción social de la solución, cómo se establecen los entendimientos y concepciones referentes a este proceso, sobre todo cuando son puestas en tensión con el discurso matemático escolar, que deviene del discurso matemático teórico que se emplea para su transmisión. Expresiones como: coincidentes, sentido de intersección, empleo de un lenguaje analítico, formalidad lógico-estructural con que se trabaja, etc., dificultan la comprensión del significado en el discurso y se establecen a su vez como marcadores discursivos que entorpecen la comunicación.

La singularidad de esta investigación, su contundencia radica en eso, cuestionarse por qué hay que mirar la situación de solución desde una sola óptica.

Todas estas expresiones y formas de entendimiento y comprensión podrían, desde otra mirada, indicar la búsqueda de mediadores en esta relación entre el lenguaje formal y el lenguaje de uso para explicitar sus entendimientos y concepciones dirigidas a capturar lo que el lenguaje formal define por solución en un ámbito analítico, y que no reconoce en el lenguaje de uso, pero también pueden ser entendidas —y esto es sustancial para el presente trabajo doctoral— como la presencia de otras epistemologías que se construyen de modo alterno, colocadas por fuera para comprender el discurso matemático teórico-racional de la modernidad que exige la comprensión monotópica y ontológica de sus conceptos.

Finalmente se define una sección llamada de *BIBLIOGRAFÍA*. Se han incorporado un apartado para los *ANEXOS*, que se han considerado como es el caso del Anexo 1. Para enfrentar el *cómo llevar a cabo este proceso de Conocimiento*, desde la perspectiva de Huntington (2001), que postula el choque de civilizaciones y la reconfiguración del orden mundial, también un Anexo 2. Instrumento de exploración, primera parte, que se empleo con los estudiantes del nivel de educación superior, para obtener información que aporte a los resultados, un Anexo 3. Instrumento de trabajo de los profesores de Educación Básica, que permitió observar los cambios que efectuaron los profesores de educación básica para darle ese sentido didáctico de su

trabajo, finalizando con un Anexo 4. Dos procesos elegidos de los estudiantes-profesores, en que se explicita, cómo es que se operó ese sentido de modificación de enunciados en los profesores de del nivel de educación básica, reportados en el capítulo tres de los resultados.

CAPÍTULO I
DEFINICIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

*Viene apareciendo, viene naciendo,
lo que ha de suceder sucederá*

I.1 Antecedentes del trabajo de investigación doctoral

I.1.1 Delimitación del objeto de estudio. Características contextuales

En una investigación reciente (Guadarrama, 2000) fueron estudiadas las interpretaciones que hacían docentes de la materia de Matemáticas del nivel superior en relación con la representación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Dicho estudio clasificó las respuestas obtenidas mediante un cuestionario escrito y éstas fueron interpretadas con apoyo de una serie de entrevistas semiestructuradas. Se centró la atención en el concepto de solución de sistemas de ecuaciones lineales 3×2 y 3×3 , en los que se partía de la representación gráfica y se discutía con los docentes sobre el significado de las distintas formas de intersección posibles. Se seleccionó a los docentes participantes atendiendo algunos aspectos específicos: que se desempeñaran profesionalmente en la enseñanza de la matemática al nivel superior, que hubieran impartido o que estuvieran impartiendo la asignatura de Álgebra Lineal y, por supuesto, que estuvieran dispuestos a colaborar voluntariamente en esta experiencia. De este modo fueron seleccionados seis profesores (cinco hombres y una mujer), que laboraban en una institución de educación superior del estado de Hidalgo.

La hipótesis de partida en nuestro estudio previo señalaba que los profesores, a pesar de enseñar el tema a sus alumnos, tendrían dificultades para interpretar situaciones que no eran típicamente tratadas en los textos escolares ni en la currícula respectiva. Esto es, se sabía que la enseñanza tradicional de tales temas suele centrar más la atención en los algoritmos que en las interpretaciones y los significados.

I.1.1.1 Antecedentes de la problemática

Anterior al trabajo señalado fueron desarrolladas una serie de investigaciones puntuales a nivel de tesis de especialidad que facilitaron información sobre la pertinencia de la hipótesis previa. Estos trabajos fueron reportados en el Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, llevado a cabo en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), campus Monterrey durante diciembre de 1998, por M. Eslava y M. Villegas; J. Barrera, O. Cano, y J. Cervantes; J. Marín y J. Monroy. En dichas presentaciones se identificaron dificultades en la transición de los modos de pensamiento, así como en su coexistencia, cuando están referidas a sistemas de tres ecuaciones con tres variables. La forma en que encararon su explicación se basó en la teoría de los modos del pensamiento de Sierpínska y particularmente en los modos sintético y analítico.

Las situaciones gráficas reportadas por ellos fueron incorporadas al presente estudio debido a que mostraban características geométricas interesantes en relación con dicho objetivo de partida. Fue a partir de ellas que se inició la delimitación teórica de la problemática de esta investigación. Cabe señalar que fue importante retomar tales estudios de tesis por las siguientes razones.

En principio, porque eran investigaciones reportadas recientemente y, de algún modo, eran los únicos estudios elaborados sobre la temática de interés para el

proyecto presente. Usaban además, el mismo marco teórico que se pretendía rigiera a este trabajo y, en esa medida, proporcionaban un conjunto de datos preliminares que servirían de base para este estudio en particular. Por los motivos anteriores, los esfuerzos fueron dirigidos para capturar la esencia de lo que expresaban estas situaciones, que requería de la interpretación de la solución en modos diferentes de pensamiento, así como también mostraban las situaciones elegidas para ser empleadas en el trabajo, y las eventuales dificultades que tendrían los partícipes del sistema didáctico al pasar de un modo de pensamiento a otro, vía sus representaciones y, particularmente, de aquellas que tenían que ver con las representaciones de tipo gráfico y que elaboraban en los procesos de argumentación en el discurso matemático escolar o más específicamente de entendimiento en Álgebra Lineal.

I.1.1.2 Los trabajos relacionados con esta problemática

Se contó básicamente con tres tesinas relacionadas con la problemática, las cuales ofrecieron las primeras evidencias respecto a la interpretaciones gráficas de la solución dentro de los modos de pensamiento de Sierpinska, que pudieran considerarse de acercamiento a la problemática delimitada en la sección anterior, y que tocan los contenidos específicos del área, además de que analizan las categorías obtenidas, como parte de la explicación de los modos diferentes de pensamiento desarrollados en el marco teórico de referencia elegido y sustentado por la profesora Anna Sierpinska, en su trabajo *Modos Sintéticos y Analíticos de Pensamiento en Álgebra Lineal*, (1996), donde se destacan los diferentes modos de pensamiento en el área.

Como primer trabajo elaborado por Marines, J. y Monroy, J. (1998), se analizaron: *Dificultades en la Transición del Pensamiento Sintético y Analítico en Sistemas de Tres Ecuaciones con Tres variables*. Ahí se establece como meta general que existe una relación entre el pensamiento geométrico y el pensamiento analítico, cuando se formulan sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. Inician su estudio con tres planos, expresados en forma verbal, pasando por su representación geométrica y su correspondiente representación analítica. La investigación tuvo la finalidad de encontrar dificultades que se presentan en el pensamiento del estudiante al relacionar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, partiendo de una representación gráfica a su correspondiente representación analítica.

Un segundo trabajo llamado: *Coexistencia del Pensamiento Sintético y Analítico y el Concepto de Solución en un Sistema de Tres Ecuaciones Lineales con Tres Variables*, elaborado por Barrera, J., Cano, O. y Cervantes, J. (1998), el cual tuvo el propósito establecer la relación entre pensamiento geométrico y pensamiento analítico en el Álgebra Lineal cuando se formulan sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, iniciando con tres planos, expresados en forma verbal, pasando por su representación geométrica y su correspondiente representación analítica. Para los autores, la investigación tuvo el objetivo de estudiar la relación y coexistencia que se presenta entre el pensamiento geométrico y analítico en las personas que se entrevistaron, partiendo de una representación geométrica hacia una

representación analítica y a la vez analizando las concepciones que tuviesen en relación con la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Ambos trabajos complementarios fueron desarrollados en el nivel de educación superior con los docentes.

Un tercer estudio dirigido al nivel de educación media superior, por Eslava, M. y Villegas, M. (1998), fue: *Análisis de los Modos de Pensar: Sintético y Analítico en la Representación de las Categorías de Tres Rectas en el Plano*. En éste la problemática que se consideró fue que el tema de interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones ocupaba muy poco espacio en el programa de esta materia y en el Sistema Didáctico, ubicado en la unidad de la función lineal, donde es usual explicarlo a manera de receta; los diferentes métodos de solución —igualación, suma y resta o sustitución— de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, partiendo reiteradamente de las ecuaciones y poco de las gráficas de las ecuaciones que forman dicho sistema, mucho menos se enseña a analizar la naturaleza de su solución (única, infinitas o la no-existencia de la solución) en un contexto gráfico. De ahí que exista —así lo señalan los profesores— una falta de interés en los alumnos para explorarlos por su cuenta o con la orientación del maestro.

Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas no es resuelto en ninguna de sus formas: algebraica, analítica y mucho menos gráfica. Es por ello que a los autores les interesó llevar a cabo este trabajo. Como objetivo consideran que:

La investigación surge como una necesidad de exploración para ver y analizar los diferentes modos de pensamiento del alumno y sus secuencias en el desarrollo del pensamiento al tratar de interpretar la posición que guardan entre sí tres rectas en el plano. Partiendo con el pensamiento geométrico sintético, se verá cómo piensan en esta categoría y después cómo pasan al aritmético o bien las dificultades que tienen al pasar de una categoría a otra. (Eslava, M. y Villegas, M. 1998)

Indican que "su objetivo principal es el de encontrar la relación o relaciones existentes para este caso, entre pensamiento sintético y analítico, así también las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de uno a otro".

I.1.1.3 Otros trabajos relacionados con el área de Álgebra Lineal

Fueron considerados, a pesar de que no abordaban la problemática, otros trabajos de investigación, mediante el uso explícito de los modelos de pensamiento de Sierpinska. Éstos se incluyeron porque se encuentran dentro del área del Álgebra Lineal, empleando otros referentes teóricos y, además, porque corresponden, salvo el primero, a tesis de maestría presentadas en el periodo de 1992 a 1994 en el Cinvestav: Despina (1998), Canales (1992), Torres (1992), Farias (1994), de ahí que su consideración fue por ser antecedentes de investigación en el área, no así de la problemática específica que se tocó en el trabajo de Guadarrama (2000).

El primer tipo de trabajo de Despina, A. (1998): *El entendimiento de los estudiantes universitarios de soluciones de sistemas de ecuaciones*, contribuye a la investigación sobre el entendimiento de los alumnos acerca de los conceptos del

Álgebra Lineal, en la manera como los estudiantes enfocan soluciones de sistemas de ecuaciones. Dicho estudio, considera el autor, se efectúa dentro de un marco constructivista, usado para el análisis de las entrevistas con los estudiantes. Se describe por tres niveles (APOE en el sentido que propone Dubinsky, 1991), y por los temas con respecto a los caminos usados por los estudiantes, para dar sentido a la solución y los entendimientos utilizados para la solución o actuados sobre ella.

El trabajo contiene una introducción, donde se justifica la conveniencia del mismo, delimitándolo en el marco teórico de Acción-Proceso-Objeto-Esquema, define su metodología y establece los resultados descritos en términos de los tres niveles referidos. Finaliza el reporte discutiendo y equiparando los resultados que encuentra entre los entendimientos de los estudiantes con la comprensión del espacio solución en los sistemas de ecuaciones, ya que el estudio de sus entendimientos establece dificultades como en el desarrollo de la teoría general del Álgebra Lineal, la existencia de variados entendimientos de los estudiantes respecto al conjunto solución, indicando esto a su vez niveles similares en sus entendimientos de espacio vectorial, en caminos de aproximación de los espacios vectoriales y del entendimiento de los estudiantes respecto a la solución de sistemas de ecuaciones.

Como tesis de maestría se revisaron: *El Álgebra Lineal aplicada al Análisis Estructural* Canales, H. (1992). En ésta se explora el funcionamiento de las estructuras cognitivas de los estudiantes al enfrentarlos al proceso de predicción del movimiento de un punto, tratando de conectar formas y movimiento en un mecanismo conjunto a través de la interrelación entre representaciones visuales y simbólicas en conjunción con la interacción de la computadora, vislumbrando cuál es el conocimiento que les ha dejado la Geometría Analítica acerca del movimiento. Se centra en esta área porque *considera que ella crea un ambiente matemático donde interactúan lo visual y lo simbólico de manera natural.*¹ El autor concluye, como parte de su análisis, que: “...los alumnos tienen una noción simbólica del concepto de pendiente y son capaces de definir a la recta como una trayectoria, teniendo el alumno dificultades en imaginar una trayectoria”, a lo que interpreta como la ausencia de desarrollo de ciertas habilidades espaciales, en su educación básica. Observó también que *los alumnos no han desarrollado la costumbre por razonar algún tipo de problema en el contexto geométrico, para después obtener una fórmula algebraica*², identificando las dificultades que experimentan las personas en el tránsito del pensamiento sintético al aritmético. El instrumento de análisis utilizado fue la entrevista; siete alumnos; el supuesto que se hizo fue: “todo estudiante tiene cierta noción acerca del movimiento”.

La segunda tesis de maestría: *Una propuesta de contenidos matemáticos para el curso de Álgebra Lineal de las carreras de las áreas de Ciencias Sociales y Administración de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*, elaborada por Torres, (1992), intentó ser una alternativa para el contenido de los cursos del Álgebra Lineal que ofrece dicha área. Difiere con el programa oficial en cuanto a la

¹ Cursivas mías.

² *Idem.*

temática, pues se da un enfoque particular a algunos temas con la idea de crear un ambiente de aplicación. Considera que hay que tomar en cuenta las características e intereses de los estudiantes de esas carreras, así como su formación matemática con la cual ingresan al curso del Álgebra Lineal. El autor señala que no fue sencillo llegar a esta conclusión, dadas las características del diagnóstico que realizó.

Una tercera tesis de maestría consultada fue: *Interacción entre representaciones visuales y simbólicas. Un estudio experimental*, en ésta, Farias (1994), dedica el capítulo dos a las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales, que a su vez presentan un conjunto de problemas de aplicación a las áreas de las Ciencias Sociales y/o Administrativas, cuya solución conduce a sistemas de ecuaciones lineales. Algunos de estos sistemas, la forma o el método que se usa para resolverlos, pueden generar modelos para diversos problemas similares que surjan a lo largo de sus aplicaciones. Esperaba el autor con ello que el estudiante mirase a la matemática interdisciplinariamente. Presenta como obstáculo el desconocimiento de los principios que operan determinados sistemas al resolverlos, llevándolo a incluir en el primer capítulo, la teoría necesaria, lo más simple posible, en un punto de vista tradicional. Se manejó poco, en el trabajo, la representación gráfica de los sistemas de ecuaciones, por lo que se considera que es un programa que atendió al pensamiento aritmético en los estudiantes. Otra conclusión que proporcionó fue que *algunos problemas se pueden resolver por fórmulas o usando fórmulas, o usando la lógica*³, sin llegar a resolver un sistema de ecuaciones, el cual resulta complicado para muchos de los estudiantes.

I.1.1.4 Las situaciones de representación gráfica de las tesinas que llamaron la atención

Esta sección tiene la finalidad de mostrar los aspectos más significativos de las representaciones gráficas que expusieron los estudiantes y docentes que se entrevistaron en las tesinas, a las cuales habrá de hacer referencia este trabajo por situaciones de interés y afinidad, pues fijaron más la atención y motivaron el presente estudio.

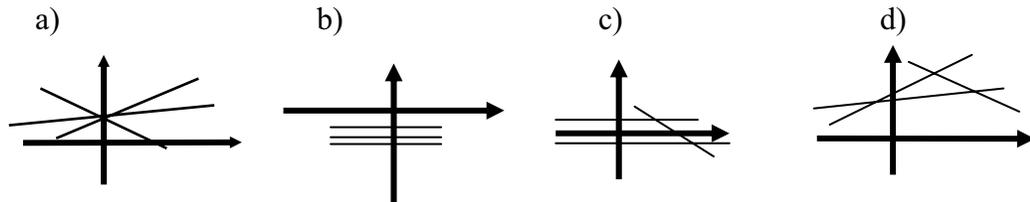
La primera situación correspondió a un grupo de gráficas obtenidas en cuatro entrevistas efectuadas con estudiantes de bachillerato, que cursaban el 4° y 6° semestre de preparatoria del Estado de México, ciclo escolar 1997-1998, donde representaron gráficamente disposiciones geométricas con tres rectas que aluden a las situaciones que consideraron de solución y no- solución para un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas en el plano coordenado R^2 , correspondencia en su tratamiento con las entrevistas —contexto y aprendizaje con la temática—, los antecedentes de los entrevistados fueron: dos cursos de Álgebra (I y II), de Trigonometría y Geometría Analítica, dos de ellos llevaron un curso de Cálculo Diferencial e Integral. Las preguntas formuladas en relación con estas disposiciones gráficas respecto a la situación elegida eran: ¿Cuál fue la respuesta gráfica que mostraban ante la actividad que se les pidió realizar?, es decir, ¿cuál fue el manejo

³ *Idem.*

conceptual que mostraron al considerar este conjunto de representaciones gráficas que proporcionaban los entrevistados? y ¿qué es lo que tienen en común todas ellas en relación con la solución o no-solución de los sistemas que previamente habían tratado?

Hay que considerar la conveniencia de mostrarlas, para describir los aspectos de interés y estudio y observar las cuatro categorías centrales expuestas por los bachilleres, que previamente habían descrito verbalmente en la entrevista, respondiendo a la pregunta: ¿Puedes formar un sistema de ecuaciones para cada categoría creada? La respuesta proporcionada en la primera etapa, parte 2, estuvo conformada por cuatro representaciones gráficas diferentes, que ofrecía el trabajo de Eslava, M. y Villegas, M. (1998), elaboradas por tres de los cuatro alumnos entrevistados, que a continuación se muestran. En el plano R^2

Representación gráfica



Estudiantes de bachillerato

Esto permite identificar un primer aspecto, relativo al interés por considerarlo como un primer acercamiento a la problemática, y para alcanzar el objetivo propuesto en el presente trabajo y, de paso, considerar el interés en esas cuatro categorías gráficas de representación de situaciones de solución y no-solución para explicar las respuestas a la pregunta: ¿Por qué se consideraban de interés las representaciones gráficas mostradas?

Argumento primero. La pregunta por sí misma es de interés, pues atendía a los momentos que observaban los entrevistados sobre lo que estaban considerando gráficamente respecto a la solución en sistemas de ecuaciones lineales, inscritos por completo en la problemática.

Argumento segundo. De los cuatro entrevistados, tres de ellos “coincidían con sus representaciones”, es decir, las representaciones gráficas elaboradas por los estudiantes mostraban lo que para ellos representaban las situaciones gráficas de solución y no-solución, por tanto, congruentes con la idea de sus concepciones y entendimientos respecto al punto de interés; por ejemplo, la existencia de la solución cuando se consideran tres rectas en el plano, la existencia de la solución tenía que coincidir con un punto en algún eje de referencia y en este caso lo localizan sobre el eje vertical.

Mostraron cierta regularidad en sus respuestas, correspondientes con haber

proporcionado representaciones gráficas en el plano, con tres rectas que se intercecan en un punto, al cortar el eje de las Y, donde, además, el punto donde se cortan con el eje es el de intersección de las tres rectas. Otra regularidad que presentaron sus respuestas es la de tres rectas que se cortan dos a dos en las que indican que representa gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones, encontrándose en un nivel conceptual muy semejante, aunque representado gráficamente en un espacio de dimensión diferente a la que presentaban algunos docentes entrevistados y que más adelante serán mostrados. Hay que señalar aquí la importancia de la regularidad de respuestas mostrada, pues se consideró como una evidencia fuerte que se percibía a través de lo que se observaba, además, porque era la manera en que respondían gráficamente los tres bachilleres, daban muestras de lo que tenían en mente (la disposición gráfica proporcionada), pues las representaciones eran la evidencia de su representación, considerándolo parte del espacio que comparten, común en las entrevistas, información sustantiva para someterse a prueba como uno de los aspectos importantes de este trabajo de investigación (búsqueda de verificación en los profesores del nivel de educación superior) y fundamento del proyecto de investigación doctoral. Finalmente, el caso de tres rectas que son paralelas al eje de las X y que cortan al eje de las Y.

Se consideraron las ideas de Sierpinska (1998) para reflexionar si éstas provenían de posibles automatismos que desarrollan las personas al trabajar con los contenidos del Álgebra Lineal y que en su pretensión por dominar el lenguaje, el contenido, las expresiones, los hace realizar ciertos automatismos. Se tomó en cuenta que, en tanto no se verificase en la investigación este supuesto, las fijaciones mentales de representación gráfica de situaciones de solución y no-solución, parte de los automatismos que se han desarrollado entre la población escolar debían ser tratados con reserva. Sierpinska (1998) ampliaba el concepto al señalar como un producto la presencia del obstáculo del formalismo⁴, que se crea a lo largo del trabajo con los conceptos del Álgebra Lineal —según su experiencia de trabajo—. También esto se consideró factible en el contexto del marco de referencia en que esta investigación estaba interesada poner a prueba, para señalar que la situación podía ser una posible evidencia del estado en que se encontraban los modos de transitar del pensamiento, como de las dificultades que experimentan para pasar de una representación a otra, fue ésta la que proporcionó sustento a lo mencionado en relación con el reporte de las tesinas. Hay que considerarlo una dificultad concreta.

Circunscribir dichas respuestas a las representaciones gráficas —supuesto que tuvo que ser desechado en los profesores— y considerar que se desarrollaba una persistencia o permanencia visual de identificación visual-gráfica en relación con la solución o no-solución en sistemas de ecuaciones, como algo que le daba sentido geométrico a los entendimientos que le proveía significado con la disposición geométrica que guardaban las rectas y los planos tratados en las intersecciones con

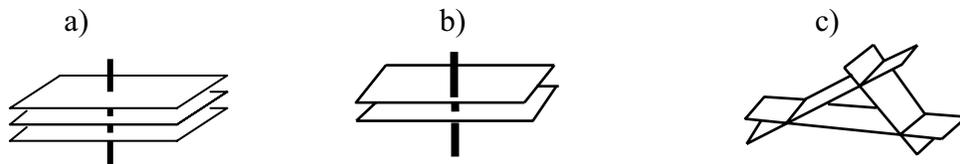
⁴ Para Dorier el significado de *obstáculo del formalismo* corresponde a la insuficiencia de los conocimientos anteriores en Lógica y Teoría Elemental de Conjuntos, la cual colabora en la producción de errores en Álgebra Lineal.

los ejes, o bien el tipo de intersección entre las mismas rectas, tendría que ser verificado en este trabajo.

Argumento tercero. Las representaciones se encontraban en un contexto gráfico —las respuestas— de particular interés para este estudio, semejantes a las proporcionadas en la etapa II del reporte. Es decir, fortaleció la suposición de que algo permanecía en esta situación de representación gráfica proporcionada por los trabajos reportados, por lo que se pensó en la factibilidad de conservar la respuesta, considerándolo parte del espacio que comparten y hacen común las entrevistas, como la del punto dos, que pudiera haber considerado su representación producto de la casualidad, sin ser esto así, pues había algo más en la información proporcionada por los alumnos de bachillerato que los autores no analizaban en las entrevistas de los trabajos mencionados y que seguramente tenía que ver con la manera de interpretar el concepto de solución a la luz de sus diferentes representaciones, es decir, podía creerse que la situación no era fortuita, además de que podría exhibir a algunos docentes entrevistados.

La segunda situación de un grupo de gráficas seleccionadas y consideradas relevantes para el estudio y realización de la investigación, correspondió al de las respuestas de representación gráfica que dieron los profesores del nivel de educación superior cuando fueron entrevistados; estaban relacionaban con las representaciones gráficas elaboradas en tres dimensiones donde reflejaban las situaciones gráficas asociadas a la solución de un sistema de ecuaciones lineales bajo la aplicación de un cuestionario-entrevista a nueve docentes con diferentes perfiles profesionales y grados académicos, quienes habían impartido el curso de Álgebra Lineal y que, desde el punto de vista de esta investigación, debía considerarse importante toda reflexión sobre el particular. El contexto gráfico como producto de las respuestas de los docentes se ubicó en el espacio de tres dimensiones R^3 , que fueron de interés porque presentaban similitudes con las que ofrecían los estudiantes de bachillerato en el espacio R^3 .

Representación gráfica



A la última representación gráfica (gráfica c), los docentes la consideraron como una representación que muestra la solución del sistema. Al detenerse a examinarla se percataron que tenía similitud con una de las mostradas por los estudiantes de bachillerato (ver gráfica, pág. 18), nada más que ahora esta representación gráfica se encontraba en el espacio de tres dimensiones, pero en esencia poseían una característica común ambas, por tanto el espacio común que compartían se hacía más evidente en las entrevistas, a pesar de ser niveles de

educación (instituciones, funciones, personas, lugares) diferentes —digno de someterse a prueba como aspecto importante del trabajo de investigación (Guadarrama, 2000) y fundamento del proyecto de investigación doctoral—. Lo que compartían en común era la regularidad que presentaban sus respuestas; los estudiantes de bachillerato: tres rectas que se cortan dos a dos, en las que indican que representa gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones y, los profesores: la intersección dos a dos de los planos en el espacio de tres dimensiones. Había entonces, un nivel conceptual semejante, aunque representado gráficamente en un espacio de dimensión diferente al presentado por los estudiantes del nivel medio superior y los profesores entrevistados. De ahí la denominación también de la permanencia de la respuesta y de la representación gráfica de la solución en un sistema.

De esta manera fueron localizadas dos situaciones reportadas que correspondían a las consideraciones de los entrevistados acerca de las situaciones que se pueden dar en relación con el concepto de solución mediante las representaciones gráficas. Esta investigación requería estructurarlas en términos del estudio del establecimiento de sus entendimientos y concepciones relativas a la solución en sistemas de ecuaciones.

I.1.2 Organización de las categorías que centraron el interés

Por lo anterior fue necesario organizar y clasificar las situaciones de representación gráfica más relevantes ofrecidas por los entrevistados. Para ello se definió un criterio que tuviese en común lo observado en las representaciones establecidas en relación con el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales 3×2 y 3×3 . Es decir, que tuviera implícito el reconocimiento de una característica previamente identificada, a la vez que realizara la clasificación y organización de las respuestas proporcionadas por los entrevistados, en ambos casos, con la idea de unificar y sintetizar las de los bachilleres y los docentes, a través de las representaciones gráficas mostradas y las concepciones manifestadas en las entrevistas.

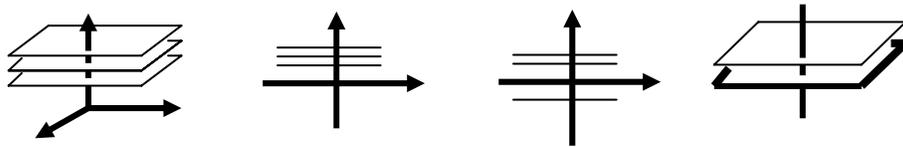
De esta manera fue considerado un elemento establecido por la doctora Rosa María Farfán en el Seminario de Investigación II (1999), una idea interesante aparte, los estados de permanencia y el empleo de la metáfora como elemento articulador: “si funciona lo aplico”, lo que al traducirlo al objetivo de esta investigación resaltaba su sentido metafórico. La clasificación y organización se establecería con aquello que se mantenía en común en las representaciones gráficas del plano y del espacio, dominados por los estados de permanencia que el sujeto desarrollaba, los cuales correspondían a cierta permanencia de interpretación de lo que es la solución a través de las representaciones gráficas elaboradas. Ahora bien, la localización de valores comunes que le permitían a los sujetos inclinarse por identificar aquello que representaba gráficamente la solución o no-solución, denominada *permanencia del uso de representaciones gráficas* ligadas al concepto de solución del sujeto, fueron empleadas para hacer la caracterización y organización de las representaciones gráficas de las entrevistas, reportadas en las tesis (Guadarrama, 1998). En ese sentido, aquello que “les ha funcionado” en su conceptualización de los objetos

matemáticos, por ejemplo en sistemas de ecuaciones lineales, les hace suponer que les funcionará en otras situaciones, sobre todo cuando sus representaciones gráficas eran establecidas en asociación con el concepto de solución, podía indicar así que esa búsqueda con todo aquello relacionado con la solución en un sentido de su representación gráfica se anclaba en algo que tenía que estarse “intersectando”.

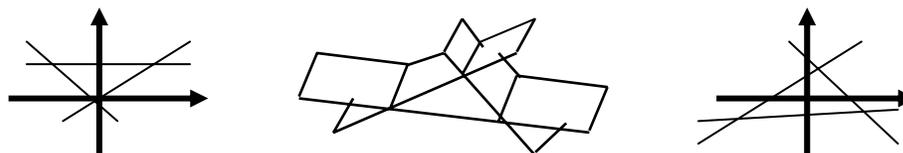
De ahí la necesidad de interpretar y darle sentido a lo que se había denominado “que les ha funcionado” y “como les funciona lo siguen aplicando”. Así, pensar que todo aquello que represente o sea representado basándose en algo que tiene que estarse intersectando sería la noción de solución que se manejaría a lo largo de sus representaciones gráficas establecidas respecto a este concepto. En ese sentido, las diferentes intersecciones dadas fueron denominadas aquí como categorías a organizar y clasificar, las cuales al agruparlas de acuerdo con su característica gráfica común serían llamadas “categorías generales”, considerando en cada situación la trayectoria experimentada por los sujetos en el sistema didáctico.

Era necesario sintetizar estas coincidencias con base en un criterio más general para ambas dimensiones, que permitieran, a partir de ello, evidenciar las permanencias en sus representaciones gráficas asociadas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales. Con ese entendido, lo que a continuación se hizo fue desglosar lo que hasta entonces se había realizado, tomando en cuenta las situaciones de intersección que correspondían en común a ambas situaciones, tanto las del plano como del espacio. Por ejemplo, se observó que a) en el plano, con sus dos subcategorías, coincidían con respecto al a) en el espacio, con sus tres subcategorías, las cuales podían ser resumidas como “categorías generales de organización”.

a) Intersecando con respecto a una recta vertical, lo cual puede o no coincidir con un eje en un sistema de coordenadas. A continuación se muestran algunas posibilidades gráficas:



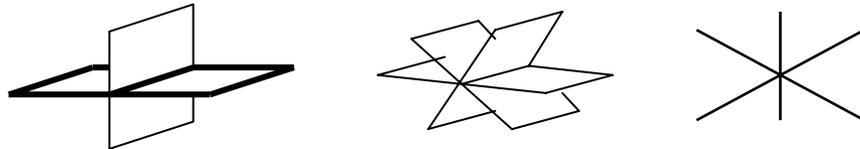
b) Segunda categoría, observada en el plano y en el espacio correspondiente: la intersección dos a dos de las rectas en el plano coincidía en cierta estructura gráfica con la intersección dos a dos de los planos en el espacio. La situación coincidente sería la de la intersección de dos a dos de los objetos (planos o rectas), son solución. Muestra de las gráficas referentes a esta situación:



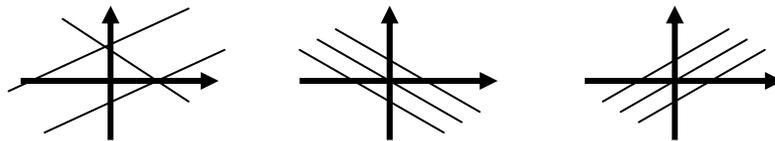
c) Una tercera categoría observada, correspondiente entre el plano y el espacio, fue donde había dos paralelos y un transversal, en ese sentido la intersección era la solución. El ejemplo gráfico de lo señalado es:



d) Finalmente, una cuarta categoría que se observó en el espacio y que no tiene su equivalente en el plano, se refería a la intersección de tres planos en una recta. La intersección se consideraba la solución. A continuación se muestran las representaciones gráficas que hacen alusión a ésta:



donde la última, la del lado derecho, fue tomada en cuenta, en las entrevistas de las tesis, ya que representaba una situación gráfica de solución por los entrevistados, sólo que de perfil. Otra categoría que se daría en el plano sería la intersección de las tres rectas dos a dos cortándose, pero, además, haciéndolo con los dos ejes como se muestra a continuación, en la que la transversal también se interseca con los dos ejes. En este sentido la intersección fue vista como la solución.



Lo interesante en esta organización y caracterización, salvo los últimos casos, es que evidenciaban la permanencia de sus representaciones gráficas, ligadas a la solución, bajo el criterio de: “si funcionaba lo aplicaban” y su variante: “puesto que ha funcionado la seguirán aplicando”, considerando que lo hacían extensivo a otros casos, pues les seguiría funcionando. Es decir, para que subsista esta permanencia de las representaciones gráficas correspondientes a los casos cuando exista la solución o la no-solución, deben estar interesados más en un sentido gráfico que en un sistema conformado por ecuaciones. Es un sistema formado por objetos geométricos que conviven en el plano (R^2) y el espacio (R^3), como es el caso de las rectas y los planos respectivamente.

En ese sentido, si las representaciones gráficas identifican a todo aquello que tiene que ver con lo que se interseca, entonces donde aparezca esta situación será parte de la conceptualización de su representación gráfica de la solución. Algo muy diferente a esta permanencia, mencionada a lo largo de este trabajo, sería el aspecto

de que a sabiendas de que su interpretación de representación no correspondiera con la usual, ésta se siguiera manteniendo, de cuya postura podrían establecerse dos aspectos: “o bien no hay de otra”, “o no le queda de otra”. Esto quiere decir que en el salón, cuando el alumno, ante las exigencias del profesor, a pesar de que no está del todo convencido, elige seguir operando e interpretando así, sin cuestionar, porque la situación le ofrece pocas posibilidades de observar incongruencias o falta de consistencia con la lógica del proceso, por lo que bien se puede afirmar que en ambas persiste su concepción, su entendimiento, ambas, por tanto, tienden a identificar más la conceptualización que hacen las personas respecto a la asociación de las representaciones gráficas con la solución en un sistema de ecuaciones 3×2 y 3×3 . Es decir, ambas posturas se las identifica como posturas que muy probablemente obedezcan a exigencias normativas de los cursos, textos y orientaciones del profesor al respecto.

Algunas interpretaciones del acercamiento que fueron obtenidas para ser contrastadas con lo arrojado en las entrevistas y los resultados, sobre todo a partir de considerar la experiencia docente que se habían desarrollado y que estaba relacionada con esto, tenían que dar certeza o refutar lo expresado hasta aquí. Por ejemplo, la situación gráfica presentada por los alumnos de bachillerato, identificada como representación gráfica a), (ver página 18 de este trabajo). ¿Será que se presentan estas situaciones de representación gráfica, así como de la permanencia de su representación de la solución, debido a que cuando se trabaja con la expresión $y=mx+b$, en el salón de clases como en el manejo que se hace de él en los textos, se pide graficar con preferencia a un cierto modo de manejo que a otro? Generalmente desde la práctica educativa, la graficación de dicha ecuación se hace a partir de localizar los puntos de cruce o de corte respecto a los ejes, y dentro de este proceso de graficación a los alumnos se les indica que localicen como un primer aspecto los puntos de corte con respecto a cada uno de los ejes, empezando este proceso con los puntos de cruce con el eje de la Y y después al eje de la X, por lo que lo primero a realizar en esta tarea es identificar la orden original y después la x que hace que $y = 0$ en esta relación.

En la situación gráfica que se le identificó como b), de las situaciones que los docentes mostraron en el espacio y que expresaban gráficamente la solución del sistema, se considera que se debían examinar otros elementos que podrían ser, por ejemplo, el caso de tres dimensiones; se valora así que presumiblemente las personas han construido alrededor del concepto una lógica que conlleva para los alumnos y para una de las docentes (Blanca) que manifestó la situación a) del espacio (ver página 20), que una recta al cortar tres planos paralelos indica que tiene solución única. O bien, que en un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuando se habla de solución en dichos sistemas, se piensa y se toman tres valores, uno para “x”, uno para “y”, y uno para “z”, creyendo que al representarlos gráficamente corresponderían y denotaría cada uno un punto en cada plano por la intersección de la recta con cada uno de los planos y, por tanto, solución para dicho sistema. Si además se agrega la coincidencia de que los puntos en R^3 son ternas de números reales y ella (Blanca) tiene tres (valores, x , y , z), entonces ella observaba posiblemente que tiene

tres puntos, producto de la intersección de la recta con cada uno de los planos, además, tenía ternas de valores y que eran tres los valores que necesitaba para hablar de la solución de un sistema, que ella recuerda, pues sabe que un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas cuando tiene solución, ésta está determinada por una terna de valores reales. Por lo que era natural representarlo de esta forma, ya que cada uno de los valores-puntos se encuentran en un eje o en una recta que los corta, o bien del sistema de tres ejes coordenados, hace de esta manera la correspondencia y hace coincidente la solución. De ahí que se mencionó que el sistema de elementos que se manejaban en esta situación se le haya denominado aquí: tríada como solución —tres puntos, uno en cada plano, x , y , z — terna de valores para la localización de los puntos en un sistema de 3D (un punto en el sistema de 3D, con tríada de valores) 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Pero también se dijo que podría pensarse que las representaciones gráficas están en un contexto que no tenía que ver con lo analítico, es decir, posiblemente ella (Blanca) sabe qué es una solución, por un lado, pero para ella ésta se encuentra aparte, afuera y con independencia del contexto gráfico de su representación, ya que es muy posible que esto lo aprendiera así en la escuela.

Habría que reflexionar por qué se presentan estas situaciones de representación gráfica en las personas del sistema didáctico, particularmente las que refieren a la solución en sistemas de ecuaciones lineales, interés y correspondencia con los sistemas de 3×2 y 3×3 . Es decir, es interesante conocer las interpretaciones que un segmento del sistema didáctico, los docentes, hacen con respecto al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales y las representaciones gráficas asociadas a él.

I.1.3 Objetivos del trabajo de investigación

En relación con los objetivos, el trabajo pretendió dar una visión del estado que guardan las concepciones de los sujetos del sistema didáctico —los docentes de educación superior—, asociadas a los entendimientos creados y elaborados respecto a las representaciones gráficas ligadas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, en los modos de pensamiento, con particular interés en aquellas que se refieren al modo sintético y analítico del pensamiento, así como su transitar y coexistencia de un modo a otro. Para ello había que valerse de las situaciones elegidas y delimitadas en el capítulo uno, evidenciar dichas concepciones que permitieran acercarnos a las formas en que los docentes del nivel de educación superior estaban conceptualizando y operando al momento de trabajar algunos conceptos en el área de Álgebra Lineal, el concepto de solución y estudiar de cerca el funcionamiento de una parte del sistema didáctico, eligiendo para ello a un grupo de profesores ya fuese por haber impartido la materia o que la estuviesen impartiendo, para observar y contrastar las representaciones gráficas que elaboraban en relación con las presentadas en las referidas tesinas, así también, del empleo de otras representaciones no gráficas que se establecen respecto al concepto de solución dando posibilidad del estudio en otros modos de pensamiento.

El estudio centró su interés averiguando cuáles son los aspectos relacionados a las representaciones gráficas establecidas mediante argumentaciones, visualizaciones,

justificaciones u observaciones que realizaron los docentes cuando tenían tres rectas en el plano y/o dos o tres planos en el espacio tridimensional. Esto es importante porque mostró construcciones y argumentaciones de los docentes del por qué consideran que son la solución, cuando están en juego diferentes posiciones de los objetos geométricos, representando la solución o no-solución de un sistema con las características antes indicadas, relevante porque consideran que son las representaciones las que evidencian situaciones de solución y/o no-solución en los sistemas de ecuaciones referidos, como del empleo reiterado en el uso de ciertas representaciones gráficas que aluden a las situaciones de solución y no-solución. Para mostrar los anteriores elementos fueron observados los docentes para convertirse en fuente del diseño de la hipótesis de trabajo. La conjetura partía de datos reportados en las tesis (Eslava, M. y Villegas, M. 1998, Marines, J. y Monroy, J. 1998, Barrera, J., Cano, O. y Cervantes, J. 1998), permitiendo reflexionar sobre las dificultades en la transición, coexistencia y análisis de los diferentes modos de pensamiento, relativos a sus representaciones y establecer las explicaciones.

Observación 1. Presumiblemente los supuestos no eran los adecuados, ya que tradicionalmente se enseña, en los cursos de matemáticas, la recta mediante sus ecuaciones y no el pasar, a manera de modo de pensamiento, del sintético al analítico, pues como ya se mencionó líneas arriba, un curso tradicional atiende a las ecuaciones rectas dadas en forma analítica, en lugar de rectas y sistemas o bien ecuaciones y rectas de un modo gráfico.

Observación 2. Aunque pareciera obvio decirlo, se señaló que no es lo mismo enseñar la ecuación de la recta que indicarles dentro, del mismo curso de Geometría Analítica de bachillerato, que las ecuaciones que conforman todas y cada una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones lineales son rectas.

Se detectó una ausencia de mayor aproximación a los supuestos escolares reales en el planteamiento del problema, lo que deja en una primera aproximación del estudio la problemática mencionada, ya que dentro de un contexto de la práctica docente se puede observar, al hacer una delimitación del objeto de estudio, una mayor aproximación a lo que realmente ocurre, al precisar estos puntos. Esto nos lleva a tratar otro aspecto relevante y que por su naturaleza no fue posible estudiarlo durante el presente trabajo, aunque, sin embargo, fue enunciado: ¿qué es lo que entienden los sujetos del sistema didáctico por solución en diferentes contextos? Esto último pudo formularse con el sistema de elementos que manejaban las personas que aprenden ante situaciones dadas y que ya no les fue posible construir u ofrecer elementos que les permitieran relacionarlos. Por ejemplo, el acercamiento que se observó y se intentó realizar tenía que ver con una lucha interior en ellos por tratar de sacar los resultados, procedimientos y manipulaciones, dentro de un modo de pensamiento el cual, se diría, inhibe a los otros, no los suprime ni los cancela, dejando de paso una sensación de esfuerzo por aferrarse a dicha visión, inscrito en ese modo de pensamiento inicial, lo que no le da oportunidad a otros modos de pensamiento, sobre todo cuando el modelo de representación que se ha trabajado y usado dentro del salón de clases —el sistema didáctico—, en general prefiere uno sobre los otros, así lo

señala Francisco Cordero en un dialogo personal dentro del Seminario de Investigación I, 1998, cuando trata el paso del modelo analítico al modelo gráfico: dicho proceso, y por tanto tránsito en el modo de pensamiento, es más fácil en esta dirección, mientras que en la otra no lo es, se presenta más difícil —aquello que va del modelo gráfico al analítico—. Cordero agrega a qué se debe esto: “En tu práctica de tu entender, tu cognición está más entrenada en una que en otra”. En este caso, la primera que se señaló líneas arriba y la dirección a la cual corresponde dificulta más el paso de lo gráfico a lo algebraico. Por lo que el objetivo de este trabajo consistió en detallar por qué se presentan estas dificultades, en las personas que aprenden y en los profesores de la materia de Matemáticas, en particular, y cómo esto pudo determinar una cierta incidencia en el salón de clases o manifestarse respecto a las representaciones asociadas a los conceptos producto de los aprendizajes obtenidos en clase.

Los objetivos fueron:

- Determinar las relaciones entre el pensamiento sintético y analítico así, como sus dificultades, observadas en las tesinas (Guadarrama, 2000, pág. 81).
- Las dificultades que presentan las personas que aprenden, cuando se enfrentan a conceptos del Álgebra Lineal, en particular aquellos que refieren a la interpretación geométrica que le dan al concepto de solución, en dos y tres dimensiones.
- Las dificultades en el tránsito de un modo de pensamiento a otro, pues las personas referidas por el estudio no conocen el concepto, el objeto matemático en los dos modos de pensar. Para esto tuvo que apoyarse de nueva cuenta en Sierpinska (1998).

Al respecto, Duval señala que para que un sujeto conozca un concepto es necesario que maneje por lo menos dos representaciones diferentes del concepto (objeto matemático) y si esto no ocurre, entonces éste no logra capturar el concepto, por lo que el sujeto no lo conoce y, en consecuencia, se le dificulta pasar de un modo de pensamiento a otro, así lo propone (Cordero 1998), precisamente porque hay una ausencia de concepto. Al contar con varios sistemas semióticos de representación y procesamiento para el pensamiento matemático, donde cada sistema proporciona medios específicos de representación y procesamiento para el entendimiento matemático, el concepto matemático proporciona más información si es visto en sus diferentes representaciones y, por lo tanto, el concepto estará más íntegro. De ahí se entiende la lucha que se libra por transitar de un modo a otro, al que se refiere Sierpinska (1996), a la intención de capturar el concepto en la tentativa por lograrlo. Sandy finalmente interpreta la solución única en la recta que se obtiene de la intersección de los tres planos, sin embargo, es evidente la dificultad en el tránsito, aunque no termina la lucha a la cual se refiere Sierpinska en relación con lo que dice Sandy, pues finalmente se encarga de desarrollar, mediante otros modos de pensamiento intermedios, aquello que le permite identificar la solución desde su postura, desde su razonamiento de manera gráfica.

Esta conjetura indicaba que debía recuperarse lo expuesto en las secciones anteriores. Existe un fuerte impacto producto de la tradición del trabajo escolar que provoca que las personas desarrollen concepciones en cuanto a sus representaciones gráficas relacionadas con la solución de sistemas de ecuaciones lineales que no son concordantes con las definiciones, esto se dijo como parte de las prácticas docentes observadas. Las causas obedecen, en parte, a las interpretaciones aportadas con la discusión hecha. Sin embargo, fue considerado con precisión en qué forma y cómo.

1.1.3.1 Hipótesis

Se señalaba que los profesores, a pesar de que enseñaran el tema a sus alumnos, tendrían dificultades para interpretar situaciones que no eran típicamente tratadas en los textos escolares ni en las currícula respectivas. Esto es, se sabía que la enseñanza tradicional de tales temas suele centrar más la atención en los algoritmos que en las interpretaciones y los significados, pues los desarrollos de las personas exhiben ciertos usos reiterativos del pensamiento por una necesidad de búsqueda y significado que le dan al concepto de solución, bajo el empleo de una metáfora que señala si les funciona en su conceptualización que hacen sobre los objetos geométricos a diferencia de los objetos analíticos, es decir, que tengan como búsqueda y significación una persistencia visual con algo que tiene que estarse intersecando, como pueden ser éstos en rectas, planos y puntos, lo aplican. De ahí que todo aquello que represente o sea representado sobre la base de que algo tiene que estarse intersecando, esa será la noción de solución que permanecerá a lo largo de sus representaciones gráficas que establecen respecto al concepto, por consiguiente lo integra como parte de sus experiencias de vida en ese sentido se indica lo del concepto de permanencia, pues continúa a lo largo del tiempo, en todo aquello que tuviese que ver con sus vivencias —escolares sobre todo.

Para esto se retomó como marco teórico a Sierpinska en: *Synthetic and Analytic Modes of Thinking in Linear Algebra*, pues ofrecía una interpretación apropiada para el interés de esta investigación y que respondiese a las interrogantes e hipótesis que se formularon en el trabajo para el contexto de la educación superior. ¿Por qué pensaron de esta manera la representación gráfica asociada a la solución, cuando encuentran que lo están representando gráficamente y además, el manejo lo hicieron de otra forma, como se mostró en las diferentes representaciones gráficas elegidas?

En el caso del plano como en el del espacio, las diferencias que se establecen entre ellas, son fenómenos del efecto asociados al sistema didáctico que identifica Ferreiro⁵; quizá podrían ser muestras de *asimilaciones deformantes*, o bien que pudiesen quedar éstas instaladas en los sujetos que aprenden el Álgebra Lineal como fijaciones mentales respecto al discurso del profesor o como consecuencia del manejo y presentación de los textos; también podrían deberse al tipo de presentaciones y formas de trabajo preferidas y asociadas a los procesos de graficación,

⁵ Señalado en la conferencia magna presentado en el Simposio de la Lengua y las Matemáticas en 1992, bajo el título de *La lengua y las matemáticas*.

particularmente de las rectas, o que pudieran deberse a un recurso limitado por proveer ideas respecto a lo que suele preguntarse —representar la solución de sistemas de ecuaciones.

Las anteriores representaciones gráficas, como las discusiones y reflexiones elaboradas, motivaron fuertemente la indagación, el estudio y el análisis respecto a la interpretación geométrica del concepto de solución que dieron los docentes, mediante las representaciones gráficas proporcionadas y de su relación con la definición de la solución vista en el contexto de 2 y 3 dimensiones.

I.1.3.2 Interrogantes generales

Fueron formuladas las interrogantes del trabajo acerca de las razones para manifestar esto y de las posibles explicaciones del porqué ocurre.

¿Por qué consideran los docentes entrevistados, y los alumnos, que estas representaciones gráficas que proveen ideas sobre la solución son la muestra de las situaciones de solución o no-solución en los sistemas? ¿Cuáles podrían ser las causas de estas posibles concepciones, así como de las posibles interpretaciones diversas en su proceso de asimilación y construcción de conceptos del Álgebra Lineal, particularmente el de la solución en sistemas de ecuaciones? ¿Cuáles son los motivos por los que consideraron estas representaciones gráficas? ¿Qué los hizo suponer, en términos de las ideas que subyacen en estas representaciones gráficas, que proporcionan aspectos referidos a la solución? ¿Por qué consideran que son válidas sus representaciones? ¿Tendrá que ver esto con lo que dice Sierpiska (1998) en relación con la presencia del obstáculo del formalismo en el sistema didáctico, que tiende a hacer que las personas se enfrenten de manera sistemática, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, con éste y a la vez sea consecencial?

Se trató de crear una sección que considerase tres contextos donde posiblemente se establecieran reflexiones respecto a la problemática, sin embargo, fueron formuladas algunas interpretaciones de acercamiento, las cuales quedaban fuera del marco teórico de explicación, por lo que quedaron pendientes para futuros trabajos. Los contextos fueron:

Contexto 1. ¿Son los libros de texto? ¿Es la ausencia de su tratamiento? ¿Es el manejo en otra dirección o la presencia del mismo en aquellos que lo consideran y usan, lo que lo determina?

Contexto 2. ¿Es el maestro o los maestros, al tratar de hacer entendible la presentación o manipulación del tema?

Contexto 3. ¿Es el currículo que no hace hincapié en esto? ¿O falta riqueza en la presentación del mismo?

Incluso se pueden formular interrogantes en relación con lo planteado antes: ¿Qué evidencian todas estas situaciones contextuales o planos de intervención en el sistema didáctico? Formular preguntas más que respuestas relacionadas con los diferentes contextos ya indicados, pero que, a la vez, se localizan en el espacio de interacción de una práctica docente específica, realizada en el nivel de educación

superior como parte y producto de la experiencia obtenida al realizarla. De ahí la cuestión siguiente: ¿Hay dificultades en la transición de un modo de pensamiento a otro o son fijaciones en los procesos de manipulación que lo conforma, como procesos mentales que en los ciclos anteriores realizaron, o lo han hecho como parte de su manera de aprender, porque *no les quedó de otra*? Desde luego que también podría considerarse lo que señala Ferreiro⁶, que son asimilaciones deformantes derivadas de posibles situaciones de pregunta-respuesta. Por ejemplo, cuando a un alumno se le está examinando en el salón de clases y el profesor plantea una interrogante y tiende a ser lo indicado pero referido a otras cosas distintas para las que se formuló. El alumno generalmente repite parafraseando lo que vio, escuchó o leyó, adaptándolo y deformándolo según lo que le pide el libro o el profesor, sin que sea esa la respuesta, la grafica, la representación o la fórmula indicada.

Es pertinente considerar si esto se debe a otras dificultades que se presentaron históricamente y quedaron desplazadas por este proceso de depuración de la teoría del Álgebra Lineal, es decir, tratar de ver si en la historia de esta materia los conceptos involucrados, como es el caso del concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, alcanzaron a determinar obstáculos en el sentido epistemológico, lo cual de antemano se considera que sí. La concepción de solución varía en diferentes momentos de la historia.

I.1.3.3 Marco teórico

En consideración del tipo de datos que proveyeron las tesinas, además del conjunto de evidencias aportadas e interpretadas desde la perspectiva de Sierpinska (1996) en correspondencia con lo que aquí se investiga y el análisis de las diferentes interpretaciones dadas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, se consideró como marco teórico lo expuesto en el artículo: “Synthetic and Analytic Modes of Thinking in Linear Algebra”, de Sierpinska (1996), visión con que se concuerda con los modos de pensamiento y clasificación en relación con la evolución de las matemáticas y sus tres modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural.

En el modo analítico-aritmético las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-uplas" de números que satisfacen ciertas condiciones descritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de m -ecuaciones con n -incógnitas o desigualdades. En el modo analítico-aritmético, las componentes numéricas de los objetos geométricos, como puntos o vectores, son importantes. Así, por ejemplo, un sistema general de ecuaciones podría ser escrito usando todos sus coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

⁶ Caracterización formulada por Emilia Ferreiro en el Simposio de la Lengua y las Matemáticas (1992).

También se señala que el pensamiento analítico-estructural va más allá de este tipo de análisis y estructura, pues sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Así, un sistema semejante al anterior podría escribirse en una forma matricial $Ax = b$, el cual analiza y sintetiza los elementos algebraicos de la representación analítica, o en una forma vectorial:

$$x_1A_1 + \dots + x_nA_n = b$$

En relación con sistemas de ecuaciones hay aún otra diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural. Lo que importaba desde el punto de vista analítico-aritmético era poder encontrar métodos para resolver sistemas de ecuaciones. En el modo de pensamiento estructural las cuestiones podrían referirse, por ejemplo, a las condiciones que tienen que ver con la matriz A y el vector b para la existencia y unicidad de una solución. Las propiedades de la matriz podrían ser más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricos.

Los modos de pensamiento sintético-geométrico y estructural, son ambos visuales, aunque en formas muy distintas. El último es más metafórico y/o diagramático que el primero. [A su vez se indicó]: no debía creerse que el pensamiento sintético necesariamente tenía que ser geométrico, sino más bien era necesariamente intuitivo, aunque sí se relacionaba con la geometría por ser ésta de carácter intuitivo (Sierpinska, 1996).

Aspecto que después sería observado que evitaba la explicación de otros efectos que se produjeron en los resultados presentados de esta investigación, limitando la visión sobre las explicaciones que se deberían ofrecer en relación con lo que resultaba contradictorio para el entendimiento de los mismos, planteando nuevos desafíos de explicación, la necesidad de elección de otro marco de referencia que permitiera sostener una nueva línea de argumentación y de entendimiento ante la profundidad de las presentes inquietudes.

Por ejemplo, la aseveración de “que en la evolución de las matemáticas se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento” (Sierpinska, 1996), limitaba las explicaciones. Sobre todo cuando se tienen evidencias de lo que señalan Cantoral y Farfán (2000), quienes sostienen la tesis de que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social asociada con el grupo socialmente establecido y que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica, en el que las nociones matemáticas no necesariamente vienen de las abstracciones sucesivas y generalización de los empíricos. Esta visión —que posee una orientación sociológica—, dicen los autores que fue extensamente desarrollada durante todo el siglo XVIII, y que promovió una visión que permitió consolidarse como un paradigma socialmente válido basado en la metáfora “del agua que fluye”, una dialéctica entre el uso y el símbolo, es decir, entre la actividad y el objeto. Ésta da cuenta de una concepción epistémica alternativa que difiere de la que

hoy día se enseña en los salones de clase⁷, y que se plantea la búsqueda de predecir la evolución de dichos fenómenos que se desean estudiar, llamándolos de los fenómenos de las fluxiones continuas.

De ahí que la posición anterior presente dificultades para sostenerse como explicación del presente proyecto doctoral y sí, en cambio, sea pertinente adoptar la posición que proponen Cantoral y Farfán (2000). El Álgebra Lineal, al ser una rama de las matemáticas, no está exenta de esta visión.

Otros aspectos con los que tampoco se coincidió posteriormente y requirieron consideraciones diferentes fueron:

...la evolución del álgebra lineal inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico.

Tomando una perspectiva muy general, se podrían distinguir, en esta evolución, dos grandes pasos referidos a dos procesos. Uno, la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en \mathbb{R}^n . El otro, la desaritmetización del espacio o su estructuralización, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas (Sierpinska, 1996).

I.1.3.4 Metodología

La investigación realizada se desarrolló sobre la base de la entrevista, combinada con una descripción verbal y la presentación de una secuencia de gráficas asociadas al concepto solución en sistemas de ecuaciones lineales, 3×2 y 3×3 , con el objetivo de recabar datos e información respecto a las metas del trabajo —las concepciones de los docentes de educación superior, relativas al concepto de solución—. Y para efectuar la contrastación con la hipótesis planteada proveyendo de información necesaria y suficiente para detectar las dificultades en el tránsito, como en la coexistencia, de los modos de pensamiento sintético y analítico de los entrevistados, evidencias del funcionamiento del sistema didáctico, en docentes. La entrevista fue empleada como instrumento de indagación ajustada a las necesidades de la investigación, trabajada y enfocada a la problemática de manera semiestructurada (Pardinas, 1993), es “una conversación generalmente oral entre dos seres humanos la cual tiene alguna finalidad y que dependiendo de la finalidad es el carácter de la entrevista”, idónea para el trabajo, al recabar información sobre los entendimientos, concepciones y conocimientos relativos al concepto de solución en los sistemas de ecuaciones lineales ya señalados y en los modos de pensamiento sintético y analítico que manifestaban los entrevistados. El cuestionario contenía una serie de preguntas donde el tipo de datos que se deseaba recoger se referían a una comunidad concreta, que además formaba parte de un problema de investigación de carácter social. Este tipo de instrumento, llamada entrevista focalizada en el ámbito metodológico (Morton y

⁷ Se refiere al binomio de Newton como una entidad emergente en el sistema de prácticas socialmente ligadas a la solución de un tipo de situaciones, las cuales expresan la necesidad de construir una noción de predicción, que a su vez es construida por las experiencias diarias de los individuos —poder predecir— del cual irán tomando, nos dicen los autores referidos, la forma abstracta del concepto de función analítica.

Kendall, 1956), requiere experiencia, cuidado y habilidad, además de concentración en experiencias objetivas, actitudes, respuestas a situaciones particulares de las personas participantes de una situación concreta, en este caso: haber dado clases en la materia de Matemáticas en el nivel de educación superior. Su aplicación requirió de la elaboración previa de un prototipo de diseño de cuestionario específico para ello.

El diseño de entrevista tuvo un formato convencional: información gráfica y preguntas que era importante que respondieran verbalmente, secuencia de gráficas que observaría el entrevistado donde se marcaran los aspectos descritos en el capítulo I (la organización de las representaciones gráficas sobre la base de un criterio general común, observar lo que permanecía en común y en asociación a las representaciones gráficas que las personas desarrollaban relativas al concepto de solución, consideradas parte de las hipótesis de trabajo).

Las preguntas elegidas habrían de profundizar las razones argumentadas por los observados, luego de observar la secuencia gráfica, de lo adecuado o no de la elección motivo de su exploración, las cuestiones directas que tuvieran que ver con las situaciones de representación gráfica elegidas.

Aunque se requería que los entrevistados no se salieran de los aspectos centrales de la investigación, también hubo cuestiones más abiertas que exploraron lo que ellos creían respecto a la solución en un contexto gráfico. El cuestionario estuvo inserto en un contexto de representación geométrico, pero no por ello se les dio preferencia a las respuestas de las personas, tampoco se les negó el empleo de otros espacios, se les dejó en libertad de elegir el contexto de respuesta donde se expresaran con fluidez, observando las argumentaciones y las relaciones que pudieran establecer en sus respuestas, también se hizo un registro acerca de cómo formulaban sus respuestas. El diseño de la entrevista asimismo localizó las dificultades que observaban y enfrentaban los docentes acerca de su saber constituido en y por la práctica docente.

I.1.3.5 El contexto de la entrevista

Las sesiones de entrevista se efectuaron en una institución del sistema de institutos tecnológicos, perteneciente al sistema de educación superior, en el año 2000. Fueron elegidos seis docentes de la institución, con cierto perfil, como correspondencia con el nivel educativo, impartición de la materia, experiencia en el área y la disposición de colaborar con la investigación. Las sesiones de entrevista comprendieron un tiempo de 45 minutos por cada participante, según su desempeño en la misma, en turnos de tres entrevistados cada día.

I.1.3.5.1 Características generales de los entrevistados y de la investigación

Los seis docentes habían dado clases en la materia de Matemáticas en la institución, cinco habían dado el curso de Álgebra Lineal en algún momento, cinco pertenecían al mismo Departamento de Ciencias Básicas y uno al de Metalmeccánica. Los seis docentes egresaron de la misma institución, con un tiempo de servicio de 6 meses, 1 año, 2, 6 (2) y hasta 24 años. Tres de ellos manifestaron de manera explícita que incluso llevaron el curso de Álgebra Lineal con uno de los docentes entrevistados (el

de mayor antigüedad). En cuanto a su formación, los seis provenían del área de ingeniería: ingeniero industrial electricista, 3; ingeniero químico, 1; ingeniero mecánico, 1; sólo uno de ellos se definió como docente. De los seis, 2 manifestaron haber realizado estudios de maestría, no especificaron si habían obtenido el grado o si tenían estudios parciales. Uno más estaba cursando la maestría y los otros tres tenían estudios a nivel licenciatura. Las edades de los docentes se agrupaban en tres bloques: 1 de 25 años, 3 entre los 29 y 30 años, 2 entre los 42 y 43 años, los dos últimos son los que manifestaron haber realizado estudios de maestría, uno de los docentes del segundo bloque estaba realizando sus estudios de maestría.

I.1.3.5.2 Análisis de las entrevistas. Observaciones generales a las mismas

Respecto a las observaciones de carácter general, se señala:

1) Todos, al determinar si tenían o no solución, particularmente las de paralelismo, indicaron que no tenía nada que ver si se separaban o no los objetos geométricos, éstos no tenían o representaban no-solución, casos de rectas paralelas, dos arriba y una abajo o de las tres arriba o abajo del eje de las X, o de rectas con otra disposición a la del paralelismo con los ejes cartesianos; por ejemplo, el dibujo 35 que corresponde a tres rectas paralelas que cruzan a los dos ejes, con pendiente negativa y que van del 2º cuadrante al cuarto, pasando por el primero. El entrevistado E5 señalaba: "son tres rectas paralelas, misma pendiente, lo único que cambia es su intersección con el eje Y".

Paralelismo entre los planos, que corresponden a paralelismos en las gráficas 1-horizotalmente y con ejes de referencia, 5, 25, 27 entre ellos, los tres horizontalmente y sin ejes de referencia y la 33 verticalmente, sin ejes de referencia; por ejemplo, la entrevistada E2 señaló respecto al dibujo 25: "Mismo que 1, nada más que sin ejes de referencia" o el entrevistado E3 (el mismo dibujo 25): "Tres planos, no se intersectan, no hay solución, no aparece el eje de coordenadas"; o respecto al dibujo 27, nuevamente la entrevistada E2 indica: "Están muy pegaditas, no tiene solución, vemos así como las tortillas".

Paralelismos que cruzan las rectas (en todos los entrevistados) a los ejes, fuese el eje X, el eje de las Y o ambos, no fue importante en la determinación de la solución. Por ejemplo, el entrevistado E5, ante la gráfica 2, de tres rectas paralelas que cortan al eje de las Y expresó: "No hay solución, las intersecciones son diferentes, no son comunes" (se refería a la disposición del paralelismo); o por ejemplo, la gráfica 3, que corresponde a tres rectas paralelas al eje de las X y cortan al eje de las Y, los entrevistados E2, E3, E4 y E6 dijeron respectivamente: "Es lo mismo, paralela sin intersecciones...", "...es similar al anterior, no habría solución, claro que lado positivo...", "Considerando lo mismo, entonces las tres líneas como en el caso anterior, ...no hay solución" y "Es algo similar, nada más que ahora observo que las rectas están en esta parte, cortan al eje Y, en un punto, no, pues tampoco".

O lo expresado directamente por el entrevistado E4, refiriéndose a la gráfica 24 de tres rectas que se estaban cortando dos a dos, señaló: "...a pesar de que se cortan no hay solución, ...no tiene que ver que las rectas corten a los ejes de

referencia".

De lo que se deduce que:

- Si esto se cumple en los estudiantes de educación superior, los resultados de la tesina de Eslava M., y Villegas M., en la entrevista los bachilleres indicaban algo distinto, las soluciones basados en los cruces que observaron con las rectas que ellos dibujaban en cada caso, particularmente el cruce con el eje de las Y.

- Esto se creyó, de manera personal, que ocurriría con los profesores. Lo cual fue refutado. Por ejemplo, los entrevistados E4 y E6, respecto a la gráfica 4, que se refería a tres rectas paralelas cortando dos en la parte positiva del eje de las Y y una en la parte negativa del mismo eje, señalan respectivamente: "Es lo mismo, no, no tiene nada que ver el que una recta esté abajo y las otras dos estén arriba, son paralelas... no tiene solución", "...es el mismo caso solamente que ahora el punto de cruce con el eje Y es diferente...". En los entrevistados E4 y E6 respecto a la gráfica 4, que se refería a tres rectas paralelas, cortando dos en la parte positiva del eje de las Y, y una en la parte negativa del mismo eje, señalan respectivamente: "Es lo mismo, no, no tiene nada que ver el que una recta esté abajo y las otras dos estén arriba, son paralelas... no tiene solución", "...es el mismo caso solamente que ahora el punto de cruce con el eje Y es diferente...".

A los entrevistados E3 y E5 les pareció importante observar los ejes y mencionarlo en el caso de los planos paralelos, consideraron que no tenía que ver con la solución. Por ejemplo, el entrevistado E5, cuando ve la gráfica 5 correspondiente a dos planos paralelos con ejes de referencia, dice: "Sí, igual, yo creo que como en los inicios paralelos... no, no tiene solución". Sin embargo, por ejemplo, E3 cuestionó que por algo estaba ahí, volteando las hojas a la primera gráfica que había observado y las demás gráficas, pues señaló respecto a la gráfica 25 de tres planos paralelos que a diferencia de la gráfica 1, éste no contiene ejes de referencia: "Tres planos, no se intersectan, aquí no aparece el eje de coordenadas, ...aquí no hay solución, no hay algo que se intersecten en ellos" (en referencia a la ausencia de los ejes).

2) Casi todos trataron de relacionarlo con las ecuaciones, algunos llegaron a escribirlas de manera general, otros trataron de idearlas, otros las llamaron en la entrevista "pensándolo matemáticamente" (Él lo remitía a la ecuación paramétrica pues decía, por ejemplo, con respecto a la gráfica 4: "O sea, de la solución del sistema sí, sigue siendo igual, las ubicaciones sí están diferentes". El entrevistador le dice: "entonces sí hay distinción para usted entre las ubicaciones de los objetos geométricos", a lo que contesta: "En la ecuación sí hay diferencia, pero en la solución sigue siendo la misma"; o cuando observa la gráfica 6, correspondiente a dos planos que se intersectan y que la intersección es una recta, señala que hay una solución. Indica adelante que la solución es la línea, cruce de los dos planos. El entrevistador le pide que amplíe su opinión respecto al significado de una línea. Señala E1: "Bueno, eh, estamos hablando de ecuaciones paramétricas" (indicando nuevamente con la pluma el recorrido de la línea).

Por su parte E2 (acerca de los sistemas), en la gráfica 1, dice: "...generaría tres sistemas", E4 menciona respecto a la gráfica 2: "...las tres rectas serían la representación geométrica de un sistema de tres ecuaciones, con dos incógnitas...", o el mismo E4 con respecto a la gráfica 6 referida: "...dos planos tengo, nada más tengo dos ecuaciones...", o el entrevistado E5 respecto a la misma gráfica expresa: "...la recta que marca la intersección, dice algo importante..., hay varias soluciones..., ya que es un sistema que tiene más incógnitas que ecuaciones...". E3 sobre la ecuación del plano para pasar a sistemas, toma la gráfica 6, y señala: "Aquí una intersección entre dos planos, pues sí, aquí se puede ver que hay solución: grado uno hay solución, grado dos hay dos soluciones..., recta, se origina una solución...", o tomando lo que indica E6 respecto a la gráfica 19: "Sí, nada más que la recta remarcada", habla de la misma ecuación.

En cuanto observaban la secuencia de dibujos los trataban de imaginar en términos de ecuaciones, sistemas o con otros dibujos, como fue el caso de E2, E4, E5 y E6 para darse a explicar (ver páginas finales o anexos). E2 usó dibujos, pensando la cantidad de ecuaciones o sistemas asociados a los dibujos, E4 lo refirió dando las ecuaciones concretas en cada caso o señalaba las que había dado para referirse, E5 escribió los sistemas en el modo analítico estructural, lo cual es interesante porque este profesor pertenecía a otro departamento, además de ser el más joven de ellos, no se esperaba que diera las respuestas en el modo de pensamiento estructural, por el diseño y temática del trabajo de investigación y porque se consideraba que era muy probable que luego de llevar el curso, lo aprobaba y se olvidaba de él lo más rápido posible para evitar desequilibrios, evitando, dentro de esta lógica, recuerdos del mismo, sin embargo, al analizar precisamente su condición de ser el más joven, tenía posibilidades de recordarlo mejor, lo cual se verificó al superar las dificultades para expresarlo en el pensamiento estructural. Por su parte E6 trató escribir las ecuaciones y/o los sistemas asociados, sin precisarlas completamente.

3) Todos los entrevistados indicaron que así fue como lo vieron en el curso correspondiente de Álgebra Lineal.

4) A cinco de los seis entrevistados les costó trabajo pensar en los coincidentes, estos fueron los casos de tres rectas coincidentes, así como dos rectas coincidentes y otra paralela a ellas en el plano, y tres planos coincidentes, dos coincidentes y uno paralelo en el espacio de tres dimensiones. Por ejemplo, la gráfica 7 consistía en dos rectas coincidentes y una paralela a ellas. E2 señala: "...se pegan, aun así no hay solución, la diferencia es muy pequeña, están pegaditas...", o también con respecto a la gráfica 19 que consistía en dos rectas coincidentes y una tercera que la corta, E5 indica: "...según esto, aquí hay dos rectas iguales, son dos rectas paralelas por decirlo así...". Ahora bien, para este caso, incluso E2 refiere a la línea coincidente por línea doble, señalando: "A pesar de estar pintadas una sobre la otra son dos líneas, no una", también en la gráfica 20, que se refiere a tres rectas coincidentes, ella dice (E2): "...no tienen solución porque están en forma paralela las tres líneas rectas".

De hecho las distinguieron diciendo que a pesar de estar empalmadas, una

sobre la otra, deberían estar separadas aunque fuese por una distancia muy pequeña. Para indicarlo tuvieron que recurrir a sus experiencias cotidianas, como E2 "...juntitas como las tortillas", E3 se refirió: "...a pesar de estar empalmadas había una cierta distancia entre ellas", diciendo ambos que no había solución. Incluso E2, en el caso de los planos, trataba de asociar ecuaciones, dijo: "Multiplico por 2 la ecuación que es una recta empalmada, doble" (ver página 30 y otras de la transcripción, en Guadarrama, 2000). Lo pensaron mucho, a pesar de decirles que los planos o rectas eran coincidentes⁸, consideraban, salvo E4, que a pesar de estar muy juntas, estaban de manera paralela, sin tener contacto entre ellas.

5) Observando los registros que elaboraron en hojas aparte, dan evidencias de que coexistían diferentes modos de pensamiento, también de sus dificultades en el tránsito de un modo de pensamiento a otro, coincidiendo con lo planteado en las primeras secciones de la investigación —delimitación del objeto—. Sin embargo, el gráfico que identifica el modo sintético del pensamiento que plantea Sierpinska (1996) no les proporcionaba "ideas seguras" respecto a sus respuestas, salvo E4 que proporcionó y evidenció un adecuado manejo de su tránsito de lo sintético a lo analítico y viceversa, como también las respuestas a las interrogantes que se le formulaban como parte de la entrevista.

En concordancia con lo citado por Sierpinska (1996), al referirse a Sandy, cuando es entrevistada, igual que cinco de los seis docentes, trataron de refugiarse en el modo analítico aritmético, según Sierpinska "luchando por hacer su pensamiento más analítico". Éstos fueron los casos E1, E2, E3 y E6. Al respecto, E6 señala, cuando está trabajando con la gráfica 8: "...a mí se me hace más fácil recurrir a intentar representar las rectas mediante una ecuación y a partir de ello visualizarlo pero analíticamente...", habría que agregar "estructuralmente" para algunas de sus respuestas (E5); por lo que se consideró que tuvieron dificultades en el modo de pensamiento sintético geométrico y también en el tránsito de los modos de pensamiento, mientras que E4 pudo hacer el paso entre un modo y otro, sin dificultad.

6) Algunos de los entrevistados, como E2, al explicarles la pretensión de pensar las gráficas como representaciones asociadas a los sistemas de ecuaciones, sobre todo en tres dimensiones, los llevó a pensar que cada plano estaba determinado por 3 ecuaciones, con 3 incógnitas. Obsérvese las entrevistas y las gráficas: 1, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 24, 28, 29, 31 y 32, que son los casos de representaciones gráficas de no paralelismo salvo la gráfica 1, en todos ellos E2 dijo numéricamente la cantidad de soluciones que fueron múltiplos de tres correspondientes al espacio. ¿Por qué tres? Quizá por tener tres dimensiones el espacio, en principio; después, porque el discurso matemático escolar señala para los objetos geométricos el espacio y éstos son descritos por medio de tres incógnitas o

⁸ Encontrando regularidad en lo sociocultural propuesto por Guadarrama (2001), en relación con el lenguaje empleado, allá *sustituyan*, aquí *coincidentes*, actúan como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en un determinado discurso.

variables y, en el caso de las gráficas referentes al plano, la cantidad de soluciones fue de uno, dos y tres, dependiendo de la cantidad de cruces que presentaron dichas gráficas.

7) Casi todos ellos, salvo E4, cuando señalaban la solución, la referían como: un punto, una recta —objetos que veían en las gráficas—. En ambos la llamaban una solución. En ese sentido, Sierpinska (1996), en el marco teórico, preveía esta situación, al señalar: “cuando se le presenta a una estudiante un diagrama representando tres planos que se intersectan en una línea, representan un sistema con solución”. Sierpinska explica que la estudiante fue generalizando de dos a tres dimensiones en una forma sintético-geométrico, no en forma analítica (ver página 59, de Guadarrama, 2000). Añadiendo que trataron con esta forma de distinguir la solución única, lo cual corresponde a otro momento. Se observaron dificultades para decir qué es solución, en particular cuando está inscrita en el contexto gráfico. Asociaban intersección o cruce con algo, entonces cuando no se intersectaban los planos, las rectas, la situación gráficamente no tenía solución.

8) Cuando se les pidió que dieran la definición de solución no encontraban cómo precisarla en términos de la definición, unos indicaban que la solución era un punto, otros una recta y otros con valores, por lo que ante esto (situación pedida en la entrevista) la definición la reestructuraron en el sentido de la sensación de que la conocen, ya sea porque la han frecuentado a lo largo de su trayectoria o por el paso en los diferentes niveles escolares, a saber, analíticamente. De ahí que gráficamente hay una tendencia a considerar que es otra cosa, pero no viéndola como el otro lado de la misma moneda, es decir, que la analítica igual que la gráfica, son dos cosas que dan unión y organizan al concepto tratado: la solución en un sistema de ecuaciones lineales (E1, E2, E4 la dieron como valores que son solución, reconociéndola en las situaciones geométricas, no tuvieron dificultad de transitar de un contexto a otro, E6 señaló que le era más fácil, para después mirarla geoméricamente). Otros la asociaron con todo aquello que se intersecta. En ese sentido, se observaron dos aspectos que no necesariamente están conectados, por lo que conviene examinar este proceso de constitución de la solución en otros ámbitos y niveles educativos. Por consiguiente, se creyó conveniente considerar otros aspectos en la explicación del por qué la presencia y permanencia de sus concepciones, como pudieran ser los referidos por Sierpinska (1998).

Finalmente, un aspecto que verificó la situación de permanencia de sus representaciones gráficas ligadas a la solución, en sistemas de ecuaciones, es que los objetos geométricos y los objetos analíticos son diferenciados por ellos al no dar las respuestas más que remitiéndolas al modo analítico, para después tratar de traducirla al modo sintético. De los 6 entrevistados, 5 indicaron que así les fue enseñado, en realidad que no se los habían enseñado en su curso de Álgebra Lineal, agregado a la ausencia en sus aprendizajes —uso de las representaciones geométricas, concretamente las del espacio tridimensional—, aunque E2 indicó que no le había

puesto la suficiente atención a las representaciones geométricas de las situaciones de solución y no-solución.

I.1.4 Resultados y perspectivas a partir de las observaciones generales

Se desechó la idea que se tenía en un primer momento de la investigación respecto a que las soluciones representadas en forma gráfica tenían que ver con las formas predominantes respecto a la graficación de las rectas. Particularmente las que refieren a las del plano y su permanencia, pues con lo encontrado nos indica que no permanece. Por lo tanto se desechó la creencia de que algunas representaciones en el plano, cuando éstas se intersectan con el eje de las Y , tenían que ver con la manera en que se les había enseñado a graficar las rectas (tomar la ordenada al origen como referencia para encontrar los puntos de cruce y , por consiguiente, la representación gráfica de la solución), aunque se cree que el proceso de graficar las rectas, primero la ordenada y después la x que hace que $y=0$ apele más al modo de pensamiento analítico que al sintético-geométrico.

También alude a que esto no permanece en ciertas representaciones gráficas que indican solución en sistemas. Por lo que se observó, existe una fuerte tendencia a tratar de traducirlo al ámbito algebraico, desprendiéndolo de lo geométrico, coincidente con lo indicado por Sierpinska (1996).

Se observó que coexisten diferentes modos de pensamiento, también sus dificultades en el tránsito de un modo de pensamiento en otro, como lo plantea Sierpinska (1996), verificado en un intento por explicar lo que se les preguntaba y, además, para darle significado, trataban de salirse del modo sintético-geométrico para insertarse en el modo analítico aritmético, algunos con cierto éxito y otros sin lograrlo.

I.1.4.1 Resultado fundamental

A partir de las observaciones generales y el análisis de las mismas se pudo decir que se verificó en todos los entrevistados, por tanto se comprobó lo sospechado acerca de nuestra hipótesis de trabajo derivada de la realización de la organización y clasificación de las concepciones que exhiben los entrevistados en los resultados de las tesis, a saber: los entrevistados apelan a la permanencia de su representación gráfica asociada a la solución que desarrollan en su necesidad de búsqueda y significación que le dan al concepto de solución y que éste se traduce en el sentido de que “si les funciona lo aplican”. Por lo que en esta permanencia: “si les funciona lo aplican”, identificada como todo aquello que intersecta gráficamente, corresponde éste con el concepto de solución, no importando si esta intersección se da en un punto, en una recta o en un plano. Por lo que la noción de solución que establecen en los sistemas de ecuaciones lineales a nivel gráfico, observado por el resultado que produce, será elaborada por lo que miran en las representaciones gráficas dadas. Es decir, que al observar las formas de intersección en el plano y en el espacio, tenderán a identificar respecto a lo anterior como algo que tiene que estar intersectando, lo que toman en consideración a partir de eso que miran, será la noción que manejarán a nivel de sus procesos mentales respecto de las representaciones gráficas establecidas,

respecto al concepto de solución en sistemas de ecuaciones 3×2 y 3×3 . Evidenciando el estado en que se encuentra la noción y el nivel del concepto que manejan en relación con la solución asociada gráficamente en el plano y en el espacio.

Se observó en ellos que apelaron a la permanencia de sus representaciones gráficas asociadas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, correspondiente a lo señalado líneas arriba, si funciona lo utilizan y en este sentido le dan significado al concepto de solución "gráfica". De ahí que su manera de idear el concepto, tomando como referente todo aquello que intersecta gráficamente representa la solución, por lo que si las representaciones gráficas no muestran visualmente que se intersectan, esta situación tendrá que ser considerada como que no tiene solución desde el punto de vista gráfico del sistema (como fueron los casos de paralelismo). Esto hizo que algunos docentes lo extendieran de manera lineal, sobre todo cuando se enfrentaron con las representaciones gráficas elaboradas en tres dimensiones, pues en el plano no tuvieron las mismas dificultades. Lo singular y contundente fue que se presentó el caso de la intersección de tres planos, dos a dos, considerado la solución, porque al mirar la situación de solución como todo aquello que se esté intersectando, se vio que fue condicionante para la indicación: tiene solución o no tiene solución, minando el progreso en sus entendimientos, además de ser contradictorio a la definición.

I.1.4.2 Otros aspectos

Les parecieron interesantes las gráficas (E2). La mayoría mostró interés para que se les informara acerca de lo que arrojaba la investigación, ya sea que contestaran correctamente el cuestionario o se resolviera respecto a lo que se les había preguntado. Se les preguntó si ellos lo habían utilizado antes y si lo habían visto, estudiado o enseñado. Contestaron que no, sobre todo en la manera gráfica como se les presentó la secuencia de dibujos.

I.1.5 Perspectivas para futuros trabajos

Al efectuar las entrevistas se observó de manera general que la cantidad de gráficas aplicadas fue extensa, a pesar de que algunos manifestaron que estuvo bien que se les hayan presentado, por lo que se considerará hacer una selección para futuros trabajos en esta dirección (algunas fueron repetitivas, tanto en gráficas como en situaciones docentes, el caso de paralelismos entre rectas y algunos de planos paralelos, dos paralelos y uno transversal, pero había que ver si también fueron repetitivas para los estudiantes). En las entrevistas, cuando miraban los dibujos y se les hacían preguntas daban la respuesta, y en seguida se les preguntaba por qué era así. Una vez que lo explicaban, se les preguntaba otra situación parecida y se les hacía pensar que era obvio, pues la sensación que se creaba era de que ya lo habían indicado o explicado, por tanto quedaba la sensación de: "Qué pregunta me haces...", "Cómo me lo preguntas", "¿Qué no lo sabes?" O reducían la respuesta a exclamaciones como: "también", "igual".

Por lo que a partir de esto quedó señalado que se pueden afinar las preguntas, la entrevista, la selección de gráficas a emplearse. Lo singular, por contundente, es el estudio del porqué mirar la situación de solución como todo aquello que se esté intersecando, pues se vio que es condicionante para la indicación: tiene solución o no tiene solución, como el caso de la intersección dos a dos de los tres planos que la consideraron solución, resaltando en un primer punto cómo se da este proceso de construcción social de la solución, cómo se establecen los entendimientos y concepciones referentes a este proceso, sobre todo cuándo son sometidas en tensión con el discurso matemático escolar que se emplea para su transmisión; ya se veía en los entrevistados una regularidad de lo sociocultural propuesto, por ejemplo, en la relación del lenguaje empleado, como: coincidentes, sentido de intersección, empleo de un lenguaje analítico, formalidad lógico estructural con que se trabaja, etc., los cuales actuaron como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en el discurso.

También el empleo de las gráficas en una nueva selección deben presentarse profundizando en la línea de razonamiento que se observa, que tiendan a irse más, ya sea al nivel de las explicaciones, que presenten más dudas o bien en las que se tenga mayor confusión para la interpretación gráfica, como de sus procesos de construcción a lo largo de diferentes niveles educativos y ámbitos o contextos distintos. Es necesario tener más graficas que profundicen la búsqueda de los procesos constructivos, por ejemplo, aquellos que permanecen en uso en los niveles.

En el caso presente se revisaron minuciosamente las gráficas para darles una secuencia ordenada, acorde con los criterios de organización de las gráficas proporcionadas por las tesinas, incluso, se les dio cierta secuencia a la organización y clasificación de los respuestas obtenidas de las tesinas para darle continuidad a la investigación, por lo que la selección obedece a otros criterios pues se inscribe en un proceso de mejoramiento, no sólo en la parte técnica de desarrollo de la entrevista, sino en la posibilidad de mejorar la técnica de aplicación de los instrumentos de indagación como los registros etnográficos, con una visión más integral que permita dar cuenta de la complejidad de la problemática, que bien podría ser bajo una visión epistémica y sistémica; es decir, que el entrevistado provea las ideas de la profundidad de la problemática y que pueda romper con lo esperado o las suposiciones existentes al respecto. De lo que se trata es de identificar con mayor precisión las concepciones, los entendimientos respecto a la solución, localizando en qué momento dejan de ser usadas en el sistema didáctico o aplicadas fuera de él, pero también introducidas al sistema como referentes que expresen los casos de solución o no-solución, además de las representaciones gráficas de permanencia identificadas, que tengan que ver con esta parte cognitiva, epistémica, sociocultural y didáctica.

Una dirección podría ser entrevistando a estudiantes de licenciatura, aplicando una selección de la secuencia de dibujos o toda la secuencia, para observar si las usan o no, otra yendo al nivel de la educación más básico, es decir, observarlo en primaria, secundaria, bachillerato, para poder hacer una descripción más completa de sus explicaciones, como de los procesos de construcción de las concepciones adquiridas y de los entendimientos formados a lo largo de los niveles educativos, indagando sobre

la noción que tienen los sujetos del sistema didáctico acerca de qué es solución y qué entienden por solución.

I.2 Definición de la problemática

I.2.1 El problema

El problema parte de la localización de evidencias para la tesis de maestría (Guadarrama, 2000) sobre la actuación de los modos de pensamiento¹, fundamentados en los juicios sintéticos *a priori*², de la colocación filosófica de Kant, que manejan las personas del sistema didáctico, respecto a las representaciones gráficas relativas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones 3×2 y 3×3 , halladas bajo la orientación del análisis de entrevistas, observaciones generales, diseño de entrevista, aplicación de nuevas entrevistas y que, a partir de ellas, se pudo señalar lo que se verificó y lo que no con los entrevistados, lo que a su vez derivó en los resultados alcanzados para dicha investigación. La información fue contrastada con las hipótesis de trabajo derivadas de la clasificación de interpretaciones que sobre la solución le daba un grupo de personas, solución en contexto geométrico —reportados por las tesinas—, lo que llevó a considerar que los profesores, a pesar de que enseñaran el tema a sus alumnos, tendrían dificultades para interpretar situaciones que no eran típicamente tratadas en los textos escolares ni en las currícula respectivas.

Esto es, se sabía que la enseñanza tradicional de tales temas suele centrar más la atención en los algoritmos que en las interpretaciones y los significados. Los entrevistados apelan a la permanencia de su representación gráfica asociada a la solución que desarrollan en su necesidad de búsqueda y significación que le dan al concepto y que éste se traduce en el sentido de que “si les funciona lo aplican”, creando entendimientos y concepciones no necesariamente coherentes con el discurso matemático teórico.

Sin embargo, en una investigación anterior se observó, al considerar la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales en el ámbito de su representación gráfica, que los participantes señalaron que la solución también la miraban como la intersección dos a dos de los planos. Lo que se podría valorar como contradictorio respecto a lo que se considera la representación gráfica de la solución, aquella como el punto donde convergen tres planos, lo que no resultó así entre los entrevistados.

Lo expuesto proporciona una idea acerca de la noción que manejan a nivel de procesos mentales respecto de las representaciones gráficas establecidas en correspondencia con el concepto de solución en los sistemas mencionados, lo que a su vez articula los entendimientos y las concepciones que las personas tienen en relación con este concepto y que han creado dentro del sistema didáctico al trabajar con la solución. Se evidencia de esta manera la existencia de articulaciones con la noción, los entendimientos y conceptualizaciones que se encuentra en la definición de

¹ Mediante un conjunto de entrevistas efectuadas con docentes del nivel superior y el reporte que hacen trabajos de especialización en el tema con estudiantes del nivel medio superior.

² A la solución que da al problema de la experiencia. Para más detalle ver el apartado “III.4.1 Sustento de la discusión filosófica”.

la problemática que se propone con la realización de esta investigación doctoral, cuyo problema es investigar la construcción social de los entendimientos y las concepciones concernientes a la solución.

Se dispone de una primera orientación: la importancia de las prácticas sociales y culturales que actúan en las personas del sistema didáctico, como un factor que posibilita la comprensión o no de las concepciones que se crean en el ámbito educativo relativas al concepto y, por otro, en uno más general, al señalar el estado que guardan las concepciones inherentes al concepto de solución que los profesores tienen. En consecuencia, hay necesidad de dar respuesta a preguntas de esta naturaleza: ¿por qué ocurre esto en el sistema didáctico?, ¿cómo ocurre esta relativa modificación en el entendimiento de lo que es la solución y, de forma general, cómo se construye socialmente la noción y el concepto de solución al transitar en los diferentes niveles del sistema educativo? Así, la búsqueda y localización de explicaciones por las cuestiones involucradas hace necesario un nivel superior de articulación, al considerar aspectos como el de cultura y lenguaje con que se expresa esta problemática. La consideración es que los procesos de formación, de enseñanza y de aprendizaje reflejan aspectos culturales y lingüísticos con los cuales se manifiesta socialmente la problemática. Esta interpretación está derivada del diagnóstico del problema que concuerda con la necesidad de tener una visión sistémica de la aproximación socioepistemológica, la cual incorpora como elementos de análisis, la dimensión didáctica, cognitiva, epistemológica y sociocultural, en la que tales componentes (cultura, lenguaje e identidad) bien podrían caracterizar y acercarse a la realidad sociocultural de la problemática de la investigación, en tanto la atraviesan.

Lo anterior a su vez corresponde con lo señalado en las perspectivas para futuros trabajos de la investigación ya referida (ver antecedentes, pág. 40, 41 y 42 de este trabajo), las cuales se enuncian a continuación:

Respecto a idear el concepto tomando como referente que todo aquello que se intersecta gráficamente representa la solución, fue significativo para la localización de las representaciones gráficas que muestran dónde visualmente se intersecta. Esta situación tendrá que ser considerada como un elemento que sirva de contraste para aquello que tiene y no solución desde el punto de vista gráfico. Hay que considerar que algunos docentes que lo extendieron de manera lineal, sobre todo cuando se enfrentaron con las representaciones gráficas elaboradas en tres dimensiones, el plano no les causó las mismas dificultades.

Durante las entrevistas, cuando miraban las gráficas, se les hacían preguntas, daban la respuesta y en seguida se les preguntaba por qué era así. Una vez que lo explicaban, se les preguntaba otra situación parecida, haciéndoles pensar que era obvia la pregunta, que ya lo habían indicado o explicado, reducían así la respuesta con exclamaciones como “también”, “igual”, que nos remite a prácticas educativas ampliamente extendidas, por lo que se considera que deberá contemplarse el ámbito de las preguntas y sus respuestas en una descripción de la construcción social de la solución.

Otro elemento tomado en cuenta por lo manifestado en el estudio de por qué mirar la situación de solución como todo aquello que se esté intersecando, fue observar que era condicionante de la indicación: tiene solución o no tiene solución, como el caso de la intersección dos a dos de los tres planos que consideraron la solución, colocando en orden de relevancia el cómo se da este proceso de construcción social de la solución, cómo se establecen los entendimientos y concepciones referentes a este proceso, sobre todo cuando son puestas en tensión con el discurso matemático escolar que se emplea para su transmisión. Por ejemplo, en los entrevistados se manifestó una regularidad de lo sociocultural respecto a la relación del lenguaje empleado: coincidentes, sentido de intersección, empleo de un lenguaje analítico, formalidad lógico estructural con que se trabaja, etcétera, que actuaron como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en el discurso.

El empleo de las gráficas en una nueva selección debe hacerse profundizando en la línea de razonamiento que se observa, que tiendan a irse más, ya sea al nivel de las explicaciones, porque presenten más dudas, o bien en las que se tenga mayor confusión para la interpretación gráfica que asocian, al igual que de sus procesos de construcción a lo largo de diferentes niveles educativos y ámbitos o contextos diferenciados, lo que hace necesario tener más gráficas de profundización de esta búsqueda de los procesos constructivos, por ejemplo, en aquellos que se refieran a los que permanecen en uso en los niveles y los que son comunes en ambos, pero también de los que se van modificando, y que deben ser más pensados.

Para darle continuidad a la investigación es pertinente cuidar que la selección de gráficas obedezca a otros criterios, debido a que el comentario se inscribe en un proceso de mejoramiento, no sólo en la parte técnica del desarrollo de la entrevista, sino en la posibilidad de mejorar la técnica de aplicación, los instrumentos de indagación, como son los registros etnográficos, con una visión más integral que permita explicar la complejidad de la problemática y que bien podría ser bajo una visión epistémica y sistémica que el entrevistado provea las ideas y dé cuenta de la profundidad de la problemática, que pueda romper con lo esperado o bien con lo que creemos, o para identificar con mayor precisión las concepciones, los entendimientos respecto a la solución.

Hay que detectar en qué momento dejan de ser usadas en el sistema didáctico o aplicados fuera del sistema —entendimientos y concepciones surgidos de los procesos de construcción de la solución—, pero también introducidas al sistema como referentes que expresen los casos de solución o no-solución, representaciones gráficas de permanencia identificadas u otras que tengan que ver con esta parte cognitiva, también epistémica, sociocultural y didáctica. Pueden ser al graficar, al formular analíticamente u oralmente las soluciones, como de los elementos que intervienen en su graficación, y de los aspectos que se presentan como dificultades. Una dirección podría ser entrevistando a estudiantes de licenciatura, aplicando una selección de la secuencia de dibujos o toda la secuencia. Para observar si las usan o no en los niveles de la escuela básica hay que observarlo en alumnos de primaria,

secundaria, bachillerato, y poder hacer una descripción más completa de sus explicaciones como de los procesos de construcción de las concepciones adquiridas y de los entendimientos formados a lo largo de los distintos niveles educativos, indagando sobre la noción que tienen los sujetos del sistema didáctico acerca de qué es solución y qué entienden por solución.

La búsqueda y localización de la explicaciones plantea una realidad emergente para la investigación y sus desafíos, pues conlleva cuestiones que involucran la necesidad de establecer un nivel más elevado de articulación, al considerar aspectos como el de cultura, lenguaje, prácticas que permitan aproximar más lo que expresa esta problemática, ya que la consideración es que los procesos de educación y formación, por tanto de su enseñanza y aprendizaje, reflejan los aspectos culturales y lingüísticos de prácticas humanas con los cuales se expresa socialmente la problemática. De ahí que se sigan parte de las consideraciones de Cantoral y Farfán (1999), quienes establecen respecto a la problemática de la Matemática Educativa, que:

En la evolución del estudio de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente se introducen al sistema de enseñanza, les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan considerablemente las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesores.

Interpretación concordante, como ya se señaló, con la aproximación socioepistemológica, bajo sus cuatro dimensiones: epistemológica, sociocultural, didáctica y cognitiva, en la que estos componentes (cultura, lenguaje e identidad) atraviesan la problemática a investigar, por tanto, mejoran toda aproximación.

Hay que considerar pertinente examinar el proceso por el cual se construye socialmente la noción y el concepto de solución, en un ámbito general, como una manera de dar cuenta de los cambios que operan en las personas del sistema didáctico y cultural. Además, hay que localizar aspectos que intervienen en las representaciones, nociones y creencias asociadas al concepto de solución, proporcionando una explicación de las ideas que se encuentran ahí, dotándola de elementos que forman parte de la creación de la noción, de la constitución del concepto, de sus entendimientos y concepciones, trabajado en contextos matemáticos diferentes, sobre todo cuando es mirado bajo los cambios que se operan en el paso de un sistema sociocultural a otro, que median variaciones de los aspectos sociolingüísticos y del pensamiento en los que fijemos la atención, como pueden ser los marcadores lingüísticos y culturales de característica epistemológica.

I.2.2 Nivel y preguntas del proyecto de investigación respecto a la problemática

Lo anterior plantea mirar las interrogantes ubicándolas en tres diferentes contextos y estratos de investigación.

1° El que se refiere al sistema didáctico, donde salta a la vista explicar por qué las personas, a pesar de estar en grupos diferenciados proporcionan concepciones semejantes en relación con el concepto de solución, que se identifican por ser similares (estados similares).

2° En el supuesto de que en las respuestas a las entrevistas nos provean un conjunto de representaciones gráficas; por ejemplo, al momento de que se les preguntó si podían representar gráficamente sistemas 3×2 y 3×3 , contestaron dibujando respectivamente en el plano y en el espacio lo que para ellos significaba que el sistema tiene solución y no tiene solución. Se pregunta si en el uso que hacen, las representaciones en el plano y el espacio respectivo, obedecen a la presencia de obstáculos epistemológicos o didácticos, producto de la constitución de las teorías y áreas de la matemática que intervienen (Álgebra, Geometría, Cálculo, etcétera) o si son producto natural del proceso de generalización al pasar de una representación gráfica del plano a una representación gráfica del espacio de tres dimensiones o de otro tipo de construcciones en otros contextos.

3° ¿Tendrá que ver el uso reiterado de esta representación gráfica asociado al concepto de solución con la manera en cómo conceptualizan la noción de número y su proceso de construcción social y, por tanto, es consecuencia de cómo se fue construyendo desde los primeros niveles educativos dicha noción o bien corresponderá a otro tipo de aspectos que queremos identificar, como en el segundo punto?

4° ¿Hay algún fundamento teórico donde se instaló la preferencia sobre algún tipo de registro de representación o contexto considerado como el adecuado para que la solución se expresara y operara mejor?

5° ¿Las tendencias en la enseñanza de las matemáticas, qué lugar le han dado al concepto referido y qué rol se le ha asignado, como para que represente que las personas manejen adecuadamente la solución?

I.2.3 Preguntas de investigación

- ¿Por qué los docentes dan respuestas semejantes a las de los estudiantes, cuando se esperaría que éstas fuesen distintas? Porque las experiencias actúan modificando la representación de sus creencias y nociones, construidas durante su estancia en el sistema escolar, o ¿es que hay algún mecanismo sociocultural que actúa desde sus primeras construcciones que imposibilita su modificación, pues basta ver qué consideran que representa la solución, cuando se intersecan planos, dos a dos, en el espacio, lo cual hace sospechar que hay algo más?

- Este hecho, ¿tendrá que ver con reconocer, investigar y delimitar lo que hay en común de la solución en su pensamiento?, o ¿tiene otro referente?, por ejemplo, en la escuela secundaria la solución puede ser considerada como un número para una ecuación con una incógnita. Entonces, a nivel superior, ¿debiera tener un sistema de tres ecuaciones, tres números, correspondiente a tres puntos distintos de intersección de los tres planos como solución del sistema consecuente con el caso de intersección dos a dos?

- ¿Serán equivalentes las formas de intersección del plano con las del espacio en la creación de las concepciones de solución? Si es afirmativo, ¿qué aspectos hacen que sean equivalentes y qué aspectos no las hacen?, además, ¿cuáles de las concepciones son equivalentes y cuáles no?, indicando el sentido de la equivalencia que se identifica, por lo que en este conjunto de preguntas que se formulan se busca la posibilidad de reconocer la presencia de invariantes en la percepción y construcción de la noción y del concepto de solución, desde lo gráfico hasta lo numérico, donde no sólo importe el tiempo sino el contexto de uso que se haga de ella.
- Las formas que representan la solución en el plano, ¿tendrán que ver con las maneras de graficar en el salón o de construir con respecto a otros conceptos, u obedecen a otras formas de adquisición del conocimiento?
- ¿Cuáles son las rutas³, cómo los mecanismos que están presentes en estas formas del conocer y de expresarse sociolingualmente, que permitan explicar los cambios y las modificaciones de su manera de entender el concepto de solución, sobre todo porque varían en un mismo sistema sociocultural?

I.2.4 Justificación e interrelaciones del trabajo de doctorado

Cuando fueron localizadas las evidencias respecto a las gráficas coincidentes entre los estudiantes de bachillerato y los profesores de educación superior relativas a las situaciones gráficas que consideraban que representaban y asociaban a situaciones donde existía solución en sistemas de ecuaciones lineales 3×2 y 3×3 , reportados como uno de los aspectos que indicaban dificultades en las tesinas, motivó el estudio de las interpretaciones que le daban a la solución relativas a un contexto geométrico. En ellas las preguntas formuladas se referían a las dificultades que tenían y que enlazaban con las razones que los llevaba a concebir estas respuestas, buscando los aspectos cognitivos, la noción que manejaban a nivel de procesos mentales fundamentalmente para explicarlos, sin mirar en ese momento las razones que los movían para manifestarlo y de las posibles explicaciones de por qué ocurría esto. Las preguntas eran específicas en relación con los objetivos propuestos en las indagaciones: ¿Por qué consideran los docentes entrevistados que estas representaciones gráficas aportan ideas sobre la solución, o son la muestra de las situaciones de solución o no solución en el sistema? ¿Qué los hacía suponer, en términos de las ideas que subyacen en estas representaciones gráficas proporcionadas, la existencia de aspectos referidos a la solución? ¿Tendría esto que ver con lo que Sierpinski (1998) señalaba respecto de la presencia del obstáculo del formalismo en el sistema didáctico, que provocaba que las personas en los procesos de aprendizaje se enfrentaran de manera sistemática dentro del proceso con el obstáculo del formalismo o bien que fuese consecuencia directa del mismo? Por lo que se observó, esto llevaba a su vez a considerar que atendían a la estructura discursiva de la

³ Se considera como rutas al conjunto de explicaciones y argumentos que marcan tendencias de explicación en relación con un tema, o un concepto, que tienen un propósito específico, por ejemplo, resolver un conjunto de cuestiones.

matemática teórica —Álgebra Lineal—, más que al de la matemática escolar, dificultad ésta que a su vez no sería explorada en dicha investigación, debido a que las características de ésta no era de su competencia examinar, quizá para el futuro, para un proyecto de investigación más amplio como el doctoral. Examinar las prácticas discursivas operadas en el sistema didáctico, en el marco de explicación elegido con lo que Sierpínska señala acerca del carácter evolutivo de las matemáticas, como también el que esta evolución identificada parta de la consideración que presenta de manera secuencial tres modos de pensamiento, indicado por la autora y fundamentado bajo los juicios sintéticos de Kant, o este aspecto tendrá que ser reconceptualizado desde la perspectiva que sugiere Cantoral y Farfán (2000), de que el conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica, y por tanto hace notorio el reemplazo de una epistemía por otra, que supeditó el proceso de comprensión y exposición del desarrollo del concepto como una cuestión teórica, más que práctica, influenciando de esta manera el proceso de enseñar sin que se corresponda con el proceso de aprender —desprender su naturaleza práctica—, que transitan, en el caso de este concepto, bajo lógicas y estructuras de construcción y constitución distintas, por consiguiente, su implantación trataría de empatar su propia discordancia, agregando dificultades en la asimilación, manejo, etcétera, del mismo.

Sin embargo, cuando se observan las diversas representaciones que dieron los estudiantes y los profesores, se reconoció que creaban espacios comunes respecto a sus entendimientos y concepciones, aspectos que fueron analizados en la investigación y referidos como parte de las orientaciones que motivarían la continuidad de la investigación. Es posible sostener que permitieron considerar como evidencias sustanciales de las personas, en el plano R^2 y en el espacio R^3 , la pertinencia de desarrollar el proyecto de investigación titulado: “La Construcción Social del Concepto de Solución”.

Aquí las representaciones gráficas de estudiantes y profesores "coinciden", es decir, las representaciones gráficas elaboradas por los estudiantes mostraban lo que para ellos representaban las situaciones gráficas de solución o no-solución, dando idea de sus concepciones y entendimientos respecto al punto de interés. Ejemplo, la existencia de la solución cuando se intersectan dos a dos, las tres rectas en el plano, la existencia de la solución la localizaban en los puntos de corte entre las rectas que al mirar la gráfica tenían que coincidir con que se estaban intersectando “todas ellas” en un punto de referencia.

Al mostrar la regularidad en sus respuestas, correspondiente a haber proporcionado representaciones gráficas en el plano, tres rectas que se cortan, dos a dos en las que indican que representa gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones, se encontró en este hecho un nivel conceptual semejante, aunque representado gráficamente en un espacio de dimensión diferente a la que presentaban docentes entrevistados y muestreados. Con esto se señala la importancia de la regularidad exhibida, considerada como una evidencia fuerte que se percibía a través de lo que se observaba y además, porque era la manera en que respondían gráficamente los bachilleres. Había que pensar en ese primer acercamiento en la idea

de que presumiblemente se debía a que tenían en su mente la disposición gráfica proporcionada, pues es de considerarse que las representaciones eran la evidencia de su representación, a lo que se dio en llamar un estado de permanencia, más que persistencia.

Era plausible considerar la asección de Sierpinska (1998), acerca de si éstas devenían por posibles automatismos que desarrollan las personas al trabajar con los contenidos del Álgebra Lineal, y que en su pretensión de dominar el lenguaje, el contenido, las expresiones, los hacía realizar ciertos automatismos, aspecto que, como se marcó líneas atrás, hizo sospechar respecto a una supeditación de ámbitos de la práctica del aprender al de enseñar, sin observar que posiblemente ocurrían otros y de naturaleza distinta, como aquel de reconceptualizar el enfoque, el marco de referencia teórico e incluso metodológico.

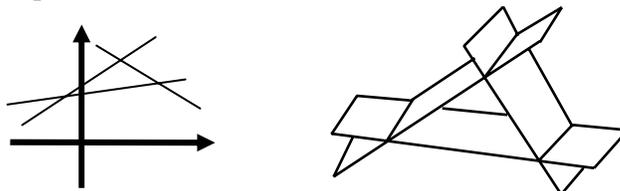
Había que elegir mientras tanto no se verificase en la investigación otro supuesto, como fijaciones mentales de representación gráfica de situaciones de solución y no-solución, parte de los automatismos desarrollados según dicho autor. Sierpinska (1998), amplía su concepto al señalar que lo anterior es producto de la presencia del obstáculo del formalismo⁴, que se creaba a lo largo del trabajo con los conceptos del Álgebra Lineal —su experiencia de trabajo—. También se consideró factible pensar en el contexto del marco de referencia que esta investigación estaba interesada en poner a prueba, para señalar que la situación podía ser una posible evidencia del estado en que se encontraban los modos de transitar del pensamiento, como de las dificultades experimentadas para pasar de una representación a otra, información que fue proporcionaba a través del reporte de las tesinas. Es decir, había que considerarlo una dificultad concreta.

Las representaciones se encontraban en un contexto gráfico —las respuestas—, motivo de interés del estudio. Es decir, se fortalecía la suposición de que permanecía algo en esta situación de representación gráfica, por lo que se pensó en su factibilidad —conservarse la respuesta—, tomando en cuenta el espacio que se comparte y las entrevistas, como la del punto dos, que se había considerado su representación producto de la casualidad, sin embargo no era así, había algo más en la información proporcionada por los alumnos de bachillerato que los autores no analizaban en las entrevistas de los trabajos mencionados y que seguramente tenía que ver con la manera de interpretar el concepto de solución a la luz de sus diferentes representaciones, se creyó que la situación no era fortuita y, además, la exponían docentes entrevistados, aspecto que sería considerado para someterse a prueba.

Ello llevó a establecer un criterio que permitiera organizar y clasificar las categorías de representación gráfica proporcionada por los entrevistados —estudiantes y profesores—, y de ahí generar una categoría más general que respondiese a los intereses de esta investigación, lo que se encontraba de manera

⁴ Para Dorier, el significado de obstáculo del formalismo corresponde a la insuficiencia de los conocimientos anteriores en lógica y teoría de los conjuntos elemental, el cual contribuye a la producción de errores en Álgebra Lineal.

frecuente bajo una metáfora que permitiera generar un criterio de la búsqueda de lo común en las interpretaciones de la solución en un contexto gráfico, asociado a los objetos geométricos —rectas y planos— de ahí que se clasificara lo que sería sometido a prueba en las entrevistas, particularmente en un contexto gráfico como el que aquí se proporciona:



En donde la representación gráfica de la derecha los docentes la consideraban como una gráfica que mostraba la solución del sistema y, al examinarla, se consideró que tenía similitud con una de las mostradas por los estudiantes de bachillerato, nada más que esta gráfica se encontraba en el espacio de tres dimensiones, pero en esencia concernía a una característica común a ambas, por tanto establecía de manera natural el espacio común de conceptualización a pesar de ser niveles de educación, instituciones, funciones, lugares y personas diferentes, que se hizo sustancial al someterse a prueba como aspecto central de una investigación anterior (Guadarrama, 2000), fundamento del presente proyecto de investigación doctoral. Como ya fue señalado, compartían algo en común, la regularidad de sus respuestas; los estudiantes de bachillerato: tres rectas que se cortan dos a dos, en las que indican que representa gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones y, la intersección dos a dos de los planos en el espacio de tres dimensiones, en los profesores. El nivel conceptual era semejante, aunque representado gráficamente en espacios dimensionales diferentes, para estudiantes del nivel medio superior y para profesores de educación superior. De ahí también la denominación ideada de la permanencia de la respuesta y de la representación gráfica en la solución de un sistema, quedaba pendiente la verificación o no de lo que el director del proyecto llamó más que permanencia, una persistencia.

De esta manera se detectaron dos situaciones, correspondientes a lo que consideraban los entrevistados acerca de las situaciones que se pueden dar en relación con el concepto de solución mediante las representaciones gráficas proporcionadas por ellos, lo que requería estructurar la investigación en términos del estudio del establecimiento de sus entendimientos y concepciones, además de la identificación de lo común, relativos a la solución en sistemas de ecuaciones o bien en un contexto más general.

Poco a poco la inquietud respecto a la problemática creció en una extensión mayor y, desde luego, el estudio de la misma debía incrementarse en relación con lo que en ese momento se creía, en correspondencia con la indicación señalada en un trabajo previo (Guadarrama, 2000), donde se formulaban reflexiones y elementos de análisis que hablaban de aspectos que, entre otros, remitían a aspectos como los objetivos que se perseguían, las preguntas que debían formularse, asimismo el marco

teórico a considerarse; ello conducía a prever, además de las necesidades específicas de la investigación, que debían dejarse muchos de los aspectos que remitían a la esencia de una problemática sin cabida en un proyecto como éste.

Respecto al marco teórico del trabajo la decisión fue que, debido al tipo de datos derivados de las tesis, el conjunto de evidencias aportadas e interpretadas luego de la utilización de las ideas de Sierpinska (1996) y el análisis de las diferentes interpretaciones que le dan al concepto de la solución en sistemas de ecuaciones lineales, debían ser motivos principales para la elección de éste, sin olvidar también los aspectos referenciados en la literatura relativa al tema. Por ello se consideró como marco teórico lo expuesto en el artículo "*Synthetic and Analytic Modes of Thinking in Linear Algebra*" de Sierpinska (1996), visión concordante sobre los modos de pensamiento, su clasificación y cuanto los distingue, la cual parte de que en la evolución de las matemáticas se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento: Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural.

Al ser objetos de observación estos conceptos quedaban sin explicación otros aspectos, como: el porqué de las prácticas educativas, culturales, discursivas que se observan y que están atrás de los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular de los entendimientos y concepciones relativas a la solución como a su proceso de constitución en un contexto más general, producto de una investigación ya mencionada (Guadarrama, 2000); no verla limita la visión sobre las explicaciones que debieran ofrecerse en relación con lo que al parecer resulta contradictorio: que los profesores reconocieran en la intersección dos a dos de los planos como una situación de solución. Esta otra perspectiva apela a una amplitud de entendimientos y concepciones, como aceptar que la solución es una construcción social, aspecto central y tema que motiva al presente proyecto doctoral, por lo que atendiendo esto, ante los desafíos de nuevas explicaciones, era necesario elegir otro marco de referencia que permitiera sostener una nueva línea de argumentación y de entendimiento ante la profundidad de estas inquietudes presentes en la investigación.

De ahí que la aseveración de que *en la evolución de las matemáticas se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento: Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural*, limitaba las explicaciones. Sobre todo cuando hay evidencias, como las que señalan Cantoral y Farfán (2000), al sostener la tesis de que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social asociada con el grupo socialmente establecido y que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica, en el que las nociones matemáticas no necesariamente vienen de las abstracciones sucesivas y generalización de los empíricos. Esta visión —que posee una orientación sociológica, dicen los autores— fue extensamente desarrollada durante todo el siglo XVIII, promotora de una visión que permitirá consolidarse como un paradigma socialmente válido basado en la metáfora "agua que fluye", situado en una dialéctica del uso y el símbolo, es decir, entre la actividad y el objeto. Dicha teoría da cuenta de una concepción alternativa sobre una epistemología que difiere de la que hoy en día se enseña en los salones de

clase⁵; ésta plantea la búsqueda de predecir la evolución de dichos fenómenos que se desean estudiar, llamándolos “fenómenos de las fluxiones continuas”.

Es cierto que esta consideración ponía en dificultades complicadas de sostener, las explicaciones que motivaron esta investigación, presentes en el presente proyecto doctoral; por ejemplo, por qué considerar esta formulación del estudio del mismo desarrollo histórico como proponen Cantoral y Farfán (2000), que además ante lo que han sostenido sobre la documentación y sus evidencias, ha sido parte del reemplazo de una visión epistemológica alternativa. El Álgebra Lineal es una rama de las matemáticas que no está exenta de esta visión.

Otros aspectos con los que tampoco hay coincidencias, por lo que requieren nuevos juicios o consideraciones ampliadas, pero que aquí sólo se señalan son:

- ... “la evolución del Álgebra Lineal inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico”.
- ... “Tomados desde una perspectiva muy general, podrían distinguirse, en esta evolución, dos grandes pasos referidos a dos procesos: uno, la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n ; el otro, la desaritmetización del espacio o su estructuralización, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas” (Sierpinska, 1996).

Sin embargo, después de llevar a cabo la investigación y luego de reflexionar este conjunto de experiencias, datos e interpretaciones obtenidos, hubo que efectuar un cambio de percepción de la problemática, pues en el fondo lo que se buscaba era responder a preguntas que provenían necesariamente de las concepciones y los entendimientos de las personas del sistema didáctico, ratificado por los resultados obtenidos en la investigación para obtener el grado de maestro.

¿Cuáles eran los resultados que apoyaban la continuidad del proyecto y la contundencia de la justificación para realizar el proyecto doctoral? A continuación serán enunciadas, pero, es pertinente decir que aparece como una necesidad crear un nivel superior de articulación que permita ofrecer nuevas y renovadas explicaciones ante esta problemática⁶:

2) Casi todos trataron de relacionarlo con las ecuaciones, unos llegaron a escribirlas de manera general, otros trataron de idearlas, otros las llamaron durante la

⁵ Refiriéndose al binomio de Newton, como una entidad emergente en el sistema de prácticas socialmente ligadas a la solución de un tipo de situaciones que expresan una necesidad de construir una noción de predicción, que a su vez es construida por las experiencias diarias de los individuos – poder predecir– del cual irá tomando, así dicen los autores referidos, la forma abstracta del concepto de función analítica.

⁶ Se emplea el orden de cómo se obtuvieron en la Tesis de Maestría, Guadarrama (2000), relativas a lo que se esta tratando

entrevista *pensándolo matemáticamente* (característica que hace referencia a prácticas lingüísticas y discursivas).

3) Todos los entrevistados indicaron que *así fue como lo vieron en el curso de Álgebra Lineal*, tres de ellos manifestaron que llevaron el curso con uno de los docentes entrevistados (referencia a prácticas educativas, de docencia y culturales o escolares).

4) A cinco de los seis entrevistados, les costó trabajo pensar en los *coincidentes*, por ejemplo los casos de tres rectas coincidentes, dos rectas coincidentes y otra paralela a ellas, tres planos coincidentes, dos coincidentes y uno paralelo: “...se pegan, aún así no hay solución, la diferencia es muy pequeña, están pegaditas...”, o “...según esto, aquí hay dos rectas iguales, son dos rectas paralelas por decirlo así...”, se refiere a la línea coincidente por línea doble, señalando a pesar de estar pintadas una sobre la otra, son dos líneas, no una, “...no tienen solución porque están en forma paralela las tres líneas rectas”. Distinguen “que a pesar de estar empalmadas una sobre la otra deberían estar separadas aunque fuese una distancia muy pequeña”. Para indicarlo tuvieron que recurrir a sus experiencias cotidianas como “juntitas como las tortillas”, a pesar de estar empalmadas había una cierta distancia entre ellas, diciendo ambos que no había solución, en el caso de los planos trataban de asociar ecuaciones, así se refirió: “multiplico por 2 la ecuación que es una recta empalmada, doble” Lo pensaron mucho, aun cuando el observador los auxilió diciéndoles que los planos o rectas eran *coincidentes*⁷, consideraron que a pesar de estar muy juntos estaban de manera paralela, sin tener contacto entre ellos (remite a prácticas socioculturales, discursivas, lingüísticas, y escolares).

6) Algunos de los entrevistados, al explicarles la pretensión de pensar las gráficas como representaciones asociadas a los sistemas de ecuaciones, sobre todo en tres dimensiones, pensaron que cada plano estaba determinado por 3 ecuaciones, con 3 incógnitas. Numéricamente la cantidad de soluciones fueron múltiplos de tres, correspondientes al espacio. Ante la pregunta: ¿Por qué tres?, interpretaron: “Por tener tres dimensiones el espacio en principio”; el discurso matemático señala que los objetos geométricos del espacio son descritos por medio de tres incógnitas o variables. En el caso de las gráficas referentes al plano, la cantidad de soluciones fue de uno, dos y tres, dependiendo de la cantidad de cruces que presentaron dichas gráficas (remite a los entendimientos y concepciones respecto a la solución, además de que establece relación con prácticas educativas).

7) Casi todos ellos, cuando señalaban la solución, la referían como: un punto, una recta —objetos que veían en las gráficas—. En ambos la llamaron *una solución*, generalizando de dos a tres dimensiones en una forma sintético-geométrica, no en forma analítica, añadiendo que trataban con esta forma de distinguir la solución única. Asociaban intersección o cruce con algo, entonces cuando no se intersecaban

⁷ Encontrando regularidad en lo sociocultural propuesto por Guadarrama (2001), en relación con el lenguaje empleado, allá *sustituyan*, aquí *coincidentes*, actúan como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en un determinado discurso.

los planos, las rectas, la situación gráficamente no tenía solución (remite a los entendimientos y concepciones respecto a la solución, además que establece relación con prácticas educativas).

8) Cuando se les pidió que dieran la definición de solución no encontraban cómo precizarla en términos de la definición; unos indicaban una solución (lo que ya líneas atrás fue reflexionado), que era un punto, una recta, y otros con valores, por lo que ante esto reestructuraron la definición en el sentido de la sensación de que la conocían, sea porque la han frecuentado o por su paso en los diferentes niveles escolares. De ahí que gráficamente hay una tendencia a considerar que es otra cosa, pero no la ven como el otro lado de la misma moneda, es decir, que la analítica expresa una relación con la gráfica, son dos cosas que dan unión y organización al concepto tratado (remite a los entendimientos y concepciones respecto a lo que es la solución, además establece relación con prácticas educativas).

Lo *singular*, por contundente, es el estudio del porqué mirar la situación de solución como todo aquello que se intersecta, ya se vio que fue condicionante para la indicación “tiene solución o no tiene solución”, como fue el caso de la intersección dos a dos de los tres planos que la consideraron la solución. Cómo se da este proceso de construcción social de la solución, cómo se establecen los entendimientos y concepciones referentes a este proceso, sobre todo cuando son sometidas en tensión con el discurso matemático escolar que se emplea para su transmisión.

Otro tipo de resultado fue una regularidad en lo sociocultural expuesto, por ejemplo, en la relación del lenguaje empleado, como *coincidentes*, *sentido de intersección*, *empleo de un lenguaje analítico*, *formalidad lógico estructural con que se trabaja*, etc., que actuaron como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en el discurso (remite a prácticas socioculturales, discursivas, lingüísticas, escolares).

Debido a todos los aspectos aquí señalados, hay elementos y consideraciones suficientes que justifican la pertinencia del proyecto de investigación doctoral. Plantear como aspecto principal: *investigar la construcción social de la solución* como una posible forma de dar respuesta a las inquietudes aquí manifestadas, por ejemplo, del porqué la intersección gráfica de rectas o planos juega un papel en la conformación de los entendimientos y la conceptualización de la solución o del por qué adoptan prácticas discursivas que contienen elementos externos —socioculturales, lingüísticos e identitarios— al ámbito escolar y fuera de él, que las personas establecen cuando trabajan con la solución.

Un segundo punto de interés se refiere a la fortaleza de la postura de investigación frente al proceso que aquí interesa estudiar y cómo otras aproximaciones, a pesar de que se usan como marcos que consideran lo cultural, no alcanzan desde lo metodológico y desde la robustez de los resultados, ofrecer explicaciones articuladas del fenómeno que aquí interesa indagar, es decir, no responden la siguiente pregunta: ¿cómo se da este proceso de construcción social del concepto de solución en sistemas socioculturales concretos?, a) en donde no sólo lo

histórico es lo que interesa documentar, sino también lo referente a su articulación dentro de los sistemas de cultura que se desarrollan, como lo es el sistema cultural de nuestro país, y que se considera que ayudan a impulsar los aspectos históricos más allá de las necesidades de la documentación meramente histórica y permiten recuperar el sentido de lo epistemológico en su verdadera esencia, lo cual presupone un proceso de aproximación sistemático; *b*) como un segundo aspecto, acercarse a la problemática desde la construcción sociocultural, pues ello penetra nuestro sistema didáctico nacional, por lo que una segunda tarea consiste en abrir, a través de los contrastes, la formulación de elementos teóricos y referenciales que articulen desde la postura de la socioepistemología la explicación del cómo se efectúa este proceso de construcción social. Para ello se ha recurrido, como punto de inicio, a la caracterización en comunidades socioculturales específicas donde se da esta movilidad social y cultural de sus referentes y, de esta forma, posiblemente percibir los hilos conductores que organizan y articulan la elaboración de los conceptos matemáticos que den fe de la construcción del razonamiento matemático. De ahí que es necesario desarrollar este proceso constructivo, a la vez que dé sentido en la formulación y articulación de la problemática que el presente proyecto doctoral investiga; *c*) el desarrollo del proyecto doctoral busca proveer subproductos que puedan proporcionar elementos que permitan diferenciarse en relación con otros enfoques teóricos y metodológicos, puesto que el problema tiende a considerar la construcción de conocimientos en una comunidad determinada, dado que existen otras posturas de investigación, aquí se pretende dilucidar cuáles de los elementos de esta postura conforman una visión coherente para la problemática presente, su investigación y la naturaleza de ésta, al mismo tiempo que contrastar los resultados para la determinación apropiada de su uso en el trabajo de la enseñanza de las matemáticas.

Ello requerirá reconceptualizar lo sociocultural, a través de entrevistas con distintas personas en sus especialidades (sociólogos, antropólogos y un lingüista) para interpretar y caracterizar los diferentes aspectos que se manifiestan en torno de una colectividad cultural insertada en un medio educativo, en la que median las interacciones sociales producto de las relaciones sociales que se establecen dentro y fuera del salón de clases, y explicar cómo se constituye y moviliza la personalidad social de un colectivo, que para este caso ha sido caracterizado desde lo sociocultural como colectivo escolar cultural.

No obstante, para poder desarrollar esta caracterización de la movilización de la personalidad social del colectivo cultural escolar, se ha elegido un conjunto de grupos escolares ubicados en una de las comunidades que manifiestan fuerte identidad étnica en el estado de Oaxaca, con la finalidad de incorporar un aspecto relevante que permita explicar las inquietudes al respecto: la descripción del proceso de construcción social del concepto solución y las nociones que se desarrollan en este proceso constructivo, además de culminar la tesis de doctorado. De ahí que el desarrollo del proyecto implique la necesidad de documentar esta experiencia y que posibilite los siguientes objetivos:

1. Realizar un escrito que permita caracterizar y dar sustento de una situación, que se conforma y visualiza como del estudio de un sistema sociocultural.
2. Desarrollar la habilidad de reconocer los aspectos esenciales relacionados con un sistema sociocultural, mediante el desarrollo de la sensibilidad de reconocimiento del mismo.
3. Aportar elementos que enriquezcan la postura socioepistemológica como una aproximación más consistente y robusta para el estudio de los sistemas socioculturales y, por consiguiente, de la investigación en matemática educativa.
4. Establecer las relaciones necesarias en los diferentes niveles educativos con lo sociocultural, para dar idea del cómo se va conformando este proceso de construcción social del concepto de solución en el sistema educativo nacional, mediante el conjunto de explicaciones y argumentos en el contexto sociocultural que articulen al menos una tendencia reconocible que explique este proceso constructivo, respecto a los conceptos: elementos como expresiones lingüísticas, marcadores de espera, contextos culturales situados, sistemas conceptuales complejos, etcétera, elementos que hacen posible delinear los mediadores que intervienen.

Lo anterior tiene la finalidad de reconocer en el sistema didáctico actual los elementos que se encuentran cruzados por componentes socioculturales en relación con la solución en distintos contextos, que permiten testimoniar dicho proceso social de la constitución en el pensamiento del sujeto, pero, además, como un proceso de construcción social donde el componente sociocultural aporta elementos significativos para su caracterización, organización, articulación y que esto permita generar categorías de análisis en el diseño experimental elaborado en su momento.

Para la consecución de lo anterior fueron necesarias visitas de campo y de trabajo a Juchitán y a otras poblaciones del Istmo de Tehuantepec, Oaxaca, pues había que ampliar las discusiones iniciadas, además, formular los registros indispensables entre un conjunto de estudiantes de la región del nivel de secundaria, bachillerato y del Subsistema de Formadores de Docentes y personas caracterizadas de las localidades (campesino, mecánico de un taller, sastre, cantor popular, etc.) para identificar entre ellos esos aspectos que tienen que ver con el concepto de solución en un ámbito sociocultural amplio, desgranándolo y vinculándolo con los cambios que experimentan en los niveles educativos (primaria, secundaria, bachillerato y superior).

Otro aspecto relevante de este primer nivel de interrelación tiene que ver con la consideración prudente de implantar una forma de aportar elementos significativos al análisis del sistema sociocultural, sobre todo porque media un componente dentro de esta dimensión sociocultural que establece la relación entre los mecanismos y que, por las características iniciales del sistema sociocultural, estará afectado por aspectos sociolingüísticos. Por lo que la incorporación del análisis del discurso es prudente, ya que posibilita conocer aspectos metodológicos y teóricos del mismo; acercarse desde esta perspectiva para reconceptualizar lo sociocultural puede proporcionar información valiosa, ya que cuanto sucede de manera cotidiana en el ámbito

educativo general y en particular el que refiere al concepto de solución, investigarlo, siempre es interesante. Así, dicha herramienta:

1) Precisa aquellos aspectos que proveen información adicional y documenta la investigación doctoral presente, en el momento de desarrollar un diseño experimental.

2) Aporta mayores evidencias del proceso de construcción social del concepto a indagar, visto a través del sistema cultural que conforma el sistema didáctico nacional, respecto a las formas socio-lingüísticas que adopta la construcción social del conocimiento en el sistema sociocultural identificado como de fuerte componente étnico, además de reconocer las posibles diferencias y variaciones con las que se manifiesta la noción de solución en los procesos de construcción del concepto, mediados por las formas sociolingüísticas que se adoptan para dar secuencia de las modificaciones, es decir, de las transformaciones que experimenta el sistema sociocultural cuando se entronizan por los aspectos de la enseñanza de las matemáticas, así como del concepto de solución, y aporta pautas de cómo evoluciona en sistemas diferenciados, es decir, marca las rutas⁸ que establece el funcionamiento de los sistemas culturales en las transformaciones y modificaciones que experimenta el concepto de solución en diferentes contextos matemáticos.

3) Identifica rutas, caminos referentes al conjunto de explicaciones y argumentos que marcan tendencias de explicación en relación con un tema o un concepto con un propósito específico —por ejemplo, resolver un conjunto de cuestiones—, así como los mecanismos que están presentes en estas formas del conocimiento y de expresión sociolingüística, que permitan condiciones para efectuar un primer diseño de una situación didáctica que se empleará para verificar si los aspectos hallados con el estudio de los sistemas culturales se cumplen en estas búsquedas que los investigados hacen.

En el ámbito del análisis del discurso se considera, por ejemplo, que elementos como las muletillas, de empleo frecuente en el discurso escolar, no son tales, que más bien llegan a actuar como marcadores de espera, de continuidad. Desde esta perspectiva se tiene un mejor nivel de aproximación y saber acerca de cómo se encuentra y trabaja el discurso en el proceso de formación y de configuración de la personalidad compartida de un colectivo, a la vez que da una idea e imagen mejor del proceso de construcción social, así como de la identidad cultural profesional, al menos de los conocimientos compartidos entre los docentes y los alumnos, por tanto, es un discurso matemático escolar y cultural, en consecuencia, el análisis del discurso es un referente obligado en esta constitución de lo sociocultural, pues ello da idea de

⁸ Se considera como *rutas* al conjunto de explicaciones y argumentos que marcan tendencias de explicación en relación con un tema o un concepto, cuyo propósito específico, por ejemplo, es resolver un conjunto de cuestiones.

la influencia de la conversación en la disciplina y del grado de construcción alcanzado por la comunidad.

Esto último es considerado muy valioso para precisar la constitución de lo sociocultural, al hacer un análisis del discurso en los sujetos que conforman este colectivo escolar cultural y proveer explicaciones suficientes en el ámbito del discurso del colectivo escolar cultural, motivo de las visitas de campo.

1.2.5 Objetivo general

La presente investigación doctoral se propone dar respuesta a las interrogantes hasta aquí formuladas, ya que entre algunos de los aspectos de interés resalta el de realizar un análisis histórico, y luego de su revisión proporcionar posibles explicaciones a partir de la consideración de los ejes epistémicos, didácticos y cognitivos que hubiera que desarrollar para conocer el proceso de construcción y formalización de la noción y concepto de solución en contextos matemáticos distintos, como el correspondiente al de la solución en los sistemas de ecuaciones lineales.

Así, a través del estudio del proceso de construcción de la noción y del concepto de solución, mediante el uso de las representaciones gráficas, nociones y creencias asociadas a la solución en sistemas, ecuaciones etc., en esta investigación se pretende mostrar:

1° La determinación de los hilos conductores, desde lo sociocultural, que permiten organizar y crear significados respecto a la noción y el concepto de solución —existencia y desarrollo de cierto eje central que acciona y organiza la creación de significados en el pensamiento.

2° Que las concepciones elaboradas por los sujetos del sistema didáctico están relacionadas con procesos de construcción de las teorías matemáticas como del Álgebra, Álgebra Lineal, particularmente en lo que tienen que ver con la solución.

3° Que dichas concepciones se entrelazan con la construcción de otros conceptos a lo largo de la estancia en el sistema educativo (número, igualdad, etcétera).

4° Que la construcción del concepto de solución obedece a un proceso social de construcción del concepto y, por tanto, sus derivaciones, en el plano de lo didáctico y cognitivo, tendrán que ser contempladas en toda aproximación sistémica, dichos mecanismos deben ser considerados como un aporte al descubrimiento de los mecanismos de construcción del conocimiento, basados en un conjunto de prácticas sociales y culturales que gobiernan dicho proceso, al cual en esta investigación se le denominará *de correspondencia con el horizonte de racionalidad vigente*.

5° Que permita mejorar el entendimiento de los mecanismos idóneos de su apropiación, lo cual redundará en la formación de mejores ingenieros, científicos y profesores en el futuro próximo.

1.2.6 Hipótesis de trabajo del proyecto doctoral

Las personas crean, desarrollan nociones, concepciones, creencias, representaciones gráficas, experiencias, prácticas discursivas relativas al concepto de solución por una

necesidad de buscar y dar significado al concepto producto de su interacción social en el sistema sociocultural y educativo, lo cual establece los referentes externos de la matemática e inscritos en la cultura. Esto crea una primera base de significación mediante el juego de formas culturales, identitarias y lingüísticas, que le permite a los individuos articularlo en el momento de resolver situaciones problemáticas, por ejemplo, problemas matemáticos, es decir, de correspondencia muy estrecha con el horizonte de racionalidad vigente.

Esto coloca a las personas ante horizontes de racionalidad gestada con anterioridad en su proceso de formación, horizontes de racionalidad que se enuncian con la finalidad de alcanzar la razón más elevada, exigencia epistémica de la racionalidad/modernidad que producen desplazamientos epistémicos en las personas, o lo que se le llamaría aquí *entrecruzamientos epistémicos* que enuncian a través de sus discursividades el horizonte vigente.

Pero, éstos a la vez se contraponen con los horizontes de racionalidad asimilados, produciendo desplazamientos en el nivel del lenguaje científico al del lenguaje de uso. Este movimiento de la razón epistémica detiene los procesos de asimilación de las discursividades de la matemática contemporánea, añadiendo dificultades cognitivas y didácticas en el proceso de construcción del concepto de solución en las personas, por tanto, el carácter epistémico de las mismas.

Estos conceptos que se involucran por dentro y por fuera del aula, en muchas ocasiones aspectos culturales y linguales que se presentan en el salón, encuentran regularidad con lo sociocultural (Guadarrama, 2001), como una manera que crea entendimientos en el lenguaje empleado de uso y que actúan como marcadores de prácticas discursivas, culturales e identitarias que potencian o entorpecen la comprensión del significado en un determinado discurso y su momento. Ello establece variaciones en los entendimientos y concepciones que intentan responder a la tensión que se produce con la definición y con el concepto de solución:

- donde ellos pautan cambios y las variaciones que han actuado sobre los conceptos, mediante mecanismos y formas culturales y sociolingüísticas, producto de las modificaciones culturales, identitarias que operan en la transformación del mismo,
- su regulación determina los cambios operados en la transformación de noción a concepto, haciéndolo de tal manera que se estable en su pensamiento, lo que a su vez determina el grado en que han sido modificados, aunque incluso pueden ser contradictorios, sin que por ello tenga que desecharlos.

CAPÍTULO II
MARCO DE REFERENCIA

*Nosotros no hemos pedido
que sepan quiénes
somos.
Estamos trabajando por
que sepan de qué somos*

II.1 Consideraciones geopolíticas del conocimiento

Se inicia esta sección considerando la asección de J. González (2003), quien señala: “Enseñar es ayudar a reformular la realidad cotidiana”; éste parte a la vez de la inquietud que le produjo uno de sus alumnos al término del curso. Al respecto esta investigación considera necesario insertar el tema y el caso aquí para formular argumentaciones desde diversos autores y referencias que permitan justificar la necesidad de un nuevo mirar que contemple a ese otro negado en la realidad por la misma racionalidad/occidental/modernidad: el alumno. No es sólo pues una actitud y postura desde la investigación que intenta reivindicarlo desde una matriz cultural negada en el espacio-tiempo y que expresa su otredad de la realidad, en esta relación del conocer sobre los problemas que hoy enfrenta la racionalidad/modernidad frente a los aprendizajes y enseñanzas de las matemáticas en países de la periferia, como lo es México, sino que también es para dar voz a ese otro que los universalismos abstractos han desplazado a la periferia o que incluso no lo consideran ni en la periferia, como es el caso en Levinaz, que considera que está colocado en la periferia un grupo de pueblos con cierta filiación histórico religiosa, pero que no reconoce en esa constitución de la periferia, por ejemplo, a los pueblos pobres de América Latina y los mestizajes que produjo, en su idea por alcanzar bajo estos universalismos progreso en la razón, dejando a estos mismos pueblos *sin voz, sentido y carne*, o simplemente dejados de lado respecto a la totalidad, que por otro lado constituyen las personas que aprenden y enseñan en este continente.

Ahora bien, la intencionalidad aquí expresada surge y se hace más visible cuando en la necesidad de insertar ese otro conforma un aspecto de la realidad, sujetos no sólo de carácter social histórico y político, sino seres humanos de carne y hueso y que a pesar del desplazamiento por parte de esta racionalidad/modernidad negadora, luchan por existir y porque se les considere en este mundo hecho y reducido por una de las visiones que se impuso como dominante y hegemónica, contraviniendo incluso su propia visión: ser universal. Concepción que olvida o desentiende ese fin para el cual fue creada, ya que ser universal implica dar cuenta de la diversidad y la pluriculturalidad de la realidad misma, es decir, de la relación compleja y acomplexada a través del espacio y del tiempo, de su misma constitución y construcción social de la realidad y del conocimiento. Por lo que estos universalismos no serán tales si no logran expresar esa diferencia social histórica, cognitiva y epistémica, que subyace en la realidad, sin subsumir la realidad en ninguna de sus partes.

En esta dirección, la argumentación que se intenta enunciar en este documento considera pertinente crear el sentido epistémico a partir de la formulación de la pregunta y, desde luego, la respuesta que se elaborará al respecto: ¿por qué es importante hablar de la construcción social del conocimiento en el proyecto de investigación doctoral?

La respuesta se construirá a partir de la consideración de J. González (2003), quien señala entre otros aspectos, que en la sociedad del conocimiento actual

determina el presente y futuro de las personas, luego entonces no es problema de elección sino de determinación socio-económica, añadiéndose, también, del carácter cultural asumido. Luego expresa el autor: “la responsabilidad social e institucional se potencia lógicamente de acuerdo con la justicia distributiva imperante, que si se observa deja o promueve aspectos, temas e intereses en relación con sus intereses inmediatos y a largo plazo”, por lo que en esta sociedad del conocimiento a que hace referencia, para que sea considerada universal, no será tal, ni lo expresará, si no está presente y representado en esta sociedad el excluido, el otro, el de la periferia, el marginado de la totalidad. De ahí que éste no expresará ni el presente ni el futuro de las personas, mucho menos de los pueblos que conforman esta sociedad del conocimiento universal, convirtiéndolo a la vez en injusticia distributiva para esos mismos pueblos y personas negadas, que a la par le impone renovar su realidad imperante ya señalada y por tanto asumir su exclusión, parcializando su realidad y su conocimiento. Niega así y en paralelo la pretensión de expresar la universalidad que dice expresar.

El mismo autor establece: “no hay elección sin razón, pero el uso de ésta implica un costo y una construcción, acción consciente que implica la realización de la responsabilidad, y el costo de la permanencia al lado consecuente de la elección; por consiguiente, se produce la relación conciencia-responsabilidad-libertad” y, habría que decir también, conocimiento.

Ahora bien, el autor, desde la reflexión propone asumirlo como una gran responsabilidad, decidiendo para ello compartirlo para posibilitar la visualización de nuevos horizontes en la práctica docente, que implica ayudar a comprender y explicar la realidad social por medio de la construcción de una teoría social integrada, y descender al análisis de la realidad concreta, utilizando teorías intermedias y operativas como la sistémica.

En ese sentido establece que se conforme la división del conocimiento por grados, los cuales van desde las nociones, los conceptos y categorías; sostiene que en estas últimas radica el conocimiento epistemológico; esto es que quien reflexiona e intenta explicar no sólo fenómenos, datos o procesos, sino trascender los conceptos, pretende entender y explicar la esencia de la realidad y el conocimiento de la misma.

Las nociones la colocan en un primer nivel, moverse en lo descriptivo de las apariencias u *óntico*, en el caso de los conceptos u ontológico, es explicativo en términos de funcionamiento o estructuras, y en cambio en el de las categorías es epistemológico, que explica el ser-conocer integrados, el sujeto-objeto en su relación transformadora y transformativa.

Sin embargo, para J. González (2003), “lo anterior se rompe históricamente en el momento de la revolución científica galileana o mecanicista”, en la que “lo importante no es ya el conocer sino el dominar”, por medio de la aplicación de ese conocer para controlar, diríase, inicialmente la naturaleza, pero que desvió su intención y que hoy no sólo atañe a la naturaleza sino también al ser humano, en particular a ese otro llamado marginado, excluido, colocado en la exterioridad del sistema mundo moderno. No porque sea así “la naturaleza”, sino porque ha querido verse así a la misma naturaleza, porque ha convenido, para el logro de estos fines,

verla de esta manera, desde luego desprendida del ser humano, desprendida de la otra parte del ser humano, el humano negado, excluido, marginado, es decir, la naturaleza sin el ser humano.

Pero ¿cómo consigue ese desprendimiento de la naturaleza humana la racionalidad/modernidad? Mediante escuelas del pensamiento que han tratado de explicar el conocer y que, a pesar de que son diversas, la tendencia general ha sido sostener dos axiomas: el de Parménides de Elea, que sostiene el principio de la identidad, o sea, que “lo que es es y lo que no es, no es”; esto significa que algo no puede ser y ser al mismo tiempo. Y el de Heráclito de Efeso, que sostuvo que “la contradicción es la base de la realidad, sus objetos y sujetos están en perpetuo cambio”; esto significa que las cosas son y están dejando de ser en el mismo instante, que la realidad, sus objetos y sujetos, están siendo y dejando de ser en el mismo instante, y que la realidad es dinámica por esa lucha procesual.

Sin embargo, a pesar de haber constituido posturas diferentes dentro del sistema mundo moderno, se hermanan en el no reconocimiento explícito —no otorgándole voz a lo diferente o no reconociéndolo que es de carne y hueso a lo que aquí se le denomina otredad—, creando ficticiamente oposición al reducir todo a la existencia de estas dos posiciones en lucha que sustentan universalismos abstractos. Lo que genera en esta ficticia lucha —donde no existe la otredad en el sentido geopolítico y por tanto en el sentido del conocimiento—, dos principios que se consideran opuestos¹: la perspectiva idealista, que sostiene que el conocimiento nos viene de las ideas puras, conforme Platón y su *alegoría* de que el hombre sólo logra ver las sombras de esas ideas al pasar por una caverna iluminada y, la otra, la perspectiva materialista, que sostiene que el conocimiento es elevarse de lo abstracto a lo concreto, de lo simple a lo complejo y siempre de lo menor a lo mayor, es decir, lineal y acumulativo.

Pero, en el fondo, ambas perspectivas niegan la otredad, pues se postulan por dentro del sistema, para los de adentro y sus fines, y de ninguna manera reconocen a los que han colocado fuera de él, que también son parte del todo. Es singular el hecho de que ambos se hayan proclamado universales sin considerar a la universalidad en su totalidad, es decir, privilegiando la inclusión, en vez de la exclusión, como se establece bajo el conjunto de restricciones que se imponen en cada nuevo horizonte de racionalidad que se crea.

Y precisamente esto es convertir este aspecto en un asunto ontológico, transformando la relación de conocimiento, es decir, empleando la división que señala J. González (2003) para indicar que la acción que se emprende es: regresando el conocer, el entender, así como el explicar, al segundo nivel de la realidad, al plano de los conceptos, el conocimiento de la misma y decir que se encuentra en el tercer nivel que caracteriza lo epistémico, que explica el ser-conocer integrados, el sujeto-objeto en su relación transformadora y transformativa, he ahí la trampa.

¹ Enajenación de la negación y de la lucha de los contrarios.

En otras palabras: decir (enuncia) que es epistemológico —colocación desde el plano de las discursividades en el tercer nivel— y hacerlo ontológico —regresarlo al segundo nivel, al de los conceptos mediante las prácticas—, por lo que a esto se le denomina desplazamiento epistémico promovido por la racionalidad/modernidad o simples entrecruzamientos epistémicos que le imprimen intencionalidad diferenciada, por tanto la necesidad de convertir en un acto político el acto de conocer.

Pero, este aspecto que aquí se analiza posee más elementos, ya que dicho autor propone la división de la filosofía de la ciencia en dos tradiciones:

La aristotélica, que parte de la observación, para dar razón de los hechos, que va de esa observación inductiva hacia los principios explicativos gracias a lo cual se llega a un segundo paso, que es la deducción, según esta teoría, existen cuatro causas, la forma, la materia, la causa eficiente y la final. Donde este *telos* es de suma importancia para Aristóteles, “que distingue lo que hace por utilidad (*chresis*) y lo que se hace por el conocimiento (*gnosis*); o sea, distingue entre razón práctica (*frónesis*) y teórica (*sophia*), actividad (*askilázen*) y ocio (*skolé*)”, acción del hombre y la polis.

Y la segunda, filosofía de la ciencia o galileana, que ya no está preocupada por el telos, sino por el contrario, por el dominio de la naturaleza, incluyendo obviamente al hombre, en el sentido declarativo o de desplazamiento epistémico, es decir, de la realidad desprendida del ser humano y de lo humano —en tanto negación de lo otro humano, su propia negación—, que proclama “el centro ya no es el mundo, sino el hombre”, es decir, se dice (enuncia), una cosa y se practica otra, como parte y dentro de la creación de una doble práctica justificada en la necesidad de ocultar la realidad, producto de las exigencias de esta misma racionalidad/modernidad, convertir, según sus fines, lo visible en invisible y lo invisible en visible, como es el caso de la cuestión económica dominante de la realidad sobre los demás aspectos que surgen ante el actuar de la racionalidad/modernidad vigente, lo que a su vez se vuelve singular al argüir la necesidad de su existir, pues desplaza lo humano por lo de hombre en su sentido epistémico, regresado a ontológico en los hechos, o en su practicidad, además abstraído y no reconocible como este ser humano de carne y hueso concreto. Cosifica, desde esta razón, lo que mira, al reducir al sujeto en objeto, objeto de estudio a su vez —momento temporal de colocación de un nuevo desplazamiento epistémico para la otredad—, para sus necesidades y utilidades: la naturaleza.

Esto provoca un nuevo desplazamiento epistémico, otro, en relación con el conocimiento, al trasladar al sujeto mismo a objeto, para ser estudiado de nuevo, pero ahora por el sujeto que conoce, ya no cualquier sujeto, y para ello se requiere reducir a parámetros su actividad, a una relación de conocimiento de objetos, como si fueran éstas las únicas vías por las que es posible acceder a la realidad, pero también emulando la condición humana a las máquinas, conformadas a su vez por mecanismos intercambiables, donde el mecanismo sería la unidad indivisible del todo, o modernamente a mecanismos conformados, a su vez, como unidades de esa maquinaria.

Pero, también este desplazamiento —el segundo, en esta relación de conocer la realidad—, indica la dirección con la que ha actuado la racionalidad/modernidad al establecer en este caso la postura como elemento objetivo y subsumirlo como punto subjetivo, ligándolo a la interpretación, en un segundo nivel la búsqueda de sus fuentes y formular sus fundamentos y proceso de priorización de la razón teórica sobre la razón práctica, jerarquizando su aparición y estatus.

Trata de recurrir a “sus fuentes” para poder explicarse a partir de las mismas, sin embargo, la realidad y el conocimiento, precisamente en esta búsqueda de sus fuentes, no separaron esta relación *per se* sino que las miraron en el sentido del tercer nivel, es decir, en un carácter epistémico, que regresa a la vez a lo ontológico —segundo nivel—, para actuar y sostenerse en él —en el concepto—, pues ha hecho invisible la operación de cómo lo asume todo.

Koyré observa en la ciencia política el predominio de este paradigma, al señalar que:

Con Maquiavelo estamos ante otro mundo completamente distinto. La “Edad Media”² ha muerto; más aún, es como si nunca hubiera existido. Todos sus problemas: Dios, la salvación, las relaciones del más allá con este mundo, la justicia, el fundamento político del poder, nada de esto existe *para Maquiavelo. No hay más que una realidad, la del Estado; hay un hecho: el del poder.* Y un problema: ¿cómo se afirma y se conserva el poder del Estado?

Ahora bien, para resolverlo no tenemos que preocuparnos por puntos de vista, juicios de valor, consideraciones de moralidad, de bien individual, etcétera... La inmortalidad de Maquiavelo es pura lógica desde el punto de vista en que se coloca, la religión y la moral no son más que factores sociales. Son hechos que hay que utilizar, con los que hay que contar. Eso es todo. Es un cálculo político en el que hay que tener en cuenta todos los factores políticos: ¿qué puede hacer un juicio de valor referido a la suma? ¿Desvirtuar subjetivamente sus resultados? ¿Inducirnos a error? Muy ciertamente, pero en modo alguno modificar la suma.

J. González (2003) indica: “Entenderemos los paradigmas en la obra del mismo Kuhn como la ciencia normal de una época, como realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica”. Dice a su vez que los paradigmas no cambian por transición sino que “es más bien una reconstrucción del campo, a partir de nuevos fundamentos, reconstrucción que cambia algunas de las generalizaciones teóricas más elementales del campo, así como también muchos de los métodos y aplicaciones del paradigma”.

En ese sentido se efectúa el movimiento de la razón, vista ésta a través de la manifestación de los modos de pensamiento, en este caso del concepto de solución fincado, por ejemplo, en los juicios sintéticos de Kant por Sierpínska, relativa a lo que J. González (2003) ya hacía mención respecto a la referida división de la filosofía de la ciencia.

² Ver: "Justificación del porqué crear un horizonte de racionalidad, desde nuestra matriz histórico-cultural para el caso del concepto de solución" (Guadarrama, 2002).

Ésta tiende a la búsqueda como parte de sus fundamentos en la razón misma con la que ha mirado la problemática de enseñar y aprender, el concepto de solución en sistemas de ecuaciones relativa al Álgebra Lineal, pues lo que ha hecho es desplazar más allá el sentido epistémico, para observar si de este modo se puede capturar la realidad y la esencia de la problemática respecto a la solución, en sus fundamentos de la razón misma, nada más que antepuesta.

De ahí que la argumentación y justificación de la postura definida ahora sobre la prevalencia de la razón teórica sobre la razón práctica, como antecedente u operación de lo que se encuentra más atrás en los modos de pensamiento fincados sobre los juicios sintéticos *a priori* de Kant, no la eleva al tercer nivel como espera quien la propone, es decir, en el sentido epistémico, pues como ya fue visto, ésta es enunciada ciertamente en el tercer nivel —prácticas de carácter discursivo—, sin embargo, se hace y se concreta en el segundo nivel —prácticas de exigencia cultural, didácticas y cognitivas—, es decir, reitera la misma operación con la que ha actuado la racionalidad/modernidad, su desplazamiento epistémico. Por lo que no añade más, una manera nueva de colocarse en el pensamiento, que en efecto está presente en su enunciación, no agrega más que la misma razón, en ese sentido este desplazamiento promovido irá a redundar en la exacerbación de la misma razón como fundamento y colocación ante el incremento de las condiciones de producción de la razón de esta racionalidad/modernidad. En lugar de pensarse como otra manera de colocarse respecto a esta misma razón para darle voz y sentido a los desposeídos, a los marginados y excluidos de esta misma razón, de este mismo conocimiento como “realidad” de su propio horizonte. Éste, por cierto, ya fue diseñado desde el momento en que inventó sus propias escuelas de explicar y conocer, bajo esta lógica de interacción de los dos axiomas, por lo que se sostiene que en esta nueva formulación razón teórica *versus* razón práctica, no se logra ver su carácter de nueva propuesta, como es el caso de los modos de pensamiento de Sierpinska, sino la observancia reiterada de lo mismo.

Para finalizar, se sostiene aquí la propuesta de J. González (2003) acerca de que el reparto justo o injusto del conocimiento conlleva pues una responsabilidad social e institucional, cuestionada hoy en día en el país ante los elevados índices de pobreza y miseria económicas traducidos éstos también en los altos niveles de reprobación en matemáticas, o también de los procesos de lecto-escritura, ambos van de la mano, y que en lo educativo es muy grave, como se le ha reiterado aquí. Por lo que señalar y construir una línea de argumentación que explicita esta reiteración por lo mismo, es decir, en lo que se ha dado en llamar *del movimiento de la razón*, será fundamental para constituir y construir otro mirar.

Tiene que partir de la interacción de un conjunto de datos, procesos y fenómenos de carácter social, histórico, político, pero también cognitivo y epistémico, que importa establecer para resaltar la necesidad de otra mirada, de otro razonar que dé posibilidades también al otro, para que lo potencie y de esa forma potencie el universalismo no abstracto, que ciertamente tendrá algunas actividades abstractas y generalizantes, pero que no será su función central, sino la de proveer lo no escrito aún, lo no colocado aún, que existe como realidad y que no puede ser

ocultado más: lo humano. De ahí que la construcción social del concepto de solución es la apuesta de esta investigación.

II.2 Análisis histórico epistemológico

II.2.1 Dos puntos necesarios en el análisis de la noción de solución que se construye

Primer punto. Éste tiene que ver con la exploración que se hace de lo que se entiende por construcción del concepto de número, formulado por Piaget. Trata de indagar de manera breve, a la luz de la experiencia docente, lo que provoca, o mejor dicho, lo que lo didáctico y lo cognitivo provocan una vez que entra en juego dicho concepto, pero, también lo que propone la presentación lógico formal de la matemática, la cual se entiende por la forma estructurada y acabada del concepto teórico al ser observada a partir de la experiencia que la conforma.

Un segundo aspecto se refiere más al proceso de construcción de conocimientos registrado a través de la historia de la matemática y que, sin ser precisamente la historia de la construcción de la noción de solución, provee razones que en términos de estos estudios históricos detectan cambios que se fueron dando sobre aspectos relacionados con dicha noción, como son las ideas sobre la resolución de ecuaciones, el sentido como se fue constituyendo el Álgebra como materia de estudio, así como la perspectiva general donde se encuentra inserta, que también justifican su transformación y evolución en el espacio y tiempo, así como de los momentos de transición visualizables, en la intención de dar cuenta de las modificaciones socioculturales y epistémicas que lo determinaron.

En el primero, es considerado lo que en el marco teórico de la investigación predoctoral fue atendido, la construcción que a nivel teórico se presupuso en la presentación del sistema didáctico de la versión estructurada de la matemática como fuerte componente de incorporación de dificultades en la construcción social de la noción de solución. La cual, a su vez, operó bajo la suposición de la necesidad de construcción de un lenguaje lógico formal, de carácter científico, con el que se expresaría esa construcción de los conceptos matemáticos y que bajo dicho supuesto mediaría en la formación de la noción y del concepto de solución, al igual que los demás conceptos matemáticos, pero que desplazaba del centro de atención dos cuestiones clave, aprender matemáticas y razonar matemáticamente, ésta debía primero construir una manera de razonar lógica, estructurada, que implicase la necesidad de formalizar el lenguaje que sería empleado para expresar las ideas más acabadas de la matemática.

La secuencia y el ritmo de presentación de esos mismos conceptos creados determinaba cierta lógica preconcebida, pues en el fondo de esta problemática se operó haciendo reducciones, denominadas en este trabajo “reducción lineal de las dificultades”, con el afán de conseguir la aprehensión de los conocimientos y saberes matemáticos mediante un sistema didáctico que esperaba formar sujetos matemáticos.

Sin embargo, el problema no quedó allí, pues no construyeron los conceptos como se esperaba, porque en su base misma, en tanto supuesto con el cual se partió para la consecución de lo anterior, se suponía la construcción del concepto de número mediante el lenguaje formal, en la construcción de un lenguaje lógico formal como

antecedente del pensamiento, para de ahí derivar la conformación de las estructuras matemáticas, “sólidamente construidas por la matemática”. Esto provocó dificultades que propiamente no tenían que ver con el proyecto totalizador de la cultura occidental, afanada en extenderse sin explicaciones, obstáculos que muy probablemente pudieron evitarse o enfrentarse de otra manera, con cuidado e inteligencia; si los supuestos de este proyecto totalizador hubiesen sido claros desde un principio no habría tenido las dificultades que ahora tiene respecto a la versión de la matemática que occidente pretende que el mundo conozca y trabaje.

Las sistemáticas reducciones con las cuales occidente se empeñó en el afán de ir alcanzando versiones más acabadas de la matemática no previeron sus efectos. La construcción de un lenguaje lógico, formal y estilizado, poco tenía que ver con el proceso mismo de la producción de conocimientos y de su aprehensión. Desde luego que eso se puso en muchos aspectos adelante, en este ir y venir, ahora socializado, ambiente de enseñanza-aprendizaje de la matemática, que está ahí y que se hace necesario organizar y articular.

Las dificultades consideradas en este proceso de construcción están insertadas en el lenguaje y presupone su desarrollo, sin embargo, esta desapropiación del lenguaje preciso, de este lenguaje construido con la lógica aristotélica de los silogismos, de esta racionalidad última, manifestación creada por el pensamiento erigido en dominante y hegemónico, que actúa sobre los sujetos del sistema didáctico, no nada más no posibilitó la comprensión y el entendimiento de los conocimientos matemáticos sino que también y, en cierta medida, creó las dificultades para su acceso. Colocó en general a los individuos comunes, los usuarios de la matemática, en una cotidianeidad plena, la cual, como contrapeso, les posibilita la construcción de sus conocimientos en general, de sus concepciones, de las nociones matemáticas, en particular de la construcción del concepto de número, como de la solución, que líneas adelante se mostrará cómo se encuentran vinculadas.

Entonces, de acuerdo con lo observado en el marco teórico, el vehículo que posibilita su construcción permite resolver, como contraparte a la racionalidad impuesta, los problemas matemáticos, cuestión que la racionalidad denomina “problemas matemáticos”. Es decir, que una vez que coloca a los sujetos en su cotidianeidad, frente al problema matemático y ante la necesidad de hallar la solución, emplea vehículos que median la construcción social de los conceptos y las nociones, que en este caso se corresponden con los que provee la cultura, lo lingüístico en relación con su propio lenguaje, así como los que ha construido mediante la percepción social, del pensamiento sociocultural, o del contexto situado como producto de las interacciones sociales, que determina una cierta actitud específica en el momento de resolver, por ejemplo, ecuaciones, se trata de una actitud de resolver lo no propio, lo ajeno con lo propio.

Desde luego que esta visión considerada en América Latina en lo general, en nuestro país en lo particular, una problemática, no sólo es producto del desarrollo de esta racionalidad que determina la dirección por dónde debe seguir la creación de la matemática misma y, por supuesto, su contenido, incluso su aprendizaje y su

enseñanza. Por esta razón los docentes tuvieron que aprender a repetir este proceso de presentar la versión acabada de la matemática y por consiguiente de la construcción de los conceptos, como el de número, sin fijar su atención ni atraer la mirada en lo que hacían los alumnos dentro del salón de clases; el profesor sólo quería ver lo que los alumnos habían aprendido. Así, para no conflictuarse en el tránsito de sus estudios, los alumnos optaron por la imitación, de esta forma se cumplía con lo que el profesor solicitaba.

Es cierto que lo anterior crea una problemática que en la actualidad no es ni artificial ni superficial, pues tiene que ver con el por qué debe de aprenderse y enseñarse matemáticas. Los sujetos actúan con sensatez fuera del sistema educativo, pero no dentro, pero éste irrumpe y violenta de manera sistemática la cotidianidad de los sujetos que construyen su saber matemático.

Los vehículos que permiten mediar la construcción social de los conceptos matemáticos están en relación directa con la cotidianidad. Ejemplo de ello puede ser el empleo del lenguaje cotidiano, la cultura, lo social. En este sentido muestra que dicho contexto es más rico, que tiene mayor abundancia, que es más flexible pues se adapta a las necesidades de los sujetos, ya que posibilita éstos y no los otros conocimientos —los acabados—, la construcción, la resolución de los problemas matemáticos y, por ende, el tratamiento de los conceptos, como es el caso de la solución y el proceso para obtenerla. Así, es natural, desde esta lógica de construcción social, esperar y aceptar que las concepciones estén más relacionadas con la cotidianidad, con la cultura, con la percepción social, que con el lenguaje formalizado, preciso, construido silogísticamente, que a veces se antoja excluyente, no tanto porque sea un producto refinado de la cultura sino más bien por el uso que se le ha dado al mismo, es decir, por las razones empleadas por sus detentadores que poseen una sola mirada de esta racionalidad, que proporciona las definiciones más acabadas y los conceptos matemáticos más precisos, en esa idea de clasificación monotópica. De ahí que la noción, las primeras creencias, las primeras concepciones y el concepto sobre la solución sean colocadas por fuera de este modelo de conocimiento y de construcción de conocimientos y no por dentro, como se esperaría que ocurriera, se trata de un sistema de producción de conocimientos que excluye-incluye.

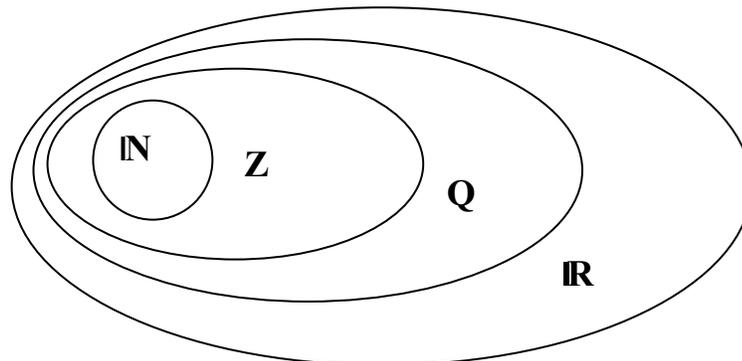
Dentro del plano de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la construcción de conocimientos es considerada como antagónica, ya que la noción creada social, cultural y lingüísticamente se tensa muchas veces por las definiciones y conceptos precisos, ello porque en las primeras nociones para los sujetos sociales les resultan más confiables, pues atienden a su experiencia social compartida y directa, mientras que en la otra no, lo ven como un aspecto ya acabado, inmutable, fijo, que no se puede modificar.

En ese sentido, cuando se considera que el concepto de número se va construyendo, éste a su vez construye la noción de solución, pues ella está directamente relacionada con la experiencia, sin embargo, a pesar de que se ha construido hipotéticamente el concepto de número, la noción y el concepto de

solución todavía no se ha desprendido de esa condición de ser asociada a su experiencia directa.

En esta investigación la construcción del número es tomada como un proceso que ocurre de acuerdo a la naturaleza de los mismos números, en los que no se acaba de construirse cuando ya se empiezan nuevas construcciones en la idea de preservar el orden establecido por la matemática respecto a esta lógica y racionalidad precisa, pero que en términos generales construye el concepto de número en general, a lo cual aquí se le llama “construcción no lineal del concepto de número”.

Ésta se diferencia respecto del orden lógico constituido por el discurso acabado de la presentación estructurada de la matemática, la cual provee la secuencia: números naturales, enteros (incluyendo el cero), racionales, irracionales y reales, quienes a su vez se encuentran contenidos en los complejos y que, para niveles de educación no superior, se manejan como imaginarios, es decir, se trata de una presentación que además de estar secuenciada, pautada y estructurada, sigue una línea ascendente de crecimiento, es decir, se eleva de lo concreto a lo abstracto, de lo simple a lo complejo y siempre de lo menor a lo mayor, lineal y acumulativo en su concepción, que para dar una idea se expresa usualmente mediante el siguiente gráfico:



Mientras que la que se está considerando en este trabajo, a pesar de no responder al desarrollo histórico, sino a cierta lógica que presupone la construcción dentro del desarrollo lógico del contenido de la matemática, primero hace una presentación de los números naturales, con algunas expresiones o números racionales comunes, como: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ y sus múltiplos. Después, los números enteros, con ligeras extensiones a los números racionales, es decir, expresiones donde los denominadores y los numeradores ya no son necesariamente múltiplos de las primeras expresiones incorporadas, aunque también incorpora algunas expresiones racionales que resultan equivalentes: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, etcétera.

En un tiempo posterior a esta presentación y construcción se encuentra la que los comprende o reconoce como la razón de dos enteros cualesquiera, siempre y cuando el denominador no sea cero. Por el momento aquí no es necesario presentarlos

en la notación conjuntista. Después se continúa con el proceso de “complementación” del concepto de número racional, como aquellos que tienen expansión decimal infinita, pero periódica, y a su vez cualquier múltiplo como potencias del denominador. Finalmente el de los números reales, donde se considera a los números irracionales, en el que el ejemplo del número $\sqrt{2}$ es el ejemplo típico de la inmediatez de la existencia de otros números y a su vez la reducción de la generalización como de la ampliación que se hace de los números y, por tanto, construcción del concepto de número.

Pero, en esta presentación y conceptualización del número que se está construyendo, hay que hacer notar, incluso, que se presenta como distinta a las anteriores versiones ya que incorpora la clásica demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional, es decir, de que no se puede representar como el cociente de dos enteros, cuya notación conjuntista se expresa mediante: $\sqrt{2} \neq p/q$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$, la cual muestra el avance del pensamiento en el salón de clases mediante el empleo de la técnica de reducción al absurdo —que lo que hace es suponer que es falso que $\sqrt{2} \neq p/q$, es decir, suponer que si existen un par de enteros tales $\sqrt{2}$ es posible expresar como el cociente p/q , con p y q , satisfaciendo ciertas condiciones para llegar a una contradicción con esas condiciones y deducir después que lo supuesto fue falso, por tanto lo contrario a “la proposición inicial” es verdadera.

Si se observa, esta relación descrita no se da mediante las etapas señaladas por la secuencia lógica, sino en versiones parecidas al desarrollo lógico construido por este lenguaje preciso, pero que, en el fondo, obedecen a otra relación de construcción, que pareciera sutil su cambio, sin embargo, es significativo en su aprendizaje y por tanto en la construcción de la noción y concepto de solución. Por ejemplo, si se considera la noción de solución en el nivel de secundaria, representa un número que resuelve la ecuación y/o un par de números que resuelve el par de ecuaciones (no el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, como se diría precisamente y que, por cierto, no se queda en las mentes de las personas, así fue verificado con los estudiantes de secundaria y bachillerato); entonces, la experiencia que construye la noción está directamente anclada al momento del proceso que construye este número y su concepto.

En el caso del número entero, con las expresiones racionales donde los denominadores y los numeradores ya no son necesariamente múltiplos de las primeras expresiones que incorporó, pero que en ésta se añaden algunas expresiones racionales que resultan equivalentes y no todavía, por decir, de los números racionales, comprendidos y reconocidos como la razón de dos enteros, donde el denominador es distinto de cero. Ya que es observado el momento de la construcción del concepto de número, proceso que atraviesan las personas, que a su vez determina el grado de constitución de la noción y concepto de solución, pues ésta es determinada por el número de ecuaciones o bien por el número de incógnitas, para indicar la cantidad de números que debiera resolver la ecuación (o el par de ecuaciones), como se pudo observar en los estudiantes del nivel superior,

posteriormente denominado el sistema de ecuaciones lineales, la cual está más relacionada con el proceso y el momento en que se está construyendo el concepto de número, preferencialmente de números enteros y racionales como cociente de dos enteros, sin hacer uso de la notación conjuntista en su presentación.

En lugar de la naturaleza de construcción lógico formal de los números y no se diga ya, por ejemplo, los números racionales con la que se identificarían de poseer expansión decimal infinita periódica, la cual correspondería esta última a la versión al momento de trabajar en el nivel superior (es decir, de un proceso que se constituye pero que no ha sido acabado), se agregaría que la palabra y concepto de sistema de ecuaciones lineales que pretende darse en esta presentación, construida lógicamente, encubre su comprensión y entendimiento.

Conviene señalar ahora que no es la idea en esta exposición determinar que la construcción del concepto de número obedezca por completo a dicha ruta y mucho menos proponer su generalización, es decir, como la ruta que siguen de esta manera todas las personas y los aprendizajes que efectúan, sino más bien distinguir algunos rasgos esenciales en los momentos de construcción y modificación de la construcción del concepto de número y de solución, como antecedente de las variaciones de la noción y del concepto de solución, que las personas echan andar al trabajar con ellos.

Ahora bien, es en esta dirección, cuando se está en el nivel de educación superior y se trata de trabajar el concepto de solución como parte del concepto de sistema de ecuaciones lineales, cuando esta traslación, creada en la derivación de la transposición didáctica y cognitiva, donde se efectúa tal pretensión de presentación y construcción lógica y estructurada de la matemática. En ella la experiencia, en términos de la noción y concepto construido ya no son suficientes, porque más bien quedan anclados a experiencias directas anteriores (en la linealidad de la superficialidad y la ilusión que ha creado) de lo cual pocas veces los sujetos están concientes, creando dificultades en la concepción, en la tensión que no lo supera y que ancla en la experiencia directa, tampoco presenta la evolución y transformación que pide el sistema didáctico, pues en ella la noción y el concepto de solución son más consistentes con la experiencia alcanzada que con la definición acabada y estructurada lógicamente, en el sentido de que si la solución es un número en una ecuación, entonces, cuando se tienen tres ecuaciones deberían tenerse tres números distintos para este sistema.

De ahí que al observar una gráfica que tenga por característica tres puntos distintos donde se intersecten los planos o las rectas, como ocurre con los estudiantes del nivel medio superior o bien con los docentes del nivel superior, ello corresponderá con esta noción y concepto anclados en la experiencia pasada, que además da sentido a lo que ha ocurrido en el paso de un nivel educativo a otro, como en la generalización de los objetos geométricos, mas no así en la comprensión de la definición de solución (se acepta la comprensión de la solución con tres rectas y su paso a la intersección con tres planos) con estos objetos geométricos, pues lo geométrico es más intuitivo que lo aritmético en esta presuposición lineal, cosa que no resulta así, toda vez que aritméticamente la noción está anclada con la experiencia

de este proceso construido del número, en este caso de tres números, por tanto la búsqueda de tres puntos distintos en la gráfica ha persistido en la noción y el “concepto” de solución alcanzado hasta ese momento. Pero esta persistencia ha sido creada por el sistema didáctico, es decir, por el proceso lógico formal que lo expresa o, al menos, no cesa en su pretensión de ordenarlo y estructurarlo, no así por la naturaleza de la construcción real de los conceptos intervinientes ni por la consecuencia de la organización y construcción del concepto de número, que amarra a su vez al de la solución, el cual va ocurriendo en los distintos momentos planteados por las personas al interactuar con él.

Lo anterior lleva a formular, por tanto, que no es un problema de razonar correctamente, de pensar lógicamente, ni tampoco de saber pensar matemáticamente, alcanzado este nivel por la presentación formal estructurada de la matemática presupuesta por el sistema de producción de conocimientos, pues ambos evidencian procesos de pensamiento, de comprensión, sino más bien porque plantea hablar de qué proceso de construcción se está hablando cuando se dice que hay que construir el concepto de número en el supuesto piagetano.

Segundo punto. Éste tiene que ver más con un conjunto de observaciones relacionadas con los procesos históricos por los que se fue operando la estructuración del álgebra. Ahora bien, ¿qué dicen al respecto los desarrollos conceptuales de la matemática y en particular de la resolución y la teoría de la ecuaciones de J. Guzmán (1983), o bien de J. Ramírez (1998), respecto al Álgebra Lineal o de la historia de la matemática de E. Bell (1985), es decir, desde lo que registra la historia de la matemática en cuanto al proceso de producción de conocimientos matemáticos y, en particular, lo relativo del concepto de solución?

En Guzmán (1983), el estudio realizado sobre los procesos de resolución de ecuaciones, lo lleva a diferenciar tres etapas características del desarrollo de la matemática, en particular del álgebra. Para Ramírez (1998) los periodos que considera que trazan la historia del Álgebra Lineal son cuatro. Mientras que Bell (1985), en la perspectiva general que hace respecto a su trabajo: *Historia de las Matemáticas*, reconoce siete periodos comprendidos en una división convencional de la escala del tiempo y que, a su vez, le sirven para separar toda la historia de la matemática, en la que directamente expresa que esta división sigue vagamente el desarrollo general de la civilización occidental.

Independientemente de sus especificidades propias del objetivo y objeto de estudio que se proponen estudiar, se puede percibir que en estas caracterizaciones los autores tratan de definir los momentos o periodos en los cuales el sistema de producción de conocimientos están modificando sus concepciones respecto a lo que pretenden estudiar.

No es aquí el lugar ni la ocasión para emparentarlos, pero sí para reconocer lo que los autores buscan con la realización de estos estudios, pues parece que ellos sólo están tratando el hecho de caracterizar los momentos, pues se observa que lo sociocultural, lo cognitivo, así como lo epistémico están efectuando modificaciones en los sistemas conceptuales que estudian, los cuales por cierto giran alrededor,

dentro de sus especificidades, en el sistema occidental de conocimientos y saberes. Lo singular no está en el número de etapas o divisiones que reconocen, sino en la base de argumentación que están considerando al hacer las divisiones, que es donde están fijando su atención, ya que localizan no sólo los momentos de cambio sino los puntos que están transformando las modificaciones del sistema sociocultural y de producción de conocimientos científicos. Por ejemplo, en las conclusiones de Guzmán (1983) se establece que su análisis le permitió diferenciar tres etapas características del desarrollo de la matemática, en particular del Álgebra. Una que llama la del primer periodo, que se caracteriza por ser extremadamente prolongado, donde se trata únicamente de la resolución en específico de ecuaciones y donde el método que se emplea es puramente “empírico”, de tanteos sucesivos, en la que cada ecuación es objeto de un tratamiento especial. Una segunda etapa, situada durante del siglo XVIII, donde comienza la búsqueda de métodos más generales y plantea, así mismo, problemas generales como la existencia o no de soluciones, la transformación de ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación, de una ecuación no resuelta a una resoluble, señalando el trabajo de algunos matemáticos a los cuales considera las grandes figuras de dicho periodo. Y una tercera etapa, donde propiamente señala la obra de Evariste Galois, ve en ella y a la teoría de grupos, la conformación de la primera estructura algebraica que aparece en la matemática.

Sin embargo, hay que ver en específico algunos puntos que también, desde la revisión, son considerados actuantes en las modificaciones y que, de alguna manera, manifiestan influencias en la constitución de la noción y concepto de solución. Guzmán las considera conclusiones mediante el análisis de las fuentes históricas disponibles, como la primera, al señalar: “El álgebra, así como otras ramas de la matemática, como por ejemplo la Geometría, nace por la necesidad que tuvieron los antiguos matemáticos de resolver problemas concretos”. Formula su punto de vista Y es que la noción, como el concepto de solución, tienen aquí un primer nivel de configuración como tal, ya que cualquier método que lo resuelva —al problema específico— es suficiente, que en esta primera configuración identificada sólo importa resolver el problema y no cómo resolver el problema, por tanto, el resultado que se obtenga, independiente del método, será la noción de solución que se asigne, es decir, la solución es el resultado y no el proceso acerca del cómo se obtuvo el resultado.

En una segunda conclusión se refiere a que: “durante mucho tiempo los matemáticos no se preocuparon en hacer un análisis profundo de los métodos que emplearon para resolver las ecuaciones algebraicas de primero y segundo grado”, esta *despreocupación*, se debió a que, en gran medida, dice Guzmán, la matemática en general no se había desarrollado lo suficiente como para dar respuestas, éstas se dieron después.

Cuando se centró la atención en cómo se resuelven los problemas, además de que se generaron métodos, reglas, distintas y diversas, algunas de ellas tal vez redundantes o ingeniosas, fue el momento en que se hizo más patente avanzar, por lo que se dejaba de lado aquello que pudiese ser necesario determinar cuál de todos es el

válido, es decir, indicar el sentido de validez; hay que recordar que en esta etapa se da sentido al movimiento de la razón, en sus dos vertientes o tradiciones, como un aspecto en donde se centrará el sentido de la validez del mismo. Recuérdese que también estará actuando cierto sentido de lo práctico, en este proceso de concebir y de caracterizar las etapas, como resolver la ecuación, por lo que probablemente la reflexión de la conclusión alcanzada tuviese que ver con una intención que es necesario definir, pues se trata de un periodo donde interesa conocer métodos que resuelvan, más que preguntarse cuál de todos es el válido, aunque también éstas dan apertura a este tipo de preguntas sobre la validez de los mismos, en un sentido que permita generalizar ciertas reglas o ideas.

De acuerdo con el análisis presente, lo que se puede aportar como una de las externalidades que estaban actuando en ese momento y a la cual no podría substraerse el proceso indicado es de que todavía no se creaba la visión de su extensión mencionada en el capítulo dos del marco teórico, por tanto, está remitida la solución a conocer métodos y encontrar soluciones, sin clasificar. Pues, como ya fue referido en ese capítulo y a la par de lo que propone Mignolo (2001), cuando el capitalismo se extiende, éste lo clasifica y por tanto lo pone en el centro de la producción de conocimientos, por consiguiente, aunque no unido totalmente al proceso de enseñanza-aprendizaje, la categoría de validez se irá precisando en el sentido filosófico, por tanto formará uno de los puntos de la historia de las ideas. Es decir, en ese momento dejó de ser importante conocer métodos, lo que sólo debía hallarse era la solución, para después formularse cuál de los métodos encontrados es el válido, en el sentido de disponer de una certeza, confiable, lo que implicaba la creación de nuevos conceptos, definiciones y extensiones de la matemática, por ejemplo, el de la función derivada, el problema del trazado de tangentes, los métodos de cálculo, el concepto de solución, etcétera.

Se considera que este momento es cuando, además de extenderse el capitalismo, se dio la extensión de las formas de pensamiento; por cierto, es en este periodo histórico cuando convergen dos aspectos que constituirán la postura occidental, pues se unen en él el punto de vista filosófico con el de la tradición de producción de conocimiento científico, que va a constituir o estaba creando la visión de proyecto totalizador. En otras palabras, puede identificarse como un acto conciente que modifica las concepciones y las nociones que a su vez se presenta como un proceso que depura sus elementos o instrumentos, así como sus herramientas, por tanto reelabora sus conceptos y categorías no sólo de visión del mundo sino también las del campo, como es el de la solución.

Guzmán también señala que es Francois Vieta quien logra la transición (que los antiguos matemáticos no habían logrado llevar a cabo) del concepto de *arithmos* al de símbolos generales y es precisamente sobre estos últimos en los que se apoyará la construcción del álgebra como una disciplina nueva. Sin embargo, otra lectura de la misma bien podría darse, porque hay que recordar que lo que más interesaba era resolver que generalizar el procedimiento de resolución, porque con sólo alcanzar resoluciones parecía suficiente.

La siguiente conclusión tal vez es colateral a la construcción de la noción y concepto de solución, no obstante tiene elementos interesantes de reflexión, como es el caso de la 5ª conclusión. El autor señala que los conceptos de transformación y de invariante no son explicitados en esta época (siglos XVI, XVII y principios del siglo XVIII); éstos desempeñarán un papel fundamental pues gracias a su utilidad será posible la transición del concepto de símbolo utilizado por los antiguos para representar de una manera general un número particular, al concepto de símbolo general, para representar un número cualquiera, es decir, hay una modificación epistémica que ha sido identificado en el lenguaje que se va construyendo para expresar las elaboraciones o reelaboraciones de las nociones y de los conceptos matemáticos de la racionalidad/modernidad, ello significa que las elecciones de los primeros horizontes de racionalidad formal fueron decididos para expresar o representar el pensamiento de la época.

Hay que considerar que en este punto Guzmán está reflexionando sobre el concepto de número al que se refiere Piaget, sin embargo, es muy probable que el proceso de construcción del número no está acabado, en el sentido histórico, por lo que aun con la inclusión del acto de abstracción al que se está refiriendo, ello abona sustantivamente en la constitución del álgebra como objeto de estudio, mas no se considera que se refiere a la construcción del concepto de número en el sentido señalado en la sección anterior. Recuérdense que los aspectos de la numerosidad de los números todavía no han sido tocados y que es hasta los trabajos de Cantor que se le da esa extensión infinita de los conjuntos de números, distinguiendo unos más numerosos que otros, a pesar de ser infinitos. Es en este momento que la idea de la extensión, en su fase de potenciación, se está realizando en la matemática. Es aquí donde se señala una modificación sociocultural, epistémica desde luego, la cual corresponde al hecho de que ya no es central sólo formularse la pregunta ¿cuál de los métodos conocidos o que resuelven un problema es válido?, en el sentido antes referido, ahora es necesario ampliar el desarrollo teórico, regido por la categoría de validez, es decir, de creación de un cuerpo teórico de conocimientos científicos válido, en donde se planteará la necesidad de generalizar resultados, teorías, métodos, pero con la intención de estructurarlos para que después posibilite su generalización, la extensión de la matemática, esto representa otro cambio, es un momento de transición importante. Es en este punto que Guzmán señala que el álgebra se constituyó como una disciplina independiente, su tema central y único fue la resolución de ecuaciones, es éste el momento en que decide erigirse como el único, por tanto dominante y hegemónico.

De lo anterior es importante señalar que se encuentra aquí el momento en que se estructura, se generaliza y, por tanto, se clasifica, incluyendo lo que es válido de lo que no, como también cuando se formula a través de las cuestiones: ¿cuál de los métodos es mejor sobre los otros?, ¿con qué lenguaje se ha de expresar?, y por consiguiente, se convierte en la única visión clasificada, ordenada y estructurada.

Así, es necesario definirse ofreciendo definiciones, crear conceptos acabados dejando las nociones, se trata ya entonces de un 4º. momento pleno, es decir de la

racionalidad completa actuando como tal, única, dominante, hegemónica, que generaliza, constituida, estructurada, parametrizada, determinada, donde se señala: “la solución es”, lo que significa la visión más acabada y pulida de la matemática, del concepto y de la solución.

Finalmente, en la sexta conclusión, Guzmán advierte que ante esta historia de la resolución de ecuaciones comienza el del predominio del análisis estructural como punto de partida del tercer periodo del desarrollo del álgebra.

Bell (1985) propone una división que se caracteriza por ser más convencional en la escala del tiempo, la cual separa toda la historia de la matemática en siete periodos:

- 1° La de la época más remota a la antigua Babilonia, Egipto incluido.
- 2° La que corresponde a la de la contribución griega, que va desde los 600 años a.C., hasta los 300 años de nuestra era, aproximadamente, señalando como la mejor en los siglos IV y III a. C.
- 3° La de los pueblos orientales y semíticos —hindú, chino, persa, musulmán, judío, etc. — en parte antes y en parte después del 2°, extendiéndose hasta el 4°.
- 4° Europa durante el Renacimiento y la Reforma, aproximadamente los siglos XV y XVI.
- 5° los siglos XVII y XVIII.
- 6° El siglo XIX.
- 7° El siglo XX.

División que, lo dice el autor, aunque vaga, sigue el desarrollo general de la civilización occidental, además de que considera que el 6° y el 7° periodos pudieran considerarse como uno, sin embargo, después de 1900 llegaron a manifestarse nuevas tendencias significativas.

Las razones que lo llevan a establecer dicha división son:

- Que la contribución más perdurable en la matemática, de todos los periodos anteriores al Renacimiento, fue la griega, etapa del razonamiento deductivo estricto.
- Los desarrollos del álgebra simbólica durante el Renacimiento en Italia y Francia.
- Los hindúes del siglo VII al XII d.C., casi habían inventado el simbolismo algebraico.
- Los mahometanos habían vuelto a una álgebra por completo retórica, o casi.
- El tercero, de los más importantes, es en que en la primera parte del siglo XVII se unieron tres corrientes principales del número, la forma y la continuidad, generando el cálculo y el análisis matemático en general, que también transformó la Geometría, considerándolo como el manantial de la matemática pura, pues comprende el principio de la ciencia moderna, así como la aplicación extensiva de ésta a la astronomía dinámica con el trabajo de Newton y más tarde con las ciencias físicas, siguiendo la metodología de Galileo y Newton.
- En el siglo XIX se desborda y florece la matemática haciéndola fértil.

- En el siglo XX, una de las distinciones más interesantes, es el marcado aumento en la abstracción con la ganancia en la generalización y una preocupación creciente en la morfología y anatomía de las estructuras matemáticas, un afianzamiento en la penetración crítica y del principio de la aceptación de las limitaciones que ofrece el razonamiento deductivo clásico, en la idea de la lucha humana por pensar claramente como una idea errónea.
- Se produce el interés en las revisiones extensivas de la matemática, como de la epistemología, y en el abandono definitivo de la teoría: la matemática es la imagen de la verdad eterna.
- Su finalidad es que esta división más o menos tradicional ilumine la luz oscilante de la civilización donde los periodos heterodoxos, remoto, medio y reciente den una presentación verdadera del desarrollo matemático y una imagen vívida de su vitalidad innata.

En el periodo griego la geometría sintética, métrica, como método, llegó tan lejos como podía ser humanamente posible, revitalizándose con aportaciones nuevas mediante las ideas de la geometría analítica en el siglo XVII, por la geometría proyectiva en los siglos XVII y XIX, finalmente en el siglo XVIII y XIX por la geometría diferencial. Sin embargo, lo interesante, además de las razones que llevan a Bell a hacer esta división en periodos de la historia de la matemática, es la que se encuentra en la perspectiva general, la cual señala que cualesquiera que sea su punto de partida, la matemática ha llegado hasta nuestros días por dos corrientes principales: el número y la forma¹.

La primera comprendió la Aritmética y el Álgebra, la segunda, la Geometría. Estas dos corrientes se unieron en el siglo XVII y forman el creciente caudal del análisis matemático que, a su vez y a lo largo de la misma, hace patente dos aspectos: la necesidad de la demostración, aparición de la matemática y la necesidad de la abstracción.

En el pasado, en la etapa de los griegos, se asociaba la solución de problemas con la regla y el compás. Después se observa, como un recurso, resolver, es decir, obtener soluciones de las ecuaciones, por tanto, era la idea de construir procedimientos más analíticos que geométricos y no tanto para mostrar gráficamente las soluciones. Sin embargo, hoy las representaciones gráficas son usadas como un recurso visual de las soluciones y el tipo de soluciones por tanto del análisis de comportamiento o disposición geométrica de los elementos que conforman los sistemas, en lugar de un recurso para la obtención de las mismas; es decir, la Geometría como un recurso para resolver y no para analizar, indagar, inspeccionar el

¹ El autor se refiere a que “la forma” se ha entendido en el lenguaje matemático, desde hace mucho, en un sentido más general que el relacionado con el contorno de las figuras planas y de los sólidos. Todavía es aplicable el antiguo significado geométrico; el nuevo se refiere a la estructura de las relaciones y teorías matemáticas. Éste fue el resultado, no de un estudio de la forma en el espacio, sino de un análisis de las demostraciones que se realizan en Geometría, Álgebra y otras disciplinas de la matemática.

sistema, aspectos estos últimos que han sido colocados por un horizonte de racionalidad reciente.

Al respecto, Myriam Acevedo y Mary Falk, en su libro: *Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*, exponen la siguiente aserción: “Un cuidadoso examen histórico permite mostrar, por ejemplo, cómo los temas y métodos del álgebra escolar evolucionaron hasta transformarse en la llamada álgebra moderna”. Luego continúan: “En el contexto de métodos de solución de ecuaciones se exploran también los nexos entre el álgebra y la geometría”. El eje central en el libro de dichas autoras es el problema de la solubilidad de ecuaciones polinómicas, “que estuvo, y sigue estando, significativamente ligada al planteamiento y solución de problemas fundamentales de las matemáticas”.

II.3 Justificación del porqué crear un horizonte de racionalidad, desde la matriz histórico-cultural para el caso del concepto de solución

El presente capítulo pretende exponer la justificación de por qué crear un horizonte de racionalidad que dé sentido y cobertura a la problemática relativa a la constitución del concepto de solución, que posee un *locus* de enunciación no-ortodoxo, el cual parte del reconocimiento de que en la construcción social de conocimientos existe una matriz histórico-cultural que lo enuncia y lo sostiene, el cual además se reconoce como propio de América Latina.

Esto implica no sólo su construcción sino también sus entendimientos y concepciones, que muchas veces se tensiona o es contrapuesto por “la razón eurocéntrica”, como elemento que inhibe el avance y el progreso de la racionalidad abstracta y en abstracto.

Al ser promovida por la racionalidad/modernidad eurocéntrica, no se observa que tal racionalidad a la que aspira —abstracta y universalista—, posea un *locus* de enunciación que al igual que la matriz histórico-cultural de América Latina, prometen no sólo entendimientos y concepciones sino hasta relaciones de conocimiento, perspectivas y visiones epistémicas diferentes, y que bajo tensión, por ejemplo en el proceso de enseñanza aprendizaje, estas dos visiones epistémicas distintas tienden pocas veces a la compatibilidad, lo que empobrece su comunicación cuando ésta se da. De ahí que la investigación presente parte de esta cuestión-motivación: ¿cuál es ese asunto del que se habla para establecer este *locus* de enunciación? Colocar desde otro ángulo de observación y tratar de construir y enunciar un nuevo horizonte de racionalidad que mire las explicaciones y la construcción del conocimiento científico con otra perspectiva, que le dé sentido a lo producido en América Latina, es el empeño del tema de la tesis doctoral: “La construcción social del concepto de solución”, la cual se propone aquí de manera explícita y pretende alcanzar el reconocimiento como tal y la revitalización de la misma.

Hay coincidencia con Dussel, Quijano, Zemelman y Mignolo, al observar que en América Latina se ha ido produciendo una desvinculación creciente desde el pensamiento teórico, en diferentes disciplinas, respecto de las matrices culturales. Cientistas sociales dedicados al pensamiento y cultura en América Latina (2002), señalan:

Cada vez más se constata un *aprimamiento* resultado de una *acumulación* de información *científica* en el interior de los marcos de conocimiento codificados con pretensiones de universalidad, marcos que no siempre permiten dar cuenta de las situaciones históricas concretas que enfrentamos (equipo diseñador de la propuesta del Programa de Doctorado de Pensamiento y Cultura en América Latina, formulada como parte de su justificación).

La referencia anterior pretende, más que tratar de establecer un fundamentalismo o reivindicar cierto chovinismo, hacer un llamamiento, un acto

conciente, no sólo para tomar los cuidados debidos, sino reconocer que es posible crear una auténtica aportación desde el reconocimiento de lo que somos para atender las problemáticas específicas que poseemos, sin restar por ello la importancia de los estudios e investigaciones de los procesos de aprendizaje y enseñanza de un conocimiento específico como lo es el de la matemática. Lo dice así dicho documento:

No se trata de un esfuerzo de regionalizar el conocimiento, sino más bien de entronizar su construcción en las matrices histórico-culturales, donde les da sentido esas formulaciones, en cuyos espacios se materializa la vida de la gente del continente. De ahí que sea importante poder volver a vincular el pensamiento a los complejos contextos del mundo de la vida social, con todas sus exigencias simbólicas y de sentido.

Más allá del conjunto de proposiciones particulares que eventualmente puedan derivarse desde las distintas concepciones teóricas, económicas, sociológicas, antropológicas, etc., es necesario poder desentrañar las lógicas constructoras de esos discursos, con el fin de poder aprender las formas de pensar que subyacen a las argumentaciones analíticas.

El mismo documento referido hace la siguiente observación: “la proclividad de la intelectualidad latinoamericana por orientar el rumbo de su pensamiento en autores predominantemente europeos y norteamericanos, como si fuera en esos países donde se estuvieran gestando permanentemente las formas básicas que dan sentido al pensamiento social”. Luego añade: “más allá del valor que puedan tener esas contribuciones, no podemos desconocer que todas ellas están fuertemente marcadas por su pertenencia a determinados contextos histórico-culturales, los cuales, directa o indirectamente, plasman la forma de construcción de los discursos, y a partir de esas formas se nos transmiten contenidos de pensamiento y acción”.

Más adelante la propuesta citada allana de manera más contundente la perspectiva dentro de este horizonte racional creado por la racionalidad/modernidad, al decir que:

Enfrentamos de este modo un problema mucho más profundo que la mera crítica a una forma u otra de expresar el pensamiento. Detrás de la inquietud de estar perdiendo nuestras propias raíces de pensamiento, se ocultan síntomas que caracterizan el actual contexto histórico latinoamericano.

Por tanto, la búsqueda de referentes teóricos básicos en países europeos o en Estados Unidos, es parte de un problema mayor que podríamos sintetizar en los siguientes términos: una marcada tendencia a reemplazar el pensamiento propio, la capacidad misma de colocarse ente la historia, por la recurrencia a la erudición bibliográfica, la cual a su vez tiene la impronta de las modas intelectuales.

Pero y aún más central, es que no reconoce la propia identidad de su producción diluyéndolo en el universalismo como problemática, o que la misma ejerza influencia significativa en la problemática, al momento de llevar a cabo los aprendizajes y las enseñanzas relativas a la construcción social del concepto de solución en el contexto de los aprendizajes matemáticos de las personas.

De acuerdo con la problemática que trata de enfrentar el proyecto de investigación doctoral, esto conduciría a un conjunto de lineamientos, posiciones teóricas y decisiones necesarias de tomar, que en vez de atender de manera directa la problemática, la alejaría de la elaboración de propuestas viables y de la solución, entreteniéndolo o tendiendo a perder el tiempo para su estudio y dedicación para el mismo, es decir, para su enriquecimiento.

II.3.1 Las cuatro grandes argumentaciones

Ahora bien, para sostener y argumentar a favor de lo anterior, se examinarán algunos de los elementos que desde la perspectiva de quien esto escribe, considera que atraviesan esta relación de no identificación con lo que somos, o por lo menos no se hacen explícitos su reconocimiento y contribución en la construcción social de los conocimientos, de la realidad y de la problemática de interés de estudio en esta tesis doctoral. Para ello se toman en cuenta cuatro aspectos o cuatro grandes argumentaciones:

1) Que la concepción “aprender por aprender”, equivalente en el ámbito científico del “conocer por conocer”, surge como parte de las disputas ideológicas protagonizadas por la burguesía contra el sistema feudal en el siglo XVIII y que, por tanto, los reemplazos o sustituciones epistémicas echadas a andar son parte de esa visión de clase que protagoniza la instalación de su horizonte racional vista desde el progreso y avance de la razón, “sin importar” en qué dirección, el hecho es que represente las simbolizaciones del progreso, mitificado y cosificado. Se desarrolla fundamentalmente en Europa. Los países considerados durante dicho periodo colonias, estaban supeditadas a los vaivenes y a las decisiones en los centros imperiales de dominación y hegemonía.

Al respecto, De Piña (2002) explica que las sociedades humanas del pasado no se preocuparon por el conocimiento sistematizado —racionalidad/modernidad— de otros pueblos y aún más, la idea de la ciencia abstracta no existía. No se utilizaba el ideal del “saber para saber”, “la ciencia por la ciencia” que hoy se encuentra vigente respecto a la postura asumida en los procesos de investigación, como en la formulaciones teóricas que se elaboran para enfrentar estos procesos de investigación social, éste es el caso de la matemática educativa. Lo que anticipa por lo menos dos aspectos relativos al mismo proceso histórico:

a) La necesidad, producto del mismo proceso de producción, es decir, que no era necesario hasta ese entonces concebirse de esta manera, pues se pensaba que el conocimiento estaba interrelacionado —ausencia de la necesidad de distinguirse y separarse.

b) El no reconocimiento en otras latitudes, fuera de Europa, que no tuviesen éstas una organización social y política de carácter feudal, como ocurrió en América Latina hasta antes de la colonización por parte de los españoles en principio y posteriormente de Inglaterra, Francia, Portugal, en fin, toda Europa.

Su preocupación radicaba en la aplicación práctica inmediata de los descubrimientos para usos diversos —y no tan diversos, sino limitados, finitos—. Para el caso de América latina, ésta se encuentra en una situación particular, ya que ella es en el fondo claramente cristiana y profundamente europea, así también su concepto de solución en el siglo XVI, como contraparte a la solución en el siglo XIX o XX.

Por otra parte, las teorías abstractas de “conocer por conocer”, señala la autora citada, son resultado de las luchas ideológicas de la burguesía del siglo XVIII contra los dogmas impuestos durante toda la edad media por las clases nobles y eclesiásticas que obstaculizaron el avance de la tecnología y el conocimiento y que, al mismo tiempo, se formalizó a través de los estados-nación recién creados con esta racionalidad/modernidad. Cada uno lo colocó como función política, ideológica en distinta forma, como fue el caso entre España e Inglaterra, o entre Portugal y Francia, o bien Portugal y la misma España, o entre Inglaterra y Francia y que, sin embargo, los fue colocando en una experiencia común respecto a la periferia, relativa a la dominación y a la hegemonía a través de la colonización, y que en las formas de ver e interpretar, como de conocer, no estuvieron ausentes.

Sin necesidad de ser contrapuestos, sino más bien complementarios o enriquecedores de experiencias para fines comunes, etc., es decir, en la diferencia no sólo conceptual sino de facto, de acuerdo con lo señalado por Hardt y Negri, para el caso de las categorías entre imperialismo e imperio, consideran la siguiente premisa: si el imperialismo fue producto europeo, el imperio es producto americano, es decir, en el tránsito de la primera a la segunda, se encuentra la declinación de la soberanía de los estado-nación y, que a partir, por ejemplo, de los recientes acontecimientos (la guerra en Irak) adquirió vigencia porque refleja esa declinación del estado-nación, sólo que la declinación se dio más en los países del tercer mundo y en los organismos internacionales como la ONU y que, en el caso de los países del primer mundo, esta relación se invirtió fortaleciendo su presencia, que ocurre sobre todo en países como Estados Unidos e Inglaterra, que debilita acaso esta relación en los estados-nación de la periferia (tercer mundo; ver Atilio Boron, 2003). Es decir, se claudicó por las inercias del intercambio global a nivel monetario, tecnológico, de población y bienes a favor del imperio.

Este movimiento, dicen dichos autores, señalará el final del imperialismo, pero no del imperio, porque esta caída es la que precisamente ha provocado su nacimiento. Por lo que volviendo a lo que se discutía como una contradicción, esos motivos por los que luchó la burguesía para instaurar su racionalidad en un primer momento y después su racionalidad/modernidad fue ganando validez, espacio y consenso mediante su elevación a la categoría de dominante y hegemónica. De ahí que la burguesía, no la que promovió los cambios de antaño sino la que reclama la herencia de dicha racionalidad/modernidad, ha colocado nuevos dogmas: erigir la razón por la razón, el progreso por el progreso, el avance por el avance sobre todas

las cosas, inventando incluso para ello orígenes, linajes¹, tradiciones, tendencias de razonamiento, lo cual conforma el tiempo y el espacio de la racionalidad/modernidad y, por consiguiente, la implantación de su horizonte racional.

Se sistematizaron los conocimientos tratando de entenderlos por sus principios y causas, gracias a ello la ciencia contemporánea surgió incontenible. Esto fue posible porque la nueva clase burguesa tomó los controles de la política y la economía y desplazó a las clases feudales de tales ámbitos. Esto afectó las visiones y sentidos de la producción del conocimiento y de las nuevas circunstancias y necesidades de ese conocimiento, en particular del conocimiento matemático, caso concreto el concepto de solución en Álgebra, donde se produjeron las modificaciones epistémicas en términos de expresión de la misma, es decir, en proveer su distintivo propio respecto a los anteriores. Quien desee comprobarlo que observe el surgimiento de nuevas áreas de conocimiento o la redefinición de la dirección de las ya existentes; por ejemplo, en el siglo XVIII nació la tendencia en Europa de presentar la historia del hombre en escalones evolutivos, donde la humanidad ha ido subiendo lentamente, pasando de poco a mucho, de lo simple a lo complejo, de menos a más; reorganiza la estructuración de sistemas conceptuales, la conexión de ideas y la generación de un pensamiento que, incluso, se observa en las formulaciones históricas, justificadas, por ejemplo, por la postura filosófica de tal racionalidad: “según Hegel, la historia universal transcurre de oriente a occidente, Asia es el principio, mientras que Europa es el fin último de la historia universal, el sitio donde culmina la trayectoria civilizatoria de la humanidad”(De Sousa², 2001).

Bajo esta modificación espacial y temporal, crearon una doble práctica: conocer, pensar, actuar, hacer, discurrir, idear..., es decir, la necesidad de romper con la visión pasada y construir una nueva, más auténtica e identificada con esta visión centrista de Europa, creando con ello un momento de transición que daba cabida a un horizonte de racionalidad, y creando sentido a otro horizonte pero desacreditando el pasado horizonte, o desvaneciéndolo completamente, o que a la par o poco a poco y que de acuerdo con sus potencialidades y posibilidades epistémicas le indicaba; “una manera nueva de ser”, es decir, que distinguía uno del otro por el carácter dinámico que adoptara en este proceso de reemplazamiento epistémico.

¹ De Piña señala, por ejemplo, que los anticuarios italianos solían escribir de vez en cuando algún pequeño ensayo sobre los hombres de la antigüedad y sus gustos estéticos, esos escritos datan del siglo XVI, cuando la clase burguesa empezó a preocuparse por adquirir piezas antiguas para aparentar viejos orígenes, antiguos linajes.

² El mismo autor dice que: la idea bíblica y medieval de la sucesión de los imperios (*translatio imperii*) en cada era, un pueblo asume la responsabilidad de conducir la Idea universal, convirtiéndose así en el pueblo universal histórico, un privilegio que por turnos ha pasado de los pueblos asiáticos a los griegos, luego a los romanos y, finalmente, a los germanos. América, o más bien Norteamérica, conlleva para Hegel un futuro ambiguo, en tanto no choque con el cumplimiento último de la historia universal en Europa.

2) Algo similar también señala Wallerstein, en referencia a las invenciones del sistema-mundo-moderno inaugurado a partir del siglo XVIII, este sistema proclamó como científicos a aquellos que han asegurado que la ciencia es el único ámbito de búsqueda de la verdad y delega la búsqueda de lo bueno y de lo bello a la filosofía, las letras y las humanidades. Lo que significa que, además de colocar sus propios fundamentos en segundo plano o nivel dentro de esta idea de “representación racional de la racionalidad/modernidad”, fue la filosofía la que lo apoyó fuertemente para la emergencia y establecimiento de los elementos racionales fundantes de las invenciones del sistema-mundo moderno; también de modo general Wallerstein indica que esa división de objetivos epistemológicos fue separada y asumida por ambas partes; aquellos que reconocen su interrelación de la ciencia con lo intelectual, lo moral y lo político y aquellos quienes la desligan para erigirla como el único sistema capaz de decidir incluso sobre lo humano, lo válido de lo no-válido. Más aún, este conjunto de creencias ha sido calificado como uno de los logros más elevados de la modernidad, dice Wallerstein.

Sin embargo, el punto que interesa situar aquí, como producto del discernimiento que se ha sostenido respecto a esta división, considerado relevante por la manera en que asume la interpretación en la práctica, por tanto su valoración de que está en el sentido de abogar por una de las partes referidas por la “neutralidad valorativa” y la objetividad con la que —según se afirma con frecuencia que es el legado analítico de Max Weber— Wallerstein la distingue, respecto a los que se desligan de que dicha postura se constituye en la única adecuada para los intelectuales en general y para los científicos sociales empíricos en particular.

Es cierto que se trata de uno de los desarrollos más influyentes en esta postura actual, de los más citados de Max Weber, el cual a pesar de que ofrece un conjunto de argumentos en la dirección de sostener esta “neutralidad valorativa” y objetiva, colocada como punto básico, referido y recordado en esta necesidad de emergencia de la ciencia como único ámbito para hallar la verdad señalada por Wallerstein, que a su vez echa por la borda la pretendida neutralidad y objetividad argumentada por la racionalidad/modernidad, citando a Weber: “juzgar la validez de los valores es un asunto de fe”.

De hecho, aunque no se reproduce aquí el pasaje e ilustración de los que hace mención dicho autor, sí provee aspectos y puntos singulares que hay que resaltar:

a) Weber, dice Wallerstein, enuncia su visión cuando se hallaba del lado de los perdedores, en la reunión de clausura de la *Verein für Sozialpolitik*³, su ensayo había sido escrito contra Treitschke y los demás profesores derechistas de las universidades alemanas que sentían que su compromiso principal no era con la verdad científica, sino con el gobierno. Los marxistas eran su segundo blanco, a menudo de un modo explícito. Esta visión suya fue separada de su naturaleza histórico-político-social para edificarlo como el argumento reductor de ser el único

³ Asociación para la Política Social.

(circunstancial en su inicio y origen) y definitivo en su implantación, en lo posterior punto central y global para la investigación y el conocimiento científico de “la ciencia”.

Con ello, puede observarse que una perspectiva favorable a la neutralidad valorativa, dice Wallerstein, se acomoda mejor a los razonamientos y presupuestos políticos de la posición del centro liberal y refuerza su énfasis en el rol político de los especialistas y en la necesidad de llegar al consenso a través de un debate sometido a determinadas cláusulas.

b) El debate se mantuvo a lo largo del siglo XIX y en especial en el XX, como un verdadero diálogo de sordos —lo dice así dicho autor—, en medio de duros enfrentamientos, como lo mostró la reciente “guerra de culturas”.

Si bien este tipo de disputa intelectual es reflejo natural de las tensiones sistémicas de un sistema histórico activo, hoy ofrece poca ayuda frente a una transición que es por completo incierta en cuanto a su resultado, por lo que se necesita, dice Wallerstein, mejores referencias sobre lo posible y lo imposible, lo deseable y lo indeseable, si se aspira a conseguir resultados satisfactorios en esta nueva transición que se abre.

En consecuencia con lo anterior, Wallerstein, Dussel y otros, señalan que el sistema-mundo moderno posee una serie de análisis teóricos acerca de sí mismo, que supuestamente es tanto descripción realista como prescripción, pero que, sin embargo, es inexacta, al reedificar una serie de distinciones binarias que adquirieron relevancia política, distinciones elaboradas todas con gran detalle teórico en el siglo XIX, y construidas sobre otras más antiguas, producto de la racionalidad/modernidad que también promovió la visión que lo sostiene y del horizonte racional construido, por lo que no es raro, por ejemplo, al observar un texto o un libro escolar, que empiezan por formular sus orígenes y sus fundamentos en algo muy trillado, recurrir desde el inicio a los filósofos o matemáticos griegos, según la razón que se pretendan mover para erigirla en dominante (aspectos fundacionales), para después pasar a los elementos importantes, “los conocimientos científicos”.

En el caso de la matemática esto es muy notorio, pues la línea de argumentación para el desarrollo de esos orígenes e inicios, la producción de conocimientos matemáticos, se sitúa centralmente con los griegos, sobre todo, visto como constitución formal del razonamiento matemático y, por ende, de los principios del razonamiento científico, con pocas alusiones a otros que hubieran contribuido al desarrollo del conocimiento. Es decir, el *quid* de este tipo de apreciaciones se encuentra en el avance o, más bien, en una ficticia necesidad de exhibir progreso en la razón y en otros aspectos por lo que tipifica las apreciaciones, interpretaciones y producciones de la nueva racionalidad y subjetividad, que bien conducen la continuidad de la producción racional y del horizonte racional preferido o deconstruible. Ello, además de que aparece en los conocimientos en general, en lo particular incluye el de la matemática, el álgebra y el concepto de solución, que recibieron con intensidad una interconexión y validez inéditas, desde el ámbito de la

formalización, abstracción y creación de universales abstractos, pero también y singular en su mitificación de la exhibición de progreso que fue colocada como contraparte al sentido aritmético y geométrico intuitivo-práctico del conocimiento matemático.

La consecuencia de cada una de estas distinciones terminó por restringirse, hoy se le puede ver al reducir el espacio de interpretación y de actividad de las personas respecto a los conocimientos, en general, a través de sus conceptos, nociones, procedimientos, formas de razonar e interpretar, como en el caso de la solución, reduciéndola sólo a su contexto analítico, despojándole de toda conexión interpretativa en otro contexto que pudiera encontrarse o que contuvo, como una manera de simplificación de la problemática y de las dificultades que incorporó, mediante la realización de los juicios sintéticos *a priori*, su síntesis o búsqueda de la razón pura, idea de manifestación del progreso, promovido por la misma racionalidad/modernidad. Esto también puede ser observado y ejemplificado a través de lo que Boyer (1994) indica en el caso de los orígenes del álgebra actual, al señalar que:

Vieta (1540-1603) había notado que en los problemas donde se implicaba *la cosa* (incógnita) generalmente se procedía por análisis. En lugar de razonar de lo conocido hacia lo que debe ser demostrado, los algebristas invariablemente suponían como dada “la cosa” (aun cuando era desconocida) y deducen una conclusión necesaria a partir de la cual puede ser determinada “la cosa”. Vieta, debido a la frecuencia de este tipo de razonamientos, llamó a esta materia “arte analítico”.

Pero, también, aunque esto último no fue observado en la direccionalidad de Boyer, lo hizo pasar como un comentario, aunque tenía gran mérito, al señalar que lo que lo movía para designarlo o renombrarlo se debió a que no le agradaba el término árabe “em álgebra”, es decir, surgió como oposición y reemplazo a lo existente, relativo al conocimiento de la época, no al inmediato sino al tipo que representa el conocimiento cultural y de enunciación de los conocimientos, proveyéndole un fuerte contexto ideológico al mismo, lo que lo vuelve ilustrativo por sus implicaciones en el surgimiento de las visiones dominantes y hegemónicas del conocimiento. Por lo que el actual sistema social histórico, dice Wallerstein, es el sistema-mundo moderno que a su vez es una economía-mundo capitalista, surgido en el largo siglo XVI y expandido geográficamente hasta cubrir el globo entero, logrando someter e incorporar a todos los demás sistemas sociales históricos de la tierra hacia el último tercio del siglo XIX. Una vez nacido comienza a operar bajo ciertas reglas explicables y reflejadas en sus ritmos cíclicos y tendencias seculares. “De ahí que las creaciones y los sentidos conceptuales de los conocimientos de la matemática anterior y posterior a estas épocas, evidencian estos hechos”, pues no era lo mismo la solución en el siglo XV y XVI que en el siglo XVIII y XIX. Véase para ello el trabajo *Cambios de paradigmas o cambios en la validación de la razón instrumental*, de Guadarrama, (2003), que sitúa en una época determinada —momento de transición epistémica y de horizonte racional—, en este caso el siglo XVIII, y examina las condiciones, las exigencias, los conflictos, las contradicciones que estuvieron presentes en la producción de conocimiento y que lo

determinaron; preferenciaron, por ejemplo, en el sentido de la matemática, lo simbólico sobre el otro sentido que tenía el carácter de que la matemática se constituía de manera retórica, sincopada y simbólica, llevando con ello otras implementaciones epistémicas diferentes a la de su creación, que alteraron los sentidos epistémicos de producción matemática como de los procesos del aprender y enseñar en referencia a la solución. Más adelante serán ilustrados algunos aspectos al respecto.

Recuperando lo hasta aquí dicho, hay que señalar que como todos los sistemas, el sistema mundo-moderno lo es, las proyecciones lineales de sus direcciones encuentran ciertos límites, después de lo cual el sistema se encuentra lejos del equilibrio y comienza a desviarse. A partir de este momento se puede decir que el sistema está en crisis y que pasa por un periodo caótico en el cual busca instalar un orden nuevo y diferente, es decir, efectuar la transición a otro sistema, donde en dichos ritmos cíclicos como caóticos establece las sustituciones epistémicas y cambios paradigmáticos del conocimiento, lo cual a su vez influye en grande en las nuevas sustituciones conceptuales teóricas, de definiciones, de prácticas, de discursividades y enunciaciones, etc., por otras que dejan a un lado o fuera, abandonándolas a su suerte al desnaturalizarlas como posibilidades epistémicas de construcción conceptual y, además, evitando la conexión entre las de reemplazo y las reemplazadas, si acaso le sirve y lo emplea para generar una “supuesta historia de las ideas”, que desvincula los por qué y sentidos de su reemplazo.

Entre “las nuevas” y las viejas, o no vigentes visiones epistémicas, como entre los lenguajes de uso y los formalizados que requiere esta racionalidad/modernidad, como también entre la solución a un problema práctico y uno específico, por la solución, como una categoría general de problemas, o entre la solución y la solución sintética y analítica, o bien entre una solución analítica-aritmética y una solución analítica-estructural, resultan ser ilustrativas, no porque exhiban los movimientos en el sentido social de su producción social —exhibir el progreso de la razón—, sino porque muestran las modificaciones que el grupo socialmente establecido dominante ejerció para exhibir dentro de esta racionalidad/modernidad progreso y avance de sus argumentos, de sus razonamientos, como de su estado de operación sobre los objetos de conocimiento y, desde luego, del sentido del saber, mitificando el valor del conocimiento científico sobre otro tipo de conocimientos o experiencias de conocimiento.

En este sentido, Wallerstein indica que es imposible predecir cuándo será el nuevo orden, cuándo habrá de estabilizarse, pues se encuentra fuertemente afectado por las acciones de todos los integrantes, elementos, componentes, mediadores de la transición.

3) Que la transformación de la universidad renacentista a humboldtiana se da como producto de esas luchas y por darle dirección a la racionalidad emergente en el siglo XVI y fundante en el siglo XVIII y XIX.

Por lo que las construcciones conceptuales del conocimiento científico, en todas sus áreas y en particular el de la matemática, evidencian esa transición, dicho de otra

forma, muestran la falta de consensos con respecto a lo que entendían y definían en sus ámbitos respectivos, o bien, eran producto de la razón que se volvía dominante. En el ámbito de la matemática, por ejemplo, el caso del concepto de función fue singular, ya que también posibilitó nuevas sustituciones epistémicas más potentes, dado que permitió la emergencia de un horizonte racional que surgió formalizando y estructurando el conocimiento matemático de la época y de perspectivas para su futuro inmediato, o el de la misma solución. Fue singular porque, en este caso, se desprendió de su connotación aritmético-práctico y geométrico-intuitivo para pasar a una analítico-simbólico-estructural, tipificando su uso, operación y sentido.

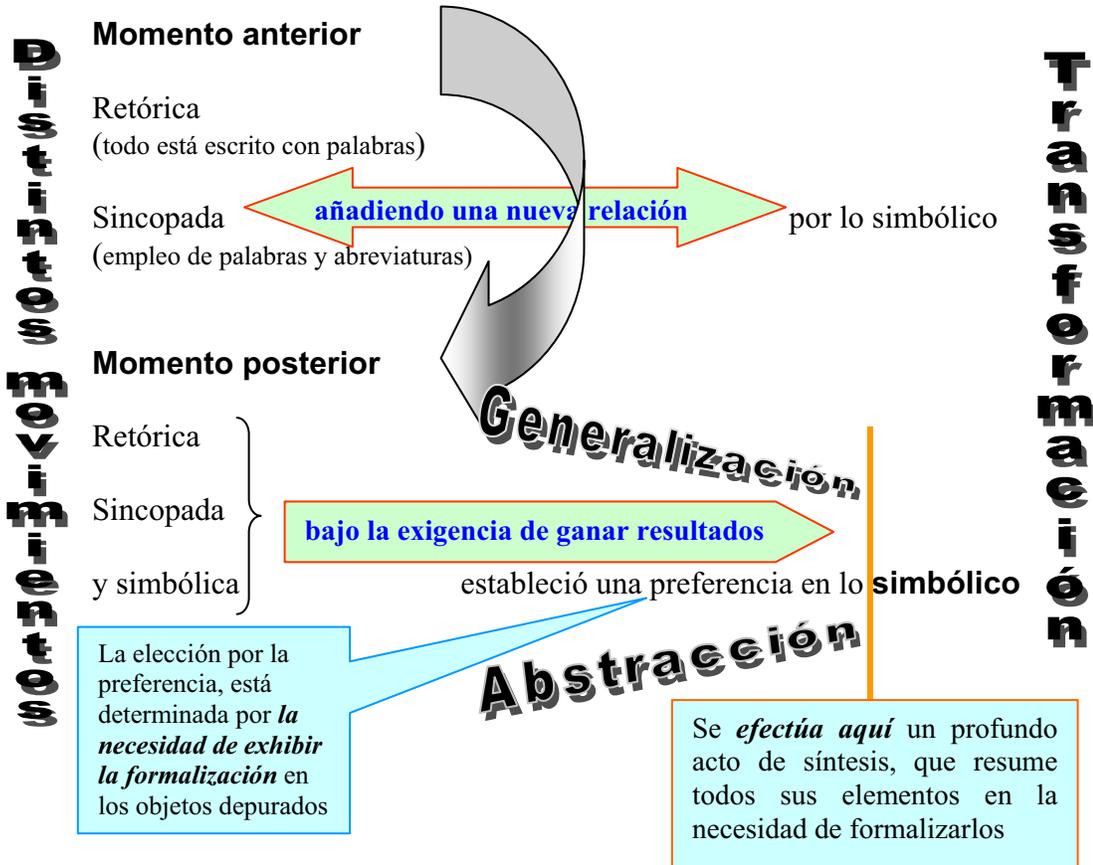
A continuación se muestra a nivel esquemático este aspecto, pues la realidad es más compleja, sin embargo, el mismo esquema da una idea del cómo operaron en sus rasgos más generales estas modificaciones epistémicas que la racionalidad/modernidad echó a andar, en la que cada movimiento implicó lo que en este trabajo se le llama *reemplazos epistémicos*, que en el ámbito de las prácticas sociales y culturales tienden a establecer entrecruzamientos epistémicos que añadirán dificultades a los procesos de aprender y enseñar la matemática y el conocimiento en general.

El sistema educativo no está del todo conciente de las implicaciones macro-sociales y culturales que se efectúan bajo las exigencias que cada reforma o reformulación de contenidos que en los campos de conocimiento se realizan, bajo la transportación y adopción de sistemas de conocimiento producidos en otros lugares, de ahí que desde el ámbito de las modificaciones, por ejemplo, lingüales, producidas por las necesidades epistémicas que su vez tratan de dar respuesta a las exigencias de la modernidad, convierten el asunto más complejo que la linealidad de la enunciación de, por ejemplo, las teorías del aprendizaje, o de pedagogías operatorias bajo la confusión de pedagogías concretas.

II.3.2 Observación de modificaciones epistémicas en los momentos de transición

La matemática, con consecuencias en el ámbito escolar, a través de su naturaleza abstracta y generalizada, alcanza a identificar entrecruzamientos epistémicos respecto a lo que las personas tienen que hacer en el momento de aprender como de enseñar. Véase el esquema siguiente:

El sentido de la matemática



A nivel más específico, respecto a la conceptualización del problema o problemas matemáticos, se ubican los siguientes cambios:

El problema concreto fue transformado \longrightarrow por un problema de cierta naturaleza.

La ecuación concreta a su vez adquirió un nuevo estatus \longrightarrow por la ecuación.

La solución a tal ecuación concreta fue modificada en su generalización \longrightarrow por la solución de una clase de ecuaciones.

Las construcciones conceptuales de las matemáticas evidenciaban esa transición o, dicho de otra forma, muestran la falta de consensos con respecto a lo que entendían y definían en el ámbito de la matemática, por ejemplo, el caso del concepto de función o el de la misma solución en este caso.

Para sostener lo anterior se tomará en principio lo señalado por W. Mignolo (2001) en su libro *Capitalismo y geopolítica del conocimiento*. Este autor con esta obra contribuye a reflexionar de qué manera la globalización está alterando también las maneras de concebir, explicar y actuar en el mundo. Uno de esos cambios son las formas de pensamiento que emergen desde las experiencias coloniales. La

particularidad de esas experiencias en América, en Asia, en África fue la subordinación y también la subalternización de formas de conocimiento. Señala que no sólo el capital se extendió sino que, a medida en que lo hacía, con el capital iban juntas formas de pensamiento, tanto de análisis y justificación como de crítica. Para ello Mignolo dice que en los siglos XVI y XVII el cristianismo impuso formas de pensar y no sólo de creer. Junto con los monasterios y las tareas de evangelización se creaban también universidades en las cuales se impartían conocimientos y formas de hacer conocimiento de la universidad renacentista europea, *trivium*, *cuadrivium*, gramática, retórica, dialéctica, lógica⁴.

A finales del siglo XVIII y durante el siglo XIX, las nuevas formas fueron acompañadas por la secularización pero, al mismo tiempo, por la complicidad entre evangelización y misión civilizatoria. Por otra parte, la universidad kantiana-humboldtiana fue desplazando a la universidad renacentista y la filosofía de la Ilustración fue convirtiéndose en modelo de pensamiento que acompañará a las nuevas formas de colonialidad.

Dice Mignolo que en América Latina los principios de la Ilustración fueron enarbolados por los sectores criollos, políticos e intelectuales como una justificación de la descolonización hispánica y de los principios de progreso y civilización. Hacia principios de siglo veinte el marxismo siguió el mismo derrotero. Ello, siguiendo el modelo continental, deja lugar a la fuga de la reflexión hacia dimensiones socio-políticas que no están inscritas en la historia de la filosofía europea, por lo que la caracteriza y se explica las razones de este proceso colonializante del saber. Habría así una “carencia” en el pensamiento europeo y una “diferencia” que provoca la carencia o su ausencia.

En resumen y adelantando juicios, se señala que la cuestión es manifiesta, en este carácter globalizador la diferencia entre enunciados de contenido semejante, pero proferidos en distintos lugares geopolíticos de enunciación y referidos a distintos terrenos históricos geopolíticos constituidos, hace en verdad la diferencia colonial epistémica. Pues en ella se diseña la geopolítica del conocimiento y las relaciones asimétricas de poder que relacionan reclamos identitarios en la epistemología, en la fundación y condición del conocimiento, escenario éste desde el cual ha sido configurado por el imaginario de la modernidad/colonialidad.

4) Una de las grandes herramientas que creó esta racionalidad/modernidad, que fundó y argumentó racionalmente, el horizonte racional de la misma racionalidad, fue la

⁴ El cual corresponde al modelo que tuvo vigencia hasta finales de la Edad Media. La versión que desemboca desde los griegos acerca de lo que consideraban por una comunidad de conocimiento a través de la academia (Platón) y el Liceo (Aristóteles), que a su vez descansa en el principio de la Patrística, la cual consiste fundamentalmente en un iluminismo teológico, cuya base didáctica son el *trivium* (retórica, lógica y gramática) y el *cuadrivium* (aritmética, cálculo, astronomía y música), identidad pedagógica que supone una teoría de las facultades e integración pragmática propiciada por el enfrentamiento de lo aprendido con la vida cotidiana, según lo refiere Ramírez J. y González J (1998), en su artículo (ver referencias).

filosofía, sustento de la visión dominante y hegemónica de esta racionalidad. Contradictoriamente en el siglo XIX la coloca en un plano secundario respecto a la racionalidad misma —efectuando su desplazamiento epistémico—, como elemento fundador para colocar y elevar una nueva racionalidad, un nuevo horizonte racional, la razón parametrizada por este sistema-mundo moderno que erigirá y elevará la razón científica como argumento de validación de esta racionalidad/moderna para la validación y sustentación del mismo, es decir, la necesidad del reemplazamiento del sistema de razón. De ahí su interrogante: ¿se trata de cambios de paradigmas o cambios en la validación de la razón instrumental?

Si se observa, los cambios en la conceptualización epistémica de, por ejemplo, la matemática (por lo consiguiente de los direccionamientos e implicaciones en la enseñanza y los aprendizajes), tenderá a observar la validación de los cambios en la validación de la razón instrumental, más que en los cambios paradigmáticos que se establezcan como momentos de transición que el sistema-mundo moderno ponga en circulación. Por ejemplo, al revisar la memoria de Chargoy (2000) y el extracto del resumen de Cantoral y Farfán (2000), se encuentra una coincidencia de ubicación temporal y espacial —respecto a los cambios epistémicos o maneras de ver y entender los conceptos que ambos y en sus respectivas áreas encuentran, Álgebra y Cálculo, respectivamente— entre los dos trabajos, al atender problemáticas distintas.

En el primero, un aspecto inicial se refiere al análisis histórico-epistemológico, que establece el concepto de base de un espacio vectorial, divide en tres partes su primer análisis (y sección) acerca del origen algebraico en el marco de los sistemas de ecuaciones, con trabajos que van de Euler a Frobenius. Segunda parte, el origen geométrico, con trabajos de Grassmann. La tercera parte considera los trabajos de Peano hasta Steitz, culminando con una axiomática en la teoría unificadora del Álgebra lineal, dice:

Cuando el álgebra se constituyó como disciplina independiente, su tema central y único fue la solución de ecuaciones. Durante un primer periodo se trató de la resolución de ecuaciones particulares por tanteos sucesivos; el método que se aplicó fue puramente empírico. Cada ecuación fue objeto de un tratamiento particular.

Véase que es coincidente esta exposición con la de Chargoy, aunque no dicha de igual forma. Si se la mira con los argumentos que formula Cantoral y Farfán: “todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica”, es la misma tesis sustentada por el otro autor⁵, pues se considera que no había una necesidad explícita de ir más allá en el estudio de los fenómenos o de las temáticas de los procesos conocidos hasta ese momento, como también la de diversificar el área referida a nuevas temáticas del álgebra y, en general, de la matemática, como a su vez en el ámbito de los procesos macro que se tenían antes del siglo XVIII, pues los productos que se comerciaban eran determinados.

⁵ De que el conocimiento matemático, considerado éste como avanzado, tiene un origen y una función asociada con el grupo socialmente establecido.

Además se ha señalado antes (Guadarrama, 2002), que la visión de dichos autores se refiere al hecho de que “el conocimiento matemático es avanzado, y tiene un origen y una función social asociada con el grupo socialmente establecido”. Los no europeos, por consiguiente, fuera de Europa, antes del siglo XVI, y en Europa por los europeos en épocas posteriores, por tanto determinadas. Antes del siglo XVIII la visión cognitiva, epistémica y filosófica, que Europa enunciará después como uno de sus grandes logros⁶, no se encontraba en Europa, sino localizada en otras zonas y culturas como la china o la musulmana, por tanto, hay que ver aquí una nueva condición geohistórica que demarca este pasaje, de encontrarse geohistóricamente situada, por ejemplo, el álgebra en la cultura musulmana, que miraba a su vez a Europa hasta antes del siglo XVI como la región de los bárbaros, por lo que en términos de esta lógica, aquélla no tenía la necesidad de expansión. De ahí que sea la

⁶ Que presentaría por un lado la acción y operación racional occidental y por otra el progreso, que debería evidenciar un avance conceptual en relación con lo anterior, de ser una síntesis en la búsqueda del conocimiento esencial en un espíritu común, la cual contendría como código primordial a lo científico para darle el sentido psicolingüístico que sintetizara los actos comunes, que sintetizara la experiencia de ese momento y de las circunstancias, pues a través de los altos códigos comunes se propone su noción psicológica de comunidades epistémicas, en opinión de Bruner. Habría que agregar que también la colonialidad en sus dos vertientes –del poder y del saber–, actúa con mayor “autoridad” en el otro, en la medida que se va imponiendo, para que a su vez se vuelva a imponer. Recuérdese el debate filosófico que revistió de ahí para adelante toda la hegemonía conceptual. Hay que ver algunos momentos y puntos de discusión. Del Búfalo (1999) observa esta tendencia de presentación del conocimiento y, en relación con la experiencia, revela la estrecha alianza entre el devenir de la razón y la reflexión sobre el método para asegurar el dominio de la razón en la constitución del saber científico. La crítica trascendental quiso ser la culminación grandiosa de este esfuerzo para asegurar definitivamente el campo de la experiencia posible como el único terreno legítimo del quehacer científico. Pero la solución que Kant le dio al problema de la experiencia, formulando la posibilidad de juicios sintéticos *a priori* dejó insatisfechos a los filósofos y desorientados a los científicos de la naturaleza, en un momento en que las ciencias naturales experimentaban su mayor desarrollo y aparecían en forma independiente las ciencias sociales. Por lo tanto, el periodo postkantiano está signado por una agudización de la preocupación por el método científico que da origen a la moderna epistemología. La realidad fenoménica construida mediante los juicios sintéticos *a priori* hacía converger la tradición racionalista continental con el empirismo inglés, dando solución al problema de cómo formular leyes de validez universal a partir de la experiencia. Pero este modo genial del idealismo trascendental de fundir ambas tradiciones chocó con el gusto positivista que se iba difundiendo como corolario de los éxitos de las ciencias empíricas. Así, dice Del Búfalo, hombres como Avenarius y Mach quisieron formular una versión muy adulterada del criticismo kantiano en sus reflexiones sobre los principales problemas filosóficos de la física de finales del siglo XIX. Pero al desvincular la actividad subjetiva del conocimiento de la dimensión trascendental en que la había colocado Kant, la teoría del conocimiento, para mantener su soporte empírico, terminaba por ahogarse en el psicologismo o en el escepticismo. Kant distingue tres tipos de juicios: *Analíticos a priori*, *sintéticos a posteriori* y *sintéticos a priori*. Los *analíticos a priori* son exactos, pero no aportan ninguna información, ya que sólo son claros cuando son parte de alguna definición; los *sintéticos a posteriori* sí aportan información, pero están sujetos a los errores de la percepción; los *sintéticos a priori* son exactos y aportan información, son obtenidos por intuición y son la fuente del conocimiento. Por medio de los juicios sintéticos *a priori*, la mente impone condiciones sobre los objetos del mundo real para que puedan ser apprehendidos (para más detalle, ver Guadarrama, 2002a).

cultura, los procesos de conocimiento y civilización ámbitos correlativos de la expansión económica.

Además, es España la que inaugura esta etapa de expansión global del comercio y del capital⁷. En el siglo XVI, “cuando Cristóbal Colón emprende la travesía oceánica en el año de 1492, los europeos pensaban que las tierras de Europa, el norte de África y Asia, eran la totalidad del mundo. Un cuarto continente y otro vasto océano eran inimaginables” (Montemayor, 2001).

Hay que recordar que los íberos apenas están saliendo de una larga guerra contra los musulmanes, finiquitada en 1525, con la derrota de estos últimos, que además se procesa junto a las disputas religiosas y políticas que en Europa traen a la Reforma y la Contrarreforma, y también la forma y momento de resistencia a la modernidad/racionalidad emergente. Por otro lado los británicos, un siglo después de la llegada de los íberos, procedentes precisamente de la Reforma, elemento clave del matrimonio del poder con la modernidad/racionalidad, establecen dos puntos de vista y de concepción diferentes en el mismo centro de Europa.

Pronto España, a raíz de las condiciones sociales, materiales y económicas, cederá el paso a nuevos hegemonías como Inglaterra, de ahí que por parte de la cultura musulmana no había una necesidad de expandir las ideas, pues había dejado en España una fuerte herencia, por tanto de su visión del mundo, la que, por otro lado, la misma España luchaba por constituirse en Estado-nación y salir de sus conflictos, restringe su participación en una nueva repartición del mundo al que influenciará con

⁷ Precisamente los viajes promovidos por los españoles fueron financiados con capitales no españoles, en particular de Italia, de ahí que la empresa que emprendió España, la colonización de América favorecería, en este proceso de colonización, la expansión comercial y financiera a favor de los italianos, en particular de los de Venecia, luego los viajes no sólo fueron en busca de nuevas mercancías, especias como ellos les llamaron, sino también de búsqueda de posibilidades materiales para su expansión total, de ahí que familias como los Medici serían favorecidas con parte de los botines producto de los saqueos de piezas de oro de los indígenas colonizados. Un ejemplo en otro orden que muestra la gran influencia de estos financieros internacionales y su poder puede encontrarse en la producción científica, cercanos a la época, particularmente de los trabajos de Galileo Galilei y sus nuevos descubrimientos astronómicos: las estrellas brillantes, que en realidad eran satélites de Júpiter. Galileo descubrió cuatro de los doce satélites de Júpiter: Io, Europa, Ganamides y Calixto, los bautiza “astros mediceos”. Su declaración ejemplifica bien lo aquí dicho: “Por lo cual, habiéndome correspondido claramente por deseo divino servir a Vuestra Alteza, recibiendo de cerca los rayos de tu increíble clemencia y benignidad, ¿qué hay de asombro en que mi ánimo tanto se inflamase que día y noche no pensase casi en otra cosa que en la manera de hacerte saber cuánto anhelo tu gloria y cuán agradecido te estoy, yo que me hallo bajo tu dominio no sólo por voluntad, sino también por nacimiento y naturaleza? Así las cosas, afortunado *Cosme* Serenísimo, habiendo explorado yo estas estrellas desconocidas de todos los astrónomos anteriores, con todo derecho determinaré asignarles el nombre augustísimo de tu stirpe. ¿Por qué, si fui el primero en observarlas, me habría de disputar alguien el derecho de imponerles incluso un nombre, llamándolas *Astros Mediceos*, confiando en que gracias a esta denominación reciban esas estrellas tanta dignidad cuanta confirieron las otras a los demás héroes?” Un dato de pertinente aclaración: en un principio pensó en llamarlos astros cósmicos (no de “cosmos”, sino de Cosme II de Medici, cuarto gran Duque de Toscana). Finalmente lo dedicó a la familia. El texto está fechado en Padua, el 12 de marzo de 1610, titulado *Sidereus Nuncius* (Tomado de Galilei, Galileo. *La gaceta sideral*, Alianza Cien, Conaculta, 1994).

otra visión —al menos distinta a la de Inglaterra, que también se está constituyendo como Estado-nación—, de ahí que los procesos de concebir y construir los conocimientos, incluso científicos, las razones entre ambos serán otras, diferenciadas.

Por lo que la cuestión a la que se refiere Cantoral y Farfán acerca de los grupos socialmente establecidos —en el sentido de visión del mundo, del conocer, epistémico, cognitivo, cultural tecnológico—, se encontraban no en Europa propiamente, pues por un lado expresaban los de la dominación sobre España y, segundo, porque los españoles no representaron lo mejor y lo más avanzado de Europa, respecto a Inglaterra, pues eran los últimos del sur y los primeros del norte respecto al sur europeo. De ahí que los flujos antes del siglo XVIII, sobre todo dominados por capitales internacionales —es decir, no de España—, se encuentran en pleno crecimiento y no establecen ninguna necesidad de mirar y estudiar en forma continua la otredad. He aquí otra razón de por qué no había necesidad explícita para ampliar y generalizar los procesos de comprensión de la realidad y de los demás temas, como de los procedimientos para descubrir patrones macro del comportamiento de la sociedad, económicos-políticos y culturales, por tanto de los procesos de conocimiento científico, y desde luego matemático, en la época de expansión española.

De ahí la coincidencia y coherencia encontrada en ambos trabajos de los autores ya mencionados, aunque de naturaleza distinta, también que se entienda mejor la pregunta: ¿por qué se trataba como tema central y único la solución de ecuaciones en el área del álgebra?, porque se trataba de resolver una necesidad práctica y concreta, de ahí que tampoco había razón de pensar, al menos desde la necesidad misma, en ampliar el horizonte de racionalidad, es decir, de extensión del horizonte discursivo, formal y pragmático, como de conocimiento y estudio o de indagación científica, por tanto distinguir así una ausencia de razón —dentro del horizonte racional dominante— y profundizar su temática, el estudio de la solución, por ejemplo. Ya se mencionó que apenas se estaban constituyendo las bases para ello, por tanto, sólo las necesidades racionales, culturales y epistémicas harán posible formularse ese requerimiento de estudio de los procesos en forma más general, más global, que den cabida a nuevas clasificaciones, a la construcción de nuevas categorías epistémicas. He aquí la razón de no haber en esa época necesidad de determinados problemas o problemas de una naturaleza determinada —en este caso los del álgebra.

Si todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica, debía ser coherente entonces con la postura social, cultural, racional, cognitiva y epistemológica actual, por tanto, considerar sólo una solución, trabajar un tema, resolver una ecuación, hallar una solución, estudiar un fenómeno que expresa una resolución por tanteos y de manera sucesiva, no tan directa, sino poco a poco, de una búsqueda empírica, a lo que se refiere Chargoy, aunque éste no lo inscriba en esta relación epistemológica y de conocimiento situado, pues estas visiones correspondían a ese problema particular, si se desea, que se requiere estudiar, tantear explorar y, empíricamente, validar, es decir, desprovista de su generalización.

Desde luego que con esto no se niegan los intentos desde el pensamiento, desde esta racionalidad misma, de la necesidad de crear nuevos horizontes racionales, por una búsqueda y diseño de estrategias de ataque a nuevos problemas. Por lo que entender en este contexto geohistórico la solución implica considerarla en un contexto más pragmático, como aquello que resuelve el problema específico, bajo un conjunto determinado de operaciones, con una cierta secuencia, con un contexto concreto, de procedimientos numéricos específicos, no expresados necesariamente en lenguaje algebraico, sino, incluso, que se le podría llamar un lenguaje más de uso, más de la cotidianidad, o al menos más cercano para las personas que están trabajando con la solución (hay que ver las respuestas de los estudiantes de UPIBI, para contrastarlas con esta aserción).

Esto último es correspondiente y coincidente, además, con el análisis que esta investigación pretende hacer, la complejidad de los hechos que fueron conformando no sólo una historia de las ideas o de las circunstancias, sino de los momentos y condiciones que se fueron imponiendo, como los ritmos, las visiones, las maneras de trabajar, de concebir y de entender de esa época, así como de establecer la conformación de los conocimientos con las culturas y de los desarrollos sociales, económicos, por consiguiente una visión epistémica de ese momento, de esas circunstancias, como lo muestra el ejemplo del binomio de Newton, constitutivo de su época.

También es importante contrastar las respuestas que proporcionaron los profesores del nivel superior en la investigación de Guadarrama (2000), al formular que en todo aquello que se intersece debe haber una solución específica, y si ésta es relacionada con gráficas que expresen esta relación, ello implicará el reconocimiento que lo que se interseca se le clasifica como una solución.

Lo singular a estas alturas de la discusión es identificar, localizar y ubicar dichas coincidencias, que a pesar de ser obras diferentes por los contextos matemáticos —cálculo y álgebra—, aunque con motivos coincidentes —la búsqueda de la verdad científica—, ambas están hablando de condiciones similares, en las que Chargoy, al identificar temporalmente los cambios y por tanto los cambios epistémicos en relación con el Álgebra, coincide con la temporalización del paradigma identificado por Cantoral y Farfán, cuando dicen que: “hasta el siglo XVIII comenzó plenamente la búsqueda de métodos más generales para resolver ecuaciones y para plantear, asimismo, problemas generales tales como la existencia o no-existencia de soluciones”.

En otro plano habría que agregar, en relación con la cita anterior, que ello se cumpliría también al diversificar las temáticas de estudio, las maneras de concebir, entender y construir los procesos de aprender y enseñar en general. Al respecto, una nueva jerarquización y clasificación, que habría de encabezar Hilbert, a finales del siglo XIX y principios del XX, atendería la problemática de la matemática del siglo que se iniciaba, la cual influenciará de modo profundo los procesos de entender, hacer, construir, concebir, explicar y practicar la docencia.

Otra más de las aportaciones con las que esta investigación coincide, señaladas por Cantoral y Farfán, es la existencia de dialécticas entre el uso y el símbolo, no sólo de carácter discursivo sino también de conformación de saberes, de creación de sistemas conceptuales, ya que, por lo antes señalado, se refiere al establecimiento de formas de validación de la razón instrumental, como una manera de dominar la subjetividad global, que persiste hasta nuestros días, las cuales, en efecto, dan testimonio de la relación entre la actividad y el objeto, aunque lo separen y atomicen, lo que implica mayores dificultades al momento de trabajar en el sistema educativo y cultural, que divide los sentidos epistémicos y cognitivos de los saberes y de los conocimientos mismos, como en el caso de la matemática y del concepto de solución en específico, pues para la población escolar observada en esta investigación, la definición de solución analítica, es una y otra cosa en la representación gráfica asociada de la misma⁸, vista a través de las gráficas que se les presentaron o también al momento de que observaron las gráficas que representan planos coincidentes, al grado de que una profesora ya no pudo más que decir: “juntitas como las tortillas” y luego, igual que otros profesores, que a pesar de que estuvieran muy juntas siempre hay una separación y por tanto no había solución.

Así, hay que concluir y señalar que esta visión —analizada a través del enfoque histórico-epistemológico— del horizonte racional, desde una perspectiva geopolítica del conocimiento, implica una problemática más compleja, en tanto las observaciones hechas tienen mayor profundidad y esto patentiza la necesidad de considerar más aspectos, con el objeto de contextualizar mejor los antecedentes y problemática de la construcción social de la solución.

Además, se acepta la visión de seguir una aproximación que se reivindique como sistémica, ante la necesidad de explicar fenómenos complejos, donde el concepto de integridad resulta de vital importancia para la “estabilidad” investigativa, toda vez que la modificación, o no consideración, como de supresión de sus elementos o de algunos de ellos, sin tomar en cuenta la estructura interna, puede afectar al conjunto mismo; la comprensión de éste, así lo propone Mignolo, sólo puede ser percibido desde una geopolítica del conocimiento, más que desde una historia de la filosofía occidental. Es decir, que se trata de una “historia” que emergió

⁸ Este punto de vista incluso se observó en un miembro del auditorio —profesor de la licenciatura en Física y Matemáticas de ESFM del IPN—, en la 4ª Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas, mayo de 1999, al momento de exponer el trabajo *Los modos de pensamiento sintético y analítico en el Álgebra Lineal: el caso de la solución de un sistema de ecuaciones lineales*, al cuestionar a quien esto escribe que estaba pidiendo dos cosas diferentes y que por eso veía él que no hubiera relación entre la definición de solución para sistemas de ecuaciones lineales y las representaciones gráficas asociadas a la solución, como de aquellas de no solución en sistemas de ecuaciones lineales, el cual era presentado ahí como producto de la indagación realizada con profesores del nivel de educación superior. El profesor referido indicó que eran cosas diferentes, que se le estaban pidiendo a los entrevistados cosas distintas, por eso —señalaba—, no había correspondencia entre una y otra, entre la definición y su relación gráfica asociada de la solución. De hecho, señaló que pedirles a los entrevistados esto último —las representaciones gráficas asociadas al sistema— era cognitivamente más elevado que el de la definición, por eso señaló que eran diferentes.

en el siglo XVI a consecuencia de una doble operación epistémica, la colonización del tiempo, que se refleja en aspectos como la invención de expresiones, entre otras, el descubrimiento de América, de historias y linajes, de categorías sociales determinadas por un carácter económico-político, pero, también fueron cuestiones de la cultura europea y no europea, de los indios o indígenas, etc., como un hecho histórico definido, la invención y clasificación de la historia, una colonización del espacio. Europa representa el progreso y el avance, y la barbarie es América. Pero, además, para erigirse, es decir, para ser emergente, en el contexto de la racionalidad/modernidad, Europa rompió los sentidos epistémicos anteriores y coloca aquellos que le permitieran direccionar sus orígenes y fundamentos desde un pasado filosófico, matemático ajustado, donde los reemplazos epistémicos operados a través de los diferentes horizontes de racionalidad esgrimidos a través de la racionalidad, dan cuenta de las modificaciones en el plano micro, la construcción social de la solución, del álgebra, de la matemática y del conocimiento científico en general.

Así, en vez de que se le considere una historia de las ideas, una historia de la filosofía de las ideas, ésta más bien expresa una historia de la construcción y producción bajo determinadas circunstancias de dichas ideas. De ahí la importancia de la geopolítica del conocimiento, por lo que esta aproximación intenta ser una construcción geopolítica del conocimiento matemático, para poder dilucidar los cambios que se operaron no sólo a nivel macro sino que imprimieron cierta dinámica, practicidad, cognición, didáctica y episteme en los procesos micro, como el quehacer cotidiano de los pensadores, matemáticos, filósofos, entre algunos constructores de esta realidad, de ahí que la metáfora del “agua que fluye”, su generalización, serán necesarias para mostrar la construcción alternativa de epistemologías emergentes y no emergentes.

Desde entonces, dice Wallerstein (2001), el mundo se encuentra en un punto de transición hacia otro, distinto. En particular y respecto al marco actual del “sistema de saber”, opina que ya no sirve igual que antes, pues infiere la idea de que el saber científico y el filosófico-humanístico son radicalmente diferentes, como si constituyeran dos formas intelectualmente opuestas de “saber” el mundo —este autor señala, en este sentido, que en algún momento se sostuvo la tesis de “las dos culturas”. Ella no sólo se está volviendo inadecuada en tanto que explicación de la masiva transición social que atravesamos, sino que incluso se convierte en un obstáculo a la hora de enfrentar la crisis de manera inteligente.

El mismo Immanuel Wallerstein señala que el sistema-mundo moderno se aproxima a su fin y que éste ha ingresado en una era de transición hacia un sistema histórico nuevo, cuyos contornos no se los conoce aún —no podemos conocerlos por anticipado—, pero cuya estructura sí se puede contribuir a modelar. Más adelante refiere que el mundo hasta ahora “conocido” ha sido el de una economía-mundo capitalista que ya no es capaz de manejar las presiones estructurales a las que está sometida. Considerar esta teoría para explicarse la gestación de una nueva racionalidad, que a su vez provea elementos novedosos para la investigación en matemática educativa y la producción de conocimiento en la idea de profundizar el

análisis racional acerca del proyecto de investigación presente, bien vale la pena. La idea es resolver el punto fundacional de la construcción social del concepto de solución y mostrar lo acertado de su formulación elaborada y escrita en la memoria predoctoral y a lo largo de un conjunto de escritos que poseen esta naturaleza analítica del reflexionar la problemática, yendo más allá de la inmediatez de las explicaciones que de manera tradicional se ha acostumbrado dar ante problemas de esta naturaleza. La relevancia de esta aseercción es que sostiene una línea argumentativa a favor de los siguientes puntos:

1. Que existe actualmente una visión global del mundo proveniente del sistema-mundo que lo construyó y lo constituyó desde el siglo XVI para describir la diferencia, que sostiene:

- a) la producción cultural de esta misma visión,
- b) que por tanto es productora de conocimientos y saberes —incluidos los científicos y técnicos— en general, que actúan en el sentido de fortalecer y sostener la preeminencia de esta visión,
- c) que este punto no sólo rige el pensamiento sino también pauta el comportamiento social, cultural, lingüístico, de las personas sobre las que actúa y,
- d) que en su pretensión de abarcar más, es decir, su extensividad, tiende a homogeneizar todo los aspectos de la vida (sentidos, elecciones u opciones, direccionamientos, interpretaciones, paradigmas, posturas epistémicas, etc.) que inciden en lo objetivo y lo subjetivo de las personas, lo que hace que desarrollen ciertos comportamientos por sistema, a lo que se le ha denominado aquí parametrización de dicha producción de conocimiento. Que vuelve a su vez a producir y reproducir más y mejores condiciones objetivas y materiales para su prolongación como sistema, estableciendo con ello un horizonte racional que tiende a actuar sobre todas y cada una de las cosas, actividades, quehaceres, cultura, conocimientos, desarrollos, tecnologías.

2. Que éstas a su vez actúan en el plano epistémico, el cual es uno de los modernos aspectos que a esta investigación le interesa precisar, ya que se invisibilizan las maneras hegemónicas de conocer y actuar en función de esta dirección de producción, de racionalidad llamada racionalidad/modernidad de conocimientos, que ejerce gran influencia no sólo en los constructos epistémicos de este horizonte racional, sino de la conformación de las mismas visiones epistémicas que ha echado andar, desde su inauguración, hasta nuestros días.

Pero, a la par y contradictoriamente a ello, afecta las prácticas de producción de conocimiento, contenido de este conocimiento, interpretación de este conocimiento y desarrollo de subjetividades, lo mismo que de la difusión del mismo, traducido en una separación y después en un rompimiento con estas prácticas de producción de conocimiento social y cultural, generadora además de contrasentidos

absurdos. Como no menos importante ha sido la dosificación, graduación o administración en el tiempo y en el espacio de ésta socialmente, que rompe los pausamientos sociales y culturales que creó por anticipado, vuelve anticultural el horizonte racional para la búsqueda de nuevos horizontes, sentidos culturales, de producción de esos sentidos culturales, lo que hizo aumentar su presencia en la educación, en todos los niveles, creando con ello un encadenamiento no sólo en la producción de ese pensamiento y la extensión del mismo, sino también en el comportamiento social de los que aspiran escalar el sistema educativo —pues se volvió fuertemente excluyente. Éste es uno de sus logros desde fines de la década de los cincuenta en México, véanse para ello los siguientes puntos:

- El de la cultura, que produce y reproduce subjetividades como horizontes de racionalidad y producción y control de las mismas.
- El de los conocimientos científicos: en la investigación, en la educación (en su vertiente de aprendizajes como de su enseñanza).
- El de la tecnología, bajo la designación de criterios de elección de una tecnología por otra.

Sin embargo, para que todo lo anterior tenga sustento, conviene saber, lo cual no está por demás, acerca de ¿qué mundo estamos hablando o hemos conocido o reproducido a lo largo de este tiempo?, o ¿a qué sistema-mundo moderno se refiere dicho autor?

Para contestarlo hay que considerar las implicaciones, mencionadas líneas atrás, que provocó el esfuerzo de un grupo internacional de estudiosos distinguidos y agrupados en la comisión Gulbenkian, entre ellos Inmanuel Wallerstein, que tuvo el propósito de reflexionar acerca del presente y el futuro de las ciencias sociales, y la matemática educativa no escapa de eso al poseer fuertes lazos y componentes sociales. Por lo que también en parte afecta y por consiguiente importa su consideración en todo discernimiento acerca de esto, ya que incide en las formas de investigar, interpretar, formular, argumentar, ver la problemática, sostener y refutar, definir objetos de estudio o problematizarlos, pensar y efectuar las prácticas correspondientes y, desde luego, tienen incidencia en el particular interés de desechar u optar por una elección epistémica, a lo que se le ha llamado operación de sustitución o reemplazo epistémico.

Esta comisión, creada en 1993, y que presentó un documento titulado: *Informe de la Comisión Gulbenkian para la reestructuración de las ciencias sociales*, sostiene ahí que parte de la crisis estructural de la economía-mundo capitalista tiene que ver con el hecho de que estamos presenciando el fin del modo en que hemos “sabido” el mundo, en el sentido de que el marco actual de nuestro “sistema de saber” ya no sirve como antes, por tanto afecta no sólo al hacer investigación, sino que tiene consecuencias en los resultados que se derivan de ella, en el tipo de razonamiento con el que se ve la realidad, de hecho hasta el estudio de los objetos de conocimiento formulados, en particular de la matemática educativa, al ser parte de la producción

material, objetiva y subjetiva de la cultura que provee el sostenimiento del sistema-mundo moderno.

En particular, y respecto al actual marco de nuestro “sistema de saber”, al que el autor se refiere como que “ya no sirve”, pues advierte que la idea de que el saber científico y el filosófico-humanístico son radicalmente diferentes, como si constituyeran dos formas intelectualmente opuestas de “saber” el mundo. Tal idea fue concebida como parte del marco ideológico del sistema mundo moderno, y sentencia que habrá de desaparecer junto con la extinción del sistema mismo, pues la transición de un sistema histórico a otro es fruto de una desviación en la trayectoria, coincidente por cierto con la interpretación de Dussel y Casanova (2002), al sostener que lo que hoy se conoce como democracia o socialismo no es y no fue lo que dice haber sido.

Ello también conduce a hacer consideraciones en relación con la idea de que: siempre fuimos concientes de que el ejercicio del saber social implica no sólo cuestiones intelectuales sino también morales y políticas. Dichos autores advierten que en las numerosas culturas que preceden a la construcción del sistema-mundo moderno aceptaban que las tres cuestiones eran inseparables y que, si aparecían conflictos, las consideraciones morales debían prevalecer y definir el resultado. La idea actual de que deben ser tratadas o abordadas como si fueran cuestiones independientes es un invento del sistema-mundo moderno, como también lo fue la postura filosófica, sustento para elevar una visión y distinguirla de las demás. Al respecto, Habermas, en su libro: *La modernidad: un proyecto incompleto*, dice que:

La palabra moderno en su forma latina *modernus* se utilizó por primera vez en el siglo V a fin de distinguir el presente, que se había vuelto oficialmente cristiano, del pasado romano y pagano. El término moderno, con un contenido diverso, expresa una y otra vez la conciencia de una época que se relaciona con el pasado (la antigüedad) a fin de considerarse a sí misma como el resultado de una transición de lo antiguo a lo nuevo.

Algunos escritores limitan este concepto de modernidad al Renacimiento, pero esto históricamente, es demasiado reducido (...) La gente se consideraba moderna tanto durante el periodo de Carlos El Grande, en el siglo XII, que en la época de la famosa querrela de los antiguos y los modernos, es decir, que el término apareció y reapareció en Europa exactamente en aquellos periodos en los que se formó la conciencia de una nueva época a través de una relación renovada con los antiguos y, además, siempre que la antigüedad se consideraba como un modelo a recuperar a través de alguna clase de imitación.

Lo anterior es importante mencionarlo porque es usual de las aportaciones, como de las personas que realizan esos aportes, pensar que: el sistema de conocimientos científicos incluidos la matemática y su enseñanza actual son independientes de esta visión o de la producción de esta visión de sistema-mundo moderno y de la producción cultural, de la cual los conocimientos matemáticos, por tanto educativos, son parte del sostenimiento de dicha visión. Esto se observa en la asignación de roles que se provee a cada una de las que posteriormente se llamó ciencias, al igual que de las nuevas —como la matemática educativa— que se crearon o están en proceso de su creación y crecimiento. Por ejemplo, dice De Piña (2002), que la sociología le dejó a la antropología el estudio de los grupos marginados

—indios, negros, etc. —, poco desarrollados, que puede llamárseles “nativos” de manera genérica, con ello se forma también la etnología; el pensamiento científico, entre otros, de la antropología, sólo pudo aparecer hasta el siglo XIX.

La lingüística tradicional estaba dedicada a buscar el parentesco de las lenguas, la cual suponía que las diferencias lingüísticas, así como la existencia de la diversidad lingüística, es resultado de la desmembración de un mismo tronco común y que las lenguas, al igual que los seres vivos, nacen, crecen, envejecen y mueren fuera de la voluntad humana⁹, producto de las desviaciones del tronco lingüístico de origen. De hecho Maynes (2001) se refiere al hecho de que los objetivos de sus trabajos deberían estar encaminados a establecer el parentesco genético de las especies lingüísticas, lo que dejó lugar a la lingüística como ciencia antropológica, que estudia todas las lenguas humanas de múltiples maneras, al margen de que estén emparentadas o no.

La historia organizaba relatos de los pueblos más importantes y sus caudillos, y nunca se ocupó de épocas oscuras, sin datos seguros; no le interesaba conocer generalidades ni la dimensión social de los pueblos desaparecidos, de todo ello se ocupaba la arqueología, la cual se dedicó a reconstruir la vida de los pueblos cuyo pasado no estaba registrado en crónicas, utilizando para ello los restos que se encontraban bajo tierra. Pero, algo semejante ocurrió con otros ámbitos: la búsqueda de “lo bueno” y de “lo bello” fue delegado sólo a la filosofía, a las letras y las humanidades. Más aún, este conjunto de creencias o mitos han sido mencionados con regularidad como uno de los logros más elevados de la modernidad.

En el siglo XVIII apareció el *Diccionario razonado de las ciencias, artes y medidas*, de la autoría de Diderot, D’Alambert, Voltaire, Tugot Quenai, Jaucourt, Mormontel. Ahí se procuró presentar la naturaleza tal como se observaba y no como lo indicaban los intereses religiosos. Pero, en el interés de desarrollar esta línea de razonamiento creó sus propias antítesis, no en el sentido marxista, sino más bien en el sentido de contradicción, pero a diferencia de las hegelianas que son resolubles éstas no lo son, por lo que se considera que creó contrasentidos y absurdos para esta misma racionalidad/modernidad y su horizonte racional, el cual, por cierto, no lo mira ni lo percibe así, sino como un nuevo ciclo ascendente de lo simple a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto, aunque cometa exceso de racionalidad exacerbándola e identificándose como posmodernidad. Esto último, por cierto, puede vérselo no sólo en la matemática educativa sino también en las posturas filosóficas que enuncia y sustenta al sistema-mundo, que reconoció y validó como parte de su afirmación.

T. Villegas (1999) sostiene que el origen de ésta se le puede ubicar alrededor de los setenta, como resultado de la crisis de la modernidad, donde encuentra al menos dos pilares que dan cuenta de ello:

a) su énfasis en la razón, y

⁹ Maynes (2001) se refiere a los planteamientos del botánico lingüista Schleicher, a mediados del siglo XIX, coincidente con lo que sostenían los comparatistas que lo habían precedido.

b) sus argumentos a favor de que la naturaleza se puede transformar y lograr el progreso social, vía el avance científico y tecnológico.

Pilares que, a la vez, paradójicamente, llevaron, de manera irremediable, a una crisis, pues el énfasis en la razón se constituye en una racionalidad exacerbada que genera discursos totalizadores, establece verdades absolutas frente a un mundo que genera cada vez más una multiplicidad de visiones, además de que estas verdades dejan fuera cosmovisiones alternativas sociales, culturales, políticas y científicas. Gergen (1991), por su parte, señala que “la creciente conciencia de la multiplicidad de perspectivas socava cualquier intento de establecer lo que es correcto”(pág. 151).

De nueva cuenta Gergen dice:

Lo más frecuente es que el progreso en un ámbito haga retroceder a la cultura en otros muchos ámbitos añejos... si una cultura quiere progresar, cada desequilibrio imprevisto le exigirá medidas correctivas. Será preciso compensar en todos los campos los efectos de la reacción. Y las compensaciones ponen en marcha una ola adicional de repercusiones desequilibrantes en otros dominios, lo cual vuelve a exigir una compensación, que crea nuevos efectos colaterales. Estas olas desquiciadoras se amplían y se aceleran y en cada acción emprendida en nombre del progreso puede poner en marcha un proceso de regresión, es decir, una regresión progresiva o acelerada (*op. cit.*, pág. 293).

Ello puede ser observado en el caso del concepto de solución, es una instalación renovada de dificultades alrededor del Álgebra Lineal, que se va por un lado pautando en la medida que se progresa en la organización y unificación de dicha teoría y, por otro, incrementa la reducción de los espacios de interpretación y de actividad de las personas que aspiran a comprender y entender los conceptos, como contraparte, se formalizan más y más en la dirección impuesta por la racionalidad del sistema-mundo moderno de “progresar”, en la búsqueda de la razón última, la razón pura. Ésta, criticada por Kant al ser la postura cómoda asumida por Descartes¹⁰ y Leibniz, por ejemplo, el primer principio de Descartes, *cogito ergo sum* (pienso, luego existo), resuelve los problemas en su momento y para alcanzar el conocimiento en ausencia de datos empíricos¹¹. Se trata pues del énfasis puesto sólo en la razón, lo

¹⁰ Cuyos antecedentes en un contexto más general se empiezan a formular como parte de una postura que se sustentará como racionalidad/modernidad, construida a partir del siglo XVI, afinada y establecida con todas las implicaciones hasta el siglo XVIII, como horizonte racional que dominará la producción de ideas, de pensamiento, de conocimiento científico y, desde luego, matemático. El primer principio de Descartes es: *cogito, ergo sum*. Lo interesante es que al examinar este código es evidente por qué es concebido en forma clara y precisa, donde lo claro es lo que se presenta de inmediato en la mente, y lo preciso es lo que es claro y sin condiciones, o sea, que es evidente (Pérez, 2000). Si se observa, esto concuerda con la postura que asumen los filósofos al tratar de reducir la discusión filosófica a un problema que se refiere a la acción de esta reducción de los objetos y las cosas a la forma o al contenido, producto del prejuicio del monismo, es decir, pretender resolver el problema de la materia y la forma.

¹¹ Pérez señala, en relación con el método científico, que Kant formuló dos libros importantes dentro de su producción, uno el *Prolegómenos para cualquier metafísica futura* y el otro *Crítica de la razón*

que a la vez la constituye en una racionalidad exacerbada. Que como sostiene Guadarrama (2002) ello colocó, en el tiempo y en el espacio, el atribuirle ante la presencia de dificultades en la aprehensión de los conocimientos matemáticos y específicamente de la solución, primero la necesidad de poseer conocimientos acerca de lógica formal, para posteriormente observar nuevas dificultades que se presentaban en el salón referidas al concepto de solución como producto de las sustituciones o reemplazos epistémicos, requisito para alcanzar el progreso, como lo exige la racionalidad/modernidad. Ellas hicieron patente la necesidad no sólo de conocimientos de Lógica Formal, sino de llevar un curso completo y previo al de Álgebra Lineal, como antecedente para poder saldar estas dificultades.

No obstante, de acuerdo con lo dicho hasta aquí, la visión del sistema-mundo requería exhibir el progreso y para ello formalizó más la operación sobre las definiciones, los conceptos, los procedimientos, al sintetizar sus elementos bajo el primer principio de Descartes, profundizando en la teoría general, desprendiéndose de sus grandes apoyos como el recurso del lenguaje épico y gráfico y que, además, hizo superfluo el curso de Lógica, formulando un nuevo aspecto, que en el plano de la teoría de los aprendizajes modificó el paradigma de la enseñanza. Este constructo señalaba que para darse tal aprendizaje en el pensamiento de las personas tenían que darse los conocimientos “constructivamente”, en el sentido piagetano, y que al asumirlo en esta lógica constructivista (llamado psicogenético), colocaba los aprendizajes en una relación que debía obedecer la realización por parte de las personas del paso por ciertos estadios para que pudiesen comprender el contenido de la materia, en este caso del Álgebra Lineal, como también el concepto de solución en ésta.

Sin embargo, las dificultades no sólo no se saldaron sino que se profundizaron, pues además de lo anterior, los comportamientos sociales de las personas deberían exhibirlo para entonces aceptar que mentalmente habían progresado. Para ello tuvo que diseñarse la didáctica del curso previo, que a su vez es un antecedente para la formalización y maduración del tipo de pensamiento que se requiere para implantar los conceptos del Álgebra Lineal, el cual ha terminado por hacerlo más complejo, no sólo por los conocimientos y operaciones mentales requeridos, sino porque también ha tornado compleja la problemática de los aprendizajes y de las enseñanzas, que no se ven que puedan ser resueltas a mediano plazo, si se sigue actuando bajo esta lógica de proceder de la racionalidad/modernidad que desvió su camino al elegir una posibilidad única de construcción de conocimientos y, por ende, de la socialización de los mismos como sistema de “saber” al que se refiere Wallerstein (2001)

pura, en este último se refiere a los sistemas filosóficos que pretenden alcanzar el conocimiento en ausencia de datos empíricos, al señalar “Los pensamientos sin contenido están vacíos; las intuiciones sin conceptos están ciegas”, donde la palabra intuición se refiere a datos sensoriales o a puntos de vista, aspecto que le criticaba a los filósofos racionalistas, entre ellos a Descartes y Leibniz, a los cuales llamaba dogmáticos.

Hoy la problemática en relación con el concepto de solución es tal que ya es necesario un nivel de amplitud teórica y de un horizonte racional para articularse y moverse de este atolladero, deconstruir este escenario y los procesos que lo constituyeron para entender el nivel y las dificultades que se encuentran en la problemática. De ahí la coincidencia con el pensamiento de Immanuel Wallerstein, de que se está presenciando el fin del modo en que hemos “sabido” el mundo, en el sentido de que el marco actual del “sistema de saber” ya no sirve como antes, debido al tipo de razonamiento con el que se mira la realidad, que de hecho afecta hasta en el nivel de estudio de los objetos de conocimiento que se formulan, en particular de la matemática educativa, la cual no se escapa al sometimiento del sistema-mundo moderno.

II.4 El camino elegido en la idea de su conexión

El capítulo presente trata de discernir acerca de la importancia de caracterizar adecuadamente lo sociocultural, al observar también la relevancia de una caracterización precisa y del entrelazado de componentes que permitan acercarse con mayor puntualidad, cuando se dan variaciones en el entendimiento de los conocimientos matemáticos, en particular respecto a un mismo concepto que, dependiendo del sistema sociocultural que se estuviese considerando determinaría los cambios y las modificaciones que experimentan respecto a su manera de entender, percibir y construir la comprensión pública de sus conocimientos. Se cree que existen componentes apropiados que lo posibilitan, esto son: la cultura, la identidad y el lenguaje. Por lo que para conceptualizar el marco general, en este capítulo se discutirá la relevancia de considerar al lenguaje un componente singular, vía para la generación de una mirada más profunda en la problemática de esta investigación.

El punto de interés al que se refiere esta discusión tiene que ver con un ideal que en algún momento se formuló para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, cuando bastaba un manejo preciso y riguroso para conducirse hacia la verdadera comprensión, al suponerse que para mejorar la enseñanza, como los aprendizajes derivados de la misma, bastaba con utilizar y dominar dicho lenguaje. La comprensión vendría después como una verdadera posibilidad de pensar y razonar matemáticamente, confiados en que éstas serían las maneras de iluminar tal entendimiento. Por lo que el diseño de libros, textos, programas, materiales llamados en algún momento recursos, tuvieron la condición de ser sencillos en su exposición y elegantes en su forma, por decir algunas características. En otras palabras, se trataba de preservar la tradición de la obra matemática, creada y refinada hasta ese momento.

Sin embargo, preservar la tradición tuvo un costo grande, debido a que numerosas generaciones de alumnos y usuarios transitaron por una suerte de pesadilla que se prolongó a lo largo de su estancia en el sistema educativo, provocándoles signos evidentes de incertidumbre. Veían en dicho saber ya no la posibilidad de acceder a un conocimiento y entendimiento más profundo del mundo, sino que representaba una seria dificultad que superar, sobre todo porque, en parte por los cambios producidos en el ámbito social y cultural, pasó a ocupar un lugar destacado en el tipo de sociedad diseñada, pues determinaba y/o definía las posibilidades reales de alcanzar una posición en la misma, a partir de la observancia de rendimientos calificables de los sujetos con la matemática. Fue elegida así para erigirse en el único campo de conocimiento digno para la consecución de los fines escolares ulteriores, además de obtener una mejor posición social al fin de cuentas.

Con ello vinieron aparejado diversos problemas, entre los cuales destacan los referidos al de la comunicación, sabiendo que todo acto de comunicación es posible a través de las interacciones que se dan entre el lenguaje común de la gente y el lenguaje matemático, requisito indispensable para su entendimiento. Esto generó la necesidad de habilitar el conocimiento, el cual suponía una relación lineal progresiva, transformándose el lenguaje cotidiano en el lenguaje matemático

requerido para superar el punto de asimilación de la matemática; la utilización del lenguaje matemático entonces no sólo fue esencial sino condición *sine qua non* para quien intentar progresar en el reto.

Dicha interacción se realizó o se entendió como realizable con la transmutación del lenguaje cotidiano en lenguaje matemático, reduciendo cada vez más su conocimiento y el manejo de la nomenclatura empleada en el salón de clases y después el manejo de la misma (por la elegancia que representaba, así como la precisión y el orden que definía)¹.

Este hecho representó la generación de otro tipo de problemáticas, que ya se prevenían. Por ejemplo, había que especificar la dosificación en el aula del sistema de códigos con los cuales se pensaba que se efectuaría la transferencia², si bien no completa o total, sí factible para asegurar el proceso de adquisición bajo un proceso gradual, paso a paso, sistemático, en el tránsito de un grado a otro y de un nivel educativo a otro, o como se dice actualmente, de un ciclo a otro³.

En simultáneo fueron tomando auge ciertas posturas teóricas del aprendizaje que reafirmarían esta visión⁴, constituirse en un proceso que paso a paso transfirieran el legado, como la tecnología educativa, donde se programa un conjunto de instrucciones que permiten en cierta manera conseguir aprendizajes. Sin embargo, los grandes fracasos empezaron a darse, entre ellos el de la propia concepción de la matemática que se tenía, en el sentido cómo se formuló y sintetizó en el proyecto del grupo Bourbaki. Su pretensión era trazar satisfactoriamente la génesis, desarrollo e interrelaciones de las teorías que integran el campo de la matemática, concebido como el de la creación y generación de la mismas a partir de constituir ciertas estructuras ascendentes y que irían aumentando en complejidad y que en efecto marcaba esa direccionalidad en la matemática misma; en el plano de los entendimientos y de las formas de acceder a estos entendimientos proporcionaron fuertes ideas para ser utilizadas, fue entonces cuando tuvieron sentido las posturas teóricas respecto a los aprendizajes.

¹ Concuera esta postura con la asumida por los filósofos que siempre han tratado de reducir todas las cosas, ya sea a la forma o al contenido, producto del prejuicio del monismo, es decir, de pretender resolver el problema de la materia y la forma.

² Con ello se trata de indicar, por ejemplo, la necesidad de construir nuevas categorías de análisis de la problemática dentro del salón de clases, como es la categoría de *Contrato didáctico*, que actualmente rige el conjunto de interacciones dentro del salón de clases, creada por Guy Brosseau, en la cual se puede identificar que esta administración, paso a paso, creó ciertos efectos, los cuales quedaron tipificados en la enseñanza de las matemáticas; por ejemplo, cuando se enseñaron los conjuntos y sus operaciones, en el empleo de los diagramas de Venn para señalar la operación realizada, implica que para su aprendizaje y la consiguiente dificultad que se incorporaba en su enseñanza se emplearan colores y por tanto los aprendizajes ahora se centran en la atención de la colocación o en los tipos de colores empleados, en lugar de las nociones y los conceptos que estaban en juego.

³ Esta nueva subdivisión es producto de la reorganización del sistema educativo en la educación básica como uno de los elementos innovadores que propuso la SEP, bajo las consideraciones del Acuerdo Nacional.

⁴ En realidad se supone que son producto de los cambios que dieron origen a la elección de una visión del mundo y que actúa para sostenerlo.

Posteriormente, ante la crisis no resuelta en el plano de los aprendizajes y desde luego de su enseñanza⁵, se adoptaron nuevas teorías y se dejaron de lado otras, entre las adopciones nuevas se puede mencionar al denominado constructivismo y su máximo exponente, Jean Piaget, quien garantizaba el cometido de construir estas estructuras, al menos mentales, antecedente base para la construcción de estructuras matemáticas.

Se establecía así una situación fundacional análoga, por un lado la de ofrecer una secuencia ascendente y progresiva en complejidad para el aprendizaje de las matemáticas, como consecuencia de ser construida por el sujeto que aprende y, por otro, aproximarse a la naturaleza intrínseca de la matemática en la concepción bourbakianiana de constituir *estructuras madre*⁶. Para dar cuenta de ello, ha sido traída a colación una descripción hecha por un profesor de matemáticas del nivel superior cuando se le inquiriere sobre el proceder en la enseñanza de las matemáticas:

Como una muestra del énfasis en las estructuras, recordemos que en la década de los setenta hubo un movimiento de reforma llamado *la enseñanza de las matemáticas modernas*, en donde se dio prioridad al rigor lógico sobre los aspectos geométricos e intuitivos⁷, donde los encargados de implementarla estaban más preocupados por la estructura de la materia que por las posibles dificultades o conflictos que su implementación pudiera acarrear. No dudamos que estos esfuerzos de reforma se implementaron con la mejor de las intenciones, basados en la creencia de que si enseñamos las estructuras en su forma más acabada, los estudiantes no tendrán dificultades para asimilarlas, pero esta situación nunca ocurrió⁸.

Cualquier persona que haya tenido contacto con las matemáticas las reconoce como una disciplina deductiva, con un lenguaje altamente formalizado, en el sentido de que los conceptos, las definiciones y sus relaciones están dadas en términos

⁵ Para el maestro Rodolfo Méndez (1990) la educación se encuentra en crisis en todos los niveles, y la educación de la matemática participa de manera relevante, la cual tiene diversas causas: el que la enseñanza se ha centrado principalmente en atenderla desde una perspectiva conductista y reduccionista; el que la matemática siga teniendo la misma organización (aritmética, geometría, álgebra, etc.), casi prácticamente los mismos contenidos que en el siglo XIX; sólo se han incorporado algunas técnicas de enseñanza y algunos recursos didácticos del siglo XX.

⁶ Se sabe que el Seminario de Piaget concentró los campos científicos y las actividades giraron en torno a *categorizar la estructura*, ya que refiere a ley, explicación, invariante, con una lógica, lo cual representaba el ineludible cierre, la categorización de estabilización y equilibrio como la posibilidad de llenarlo de parámetros en vez de la de proceso, el cual estuvo fuera de la discusión y de su consideración procesual.

⁷ El profesor se está refiriendo a la Reforma Educativa de 1972, donde para “modernizar” la enseñanza de las matemáticas se incorporaron los conceptos de conjunto y sus operaciones, plasmándose en los libros de texto, en el currículo de educación primaria, para después pasar, como en cascada, a incorporarse en los demás niveles educativos.

⁸ Este aspecto de su experiencia se refiere a la idea que después se formuló en los reportes de investigación o diagnósticos de la educación básica, en cuanto a que el problema que existió ahí no fue tanto la dificultad de escribir los textos, guías de trabajo, etc., sino más bien que en estos cambios no se consideró la preparación y actualización de la gran mayoría de los maestros, particularmente de los niveles básicos, respecto a estos nuevos conceptos y estructuras, pero también en la forma de cómo enseñarlos adecuadamente.

precisos que evitan ambigüedades; esta idea es fomentada por la forma en que se escriben los textos, por lo menos los del nivel universitario; la forma de presentación por parte de la mayoría de los profesores, la forma en la que se escriben los avances en la investigación, etc.; lo cual ha llevado a creencias como, por ejemplo, ver con naturalidad que una persona tenga dificultades con esta disciplina, o que un buen desempeño en matemáticas es garantía de un buen desempeño en otras áreas.

Con esto no se afirma que las matemáticas dejarán de ser deductivas, sino que la sola presentación de los principios, definiciones y teoremas, muestran la estructura lógica de la materia, pero quizá no sea ésta la forma más apropiada para quien aprende; por lo menos no para la mayoría, de aquí que sea necesario buscar formas o maneras de cambiar no sólo las creencias mencionadas arriba, sino también buscar que los estudiantes se formen un concepto más completo de la disciplina. Esto es, compartimos la creencia de lo que está en el fondo de las afirmaciones: un volver a ver las cosas geoméricamente.

Contradictoriamente, en aras de una claridad de la exposición de conceptos y definiciones, no sólo se malogró un acercamiento a las matemáticas sino que provocó que el tiempo destinado al estudio de las estructuras, los aspectos algorítmicos y geométricos fueran descuidados, por lo que hubo que dar marcha atrás a este tipo de acercamientos⁹ y buscar alternativas de solución.

De hecho, Piaget caracteriza la construcción de conceptos matemáticos en el niño y explica que el descubrimiento de relaciones lógicas es un antecedente en la construcción de conceptos matemáticos específicos, que el niño ha de aprender en el nivel de educación básica. En ellas, cualesquiera que fuese su orientación o los motivos de su surgimiento, retomaban y retornaban a hacer preferencia del lenguaje matemático sobre el lenguaje común o cotidiano, diríase que su concepción llegó a ser de tal grado que incluso se dijo que gracias a este lenguaje era posible conducirlos a la verdadera comprensión.

Esto dio pautas para sospechar que tendenciosamente se infirieron acciones sobre la secuencia que debería presuponer la enseñanza y, por tanto, del aprendizaje, que no tuvieron un fuerte sustento y evidencia empírica sobre el tipo de dificultades encarnados, que se encontraban atrás de este tipo de planteamientos, pero también de aspectos que tenían que ver más propiamente con la naturaleza de las dificultades enfrentadas. Sin embargo, en esta relación de construcción formulada, para que pudiera entenderse y comprenderse la matemática (como proyecto totalizador mundial) era necesario desarrollar un razonamiento correcto, esto último estaría a cargo de la Lógica, la cual suponía la investigación de los principios formales del conocimiento, o sea, las formas y las leyes más generales del pensamiento. Por lo que en opinión de Tecla (1997) su objetivo no era, ni es, trascender los “límites” del pensamiento, de ahí que alcanzar el desarrollo de un razonamiento correcto fuera su

⁹ Pues en el fondo el alumno aprendió a nombrar y reconocer estas estructuras, sin embargo, no avanzó en la conceptualización del número, procesos de conteo, medición, algoritmos, etcétera.

finalidad; la corrección formal del pensamiento, concordante consigo misma, con sus propias formas y leyes, es decir, sería la teoría del pensamiento correcto.

De ahí que si las relaciones lógicas ahora resultaban ser un antecedente en la construcción de los conceptos, entonces se pensó que bajo proyectos de investigación al respecto —era de suponerse— las dificultades ya no se encontrarían en el plano de la construcción de conceptos, sino que se localizarían en el plano de las relaciones lógicas y alcanzarían así un mejor desempeño en la construcción de los conceptos y, desde luego, en la conformación de las estructuras.

Se dio por sentado que la desaparición de las dificultades estribaría ahora en alcanzar este desarrollo del razonamiento correcto; es decir, las dificultades se trasladarían no a las dificultades de construir las estructuras matemáticas, pues ellas descansarían sobre la construcción de los conceptos matemáticos involucrados, sino en algo más simple y más cercano, las relaciones lógicas que estaban presentes al lograr el razonamiento correcto¹⁰. Por cierto, en ésta, por tradición se empiezan las exposiciones centrando su atención sobre un tipo particular de relaciones y de encadenamientos lógicos, que constituyen lo que se llama silogismos¹¹, antecedente para asimilar el contenido propuesto, reduciéndola, dicho sea de paso, al tratamiento y aplicación de sus reglas¹², sin posibilidad de observar que el razonamiento humano muchas de las veces no obedece a este tipo de comportamientos y, por lo tanto, la incorporación del estudio de otro tipo de razonamientos y el consiguiente desarrollo de lógicas, por ejemplo, de tipo difuso o multivalentes, es posible. Pero, lo que es por demás interesante y meritorio comentar aquí, es el hecho de que para justificar su tratamiento o su introducción en los textos matemáticos, donde le asignan un lugar específico a la Lógica, es muy usual ver que caen en malabarismos, a los cuales recurren como estrategia de convencimiento para justificar la necesidad de su importancia y por tanto de su tratamiento y estudio. Sin embargo, esto no lo dice todo, porque también obedece a una deficiencia observable, como aquella que

¹⁰ Si uno revisa, por ejemplo, la investigación de las fuentes de problemas en la enseñanza del Álgebra (bachillerato y nivel superior), Álgebra Lineal (nivel superior) y muy posiblemente del Álgebra abstracta, este punto es marcado, ya que se considera que una de las dificultades encontradas en el estudio de la problemática se refiere a sus antecedentes y, entre ellos, se ha subrayado el de sus antecedentes lógicos, concluyendo, en la mayoría de las veces, en reducir la problemática a la ausencia de un curso de Lógica en la escuela y estar en mejores condiciones, independiente de lo acertado o no, el hecho es que se muestre ya un indicio de la concordancia con lo planteado, el cual se considera que el problema ahora se convirtió en síntoma de la problemática de la realidad (ausencia del desarrollo del pensamiento lógico).

¹¹ Las cuales, por cierto, tratan de relaciones, ya sea como lo dice G. Zubieta (1993), de ejemplos prematemáticos como: A dice que B es veraz, B dice que A miente. ¿Quién tiene la razón?, o alguna de sus variantes, o como lo plantea N. Bourbaki (1976), traducidas al lenguaje de la teoría de conjuntos, de relaciones $A \subset B$ o $A \cap B \neq \emptyset$ y de la forma de encadenar relaciones, o sus negaciones, por medio, por ejemplo del esquema $(A \subset B \text{ y } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$.

¹² Bourbaki (1976) se refiere a que es precisamente la cumbre del periodo de la formalización de la lógica, la cual es observada en la monumental obra de Aristóteles, *The works of Aristotle*, “cuyo gran mérito reside en haber conseguido sistematizar y codificar por vez primera los procedimientos de razonamiento confusos o no formulados en sus predecesores”.

reivindica su origen y crea una postura que lo asuma directamente, por lo que se oculta su verdadera presencia en la obra, es decir, elige ser tratado con elegancia y, por tanto, hace invisible su verdadero objetivo¹³.

Sin embargo, resalta en estas deducciones que la homogenización desarrollada bajo este programa no contemplaba características esenciales para su instrumentación, no sólo contextuales del sujeto que transitaría en este programa concebido, sino en algo más cercano, que tiene que ver respecto de quién decide cuándo es que se alcanza el razonamiento correcto. Es decir, de acuerdo con esta nueva direccionalidad, no se tenía contemplado definir quién determina cuándo el razonamiento esté en lo correcto, o bien, quién juzga no al sujeto que transita —el que aprende, en este caso—, sino al fiscalizador de la actividad de ese sujeto, al propio juez, ya que dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, por la forma en que están estructuradas las cosas, se es *juez y parte* a la vez, se establece una relación de control inicial y después se suaviza con la expresión de supervisión, aunque en el fondo la idea es mantener el carácter de fiscal.

Pues bien, para evitar caer en posiciones absurdas, se dijo y se sigue diciendo todavía, con menor intensidad, que este razonamiento correcto se alcanza con la plenitud de las estructuras mentales, lo que significa eliminar la figura del *quién* para colocarlo en el *qué*¹⁴, lo cual además lo hacía circular, pues supeditaba la construcción de estructuras matemáticas al razonamiento y su desarrollo, y éste, a su vez, al desarrollo de las estructuras mentales.

Resalta un hecho singular, por un lado estaban establecidas las teorías del desarrollo del pensamiento y por el otro se había alcanzado ya el ideal positivista de tener bajo control la separación entre pensamiento y sujeto pensante, el cual se había gestado bajo la predominancia de una concepción filosófica y de una postura científica¹⁵ conformada históricamente.

Fingermann (1979) sostiene en su obra: *Lógica y teoría del conocimiento*, que la lógica no se ocupa del sujeto que piensa y que también prescinde del propio proceso de pensar: tanto el pensar como el sujeto que piensa pertenecen al ámbito de la Psicología. La lógica, por lo tanto, queda circunscrita solamente a los pensamientos. Pero también esta posición sostuvo que gracias al lenguaje formalizado era posible conducir a la verdadera comprensión, daba por sentado una serie de considerándos no pensados, soslayados o hechos a un lado hasta ese momento¹⁶.

¹³ Por ejemplo, en su capítulo 1, el autor empieza diciendo que en dicho momento estudiarán muchos de los conceptos importantes que se desarrollan en el área de matemáticas conocida con el nombre de lógica, prosiguiendo luego con las razones importantes del por qué se hace importante su aprendizaje, 1) la de adquirir destreza en el razonamiento matemático correcto (¿hay razonamientos matemáticos incorrectos?), 2) aplicar la lógica a situaciones prácticas (¿como cuáles?).

¹⁴ Concordante con la postura filosófica que más adelante se examinará.

¹⁵ Iniciada de manera independiente y ocurrida a principios del siglo XVII, como lo indica R. Pérez (2000), al referirse —esquema estrictamente histórico— a los principales conceptos vertidos sobre el método científico.

¹⁶ Recordemos que tiene una finalidad fincada no en ese momento sino que ha venido trascendiendo a lo largo del tiempo, pues es parte sustantiva y objetiva del movimiento renacentista humanista.

Como si por sí solo, el hecho de conocerlo, le devolviera a quien los conociese una profunda comprensión, no únicamente del lenguaje, sino de los conocimientos matemáticos intervinientes, para probar esto consúltese cualquier obra de la década de los setenta y ochenta¹⁷, incluso de los inicios de los noventa, y se observará la prevalencia en el manejo y uso de eso en dicho discurso.

Si se agrega a lo anterior que tal tendencia fue privilegiada coincidentemente con las reformas educativas en el seno de la educación básica, entendida de preferencia como sinónimo de mejoramiento de la misma, por una parte y, por otra, de modernizante. Se cayó entonces en excesos, no sólo en su uso, que bien podrían entenderse derivados de sus propias necesidades de producción, ubicación y aplicación para la producción de más conocimiento, sino que también este exceso se presentó a la hora de su empleo, en su calidad de instrumento, el cual reguló la dirección de los aprendizajes y por consiguiente de su enseñanza en distintas de partes, afectando de manera directa las interacciones dentro y fuera del salón clases, lo que determina a su vez varios aspectos:

1. Al establecerse como la marca social y cultural, definiendo la marca o punto promedio del aprendizaje, es decir, creó la tabla rasa a superar por los párvulos, en los distintos contextos, es decir, y, en otras palabras, uniformar y homogeneizar la medida sin considerar los contextos, lo cual se tradujo en los hechos por hacerlos a un lado, pues se consideró que era un lenguaje universal y por tanto para todos.
2. El de su formalización como elemento, que alcanzaba el nivel deseado del manejo estructurado del lenguaje en el salón de clases y socialmente, a lo cual se le puede identificar como el de la búsqueda de su aceptación social o lo que es lo mismo, el de su expansión.
3. Se formalizó sobremanera, al erigirse como el instrumento que decidía acerca de lo adecuado o no, tanto de los aprendizajes como de su enseñanza, mediando por tanto las interacciones profesor-alumno.

Maier (1999) se refiere a dichos conflictos que viven los alumnos a raíz de tal lenguaje matemático; éste se ha formalizado sobremanera y por este motivo no puede ser aplicado en las clases de matemáticas, como base de comunicación entre maestros y alumnos o entre los alumnos mismos. La conclusión a la que llega está derivada o basada en un proyecto de investigación que desarrolló para conocer qué elementos del lenguaje técnico poseían los alumnos, así como precisar el uso que hacían ellos. Aunque la motivación de su obra obedece a otros aspectos más amplios como la de reflexionar y discutir acerca del lenguaje entre los maestros de español y los de

¹⁷De hecho, el autor ya citado se refiere a que la importancia de la lógica no se basa en que sustenta un sistema particular (al respecto, menciona, por ejemplo, que las situaciones prácticas son también particulares), sino en que el proceso de organización lógica de cualquier sistema (empírico u otro cualquiera) sirve para demostrar su consistencia interna, comprobar que es adecuado lógicamente a su fin declarado y para aislar y aclarar las suposiciones en las que se basa. Esto mismo dicho autor lo toma de otro texto.

matemáticas, no por ello quedan de lado las relaciones y el tipo de problemáticas que está tratando, al contrario, la enriquecen.

Sin embargo, convendría describir cómo es que se constituye el lenguaje matemático, el lenguaje que fue privilegiado y se constituyó en el lenguaje hegemónico de la comunicación dentro y fuera del salón de clases y de las prácticas discursivas que quieran ser reconocidas y dignas de discurrir en el ámbito de la matemática. Para ello se les agrupa en dos vertientes, cada una indica aspectos que ilustran lo que al respecto se ha dicho:

- Los antecedentes filosóficos y la postura filosófica, y científica que lo determinó.
- La concepción de que para desarrollar la matemática los procesos de depuración van en la dirección de fortalecer la producción y creación de conocimientos y no de su enseñanza o aprendizaje, que ciertamente están ligados pero no colocados de la misma manera que las necesidades de producción.

Es decir, el análisis se efectúa desde dos actos, legítimamente sociales ambos: la necesidad de la producción de conocimientos, sustento de las posibilidades del desarrollo de la sociedad, así como de la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos, materialización del avance en ese desarrollo.

Los dos necesariamente convergen, aunque por lo observado lo hicieron con camisa de fuerza, no porque fuese un acto natural de elevación humanitaria, es decir, por la diversidad epistémica como proyecto universal, convergieron por otras razones, quizá por expansión.

II.4.1 Sustento de la discusión filosófica

Hay que empezar la discusión con el punto de los antecedentes filosóficos, la postura filosófica que determinó la preferencia por cierto tipo de lenguaje, incluso en su versión más acabada del lenguaje formalizado, así como del qué aprender, pero también del cómo aprender, que además se erigió en el sustento de la validez universal de todos los conocimientos, el criterio de lo verdadero. Para ello habrá que invertir la exposición, es decir, iniciar con el planteamiento de la postura, una serie de cuestiones que exhiban su sustento, motivo de fondo de esta investigación, para después acercarse a los antecedentes.

La gran mayoría de textos relacionados con la indagación, con el estudio, difusión e incluso los principios teóricos acerca del conocimiento y, por consiguiente, de la ciencia (la matemática no es en este caso la excepción, pues ella misma se sustenta así misma y más en los general en la ciencia en su conjunto), comienzan postulando que es en la filosofía de los griegos y, en particular del descubrimiento de la lógica, donde descansa fuertemente la matemática, pues las evidencias son bastas y grandes, sin embargo, en vez de repetir una vez más la historia ya conocida, es mejor plantearse una lectura acorde con las posibilidades de escudriñar lo que de fondo le interesa a esta investigación desentrañar.

Ahora bien, para indagar estos aspectos, en esta sección se recurrirá a una estrategia no sólo descriptiva que haga posible evidenciarlos, sino que se miren a sí

mismos y a los demás, pues desde la historia contada en la vieja Europa ha padecido de eso, ha dirigido dicha racionalidad como la única versión conocida y construida por la humanidad. En cambio, lo que aquí se propone es echar una mirada a la exterioridad del ser, esto es, una exterioridad que comienza a construirse a partir de la historia de Asia, África y América Latina desde Europa, por lo que esta estrategia no precisamente implique estar afuera, aunque este ejercicio implique sí sustento probable para el diseño de otra realidad. Al respecto, para usos teóricos y metodológicos, se citará a Mignolo (2001) en relación con los conocimientos en general.

El estatus de racionalidad dice que para que pueda dársele una percepción de lo visible a lo que se encuentra invisible, es necesario percibirla desde una geopolítica del conocimiento más que desde una historia de la filosofía occidental. Lo que implica asumirla como la otra historia. Una “historia” que emergió en el siglo XVI a raíz de una doble operación epistémica. La primera, dice Mignolo, desde la colonización del tiempo. Por ende, la invención de la Edad Media y de la Antigüedad, “antecesoras” del Renacimiento, son reflejo de una historia lineal, con poca muestra de sus vericuetos y recovecos, pero, es a la vez fuente de la *historia universal*. Su origen está en el oriente del Mediterráneo. Su origen religioso en Jerusalem. Su origen filosófico en Atenas. La segunda implicó la colonización del espacio. Y de esa colonización surgieron las tres AAA, en referencia a la centralidad de la E. La doble colonización del tiempo y del espacio crearon las condiciones para la emergencia de Europa como punto de referencia planetario. Y esta operación fue fundamentalmente epistémica.

Por lo que con esta breve síntesis de elementos es posible dar por sentado, a través de este conjunto de razones, por qué habría de reconocer que los antecedentes de la matemática y, por consiguiente del lenguaje matemático, tuvo su origen en la Europa mediterránea, a través de la filosofía griega y, en específico, de la Lógica, donde habita su pensamiento.

Para autores como J. Ramírez y J. González (1998), que si bien no hacen una discusión de los elementos históricos que anteceden la conformación de esta visión, sí los encuentran al rastrear los orígenes de los fundamentos de la escuela modelo del siglo XXI, la cual si quiere ubicar desde una visión contemporánea la búsqueda del conocimiento esencial afín a un espíritu común debe tener como código primordial lo científico, y darle el sentido psicolingüístico que sintetice los actos comunes.

Al respecto Bruner, cuando a través de los altos códigos comunes propone su noción psicológica de comunidades epistémicas alude sólo a códigos comunes referidos a la comunicación y eso nada más representaría un primer plano. El segundo plano sería, dicen los autores antes citados, de naturaleza político-gnoseológica, es decir, la construcción y validación del conocimiento científico, como cuestión ontológica y axiológica. La conciencia del conocimiento y de su autogestión institucional como parte de su ser debe constituirse en una comunidad.

De hecho, aquí se refuerza la tesis de que es en la Grecia del siglo VI a.C., cuando se alcanza la primera distinción sistemática del conocimiento común (*doxa*) del científico (*episteme*), lo que diferencia el conocimiento aparente del esencial, lo

que a la larga ha permitido ser el centro y origen conceptual de la sociedad occidental; lo cual, en opinión de los autores antes citados, también les ayudo a consolidar a la filosofía, sobre todo en el sentido de generar una cosmovisión que finalmente derivaría en lo que conocemos como *paidea* (síntesis cultural) que surge fundamentalmente en el periodo sistemático¹⁸, el cual, además de conformar a la propia filosofía logra elevarla a la categoría de conocimiento universal, impulsada principalmente por Anaximandro, Sócrates, Platón y Aristóteles.

Sin embargo, para resaltar el papel de su razón de ser, hay que ubicarlo más en el plano de lo filosófico para observar de cerca lo que estaba ocurriendo ahí que determinó esa tendencia en la presentación del conocimiento. Al respecto, es Descartes pieza fundamental en este punto (de acuerdo con Del Búfalo,1999), en particular para la experiencia moderna.

Del Búfalo señala que cuando Descartes escribió *Discours de la Méthode pour bien Conduire sa Raison et Chercher la Verité dans les Sciences*, lo hizo para deslindar el campo de los saberes legítimos de aquellos que habían de relegarse al ámbito de la charlatanería, de la superstición. De este modo la razón recobraba su autonomía, a partir de ese complejo articulado de campos con diferentes experiencias, tejido por la tradición hermética del Renacimiento, donde se mezclaba a las matemáticas con saberes mágicos y esotéricos.



Este acontecimiento es similar a la imposición socrática de un método para rescatar la razón de la mediatización sofista que valoraba su discurso en función de *quién* y no del *qué*. Ambos casos revelan la estrecha alianza entre el devenir de la razón y la reflexión sobre el método para asegurar el dominio de la razón y la constitución del saber científico. La crítica trascendental quiso ser la culminación grandiosa de este esfuerzo para asegurar definitivamente el campo de la experiencia posible como el único terreno legítimo del quehacer científico.

¹⁸ Aquí los autores emplean una cita de J. González-Sánchez, *et al.*, (1997) que caracteriza la filosofía como un proceso social que atravesó por varios periodos para consolidarse, entre ellos el cosmológico, el antropológico y el sistemático, en la presuposición de un avance que iría del macrocosmos hasta el microcosmos, pasando por la inminente condición ético-racional, la cual a su vez permitiría el conocimiento de la realidad, unida tanto a la realidad interna como a la externa, pero asumida de manera racional y lógica (*logos*).

Pero la solución que Kant le dio al problema de la experiencia, formulando la posibilidad de juicios sintéticos *a priori* dejó insatisfechos a los filósofos y desorientados a los científicos de la naturaleza, precisamente en un momento en que las ciencias naturales experimentaban su mayor desarrollo¹⁹ y empezaban a aparecer, en forma independiente, las ciencias sociales. Por lo tanto, el periodo postkantiano está signado por una agudización de la preocupación por el método científico que da origen a la moderna epistemología.

La realidad fenoménica construida mediante los juicios sintéticos *a priori* hacía converger la tradición racionalista continental en el empirismo inglés, lo que dio solución al problema de cómo formular leyes de validez universal a partir de la experiencia. Pero este modo genial del idealismo trascendental de fundir ambas tradiciones chocó con el gusto positivista, que iba en pronta carrera difundándose como corolario de los éxitos de las ciencias empíricas.

Así fue como Avenarius y Mach quisieron formular una versión muy adulterada del criticismo kantiano en sus reflexiones sobre los principales problemas filosóficos de la física de finales del siglo pasado. Pero, al desvincular la actividad subjetiva del conocimiento de la dimensión trascendental en que había colocado Kant a la teoría del conocimiento, para mantener su soporte empírico, terminaron por ahogarla en el psicologismo o en el escepticismo.

Al iniciarse el nuevo siglo, en reacción contra el psicologismo originado en Alemania, el neokantiano Cassirer busca rescatar la validez de los juicios sintéticos *a priori* y, sobre todo, la fenomenología de Husserl, la cual recupera la autonomía de la lógica y sus leyes y la aparta de toda pretensión psicologicista. Pero la reflexión filosófica que siguió esta vía se fue distanciándose cada vez más de las necesidades inmediatas de las ciencias empíricas. Los científicos se sintieron más cómodos con teorías que eran más cercanas a su mundo y se refugiaron en las propuestas convencionalistas que también daban respuesta a las aporías del psicologismo.

De hecho, el convencionalismo parecía ser la única solución al problema de la verificabilidad de una determinada teoría. Una vez que se rechazan los juicios sintéticos *a priori* es absolutamente imposible verificar una ley universal por la experiencia, puesto que la *empíria* es siempre contingente y, por lo tanto, no ofrece garantías para la inducción. De modo que los criterios de aceptación de una teoría se establecen por convención.

¹⁹ Aquí se menciona a las ciencias naturales y científicos de la naturaleza, este cambio obedeció a varias razones, en opinión de R. Pérez (2000), entre las que se encuentran el movimiento de reforma de la iglesia como consecuencia del protestantismo para establecer una relación directa, sin intermediarios, ni estructuras entre el hombre y dios; la revolución científica empezó a eliminar a la Tierra del centro del universo y al hombre del centro de la creación, así como del renacimiento humanista que proclamaba el rescate de los textos originales y, en general, toda la cultura helénica, no sólo por un cambio de gustos, sino por una transformación más profunda que descartaba la idea de que el mundo es un valle de lágrimas y la vida un breve y amargo paréntesis entre la nada y la gloria; en su lugar proponían que la tierra era un sitio maravilloso y la vida debía ser disfrutada al margen de lo que ocurra, al mismo tiempo que empezó a cuestionar la autoridad del dogma como la última corte de apelación de la verdad y en su lugar propuso a la naturaleza.

Los convencionalistas sostienen posiciones empíricas en relación con la génesis efectiva de la ciencia, pero no aceptan el empirismo como una norma, en virtud de la cual un juicio reconocido se basa, por referencia, en datos empíricos como instancia suficiente. Los datos de la experiencia están siempre abiertos a diversas hipótesis explicativas y todas ellas pueden ser válidas desde el punto de vista lógico. La selección que haga el investigador dependerá pues de circunstancias extra empíricas. Por lo tanto, los criterios de selección de una hipótesis son de carácter extrínseco a la interpretación científica y se refieren a la comodidad, a las ventajas intelectuales que proporciona cada hipótesis, así como a valoraciones de tipo estético, tales como la sencillez expositiva, la elegancia formal y otras.

El punto de vista convencionalista, aunque nace y se desarrolla en un ambiente estrictamente vinculado a las ciencias, parece abrir la vía a la reflexión sobre la conducta de la comunidad científica, excediendo el marco estrictamente epistemológico de la discusión. Así, por ejemplo, Karl Mannheim desarrolló una sociología del conocimiento para fundamentar la práctica de la comunidad científica en los criterios de validez. Esta línea fue retomada mucho más tarde por T. Kuhn, quien vinculó la práctica de la comunidad científica a la elección del paradigma científico dominante.

El empirismo parece ser la doctrina natural de todo aquel que hace investigación sobre los fenómenos naturales o sociales; pero su defensa filosófica siempre choca con la inviabilidad lógica del procedimiento inductivo y con el espectro del sensualismo o del psicologismo que tiende a estrellar la verdad científica en la barrera del solipsismo.

II.4.2 La filosofía analítica, conformación de la visión

Revisando a Hume y su clásica división entre *relations of ideas* y *matters of Fact*, así como la opinión de otros filósofos, aquí hay que decir que esta investigación intenta escaparse de los límites del psicologismo y del sensualismo. Dicha reacción tiene dos vertientes distintas, que tienden a confluir en muchos aspectos, aunque no en todos, lo que da origen a lo que se denominó filosofía analítica, la cual convirtió por primera vez al lenguaje en objeto privilegiado (si no es que único) de la reflexión filosófica, lo que también ha sido sustento de la producción de conocimiento hasta dicho momento.

El primer impulso en esta dirección lo dio G. E. Moore, en Inglaterra, aunque el mayor exponente en ese país fue B. Russel. Ambos reaccionaron contra el psicologismo al igual que Husserl en Alemania. Este último, apoyándose en Descartes, había llegado a la conclusión según la cual las leyes lógicas puras, por ejemplo, las primitivas leyes del pensamiento o las formulas silogísticas, pierden completamente su sentido esencial cuando se las intenta interpretar como psicológicas. De hecho, Pérez (2000) caracteriza la postura que asume Descartes al señalar que concibió a la ciencia como una pirámide, cuya cúspide estaba ocupada por los principios o leyes más generales de la realidad. En seguida hace una diferenciación entre Descartes y Bacon indicando las diferencias entre estas dos

posturas asumidas que, sin embargo, se afirma, fueron las que determinaron de ahí para adelante la postura que se debía asumir frente a la ciencia, si es que se quiere estar dentro de ella, y que se ha venido desglosando hasta aquí.

R. Pérez (2000), señala que mientras que Bacon llegaba a la cúspide por medio de inducciones progresivas, basadas en series generosas de observaciones y experimentos, Descartes propuso que el conocimiento científico se iniciaba en la cumbre y de ahí procedía hacia abajo, siguiendo el camino de la deducción, hasta llegar a la base, es decir, a la naturaleza real. Por lo que en coincidencia con la apreciación del Pérez y acelerando un poco más las cosas, es posible observar que esta proposición tiene implicaciones no sólo filosóficas fundamentales, sino de otros ámbitos, que indican el camino del hacer, es decir, el cómo producir conocimiento. Se reafirma así la presente tesis, pues por un lado se observa que se constituye una versión unificada para la percepción, constitución y construcción, por tanto dirección de hacer y estar en la ciencia, pero, por otro lado también la postura que inicia otra dirección de hacer ciencia. Está asentado entonces que para ello es la inducción la vía para que los procesos de su enseñanza y aprendizaje ocurran, pues para ser científico hay que hacer ciencia, por lo que no es posible sustraer al sujeto del uso de la razón, del refinamiento de la misma, la razón última y correcta, por tanto del método, de la ciencia. Para lo cual, si se quiere o pretende hacer ciencia, ésta deberá estar regida por un ambiente prefigurado, es decir, atender un conjunto de reglas, pasos y procedimientos, pero también de un sentido místico, de alcances estéticos en su valoración. Un aspecto clave para esta concepción radica en la certeza de que el conocimiento puede alcanzarse *a priori*, entendiéndose como ausencia de realidad, fuese ésta de la naturaleza que fuere, incluso distinta y diametral, podría ser incluso por ignorancia o bien por decisión conciente²⁰.

Sin embargo, esto no es nada extraño, pues se ha llegado a considerar que sin este proceso de amalgamamiento, donde la filosofía es uno de sus grandes ingredientes (no el único), no se llega a hacer ciencia. Mignolo (2001), dice, respecto a la colonialidad que formula Quijano, que dicha clasificación no fue por cierto una “representación natural” del mundo y para el mundo, pues la operación clasificatoria impuso una epistemología de doble cara, una visible la otra invisible. La visible, la cara de la modernidad²¹ desde donde se comenzó a clasificar, describir y conocer, el carácter de ciencia. La otra, invisible, la colonialidad, desde y en donde se ejerció el poder de la epistemología moderna. Este ejercicio oculto del poder hizo que irremediablemente y, según la cosmología cristiana y luego hegeliana, se convirtiera en ontológica, en la razón correcta, por ende desde la lógica y, desde luego, del lenguaje.

Volviendo. Está claro entonces que, de antemano, los conceptos de que se componen dichas leyes y otras semejantes, no pueden tener una extensión empírica, son necesariamente auténticos conceptos generales. Esta conclusión tiene evidentes

²⁰ Pérez (2000) dice que ello se encuentra en el primer principio de Descartes: *cogito, ergo sum*.

²¹ Para ello hay que revisar a J. Habermas, en su clásico libro: *La modernidad: un proyecto incompleto*.

reminiscencias del realismo platónico y ya había sido rechazada por los empiristas ingleses que estaban de acuerdo en que la lógica no consiste en leyes de pensamiento, en el sentido psicológico, sino en reglas del lenguaje que serían verdaderas (o, mejor dicho, obligatorias) en virtud de convenciones lingüísticas vacías de contenido. Simples sistemas tautológicos como las *relations of ideas*, de Hume, donde el *a priori* del racionalismo se reduce al “uso de símbolos en una manera dada”. De este modo, es posible darle una solución empirista al mundo eidético, sin caer en el psicologismo. Pero, ¿cómo evitar el sensualismo cuando se trata del *matter of fact*?

En efecto, cuando se reduce la lógica a tautología, entonces “el mundo es la totalidad de los hechos, no de las cosas”. Por lo tanto, el conocimiento empírico, es decir, no tautológico, es tan sólo conocimiento de hechos, en particular de “hechos atómicos”. Estos últimos terminan siendo configuraciones de objetos tales como espacio, tiempo, color. Este planteamiento de Wittgenstein hace de la sensación subjetiva el elemento constitutivo de la realidad.

Para evitar esto Carnap introdujo las “cláusulas protocolares”, que sustituyen el hecho atómico como elemento fundante de toda afirmación empírica verdadera; es decir, que la verificación de cualquier enunciado se hace mediante enunciados, tal como lo propuso Neurath.

Así, estos autores formularon en Viena una nueva forma de empirismo: el empirismo lógico, el cual redujo el ámbito de la experiencia posible al “mundo del cual se puede hablar con sentido”, es decir, el mundo de los enunciados lingüísticos reducibles a proposiciones atómicas. Por lo tanto, todo lo que no es tautología lingüística o enunciados verificables, se convierte en metafísica, es decir, en discurso sin sentido, en lo opuesto a ciencia.

A partir de ese momento la filosofía se reduce a profilaxis lingüística, que la depura de esos sedimentos históricos de muchos siglos de metafísica y epistemología entendida como comentario a los métodos de las ciencias empíricas.

II.4.3 La idea de la extensión

Ahora hay que ver el caso de la segunda vertiente. Esto por cierto nada tiene que ver con una postura dualista o que pretenda remitir a dos aspectos encontrados entre sí, sino más bien que busca integrarlos en un todo y, por tanto, en cierta forma complementarlos. Si acaso hay que hacer un comentario, bastará decir que tienen mucho por donde hacen intersección, pues ahí está la racionalidad que sirve de justificación en relación con la concepción de que para desarrollar la matemática los procesos de depuración van en dirección de fortalecer la producción y creación de conocimientos y no de su enseñanza o aprendizaje, que ciertamente están ligados pero no colocados de la misma manera que las necesidades de producción. Son dos procesos sociales que se tocan, pero que hoy, por las condiciones dominantes de la vida social y cultural, no se encuentran unidos y a veces caminan en sentidos opuestos, ya que obedecen a dinámicas que se han modificado en el espacio fundamental, pero también en el tiempo, pues éstos han obedecido a los cambios culturales y tecnológicos desarrollados en la sociedad. Si bien es cierto que en algún momento inicial iban aparejados, con el tiempo sufrieron cambios en su naturaleza y

ritmos de desarrollo, se fueron diferenciando uno del otro para posteriormente modificarse al pensarse más propiamente que iban uno detrás del otro, en tanto la producción de conocimientos estaba relacionada con los que tenían las condiciones para la realización, gestación y luego posibilidad de efectuar sus aprendizajes. Mientras que la de su enseñanza estaba relacionada directamente con las de su producción socializada, entendida ésta como tener las posibilidades de que quien estuviera interesado en acercarse a la problemática, pero en el sentido de su difusión, por ende aceptación, es decir, en el hecho de que si se quería hacer público el conocimiento producido, éste debería ser aceptado, consensuado por una comunidad que lo demandaba, lo aprobaba y consumiría.

En tiempos de extensión y globalización de los procesos claramente se han diferenciado y hasta cierto punto separado ambos paradigmas: investigación por un lado, docencia por otro. En una parte están las necesidades de su propia producción como conocimiento y, en otra, la necesidad de ser comunicado amplio, cultural y socialmente dicho conocimiento. No sólo es cuestión de reducir el problema al ámbito de su difusión, requiere, entre otros aspectos, que se le comprenda, se le maneje, se le entienda y que, para alcanzar estas condiciones, se pase por su asimilación, por una negociación de significados, la cual presupone la toma de una postura, la de asimilarse o de erigirse, en la naturaleza del lenguaje de preferencia y, por tanto, el lenguaje dominante, luego de un proceso similar en el ámbito de la resistencia. Porque la primera concepción presupone la asimilación como un proceso lineal que no da cuenta de las diversas comunidades que conforman la humanidad, de que cada una de ellas posee su propio código y sistema de información, que les es funcional y que no encuentran razón para cambiarlo, sobre todo porque median procesos y proyectos de vida no alcanzados a entender por las otras comunidades que cohabitan a su vez en los alrededores de las mismas. Ahora que, con el tiempo actual y los nuevos desafíos emergentes que enfrenta la humanidad, (epistemológicos, discursivos, teóricos, filosóficos etc.), hacen más que necesario investigar esta problemática. No sólo en el sustrato del lenguaje que, es cierto, se ha ido amalgamando, sino de los demás elementos implícitos, como la visión del tipo de cultura y de los procesos de identidad que se localizan en la parte social y cultural, es decir, de nuestra dimensión definida de lo sociocultural.

Esto constituye hoy la diferencia epistémica, la cara de la modernidad que quiso hacer una representación “algo natural” del mundo, que más bien efectuó una operación clasificatoria que impuso una epistemología de *doble cara*, como lo sostiene Walter Mignolo²², “una visible, la otra invisible”.

Dicha *episteme* nos ha hecho creer que cada uno de los continentes es ontológicamente cada uno de esos continentes²³ en otro, que se identifica, de acuerdo con esta forma de la colonialidad del poder, en una alerta constante: Asia es y no es Asia, África es y no es África, América es y no es América, pero, Europa es y es

²² Véase: *Capitalismo y geopolítica del conocimiento*.

²³ Construida desde el lugar de enunciación que se afirmó a sí misma como punto de referencia (Mignolo, 2001).

Europa. Por lo que no es de extrañar que en esta visión del mundo se encuentre en frecuencia y sintonía no sólo con la tradición de hacer ciencia o de filosofar respecto a la ciencia, como una cuestión de preservación sociocultural, que opera por circunstancias, sino que, incluso, contiene toda la direccionalidad de su origen, como de la visión que la constituyó y que la erigió como la única, desplazando a las otras. Esto por su puesto que tiene que ver directamente con la postura que se asuma e imprima en la cotidianeidad del hacer y del cómo hacerlo, pues se encuentra presente en todos los aspectos que aluden a él: cómo, cuándo, dónde y quién decide sobre el cómo construir y constituir los conocimientos socialmente, cuáles son aceptados y cuáles no.

Se dice que está presente porque aunque haya momentos en que dicha postura pareciera que se desvanece o se muestre en forma velada, ella pauta y dirige en todo momento la postura que le da sentido a su existencia y que para poder hacerse notoria o mirársele se tiene que observar con otros ojos su carácter velado, casi invisible, con el que actúa, pues al carácter de su veladura es esa denominada *modernidad*.

El particular interés por lo antes dicho tiene que ver con que detrás de ello se encuentra su potencial de extensión, al estar adentrado en todos los procesos sociales y todavía más en los de su difusión o comunicación, al igual que en aquellos que tienen que ver con los conocimientos, sus usos y productos, con los lenguajes y con los sujetos, en fin, con la cultura.

Estos aspectos guardan toda una mística de conformación del hacer ciencia y del carácter de ciencia, pues es allí donde se inicia el planteamiento de cómo hacer ciencia, cómo producir conocimiento científico, cuando ese conocimiento se matematiza y, por tanto, así se determina su carácter o grado de científicidad que alcanza un campo de conocimiento x, incluido el matemático.

El poder que determina cuándo es conocimiento y cuándo no lo es implica un poder devastador que está fuera de toda duda, porque hasta en aspectos que podrían pensarse mínimos, al momento de desplegarse como tal tienen que mostrar esa característica mística prediseñada, por ejemplo, al formular discursos lógicos e impecables; se les llega a exaltar a algunos de ellos de tal forma que los convierte en elementos míticos, que termina por permeare la cultura y el quehacer científico. Como aquel de que para ser buen científico hay que estar medio loco o por lo menos mostrar la finta de estar ido, o bien, tener los pelos parados, estereotipos que hay que seguir si es que se quiere estar dentro de la comunidad y de sus prácticas sociales aceptadas.

II.4.4 La convergencia de nuestros elementos

Habría que hacer el ejercicio de converger la relación de la predilección del lenguaje formalizado sobre otro tipo de lenguajes, por ejemplo, los empleados en la comunicación cotidiana, apoyados en los antecedentes filosóficos y postura filosófica que los determinó. Hay que empezar por recuperar una de las afirmaciones de Del Búfalo (1999), cuando dice, en su: *Teoría de la pasión comunicativa*, que el punto más débil del empirismo lógico lo constituye su criterio de verificabilidad de los enunciados, puesto que las cláusulas protocolares no eliminan las vivencias como fundamento de lo verdadero, es decir, quedan atrapadas en el psicologismo. Por ello

Popper se opone a la pretensión de una verificación empírica del enunciado científico como lo postulaba el círculo de Viena.

Para dicho autor, a la base empírica del conocimiento científico hay que aproximársele en forma deductiva, regresando a una cierta forma de convencionalismo al formular “enunciados básicos”, los cuales son “contrastaciones concebibles de hechos lógicos posibles que proporcionan el material para la comprobación de una hipótesis”. Estos enunciados “que decidimos aceptar como satisfactorios y suficientemente contrastados, tienen el carácter de dogmas”, aunque pueden seguir siendo contrastados si así se quiere. “Admito que de suerte la cadena deductiva es, en principio, infinita; sin embargo, este tipo de regresión infinita también es inocua”. Una teoría se llama empírica cuando es falseable, es decir:

Cuando divide de modo inequívoco la clase de todos los posibles enunciados básicos en dos subclases no vacías siguientes: primero la clase de todos los enunciados básicos con los que es incompatible y que llamaremos la clase de los posibles falseadores de la teoría, y en segundo lugar, la clase de los enunciados básicos con los que no están en contradicción. Podemos expresar esta definición de una forma más breve, diciendo que una teoría es falseable si la clase de sus posibles falseadores no es una clase vacía.

La falsificación, además de evitar los inconvenientes de la verificación, recoge el principio de Wittgenstein, según el cual toda proposición que trata al mundo como totalidad no tiene sentido.

Este principio es crucial, ya que proporciona un elemento contundente en el sentido de que éste pondrá en su lugar a la razón que lo hizo existir, para dar paso a otro tipo de argumentos o de realidades, por ejemplo: no tener sentido, como proposición que se impuso al mundo para avanzar en la producción del conocimiento matemático; era un proyecto homogeneizador en su implementación, desarrollo y lenguaje, pues trata al mundo como totalidad. Sin embargo, ello no se percibía así, pues en esta colonialidad del poder, que en paralelo se desarrolló a la del saber, operaba bajo la cuerda de la modernidad, la cual alertó sobre el hecho de que quien clasifica es siempre monotópico mientras que quien es clasificado es siempre *dia* o pluritópico, puesto que tiene que concebir el mundo en la intersección de la clasificación impuesta por la colonialidad del poder. Por lo que desde su visión no le cabe aún razón de porqué no debe ser un proyecto que tenga sentido su proposición cuando trata al mundo como totalidad y que esto lo coloque en la categoría de proposición falsa. Es más, la sola pregunta para éste no tiene sentido, pues mientras que ha clasificado al mundo en lo que es y lo que no es, esta visión no se mira de esta manera, sino es y es, es decir, hace creer que cada uno de los que reciben la formación y educación, así como sus aprendizajes, son ontológicamente cada una de esas categorías, mientras que la de su producción no. Pero, tenía otra razón, evitar hablar del sujeto que interviene y del proceso de pensamiento que desarrolla éste, además de colocarlo no en el plano de la producción del conocimiento, sino por fuera de la producción misma, es decir ahogándolo en el psicologismo, pues ya se había experimentado, mediante la fenomenología de Husserl, la recuperación de la autonomía de la lógica y sus leyes de toda pretensión psicologicista.

Es decir, dicha operación lo que hacía era sacar al sujeto y los procesos del pensamiento de la producción social de los conocimientos matemáticos como tales, por lo que considerarlo, además de que requería hablarlo desde afuera, representaba otro estatus, el cual imbricaba más a la naturaleza humana y las actividades relacionadas con lo humano, a la *vox populi*, en vez de a la razón última, expresión absoluta del logro de la mente. En suma, de lo que se trataba era de desvincular la actividad subjetiva del conocimiento para mantener sólo su soporte empírico. Cosa que no se podía hacer desde el ámbito de aprender y enseñar la matemática, como materialización de la necesidad de su existencia, de imponerse como la racionalidad que justificara su actuar; de ahí que, para desarrollar la matemática, los procesos de depuración debían favorecer la producción y creación de conocimientos, por encima de los procesos de su enseñanza y aprendizaje, los cuales, es cierto, están ligados, pero que fueron extraídos por esa idea de expansión, señalada párrafos atrás, y colocados por fuera de la misma. En ese sentido, si el deseo era ser reconocido como actividad científica lo hecho, debería mostrarse asegurado el dominio de la razón en la constitución de dicho saber científico. Esto implicaba luchar entonces contra dos de los mayores exponentes de dicha posición: Russel y Husserl.

Lo anterior tropieza ahora, por ser una proposición que trata del mundo como totalidad, al plantearse por tanto como un producto para toda la humanidad. Wittgenstein nos dice y recuerda que ello no tiene sentido.

El método de Popper establece una discriminación también convencional entre lo que puede llamarse ciencia empírica y aquello que pertenece a la metafísica, por no tener sentido empírico. Esta elección, así lo confiesa el propio Popper, es arbitraria y, en el fondo, no es más que una interpretación del comportamiento práctico de la comunidad científica, especialmente la de los físicos, aunque Popper no desdena, como los empiristas lógicos, la metafísica; incluso, afirma la utilidad de ciertas ideas metafísicas para la ciencia empírica, no obstante, relega al ámbito de la metafísica todos aquellos sistemas holísticos que son por lo anterior carentes de sentido y, además, inherentemente totalitarios.

A la falseabilidad, como criterio, se le han hecho muchas críticas que no interesa reseñar aquí, ni siquiera habría que considerar el obvio carácter *ad hoc* del criterio para excluir del ámbito científico todos aquellos saberes que, como el psicoanálisis o el marxismo, no son del agrado del autor. Pero, sí es importante recalcar, en primer lugar, el carácter de comentario *a posteriori* sobre el quehacer científico que tiene el método de Popper y, en un segundo lugar, la pobreza del concepto de *enunciado* que Popper comparte con los empiristas lógicos. Este concepto es reducido a mero instrumento para la formulación de hipótesis.

Ambos temas son de gran importancia para la discusión metodológica en las ciencias sociales. Pero, antes de entrar a estos temas es necesario concluir esta breve reseña sobre la filosofía analítica y sus derivaciones epistemológicas, recalcando, hecho que bien señala Kolakowski, el indiscutible valor depurativo de la corriente analítica en la filosofía actual. Sus resultados específicos son, sin duda, muy pobres y limitados, específicamente en el ámbito lógico; pero han contribuido a una mayor reflexión en lo que respecta al estatuto cognoscitivo de la filosofía y sus reglas de

interpretación, “las cuales nacen bajo la presión de los juicios de valor y de las actitudes”.

II.4.5 La lengua, transmisora de conocimientos e identitaria de los pueblos etnolingüísticos

La comunicación a través de la lengua es una característica específica del hombre. Gracias a la lengua el hombre ha podido formar sociedades complejas e incluso organizar otros sistemas de comunicación. Mediante la lengua se expresan pensamientos, emociones, actitudes y también conocimientos. La lengua permite asimismo la creación de poesía, pero, paradójicamente, en el ámbito de la ciencia matemática, a esa misma lengua no se le permite la creación de conocimientos matemáticos, mucho menos de un concepto en particular, como es el de la solución.

Es hasta que alguien le pide a otro resolver un problema matemático, hacer un cálculo aritmético, trazar una gráfica —por tanto solucionar algo—, cuando se percata de su importancia, entonces se detiene a reflexionar sobre tal instrumento de comunicación.

Sólo se es consciente de la importancia de la comunicación lingüística cuando ese alguien no se expresa, según determinado modelo estructurado, o cuando se le tiene que corregir a quienes no saben expresarlo de dicho modo. En particular, es entre los docentes, cuando creen que han aprendido a hablar, después de muchos intentos y esfuerzos para conseguirlo, que parece un hecho natural expresarse con dicho lenguaje, desentendiéndose de lo que representa en realidad esto entre sus alumnos: una verdadera problemática. Esto es mucho más visible cuando se vive con la creencia de que se domina la organización y estructuración de dicho lenguaje, formalizado ya, por un lado, pero atravesado también por las propias estructuras lingüísticas del hablante, con la que cada quien culturalmente se comunica, pues lo que se aprende a hablar sin darse cuenta es lo que suele considerarse la lengua propia.

Sin embargo, para muchas otras comunidades en las que la lengua de comunicación cotidiana no es la misma que la del docente, la problemática antes referida adquiere dimensiones y proporciones insospechadas, pues aunque se use la lengua de carácter nacional, ésta no alcanzará a proveer los significados y significantes que se pretenden dar, porque la acción de construir conocimientos se propone y encuadra desde una visión que se encuentra invertida en relación con los aprendizajes, la cual ya ha sido señalada en el capítulo II sección 4.3 y 4.4, en tanto categoriza, jerarquiza y clasifica el sistema de códigos en correspondencia con lo científico, en la idea de darle sentido psicolingüístico, estableciéndose la diferencia en el sentido de colocarse desde un lugar de enunciación distinto, como lo propone Mignolo (2001), pero también en la idea fija de que sintetice los actos comunes mediados por los altos códigos comunes de comunicación, que a su vez conforme una noción psicológica de comunidad epistémica, pues su posible intención exagerada con la cual se exige expresar el lenguaje matemático en su aprendizaje como en la enseñanza, así lo demuestra. Esto a su vez genera una doble epistemología al momento de construir los conocimientos matemáticos, como es la noción de solución, visible e invisible, que muestra en los hechos esta investigación: todavía no alcanza a

construirse una cuando pasa a otra noción con la finalidad de manejar de una vez la definición precisa y exacta que determina la ciencia matemática.

II.4.6 Problemática a estudiarse

Ahora bien, considerando lo que Maier (1999) dice, que los maestros de la materia de Matemáticas no pueden descargar sobre otras áreas de conocimiento la responsabilidad que ellos mismos tienen ante sí en relación con la solución de las dificultades del lenguaje que surgen por las diferencias entre el lenguaje matemático y el lenguaje con que se comunican en el salón de clases, hay que añadir, además, un problema común al estudiar a los pueblos indígenas en América Latina: a saber, el del reduccionismo teórico y metodológico con que se actúa, pues no se reconoce otro criterio que el lingüístico para identificarlos o, bien, la indumentaria, la forma de dormir, el tipo de calzado y de alimentación, sin advertir que esos son indicadores que evidencian las condiciones de vida de la población, las cuales, dice J. Bello (1997), dichas condiciones de vida de los grupos invadidos está determinada, más que por una falta de creatividad, por las condiciones que les han impuesto los sistemas de usos, expectativas y de reproducción, enajenando sus posibilidades para la construcción de una opción propia y liberadora.

La comprensión de la situación actual respecto al manejo que hacen de sus saberes de la matemática los grupos etnolingüísticos sólo puede ser abordada, por su complejidad, desde una perspectiva sociocultural, tal lo apunta ya Guadarrama (2001), en la que se señala que la dimensión sociocultural no sólo es un concepto, sino una visión desde la cual se reinterpretan los conceptos, las nociones y las categorías con las que se explica el mundo, por tanto, dicha lectura de la realidad se hace diferente.

Abordar un objeto de conocimiento desde esta perspectiva implica reconocer la imbricación de procesos sociales y culturales en su devenir histórico —de su reconocimiento, a diferencia de antes cuando se negaban o no se reconocían de modo abierto—, mediante el cual se transforman de manera permanente en el tiempo y en el espacio, en un horizonte en el que no tiene sentido sólo lo social y cultural sino también la producción de conocimientos, por tanto epistemológico e histórico, por la interrelación entre el hombre y su medio social y cultural, indicadores múltiples de una cultura diferente, entre los cuales el lenguaje es el más relevante y objeto de descalificación explícita.

Una lectura de este tipo conlleva la revisión de diferentes paradigmas que han abordado los procesos que hoy constituyen la compleja problemática de estas poblaciones, y desde luego de la humanidad. La reinterpretación de estos conocimientos implica la aprehensión e identificación de sus alcances, tanto en sus conceptos como en los métodos que implican. Dicha reinterpretación tiene que ver con una revisión crítica de la matemática educativa, lo cual permite identificar qué ámbitos de la realidad no han sido explicados e incorporados o muestran limitaciones. Aquí se hace necesario recuperar la experiencia social para el desarrollo de nuevas categorías. De ahí la importancia de considerar a los pueblos etnolingüísticos como aquellos que presentan unidad étnica y conservan rasgos esenciales de su cultura

originaria, hablan sus propias lenguas, respetan variaciones dialectales, practican ritos religiosos, interpretan una cosmovisión contrapuesta a la occidental y conservan ciertas normas de vida o costumbres autóctonas, en síntesis, expresan manifestaciones culturales propias.

II.4.6.1 Carácter general

Es aquí donde se considera una ruptura epistémica profunda, un encuentro con los modos de ser y hacer, pues: ¿cómo conocer y transformar el mundo en un acto de creación cultural si el sistema de símbolos no se domina y se erige así en un instrumento de dominación del hombre y no se encuentran referentes concretos para significarlo y hacerlo propio?²⁴

Elemento importante del sistema de símbolos de los grupos etnolingüísticos, los ritos religiosos fueron considerados paganos y objeto de castigo a quienes los practicaran; al ser destruidos quedaron desarticulados de su proceso de significación cultural esencial, lo que implicó el uso de otras formas tradicionales de simbolización y expresión. Así, los procesos de simbolización como el lenguaje oral y escrito se vieron restringidos y con ello truncada una vía de creación cultural, de simbolización, socialización, de representación y desarrollo personal, lo que representa el punto central para la creación de conocimientos y las formas constitutivas de los mismos. Sin duda que es un problema social el conflicto lingüístico entre el castellano como lengua nacional y las múltiples lenguas originarias en México.

Durante el periodo posterior a la Colonia una tendencia de los estados nacionales fue la eliminación de la diversidad cultural. En este sentido, el Estado implantó un sistema escolarizado nacional que en su momento no tomó en cuenta las características y necesidades de cada región, mucho menos de los grupos etnolingüísticos²⁵, así lo evidencia el hecho de que el monolingüismo en lengua indígena ha decrecido, mientras que el bilingüismo ha crecido (1930-1990)²⁶.

Después de consumarse el movimiento de independencia, se establecieron escuelas bajo un modelo homogenizador, cuyo instrumento fundamental de dominación fue y ha sido la enseñanza de la lengua nacional, ya que durante la

²⁴ En realidad se trata de un proceso largo, pues además de que irrumpió violentamente fueron sometidos a la hegemonía del eurocentrismo como manera de conocer, amén de que fueron reducidas a ser campesinas e iletradas, fueron despojadas de su cultura urbana y de su escritura, encerrándolas en subculturas peor que reprimidas, ya que fueron interferidas continuamente por patrones ajenos, dejándolas atrapadas entre el patrón epistemológico aborígen y el patrón eurocéntrico, que se fue encauzando como racionalidad instrumental y tecnocrática respecto de las relaciones sociales de poder y en las relaciones con el mundo, ya que sólo algunos podían llegar a tener acceso a la letra, a la escritura, exclusivamente en el español y para los fines de éstos (Quijano, A. 1998).

²⁵ De hecho, se les ha dado cabida no tanto por la tolerancia o la diversidad cultural que pretende reconocer el Estado, sino más bien por que en ella está implícita una postura que pretende, bajo la careta de multiculturalismo, diluir la diversidad, pero, también la postura se refiere a una visión maniquea de: te dejo que seas diferente pero tengo el control del proceso, en realidad sigue vigente la idea de una relación de poder que se establece a partir de hacer desigual lo que debe ser igual y convertir lo visible en algo invisible.

²⁶ Véase J. Bello (1997).

Colonia los grupos étnicos vieron limitadas sus posibilidades de ingreso a las instituciones de educación²⁷, pues ellas se erigieron con el carácter de extender y mantener la colonialidad del poder y del saber²⁸.

Otra concepción de cultura que calificó a la diversidad como obstáculo para el desarrollo fue la surgida de la Revolución mexicana, misma que asume como principio la debilidad de la nación y el estado mexicanos. Se planteó la necesidad de articular la nación en torno a símbolos nacionales únicos que se proponían construir una cultura nacional con contenidos propios, ya no extranjeros, para homogeneizar así al país bajo una cultura de gran cobertura. Este proyecto surge en 1917 y se prolonga aproximadamente hasta los años cuarenta.

Desde la Colonia hasta nuestros días, salvo en el período presidencial²⁹ (1934-1940), ningún gobierno ha otorgado a los grupos el derecho a la palabra. Se han instrumentado campañas de alfabetización, salud, reparto agrario, etc., desde una perspectiva de asistencia y no de promoción del desarrollo y la autogestión de los propios grupos. Lo cual ha permitido que sean espacios privilegiados para la reproducción social y cultural de la dominación, así como de la dependencia del centro metropolitano, centro político del país.

II.4.6.2 Carácter específico

Si bien el discurso imperante ha sido en términos de que la escuela promueve el desarrollo individual y permite accesos a los beneficios del desarrollo, lo cierto es que lo anterior es verdad sólo para algunos grupos sociales, cuyo proyecto de futuro coincide con el proyecto del Estado pues pertenecen a dicho grupo social. Para otros grupos, entre ellos los étnicos, dadas las diferencias culturales y diferentes expectativas de futuro, la escuela juega un papel preponderante de control y dominación cultural, mediante la imposición de la enseñanza del español, como lengua nacional, a todos los habitantes del país, entre los cuales se encuentran 15 millones de indígenas cuya lengua no es el español, éste es el caso de los *binni záa* (zapotecos), cuya lengua, *diidxazáa*, después del español es la tercer lengua que más se habla en el país y la primera en el estado de Oaxaca.

En general, la lengua indígena ve reducido su ámbito de comunicación a lo familiar, espontánea para los de afuera mientras que para los de adentro se vuelve sistemática y consistente en el interior de las comunidades y poblaciones rurales. Sin embargo, eso no deja de que sea amenazada por la expansión del español. Por ejemplo la población que emigra a las ciudades va perdiendo progresivamente su dominio (por lo menos activo) de la lengua originaria.

²⁷ Aníbal Quijano señala que en la sociedad colonial sólo algunos de los colonizados podían llegar a tener acceso a la letra, a la escritura, y exclusivamente en el idioma de los dominadores.

²⁸ Edgardo Lander define la colonialidad del saber como el carácter no sólo eurocéntrico sino articulado a formas de dominio colonial y neocolonial de los saberes de las ciencias sociales y las humanidades, en el cual no tiene que ver sólo con el pasado, con las “herencias coloniales” de las ciencias, sino que juega igualmente un papel medular en el dominio imperial/neocolonial del presente.

²⁹ El gobierno del general Lázaro Cárdenas del Río.

En la práctica, las lenguas de los grupos étnicos se han visto sometidas a una política del lenguaje que apuntala la consolidación de una ideología que trata de desarrollar aún más la situación diglósica mediante la internalización de la relación asimétrica entre las dos lenguas, la generalización de juicios y prejuicios a través de los discursos públicos, que señalan que las lenguas serían menos aptas para las necesidades comunicativas, hasta llegar a una situación tal en que las consecuencias de la subordinación de una lengua se toman como justificación para mantenerla discriminada.

II.4.7 El plano de lo educativo y la lengua

Se concreta así una imposición en la instrumentación de planes y programas de estudio en el nivel básico, con carácter nacional y regional, donde los libros de texto apenas empiezan a dejar de ser los únicos medios o recursos de que disponían maestros y alumnos en el aula; por si fuera poco, los profesores son formados desde la perspectiva de la cultura mestiza, desprovista de una identidad propia, heredera indirecta de cierta parte de la cultura colonial, pero más de otros procesos, de cierta acción autocolonizante, más cercana a las posturas eurocéntricas, reproductora de la imposición de la lengua nacional (español para los mestizados, castellano para los pueblos etnolingüísticos), validadora de relaciones sociales de dominación que marginan a los pueblos etnolingüísticos de los productos del desarrollo científico y tecnológico.

Así, la educación formal indígena no ha logrado trazar un puente entre la teoría y la práctica, pues prepara sólo para “saber decir”, no para saber hacer, ni mucho menos para saber actuar. Desde la postura que asume, la educación nacional reafirma una identidad de autocolonización en muchos aspectos, sobre todo para evitar confrontaciones con lo nacional.

Su valor parece radicar en sí misma, en parte por el poder de certificación que poseen. Sus logros parecen extraordinarios. Por su misma formalidad (la educación formal para los indígenas)³⁰ sinónimo de rigidez e inadecuación, oculta lo que es el mismo proceso educativo, al convertirlo en algo valioso *per se*, independientemente de la relación e integración que tenga con la realidad, pues desconoce las contingencias cotidianas de los actores, los cubre bajo la acepción curricular que valora sólo la forma (que en este caso significa apariencias, simulacro de la realidad), como sucede al estudiar la pluriculturalidad y multilingüidad mexicana, carece de expresión vital, tratándolas como si dichas culturas y lenguas fueran piezas de museo.

II.4.8 Sobre su aprendizaje

La relación entre lengua y aprendizaje es fundamental, pues sólo es posible pensar mediante el lenguaje, por tanto no hay por qué sustraerse de sus potencialidades y limitaciones:

³⁰ Se está considerando aquí a la educación formal indígena, la que otorga el sistema educativo nacional a través de la participación del gobierno federal y de los estados que la imparten.

- Se provocan consecuencias perjudiciales cuando se dice: que no se debe pensar, no sirve, apenas es un dialecto o cuando se le califica de que “no es lengua”.
- Muchos profesores refuerzan el aprendizaje a través del castigo.
- La continua repetición hasta que se haya aprendido o puedan darse evidencias, mediante una evaluación, de lo aprendido.

En el caso del aprendizaje del español en los indígenas, opera por dos vías paralelas, según dice Bello (1997): un aprendizaje asistemático, no dirigido, que se da por necesidades del trabajo temporal, la migración hacia las ciudades y los contactos con la estructura política estatal, que afecta a la población adulta de los mismos. La segunda es la escolarizada, en la cual se han perfilado dos tendencias a lo largo de la historia: la directa y a través de la lengua materna (educación bilingüe bicultural).

- La directa (supuesta) descarta la educación bilingüe porque considera impráctico elaborar materiales didácticos en tantas lenguas³¹. Además, pretende que se aprenda el español lo más rápido posible para gozar las ventajas de la integración a la sociedad nacional; propone la práctica oral del español y continuar con la alfabetización.
- El método donde la lengua materna cumple un papel de “muleta” para imponer con más eficiencia y rapidez el español y los valores de la cultura nacional dominante —las comunidades ven en la escuela el instrumento de expansión del español, que impulsa el mito del bilingüismo para negar o neutralizar el conflicto que éste plantea—, mientras que, por otro lado, tanto las políticas como los gobernantes y funcionarios, incluso los mestizos, lo propagan, pero no lo practican.

II.4.9 Educación y conocimiento cultural

En un primer momento el proyecto colonial asumió la necesidad de sustituir la diversidad cultural existente en el territorio mesoamericano por la cultura eurocentrista representada por el español, imponiendo así la adopción de modelos culturales ajenos. En este modelo subyace la noción de cultura superior y cultura inferior, justificadora de toda acción colonizadora.

Los programas educativos dirigidos desde su origen han nacido con esta apreciación: considerar sólo el segmento lingüístico, no han tenido presente lo cultural. Esto explica que el interés por los aspectos culturales muchas veces no supere el nivel meramente etnográfico, que promueve un conocimiento superficial de las culturas, dicha ausencia ha hecho fracasar tales programas.

Es requisito conocer profundamente la cultura con que se trabaja pues de nada sirve reiterar el respeto a los valores autóctonos y la adaptación del currículo al medio socio-cultural, si de fondo se arrastran lastres que inhiben la transformación del todo. En el caso de todos los grupos étnicos, de los binni zaa en particular, es necesario recuperar su experiencia con el fin de reconocer aquellos contenidos y formas

³¹ La Dirección General de Educación Indígena (DGEI) reconoce 52 variantes dialectales de 33 lenguas, solamente.

culturales de las cuales sea posible aprender para construir proyectos cuya direccionalidad den cabida a la pluralidad étnica y cultural. Las dificultades más comunes son una traducción mecánica de los contenidos de una lengua a otra y la dificultad de trasladar conceptos pertenecientes a dos universos culturales distintos, por lo que resolverlo resulta una tarea de capital importancia.

En el caso del presente trabajo, el propósito entonces lo constituye el reconocimiento de aquellos aspectos sociales, culturales y lingüísticos que permitan viabilizar un proyecto de construcción social de conceptos matemáticos, donde los binni zaa alcancen niveles de autonomía respecto a la creación y articulación de sus conocimientos matemáticos y que accedan a la recuperación del control efectivo de su patrimonio cultural, al manejo de sus recursos sociales y culturales, a la capitalización de su trabajo en beneficio de la transformación de sus concepciones, y sea éste un camino más de la interculturalidad social para la vida de dichos pueblos y su desarrollo. Las acciones aisladas no procuran su existencia digna.

En relación con la construcción de sus conocimientos. Es necesario reconstruir los ámbitos de participación en el salón de clases, donde recuperen y revitalicen su conocimiento matemático bajo un bilingüismo que favorezca el desarrollo equitativo de ambas lenguas y que les permita transitar, articular el paso entre las dos epistemologías en las que se encuentran para darle un efectivo impulso a sus aprendizajes, sólo de esta manera trascenderían los conocimientos matemáticos regionales y nacionales. Asimismo, hay que recuperar sus experiencias con el fin de reconocer aquellos contenidos y formas culturales con las cuales construyan proyectos en cuya direccionalidad tenga cabida la pluralidad étnica y cultural.

El proceso de reconstitución de la identidad étnica opera y permite que las sociedades indias permanezcan y luchen por una sociedad donde también tengan su lugar, conservando la experiencia ancestral que consideren significativa y sus elementos de identidad articuladores, el idioma, en este caso.

II.4.10 El lenguaje

En esta sección se aborda lo que podría ser considerado el punto teórico en el cual se apoya el presente trabajo, toda vez que no hay referencias explícitas por teorizar sobre este aspecto, si acaso la conocida y denominada perspectiva no ortodoxa, que toma ciertos aspectos de Vigotsky, y contraponerlos con experiencias que empiezan a ser recuperadas, vía diferenciadora de la percepción e interpretación de la relación conceptual lenguaje-pensamiento.

Esta relación conceptual lenguaje-pensamiento está visualizada como la acción de componentes socioculturales, que a la vez considera al sujeto que piensa y sus procesos de pensamiento, como la del lenguaje vinculado a la construcción de la cotidianidad, la interacción con el lenguaje común, en español o lengua indígena. Pero, al mismo tiempo, de lo que se trata es de hacer viable la construcción o acceso a la comprensión del papel que juega, en su interacción, el lenguaje que se construye socialmente de la matemática, es decir, el lenguaje que se formaliza y que llega el momento que se tecnifica demasiado, que se distancia por completo de la posibilidad de crear ese espacio de comprensión y entendimiento para los conceptos matemáticos

en general, y para los motivos de este trabajo, la noción y concepto de solución en diferentes contextos matemáticos. Por lo que hay que decir aquí que el conocimiento de la lengua oral y escrita estructura el pensamiento y promueve su desarrollo, por eso es fundamental su enseñanza desde los primeros años escolares, para desarrollar una educación intercultural que les permita comunicarse con los “otros”, en condiciones de igualdad social y cultural.

El ser humano, en su transformación histórica, ha modificado el espacio ocupado a través de la instrumentalidad, es decir, ha creado instrumentos que le permiten obtener de la naturaleza la energía necesaria para su reproducción no sólo biológica, también social, cultural y lingüística. En este proceso de transformación ha creado instrumentos-artefactos y símbolos-artefactos. Los primeros son aquellos cuya existencia material han definido la naturaleza de las transformaciones del entorno humano; los segundos, son los que se erigen en representaciones de la vida material. Ambos forman parte de la cultura de un grupo social.

Harris (1987) dice que el lenguaje hablado cumple una función instrumental de suma importancia en la coordinación de la vida de un grupo. Habría que añadir que en su carácter instrumental, le permite a los individuos acceder a niveles de conciencia y pertenencia al grupo, de tal magnitud que lo reproduce y extiende, esto que aquí se ha caracterizado como la potencia sociocultural. Por otro lado, Bonfil Batalla le asigna un lugar preponderante en la identidad cultural de los grupos étnicos y en la constitución de la misma.

Ahora bien, en relación con este apartado, la referencia más cercana es la de Vigotsky. Sin embargo, dada la problemática a analizar, más las evidencias presentadas por Guadarrama (2001), se harán sobre la interacción y manejo del lenguaje en la construcción de los saberes matemáticos de los zapotecos de la ciudad de Juchitán Oaxaca.

Hay que recordar que para Vigotsky los procesos de desarrollo del lenguaje y del pensamiento sólo pueden ser entendidos en su interrelación, pues existe una unidad dialéctica entre la inteligencia práctica y el uso de los signos en el ser humano adulto, sin embargo, cuando se considera la cultura específica de los binni zaa, de acuerdo con la problemática discutida por Guadarrama (2001), no sólo es privativa dicha unidad dialéctica propuesta para los adultos, se ha observado que la comparten los demás miembros del grupo, por ejemplo, los niños en edad escolar de la comunidad zapoteca de Juchitán, es decir, esta inteligencia práctica, igual que el uso de los signos, se manifiesta desde edad temprana. Constituyen la esencia de la conducta humana, como lo define Vigotsky, o bien de un comportamiento social en el sentido que lo señala V. Martínez (2001), ya que la actividad simbólica tiene una función organizadora, y se añadiría que también estructuradora, de saberes específicos, las cuales producen nuevas y variadas formas de comportamientos socialmente aceptados.

En ese sentido el lenguaje juega un papel importante, e incluso central, no sólo porque produce saberes específicos y formas diversas de comportamientos socialmente aceptados, sino porque los estructura y los pone en equivalencia al sentido estructurado que busca la función organizadora. De ahí la pertinencia de

retomar a R. Ramírez (1995), cuando trata de comprender la situación actual de los grupos étnicos respecto al lenguaje y su educación, y señala que el momento más significativo del desarrollo intelectual es cuando la inteligencia y la actividad práctica convergen. El lenguaje es el proceso de simbolización de las acciones; así, el hombre llega a dominar su entorno a través de éste, lenguaje, acción y conocimiento son inseparables, por lo que, de acuerdo con Vigotsky, es posible afirmar que perdido el dominio del lenguaje se pierde el control sobre las acciones y el conocimiento.

Sin embargo, esto último y por la realidad que atraviesan los pueblos y grupos etnolingüísticos de América Latina en general, y los de México en particular, todavía no sucede lo que sostiene el autor, ya que a más de medio milenio de colonización e imposición lingüística, no sólo no han desaparecido, sino su vitalidad es fecunda, pues se observa que han reconstituido y restablecido relaciones más complejas con la realidad, por lo que, puede decirse, se ha complejizado aún más dicha realidad, cuyos efectos todavía están por ser verificados, ya que en el caso de los pueblos y grupos referidos bajo este proceso diferenciado de colonización y colonialidad, no ha concluido.

Se presupone que si bien los lenguajes han estado sujetos a fuertes tensiones que le ha impuesto la dominación y que muy a su pesar, donde se pensaba que se perdían, no ha sido así, ya se han revertido ciertos determinismos al crearse condiciones de recuperación, revitalización o al menos de reenergización³², por lo que al parecer se está ante el movimiento de las sociedades donde se están efectuando modificaciones socioculturales que no sólo expresan resistencia sino algo más, vitalidad.

Por otro lado, Vigotsky afirma que el proceso a través del cual el ser humano domina el lenguaje oral es diferente al del proceso de dominio del lenguaje escrito, ya que este último implica una doble simbolización, cuyo dominio requiere un punto crítico decisivo en el desarrollo cultural. El dominio del lenguaje escrito, es algo más que una complicada habilidad motora, es en realidad un sistema de signos que designan los sonidos y las palabras del lenguaje oral, los que a su vez son signos de relaciones y entidades reales, pues en la evolución de la expresión gráfica existen actividades que sirven de antecedente al lenguaje escrito. Así, puede decirse que la simbolización de la realidad ha pasado por la expresión pictográfica y el dibujo hasta llegar a complejos sistemas alfabéticos e ideográficos y conceptuales como los que conocemos, incluidos los que se desconocen o no han sido mostrados por completo hasta ahora. Éste es el caso del concepto de la solución en sistemas de ecuaciones lineales, donde sus primeras nociones pueden ser observadas en las expresiones gráficas que los sujetos utilizan en respuesta a lo que se les solicita, como fue el caso

³² A mediados del siglo XIX, A. Schleicher planteaba que las lenguas al igual que los seres vivos nacen, crecen, envejecen y mueren fuera de la voluntad humana, incluso sostenía que la diversidad lingüística es el resultado de la desmembración de un mismo tronco común. Ello también lo dice P. Máynez (2001), de que a pesar de las tendencias y de las políticas adoptadas en la historia de las lenguas en México, se observa una continua oscilación (entre la exclusión y la integración) en los diferentes momentos históricos de la nación, y que hoy se vive la experiencia de un resurgimiento de las lenguas indígenas.

de las respuestas gráficas en las tesinas y cuando observaron los gráficos que se les presentó durante las entrevistas para la tesis de maestría.

Otras de las aportaciones de Vigotsky en el estudio de la relación pensamiento-lenguaje es el descubrimiento de que el significado de las unidades lingüísticas es dinámico, es decir, su desarrollo implica cambios, no se mantienen estáticas. Este desarrollo ocurre de manera paralela al del pensamiento, que va de las formas infantiles al pensamiento abstracto adulto.

Aunque no es propiamente esto último lo que se quiere indicar en el caso de los binni zaa, sí se pretende tener una idea de que es factible percibir o mencionar cierta evolución, no sólo en relación con el paso de lo infantil a lo adulto, pues los ejemplos discutidos en el trabajo mencionado de la construcción social de los conceptos matemáticos, de Guadarrama (2001), da evidencias de que en efecto eso ocurre.

Hay que añadir que dichos procesos de construcción avanzan más rápido de lo que es posible observarlos, el movimiento se efectúa de una forma a otra. Lo que se requiere para la creación de nuevos significados es que deben pasar por la negociación de sus significados, los cuales requieren estar bajo el argumento de ser dirimidos en la controversia, enriquecida por su uso y aplicación en el desarrollo sociocultural de las comunidades.

Ahora bien, Vigotsky define así la naturaleza de las relaciones entre palabra y pensamiento:

- La relación entre pensamiento y palabra no es un hecho, sino un proceso, un continuo ir y venir del pensamiento a la palabra y de la palabra al pensamiento, en la relación palabra y pensamiento ocurren cambios que pueden ser considerados como desarrollo en el sentido funcional.
- El pensamiento no se expresa simplemente con palabras, sino que existe a través de ellas. Todo pensamiento tiende a conectar una cosa con otra, a establecer relaciones, se mueve, crece y se desarrolla, realiza una función, resuelve problemas, incluso de los más intrincados.

Aquí es necesario hacer énfasis en el sentido de que el desarrollo del significado de la palabra parte de las acciones concretas que el individuo ejerce sobre su entorno, es decir, la diferenciación en el uso de la palabra parte de la diferenciación que hace de los objetos que nombra. Por ejemplo, considérese la siguiente secuencia para el hablante en español: en un primer momento el niño parte del conocimiento de las letras para después integrarlas al uso de palabras aisladas, después conecta dos o tres palabras pasa al uso de frases simples o complicadas, finalmente usa un lenguaje coherente, formado por un conjunto de oraciones, es decir, va de las partes al todo. Par el caso de los binni zaa la lógica de construcción no se da con letras para después generar palabras y conectarlas, sino que todo lo que va construyendo está en relación con el todo, lo cual hace que no lo disocie, por tanto la lógica de construcción tiene de origen otra naturaleza. Mientras que para el hablante del español es dada según el patrón creado por el mismo sistema, en el caso de la cultura binni zaa vienen

conectadas mediante las relaciones que están con el todo, por lo para ellos no tiene sentido aprender algo que no tiene relación inmediata con su vida, con su comunidad, con la actividad diaria e incluso lingüística, sino que incluso no es propia.

Si se observa, se trata de lógicas de construcción diferentes y, por tanto, que no comparten el conjunto de experiencias que las determina, pero que, incluso en la intención de reconocer que con el tiempo se han creado espacios que se han hecho común, se diría que las culturas étnicas fundamentalmente han creado, con base en esa necesidad de relacionarlo con el todo, pero también de entender lo que la otra cultura dice, formas que permiten conectar lo que la cultura occidental trata de imponerle, desde luego, en los aspectos que encuentran relación con lo vital del *diidxazáa*.

En lo referente al dominio del significado de las palabras, en un principio el niño usa palabras aisladas como oraciones completas, es decir, parte de la totalidad de un complejo significativo y más tarde domina las diferentes unidades semánticas al dividir su pensamiento en esas unidades. Este proceso de desarrollo lingüístico promueve el desarrollo del pensamiento desde una totalidad homogénea hasta la diferenciación de sus partes. Se considera que aquí precisamente radica el punto central de la diferencia en este entendimiento de la relación pensamiento-lenguaje construida por la visión eurocéntrica, ya que al trabajar la construcción social de conocimientos, en particular los matemáticos, en la región del Istmo de Tehuantepec, en donde habitan los *binni záa*, si bien parten de la palabra como la totalidad referida, ellos a la vez las usan como unidades lingüísticas dinámicas, que no sólo se van ajustando al desarrollo del pensamiento sino que simultáneamente hacen el trabajo de las unidades semánticas y, por lo tanto, usan los vehículos relacionales que dinamizan su lenguaje. Es más, el movimiento de su pensamiento es de tal suerte que mientras que en la posición de Vigotsky este proceso se va dando de manera pausada, paso a paso, constructivamente, en los *binni záa* su conformación y constitución, aunque también es constructiva, se efectúa de modo simultáneo. Es decir, no esperan que actué primero la unidad lingüística en su estado estacionario para convertirla en una unidad lingüística, en un estado dinámico para ser entendida como totalidad homogénea, sino también y a la vez la relativiza para convertirla en heterogénea, es decir, de una vez posibilita su entendimiento simultáneo a la acción de colocarla en el todo y en las partes, de ahí que se diga que crea las posibilidades, por tanto, la identificación también del potencial de su pensamiento que pueda ajustarse a la movilidad semántica que se desee crear.

II.4.11 Las formas empleadas

En este contexto, a la diversidad cultural que cohabita en nuestro país, concretada en los pueblos y grupos etnolingüísticos existentes hasta el momento, después de su activa participación en la lucha por la Independencia, sólo le dejaron como vía su occidentalización y ser desposeída de su conocimientos³³, impiéndole acceder a los

³³ De hecho Carlos Montemayor (2001) sostiene que el siglo XIX fue uno de los periodos más intensos de socavamiento de la base territorial indígena e, incluso, como dato de interés, señala que en febrero

productos de la cultura universal y dejar así su subdesarrollo. De ahí que se ha utilizado la lengua en forma asistemática, sin una visión integral, negándole una jerarquía y función paralela a la del español —simple apoyo para información nada más—. Al no contemplar los intereses de los grupos etnolingüísticos ha creado graves conflictos en el hecho de que no hablan bien el español, ni su lengua, y terminen por perder a ésta. Por lo que hay que desechar el excesivo relativismo de la consideración de estos aspectos pues no permite tomar en cuenta la necesidad que tienen dichos grupos de dominar el universo cultural nacional al mismo tiempo que al suyo propio.

de 1824, en las sesiones iniciales del Congreso Constituyente, José María Luis Mora insistió en que sólo se reconocieran en la sociedad mexicana diferencias económicas y que se desterrara la palabra indio del lenguaje oficial, por tanto, que se declarara por ley la inexistencia de los indios, para ello emplearon algunas frases cercanas, “los antes llamados indios”.

II.5 Desvinculación entre los lenguajes de uso y el categorial

Si se considera que en la práctica educativa se da poca atención a las formas con que se comunican las personas, éstas, en su intención de aproximarse, de darse a entender e intercambiar concepciones de lo que han aprehendido en cuanto a sus conocimientos matemáticos (que requieren o están trabajando), por ejemplo, o porque tienen necesidad de avanzar con el desarrollo del programa, la instrumentación de actividades, la asignación de tareas y ejercicios, la resolución de evaluaciones, etc., establecen una dinámica, si bien particular —en la escuela, en el aula—, que termina siendo homogénea y general, ya que emplea mecanismos y parámetros repetitivos y monótonos, cuando que cada ser humano posee personalidad propia, lo cual es una contradicción de sus postulados. De ahí que la escuela tienda a valorar bajo los mismos parámetros sus contextos: de ciudad, urbana marginal, regional, provincial, pobre, de clave escolar, de clase de número, de grado, de rendimiento, etcétera.

Sin embargo, precisamente estas circunstancias que actúan en el medio debieran ser la razón de por qué fijar la atención en las formas de comunicación, sobre todo que, además de reconocerlas, les permitieran clasificarlas, operar con ellas, vía investigación, como también considerar las formas de comunicación cotidiano-usuales, poniéndolas a hacer lo que hasta la fecha no hacen, en perjuicio de la escuela, quizá por ignorancia, en vez de mirarse como parte de la misma moneda en el sistema cultural, complementaria a esas formas de comunicación, lenguaje, conocimientos y saberes formalizados por la sociedad, institucionalizados a través del salón, la escuela, el colegio, el instituto, la universidad. Al hacer el diálogo con las que categorial y racionalmente la modernidad ha decidido que se empleen de manera formal, con lo se sostiene que han aprendido a expresarse adecuadamente en el discurso matemático o que han entendido, de acuerdo con lo que se requiere que manejen, se requerirá considerar la negociación y el consenso de las formas interculturales de expresión.

Estos prejuicios obedecen, entre otras razones, a cambios fundamentales inaugurados a partir del siglo XVI, con la invención de América, que si bien se han modificado ciertas condiciones, permanecen activas hasta la fecha, pues son las razones por las que han decidido actuar como racionalidad/modernidad para la implantación de una dinámica que coloca por fuera, no sólo estas formas de comunicación popular, sino también lenguajes y construcciones epistémicas respecto al conocimiento en general y, de la matemática en particular, en la medida que ésta va “progresando”.

Dicha problemática emerge en las periferias de los centros metropolitanos de la academia. Hoy, ante la extensión y agudización de la problemática de los aprendizajes como de las enseñanzas —aumento de la frecuencia de reprobación, altos índices de deserción, aunado a los cambios tecnológicos como resultados de factores internacionales respecto a la poca eficiencia en los aprendizajes de la matemática, desappropriación de formas de aprehensión del conocimiento, reemplazo

de epistemologías por otras que no necesariamente representan progreso en las personas, en lo cognitivo y epistémico, mucho menos en lo social, etc.— se requiere echar una nueva mirada, con una comprensión más profunda de lo habitual, con la mayor claridad posible para poder establecer esas formas dialógicas comunicativas entre el lenguaje formal y el lenguaje de uso.

Por lo que expresiones que se emplean en las discursividades bajo las interacciones sociales del salón, en la escuela, como: “pensándolo matemáticamente”, para llamar e indicar la relación en ecuaciones o “están muy pegaditas, así como las tortillas”, para referirse al paralelismo entre planos o “que no tiene solución”, correspondiente a paralelismos en las gráficas horizontal y verticalmente, con y sin ejes de referencia, además de indicar el estado de sus entendimientos y concepciones relativas a la solución que requieren ser consideradas en esta investigación, pues expresan, como ya se señaló, además de entendimientos, concepciones y nociones, dan cuenta del proceso de construcción de la solución en un problema matemático. Asimismo la dificultad que les causó al trabajar y pensar con “los coincidentes”, como fueron: tres rectas coincidentes, dos rectas coincidentes y otra paralela en el plano, tres planos coincidentes, o dos coincidentes y uno paralelo en el espacio. O “sustituyan” en los niños de primaria, obtenidos en trabajos anteriores (Guadarrama, 2000, 2001), como también de las razones en la modificación de los enunciados cuando se formulan problemas matemáticos, pues además de ser evidencias de la investigación, muestran haber encontrando regularidad en lo sociocultural propuesto por Guadarrama (2001) en relación con el lenguaje empleado, los cuales actúan de marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en un determinado discurso, no porque los alumnos no quieran aprender, pues su asistencia a las aulas es parte de la evidencia de su voluntad, sino más bien, porque no hay mediadores discursivos o reconocidos que establezcan relaciones dialógicas que a veces se presuponen y que, sin embargo, no están. Por ejemplo, al situar las cuestiones: cómo se da el proceso de construcción social de la solución, cómo se establecen los entendimientos y concepciones referentes a este proceso, sobre todo puestas en tensión con el discurso matemático escolar que proviene del discurso matemático teórico empleado para transmitirse.

En ese sentido, la relación del lenguaje empleado, como “coincidentes”, “sentido de intersección”, “empleo de un lenguaje analítico”, “formalidad lógico estructural con que se trabaja”, etc., actúa dificultando la comprensión del significado en el discurso y establece a la vez marcas discursivas que permiten indicar los momentos que entorpecen la comunicación. Por antecedentes, lo contundente fue mirar la situación de solución como todo aquello que se estaba intersectando, era la condicionante para señalar: tiene solución o no tiene solución gráficamente, como fue el caso de la intersección dos a dos de los tres planos que se consideró como solución.

Todas estas expresiones y formas de entendimiento y comprensión pueden, desde otra mirada, indicar la búsqueda de mediadores por parte de las personas, en esta relación entre el lenguaje formal y el lenguaje de uso para explicitar los entendimientos y concepciones dirigidas a capturar lo que el lenguaje formal define

por solución en un ámbito analítico y que no reconoce en el lenguaje de uso, pero también pueden ser entendidas —sustanciales en este proyecto doctoral—, como la presencia de otras epistemologías que se construyen de modo alterno, colocadas por fuera, para comprender el discurso matemático teórico racional de la modernidad que exige la comprensión monotópica y ontológica de sus conceptos. Hay que agregar que otros grupos y pueblos, culturalmente distintos, reciben el flujo de conocimientos mediado a su vez por un lenguaje ajeno al suyo. De ahí que la problemática no sólo expresa complejidad sino también absurdos con que se actúa en la realidad. Por ejemplo, en las explicaciones que se han ofrecido sobre la constitución de los conocimientos matemáticos, las expresiones que se dan a continuación: *tobi ne tobi biasi chupa*, *chupa gaxha nu chupa biasi gastí* (uno más uno igual a dos, dos menos dos igual a cero) o *tobi ne tobi biasi chupa*, *gaxha nu chupa biasi gastí* (uno más uno son a dos, quita dos, no te queda nada), no son consideradas como expresiones válidas que tengan sentido para el conocimiento en general, mucho menos para el conocimiento matemático universal. Sin embargo, dichas expresiones, además de tener sentido en un contexto matemático específico, expresan mucho más relaciones de conocimiento que las que se supone que no tienen. Desde luego que tienen sentido de comunicación y de ideación para grupos de personas amplios y específicos que manifiestan interacciones sociales, que pactan comportamientos, además de que expresan un contexto matemático y que poseen relaciones de conocimiento cultural, social y lingüístico, claro, no por menos se está aprovechando en esta investigación; tienen más que sentido y significado social, pues expresan relaciones de conocimiento formal que le permiten al usuario resolver problemas si se quiere muy inmediatos (concretos), pero que al fin de cuentas los resuelve y, en correspondencia, les resuelve problemas en la cotidianidad, es decir, expresan soluciones en sus propias palabras.

De la Cruz (1999) señala que, en el caso de los zapotecos de Juchitán, la expresión que denomina esta acción del pensamiento está definida como: *Didxa ribee diidxa*, a la vez proverbio de sus antepasados los binigulasa que, al traducirlo de acuerdo con la tradición de los binizáa de Juchitán, puede ser entendido como “las palabras desenvainan palabras”, otra traducción sería: “las palabras sacan palabras” o “las palabras generan palabras”.

Ahora bien, Cantoral y Farfán (2000), sostienen la tesis de que “el conocimiento matemático (...) tiene un origen y una función social asociada con el grupo socialmente establecido, luego prácticas humanas”, luego añaden: “esta afirmación puede no ser entendida en el sentido que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica”. En ésta se apoya con fuerza el presente proyecto, ya que evidencia de manera condensada, sintética, la enseñanza y aprendizaje de la matemática, pero, también la magnitud del problema que hoy se enfrenta y que plantea nuevos desafíos de explicación, la necesidad de elección de otro marco de referencia que permita sostener una nueva línea de argumentación y de entendimiento ante la profundidad de las inquietudes y de la problemática.

¿Por qué atender la construcción social del concepto de solución?, sin duda, para coincidir con lo que Cantoral y Farfán indican, que en todo grupo humano se realizan prácticas sociales, por tanto son prácticas humanas, que en muchas de las ocasiones expresan entendimientos y concepciones de las personas en el sistema didáctico, las cuales se tipifican como prácticas sociales, culturales y discursivas, que expresan la relación entre la actividad humana y los objetos de conocimiento matemático, en nuestro caso la solución.

Lo anterior permite reflexionar, desarrollar y extender la investigación y sus avances. Además de lo mencionado, la ubica en la necesidad de indagar acerca de la aserción sobre el punto de vista de Sierpinska en los aspectos generales sobre la matemática: “que en la evolución de las matemáticas se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento: Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural”, empleado en el marco teórico del trabajo de Guadarrama (2000).

En la medida en que se profundiza en el ámbito de los referentes teóricos, como en el de la comprensión del pensamiento de avanzada, se obtienen, a través de una minuciosa revisión bibliográfica, desde una geopolítica del conocimiento de Mignolo (2001) o de una visión historiográfico-filosófica de Dussel (1995), en relación con la comprensión de los eventos sociales, nuevas evidencias respecto a cómo conciben la solución en la clase, con base también en registros etnográficos de alumnos de una primaria en Juchitán, Oaxaca, el estudio de los sistemas socioculturales y en parte con la caracterización que ofrece la dimensión sociocultural, que busca estudiar, localizar y documentar los mecanismos de acción con que opera el sistema, mediante la interacción social que, además de los procesos socioculturales, den cuenta del carácter epistémico en que se ubica la problemática (parte de los resultados y de los primeros indicios obtenidos), donde se exhiba su complejidad establecida bajo la consideración de los aspectos aquí discutidos en forma de un documento académico, con la orientación filosófica que se inicia con Descartes y se termina de establecer con la formulación de Kant. Vale la pena decir que la consideración de los juicios sintéticos *a priori*¹, de Kant, añadió dificultades para seguir sosteniendo las explicaciones de Sierpinska.

Hay que mencionar de paso, que esta diferencia de opinión iniciada y después adoptada, articula realmente una diferencia de interpretación y de explicación para el presente proyecto, el cual se asume como un desafío más de la misma investigación, pues de nuevo se adopta lo que Cantoral y Farfán (2000) indican: “está siendo suficientemente documentado que las nociones matemáticas no necesariamente vienen de las abstracciones sucesivas y generalización de empíricos”. Con ello aparece la necesidad de comprender la aproximación sistémica que los autores referidos llamaban socioepistemología, la cual permite discurrir de manera articulada con tres componentes fundamentales bajo la interacción de sus dimensiones

¹ A la solución que da al problema de la experiencia. Para más detalle ver el apartado “III.4.1 Sustento de la discusión filosófica”.

canónicas, en la construcción social del conocimiento, a saber, su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural (los niveles de materia cognitiva) y sus modos de transmisión a través de la enseñanza.

La intención aquí es exponer algunos de los aspectos que están contenidos precisamente en analogía a la idea de los autores mencionados y que junto con la consideración de más elementos que en este proyecto se les ha llamado componentes (cultura, identidad y prácticas discursivas) de la dimensión sociocultural, permitan mostrar la existencia de otras epistemologías que se generan en los grupos humanos y que son expresadas en las aulas², al momento de crear y expresar sus entendimientos y concepciones relativas a lo que entienden por solución y cómo constituyen la solución, como también sus argumentaciones, razonamientos, nociones y desde luego conocimientos. Para esto es relevante mostrar cómo operan con ellas (“sus epistemologías”), cómo les permiten resolver problemas matemáticos, sus dificultades específicas y, desde luego, su cotidianidad, concretando y verificando lo que dichos autores sostienen como tesis: que todo conocimiento matemático obedece a necesidades de naturaleza práctica.

Por otro lado Cantoral destaca: “las nociones y los procedimientos que se enseñan tienen ciclos de vida y cambian a la par que evolucionan las comunidades humanas. Estos cambios de naturaleza social dan pauta para entender el funcionamiento de la construcción del conocimiento y de su difusión institucional”. De lo que ese trata es de esclarecer la función social de la construcción del conocimiento que conllevan este tipo de reconocimientos mediante la exhibición de objetos matemáticos que surgen bajo epistemologías que difieren de la actual y que documentan a los conceptos, cuyo refinamiento no necesariamente ha provenido de una relación presupuesta por Kant.

Los mismos autores continúan su idea al señalar que “la producción del conocimiento es cultural y evoluciona de acuerdo con la dinámica de las estructuras sociales de la época” (Cantoral, y Farfán, 2000). Con ello establecen la necesidad de entender el funcionamiento del sistema didáctico y, a partir de ese entendimiento, poder proponer aspectos que mejoren el funcionamiento del sistema educativo. Para poder realizar lo anterior, es necesario considerar el lugar donde se ubica la dimensión sociocultural desde una aproximación socioepistemológica, pues ésta proporciona coordenadas en lo teórico y en lo metodológico para la investigación, al plantear una condición necesaria: explicar las leyes que gobiernan estos procesos, y que permitan mejorar el entendimiento de los mecanismos idóneos de su apropiación, redundando en la formación de mejores ingenieros, científicos y profesores (Cantoral, y Farfán, 2000). Por supuesto, también eso significa mejores individuos sociales, capaces de enfrentar los retos que hoy y el futuro demandan. El mismo Cantoral

² Que también expresan dialécticas entre la actividad y el objeto en cuestión, atravesadas, a su vez, por componentes culturales, lingüísticos o discursivos e identitarios, no marcados fuertemente, en el caso de este último, por razones del trabajo.

señala: “desde nuestra perspectiva el conocimiento debe aparecer como una necesidad de quien aprende.

Enseñar entonces debe entenderse como el propiciar las condiciones para que surja la necesidad del conocimiento” (Cantoral, y Farfán, 2000). Por lo que es viable pensar que no sólo es discurrir, sino pensar, expresar, simbolizar, elaborar, transformar esas prácticas humanas que den sentido real al proverbio *didxha ribee didxha*, adaptando su sentido, y que además responda a esas necesidades concretas que se formulan también socioculturalmente, como la que ofrecieron los profesores de educación básica al modificar sus enunciados, o los de los niños de la primaria, que proveyeron la solución en el contexto sociocultural y lingual: *de rari neza riree gubidxa*, *de rari neza riazí gubidxa*, o *hucha nu ca letra ca, por ca numerú ca*. Éstos generan espacios comunes de solución a sus respectivos problemas matemáticos, pero también los profesores de educación superior, al emplear la expresión “pensándolo matemáticamente”. Está señalando también que se observan procesos que desnaturalizan, transponen y desapropian los conocimientos matemáticos, presuponiendo su mejoramiento, enriquecimiento y generalización, sin que suceda así (recuérdese lo dicho por Cantoral y Farfán). Hay que considerar que esto se agudiza bajo la consideración de los sistemas socioculturales donde los procesos identitarios son laxos o no muestran tendencias hacia la identidad. Sin embargo, los resultados hoy arrojan a nivel local como a nivel global nuevas evidencias (en los niveles histórico-sociales), que implican dos ámbitos de la problemática: 1) Su resistencia a la penetración, pues no es clara la relación que separa lo propio de lo extraño. Tappan (1992) va más lejos, al considerar que la identidad no es algo que surja de manera espontánea, es una construcción sociocultural (patrón) que desde su resistencia formula cuestionamientos: cómo y para qué sirven estos conocimientos y, 2) En contraparte a lo anterior, se encuentra su aceptación, es decir, no importa de dónde venga, es un conocimiento universal, por tanto es posible su mejoramiento.

Lo explicado hasta aquí es relevante porque considera que en la enseñanza de las matemáticas, abre puertas para la comprensión de otro tipo de fenómenos, posibilidad de conocimiento de entes, procesos sociales y culturales que permiten ver estructuras mentales y conceptuales que conllevan procesos abstractos de la matemática, que permita arribar a la organización y estructuración del pensamiento avanzado. Por tanto, es la dirección a seguir en el entendimiento de la construcción de los conceptos matemáticos. De ahí que sea pertinente examinar el proceso por el cual se constituyen socialmente los conocimientos matemáticos, la noción de solución en específico, en un ámbito general, como una manera de dar cuenta de los cambios que operan en las personas del sistema didáctico y cultural. Hay sospechas de que la gente desarrolla y crea nociones, concepciones, representaciones y gráficas como entendimientos, con base en sus experiencias y creencias asociadas a los conocimientos sociales y culturales, que es donde habitan los conocimientos matemáticos. En una necesidad de búsqueda de significado de dicho concepto, producto de su interacción con el sistema sociocultural, crea una primera base de significación mediante el juego de formas culturales y lingüísticas que permiten a las

personas articularlo en el momento de resolver problemas matemáticos, el cual se establece nociones que giran alrededor del concepto.

En este sentido, y teniendo como marco general lo antes enunciado, se llega al punto de interés referente a la estrecha relación con la relevancia de la consideración del lenguaje, en tanto componente singular y constituyente en la generación de una mirada más profunda de la problemática, ligada a su vez al estudio de las prácticas de carácter social, como las discursivas y, desde luego, de la investigación de la matemática educativa, donde se deposita una buena parte de las funciones cognitivas, culturales y epistémicas que requieren las personas en sus procesos de aprendizaje, de enseñanza y de formación, lo que las hace que actúen en concordancia a una sociedad que demanda cada vez mayor formación, pero que, además, por la manera en que aparece con frecuencia en la realidad, guarda mucha significancia con los lenguajes, con los sentidos del lenguaje, donde se establece el lenguaje formal del conocimiento y el lenguaje de uso común, ámbito donde radican las circunstancias respecto a las concepciones y entendimientos de las personas, pues hay que ver que no necesariamente se encuentran en la misma dirección respecto a la dinámica social, lo que no es raro, dicha realidad comparte su falta de concordancia con los sentidos del lenguaje y la acepta, en silencio, displicente. Esto último llama la atención, estas dos formas adoptadas de lenguaje que no dialogan, no se admiten como partes constitutiva del sistema educativo, componente del sistema de cultura y social.

Al respecto existe cierta posición teórica que marca rumbo, la que no atiende las direcciones del lenguaje de uso, sobre todo en el contexto académico, en particular en las aulas, entre estudiantes, profesores, funcionarios, es una relación de sujeción de uno sobre el otro, en vez de ponerse a dialogar los dos lenguajes para la búsqueda de espacios comunes y consensuados. En ese sentido hay que considerar la existencia de cierta orientación proveniente de una actitud que asume que sólo el lenguaje formal conduce a la verdadera comprensión, lo que da por sentado una serie de consideraciones no pensadas, soslayadas, hechas a un lado³. Como si por sí solo el hecho de conocerlo le devolviera a la gente la comprensión profunda, no sólo del lenguaje sino de los conocimientos matemáticos, la comprensión necesaria para progresar en la matemática, aspecto por demás falso. Aspecto que guarda toda una mitificación en la conformación del hacer ciencia, del carácter de hacer ciencia, pues se inicia con el planteamiento de cómo hacer ciencia, producir conocimiento científico, así como matematizar dicho conocimiento y, por tanto, la determinación del carácter o grado de científicidad que alcanza un cierto campo de conocimiento, incluido el matemático.

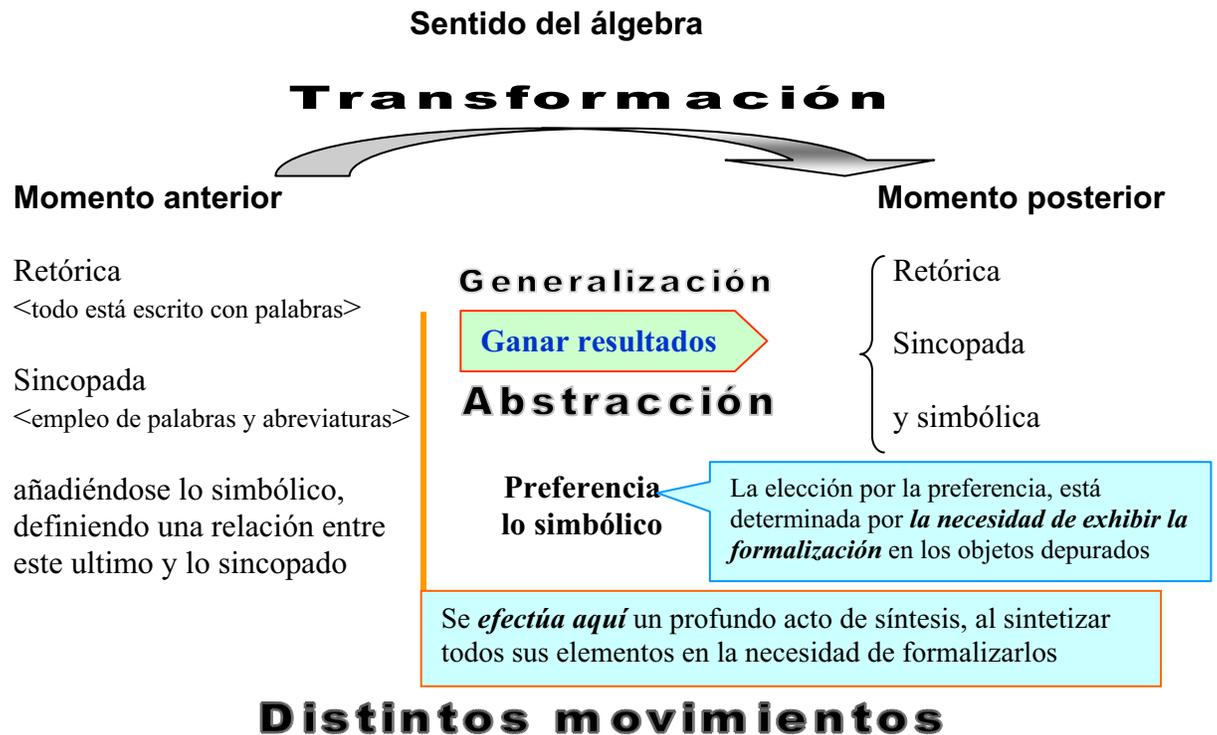
Es decir, la interconexión multidireccional entre los lenguajes intervinientes —de uso, específico, formal y estructurado—, para la construcción y constitución social del concepto, como del sentido epistémico que éste posee, porque en estos

³ Hay que recordar que tiene una finalidad fincada no en este momento, sino que ha venido trascendiendo a lo largo del tiempo, pues es parte sustantiva y objetivo del movimiento renacentista humanista, por decir lo menos.

tránsitos o reemplazos epistémicos —de un horizonte racional por otro—, al momento de su producción, vista como la producción social de los conocimientos, se desvanecen los elementos importantes que dan origen a la constitución epistémica del concepto.

El siguiente esquema trata de dar cuenta de los cambios y modificaciones, así como de las transformaciones del sentido epistémico que ha atravesado la construcción de un lenguaje estructurado y formal, el lenguaje de la exigencia racional que lo representa el lenguaje matemático, en su interacción con el lenguaje de uso común.

Modificaciones epistémicas observadas en este momento de transición en el álgebra, en su naturaleza y en la solución, que identifican los entrecruzamientos epistémicos.



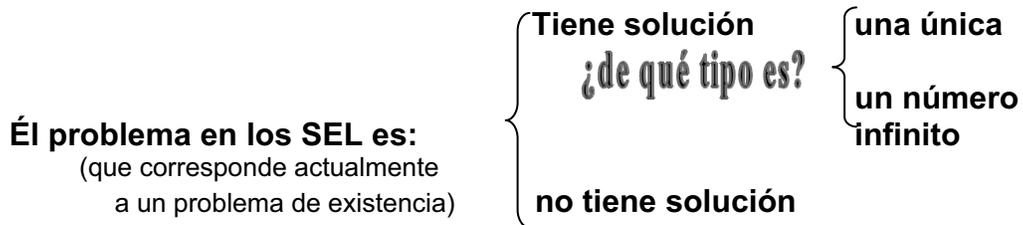
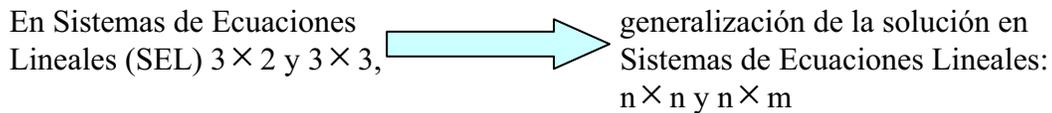
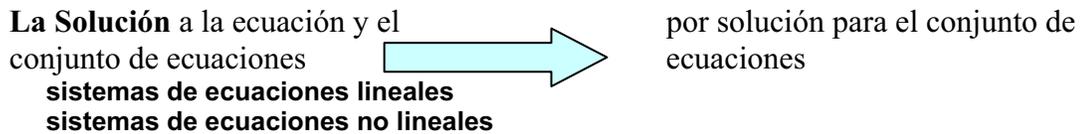
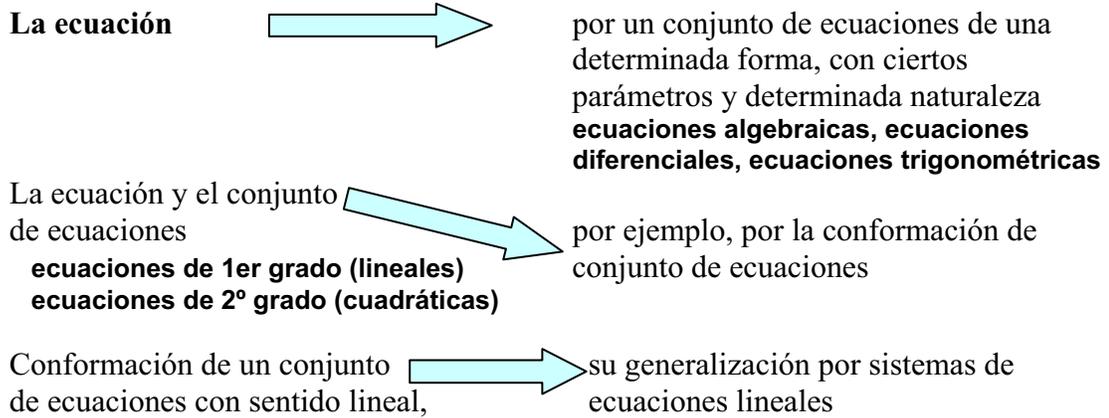
A nivel más específico respecto al problema(as)

Problema concreto → por problema de cierta naturaleza

La ecuación concreta → por la ecuación

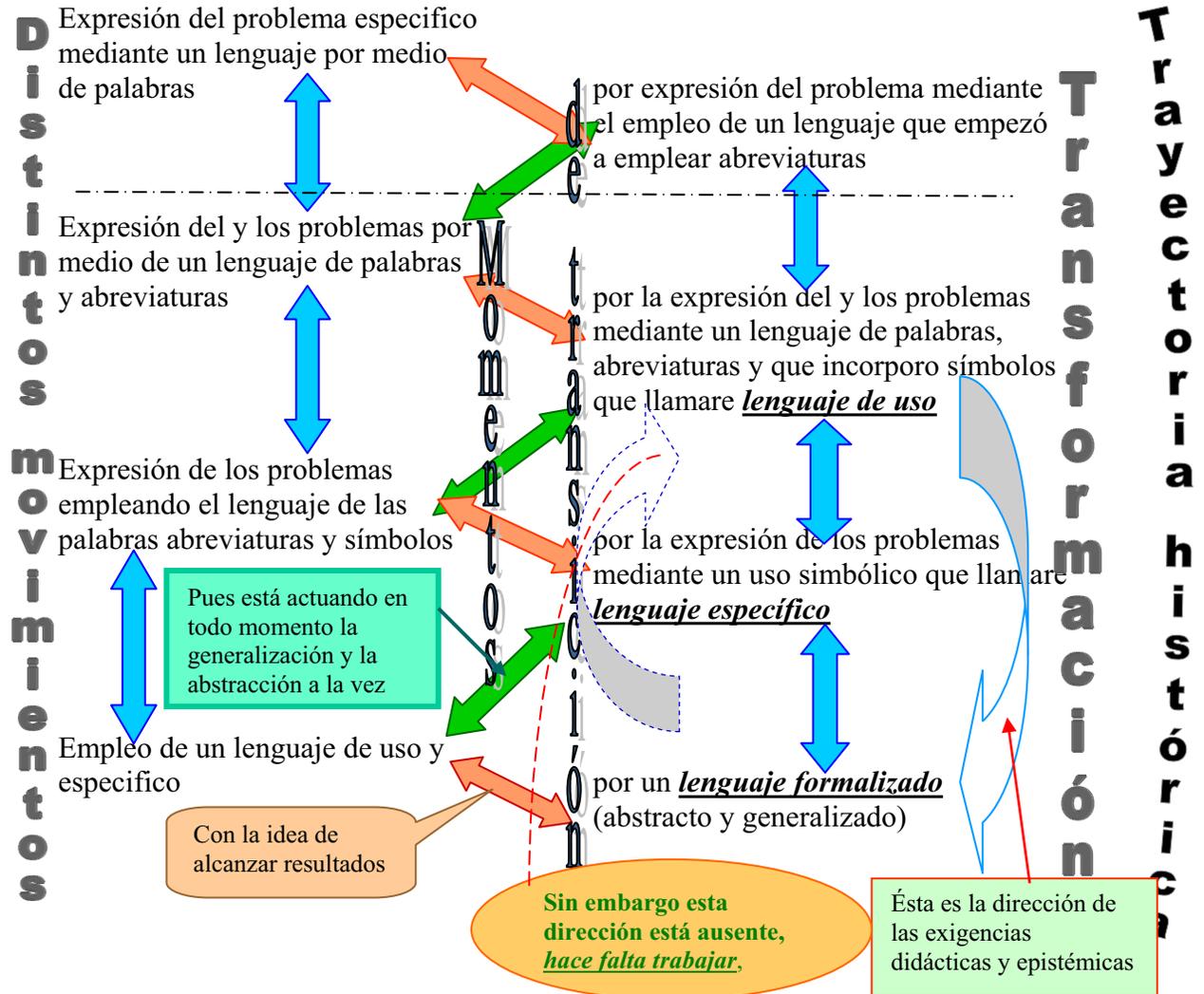
Solución a esta ecuación concreta → por la solución de la ecuación

A nivel conceptual respecto a la(s) ecuación(es) y a la Solución



- dos asuntos distintos**
- La necesidad de teorizar acerca de la solución (existe o no la solución)
 - La examinación del sentido lógico de la misma (consistente o inconsistente)
- otro problema adicional**
- El establecer la relación con la existencia o no de la solución y su representación geométrica, asociada, el cual depende:
- > de los objetos geométricos,
 - > del espacio dimensional en que se esta trabajando
 - > de las relaciones entre los mismos: un punto, una línea, un plano, todo el espacio o el vacío

A nivel del Lenguaje y la construcción del mismo. La complejidad de la problemática, donde están interaccionando sentidos epistémicos pasados, presentes, proyecciones y múltiples direccionamientos

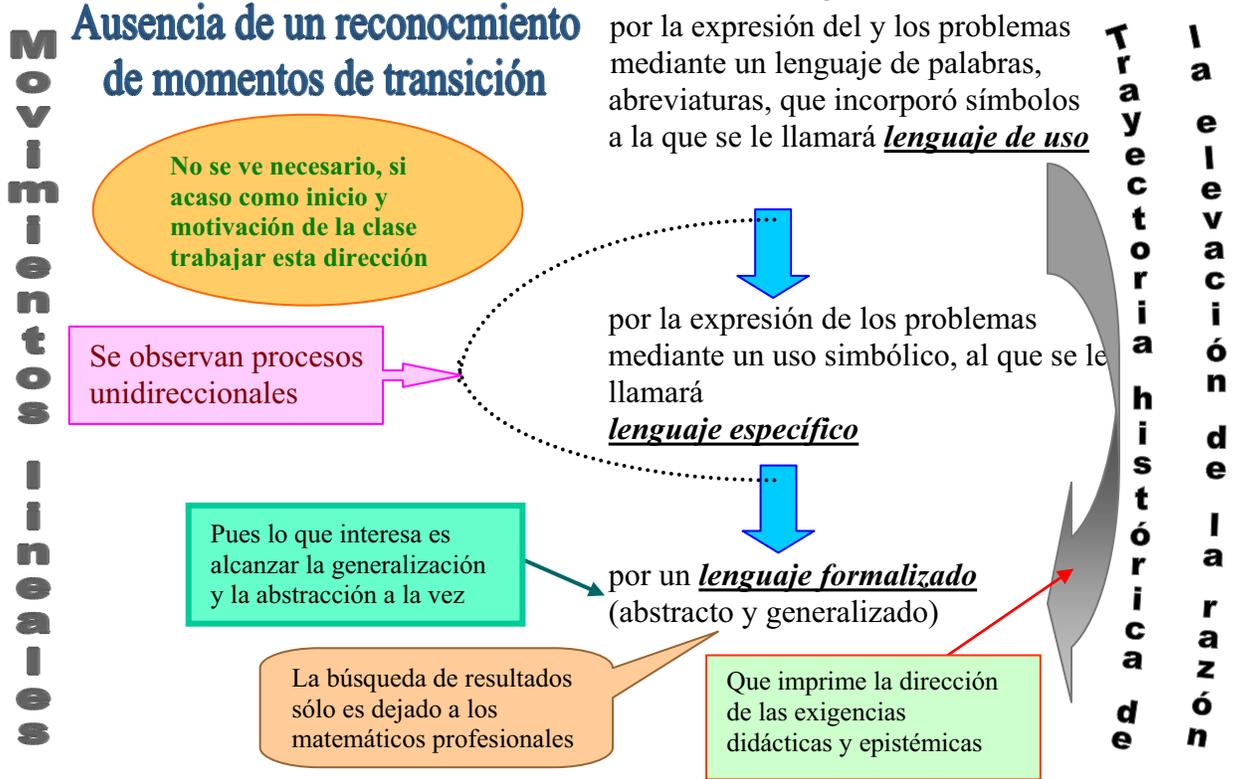


Sin embargo, entre el lenguaje de uso y el lenguaje formal (lenguaje científico-matemático) no se comunican, no dialogan para construir y constituir el circuito epistémico. El lenguaje de uso y el lenguaje formal, que se encuentran en proceso de estructuración, requieren elevarse, por tanto desvanece la necesidad de comunicación. El supuesto existente es: el sujeto cognoscente es el elemento sintetizador que de-construye el circuito epistémico creado, con la finalidad de elevar la razón ultima, por lo que a la vez desvanece ese sentido epistémico anterior.

El lenguaje, a nivel del proceso de enseñanza-aprendizaje, y la construcción del mismo, establece condiciones y circunstancias actuales de racionalidad que miran

reduciendo la complejidad a una racionalidad lineal para homogeneizar la discursividad de los participantes, la cual se vuelve una constante.

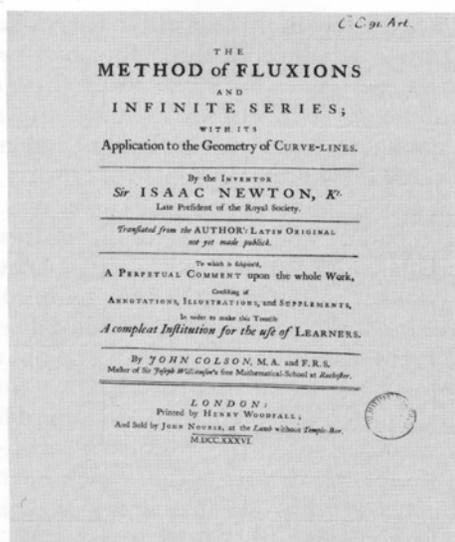
Las Transformaciones son entendidas como el paso de un nivel a otro



No se impone la necesidad de comunicación entre el lenguaje de uso y el lenguaje formal estructurado. Supone la existencia de una linealidad del proceso enseñanza-aprendizaje, lo cual representa una ruptura con el sentido de cognición, en el carácter didáctico-epistémico, pues no vuelve a reconstruir el sentido epistémico que le dio origen. Se reduce la necesidad de comunicación epistémica entre el lenguaje de uso y el lenguaje formal estructurado, pues los ritmos de la modernidad implican prácticas que tienden mejor cumplir las condiciones técnico-administrativas del proceso, por lo que el paso de un lenguaje a otro se opera rápido, mientras más rápido, mejor.

II.6 Cambios de paradigmas o cambios en la validación de la razón instrumental

En este apartado se toma en consideración la propuesta que hacen Cantoral y Farfán (2000), a partir de su ponencia: “Una aproximación sociocultural al cálculo infinitesimal”, donde señalan que el tema que da pie a este capítulo fue una visión extensamente desarrollada durante todo el siglo XVIII, que se consolidará como un paradigma en lo social válido, basado en la metáfora “del agua que fluye”, es decir, la búsqueda de predecir la evolución de dichos fenómenos objeto de estudio, llamado en la ponencia, fenómenos de las fluxiones continuas. Aquí cobra interés por la coincidencia temporal y la ubicación de cambios epistémicos del quehacer matemático, proporciona ideas sobre los entendimientos y las concepciones construidas de esos tiempos, las que al parecer tienen explicación.



Para mostrar este interés respecto a la coincidencia temporal hay que empezar por poner en juego la expresión que caracteriza a Newton y que además, metafóricamente lo expresa: “el agua que fluye”; habría que modificar dicha metáfora para expresarla como: “los aspectos que fluyen”, que igual puede ser el agua misma, el tiempo, la temperatura o la posición, generalizando, “todo aquello que fluye” y busca predecir el comportamiento del fenómeno de cambio, la cual a su vez establece e identifica una epistemología que difiere de la enseñanza de hoy día, dirigida a un programa en el campo de la ciencia, al permear la idea sobre la matematización de los fenómenos (que

fluyen) sea modelable sobre esta metáfora e igualmente aplicada a la evolución de otras magnitudes.

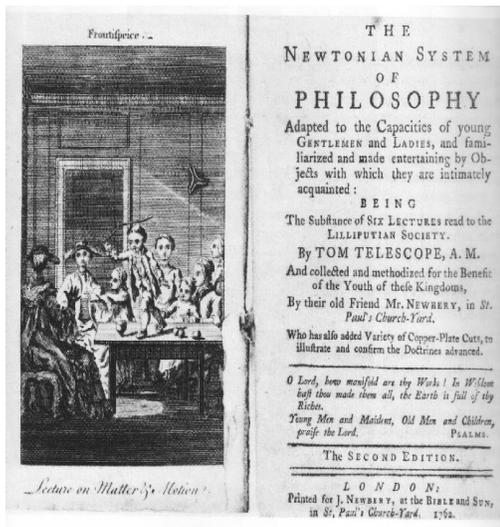
Ciertamente que dicha tesis es de una orientación sociológica, vía factible para conseguir una aproximación sociocultural de los fenómenos escolares de estudio, la cual considera que la sociedad determina en parte a los sujetos y que esta condición influye en la conformación de su pensamiento, éste será entonces un elemento a tomar en cuenta, pues influye en los procesos de construcción de conocimiento como en los direccionamientos que las personas le den a su obra, por lo que es importante formularse: ¿por qué mirar el siglo XVIII más allá de lo que dicen dichos autores? Sin duda porque no están separados de la realidad, de sus circunstancias, de la cultura, de la época que les toca vivir, con particular interés en las razones que llevaron a Newton a considerar esa metáfora.

En ese sentido, dicho momento histórico vive la expansión del capital y del flujo comercial, de modo preferencial hacia Inglaterra, es decir, hacia la creación y reemplazo de un nuevo *hegemon*, el cual inicia su expansión en el siglo XVII, cuando reemplaza como hegemonía a España, por lo que en las condiciones globales de ese momento están dominando no sólo los flujos de capital sino también por la producción, de mercadeo, de cultura, de producción de conocimiento, en disputa a su vez con la parte continental de Europa —recuérdese que Inglaterra es una isla.

Sin embargo, no sólo es este punto, también hay que observar que dicho pensamiento es concordante y coherente con las circunstancias sociales, culturales, económicas, políticas del pensamiento científico y filosófico de dicha época, aspecto que importa resaltar en este ensayo, además de la consideración de que responde a la solución una necesidad de naturaleza práctica.

Pero, para demostrar la aserción anterior es preciso ofrecer un conjunto de datos que permitan establecer lo que se quiere mostrar mediante, al menos, tres aspectos: 1) las condiciones generales desde el ámbito de contexto económico-político, en el cual se inscribe el personaje y su obra, 2) algunas de las condiciones culturales que reúne el momento y la época examinada donde se encuentra inserto dicho personaje, su actividad, sus convicciones, como creencias, pero, lo más importante, sus formulaciones filosóficas y científicas —las condiciones culturales de la época— y, 3) la obra de dicho personaje.

También compete examinar, con la pretensión de enunciar o formular una visión del mundo, concepto tomado de Bachelard, aspecto que más adelante lo



desarrolla Foucault, es decir, que un tejido de errores tenaces que preceden y obstaculizan permiten comprender que la ciencia sólo se establece en ruptura con ese tejido, para de ahí formular por qué, a pesar de su prestigio, su posicionamiento filosófico y su producción científica, en este caso el empleo y funcionamiento de la metáfora “el agua que fluye”, lo lleva a formular una *epistemía* de gran valor por su potencial, ya que proporciona con ella una noción de predicción, localizada por Cantoral y Farfán, que no se encuentra en otras obras y autores, y porque es una epistemología que no se advierte en el salón

de clases. Y, lo que es peor, su epistemología, en cierto sentido alternativa, desde la metáfora de las fluxiones continuas, fue desplazada o reemplazada por otra que desde el ámbito de la investigación en matemática educativa ofrece mayores dificultades en su implantación didáctica, ya que hace compleja la actividad y el proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática, pero también, y no por ello menos importante son los cambios en la conceptualización del álgebra y lo que es la solución

en la misma, pues se observa que en dicha época se dieron modificaciones sustanciales respecto a la misma. En palabras de Boyer, en la época de Vieta, años antes de Newton, se reconoce que el álgebra era retórica, sincopada y simbólica, de ahí en adelante sólo prevaleció un sentido, el álgebra netamente simbólica, lo que desplazó a sus demás elementos epistémicos. Estos cambios de naturaleza “modernista” produjeron cambios conceptuales y de percepción de lo que ahora es el álgebra.

En Europa, en particular entre los pensadores ingleses, el estudio de los flujos obedece a una necesidad de explicar, entre otras cosas, el comportamiento que se observa en la sociedad, que está redefiniendo su posición comercial, económica, financiera y conceptual que median los procesos culturales, pues los flujos no nada más están girando desde las periferias hacia el centro, sino que también del centro metropolitano hacia las periferias, estableciendo un doble movimiento.

En primer lugar, la idea de la formación del mundo colonial al capitalismo se refiere a la colonización europea de América, lo que da lugar a una estructura cuyos elementos cruciales en su conformación es una doble dominación: la cultura —conocimientos y tecnología— y la político-económica, actúan en combinación; de un lado, la articulación de diversas relaciones de trabajo y explotación, servidumbre, reciprocidad, trabajo asalariado, pequeña producción mercantil y esclavitud en torno del capital y de su mercado; del otro, la generación de nuevas identidades históricas, entre ellas la de europeo y no europeo, blancos y de color, bárbaros y civilizados, impuestas como categorías básicas de las relaciones de dominación y como fundamento de una nueva cultura, por consiguiente, el establecimiento y erección hegemónico del conocimiento y la producción tecnológica.

En segundo lugar, la creación de dichas categorías y nuevas identidades que actúan desde hace 500 años en la cultura, con la idea de su ampliación y extensión espacial, toda vez que responden a estas relaciones de hegemonía que inaugura España en el siglo XV y XVI, que pronto cederá a Inglaterra el lugar y como tal intentará responder al desafío, por lo que emprende también la comprensión racional de sus procesos, pero a la vez la diferencia imperial será la imposición de la diferencia hegemónica del conocimiento y la tecnología.

Para esclarecer lo anterior y profundizar en estas dos proposiciones en las que se basan las presentes ideas, hay que apoyarse en Quijano (1995), sobre todo en: *Mariátegui: cuestiones abiertas*, donde desarrolla algunas respuestas a este punto complejo. Quijano parte de que el racismo y el etnicismo fueron en su inicio producidos en América y reproducidos después en el resto del mundo colonizado, como fundamento de la especificidad de las relaciones de poder entre Europa y las poblaciones del resto del mundo. Dicho autor hace ontología de la colonialidad al señalar que los objetos son y no son para los demás, sin embargo Europa es y es para los europeos, derivado de lo que Mignolo refiere de una doble operación epistémica que se implantó con la colonización de América: la colonización del tiempo y la colonización del espacio.

Mientras que los iberos polemizaban durante mucho tiempo si los indios son bestias o humanos, los ingleses en su arribo a Norteamérica, a comienzos del siglo XVII, lo que encuentran son naciones (los franceses acuñan el término “etnia” cuando dominan África), en la idea de dar cuenta de las especificidades y diferencias culturales entre los pueblos. Esto sirvió para marcar las diferencias histórico-culturales aparentes entre los no europeos y los europeos.

Quijano profundiza, al señalar: “¿Por qué, finalmente, todos ellos terminan por admitir, separadas o en sus curiosas combinaciones, la idea de *raza* y la de *etnia*, para manejar las relaciones entre europeos y no europeos?”. Dice que se sabe ya que los iberos tuvieron tres razones: la primera, la conquista de América en la mente cultural de los futuros colonizadores; la segunda, que este hecho cultural tiene ligas originadas con la experiencia e ideologías religiosas y, la tercera, que la historia de la América señala una vez más que la cultura es una de las caras de todo poder, de todo fundamento de poder.

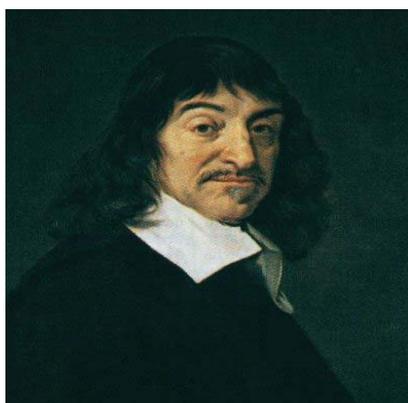
Recuérdese que los iberos, a diferencia de los británicos, llegaron un siglo antes, además de que apenas estaban saliendo de una larga guerra contra los musulmanes, la cual en su etapa final se procesa junto a las disputas religiosas y políticas que en Europa implican la Reforma y la Contrarreforma; quizá este conflicto entre cristiano sea uno de los factores decisivos de la exasperación de la ideología religiosa entre los iberos, que no permitió la potenciación epistémica en sus colonias, pero, a la vez los colocó al frente de la caldeada y feroz Contrarreforma e Inquisición, lo que es lo mismo, forma y momento de resistencia a la modernidad/racionalidad emergente.

Mientras que los británicos, procedentes de la Reforma, elemento clave del matrimonio del poder y la modernidad/racionalidad, encuentran términos apropiados para su relación con los otros pueblos, “naciones”, lo que también establece una diferencia colonial —siguiendo a Quijano—, no obstante la común experiencia colonizadora, de explotación y dominación, la formación de la categoría de “Europa” como centro del mundo del capitalismo colonial, irá llevando a ambos grupos de colonizadores, ya iberoamericanos, ya britanoamericanos, por un cauce ideológico común respecto de las relaciones de poder entre europeos y no europeos.

El proceso de formación del mundo colonial es el contexto histórico dentro del cual se va constituyendo y definiendo “Europa” como categoría histórica, particular y distinta, en tanto que centro hegemónico de ese mundo donde, desde luego, las relaciones de conocimiento, la producción de conocimiento y la mística de ese conocimiento “científico”, se establecen en una nueva forma como punto singular de la erección de esta nueva hegemonía emergente.

Una implicación de todo ello es el nuevo modo de producir conocimiento, su perspectiva central y sus categorías específicas no podrían, como dice Quijano, ser producidas ni elaboradas en independencia de las experiencias, ideas, imágenes y prácticas sociales implicadas en la colonialidad creada y desarrollada. De ahí su expresión, colonialidad del saber y del poder, pues nació, emergió y sirvió para tales fines: dominar, someter en la producción y desarrollo de la racionalidad, como

racionalidad/modernidad —aquí aparecen los primeros elementos de la fundamentación de una nueva postura en la filosofía—, cuando Descartes escribió su *Discours de la Méthode pour bien Conduire sa Raison et Chercher la Verité dans les Sciences*, que deslindar el campo de los saberes legítimos de aquellos que habían de relegarse al ámbito de la charlatanería y la superstición.



Descartes¹ encuentra campo fértil para sus ideas y la teoría del conocimiento, de impulso a las áreas del conocimiento así como de la creación de otras áreas, relacionadas con el impulso y conformación de la hegemonía cultural, social, epistémica, racial y, desde luego, de experiencia que más adelante se sintetizará².

Con esta racionalidad se imploró la visión y penetración eurocéntrica para poder establecerse, por eso empezó negando la de los pueblos colonizados, haciéndolo en todo lugar y en todos los sentidos que implicase sometimiento, y terminó imponiendo estructuras determinadas que podían irse universalizando³ más tarde, reteniendo el derecho de ser el centro del mismo poder planetario, el capitalismo. De ese modo, la perspectiva general, los paradigmas centrales y las categorías principales, fueron elaborados como expresión también de esa centralidad europea y de la colonialidad de las relaciones de poder. Esto es, éstas resultaron eurocéntricas conforme se diferenció e identificó mejor el perfil de la racionalidad/modernidad, es decir, se hizo todavía más europea, eurocéntrica, en consecuencia, universalmente hegemónica.

Quijano señala, a manera de resumen que, en la victoria final de esa versión eurocéntrica, la racionalidad/modernidad el “estado-nación” fue el agente central y decisivo, porque este fenómeno, en su realidad y en su mistificación, está ligado a un proceso de colonización y desintegración de unas sociedades y culturas por otras, pues la formación del mundo colonial del capitalismo se caracterizó, entre otras cosas, por un doble movimiento de colonización: 1) En Europa implicó la derrota de

¹ Pérez (2000) refiere que esto se encuentra en el primer principio de Descartes: *cógito, ergo sum*.

² Iniciada de manera independiente, a principios del siglo XVII, así lo indica R. Pérez (2000), al organizar con una visión general —esquema estrictamente histórico—, los principales conceptos vertidos sobre el método científico.

³ Uno de estos aspectos se encuentra en las orientaciones filosóficas que sostenían la propuesta metódica de la ciencia, la solución que Kant le da al problema de la experiencia, formulando la posibilidad de juicios sintéticos *a priori* que sintetizarán el racionalismo y el empirismo, incluso el método científico pasará por sus manos, aportando su tabla de categorías que “regulan” la actividad de la razón, desviando la atención no hacia el seno mismo de la ciencia, sino a la manera en que el hombre aprende y domina, por tanto separación entre producto y productor, entre cuerpo y mente, entre experiencia y razón, entre aplicación y teoría, entre ciencia y ciencia educativa, precisamente este argumento contribuye más adelante en la explicación de la separación que se establece entre las prácticas del conocimiento y los discursos.

unas culturas a favor de otras, cuyos portadores tomaron el control del proceso de formación de los estado-nación. 2) En el resto del mundo, implicó la colonización de sociedades y culturas a favor de aquellos estados-nación.

A pesar de la diferencia de estos procesos, van a converger en un sentido distinto al que estructurarán su visión del mundo. Establece un sentido y una visión de superioridad cultural occidental sobre las demás, por lo que habría que formularse la pregunta: ¿cómo logra establecerse esta visión de superioridad cultural occidental sobre las demás?

De ahí la pertinencia de recurrir a Quijano (1995) y Mignolo (2001), para señalar el sentido de que la expansión del capital no fue únicamente de capital sino también de las formas de pensar y de la construcción de conocimiento, justificación que se encuentra también en la función asociada a la del grupo establecido, y por tanto de la existencia de otra epistemología existente hasta antes de Inglaterra y el siglo XVIII, cuya evidencia la resaltan Cantoral y Farfán.

Ahora bien, si se toma un trabajo de naturaleza diferente al formulado por Cantoral y Farfán (2000), Chargoy (2000), por ejemplo, y se elige la consideración del análisis histórico epistemológico que hace, se observa que aquí se encuentra el doble desplazamiento de una epistemología por otra, que va de los musulmanes a los europeos, como un primer momento de conceptualización ubicado antes del siglo XVIII y, como segundo momento, de los europeos hacia los ingleses, en particular, localizada en los inicios del siglo XVII y extendida más propiamente en el siglo XVIII, lo que además implicó la exportación de visiones coloniales hegemónicas. Una diferencia, por ejemplo con los españoles, que Mignolo identifica como diferencia imperial y colonial. En dicho periodo los flujos, además de que marchaban de las periferias-centro, y centro-periferias, se observaban como flujos que provenían de distintas partes del mundo hacia Inglaterra, en particular, por lo que imponía un continuo mercader, navegar, fluir de capital, tecnología y conocimiento, por tanto no sólo fluían las mercancías, sino también los saberes, las practicas de construcción y categorías de conocimiento, como de socialización y extensión del mismo.

Además, por la dinámica de comportamiento de esos flujos, se establecía un *continuum* en todos los procesos, cosa que no se había visto suceder en la historia de Europa y Bretaña, por eso importaba estudiar y proveer de información de este tipo de fenómenos, amén de su denotación, caracterización, diferenciación, etcétera, dejando atrás o estableciéndose a la par de los procesos discretos y finitos que se tenían hasta antes de que Inglaterra se erigiera como el nuevo *hegemon*.

Al revisar la memoria de Chargoy (2000) y el extracto de ponencia de Cantoral y Farfán (2000), se halla la coincidencia de ubicación temporal y espacial —respecto a los cambios epistémicos o maneras de ver y entender los conceptos que ambos encuentran en sus respectivas áreas—. El primero se refiere al análisis histórico epistemológico, que establece el concepto de base de un espacio vectorial; este análisis se divide en tres partes, del origen algebraico en el marco de los sistemas de ecuaciones, con trabajos que van de Euler a Frobenius; en la segunda parte, el origen geométrico con los trabajos de Grassmann y, la tercera, que considera los

trabajos de Peano hasta Steitz, culminando en una axiomática en la teoría unificadora del Álgebra Lineal:

Cuando el álgebra se constituyó como disciplina independiente, su tema central y único fue la solución de ecuaciones. Durante un primer periodo se trató de la resolución de ecuaciones particulares por tanteos sucesivos; el método que se aplicó fue puramente empírico. Cada ecuación fue objeto de un tratamiento particular.

Esta exposición es coincidente con las razones que expresan ambos, aunque no dicho de esa forma por Chargoy. Si se la mira con los aspectos formulados en Cantoral y Farfán —que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica⁴— se concluye en que no había necesidad de ir mas allá en el estudio de los fenómenos o de las temáticas de los procesos conocidos hasta ese momento, como también la de diversificar el área referida en nuevas temáticas, el álgebra y, en general la matemática, como a su vez en el ámbito de los procesos macro que se tenían antes del siglo XVIII, pues los productos que se comerciaban eran determinados.

Desde la visión de los autores referidos, el conocimiento matemático avanzado tiene un origen y una función social asociada con el grupo socialmente establecido. Pues antes del siglo XVIII la visión cognitiva, epistémica y filosófica que Europa anuncia posteriormente como uno de sus grandes logros⁵ no se encontraba en Europa, sino en otras zonas y culturas como la china o la musulmana, por tanto, se está ante una nueva condición geohistoria que demarca este pasaje. Además, si bien España es la que inaugura esta etapa de expansión global del comercio y del capital⁶, en el siglo XVI, cuando Cristóbal Colón emprende la travesía oceánica en 1492, cuando los europeos pensaban que las tierras de Europa, el norte de África y Asia eran la totalidad del mundo, un cuarto continente y otro vasto océano eran inimaginables (Montemayor, 2001).

Es decir, no se imponía una razón de una visión económica, de los procesos sobre los fenómenos de estudio, pues éstos obedecían a procesos que podría decirse que eran finitos, por tanto discretos y a veces particulares; de ahí la coincidencia y la coherencia encontrada en los dos trabajos de naturaleza distinta. Se impone como

⁴ De que el conocimiento matemático considerado como avanzado tiene un origen y una función asociada con el grupo socialmente establecido.

⁵ Que presentaría, por un lado, la acción y operación racional occidental y, por otro, el progreso, que debería evidenciar un avance conceptual en relación con lo anterior, de ser una síntesis en la búsqueda del conocimiento esencial en un espíritu común, la cual contendría como código primordial a lo científico para darle sentido psicolingüístico que sintetizara los actos comunes, la experiencia de ese momento y de las circunstancias, pues a través de los altos códigos comunes se propone su noción psicológica de comunidades epistémicas, en opinión de Bruner. Para más detalle ver Guadarrama (2002a).

⁶ Precisamente los viajes promovidos por los españoles, financiados con capitales financieros de Venecia, fueron en busca de nuevas mercancías, especias, por eso no tuvo posibilidades materiales para su expansión total.

necesidad de una construcción lógica la expansión comercial y financiera de los procesos mencionados, pero que en esencia están siendo gobernados por otros procesos de naturaleza cultural distinta, atendiendo de paso la pregunta, ¿por qué se trataba como tema central y única la solución de ecuaciones en el área de álgebra?

Desde luego, ello no niega los intentos, desde el pensamiento, de búsqueda de estrategias de atención a nuevos problemas, sin embargo, en ese momento las condiciones culturales eran de un determinado tipo que influía en la concepción y la forma de entender respecto a lo que seguramente debía ser un problema matemático, para la solución de un conjunto de problemas se requería considerar conocimientos matemáticos en forma concreta y determinada. Por lo que entender en este contexto neohistórico a la solución, implica considerarla en un contexto más pragmático que el actual, incluso con el que se está contrastando (siglo XVIII), como aquello que resuelve el problema específico, bajo un conjunto determinado de operaciones con una cierta secuencia, con un contexto concreto, de procedimientos numéricos específicos, no expresado necesariamente en lenguaje algebraico (ver respuestas de los estudiantes de UPIBI para contrastar).

Esto último, además, es correspondiente y concordante con la aproximación al análisis de la complejidad de los hechos que fueron conformando no sólo una historia de las ideas o de las circunstancias, sino de los momentos y condiciones que se fueron imponiendo, como los ritmos, las visiones, las maneras de trabajar, de concebir y de entender de esa época, así como de la conformación de los conocimientos con las culturas y de los desarrollos sociales, económicos, etcétera, por consiguiente de la visión epistémica de ese momento, de esas circunstancias, como lo muestra el ejemplo del binomio de Newton, constitutivo de su época.

Pero, también es importante contrastar las respuestas dadas por los profesores del nivel superior en la investigación de Guadarrama (2000), al formular —criterio que determina la solución en un contexto gráfico— que todo aquello que se intersece no de manera analítica, porque esta última significa teorizar sobre la existencia de la solución, la cual no miran, pues se trata de un sistema específico (un grupo de planos o de rectas específico), ellos no se imponen esta necesidad de concebir que para un sistema específico debe haber una solución específica y si ésta se relaciona con gráficas que expresen dicha relación, eso implicará el reconocimiento que lo que se interseca se clasifica como una solución.

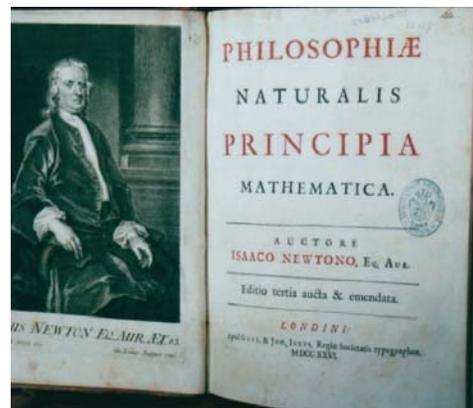
Lo singular de la localización de estas coincidencias, a pesar de ser obras diferentes aunque con motivos coincidentes —la búsqueda de la verdad científica—, se encuentra en lo que señala Chargoy, al identificar temporalmente los cambios epistémicos en relación con el Álgebra, coincidente con la temporalidad del paradigma identificado por Cantoral y Farfán, al señalar que: “hasta el siglo XVIII comenzó plenamente la búsqueda de métodos más generales para resolver ecuaciones y para plantear, asimismo, problemas generales tales como la existencia o no-existencia de soluciones”.

Por lo que se termina señalando, ante esta visión desglosada a través del análisis de lo complejo para tener mayor profundidad que explique lo que se ha hecho con este ejercicio intelectual, que pareciera que se ha radicalizado la orientación sociológica propuesta por los autores, mirar que la matemática y el estudio de las practicas humanas no se encuentran separadas de la ciencia. Que además acepta la visión de continuar con una aproximación reivindicada como sistémica y, por tanto, necesaria para explicar fenómenos complejos, donde el concepto de integridad resulta de vital importancia para su “estabilidad” investigativa, toda vez que la modificación o no consideración, como de la supresión de sus elementos o de algunos de ellos, sin tomar la estructura interna, puede afectar al conjunto mismo.

Así, se debe considerar esto no como una historia de las ideas, de la filosofía de las ideas, sino más bien la expresión de una historia de la construcción y producción bajo las circunstancias de esas ideas, pues hubo una diferencia epistémica al momento de la colonización, la cual fue inicialmente la que empujó el estudio de varios de los procesos que les interesaba estudiar, lo que implicaba su ampliación espacial, sin embargo, no fue sólo geográfica, pues la epistemología está geohistórica y políticamente situada, y no es algo que esté más allá o que flote en las instituciones, en los lenguajes y el capital.

De ahí la importancia de la geopolítica del conocimiento, por lo que esta aproximación intenta ser una construcción geopolítica del conocimiento matemático, para poder dilucidar los cambios que se operaron no sólo a nivel macro sino los que imprimieron cierta dinámica, practicidad, cognición, didáctica y episteme en los procesos micro, como el quehacer cotidiano de los pensadores, matemáticos, científicos, filósofos, etc., constructores también de esta realidad, de ahí que la metáfora de “el agua fluye” y otras serán necesarias para mostrar la construcción alternativa de epistemologías emergentes y no emergentes.

Por lo que compete preguntarse: ¿por qué situar la discusión en el siglo XVIII?; pues porque ahí se encuentra un conjunto de señalamientos para considerarse a nivel de explicación de que hubo una diferencia no sólo colonial sino también imperial, por consecuencia el conocimiento y el capital fueron y siguen yendo juntos, en tanto que formas de pensamiento así de análisis y justificación como de crítica, por lo que es posible establecer una fuerte conexión entre capitalismo y epistemología, lo que hace este hecho una singularidad contundente para la descripción de los procesos de construcción del conocimiento, pues a su vez establece una diferencia de validación, derivada de los procesos sociales, culturales, tecnológicos que emergen, en este caso, en el siglo XVIII en Inglaterra.



Sin embargo, el ejercicio no estaría completo, ya no tanto por su extensión, sino porque también es conveniente el otro lado de la moneda, por ejemplo la consideración de la propuesta filosófica como una manera de intentar explorar la complejidad que subyace en la realidad del tema, la obra de Newton, y tener una visión más completa del pensador, del filósofo, del matemático, no como personajes separados, porque están unidos en una misma persona, aunque no unificados, pues la razón tiene parámetros y, por tanto, convertirse en homogéneo, por lo consiguiente diluir los cambios y diferencias en los puntos de vista, posiblemente opuestos, convirtiéndose en dominante, eliminando las razones de sus diferencias de opinión —esa manera típica de razonar en occidente, colocar a las personas y creadores en formas cerradas y unipersonales.

En ese sentido, como un punto de enunciación distante entre el empleo de la metáfora que remite necesariamente al plano de la experiencia y, por otro, a los postulados sobre la racionalidad a través de su propuesta filosófica, permite distinguir la existencia de dos puntos de vista, que pudieran pensarse contrapuestos y que requieren profundizarse para esclarecer no sólo la obra, el personaje, sino también sus circunstancias. Es decir, los diferentes roles que asumió bajo sus propias circunstancias. Esto permite observar a una persona de carne y hueso, con virtudes y defectos, con potencialidades y limitaciones, pero no por ello irrelevantes ante el juicio que se hace de su obra y presencia, lo que de alguna manera refleja el acontecer cotidiano de las personas, que lo que cambia en relación con ellos son las circunstancias y las condiciones de vida, prácticas humanas al fin.

Hay que resaltar dos puntos: Primero, el que se refiere a Newton a partir de la experiencialidad (el empleo de la metáfora es la mayor evidencia de ello) y, segundo, de un Newton que, en opinión de Castrejón (1999), operará una reconstrucción racional que permanecerá vigente varios siglos al promulgar un método inductivo de análisis y síntesis que conduce luego a una generalización de los hechos y a la enunciación de leyes. La ciencia newtoniana poseía un carácter axiomático, con Newton se podía hablar de un espacio y tiempo absolutos, dichas concepciones de la física newtoniana habrían de permanecer hasta la llegada de Einstein.

Pero es también con Newton que la ciencia adquiere completamente ese carácter objetivo que la caracteriza, con él surge el lenguaje del especialista, el científico que despersonaliza su trabajo; la racionalidad newtoniana habría de influir notablemente en muchas disciplinas científicas, en especial las denominadas ciencias factuales o empíricas. Pérez (2000), incluso señala que precisamente esta conceptualización del método científico que se divorcia de las hipótesis, *Hipótesis non fingo*, será un aspecto relevante porque cuando se compara el método científico propuesto por Newton —que considera correcto— con la manera en que realizó sus investigaciones, con la forma y aplicación teórica de sus resultados, generalizaciones y leyes, es fenomenalmente incongruente. Por ejemplo, su primera ley (cuerpos que se mueven con velocidad uniforme en línea recta en ausencia total de influencias externas), la ley de reflexión óptica, incluyendo el rayo de luz como algo más conceptual que objetivo, las bases de su trabajo que se apoyaron en gran parte en la

teoría atómica de la materia, que sus tiempos no eran más que una hipótesis. Lo que se evidencia es más una persona preocupada en efectuar procesos de abstracción, que en el fondo lo que hace es operar lo ontológico de las relaciones de conocimiento y que si bien teoriza la separación y por tanto la exclusión, hace homogénea y dominante la interpretación y explicación, por tanto la racionalidad central. De ahí que sea coherente el análisis desde una geopolítica del conocimiento matemático. Las circunstancias que le toca vivir a la gente, sus concepciones y entendimientos en el plano de la matemática y de su persona, como la producción de conocimientos y su obra, estarán permeadas por estos aspectos, no son personas aisladas de sus circunstancias.

II.6.1 A manera de colofón

Kant sintetizará el racionalismo y el empirismo, incluso el método científico pasará por sus manos, aportando su tabla de categorías que “regulan” la actividad de la razón, desviando la atención no hacia el seno mismo de la ciencia, sino a la manera en que el *hombre aprende y domina*, por lo tanto hace la separación entre producto y productor, entre cuerpo y mente, entre experiencia y razón, entre aplicación y teoría, entre ciencia y ciencia educativa (primer aspecto que en esta aproximación se considera que están conectados con las prácticas sociales y humanas), entre objetos abstractos y objetos concretos, estableciendo una desconexión entre la función social y el grupo socialmente establecido, entre definición y aplicación, entre la definición de solución y la gráfica asociada al sistema que expresa la solución de un sistema.

Por tanto, al margen de la epistemología, aunque es la alternativa con la que hoy se practica investigación, la existencia de la noción de predicción, como parte de las experiencias diarias, es parte de la separación entre cotidianidad y acontecer, es poner en destiempo las prácticas humanas y el conocimiento. Esta postura concuerda con la asumida por los filósofos que siempre han tratado de reducir todas las cosas, ya sea a la forma o al contenido, producto del prejuicio del monismo, es decir, de pretender resolver el problema de la materia y la forma colocándolo como debate nuevo en la filosofía de la racionalidad occidental, establecida a través de la siguiente metáfora: “qué fue primero, ¿el huevo o la gallina?”

De lo antes discernido y que tiene sentido con la investigación “La construcción social de la solución”, hay que formularse las siguientes preguntas:

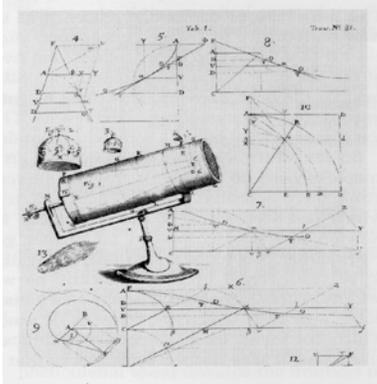
1. Cómo se entendía la solución antes de Newton (al parecer hasta aquí ya se han hecho algunos esbozos de respuesta).
2. Cómo se entiende, dentro del contexto



newtoniano (la búsqueda de predecir el comportamiento del fenómeno de cambio), la solución.

3. Cómo se entiende la solución después de Newton.

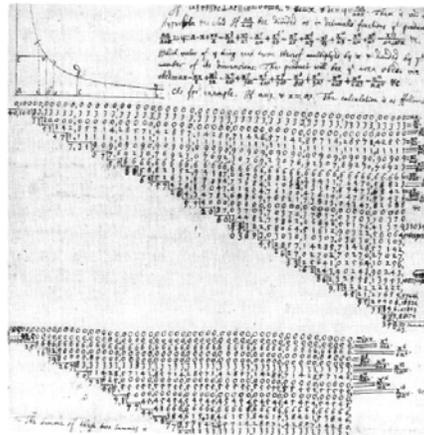
II.6.2 La discusión continúa con nuevos referentes



Dominique Lecourt, en su trabajo: *Para una crítica de la epistemología* (1982), intenta discutir más allá de la psicología (porque señala que no es lícito pedir que ésta sustituya al análisis histórico, pues ello implica renunciar a comprender algo más que lo anecdótico, de hecho, en su introducción formula de manera negativa cuestionamientos sobre dicha concepción, basada en su no-positivismo radical y deliberado, inaugurado por Bachelard, la argamasa de la tradición que une a tres autores que pone en juego para cumplir con los objetivos de su trabajo para distinguirlo de

todo lo que se practica en otros lados con el nombre de “epistemología”; observar que otras tradiciones tienen sus escuelas e instituciones, donde se llevan a cabo investigaciones, en oriente y en occidente, la Universidad de Yale, la Academia de Ciencias de Moscú, por lo que su referente de discusión del trabajo es que además de mostrar conscientemente su afrancesamiento por el reconocimiento y el tema, como por los autores, al señalar como un primer accidente de lo anterior que surge de la historia propia de la epistemología francesa en la que se constituyó una tradición “original” ilustrada por Bachelard, Canguilhem y Michel Foucault.

Es este último es él que interesa trabajar para esclarecer aspectos señalados a lo largo del trabajo, en particular las razones que encubren el desplazamiento epistémico efectuado en el siglo XVIII y XIX, como punto de tránsito hacia una reformulación epistémica que se consolidará como tal, pero que habrá “desconocido”, si bien no en el sentido tácito de la palabra, la formulación epistémica de Newton, sí la hace menos visible, de tal manera que autores contemporáneos en la investigación de la matemática educativa, como Cantoral y Farfán, lo señalarán como algo valioso



—por la noción de predicción que encuentran en dicha exposición—, no sólo para las investigaciones en el área, sino porque encuentran en su trabajo la formulación de una epistemología alternativa, de por qué se desvanece, se oscurece lento hasta hacerse invisible ese trazo epistémico, sobre todo a partir de la metáfora del agua que fluye o

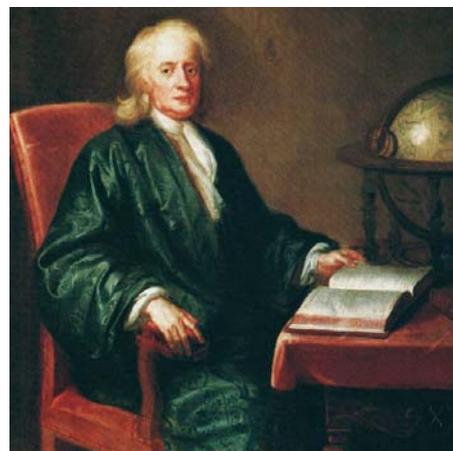
su generalización, de todo aquello que fluye, cuando que su surgimiento obedece a la emergencia y constitución de una visión emergente y la consolidación de un nuevo *hegemon* planteado por la necesidad de avanzar de la razón, se valide otra sustitución epistémica, por ejemplo la de Leibniz, cuando que la anterior muestra y ha mostrado su validez y funcionamiento desde este sistema filosófico y científico formulado por la racionalidad/modernidad, que por cierto es parte del horizonte racional construido para dichos fines.

Dominique Lecourt, respecto a Foucault, señala el sentido que tiene su no-positivismo, apoyado en un antievolucionismo, al desglosar en cada uno de los autores, Michel Foucault en este caso, quien en su *La arqueología del saber*, analiza la noción de “discontinuidad”. La autora demuestra las implicaciones teóricas decisivas respecto a la concepción de la historia de la antievolución que profesan los tres, pues señala que en Bachelard la noción de “ruptura” epistemológica es una denegación dirigida a toda filosofía de la historia que quiera hacer pasar bajo su jurisdicción a sus categorías epistemológicas, mientras que Georges Canguilhem al distinguir entre los “comienzos” de una ciencia y sus “orígenes”, denuncia sin cesar todo intento de buscar “precursores”.

Cabe decir que Foucault se negaría —con base en la homologación que tiende hacerse en la ciencia, como en la historia de las ideas, parte de la racionalidad/modernidad que está detrás de las condiciones sociales de producción y de las relaciones sociales impulsadas en este sistema mundo moderno— a ser calificado de “epistemólogo”, él se autodenominó “arqueólogo del saber”, lo cual le permitió un desplazamiento singular, un verdadero “descentramiento” con respecto a la historia de las ciencias para dedicarse a las condiciones más generales del “saber” (Lecourt, 1982).

Explicitar antes todas estas cuestiones es condición para estar en posibilidades aceptables que permitan empatar algunos aspectos —los esenciales—, que hagan posible argumentar, es decir, darle contenido a la obra de Newton, sus circunstancias, donde aquí la obra es entendida en un sentido amplio, pues se refiere a la actividad, creencias, contradicciones y posiciones en las que no sólo formuló sino vivió, sustento de su *locus* de enunciación, que expliquen ese desvanecimiento de su sentido epistémico, formulado a través de una metáfora sencilla,

que trajo consigo su propia perspectiva de interpretación, de producción y de trabajo —su visión del mundo—, pero que también significó consecuencias, pues en este desplazamiento epistémico propiamente se ve la posibilidad de argumentar que éste sea el momento de transición o de sustitución epistémica, históricamente ubicado, donde se formula una nueva perspectiva, no nada más para la matemática en general



o hacia los procesos de cambio, como popularmente se le ha llamado al cálculo, sino también y, por tanto, relevante para la presente investigación, del álgebra, que tendrá grandes efectos en la constitución de un nuevo horizonte racional como también en el área, donde se sustente el concepto de solución y, en general el sentido de ecuación y de lo que es resolver ya no la ecuación en sí, sino el conjunto de ecuaciones de forma determinada, diríase ahora, con parámetros y, desde luego, la constitución de un lenguaje específico en sus inicios, pero que también se fue especializando más y que con él se comprenderían nuevos objetos generalizados y abstractos.

Por supuesto que también la constitución de los sistemas de ecuaciones lineales, por tanto la conceptualización y generalización de la solución —modificación epistémica de lo que es solución y de los sentidos generados prácticamente como también teóricamente⁷—, para los nuevos entes que están emergiendo, con un sentido renovado, donde además se localiza allí el momento histórico determinado, al menos por sus altas posibilidades de la emergencia de una nueva expresión de comunicación de la ciencia; emerger a través y mediante un lenguaje estructurado con las finalidades que después se han formalizado para presentar objetos de conocimiento como de la mística y las formas que adoptará no sólo el quehacer y dirección de la producción matemática, sino también su proceso símil, como es el de su enseñanza-aprendizaje, emparentado por la misma constitución de una historia de las ideas que será construida para darle sentido a este proyecto de la modernidad. Es decir, del punto de separación del proceso de comunicación entre las formas de discurrir y, desde luego, del discurrir epistémico a través de un lenguaje estructurado que se ha venido gestando y produciendo en esta constitución epistémica a que se ha hecho referencia y de un lenguaje de uso⁸

⁷ Por cierto, esta relación a la que aquí se está haciendo referencia, por las observaciones y datos que se han venido construyendo y obteniendo para delinear cómo se constituyó este proceso de desvanecimiento, fue que históricamente esta relación de conocimiento determinó la importancia con que emergió la constitución epistémica anterior a la de la modernidad. Primero fue este sentido práctico-pragmático y luego su teorización o desarrollo teórico, por lo que al contrastar esta idea con el proceso de aprendizaje-enseñanza, éste lo mira, “lo construye” al revés, imprimiendo sentidos diferenciados al contexto histórico de su surgimiento, como de los sentidos generados; por consiguiente éstas son las líneas de su aprendizaje, diagnóstico del estado en que se encuentra actualmente. Posteriormente se señala la importancia de este punto, pues hoy entre las observaciones sobre la enseñanza de la matemática, por parte de los productores de las matemáticas (Gorostiza, 1991) identifican este aspecto como punto de la formación y a la vez de las dificultades que los estudiantes tienen al ingresar a un posgrado en matemáticas, lo cual da la posibilidad de constituirlo como un buen dato a manejar en este proceso de transición al que se ha hecho referencia histórica, como del sentido presente y vigente en esta relación que se ha querido hallar al momento de trabajar con los conceptos matemáticos, pues establecen momentos, direccionalidades y sentidos diferenciados tanto del proceso histórico, como de la historia de las ideas, pero también de los sentidos de comunicación que adopta en el presente la racionalidad/modernidad a pesar de haber sustituido esas formulaciones epistémicas —retóricas, sincopadas por simbólicas que se verán más adelante—, por esos horizontes de racionalidad que se han construido en la idea de mostrar, avanzar y progresar en este sistema mundo-moderno.

⁸ Para Carl Boyer (1994), en “Orígenes del álgebra actual”, Vieta era moderno sólo en algunos aspectos; en los demás era todavía medieval. Su álgebra es más sincopada que simbólica, haciendo un

—presente en los momentos mas álgidos del que aprehende, separándose más y más hasta la actualidad.

Foucault, en la sección “Contra el objeto”, del libro de Lecourt (1982), presta atención a toda la antigua polémica dirigida contra el “sujeto”, toma nuevo rumbo al dirigirse contra la categoría correlativa de objeto. Dice: “de esta manera adquieren sentido las rectificaciones críticas —retomadas en muchas oportunidades— contra ciertos temas de la epistemología bachelardiana. Todo se concentra en torno a nociones de *ruptura, obstáculo, acto* epistemológicos”. Descubre la solidaridad entre la categoría filosófica del “objeto” y el punto de vista descriptivo de la “ruptura” en historia, al comparar una ciencia a una ideología; desde el punto de vista de sus objetos se comprueba que hay ruptura (o corte), pero este punto de vista es estrictamente descriptivo y no explica nada. Peor aún, como era de esperar, la categoría de objeto arrastra con ella a su correlato, el sujeto. La epistemología bachelardiana es un buen ejemplo de ello; la noción de ruptura epistemológica exige que se piense con qué se rompe como “obstáculo” epistemológico. Pero, ¿cómo propone Bachelard pensar los obstáculos? Como intervenciones de *imágenes* en la práctica científica.

Luego Foucault afirma que la pareja objeto-ruptura sólo es la figura invertida, pero en el fondo idéntica a la pareja sujeto-continuidad; luego, la epistemología de Bachelard es una antropología vergonzante.

El “psicoanálisis del conocimiento objetivo” señala los límites de esta epistemología, su punto de inconsecuencia, el punto en que se requieren otros principios para dar cuenta de lo que describe; el gran mérito de Bachelard reside, por cierto, en haber comprendido que una ciencia, como en este caso la matemática y en particular el cálculo —como se dijo antes, con grandes implicaciones en el álgebra, por tanto en la solución—, sólo se establece en ruptura con un “tejido de errores tenaces” que la preceden y la obstaculizan, que es lo que se cree que pasó con la obra de Newton al ser reemplazada por otro horizonte racional, lo que implicó no sólo la constitución de ese otro horizonte racional, sino los efectos que generó en general en la matemática, particularmente en los cambios y modificaciones del álgebra y en el sentido de solución.

Para apreciar ese “tejido de errores tenaces” que señala Bachelard, reconocido por Foucault, que fue lo que dio pie a su desplazamiento epistémico y racional, se retoma a Mauricio Schoijet (2003), aprovechando sus ejemplos reportados en: *Relaciones entre ciencia y religión, ¿cómo lo viven los científicos?* Parte de la siguiente hipótesis fundamental: que en la medida en que la ciencia avanza, socava las visiones del mundo asociadas a la religión. Independientemente si se está de acuerdo o no sobre su posicionamiento, sobre todo ante los nuevos acontecimientos, la reciente enunciación, por ejemplo, de Huntington que, en vez de

pie de página para aclarar eso, sin embargo, en ese mismo pie reconoce la simplificación de dividir la historia del álgebra en: retórica (todo está escrito con palabras), sincopada (empleo de palabras y abreviaturas) y simbólica.

verlo como socavamiento religioso, lo mira como expresión y dirección que halla en el fondo de la expresión de la cultura, la religiosidad (ver anexos), que hace que se produzcan abanderamientos relativos a la identidad, que los hace pertenecer a lo que comparten, la cultura y sus formas lingüales. Señala que los textos de historia de la ciencia a nivel de divulgación y no sólo ellos sino también los textos y sus obras suelen presentar una historia mutilada. A veces se limitan a relatar las realizaciones científicas de los científicos y en ocasiones algún aspecto biográfico (ver anexo 2, tomado de una revista de educación en ciencias básicas e ingeniería relativamente reciente para su verificación).

Dice Mauricio Schoijet que “los científicos no solamente hacen ciencia”, hay casos sumamente importantes en que sus trabajos tienen importantes repercusiones sobre la visión del mundo, conformada por o relacionada con las ideologías dominantes de la sociedad, lo que indica que son personas que a su vez que están produciendo conocimiento ellos también se encuentran posicionados desde perspectivas políticas, de lucha o del poder que les permite o les inhibe expresar los otros aspectos de su vida en la obra científica, o que también lo hacen para no trastocarla, pero que, sin embargo, hace complejo el momento de escudriñarlo.

El mismo autor se refiere a Darwin y su fe religiosa, a Schwann, biólogo fundador de la teoría de la célula, y al mismo Newton, que la historia convencional y oficial deja casi totalmente fuera sus escritos teológicos, a los que probablemente dedicó tanto tiempo y esfuerzos como a la investigación científica, pero que, además estas “historias”, explican la motivación de éstos y su relación con sus teorías físicas. En particular los textos omiten el problema de las relaciones entre ciencia y religión que pretenden en forma implícita, que el conflicto⁹ no existe.

Afirma Schoijet que dicha posición es más fácilmente aceptada por aquellos científicos cuya actividad se limita a aspectos estrechos o instrumentales de la ciencia, que son seguramente la mayoría. Sin embargo, los que se ocupan de aspectos más generales, como la naturaleza del universo o la del mundo viviente y que por tanto tienen relación con la visión del mundo, no pudieron evitar el dilema.

Si bien el autor se inclina por dos vertientes al colocar la problemática en la elección de una o de otra, correspondientes a posiciones en pugna desde el punto de vista de una construcción de la geohistoria del conocimiento, no por ello estas filiaciones estarían descartadas, pues lo que hacen es exponer las preferencias del autor, lo cual quedaría por revisar con mayor cuidado, si fue sólo la presencia de esas dos filiaciones o correspondió a más variantes o que se haya debido a la construcción de la complejidad de la emergencia del sistema mundo moderno que señala Wallerstein, con el surgimiento del nuevo *hegemon*, recambio de *hegemon*, Inglaterra en este caso.

⁹ Por cierto, no está muy lejano mirarlo como conflicto, pero no por su socavamiento sino porque están de por medio sus deseos de avanzar, de progresar, de refutar, etcétera, como también por los momentos históricos que están viviendo.

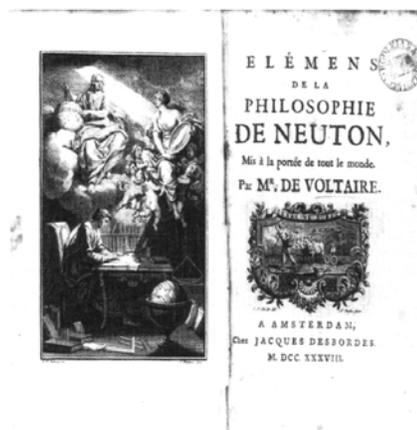
Por el momento se retoman estas dos filiaciones señaladas por el autor, que por cierto no marca en qué orden, sino simplemente las enuncia; la primera, el *fideísmo*, es decir, la subordinación de la ciencia a la fe religiosa, concuerda con Huntington, no dicho así, sino porque los acontecimientos presentes lo están corroborando, hoy estos choques de civilizaciones lo están expresando así, y, el *reconciliacionismo* entre ésta y la religión, posiciones absolutamente dominantes entre los científicos y filósofos durante varios siglos transcurridos desde los comienzos de la ciencia de la naturaleza en su sentido actual, inaugurada y enunciada a partir de la colonización de América Latina en su necesidad de crear un mundo moderno, eliminar la diferencia, volverse dominante y hegemónico.

Aunque señala que en algunos casos estas posiciones pudieron haber sido máscaras defensivas —lo cual no es nada descabellado, sobre todo por la existencia de relaciones de poder—, para hacer frente a una presión social; no cabe duda de que muchos de quienes las sustentaron no se limitaron a aceptarlas pasivamente, sino que fueron militantes activos en la intención de subordinar la ciencia a la religión. La lista es larga, dice el autor, entre ellos habría que mencionar, desde Isaac Newton y Robert Boyle, primer secretario de la Royal Society, en el siglo XVII, hasta los más eminentes naturalistas de los siglos XVIII y XIX. Los nombres de quienes estuvieron del lado opuesto son muy pocos, pero no menos ilustres.

En el caso de Newton su visión teológica y teleológica lo llevó a renunciar y aceptar las consecuencias filosóficas de su teoría científica más importante; más aún, a inventar hipótesis *ad hoc* para mantener a flote una visión del mundo que su ciencia había socavado de manera decisiva.

Ahora bien, Shoijet analiza la coherencia de Darwin por sobre todo, para establecer la relación entre ciencia y filosofía en dicha obra y cómo estará imbricada en la constitución de la visión del mundo de tal manera que afectará desde su argumentación la obra de Newton. Para ello pregunta: ¿Qué significa decir que un científico no es el filósofo de su propia ciencia?

Schoijet señala que la teoría de Darwin contribuyó a socavar la visión del mundo armada por Newton y sostenida por los más importantes filósofos de la ciencia del siglo XIX: la del Universo como un sistema material sujeto a leyes universales. Para Darwin, el azar juega un papel fundamental en la evolución biológica. La idea de que no hay nada en la evolución que lleve necesariamente a formas superiores, y que el surgimiento de cualquier especie resulta de acontecimientos contingentes e imprevisibles y, por lo tanto, que tampoco hay ninguna razón para creer que la especie humana, supuesta obra máxima del Creador,



tenía que haber aparecido por necesidad, era algo profundamente ofensivo para las ideologías religiosas en general, como para los científicos y filósofos fideístas y reconciliacionistas, que eran una mayoría abrumadora en su época. Advierte que investigaciones recientes apoyan totalmente el punto de vista de Darwin —en la extinción de los dinosaurios se debió al choque de un asteroide contra la Tierra, lo que habría permitido el desarrollo de los mamíferos—, es decir, que la naturaleza es una excelente manipuladora y no un divino artífice.

Lo anterior son algunos elementos que están presentes en esta construcción y constitución formulada, para ello el autor proporciona el caso de Newton, “una contradicción flagrante”. Dicho autor señala que a mediados del siglo XVII Inglaterra experimentó la más grande conmoción revolucionaria de la historia, con el derrocamiento de la monarquía y la implantación de la dictadura de Oliver Cromwell. Isaac Newton (1642-1727) produjo su obra en el reflujo de esta revolución, cuando comenzaba una persecución en contra de los revolucionarios democráticos. Newton fue funcionario del gobierno en esa época, en los momentos en que hacía estragos una oleada represiva y exigía juramentos de lealtad, la purga de dos mil sacerdotes y la eliminación de los disidentes religiosos de todo cargo político y empleos públicos, de educación y de las demás profesiones.

El movimiento revolucionario fue precedido y acompañado por una lucha ideológica que cuestionaba el viejo orden y una de sus manifestaciones fue el surgimiento de una corriente deísta crítica contra la religión establecida. La palabra “deísmo” puede ser usada, según el autor referido, en dos sentidos diferentes; en el primero se refiere a una fe no fundada en la revelación, sino en la razón (deísmo I); en el segundo, a un creador que, una vez formado el Universo, no interviene en su operación (deísmo II). La difusión del deísmo I estuvo probablemente conectada con un ataque contra la iglesia anglicana como parte del Estado, con visiones políticas que se le podría llamar de un radicalismo de izquierda o de una democracia radical. Cabe mencionar que en el momento del auge revolucionario habían aparecido grupos como los *diggers* y los *levellers*, liderados por el proletario Gerrard Winstanley, cuya propaganda político-religiosa puede ser considerada una forma de protoc comunismo (Hill, 1978).

Los *levellers* plantearon demandas democráticas en la línea de la separación de la Iglesia y el Estado, por ejemplo, la abolición de los diezmos eclesiásticos o la confiscación de las tierras de la Iglesia y su distribución entre los pobres. El ataque contra la religión establecida está claro en la obra de varios deístas contemporáneos de Newton, como John Toland y A. Collins (Byrne, 1989).

Newton era creyente y cristiano, pero su cristianismo era heterodoxo y siempre estuvo interesado en cuestiones teológicas. Aunque sólo publicó 30 páginas de sus escritos, una pequeña parte del total, el resto continúa inédito. No es difícil entender que dada su posición de funcionario y la aplicación de medidas gubernamentales discriminatorias contra disidentes religiosos, haya sido prudente en la difusión de sus opiniones en este terreno, ya que ello podría haberle causado dificultades con la Iglesia oficial. También se podría conjeturar que quería

distanciarse de los deístas para no aparecer como enemigo del Estado al que servía. En sus obras publicadas trazó una raya divisoria con respecto a éstos, expresando su fe en la religión revelada y en la divinidad de Cristo (Manuel, 1974).

El fideísmo de Newton fue completo y ha sido ampliamente comentado por los historiadores. También fue acompañado por el reconciliacionismo, en tanto que trató de hacer compatibles los resultados de su investigación científica con las sagradas escrituras, aun atribuyendo contenidos imaginarios a éstas. En una posición compartida con el ya mencionado Boyle y con varios teólogos, sostuvo que el profeta Moisés había tenido una percepción divina de las leyes de la naturaleza, y que había sido este profeta quien había inventando el atomismo y no Demócrito, el filósofo ateo de la antigua Grecia.

Boyle, Newton y otros personajes relacionados con ellos, como el naturista John Ray, eran filósofos cristianos empeñados en elaborar una visión del mundo sustentada en la ciencia que sirviera como defensa contra el materialismo y el ateísmo. Todos ellos querían fortalecer el cristianismo y negaban la posibilidad de un conflicto entre ciencia y religión (Kragh, 1987, cita a C.A. Russell y R.S. Westfall). En una carta al sacerdote Richard Bentley, otro fideísta militante, Newton afirmó explícitamente que al publicar su *Principia* (obra que contenía sus más importantes resultados de investigación en el terreno de la mecánica), había tenido el propósito de fortalecer la fe religiosa. Veía en el Universo la evidencia del designio divino. Aun cuando la mecánica de Newton tuvo un éxito espectacular en la explicación del movimiento de los planetas, quedaban, sin embargo, dificultades residuales que fueron resueltas posteriormente por otros investigadores, puesto que su teoría la elaboró tomando solamente en cuenta la atracción gravitatoria entre dos cuerpos, el sol y cada planeta —entre dios y cada individuo que profesaba su fe—, por separado, lo cual dejaba fuera las interacciones entre tres cuerpos que causan perturbaciones de las órbitas de algunos planetas (la creencia era la práctica de la individualidad y la presencia de otro más, en esta relación divina, perturbaba dicha relación de fe, desde entonces la diferencia es concebida en esta posición hegemónica como perturbación).

Newton no sólo negó ser deísta, sino que basándose en estos problemas aún no resueltos formuló hipótesis *ad hoc* que permitieran mantener a flote la idea de una intervención divina para garantizar la estabilidad del Sistema Solar (honor a su sacrificio, abnegación como también de un acto de contrición y fe silenciosa), que podría verse afectada por las perturbaciones mencionadas, así como por efecto de los cometas y de un supuesto éter. El astrónomo Edmund Halley (1651-1742), quien, al identificar los cometas como entes astronómicos con órbitas definidas y periódicas, le asestó un golpe demoledor a la concepción del mundo que veía en ellos señales de una intervención divina tan permanente como aleatoria (es decir, como anuncio de plagas, disturbios, guerras y otras desgracias), expresó un punto de vista opuesto al de Newton claramente ubicado en el deísmo II, afirmando que la no necesidad de intervención divina para mantener la estabilidad del Sistema Solar era precisamente prueba de la sabiduría del creador que diseñó el Universo de una manera tan perfecta que la hacía innecesaria.

Aquí se puede establecer un conjunto de puntos que, en efecto, reconocen las condiciones de su derrota del entretendido de errores tenaces y no tan tenaces que él mismo se fue elaborando y en los que se involucró, haciendo cada vez más evidente sus errores que muy bien aprovecharon no sólo sus oponentes sino las demás personas deseosas también de participar en la construcción de la visión de mundo, tal vez no la misma que la que se proponía Newton y sus compañeros, pero, sí finalmente visión de mundo bajo otras bases y otros sustentos que se requería para esos momentos, de hecho, este es el momento singular que señala Foucault reconociendo a Bachelard en cuanto a la visión epistémica.

Por otro lado hay que comentar que realmente sí fue un duro golpe a su concepción y sus pretensiones de crear una visión del mundo que no mantuviese conflicto entre la ciencia y la religión, pues en el fondo su negación a reconocerse de ser deísta lo llevaba al punto aparente de la imparcialidad, enunciando sus concepciones mediante este deísmo, sin que se notara, dicho en otras palabras, la idea era mostrarse el constructor de una visión que aparentemente no tuviese compromiso, ni con dios, ni con el diablo, y que le permitiese salir librado y sin ningún raspón. Sin embargo, sus oponentes no sólo tomaron partido, sino que incluso lo derrotaron al derrumbar esta construcción de la visión del mundo que trataba de esconder sus intenciones colocadas desde la filosofía, fe cristiana y científica, evitando mostrar en sus investigaciones aspecto alguno sobre ello, por eso es importante su negativa a reconocer la influencia de estos aspectos en la producción de conocimientos científicos, pero que su inconsciente lo traicionaba, por tanto también era un duro golpe a su propio conciencia, a su ego —ser el constructor de la visión única del mundo, que por cierto otros la sintetizaron y la enunciaron para colocarla desplazando, o más bien elevando la razón pura, haciendo a un lado para ello la postulación filosófica de su enunciación y quedándose sólo con la razón científica de su construcción—, pues la creencia de que podría pasar por desapercibido fue lo que lo colocó en el punto de su propia evidencia, exhibición, blanco para su desaparición y eliminación como proyecto personal, si bien no física sí conceptual y filosófica, igual que su comportamiento frente a la construcción conceptual de los conocimientos que requería la racionalidad/modernidad y la construcción y constitución de un nuevo horizonte racional que contuviese otros direccionamientos no alcanzados aún, como pudieran ser los de la formalización de la matemática, la organización y unificación de las mismas, así como invertir la relación de generación de conocimientos, es decir, cognitiva por ende epistémica, al formular la teoría que organiza y unifica cada área de la matemática alcanzada hasta ese momento y en las próximas a construir, por tanto su reducción fue teorización-práctica, sin necesidad de pragmatismo, consecución del nuevo proyecto o derrotero a desarrollar en el campo de la matemática y de los procesos de aprendizaje-enseñanza de las mismas.

Sin embargo, el mismo Schoijet dice que uno de los más notables hechos históricos acerca de la obra de Newton consiste en que fue objeto de un persistente malentendido, ya que muchos autores lo ubicaron como deísta en el sentido mencionado, cuando no cabe duda que en efecto Newton contribuyó de manera

decisiva a formar la visión del mundo que prescindía de la intervención divina; muchos de sus lectores y comentaristas tienen que haber interpretado su obra de esa manera, olvidando o desconociendo su deslinde respecto al deísmo y sus tentativas de formular hipótesis *ad hoc*. En el artículo sobre “deísmo” de la *Enciclopedia Británica* (edición 1974), dice el autor que ahí se afirma que “hubo una tendencia en el siglo XVIII a convertir a Newton en un deísta de hecho (matter of fact deist)”. Para mencionar un caso más reciente, la exposición que hace Bertrand Russell acerca del papel jugado por la ciencia del siglo XVII respecto a la filosofía, aunque no afirma explícitamente que Newton hubiera sido deísta, da una visión totalmente coherente de la adscripción de Newton a esta corriente (Russell, 1961). Ésta no fue entonces casual ni un error accidental, sino una respuesta espontánea fundada en la búsqueda de coherencia por parte de científicos, filósofos, lectores críticos y divulgadores, quienes veían la remoción de la necesidad de intervención divina como consecuencia necesaria de la teoría científica newtoniana, pero también ello muestra que no sólo es aplicable a este caso, sino que lo es con mucha mayor razón a Darwin. Ya que la mayoría de los receptores construyeron un newtonismo que iba no sólo más allá de las intenciones del autor, sino en contra de éstas, por lo que era totalmente lógico y coherente con su teoría física, en tanto que la posición filosófica de Newton no lo era.

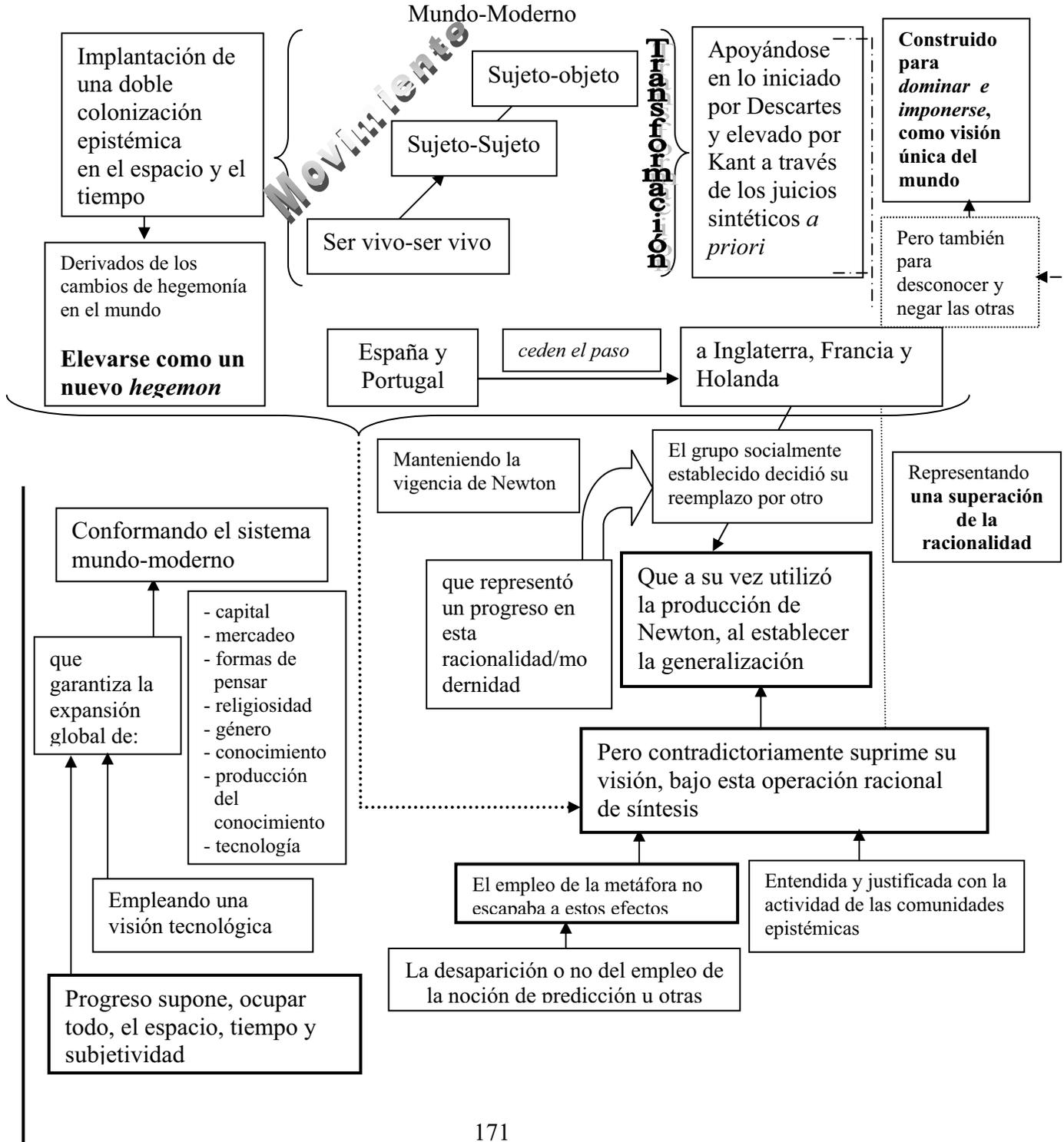
Por cierto, este manejo que hará la racionalidad/modernidad de elevar a Newton en el sentido también de Russell está presente en las discusiones y en los posicionamientos que se formulan desde las ciencias sociales, basta ver el esfuerzo de un grupo internacional de distinguidos estudiosos agrupados en la comisión Gulbenkian, al establecer como propósito reflexionar sobre el presente y el futuro de las ciencias sociales.

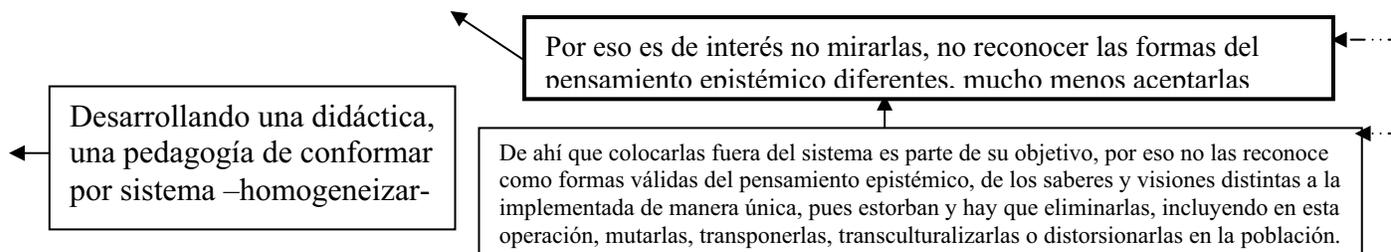
Desde luego el comentario obligado por la extensa exposición que aquí se ha hecho y el esfuerzo por mostrar que este ejemplo vivido por Newton fue parte de ese entretejido de errores tenaces que se fueron dando, tanto como precedentes en el sentido de Bachelard, pero que también tuvo mucho que ver el personaje para que se estableciera como derrotero la postulación de un nuevo horizonte de racionalidad, que no lo es en todos los sentidos nuevos, sino que lo que hizo fue desplazar la formulación epistémica reducida en la metáfora del agua que fluye como punto epistémico alternativo, y que ahora se sabe forma parte de los momentos en que fue derrotado no propiamente este punto epistémico, sino del panorama general filosófico que sostuvo Newton, descartándolo y reemplazándolo por otro. De ahí que se ofrezca el siguiente esquema donde se ubica la inserción de un horizonte de racionalidad discutido aquí —el posicionamiento de Newton y el papel desarrollado en la construcción de la visión del sistema mundo-moderno.

Construido en sus orígenes por filósofos y matemáticos anteriores, como Descartes, Galileo, y Kant, formularon los fundamentos y los principios de esta visión que inaugura la unicidad del mundo y que de ahí retomara como sistema-totalidad sus fundamentos, pilares sobre los que se construyó la racionalidad/modernidad refuncionalizada. También se apoyó en la obra de Newton, simultáneamente el sistema como totalidad actuó también desproveyendo su visión propia del filósofo y

matemático, como también del hombre de carne y hueso que representó Newton. Es decir, con sus virtudes pero también con sus contradicciones no sólo en el plano filosófico. Los excluidos no fueron ni han sido considerados hasta el momento en esta única visión del mundo inaugurada por la racionalidad/modernidad.

La necesidad de la superación de las Relaciones de Conocimiento en el Sistema





II.7 El trabajo quedaría incompleto si no se formula ¿qué es un problema?

En la investigación de matemática educativa, se consideran diversas posiciones teóricas, por lo menos tres puntos de vista diferentes: *a)* desde la matemática, *b)* desde lo psicológico y *c)* desde lo cognitivo (Cabañas, 2000). En la metodología de la enseñanza de la resolución de problemas, no son contradictorios, sino más bien necesarios. Por otro lado, el diccionario señala: “Problema Matemático. Proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado, conociendo ciertos datos” (Larousse).

II.7.1 Diversas posiciones teóricas

- “desde lo psicológico. Hace referencia al contenido subjetivo de problema al que se hace énfasis en la actividad cognoscitiva de quien resuelve” cita Cabañas (2000), a Labarrere 1985.
- “desde el punto de vista de la enseñanza de la matemática se enfatiza el contenido objetivo del problema sin hacer intervenir el aspecto psicológico; el problema es visto como determinado sistema material que para su caracterización no requiere del sujeto de acción” (Cabañas, 2000).
- “de la cognición se enfatiza en los recursos que se ponen en juego en el proceso de solución de los problemas, tales como: las representaciones semióticas, los sistemas de creencias, las estrategias y las técnicas, entre otras” (Cabañas, 2000).

En relación con el concepto de problema se encuentran:

- Cita Cabañas (2000) a Rubinstein 1966, “un problema debe comprenderse como determinada situación problemática hecha consciente por el sujeto”.
- Polya (1974), “tener un problema significa buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar”.
- Cita Cabañas (2000) a Schoenfeld 1985, “es una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de resolverla y que la dificultad debe ser un impasse intelectual y no solamente a nivel operacional o de cálculo”.
- Cita Cabañas (2000) a Labarrere 1988 señala que: “es toda situación en la cual, dada determinadas condiciones —más o menos precisas—, se plantea determinada exigencia, a veces más de una”.
- Cita Cabañas (2000) a Rizo y Campistrous 1993, consideran “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga transformarlo. La vía para realizar la transformación es desconocida”.
- Cita Cabañas (2000) a Santos 1994, “es una tarea en la que aparecen los siguientes componentes: *a)* La existencia de un interés. *b)* La no-existencia de una solución inmediata. *c)* La presencia de varios caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). *d)* La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa situación”.

Aspectos comunes de las posiciones teóricas (Cabañas, 2000)

- Que se trata de una situación o tarea que intenta transformar o resolver conscientemente el individuo.
- Que de hecho es una contradicción (la dirección de la racionalidad/modernidad actuando) —impasse, para Schoenfeld—, que se le presenta al individuo y éste requiere resolverla, y
- Que la vía de solución es desconocida para la persona.

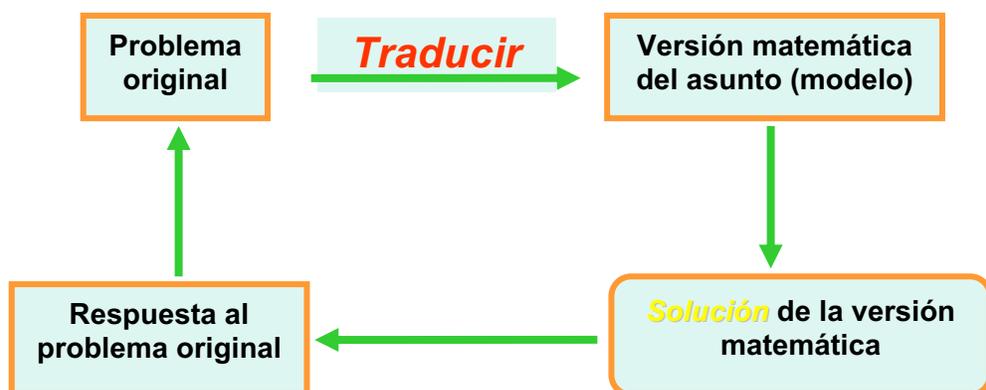
En general, para que toda situación que se plantee al estudiante sea considerada un verdadero problema, éstas deben implicar la necesidad de un esfuerzo cognoscitivo por parte de quien los resuelve.

II.7.2 Esquema del proceso de resolución de problemas

Usualmente, un problema matemático es planteado en palabras (oralmente o por escrito). Entonces, para resolver el problema uno traduce estas palabras a un problema equivalente (usando símbolos matemáticos), resuelve este problema e interpreta la respuesta (García, 1997).

II.7.3 Antecedentes

Descartes en el siglo XVII conjeturó la existencia de reglas básicas para resolver cualquier tipo de problema. En sus libros: *Rules for the Direction of Mind*, y posteriormente en *Discourse on the Method* presentó estrategias generales, las cuales contenían reglas específicas para resolver problemas (Santos, 1992). Descartes ya lo explicaba en el siglo XVII (este proceso no es novedoso):



En la realidad, este sencillo esquema se identifica con razonamiento, discernimiento, análisis, síntesis, que son términos o categorías propias de la actividad mental, en general, y del pensamiento, en particular.

II.7.4 ¿Qué es la resolución de problemas?

La resolución de problemas es un proceso (García, 1997). Es el medio por el cual un individuo usa previamente el conocimiento adquirido, las habilidades y la comprensión para satisfacer las condiciones de una situación no familiar. Este proceso empieza con la confrontación esencial y concluye cuando se ha obtenido una respuesta de acuerdo con las condiciones iniciales. El estudiante debe sintetizar lo que ha aprendido y aplicarlo a la nueva y diferente situación.

De lo anterior puede observarse que para los diversos autores citados la interpretación o visión fija su atención en tratar sobre los problemas y la resolución de los mismos, haciendo para ello una clasificación jerarquizada:

- Que parte del problema (qué es un problema).
- Clasificación de los problemas.
- Estructura de los problemas mediante la determinación de un parámetro o varios parámetros (parametrización), el cual dependerá del tipo de solución, operaciones, etc., que las personas efectúan y,
- Del proceso de solución de problemas.
- Estrategias en el proceso de solución (qué es una estrategia).
- Estrategias caracterizadas.
- La técnica de la modelación en el proceso de solución de problemas.

Por el otro se observa: que dejan de lado o por lo menos se inclinan más respecto a qué es un problema y su proceso de resolución. En lugar de qué es la solución y qué aspectos constituyen la noción y el concepto de solución a través del tipo de problemas, en los diferentes momentos que aparecen en la currícula y del nivel de enseñanza (Básico, Medio Superior y Superior). Sólo una autora (Cabañas, 2000) identifica la necesidad de una clasificación de los problemas con base en los momentos que aparecen en la currícula, aunque no establece como tal una quinta categoría.

Problemas aritméticos

 Problemas algebraicos

 Problemas geométricos

 Problemas trigonométricos

 Problemas lógicos y del razonamiento

 Problemas del cálculo

 Problemas de las ecuaciones diferenciales

Problemas del Álgebra Lineal

Finalmente esta visión no va más allá para entender: qué es la solución. Más bien, el centro último de su preocupación “enseñanza de las matemáticas”, se encuentra en el formular y reducir el problema al manejo de técnicas que permitan

superar la obtención de la solución, colocando todo el proceso en que dice estar interesado, en la enseñanza y aprendizaje como de la investigación de la matemática educativa en la reducción de la necesidad de explicación a una descripción —la investigación procura esto—, y se asocie respectivamente una prescripción en la constitución de la razón científica, en el sentido de Wallerstein (2000), funcionamiento tácito de la racionalidad/modernidad del sistema-mundo moderno inaugurado a partir del siglo XVI y establecido en forma a partir del siglo XVIII. Es decir, la racionalidad/ modernidad a través del horizonte racional que la ha constituido ha convertido en una idea mesiánica y mediática la relación:

Individuo  Resolutor

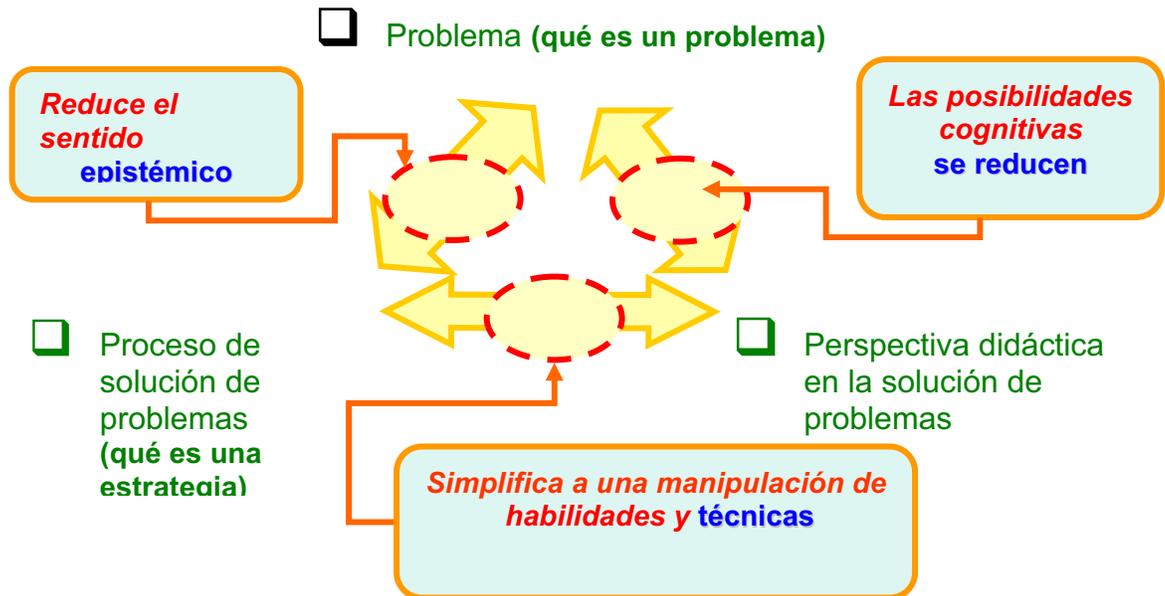
Sin embargo, no se formula qué aspectos constituyen a la persona mental, cognitiva y epistémicamente que se encuentra en acción al hallar la solución, así como comprender qué es la solución, como también ¿en qué aspectos ayuda para la conformación de conceptos como número, igualdad, etcétera?

Por lo que la investigación, además de que prueba la pertinencia, va mas allá del horizonte racional establecido, pues no sólo busca explicaciones (descripciones-prescripciones), acerca de qué es la solución, sino que también provee otro ángulo de miramiento de la problemática, racionalidad que va más allá del sentido operativo del mismo (Básico, Medio Superior, y Superior).

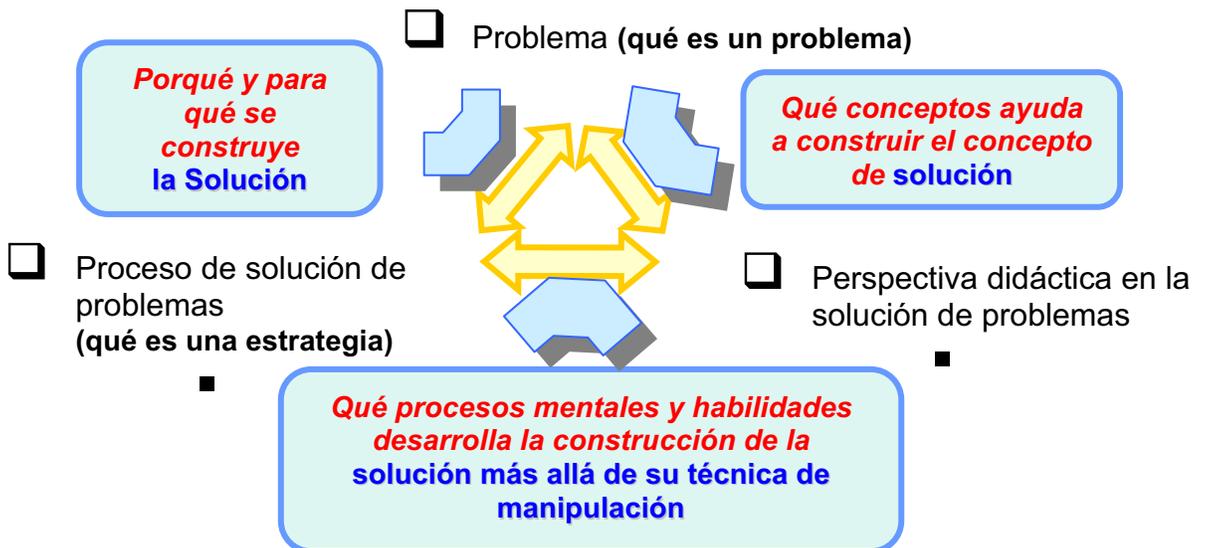
Esta clasificación jerarquizada produce una nueva ruptura en el horizonte racional constituido:



Ausencia del sentido epistémico que crea rupturas en este proceso



Construcción del sentido epistémico ¿Qué es la solución?



Por último, véase a continuación una definición en un horizonte de racionalidad enunciado antes de 1990, por Hernández (1900) para con ello identificar los entrecruzamientos o desplazamientos epistémicos que se producen en las personas

al momento de trabajar con la solución, aspecto al que se referirá la presente investigación en la sección de resultados correspondiente.

II.7.4.1 Definición

“Se llama solución, en un problema, a la serie de razonamientos y operaciones que hacen para llegar a obtener el valor de la incógnita” (*Curso completo de aritmética superior*, J. Hernández, 1900, pág. 17).

La *solución* de un problema consta de tres partes:

1. El razonamiento, que consiste en indicar por medio de proposiciones claras las diversas relaciones que existen entre los datos del problema y la incógnita;
2. El planteo, que consiste en colocar por escrito, de la mejor manera posible, las relaciones establecidas por el razonamiento;
3. La ejecución de operaciones, que consiste en aplicar las reglas más sencillas para resolver con facilidad las operaciones indicadas en el planteo.

CAPÍTULO III
RESULTADOS

[..] *Ellos no han suplicado que los reconozcan; ellos han hecho que los reconozcan. Zermeño, S. (2001)*

III.1 Qué está ocurriendo con las personas que aprenden matemáticas

III.1.1 Con un grupo de profesores del nivel de educación superior

En el caso de los profesores del nivel de educación superior —profesores del área de matemáticas, que habían o que estaban ofreciendo el curso de Álgebra Lineal—, frente a las preguntas formuladas para indagar sus representaciones gráficas del plano y del espacio de tres dimensiones con elementos como rectas y planos asociados a la solución en sistemas de ecuaciones lineales 3×2 y 3×3 , mostraron: que los entendimientos y concepciones los llevan a emplear un lenguaje de uso para resolver la situación que se les plantea, es decir, exhibieron dificultades para expresar sus entendimientos en el lenguaje formalizado y estructurado del Álgebra Lineal asociada a las representaciones geométricas con la solución en sistemas de ecuaciones lineales, así, utilizaron expresiones del tipo “juntitas como las tortillas”, para designar el caso de planos coincidentes, o consideraron como caso de solución un sistema cuya representación gráfica correspondía a planos intersectándose dos a dos en el espacio.

A continuación se reproduce el reporte de investigación formulado con el título: “La construcción social del concepto de solución”.

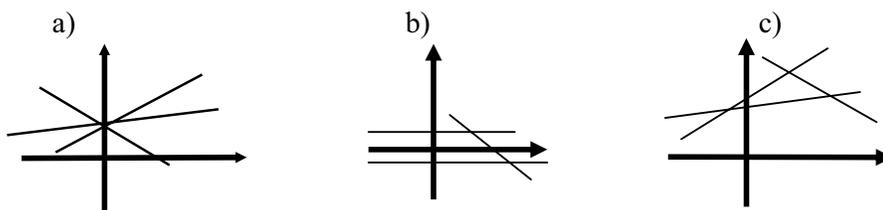
Introducción. 1ª parte. Como parte de una indagación, realizada en 2000, sobre la construcción social de la solución surgen los antecedentes, en aquella se estudiaron las interpretaciones que hacen los docentes de matemáticas del nivel superior de la representación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Las respuestas, proporcionadas a un cuestionario escrito, se obtuvieron a través de entrevistas semiestructuradas. En éstas se centró la atención en el concepto de solución de sistemas 3×2 y 3×3 , que partían de la representación gráfica, de las cuales se discutía con los docentes el significado de las distintas formas de intersecciones posibles. Para la aplicación de la entrevista fueron seleccionados seis profesores (cinco hombres y una mujer), quienes laboraban en una institución de educación superior, con características tales como: desempeñarse en la enseñanza de la matemática en el nivel superior, haber impartido o estar impartiendo la asignatura de Álgebra Lineal y estar dispuestos a colaborar en esta experiencia. La hipótesis de partida del estudio señalaba que los profesores, a pesar de que enseñaran el tema a sus alumnos, tendrían dificultades en interpretar situaciones que no eran típicamente tratadas en los textos escolares ni en la currícula respectiva. Se sabía que la enseñanza tradicional de tales temas suele centrar más la atención en los algoritmos que en las interpretaciones y los significados. Los resultados mostraron las dificultades a las que se enfrentan al trabajar la solución en un contexto gráfico, pues la *investigación observó*, que *los* participantes también miran la solución, como la intersección dos a dos de los planos. Contradictorio a lo que se considera la representación gráfica de la solución, el punto donde convergen tres planos. Determinando como criterio mirar todo aquello que se intersecte. Preguntando ¿por qué ocurre esto en el sistema didáctico?, y proseguir la investigación en torno a cuestiones y la obtención de evidencias sobre cómo conciben la solución, y cómo se construye socialmente la

solución en diferentes niveles del sistema educativo. *La búsqueda, por lo involucrado, hace necesario un nivel superior de articulación*, que permita dar respuesta a estas cuestiones.

Los antecedentes derivan de una investigación realizada en 2000, en la que se estudiaron las interpretaciones de los docentes de matemáticas del nivel superior en relación con la representación gráfica de la solución en sistemas de ecuaciones lineales 3×2 y 3×3 . Dicha investigación evidencia las dificultades, entre los profesores, para trabajar con el concepto de solución en un contexto gráfico. Además, otros trabajos que brindaron información sobre las interpretaciones que las personas asocian a la solución, fueron los de M. Eslava y M. Villegas (1998); J. Barrera, O. Cano (1998), y J. Cervantes; J. Marines y J. Monroy (1998). En la investigación de Guadarrama (2000) se formularon las preguntas: ¿por qué consideran los docentes que estas representaciones gráficas proveen ideas sobre la solución, o son muestra de situaciones de solución o no solución en los sistemas? ¿Qué los hace suponer que las ideas referidas a la solución subyacen en estas representaciones gráficas proporcionadas? ¿Tienen que ver con la presencia del obstáculo del formalismo que indicaba Sierpinska, (1998)?, o ¿es su consecuencia directa? Estas preguntas permitieron observar la existencia de entendimientos y concepciones particulares, así como si atendían a la estructura discursiva de la matemática teórica —Álgebra Lineal—, más que la de la matemática escolar, aspecto, este último, en el que no se profundizó debido a las características de la investigación.

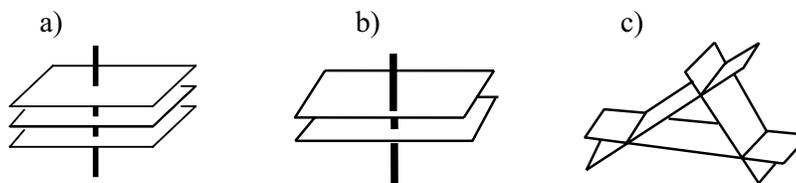
Desarrollo. Al examinar las representaciones que proveyeron estudiantes y profesores, se identificaron espacios comunes respecto a sus dificultades, tránsitos en los modos de pensar, así como en los entendimientos y concepciones. Un ejemplo de ello se muestra en las gráficas del plano \mathbb{R}^2 .

Representaciones gráficas:



Entre los estudiantes de bachillerato "*coincidían sus representaciones*", es decir, mostraban situaciones gráficas de solución y no-solución, dando idea tanto de las dificultades a las que se enfrentaron —punto de interés—, como de sus entendimientos. Por ejemplo, señalaban la existencia de la solución al intersectarse tres rectas a dos en el plano, e indicaban como la solución o no los puntos de corte entre las rectas que se intersectan. Este nivel conceptual común, representado gráficamente en un espacio de dimensión diferente al de los docentes entrevistados, que adelante se muestran.

Por otro lado, en el espacio R^3 :



Las representaciones gráficas corresponden a los profesores del nivel superior, las cuales compartían un espacio común con las de los estudiantes de bachillerato: el reconocimiento de las dificultades y sus entendimientos. Entre estas representaciones se compartían ciertos rasgos. Algunos, se pensó, eran producto de la casualidad; sin embargo, no fue así. Hacían referencia a la manera de interpretar el concepto de solución en diferentes contextos; la situación no era fortuita, se manifestaba entre los docentes, lo que hizo relevante su examinación.

Para estudiar si la situación podía ser una posible evidencia del estado en que se encontraban los modos de transitar del pensamiento e identificar las dificultades que experimentaban al pasar de una representación a otra, se estableció un criterio que clasificara las categorías de representación gráfica proporcionadas por los entrevistados —estudiantes y profesores—, y generar una categoría general que respondiese a lo que investigábamos, señalado con la metáfora “si funciona lo aplican”, a partir de las interpretaciones de la solución ligadas a rectas y planos.



Por ejemplo, la gráfica de la derecha, los docentes del nivel superior la consideraron una representación que mostraba solución al sistema, que al compararla con las de los estudiantes, permitió observar la similitud en el espacio de tres dimensiones, una característica común a ambas, con lo que se constituyó el punto de conceptualización. De esta manera, aun siendo niveles de educación, instituciones, funciones, lugares y personas diferentes, —sustancial para la investigación—, mostraban una regularidad en sus respuestas: los estudiantes de bachillerato, a través de tres rectas que se cortan dos a dos, representan gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones; y, los profesores, por medio de la intersección dos a dos de los planos en el espacio de tres dimensiones. Si bien estaban representados gráficamente en espacios de dimensión diferentes, el nivel conceptual coincidía.

Algunas consideraciones para futuros trabajos: • el análisis de las diferentes interpretaciones que le dan al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, • analizar los supuestos que se mostraron en las tesinas, como la experiencia docente, pues ellos tienen consecuencias de interpretación gráfica y geométrica, sobre las que sólo se señaló lo inadecuado de los mismos de manera

general. • Tender puentes de comunicación entre la experiencia docente y la dinámica que se desarrolla en el interior del aula, al trabajarse los contenidos de Álgebra Lineal. *a)* Por ejemplo, la disociación de aspectos que tienen que ver con el cómo se expresan gráficamente las ecuaciones de la forma $ax+by=c$, que conforman los sistemas de ecuaciones en dos dimensiones. *b)* Trabajar analíticamente la ecuación anterior no necesariamente lleva a los alumnos, mediante la situación didáctica elegida por el profesor, a la ecuación clásica $y=mx+b$ con pendiente conocida, así como su ordenada, al origen que la determina. *c)* Las personas tienden más a pensar la expresión: $y=mx+b$ como una función, en vez de que gráficamente sea considerada como la expresión que representa una recta en el plano coordenado, coincidiendo con Sierpínska (1998) al referir a Duval. *d)* La tipificación del enfoque y uso de textos orientados en una preferencia sitúa, en el ámbito de la práctica escolar, el problema como nada fácil de resolver, por lo menos no a corto plazo, pues la situación escolar, para que mejorase, además de modificar el discurso, el diseño de ese discurso y las creencias que desarrollan las personas del proceso, debería, como acción central, modificar sus actitudes y la práctica dentro y fuera del salón de clases.

Todo lo anterior nos lleva a tratar otro aspecto relevante, que por su tipo no fue posible estudiar en el trabajo, pues su tratamiento escapó a los objetivos del mismo: ¿qué es lo que entienden las personas del sistema didáctico por solución en diferentes contextos?

El artículo: "Synthetic and Analytic Modes of Thinking in Linear Algebra", de Sierpínska (1996) que señala que en la evolución de las matemáticas se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento: Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural, lo que impidió después explicar por qué la similitud en las prácticas educativas, culturales, y discursivas entre alumnos y profesores.

Método. Como ya se mencionó la investigación se apoyó en la entrevista y en una secuencia de gráficas asociadas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, 3×2 y 3×3 , para obtener la información —interpretaciones de los docentes de educación superior del concepto de solución— sobre los modos de pensamiento sintético y analítico de los entrevistados, evidencias, a su vez del funcionamiento del sistema didáctico.

Las sesiones de trabajo se efectuaron en una institución de educación superior del estado de Hidalgo, en el año 2000. Se trabajó con seis docentes que tenían experiencia en el área y la disposición de colaborar con la investigación. De los entrevistados, cinco habían dado el curso de Álgebra Lineal; tres eran ingenieros industriales electricistas; uno, ingeniero químico; otro, ingeniero mecánico, y un docente. Dos manifestaron haber realizado estudios de maestría, no especificando más. Otro, la cursaba y los tres restantes tenían estudios de licenciatura.

Resultados. *a)* La cuestión planteada trataron de relacionarla con las ecuaciones, algunos llegaron a escribirlas de manera general, otros trataron de idearlas,

llamándoles en la entrevista “pensándolo matemáticamente” (característica que hace referencia a prácticas lingüísticas y discursivas).

b) Indicaron que “así fue como lo vieron en el curso” de Álgebra Lineal (referencia a prácticas educativas, culturales).

c) Les costó trabajo pensar en los casos de tres rectas coincidentes, dos rectas coincidentes y otra paralela a ellas, tres planos coincidentes, dos coincidentes y uno paralelo: “...según esto, aquí hay dos rectas iguales, son dos rectas paralelas por decirlo así...”, refieren a la línea coincidente por línea doble, y señalan que a pesar de estar pintadas una sobre la otra son dos líneas, no una. Distinguen “que a pesar de estar empalmadas una sobre la otra deberían estar separadas aunque fuese una distancia muy pequeña”. Recurriendo a sus experiencias cotidianas: “juntitas como las tortillas”, o lo asociaban a las ecuaciones: “multiplico por 2 la ecuación que es una recta empalmada, doble”, aun de indicarles que los planos o rectas eran *coincidentes*¹, (remite a prácticas socioculturales, discursivas, lingüísticas, escolares).

d) A algunos, al solicitarles concebir las gráficas como representaciones asociadas a los sistemas de ecuaciones, en tres dimensiones, los llevó a pensar que cada plano estaba determinado por tres ecuaciones, con tres incógnitas. ¿Por qué tres? El discurso matemático empleado hace énfasis, en principio, a tres dimensiones del espacio; los objetos geométricos del espacio son descritos por medio de tres incógnitas; y, en el caso de las gráficas referentes al plano, la cantidad de soluciones fue de uno, dos y tres, según la cantidad de cruces que presentaron las gráficas (remite a entendimientos y concepciones respecto a la solución, y se relaciona con prácticas educativas).

e) Casi todos ellos, al indicar la solución, la referían a un punto, una recta —objetos que veían en las gráficas—. En ambos la llamaban “una solución”, asociándola a la intersección o cruce. Cuando no se intersecaban las rectas, la situación gráficamente no tenía solución (remite a los entendimientos y concepciones respecto a la solución, establece relación con prácticas educativas).

f) Cuando se les pidió una definición de solución, no encontraron cómo precizarla, algunos señalaban que era un punto, una recta, o indicaron valores, ya sea porque han estado familiarizados con el concepto o debido a su paso por la escuela. Gráficamente hay una tendencia a considerar que es distinta, no ven la definición de manera analítica, en su relación con la gráfica (remite a los entendimientos y concepciones respecto a qué es la solución, establece relación con prácticas educativas)

Por qué mirar la solución como todo aquello que se esté intersecando, condicionante para la indicación: tiene solución o no tiene solución, “como el caso de intersección dos a dos de tres planos que consideraron de solución”; y cómo se da este proceso de construcción de entendimientos respecto a la solución, en relación con lo social. Otra regularidad se dio en lo sociocultural, en el lenguaje empleado: “coincidentes”, “sentido de intersección”, “predilección del

¹ La regularidad se encuentra en lo sociocultural, propuesto en Guadarrama (2001), en relación con el lenguaje empleado, allá “sustituyan”, aquí “coincidentes”, actúan como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en el discurso.

lenguaje analítico”, “formalidad lógico estructural con que se trabaja”, términos que favorecen o entorpecen la comprensión del significado en el discurso (remite a prácticas socioculturales, discursivas, escolares, y de entendimientos).

Conclusiones. Los resultados remiten a la necesidad de crear un nivel superior de articulación que ofrezca nuevas explicaciones a los entendimientos y concepciones que crean cuando trabajan con la solución, y su proceso de constitución en un contexto más general. Por qué adoptan prácticas discursivas que contienen elementos sociales, culturales, y lingüísticos ajenos al ámbito escolar.

De ahí que se plantea investigar esta construcción social de la solución como una posible forma de dar respuesta a dichas manifestaciones. Por otro lado, la acepción de Sierpinska presenta ciertas dificultades, como las de carácter discursivo, las cuales evitan la comprensión de los conceptos, en particular, los entendimientos y concepciones relativos a la solución. Las explicaciones limitaron que profesores reconocieran la intersección dos a dos de los planos como una situación de solución, lo que apela a entendimientos y a la construcción social que se efectúa sobre la solución.

III.1.2. Con un grupo de profesores de educación básica

Los profesores de educación básica (preescolar y primaria) se agruparon en dos contextos: *a)* profesores de las ciudades de la región, y *b)* profesores que laboran en distintas comunidades.

Asimismo, el estudio se realizó mediante la aplicación de dos indagaciones con el fin de obtener información, en la primera, acerca de sus concepciones, sus entendimientos, es decir, de los procesos de comprensión en torno a un problema matemático, de los procedimientos que emplearon para la obtención de la solución, así como de los entendimientos que hacían del mismo al momento de trabajar la solución, el cual es enunciado como lógica de procedimientos. Y en la segunda, observar las motivaciones e intereses en relación con la matemática y su enseñanza, así como con los aprendizajes de la misma, cuya finalidad fue establecer, a lo largo de un ciclo escolar, la distancia de sus intereses, y de las problemáticas más sentidas, y determinar, de esta manera, si existía o no correspondencia entre sus entendimientos y concepciones del concepto de solución, y los procedimientos que establecían, con los intereses y motivaciones personales, y con su labor docente. Ambas indagaciones se desglosan a continuación:

Estas indagaciones se trabajaron, durante el ciclo escolar 1997-1998, con los profesores-alumnos de la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 20C de Ixtepec, Oax., agrupados como sigue: 1) 32 profesores del primer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria y en Educación Preescolar (LEPEPMI), plan 90, a través del curso de Metodología de la Investigación I; y 2) los 18 estudiantes-profesores del séptimo semestre, grupo D, de la Licenciatura, en su curso de Matemáticas II. Ambos extremos facilitarían detectar las variaciones y, en consecuencia, los cambios producidos en los niveles de identificación.

III.1.2.1 Primera indagación. Observaciones sobre los procesos de comprensión de los profesores “acerca de un enunciado de un problema matemático”

En principio, cabe señalar que el problema matemático fue tomado de la guía para el manejo de los materiales de apoyo para el maestro y las estrategias para el aprovechamiento de los libros de texto, editado por la SEP (ver “Anexo 3. Instrumento de trabajo de los profesores del nivel de Educación Básica”), con dos objetivos: primero, indagar el estado en que se encontraban los procesos de comprensión de enunciados relativos a los problemas matemáticos, la lógica de procedimientos que establecían para obtener la solución, y observar las primeras estrategias que empleaban para obtener la solución; segundo, indagar sobre la consistencia de los materiales que la SEP proporciona a los profesores en servicio.

Para la realización de las actividades, se asignaron tiempos específicos por equipos. La investigación se centraba en el cómo los alumnos conceptualizan la resolución del problema, desde la práctica misma; las representaciones gráficas con que se auxiliaban, en el caso que las emplearan; los algoritmos y las esquematizaciones que aplicaron, así como las actitudes que manifestaron a lo largo de la aplicación.

El enunciado del problema matemático fue: “En una papelería empacaron 28 lápices en cajas con 4 lápices y cajas con 6 lápices en total obtuvieron 6 cajas. ¿Cuántas cajas de cada tipo llenaron?”. De los seis casos², uno de los equipos de ellos no lo resolvió; para el caso de los alumnos del primer semestre que no respondieron (4 estudiantes-profesores), se les preguntó a qué se debía ello, a lo que contestaron que “no habían hecho nada porque no le habían entendido”, se considera que más bien no estuvieron seguros del significado que les proporcionaba lo leído, es decir, no realizaron una comprensión acorde con el enunciado, típico de la matemática escolar, pues la estructuración del lenguaje con que se presentan o formulan los problemas, les dificulta comprender su significado, esta es una argumentación personal

Por otro lado, los alumnos del séptimo semestre, grupo D, del módulo de Matías Romero, Oax. (18 estudiantes-profesores), propusieron modificar el enunciado para resolverlo: “Se tienen 28 lápices y cajas que caben 4 lápices y 6 lápices, si se formaron 6 cajas diga usted cuántas y de qué tipo se formaron”, de alguna manera, hay correspondencia con el caso mencionado anteriormente, si bien fueron más allá, al modificar el enunciado, lo cual actuó como un elemento estabilizador de su pensamiento, para poder establecer un espacio de significación que les permitiera resolverlo. La modificación se realizó ante la falta de sentido o bien porque el conjunto de vivencias y experiencias respecto a los problemas matemáticos les exige entender, comprender y actuar bajo un conjunto de reglas y algoritmos dados, interpretación de quien escribe, y ante la posibilidad de no ofrecer respuesta, como en los alumnos del primer semestre, —si bien, los alumnos de séptimo semestre no tuvieron contacto con los alumnos del primer semestre.

Lo anterior planteó dos cuestiones: 1. Indagar si esta nueva reformulación fue equivalente al problema matemático enunciado originalmente, y 2. Si

² Se indican seis casos dado que los 32 alumnos se agruparon en seis equipos

obedeció a otros factores, como pudieron ser sus búsquedas epistémicas, y la idea de crear lo que hemos llamado aquí el circuito epistemológico del lenguaje (véase la construcción del circuito epistémico a nivel del lenguaje (ver de este trabajo, sección III.5 Desvinculación entre los lenguajes), conectando y transformando el lenguaje formal en un lenguaje de uso, como elemento esencial para la comprensión y construcción social epistémica de los conocimientos matemáticos y de la solución. No obstante, a lo anterior también podemos darle otra lectura, la de que los objetivos del curso influyeron en los alumnos del séptimo semestre con la idea de que al presentar esta modificación del enunciado los demás compañeros pudieran entender.

El problema matemático debía representar un reto para el alumno —consideración didáctica y cognitiva adoptada por los alumnos del equipo que modificó el enunciado—modificación que se consideró también obedeció a la intención de representar y vivenciar un reto para sus propios compañeros. Otro aspecto encontrado es que también la situación referida ofrece datos de las pautas con las que actúan las personas cuando están trabajando con los problemas matemáticos y su solución: ausencia de respuesta, incluso inmediata, como de modificación o adaptación del enunciado a lo que las personas pueden hacer, con la finalidad de mostrar un resultado, la solución, un procedimiento, e incluso conocimientos de la materia.

Las observaciones acerca del problema y su enunciado están señaladas en las primeras lecturas que hablan acerca de la búsqueda creativa versus la aplicación de reglas (capítulo I, actividad 1, pág. 18 de la guía para el manejo de los materiales de apoyo para el maestro y las estrategias para el aprovechamiento de los libros de texto, editado por la SEP), para poder llegar a conceptualizar acerca de lo que es resolver un problema. Desde luego, quedaban preguntas sin resolver: *cómo detallar los procesos de obtención de la solución*, para ello se generó una segunda indagación que permitiera establecer: *qué es lo que estaba pasando respecto a la problemática*, ¿era una coincidencia o había una relación entre la ausencia de respuesta el enunciado que se proponía o eran ambos? Para ello se describen a continuación los aspectos de la segunda indagación efectuada a los profesores-alumnos de la UPN.

III.1.2.2 Segunda indagación: Problemática de significación en los profesores-alumnos de la UPN “correspondencia con su proceso formativo”

Esta indagación pretendió ser un diagnóstico de identificación que se correlacionara con su proceso formativo, y que se vinculase con lo más significativo de su práctica docente de la primera indagación.

El planteamiento que se formuló fue: ¿Cuál es el problema más importante que usted tuvo en este ciclo escolar?, explique.

Este planteamiento se aplicó a dos grupos: 1) A 104 profesores-alumnos de los tres grupos de los primeros semestres de la Licenciatura en Educación Primaria y en Educación Preescolar (LEPEPMI), plan 90, ubicados en distintas comunidades, como parte de las actividades del curso de Metodología de la Investigación I. b) A 44 profesores-alumnos de dos de los tres grupos del 7º semestre de la misma, en su curso de Matemáticas II, llevado durante el ciclo

escolar 1997-1998, de la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 20C de Ixtexpec, Oax.

La clasificación de las respuestas se estableció a partir de la frecuencia con que se manifestaban. Así para el primero A, se identificaron cuatro grandes bloques de 10 tipos de rubros (problemas referidos a la relación director-maestro-supervisión, falta de apoyo a las actividades docentes, problemática sobre el lenguaje, e indisciplina) De manera análoga se hizo para los restantes grupos. Las respuestas de los alumnos de primer semestre se agruparon como sigue:

Nº de orden en que aparecen	Tipo de Problema	Nº de alumnos
1º	Sobre lenguaje	18
2º	Lecto-escritura	14
3º	Inasistencia	10
	Matemáticas	10
4º	director-maestro-supervisión	9
5º	Método de proyectos	7
6º	Indisciplina	6
7º	Falta de apoyo	4
	Falta de planeación	4

Los profesores-alumnos que contestaron fueron 82, de un total de 104, esto es aproximadamente 83% del total, porcentaje significativo.

En el caso de los grupos de séptimo semestre:

Nº de orden que aparece la frecuencia	Tipo de Problema	Nº de alumnos
1º	Lecto-escritura	9
2º	Inasistencia	8
3º	Indisciplina	4
4º	Sobre lenguaje	3

Del total de profesores-alumnos sólo participaron 24, de un total de 44, lo que representa aproximadamente 55% del total, así que los resultados podrían considerarse verdades a medias o ligeramente delante de las medias.

La aplicación del cuestionario no fue del todo homogénea, al primer semestre, grupo C, se le pidió *escribir el problema más importante que tuvieron en su salón de clases*, y a los dos grupos restantes se les aplicó lo ya formulado (*¿cuál sería el problema más importante que tuvieron en este ciclo escolar?*); sin embargo, por las pretensiones de esta segunda indagación y a pesar de ser diferentes los enunciados, existe correspondencia entre ambas respuestas, sobre todo para la consecución de los objetivos planteados por el trabajo.

Esto ilustra las modificaciones que sufrieron respecto a los intereses, enfoques de sus problemáticas, así como de las percepciones sentidas y percibidas por los profesores-alumnos, es decir, se cumple, en efecto, que las cosas cambian respecto a lo educativo, pues en su paso del primero al séptimo semestre de la licenciatura, la percepción de la problemática se modifica.

Entre los alumnos del primer semestre fueron mayores los problemas que entre los de séptimo. Ello debido a las exigencias escolares. De entre dichos problemas, en la medida que se van acercando a los últimos semestres —sexto a octavo—, tienen que elegir uno, al cual le darán un tratamiento teórico-metodológico-didáctico, con el propósito de realizar un trabajo final para la obtención del título de Licenciado en Educación. Este trabajo podrá consistir en la elaboración de una propuesta pedagógica, la cual deberá sustentar y defender.

En suma, se ha encontrado una correspondencia con la primera indagación: *los problemas matemáticos, así como lo que se exige hacer en la clase de matemáticas, tienen mucho que ver con la relación del lenguaje de uso y el lenguaje formal y estructurado*, pero no sólo con ella, pues la problemática no se ha quedado ahí sino que la trasciende, ello es lo que hemos venido observando en los cuatro bloques educativos elegidos (al respecto véase el capítulo “Qué está ocurriendo con las personas que aprenden matemáticas”).

Así, el lenguaje es uno de los rubros más sentidos y significativos en los profesores-alumnos de la LEPEPMI, plan 90 de la UPN, en su Unidad 20C:

III.1.2.2.1 Del lenguaje

En este rubro, los profesores-alumnos caracterizan la problemática a través de una expresión, la cual, sin embargo, expresa a su vez diversas problemáticas; por ejemplo, la asignación a zonas escolares y comunidades indígenas que no corresponden a su grupo étnico-lingüística, hecho que se menciona mucho, pues incide enormemente en su desempeño, a lo que se suma, además, que cada pueblo indígena posee su propia visión del mundo, lo que implica no nada más compartir la condición indígena sino también diferencias perceptuales, cognitivas, epistémicas, lingüísticas y culturales.

También se pudo ver que existe una fuerte relación entre lenguaje y procesos de lecto-escritura, los cuales determinan los hábitos y la comprensión del texto, etcétera. Lo anterior exige desarrollar ciertas habilidades del pensamiento.

Esta situación expresa una complejidad mayor a lo registrado en estas dos indagaciones, de ahí la importancia de su investigación en el futuro, pues los profesores-alumnos están desarrollando posiblemente un discurso en el salón y en lo escolar, estructurado y formal, distinto al del ámbito sociocultural, tal vez por cumplir, pero que no está permitiendo la comprensión, mucho menos entendimientos, entre los alumnos, como se aprecia en los grupos de primer semestre, en cuyo listado de problemas apareció, en tercer lugar, la matemática.

En la materia de Matemáticas y en el salón de clases están pasando cosas importantes respecto al lenguaje que tienen relación directa con la primera indagación: los enunciados al no tener una base de significación, o bien no responden el problema matemático por que no se entiende, ni siquiera lo que se pide, o bien son modificados por la necesidad y la vivencia de dar respuesta a la pregunta, en este caso de resolverlo, pero que su respuesta, como se observa, está mediada por aspectos socioculturales y del lenguaje específico de la comunidad, de la región, y del horizonte racional donde crea vida.

De ahí que sostengamos, desde la percepción de los profesores en servicio, que éste es uno de los problemas más álgidos y que les interesa dar respuesta,

dado el índice elevado de reprobación en matemáticas, como en lecto-escritura, problemas centrales de la educación en nuestro país.

III.1.2.2.2 La inasistencia y la indisciplina

Si los alumnos no entienden desde un principio y a lo largo del trabajo con su profesor, ni a través de los libros de texto, ni de las actividades, es decir, de todo aquello que tenga que ver con el sentido y direccionamiento de las prácticas sociales, culturales y discursivas, entonces el proceso está produciendo desadaptaciones, lo cual desde la visión dominante, producirá problemas que tendrán que atenderse necesariamente, con la característica de que la problemática habrá avanzado aún más.

De ahí, en consecuencia, el papel relevante del lenguaje y en particular de la relación del lenguaje de uso y del lenguaje formal y estructurado, exigencia de la modernidad, que se promueve en el ámbito escolar, pero que además no posibilita la comunicación de manera dialógica.

En otras palabras, habla de una ausencia de comunicación y de lo que iremos perfilando como una ausencia en el cierre del circuito epistémico, que se abre al poner sobre la mesa los conocimientos que las personas deberán saber, conocer, aprender y de las habilidades que se considera deben de generar a través de un lenguaje que se reconoce como propiciador y enriquecedor de este ir y venir en los niveles de construcción y constitución de la lengua (su uso), para la generación de un lenguaje que hace falta construir.

La inasistencia y la indisciplina tienen mucha relación con lo anterior, pues establecen una dinámica que llamaría de reacción centrífuga o de franca oposición.

Pues, por ejemplo, ante un discurso matemático escolar, que no crea una base de significaciones comunes, sociales, y culturales, ajeno a la realidad, que atiende y da preferencia a lo formal y estructurado, y que se ejerce desde la dominación y la hegemonía de los conocimientos y del poder, no es nada gratuito que los alumnos prefieran no asistir y/o que lo desatendan a través de sus actividades, pues no las entienden. Este aspecto resalta la importancia no sólo de hablar de una construcción social de los conocimientos matemáticos y en particular de la solución, sino de llevarlo a otro nivel de explicación, de interrelación.

Por otro lado, la indisciplina y la inasistencia, se pueden entender como producto de los cambios que se están produciendo, cambios conceptuales y sociales; por ejemplo, la indisciplina como manifestación del estar en desacuerdo con las formas cíclicas y viciadas del educar de los niños y jóvenes, en sus hogares, en las escuelas, en los espacios que frecuentan, en una sociedad que exige, pero que no permite comprender el *por qué*, *para qué* y *cómo*, expresiones de la relevancia de la existencia real de la diferencia, y no sólo del sentido coloquial de la diversidad, que supone el discurso didáctico alienante: entender, mas no hacer.

Por lo que la reflexión es también proponerse como parte de las tareas a seguir, construir el circuito epistémico que asegure la concreción de esas exigencias —lo cual no significa quedarse en el plano de lo concreto, o de ponerlo

en un lenguaje coloquial, sino que valide maneras de hacer y producir y no establecerse como las únicas para siempre, es decir, se está hablando de una relación dialéctica que se establece para el conocer y saber, —reconocimiento de la diferencia como parte del movimiento del pensamiento en las personas—, por tanto, del construir, pero que también valide las formas que intentan desde la construcción y desde su pensamiento constituir acerca del lenguaje de uso que emplean para acceder al lenguaje formal y estructurado con que se expresa la matemática y su aprendizaje, pero también de las enseñanzas, y viceversa que es lo más importante: *cómo ir reconstruyendo las experiencias a partir del lenguaje formalizado hasta llevarlo al lenguaje de uso como forma válida de comunicación entre estos dos lenguajes* punto de análisis de la problemática que aquí se formula

III.1.3 Con un grupo de estudiantes del nivel de educación superior

Con respecto a los aprendizajes, entendimientos y concepciones, los estudiantes del nivel de educación superior de los primeros semestres de las carreras de ingeniería de una institución educativa del nivel superior señalaron que a pesar de aceptar que tuvieron dificultades fundamentalmente de construcción de un lenguaje específico y técnico en su clase de matemáticas en el nivel de educación precedente —Bachillerato—, haciéndose crítico fundamentalmente en este nivel y en el que opinaron que les fue más general, menos técnico, más entendible en el nivel anterior a éste —Secundaria—, al momento de formularseles problemas donde implicaba la solución en dos casos.

Los estudiantes tuvieron serios problemas en relación con el concepto de solución y las relaciones que se les pedía establecieran a nivel gráfico y conceptual, lo que evidencia las competencias y habilidades que desarrollan y promueven en el nivel de educación previo.

Para el primer caso, a partir de una ecuación lineal con dos variables, se les pedía resolver $5x+3y-3=0$, en cuya resolución tuvieron dificultades, de hecho ninguno la pudo construir o proporcionar; para el segundo caso, que trataba de asociar representaciones geométricas posibles con la existencia de la solución o no para sistemas de 3×2 (tres ecuaciones con dos incógnitas), también tuvieron dificultades, esta vez, no sólo de asociación gráfica, sino para concebir, mediante el lenguaje formal, los objetos que ahí se proporcionaban, por ejemplo, las rectas coincidentes, rectas y ecuaciones, ecuaciones con funciones.

En esta experiencia también hubo dos preguntas previas para indagar sobre sus concepciones y entendimientos: *cómo conciben la solución y qué es resolver para ellos*. Sus respuestas refieren que no son lo mismo, y que, en el caso de la segunda, la entendían más como un proceso para hallar la primera.

La información proporcionada es significativa: señala una nueva ruta y a la vez es complementaria respecto a la de los demás estratos del sistema educativo revisados, entre otros, la existencia de aspectos fuertemente mediados por un lenguaje de uso, más que por un lenguaje formal y estructurado, y que sus entendimientos en relación con la solución se exhibían también a partir de lo que expresan en torno a ésta.

Algunos de los aspectos encontrados, al aplicar un instrumento de indagación, a tres grupos de alumnos del primer semestre de la Unidad

Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología (UPIBI) se muestran a continuación 1) aportó información muy valiosa que corroboró y verificó las formulaciones de análisis que se habían señalado, entre otras, que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica, la cual, a su vez, es coherente con la postura social y cultural del momento, por tanto se impone considerar una solución, trabajar un tema, resolver una ecuación, hallar una solución, estudiar un fenómeno que expresen una resolución por tanteos y de manera progresiva, de una búsqueda empírica, como lo refiere Chargoy, en esta relación de epistemología y conocimiento situado. Visiones que corresponden a ese problema particular que requerían estudiar, tantear, explorar, y empíricamente validar, es decir, exento de su generalización.

Al hacer patente que las direccionalidades que se crearon se convirtieron en unidireccionalidades, que el circuito epistémico que daba origen para la creación del sentido de superación de la razón, es decir, del alcance epistémico que se proponía, al ser de-construido para entender: *qué es conocer y cómo producir nuevo conocimiento*, quedó desvinculado e incluso a nivel de las exigencias racionales de los lenguajes con que se expresaba la problemática, del paso de uno de uso a otro formal y estructurado ello devino en que ya no se comunican. En otras palabras, la operación racional actuó desvaneciendo el sentido epistémico que le dio origen, colocando otro que no es alcanzado, por tanto lo que supuso que debía de alcanzar —epistémicamente la razón pura—, no lo logró por lo que urge estudiarlo considerando la complejidad que subyace.

En este aspecto, las evidencias que se poseen apuntan a la ausencia de trabajo, por ejemplo, a nivel del lenguaje, del establecimiento de la comunicación, es decir, de cerrar el circuito epistémico, que tienda el puente del tránsito entre la necesidad de pasar de un lenguaje de uso, un lenguaje específico, a un lenguaje formal y estructurado pero relacionándolos en múltiples direcciones, y luego, dar paso a otro nuevo circuito epistémico, en donde el lenguaje de uso se vea retroalimentado por el lenguaje que se formalizó para colocarse en otro punto ascendente en esta relación Kantiana que lo presupone.

En este nuevo horizonte racional, las personas que fueron indagadas respecto a sus concepciones y entendimientos, mostraron que no lo logran y que requieren pasar de uno al otro a través de la retroalimentación, en este caso mediante el cierre del circuito epistémico abierto por la unidireccionalidad, lo que a nivel de lenguaje tendrá que devenir del lenguaje formalizado y dirigirse hacia el lenguaje de uso, enriqueciéndolo en su constitución y construcción y no sólo como su exigencia, de ahí que tendrá que establecer una relación dialógica, *dialogar entre ambos*.

III.1.3.1 Diferencias en el lenguaje escolar (grupo 1)

Este aspecto también fue parte de la indagación (ver Anexo 2), bajo el Instrumento de exploración, primera parte Construcción social del concepto de solución cuya relación establece en términos de sus entendimientos y sus experiencias escolares el reconocimiento de la existencia de diferencias en el lenguaje escolar al pasar en nuestro caso del nivel de secundaria al bachillerato, y

del paso del bachillerato al nivel superior, por lo que es un testimonio de las percepciones de las personas que aprenden

Secundaria-Bachillerato	Bachillerato-Profesional
1. Sí porque la diferencia que hay en el lenguaje del bachillerato a la (nivel) secundaria es que en la secundaria era un poco más respetuoso en comparación de los maestros y en la forma de expresarnos con los mismos compañeros. y en cambio en el bachillerato ya el lenguaje de cada uno es diferente:	Como por ejemplo en la profesional las personas y los maestros son dif. Aquí en la profesional los muchachos tienen una conversación más amplia y te agrada como se expresan ya no son como en el bachillerato y hasta en la forma de dirigirse a los maestros. aunque eran mejor yo le hablaba de tú a los profesores y aquí no.
2. Sí, en la secundaria se dan términos más generales y en el nivel bachillerato se amplía + en términos técnicos o sinónimos eso es que implica un grado de dificultad, sin embargo no es mucha la diferencia en el siguiente lapso hacia el nivel profesional porque el lenguaje ya es conocido en su mayoría. En Biología no se da un término con su raíz griega en secundaria pero en Bachillerato sí, lo que implica que sabemos a lo que se refiere en el nivel superior así interpretándolo.	Matemáticas. Términos como \cdot , \Rightarrow , <i>etc.</i> que en secundaria no se utilizan mucho y posteriormente sí.
3. Sí. Debido a que cada vez adquirimos nuevos términos dentro de nuestro vocabulario. Un ejemplo de esto se refleja en asignaturas como matemáticas, física, química, etc. Al tratar de preguntar algo ya sea con el profesor o con algún compañero cómo ?cuál es el resultado de la colisión de X problema? O ?cuál es la fuerza de repulsión entre Y átomos? Son cosas que en la secundaria aun no se veían.	
4. Pues en la secundaria había más desorden que en bachillerato. Los maestros no eran tan objetivos como en el bachillerato	La mayoría de los maestros se preocupan más por dar la clase que por enseñar. Claro que hay excepciones. Las materias que se dan parecen sencillas al principio pero se complican más dependiendo del maestro que la imparte.
5. Sí porque conforme avanzan de la secundaria al nivel superior, vas aprendiendo o cultivándote.	Como por ejemplo en las palabras técnicas, del bachillerato al nivel superior dependiendo de, a lo que vas ha ser en adelante.
6.	En el bachillerato no se cuenta con una forma de pensar en cuanto a individuos responsables, todavía existe, una incongruencia del aprovechamiento escolar, cosa que no sucede en el nivel profesional. En el nivel profesional se cuenta con mayor carencia de material, instrumentación, áreas de estudio, una biblioteca adecuada, todo esto, contrario a lo que fue en el bachillerato ya que ahí sí existía todo lo anterior pero en el caso profesional de la UPIBI no.
7. En el nivel secundaria empezamos a dirigir nuestros objetivos de acuerdo a nuestras aptitudes. Para mí en el nivel bachillerato contamos con un objetivo ya planteado y en el cual empezamos a desarrollar, y en	y en el nivel profesional ya estamos realizando de manera formal lo que queremos lograr. De donde resumo que el lenguaje secundaria es reducido a ideas o ideales en donde no son complementados, creo que me hice bolas, la idea es que vamos adquiriendo nuevas experiencias para tener una perspectiva más amplia de nuestro alrededor.
8. Sí porque antes se pensaba de manera más inocente y ahora se piensan más las cosas, con más detenimiento, y cada vez se madura más.	Con respecto a las materias, antes se tardaban más explicando y lo hacían hasta que lo aprendieras y cada vez es menos y no les importa si hemos aprendido o no ellos (maestros) siguen el curso sin importarles, ya son más técnicos y no se detienen para ver si hay errores. Creo que es rara la vez que

	eres amigo de un maestro.
9. De la secundaria al bachillerato sí, por que se van empleando más palabras de acuerdo a la carrera que va uno a escoger	y en bachillerato al nivel profesional, va cambiando más el vocabulario de cada persona de acuerdo a su aprendizaje con el cual uno va a ejercer o también dependiendo de la persona.
10. En el lenguaje de la secundaria y el bachillerato, habían varios maestros q' decían unas palabras q' casi nadie entendía o q' teníamos algún significado diferente por lo regular en la clase de ESPANOL;	y del lenguaje del bachillerato al nivel profesional, hay un poco de diferencia ya q' hay maestros q' dicen palabras q' casi no se entienden o q' jamás las habíamos escuchado, por ejemplo en la clase de biología, hay muchas palabras extrañas q' no se su significado. o no le entiendo hasta saber bien de q' se trata.
11. Sí existen diferencias de lenguaje en los 3 Niveles debido la edad de los alumnos el programa de cada nivel y el objetivo de cada uno de estos por ejemplo en la secundaria se verán despejes, multiplicaciones, y algunas ecuaciones que nos servirán a nivel bachillerato para trigonometría, integrales, derivadas etc	En la superior se maneja un lenguaje más amplio de lo que se aprendió en el nivel bachillerato.
12. Ejemplo 1: Sec. y Bachillerato De la secundaria al Bachillerato hay una diferencia de lenguaje grandísima ya que en la secundaria se expresan contigo como si fueras todavía un niño, y en el bachillerato ya empiezan a tratarte como un adulto, los profesores expresan palabras del lenguaje que se usa en la calle como nomanche, buey, cabrón. Como que los maestros se quieren hacer muy amigos de los alumnos. Claro las groserías las dicen como bromeando pero en realidad este lenguaje es parte de nosotros.	Ejemplo 2: Bachillerato-Superior Los profesores de la superior ya te tratan como Lic. o algo por el estilo (Nos tratan con indiferencia)(algunos). Porque todos los maestros del Bachillerato se quieren llevar con uno por eso empiezan a decir groserías (no muchas aclaro) pero como que en realidad te quieren preparar para la vida. y en la superior no es distinto te tratan mal (algunos) co- si quisieran que reprobaras por eso usan un lenguaje mas filosófico.
13. yo considero que sí porque de la secundaria al nivel profesional. En la secundaria la forma de pensar era de más incógnitas y había mas opresión por parte del personal de aquel entonces (córtense el pelo, todos uniformados, no se salgan de sus clases) y en la vocacional. se fue dando un poco mas de libertad en cuanto al aspecto personal, pero ahí la forma de pensar se fue adaptando a manera de que adoptábamos mas responsabilidad en nuestro futuro. En la secundaria Se le tenía miedo al maestro, porque este podía decir sus sentencias y el alumno tenía que acatar sus ordenes. Ya a nivel vocacional el que se desconectaba del maestro reprobaba, porque ahí ya no se le obliga a escuchar su clase y la rebeldía resaltaba mucho en el salón de clases. De la sec. al bach. la diferencias es que en la Sec. nos digerían los temas para que los entendiéramos y en el bachillerato teníamos que aprender tal y como lo dice el libro. y la exigencia en la Sec. era mayor a comparación del bachillerato, que ahí estudia el que tiene ganas de aprender.	Del bach. al N. S. Debemos ponernos casi al nivel del profesor para entenderse con él, ser su amigo vaya, y nadie nos obliga a permanecer en el plantel como en el bach.
14. Sí, Pues la manera de expresar de las Personas de Modifica con el paso del tiempo a causa de los intereses que son comunes entre ellas La comunicación entre profesores y alumnos a medida que estos avanzan en un nivel intelectual se torna un Poco más compleja y Profunda.	
15. Sí, en la secundaria unos temas eran o los llamaban de diferente manera. En el bachillerato igual, pero aprendí un poco mejor.	
16. No respondio	
17. Sí, en la secundaria, llevaba las cosas más a juego sólo me medicaba a echar relajo., y en el bachillerato, empieza a tomar más conciencia de las cosas, empiezas a comprender que el estudiar sólo te sirve a ti mi lenguaje es más brutesco y muy pobre en comparación con el de mis profesores.	En el bachillerato aú n hechas un poco de relajo y aunque piensas que el estudio te sirve solo a ti, te dedicas a copiar, a sacar acordeones etc. no entiendes por ejemplo. La clase de Mate. En cambio en el nivel superior piempiezas ø y a madurar y Te pones a pensar en lo que hacías y lo

	que haces ahora y te das cuenta que tienes que estudiar para aprender, para toda la vida, no solo para pasar el examen, en esta etapa el lenguaje de tu prof. Es más abierto y más expresivo al menos así lo siento tal vez porque veo las cosas de diferente forma., o porque mi vocabulario es un poco mas amplio, y puedes entender mejor al profesor, y discutir algún tema de interés para ambos.
18. Definitivamente existen demasiadas diferencias, por las diferentes edades, nivel de educación, conocimientos adquiridos, etc. Uno de los principales ejemplos lo podemos encontrar en temas de sexualidad o cosas por el estilo, en la secundaria es muy pero muy escaso el lenguaje respecto a este tema,	al llegar al bachillerato cambia y es de una manera más abierta y ahora estando en nivel superior pues es a todo lo que es.
19. En la secundaria el nivel del lenguaje es mas sencillo sin tanto tecnicismo en la vocacional este lenguaje sube a más tecnicismos pero entendible	Conforme vayas avanzando a nivel superior este lenguaje cambia totalmente se vuelve más científico y más elocuente y elegante.
20. de la secundaria al bachillerato como de que meten nuevos términos, pero usa lomas claro posible no hay mucho problema.	Del bachillerato a UPIBI es un suicidio algunas veces son más específico pero no todos los maestros son así a veces es el programa q' abarque mayores conocimientos específicos pero en fin si cambia en especial cuando hay no l quiero decir malos maestros de física pero como de que no son como para su vocación.
21. Si considero que el lenguaje escolar,⇒ de acuerdo al nivel (escolar) va cambiando Ejemplos: P En la secundaria utilizan materiales didácticos con un lenguaje mas básico. Además emplean asignaturas que en ese nivel son generales, es decir, manejan materias básicas (generales); como O. Educativa, Historia General, Geografía (que es una de las asignaturas que en bachillerato es poco probable volver a cursarla), etc. Además en ese nivel es cuando los alumnos como adolescentes reciben una formación importante	P En el bachillerato, utilizan materiales didácticos con una información mucho más especializada; pero aun así con un lenguaje todavía entendible. P En el nivel profesional comienza a existir niveles de materiales didácticos, es decir, existen libros con un nivel especializado muy complejos. Pero también hay libros entendibles. Además la mentalidad, el lenguaje, entre otras cosas van cambiando.
22. Ejemplo 1: Secundaria [] Bachillerato Cuando vamos a un nivel superior y cambia el lenguaje común por más técnico en lo que se refiere a asignaturas Ejemplo 2: Secundaria [] Bachillerato Cuando nos mezclamos con diferentes tipos de sociedad dependiendo la educación familiar y del Profesorado.	Ejemplo 3: Bachillerato [] Nivel Superior Parece que aquí retrocedemos y nos comportamos como si estuviéramos a nivel secundaria, el profesorado es mas exigente. Ejemplo 4: Bachillerato [] Nivel Superior No se hace conciencia de la importancia del cambio y es difícil adaptarse a ese cambio; diferencia muy marcada del lenguaje a este nivel.
23. R. Sí, hay muchísimas. Ejemplo 1: Secundaria-Bachillerato. En la primera nos pintan todo como en la primaria de color de rosa, pero nos empiezan a decir jóvenes.	Mientras que en el Bachillerato, nos hablan como si quisieran confundirnos, esto es, todo lo distorsionan y nosotros debemos entender
24 R. Si existe diferencia entre los tres niveles pues algunos maestros de secundaria te empezaban a meter en los temas de impacto mundial como por ejemplo nos hablaban de las ideas que aportaron para malos gobernantes y querían influir sobre nosotros, el ejemplo Marx y Lenin, yo entendía que ellos eran un buen ejemplo y el maestro los mencionaba como malo para nuestros ideales.	En la prepa eran los de física, pensaban que sabíamos todos los conceptos y cuando nos pronunciaba palabras como aristotélicas, todos pensábamos en Aristóteles y ella en fisonomía humana un ejemplo con el que yo viví. En la superior ya no hubo tanto cambio pues la mayoría de ellas ya las habíamos aprendido en el ambiente escolar
25 No, no creo que haya diferencias, hay problemas de percepción en cada uno como alumno; pero el lenguaje es igual, solo cambian los tecnicismos de acuerdo a un área determinada	
26 R. Sí hay diferencias.	El nivel ba y la cantidad de información es-vele es mayor Sube la dificultad en la terminologías. Ejemplo Resolver un sistema de ecuaciones por

	eliminación yo lo conocía como suma y resta. Existen profesores que se sienten Dioses y hablan con pura terminología de su materia, y existen ocasiones en que no estamos en la misma frecuencia los alumnos con el profesor
27 De la Secundaria y el Bachillerato. No lo creo por que las clases, la temática y los temas son casi los mismos y claro a parte de que el Bachiller es un nivel arriba, siento yo que el mensaje de los prof. Hacia el alumno son en la secundaria más estrictos y en el Bachiller ya son mas liberales (Claro que se tendría que observar la diferencia entre escuelas de “paga” con las del “gobierno”)	Del Bachiller con el nivel profesional. Yo haría una comparación casi similar a la de la sec-Bachiller y es que todos estos niveles van agarrados de la mano, aquí encontraría ya como el cambio de la transición del alumno, el momento en donde el alumno ya tiene que pensar, hacer, sus cosas con responsabilidad y mas concientes de los actos que realizamos dentro y fuera de la institución académica.
28 Secundaria-Bachillerato R. Si 1. En la Secundaria el lenguaje que utilizas, es general, al igual que el conocimiento, en el bachillerato, el lenguaje de expresión en las diferentes materias sigue siendo general, pero se profundiza más en el conocimiento	Bachillerato-Nivel Profe. R. No 2. En el nivel profesional tu conocimiento es más particular, ejemplo- el lenguaje de un químico
29 Si hay diferencia de lenguaje del nivel secundaria al bachillerato Ejemplo de la secundaria a bachi: 1° cambia el tipo de expresión 2° cambia el tipo de comportamiento	y del bachillerato al nivel profesional también. Bach a prof. 1° cambia la forma de comunicarse siendo más expresivos y la forma de razonar algunas cosas. 2° Cambia su léxico a uno no tan florido, sino expresivo

En consecuencia, interesa examinar el momento y las condiciones culturales en que se instaura el horizonte racional que lo formuló, pues éste evidencia un determinado tipo de direccionamiento que influye en la concepción y el entender respecto a lo que debía ser un problema matemático, una solución o un conjunto de problemas, que requerían conocimientos matemáticos concretos y determinados, pero que al transitar de un horizonte a otro, no sólo se modifican los sentidos y los direccionamientos racionales, sino que, en la pretensión de elevarlos epistémicamente con el sentido de exhibir progreso y avance, no sólo no lo logra sino que incluso los desvía.

En este contexto geohistórico, entender la solución implica considerarla en un contexto más pragmático que el actual, incluso que el que se está contrastando —siglo XVIII— como se pudo analizar (sección II.5 Desvinculación entre los lenguajes y la sección II.7 El trabajo quedaría inconcluso), (ver adelante, págs, final de 198, 199 y 200 conjunto de respuestas), en el cual el problema específico se resuelve mediante un conjunto determinado de operaciones, con una cierta secuencia, en un contexto concreto, a través de procedimientos numéricos específicos, no expresados necesariamente en lenguaje algebraico.

En lo antes citado se pueden visualizar varios entrecruzamientos o momentos y puntos de tránsito que han dejado huella en las personas que aprenden, por ejemplo: en el empleo de un lenguaje de uso como recurso epistémico para enfrentar los problemas matemáticos; en la necesidad de expresar el tránsito de lo que es la solución que dejó como horizonte epistémico y el sentido nuevo que adquirió con el cambio de horizonte racional, mediado, éste, por las exigencias y la dirección de las mismas al momento de trabajar con el concepto.

Al respecto, a la pregunta ¿qué es la solución para ti?, presentada a los estudiantes de Upibi, con el propósito de que explicitaran los entendimientos y concepciones que tienen sobre la solución —ver Anexo 2. Instrumento de exploración, primera parte—, se incluye una pregunta con la finalidad de detectar estos entrecruzamientos señalados líneas arriba, a través de respuestas libres.

En suma, las respuestas proporcionadas se podían agrupar en tres grandes bloques: 1) las que refieren la idea de que es la respuesta a un problema, 2) las que señalan que es resolver un problema, y 3) respuestas diversas, las cuales están señaladas con rojo, azul y verde respectivamente, a continuación:

III.1.3.2 ¿Qué es solución para ti? (grupo 2)

- Es resolver un problema
- La alternativa a encontrar respuestas a las dificultades
- Es resolver algo que se te plantea p ej. Un problema
- Es dar una respuesta correcta precisa y fácil de entender para un determinado problema
- La contestación a un problema de cualquier área
- Es encontrar una respuesta a un problema
- Es dar respuesta a una determinada situación
- Es aquello donde das una respuesta correcta por lo que se desea hacer
- Quiere decir que un problema se resuelve
- Dar posibles opciones para llegar a un fin específico
- Tener una respuesta o buscar una salida// tener un problema
- Es encontrar una respuesta adecuada basada en un método a seguir o secuencia
- Es resolver un problema
- Dar una encontrar una respuesta a un problema•Es encontrar una respuesta que te ayude a resolver una duda o problema
- Acabar con el problema
- Es estructurar un problema
- Es resolver o llegar al fondo de alguna cosa, problema
- Dar respuesta a un problema determinado
- Es una respuesta a un problema
- Es la respuesta a un problema, una duda o una incógnita que se tenga
- Es resolver lo que sea, cualquier problema
- Encontrar el remedio a un problema
- Es encontrar alternativas para resolver algún problema
- Es llegar a un punto en donde las preguntas o problemas,..., se puedan resolver
- Dar alternativas u opciones claras para resolver problemas o situaciones
- Es el complemento de un problema// solución de un problema
- Es una respuesta a algo
- Es realizar algún problema matemático sin “dificultades”

Estas respuestas permitieron reflexionar y distinguir los entrecruzamientos señalados, al aplicar una herramienta analítica que indicaba los cambios y movimientos de horizontes de racionalidad, producto de la visión de una

geopolítica del conocimiento —ver Guadarrama, 2002, la cual marcaba al siglo XVIII como un momento determinante en esta descripción histórica, y de igual forma, los inicios del siglo XIX, como promotor de otros cambios, gracias a la racionalidad/modernidad instalada, en su idea de exhibir progreso y avance epistémico, el cual también representó un desplazamiento de las formas epistémicas previas.

Estos cambios tuvieron implicaciones no sólo en las prácticas sociales del enunciar, del decir, del hacer, llamadas *prácticas de discursividad*, sino también en los aspectos teóricos, tales como la comprensión, en donde la generalización y la abstracción requerían estructurarse y formalizarse. Aunque en este momento interesa señalar sólo las prácticas de discursividad que dan cuenta de las proyecciones epistémicas de uno y de otro horizonte racional formulado, cuyas respuestas son la mejor evidencia de ciertos momentos y puntos de transición del cambio de la razón entre un horizonte racional y otro ubicado temporal y espacialmente distante a él.

Organizándose las respuestas en tres bloques fundamentalmente, obteniendo,

Primer bloque: Es una respuesta a un problema o que refieren a ello (13), de un total de 29:

- **Alternativas** a encontrar, ..., a las dificultades,
- **correcta** precisa y fácil de entender para un determinado,
- **encontrar una,**
- **a una** determinada situación,
- **Es** aquello donde das,... correcta por lo que se desea hacer,
- **o buscar** una salida// tener un problema,
- **encontrar**,... adecuada basada en un método a seguir o secuencia,
- **que** te ayude a resolver una duda o,
- **una** duda o una incógnita que se tenga,
- **a algo**

Segundo bloque: Es resolver un problema o que refieren a ello (9) de un total de 29:

- **es** decir, tenemos que razonar el problema y pensar a proponer una resolución. Una..., serie de pasos para dar explicación a un fenómeno físico, para tener una solución debe de haber un problema ya antes planteado,
- **Es** encontrar la manera con la que alguien o algunas personas, pueden liberarse o librarse de un obstáculo o de algún desacuerdo y quedar conforme con la resolución de ese obstáculo, • **es** una palabra pero, que encierra o engloba muchas cosas, todo eso lo haces para encontrar lo adecuado, aunque muchas veces no encuentras eso que te satisface, pero es lo que obtuviste por diferentes pasos que realizas llevando un método, • **Tal** vez no sea tan correcta pero es como una o varias ayudas que utilizaras de manera sencilla para darle seguridad a un conflicto cual sea,
- **pero** con la diferencia de que debe ser una respuesta correcta a la indicada; pero eso no impide de que también llegue a existir una solución incorrecta y en este

momento la solución cambia a una respuesta incorrecta y deja de ser solución. // Es lo acertado a responder preguntas, problemas, de todo tipo.

Los tres bloques de respuestas: • Es una respuesta a un problema o que refieren a ello (13), •Es resolver un problema o que refieren a ello (9), •Diversas respuestas (7), quedan agrupados como sigue: Ahora bien fijando la atención en los dos primeros bloques: 1) Es resolver un problema o que refieren a ello (9), 2) Es una respuesta a un problema o que refieren a ello (13):

<p>La alternativa a encontrar respuestas a las dificultades Es dar una respuesta correcta precisa y fácil de entender para un determinado problema Es encontrar una respuesta a un problema Es dar respuesta a una determinada situación Es aquello donde das una respuesta correcta por lo que se desea hacer Tener una respuesta o buscar una salida// tener un problema Es encontrar una respuesta adecuada basada en un método a seguir o secuencia Dar una encontrar una respuesta a un problema Es encontrar una respuesta que te ayude a resolver una duda o problema Dar respuesta a un problema determinado Es una respuesta a un problema Es la respuesta a un problema, una duda o una incógnita que se tenga Es una respuesta a algo</p>	<p>La contestación a un problema de cualquier área Dar posibles opciones para llegar a un fin específico Acabar con el problema Es estructurar un problema Encontrar el remedio a un problema Es el complemento de un problema// solución de un problema Es realizar algún problema matemático sin “dificultades”</p>
	<p>Es resolver un problema Es resolver algo que se te plantea p ej. Un problema Quiere decir que un problema se resuelve Es resolver un problema Es resolver o llegar al fondo de alguna cosa, problema Es resolver lo que sea, cualquier problema Es encontrar alternativas para resolver algún problema Es llegar a un punto en donde las preguntas o problemas ,..., se puedan resolver Dar alternativas u opciones claras para resolver problemas o situaciones</p>

es decir, tenemos que razonar el problema y pensar a proponer una resolución. Una..., serie de pasos para dar explicación a un fenómeno físico, para tener una solución debe de haber un problema ya antes planteado,

Es encontrar la manera con la que alguien o algunas personas, pueden liberarse o librarse de un obstáculo o de algún desacuerdo y quedar conforme con la resolución de ese obstáculo,

es una palabra pero, que encierra o engloba muchas cosas, todo eso lo haces para encontrar lo adecuado, aunque muchas veces no encuentras eso que te satisface, pero es lo que obtuviste por diferentes pasos que realizas llevando un método,

Tal vez no sea tan correcta pero es como una o varias ayudas que utilizaras de manera sencilla para darle seguridad a un conflicto cual sea,

pero con la diferencia de que debe ser una respuesta correcta a la indicada; pero eso no impide de que también llegue a existir una solución incorrecta y en este momento la solución cambia a una respuesta incorrecta y deja de ser solución. // Es lo acertado a responder preguntas, problemas, de todo tipo.

Alternativas a encontrar, ..., a las dificultades, **correcta** precisa y fácil de entender para un determinado, **encontrar una, a una** determinada situación, **Es** aquello donde das,... correcta por lo que se desea hacer, **o buscar** una salida// tener un problema, **encontrar** ,... adecuada basada en un método a seguir o secuencia, **que** te ayude a resolver una duda o, **una** duda o una incógnita que se tenga, **a** algo

Cabe señalar que las respuestas de los demás grupos, en torno a las concepciones y entendimientos respecto a la solución, son similares a las mostradas hasta aquí, en las cuales se expresa la proyección epistémica del momento de transición entre un horizonte racional y otro que se propuso alcanzar la razón pura.

Asimismo, estas respuestas se contrastaron con una definición formulada a principios del siglo pasado (un texto escolar de 1900, el cual era usado en el *Curso completo de aritmética superior*), antecedente que expresa una enunciación previa del horizonte racional, y, desde luego, la influencia de cómo se enunciaba en la enseñanza de las matemáticas. A continuación se muestra la definición enunciada en el horizonte de racionalidad anterior (1900), con el propósito de identificar los entrecruzamientos o desplazamientos epistémicos que se producen en las personas al momento de trabajar con la solución.

Definición: “Se llama solución en un problema la serie de razonamientos y operaciones que hacen para llegar a obtener el valor de la incógnita” (Hernández, J.,1900: 17)

Como ya se dijo, la solución de un problema consta de tres partes: 1) el razonamiento, que consiste en indicar por medio de proposiciones claras las diversas relaciones que existen entre los datos del problema y la incógnita; 2) el planteo, que consiste en colocar por escrito, de la mejor manera posible, las relaciones establecidas por el razonamiento; 3) la ejecución de operaciones, que consiste en aplicar las reglas más sencillas para resolver con facilidad las operaciones indicadas en el planteo.

Entre las respuestas que dan los estudiantes y la definición, hay una diferencia sustancial, lo que era de esperarse, no tanto por que la definición apela a un corte temporal distinto al de los estudiantes, sino por que expresa cambios conceptuales en relación con el concepto de solución, y, desde luego, de los entendimientos y concepciones de personas distanciadas en el tiempo y en el espacio.

Sin embargo, esta posible diferencia no es tal si se considera lo expresado por los estudiantes, pues es un entendimiento y una concepción relacionada a la definición de solución creada por el otro horizonte racional, hoy una tendencia marcada en la enseñanza de las matemáticas, conocida, en general, como *resolución de problemas*.

Dicha definición, cuando enfatiza la idea de resolver un problema, coincide con uno de los bloques de respuesta por parte de los estudiantes, las de color azul; y cuando lo hace sobre el contenido de lo que expresan, se coloca en una cercanía conceptual con el bloque de respuestas en rojo, es decir, en sus respuestas exhiben bastante bien el tránsito entre un horizonte de racionabilidad y otro.

No obstante, en otros estudiantes del nivel superior la concepción evidencia las exigencias de la racionalidad/modernidad, desde la condición en que se encuentran ubicados para dar cuenta, de paso, de su ontologización (acción de separar), al considerar: “La solución, en este caso para mi clase de matemáticas, es en estudiar al 100%, dedicarme más, y pensar que lo que yo haga me sirve a

mí y a nadie más que el triunfo y el éxito depende de uno mismo, no de los profesores”.

III.1.3.3 Descripción de las actividades realizadas por los alumnos (grupo 1)

Actividad. Resuelve la ecuación: $5x+3y-3=0$

Tiene una, varias o ninguna solución

Cuando se enfrentaron a la indicación para resolver la ecuación $5x+3y-3=0$, los aspectos que efectuaron respecto al obtener la solución, fueron los siguientes:

Grupo 1	
<p>* Despeja las dos incógnitas / escribe: no sabe, no le salen, no le gustan</p> <p>* Despeja x en términos de y, después aplica la fórmula de 2º grado, obtiene dos valores / tiene varias</p> <p>* Prueba un par de valores ($x=0, y=1$) quedándose en $0+3-3=0$, despeja x y y sustituye en la ecuación, obtiene 0 en ambas, ($3-3=0, -3y+3+3y-3=0$) / aparentemente 2 soluciones concuerdan con el resultado</p> <p>* Despeja x y sustituye en la ecuación, obtiene $0=0$ / Tiene varias formas de solución o resolver.</p> <p>* Asigna valor $y=1$ y obtiene un valor para $x=0$ / Tiene varias (como yo opino), depende de los valores ... para llegar a la solución</p> <p>* Despeja y le da valores a x, construye una tabla, comprueba con la primera pareja $x=-3; y=6$ / (no indica)</p> <p>* Despeja x, sustituye en la ecuación, quedándose $-3y+3y=-3+3$, me da cero, despeja y y sustituye /es la única solución o tiene varias, o ninguna</p> <p>* Despeja x, sustituye, y encuentra $0=0$, despeja y, cancela en $y=3-5x/3; y=-5x$, sustituye nuevamente en la ecuación, obtiene el valor $x=3/-10$, lo reemplaza, y obtiene $y=1.5$ / tiene diferentes métodos de solución y es la única</p> <p>* Aplica la fórmula de 2º grado (obtiene valores) / tiene una más o sea 2 soluciones</p> <p>* Aplica la fórmula de 2º grado obtiene dos valores / tiene 2 soluciones</p> <p>* Despeja incorrectamente y. Despeja nuevamente y y sustituye en la ecuación, obtiene $0=0$, despeja x, sustituye, obtiene $0=0$ emplea el despeje de x, sustituyendo en y despejado, obteniendo $15=14y$ / no tiene ninguna solución</p> <p>* Despeja y, sustituye, y obtiene $0=0$, por otro lado asigna $x=0$, y obtiene $y=1$, intenta con $x=0$, desiste, indica solución $y=1, x=0$ / tiene varias soluciones (2)</p> <p>* Escribe la fórmula de 2º grado, despeja x, transpone la igualdad, dice no sé / sé que tiene más soluciones, pero no las conozco ahora</p> <p>* Considera $x=0, y=1$ (no explica de dónde o cómo) los sustituye $0+3(1)-3=0$/ tiene varias</p> <p>* Aplica la fórmula de ecuaciones de 2º grado, determina dos valores, indicando que hay otras soluciones. Considera el valor -3 para x, reemplaza y obtiene $y=6$ comprueba obteniendo $0=0$ y a esto le llama: Esto es otra forma como pensé / Sí, tiene varias soluciones</p>	<p>* No resuelve, ni hace nada / (pero) tiene una solución</p> <p>*Le asigna valores a x y $y, x=2, y=6$ le queda $25=0$ trata de despejar x / No sé, puede tener varias, pero no sé cuáles</p> <p>*Despeja x y y, sustituye en la ecuación el despeje de x, obtiene $0=0$ sustituye y en la ecuación y obtiene $0=0$ / Sólo son dos soluciones</p> <p>*Despeja x, despeja y, trata de relacionarlas / tiene varias soluciones</p> <p>* No resuelve nada, ni hace nada/ (sin embargo escribe) ninguna</p> <p>*Despeja x y y / Ni siquiera pude llegar a la solución <u>ninguna</u> (para mi criterio)</p> <p>*Ensayo con la fórmula de 2º grado, e indica: Esto no vale, no es cuadrática, después despeja y, despeja x, sustituye y en la ecuación, obtiene $x=-3/10$ / Tiene una solución con $x=-3/10, y=45/30$ los sustituye (para comprobar), encuentra el valor de y y puntualiza con ?</p> <p>*Despeja x, sustituye, obtiene $0=0$, despeja y, sustituye nuevamente obteniendo $0=0$ y escribe: Es la <u>única</u> respuesta</p> <p>*Despeja x, sustituye, obtiene $0=0$, le asigna a $x=0$ sustituye y obtiene $y=1$ los reemplaza en la ecuación, obteniendo $+3-3=0$ ($x=0, y=1$) / tiene varias, le da otro valor a $x, x=3$, y obtiene $y=4$, sustituye, obteniendo $0=0$, escribe: tiene muchas resultantes</p> <p>*Despeja x, sustituye, obtiene $0=0$ / Debe tener varias soluciones pero al encontrar una, es suficiente</p> <p>*Despeja y sustituye x, quedándole $3-3y+3y-3=0$ tacha todo, despeja y y lo sustituye quedándole $15x+9-15x=0$, tacha los términos semejantes y efectúa nuevamente las operaciones quedando $9=9$. Considera el despeje de x, reemplaza y obtiene $3=3$ / tiene no tiene tiene varias tiene varias no tiene solución (la mera verdad quien sabe si se nota no me salió)</p> <p>*Emplea la fórmula de 2º grado, obtiene dos valores / retoma la ecuación, despeja x, despeja y, y escribe: <u>No sé</u></p> <p>*Da los valores $x=3, y=-4$ (no dice cómo los obtuvo), sustituye ambos y obtiene $3=3$ / tiene varias</p> <p>*Aplica la fórmula de 2º grado, no termina / tiene más soluciones Sí</p>

Este instrumento de exploración, en su primera parte, también tenía como propósito obtener un conjunto de evidencias que además de que explicitaran aquellas que propiamente las personas identifican sobre las dificultades de sus entendimientos y concepciones, corroboraran, si es que lo aludían, lo relativo a la solución, su interpretación, la asociación geométrica que hicieran, las ideas que asociaban y los contextos que tomaban en cuenta.

De igual forma, era de interés rescatar en esta indagación su expresión, pues ésta apela directamente al estado en que se encuentra el lenguaje de uso y la separación que guardase con respecto al lenguaje formal y estructurado que se maneja en el salón, en la escuela, en los textos, en el contexto escolar, etcétera. Con este fin, se buscó que explicitaran sus dificultades. Al respecto, señalaron:

III.1.3.4 ¿Qué dificultades tuviste? Especifica (grupo 2)

1. En las rectas, en los ejemplos de lenguajes.
2. La principal dificultad es saber sin calcular nada si pueden tener solución.
3. En determinar si tienen solución las gráficas
4. Que no soy bueno para dar explicaciones o conceptos largos de las cosas.
5. a) En la ecuación ya que no había un sistema de ecuaciones y lo resolví como función.
b) En las rectas no sabía si más de una solución era el número infinito.
6. En la resolución de la ecuación, no se si este bien el método por el cual la resolví. En las gráficas es en donde siento que no estoy bien porque son temas de geometría analítica y la verdad ya no me acuerdo.
7. Nunca he habido graficar y no entiendo las gráficas no se distinguir entre cual tiene solución y como visualizarlo, lo siento.
8. Medio difícil y Medio Fácil. Por q' habían o hay preguntas donde no se ni que se tenía q' hacer
9. Que no se si las rectas se podían prolongar, si se pueden prolongar todas tienen solución. y no se o que se refiere a sistemas de rectas porque cada recta tiene solución.
10. Para empezar que no conozco bien como interpretar una gráfica como estas, luego que no hubo ecuación para determinar la solución y otra más ¿cómo se define un sistema asociado?
11. Un poco en las preguntas de que era solución y resolver pero creo que si lo hice correctamente.
12. Ninguna ya q' asocie los problemas con lo que he aprendido.
13. en los últimos 2 problemas. Ya q' tarde en acordarme y espero haberlo hecho bien.
14. bueno primero que nada Estuvo algo sencillo pero aun así Estuvo pesado son preguntas específicas pero los problemas estuvieron distorsionados
15. No entendí muy bien el ejercicio, a lo que entendí es si se iban a intersectar en un punto dado las rectas.
16. la verdad es que no entendí muy bien el ejercicio. y por eso no supe como resolverlo.
17. La verdad Ya no recuerdo muy bien como sacar las ecuaciones de las rectas para así obtener su solución pues falte a algunas clases donde se explicó esto
18. al identificar el punto de la solución.
19. La dificultad estuvo en que no me acordaba como se resuelven ese tipo de problemas, además de que no entendí lo que planteaba la pregunta y a que tipo de solución se refería en el segundo caso.
20. El ejercicio de las rectas. y ejemplos del lenguaje
21. No sé que solución debe tener un sistema de rectas por lo tanto no supe que buscar para saber si había solución o no.

22. *Posiblemente al momento de ver la pregunta, o en su caso ver la ecuación, pero solo necesitaba visualizarla, entenderla, asimilarla, después pensar en las posibles respuestas que podrían ser demasiadas, y elegir la opción correcta pero tuve o me detuve más tiempo en la ecuación.
23. (No la contestó)
24. Bueno en primero no entendí la pregunta. Pero finalmente llegue a la conclusión que todas podrían tener solución a lo mejor no matemática. Pero deben de tener solución de alguna manera y para asociarlas a todas debe de haber un punto donde se unan todas las (líneas) líneas.
25. CREO, ERA EL HECHO DE QUE TENIA SUEÑO Y ME SENTIA UN POCO AGOTADO, PERO FUERA DE ESO NINGUNA, BUENO SI COMO NO DESAYUNE, Y CUANDO TENGO HAMBRE ME CUESTA TRABAJAR CONCENTRARME.
26. EN PRIMERA INSTANCIA, NO ENTENDÍ LAS INSTRUCCIONES PROPORCIONADAS. DESPUÉS SE ME DIFICULTÓ RESOLVERLA SIN DIMENSIONES.
27. Bueno en los 2 últimos problemas por que, ahora me duele bastante la cabeza y la verdad no pensé cuál era la solución, supongo que no rindo lo suficiente.
28. La FALTA DE INFORMACIÓN. X QUE EN ALGUNAS DEPENDIENDO DE La FUNCIÓN, PUEDEN SER X EJEMPLO EN X o EN Y INFINITAS O NO, Y ESO ME CONFUNDIO AQUÍ.
29. Bueno para comenzar diré que realmente no se nada o no entendí nada y aunque pude copiar, preferí no hacerlo así que espero mejor repasar a ver si entiendo algo.
30. No son dificultades sino dudar creo que me tengo que poner a estudiar más de lo anterior, y visto en clase,

III.1.4 Con un grupo de estudiantes de educación básica (una comunidad)

A pesar de haberseles formulado de manera inadecuada algunas preguntas en su clase de matemáticas del nivel básico, ellos construyeron y proporcionaron la solución mediante sus complejos sistemas socioculturales, con los que efectúan sus actividades cotidianas. Asimismo, el lenguaje que emplearon fue el que los identifica étnicamente, es decir, hicieron la operación mental, al trabajar las preguntas e indicaciones, en su lengua (*diidxazáa*), a través de la cual crearon y recrearon la solución en un contexto sociocultural, no escolar, para hallar la solución a un problema escolar y del salón de clases, si bien la solución la expresaron en una apropiación lingual del castellano al zapoteco.

A continuación se presenta el reporte de la investigación: “La dimensión sociocultural en la conformación de sistemas conceptuales «Sistemas conceptuales en los saberes matemáticos»”

El proyecto de trabajo tuvo por objetivo precisar rutas³ y mecanismos que intervienen en las formas de conocer y de expresarse socioculturalmente (Identidad, cultura, discurso) que permiten explicar cambios respecto de su manera de entender el concepto matemático de solución. El reporte presenta parte del proceso de construcción del concepto de solución mediado por componentes de la dimensión sociocultural, cambios que experimenta en el paso de diferentes niveles educativos: primaria, secundaria, bachillerato y superior considerando las dimensiones de análisis de la Socioepistemología.

³ Se considera como rutas al conjunto de explicaciones y argumentos que marcan tendencias de explicación en relación a un tema, o a un concepto, que tienen un propósito específico, por ejemplo, resolver un conjunto de cuestiones.

De los antecedentes. En una investigación reciente (Guadarrama, 2000), se estudiaron las interpretaciones que hacían los docentes de matemáticas del nivel superior en relación con la representación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Dicho estudio, se realizó mediante el auxilio de entrevistas semiestructuradas. Centró la atención en el concepto de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 , que partían de la representación gráfica, y discutía con los docentes sobre el significado de las distintas formas de intersecciones posibles. Los docentes participantes se seleccionaron a partir de características específicas: desempeñarse profesionalmente en la enseñanza de la matemática en el nivel superior, haber impartido o que estuvieran impartiendo la asignatura de Álgebra Lineal, y estar dispuestos a colaborar en esta experiencia. De este modo, la selección fue de seis profesores, cinco hombres y una mujer, que laboraban en una institución de educación superior del estado de Hidalgo. La hipótesis de partida del estudio señalaba que los profesores, a pesar de que enseñaran el tema a sus alumnos, tendrían dificultades en interpretar situaciones que no eran típicamente tratadas en los textos escolares ni en las currícula respectivas. Esto es, se sabía que la enseñanza tradicional de tales temas, suele centrar más la atención en los algoritmos que en las interpretaciones y los significados. Previo al trabajo señalado, se desarrollaron investigaciones puntuales de especialidad que facilitaron información sobre la pertinencia de la hipótesis. Estas investigaciones fueron incorporadas al estudio, pues mostraban características geométricas interesantes en relación con el objetivo de partida. A partir de ellas se inició la delimitación teórica de la problemática. Estas investigaciones reportadas recientemente eran los únicos estudios en la temática, usaban el mismo marco teórico que pretendíamos en el trabajo, y proporcionaban un conjunto de datos preliminares que servirían de base al mismo. También mostraban las situaciones elegidas para aplicarse en la investigación y las eventuales dificultades que tendrían los partícipes del sistema didáctico al pasar de un modo de pensamiento a otro, vía sus representaciones, en particular las que tenían que ver con las de tipo gráfico y que elaboraban en los procesos de argumentación o de entendimiento en Álgebra Lineal. La investigación mostró el estado en que se encuentran los entendimientos de alumnos de bachillerato y profesores del nivel superior al accionar diferentes modos de pensamiento. El análisis de la información se esperaba que arrojara variaciones en la percepción de los objetos matemáticos, —entre los sujetos de niveles de educación diferentes del sistema sociocultural⁴—, como un proceso que actúa y depura sus elementos, el caso del concepto “solución en sistemas de ecuaciones”, pero no resultó así, y a pesar de que transitan de un nivel educativo a otro, éstos actúan usando lo que Guadarrama (2000) define en un uso de la permanencia de su pensamiento relativo a la noción y al concepto de solución.

Problemática. Al considerar la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales en el ámbito de su representación gráfica, los participantes señalaron a la solución como la intersección dos a dos de los planos. Lo que se podría pensar contradictorio respecto a lo que se considera la representación gráfica de la

⁴ Como es el caso del sistema educativo nacional, como esperaríamos que pasara de manera intuitiva.

solución, aquella como el punto donde convergen tres planos, no resultando así entre los entrevistados. De lo que surge una primera orientación: la importancia de las prácticas sociales y culturales de los sujetos del sistema didáctico como factores que posibilitan la comprensión o no de las concepciones que se crean en el ámbito educativo en torno a este concepto; y, la segunda orientación, más general, señala el estado que guardan las concepciones inherentes al concepto de solución que los profesores manejan. ¿Por qué ocurre esto en el sistema didáctico?, ¿cómo ocurre esta relativa modificación en el entendimiento de lo que es la solución?, y de forma general, ¿cómo se construye socialmente la noción de solución al transitar en diferentes niveles del sistema didáctico?

Explicar lo anterior, hace necesario un nivel superior de articulación, dado que los procesos de formación y enseñanza, así como de aprendizaje, reflejan los aspectos culturales y lingüísticos a través de los cuales se manifiesta socialmente la problemática. Interpretación ésta concordante con la aproximación socioepistemológica, que incorpora a los elementos de análisis: la dimensión didáctica, cognitiva, epistemológica, y sociocultural, en la que estos componentes (cultura, lenguaje e identidad), podrían caracterizar y aproximarse a la realidad sociocultural de la problemática y de la investigación.

Marco teórico. Cantoral y Farfán (1999) establecen relación con la problemática de la Matemática Educativa, que la evolución de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente en ámbitos no escolares se introducen al sistema de enseñanza, conlleva una serie de modificaciones que afectan de manera directa tanto su estructura como su funcionalidad; y considerablemente las relaciones establecidas entre estudiantes y profesores.

Cantoral a la vez señala:

Las nociones y los procedimientos que se enseñan tienen ciclos de vida y cambian a la par que evolucionan las comunidades humanas. Estos cambios de naturaleza social nos dan la pauta para entender el funcionamiento de la construcción del conocimiento y de su difusión institucional.

Con esto se aproxima a tratar de esclarecer la función social de la construcción del conocimiento, en la que “La producción del conocimiento es cultural y evoluciona de acuerdo con la dinámica de las estructuras sociales de la época” (Cantoral, 2000). Lo que establece la necesidad de entender el funcionamiento del sistema didáctico, y a partir de él proponer aspectos que mejoren el funcionamiento del sistema educativo.

Para ello, es necesario considerar el lugar donde se ubica y el papel que juega la dimensión sociocultural en la aproximación socioepistemológica, pues ésta proveerá las coordenadas teóricas metodológicas, de la investigación lo que plantea una condición necesaria: explicar las leyes que gobiernan dichos procesos, con el propósito de mejorar el entendimiento de los mecanismos idóneos de su apropiación, y favorecer la formación de mejores ingenieros, científicos y profesores (Cantoral, 2000).

Cantoral (2000) también indica: “desde nuestra perspectiva el conocimiento debe aparecer como una necesidad de quien aprende. Enseñar

entonces debe entenderse como el propiciar las condiciones para que surja la necesidad del conocimiento”, porque se observan procesos que desnaturalizan, transponen, y desapropian los conocimientos, presuponiendo su mejoramiento, enriquecimiento y generalización en sistemas socioculturales donde los procesos identitarios son laxos, o no muestran tendencias hacia la identidad, llevando a otras consecuencias, que se ubican en dos ámbitos de problematización, y que tienen un débil contacto, sobre todo al considerar factores como la colonialidad del saber, pues no remite a su simple penetración sino que, como proceso que avanza, lo eleva en dominante y hegemónico, provocando:

1) Resistencia a su penetración, porque no es clara la relación que separa lo propio de lo extraño. Tappan (1992) va más lejos al considerar que la identidad no es algo que surja de manera espontánea, es una construcción sociocultural (patrón), que a su vez es resultado de un sinnúmero de procesos identificatorios y diferenciatorios, donde básicamente se delimitan imaginariamente dos territorios: “lo propio” y “lo ajeno”; “lo semejante” *versus* “lo diferente”; “el nosotros” frente “al ustedes”; “lo mío y lo nuestro” *versus* “lo tuyo y lo de ustedes”. Como dice Cardoso, la identidad es un “precipitado”, una pluralidad de identificaciones. Dando elementos, a partir de esta resistencia, para su cuestionamiento, entre otros: ¿cómo y para qué sirven estos conocimientos?

2) En contraposición al inciso 1, su aceptación, es decir, no importa de dónde venga, es un conocimiento universal, y, por tanto, posible su mejoramiento, en este ámbito se ubican la mayoría de los grupos de investigación y su producción.

Hasta hace poco en la enseñanza de la matemática esto no tenía sentido; sin embargo, la consideración abre la puerta a la comprensión de otro tipo de fenómenos, al conocimiento de entes, procesos sociales y culturales que permiten ver estructuras mentales y conceptuales que conllevan procesos abstractos de la matemática, y que arriban a la organización y estructuración del pensamiento avanzado. Por lo que los trabajos de Cantoral (1990, 1995, 2000), y de Farfán (1993, 1995, 1997), son la línea a seguir en el entendimiento de la construcción de los conceptos matemáticos en esta área, ya que marcan los senderos del pensamiento matemático avanzado, y parten de la postura socioepistemológica mencionada.

Metodología. Este trabajo se encuentra en un primer acercamiento al estudio de los sistemas socioculturales mediante la interacción social, la cual además de los procesos socioculturales, da cuenta del carácter epistémico en que se ubica la problemática. Por ejemplo, ante una situación problemática de la enseñanza de las matemáticas, formulada en castellano, sobre cómo conciben la solución en la clase, los alumnos de una escuela primaria en Juchitán, Oaxaca, resolvieron la problemática haciendo uso de su lengua, el zapoteco (*diidxazáa*, en su habla), así la solución y por tanto la construcción social de la solución, estuvo mediada por elementos simbólicos de su contexto cultural, lo que les permitió, desde el ámbito epistemológico, superar dicho obstáculo, y resolver la problemática. Para recuperar esta información se recurrió a registros de corte etnográfico.

Dos situaciones registradas. En una escuela primaria de la ciudad de Juchitán, Oaxaca, en donde los alumnos se desenvuelven en su cotidianidad e interactúan, a través de su lengua materna —el zapoteco, *diidxazáa*—, se presentan las siguientes constituciones áulicas.

Primera. En uno de los momentos de la clase de matemáticas, del tercer grado, la maestra está trabajando con sus alumnos los números decimales. Ella establece la pregunta, “¿cuánto es?” y escribe 43.01, tratando con este ejemplo de que los alumnos digan 43 enteros 1 centésimo, si bien, los alumnos no contestan. Vuelve a preguntar, “¿cuánto es?...” hay un momento de silencio, vuelve a preguntar. Su interés es que reconozcan la función del punto decimal, es decir, que dependiendo de su posición u otra característica como puede ser la cantidad de ceros después del punto decimal, describan el número de que se trata, donde además la repetición o el reconocimiento en secuencias de números los lleve a inspeccionar la característica completa de dicho número, es decir, deduzcan ellos la regla: “dependiendo de la posición del punto decimal en la expresión, será la cantidad de enteros” y, además, observen la cantidad de ceros después del punto decimal para señalar la cantidad de décimos, centésimos, unidades de millar, etc, que contengan los números expresados en su forma decimal.

Más adelante, les presenta la misma cifra, 43.001, y hace la misma pregunta “¿cuánto es esto?, ¿cuánto hay aquí?, ¿qué número es éste?”. Sin embargo, no hay respuesta, pues en ellos la pregunta aún carece de sentido, no sólo por el contenido matemático que se trata, sino porque en el contexto lingüístico que ellos manejan éste no existe. Incluso en el zapoteco, éste no existe como referente concreto, por lo que se considera que no sólo es ausencia del referente, sino aún más importante, que la pregunta está planteada en castellano y pretende ser resuelta en castellano.

Una vez que ha preguntado y ante la falta de respuesta, pasa a preguntarle a un niño en particular, quien se queda en silencio. Entonces otro niño se dirige a los demás en zapoteco: “*de rari neza riree gubidxa, de rari neza riazí gubidxa*”, quien explica que si consideran el punto decimal como el punto a partir del cual a la izquierda de él, es por donde sale el sol⁵, —correspondiendo el sol a los enteros, llamándoles números “buenos”—, y del punto a la derecha, cuando se oculta, como los números “defectuosos”, señala, asimismo, que después de ese punto hay uno, —refiriéndose al cero que está y al segundo numeral después del punto— se encuentra la unidad y en segundo lugar, las unidades de centésimas, resolviendo de esta manera el problema formulado.

Segunda situación. En la clase de quinto grado en la misma escuela, el maestro intenta que aprendan a usar las fórmulas para calcular el área de figuras geométricas. El objetivo es importante, el proceder es tradicional, pues parte de la asignación de la figura, no aclarando del porqué de su denominación, después da

⁵ Apela a una relación cognitiva, distinta a la que la colonialidad está acostumbrada mirar, el sol, no como objeto, sino como ser vivo (el sol), representado en la expresión zapoteca del *Gubidxa*: *Gu*, dador; *bidxa*, energía, que a su vez expresa la circularidad y la regularidad de su presencia, por tanto pausamiento de la vida en ellos, luego conformación de sistemas conceptuales de sus saberes, y conceptualización de la vida.

las fórmulas, sin mediar explicación de la abstracción que se puede hacer de las formas más comunes, y que bajo convenciones se asigna un nombre para diferenciarlas de las demás, o de la necesidad de reconocer figuras, con las que se auxilien o empleen como herramienta para el cálculo de áreas de nuevas figuras no comunes, como una estrategia razonable, pues trabaja sobre figuras preestablecidas, con valores dados.

Dentro de esta secuencia pensada por el profesor, presentación de figuras, asignación del nombre que la identifica, asociación de una fórmula para el cálculo del área y asignación de valores para su cálculo específico, sucede lo siguiente: el maestro presenta una figura, da la fórmula y le asigna ciertos valores, y la tarea indicada es “sustituyan”, los alumnos responden guardando silencio, vuelve a señalarles el profesor que “sustituyan” sin obtener respuesta por parte de ellos. La palabra “sustituyan” no existe como parte de sus significados ni lingüísticamente para indicar la acción como en el castellano, que presuponen los profesores. Pasan momentos similares hasta que un alumno hace la indicación a los demás en zapoteco de lo que él considera que está tratando de decir el instructor, para lo cual señala: “*hucha nu ca letra ca, por ca numerú ca*”. (Donde vean las letras, cámbienlas por los números)

Análisis de las respuestas. Para caracterizar la problemática de las situaciones antes referidas hubo que determinar de qué contexto se hablaba, ¿social- lingüístico o sociocultural? Ambas situaciones se encuentran en un ámbito completamente sociocultural, y no sólo social-lingüístico, pues:

A) No se trata de un problema de falta de comprensión del lenguaje, tampoco alude a la construcción de neologismos, como algunos autores suponen. Si éste fuera el caso y se quiere construir, por ejemplo, en el área de geometría, en lengua zapoteca, el correspondiente concepto del círculo, se recurriría a lo que hacen los niños: considerar un vocablo zapoteca, por ejemplo: *gueta* que refiere a “tortilla” y se une a *bidola*: *Gueta bidola* “redondo como la tortilla”, lo cual señala Aldaz como construcción neológica, sólo que en el *diidxazáa*, y que a diferencia de él, se propone como parte de la estrategia inferida por los alumnos, para darle el significado deseado, ahora resta ver si ésta es aceptada por el consenso, lo que presupone la negociación de significados, como establece lo sociocultural. Este vocablo compuesto refiere al objeto matemático y no lo agota. De hecho, en discusión con profesores del Sistema de Formadores de Docentes de la región de Tehuantepec, de Ixtepec, Oaxaca, se refiere que este vocablo da significado pero no con toda la potencia sociocultural que se quiere. En cambio, *Lari renda* (la expresión describe el movimiento que hace la mujer, en su forma cotidiana de vestirse usando la falda amplia, textualmente significa ropa enredada en la cintura), apela más a ser aprehendido, es decir, al aspecto sociocultural del zapoteco que determina su uso, al interés de este estudio.

Lo explicado lleva a considerar que la construcción de neologismos, en la idea de Aldaz, presenta dificultades por efecto de una visión que se considera estática en la primera construcción; mientras que en la segunda, es dinámica, pues ambas tienen sentido antropológico y son culturalmente coherentes. Sin embargo, ¿cuál elegir como definición?, dependerá de la negociación de significados que el

sistema cultural adopte, que considere como criterio a partir de una consideración sociocultural, que atienda a la construcción y no a otro aspecto, lo cual se ha llamado aquí controversia situada.

La operación es compleja; sin embargo, en el fondo, la diferencia no sólo es lingüística, social o cultural, pues ambos neologismos crean su significado, sino más bien, la dificultad estriba en que la segunda construcción neológica obedece a una relación afectiva mayor, (por que habla de un aspecto íntimo del observar vestirse a las mujeres, por parte de los niños de la región del istmo de Tehuantepec), para su apropiación que la primera, la cual es establecida como referente subjetivo del sistema cultural, que a su vez lo simboliza y le otorga significados a lo que realiza, de manera contundente y que potencia la acción, su vocalización.

B) Los alumnos actúan de manera semejante en situaciones relativamente diferentes (grupos y grados escolares distintos —tercero y quinto—, contenidos diferentes: números decimales, geometría, etc.), resaltando las respuestas que asumen socialmente, pues se encuentran mediadas por el ámbito escolar; sin embargo, hay algo más en estas situaciones áulicas, algo que rebasa la situación escolar, que remiten a prácticas sociales, culturales y discursivas del contexto sociocultural de la cultura zapoteca. Por esta razón, el estudio de los fenómenos que están ocurriendo, no sólo en el ámbito escolar, sino en la amplitud de lo sociocultural, es un requisito epistemológico, didáctico y cognitivo, pues es consecuencia del devenir de los cambios que operan en la misma sociedad, que expresan aspectos situados más allá de lo escolar, es decir, ofrecen lo que Cantoral menciona, que: “Las nociones y los procedimientos que se enseñan tienen ciclos de vida y cambian a la par que evolucionan las comunidades humanas en el ámbito social y cultural” de ahí que se considere que estas situaciones atraviesan la dimensión sociocultural.

C) Muestran cómo se desenvuelven los profesores dentro del salón de clases, lo que implementan y, por consiguiente, la relación con prácticas sociales, culturales y docentes en cuyas manifestaciones, por ejemplo, se expresa, entre otros, el ideal que en algún momento se formuló para la enseñanza de la matemática. Esto se aprecia en las secuencias, la lógica de actuar que presuponen, las preguntas, las indicaciones e, incluso, en el lenguaje con que se expresan, los cuales están basados en consideraciones didácticas, cognitivas, de la matemática misma. “¿Cuánto es esto?”, “¿qué número es éste?”, “sustituyan”; evidencian una cierta lógica de actuar, aspectos que afectan las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesores; por ejemplo, por qué no cambiaron la dinámica de trabajo ante los primeros indicios de silencio colectivo, si acaso ése fue el intento de la maestra de tercero, quien finalmente cae dentro del mismo patrón de actuación, al tratar reformular la pregunta. Esto lleva a considerar que las acciones de los sujetos que participan, profesores y alumnos, se instalan no nada más en el ámbito escolar, sino claramente también en el terreno sociocultural, pues no sólo se establece una relación áulica en este proceso, sino que se involucran las formas de entendimiento de ambos en un marco sociocultural más general.

D) Los entendimientos sociales entre los alumnos circulan haciendo uso del contexto sociolingüístico, pero también de lo social y cultural, ello se observa

cuando movilizan sus referentes socioculturales, pues las respuestas y los entendimientos están cargados de mucho sentido y significado, al observarlo empíricamente en los pueblos indígenas de la región del istmo de Tehuantepec, Oax., (“*Gubidxa...*, *Hucha nu ca... ca pur... ca*”), en ese sentido, entendemos que lo que se encuentra atrás de todo esto, son sistemas conceptuales complejos en y para la creación de saberes matemáticos.

Resultados. Las razones ya citadas son evidencia sustancial y prueba que al resolver los problemas se instala la solución no sólo en lo sociolingüístico, también en lo sociocultural.

Esto conduce a repensar las formas de apropiación del conocimiento por parte de los sujetos que conforman las sociedades, pues éstos se ven afectados por los cambios que experimentan las sociedades. En ese sentido, examinar la construcción de sus concepciones o de los conceptos matemáticos que se apropian, no sólo es un requisito epistemológico, didáctico y cognitivo, sino que es una consecuencia del devenir histórico y social de las mismas sociedades y, por tanto sociocultural. De ahí que para la investigación en Matemática Educativa sea de interés entender los mecanismos de construcción del conocimiento, pues se basan en prácticas sociales y culturales.

Por otro lado, las dos situaciones no sólo refirieron la construcción de una relación lingüística, pues para entender lo matemático de la situación del aula, que identificamos como la posición estratégica de los alumnos, éstos recurrieron a lo no matemático para instalarlo en lo colectivo y en el mundo de los significados — sistemas conceptuales que conforman el ámbito sociocultural de sus saberes matemáticos—, y que dieron resignificación, además de creación y recreación a un contexto sociocultural y a su lengua, desde luego, desde su pensamiento filosófico, lo que los nuevos antropólogos denominan “por su cosmovisión”, y esto no lo hicieron en castellano. Sin embargo, es pertinente mencionar que a pesar de la riqueza de las experiencias realizadas y registradas etnográficamente, no fue posible hacer consciente la trascendencia de observar los fenómenos con otra visión, que implicara la recuperación de la práctica cultural, de la riqueza que guardan estas relaciones instaladas en el imaginario colectivo.

Lo anterior plantea, la posibilidad para el enriquecimiento de continuación a esta investigación, debatir lo que significa la construcción social de los conceptos matemáticos a partir del empleo de la dimensión sociocultural. De ahí que al considerar las componentes, el contexto social y cultural, éstos sean parte de una segunda aproximación para establecer dicha construcción social en los sistemas socioculturales determinados, ofreciendo un conjunto de explicaciones que conecten este carácter social, lingüístico, cultural, identitario, del colectivo cultural escolar, como forma de dar respuesta a las preguntas que se formulan, pues se encontró que son los mediadores de la construcción y constitución social de los conocimientos matemáticos en el sistema sociocultural, y que intervienen en la creación de los saberes matemáticos, cuya aproximación y estudio sistemático permiten entender con precisión los mecanismos de adaptación del saber matemático y del saber científico a las prácticas de los profesores y alumnos, cuando tratamos la noción de solución en un ámbito general, requisito

de la aproximación, que exige interacción entre la elaboración teórica y la evidencia empírica.

La finalidad es esclarecer las condiciones de aprendizaje de ideas complejas de un sistema sociocultural concreto de una región de México, el cual tiene la particularidad de poseer un proceso identitario —interés de la investigación— a través de mostrar cómo la localización de estos mecanismos de acción, poseen configuraciones de sistemas complejos conceptuales, que se encuentran vigentes, y son relevantes porque proveen información de cómo está actuando el sistema sociocultural.

CAPÍTULO IV
CONCLUSIONES

IV. Conclusiones

Contadas son las ocasiones, cuando la práctica educativa da atención a las formas con que se comunican las personas, para aproximarse a la creación de sus entendimientos y concepciones, y por medio de ello obtener una idea sobre la aprehensión de los conocimientos matemáticos que requieren o que en ese momento están trabajando. Debido, entre otros factores, a que las mismas necesidades de avanzar, por ejemplo, con el desarrollo del programa, en la implementación de actividades, la asignación de tareas y ejercicios, en la realización de las evaluaciones, etcétera, establecen una dinámica, si bien, particular —de la escuela—, también ella homogénea y general, al atender a las personas con los mismos mecanismos y parámetros, cuando que cada ser humano posee su propia personalidad, contradiciendo, de esta manera, lo que postula, pues tiene y se le juzga bajo los mismos parámetros: ciudad, región, provincia, urbano, marginal, pobre, clave escolar, clase, número, grado, rendimiento, examen de matemáticas, etcétera.

Sin embargo, precisamente estas circunstancias debieran ser la razón para fijar la atención en las formas de comunicación, sobre todo para operar con ellas. Dialogar con las que categorial y racionalmente la modernidad ha decidido, de manera formal, se empleen para sostener que han aprendido a expresarse adecuadamente en la matemática o bien que han entendido de acuerdo con lo que se requiere que manejen, y que para ello necesitarán de considerar la negociación y el consenso de las formas interculturales de expresión.

Que impide observar de manera explícita los momentos de transición de una epistemología en otra, cuando las personas trabajan con el concepto de solución al discurrir y por tanto dar cuenta de que se mueven entre dos epistemologías enunciadas no sólo en el tiempo sino en el espacio, que a su vez dificulta los entendimientos respecto al concepto referido e impide ofrecer posibilidades didácticas con las cuales podría manejarse el discurso matemático escolar, al considerar estos entrecruzamientos epistémicos que por las condiciones con que se operan en el salón y en el ámbito escolar permitan a las personas establecer, los cierres a los circuitos epistémicos abiertos y colocados a nivel del lenguaje desde los horizontes de racionalidad con que se les exige aprender y que emplea mucho el proceso de enseñar, evitando a la vez dar cuenta de estos mismos procesos, por tanto de las prácticas socioculturales que invisibilizan el enseñar, para hacer visible solo el proceso de aprender, creando visiblemente una ausencia de la visión global de estos procesos.

Por lo que en las nuevas tendencias de la enseñanza de la matemática con las cuales se está operando, entre otras, la *resolución de problemas* dejó entrever que si ámbitos como los analizados en este proyecto de investigación, que se ha considerado que no tienen relación con el enseñar matemática tendrán que ser revisados con mayor atención, no sólo por cuestiones genéricas aquí observadas respecto al sostenimiento de una visión hegemónica y de dominación que se ejerce en lo intelectual, como una colonialidad del poder que nulifica las aportaciones propias de un pensamiento latinoamericano, por tanto de un *locus* de su enunciación, sino también por que están de por medio los aprendizajes como

las enseñanzas con las cuales se educan a las personas. Cuando éstos están operando con las nuevas exigencias racionales, que tienden a mitificar ciertos roles o papeles de lo que las personas tienen que desarrollar como habilidades y destrezas, sin observar una vigilancia epistémica, como lo fue colocar la resolución de problemas por delante de los procesos de aprender y enseñar en la matemática, en vez de la solución, las personas establecen rupturas tanto de carácter epistémico como sistémico (por sistema), lo que provoca una ausencia del sentido epistémico que crea rupturas en los diversos ámbitos de realización de lo escolar, que a su vez se manifiesta en los siguientes efectos: 1) reduce el sentido epistémico del concepto, 2) las posibilidades cognitivas también se reducen en las personas, y 3) simplifica a una manipulación de habilidades y técnicas el concepto por aprender. Inclínándose por lo que aquí se denominó *más de lo mismo*, creando una circularidad con la que actúa la didáctica, lo cognitivo, lo epistémico, y lo cultural, lo que se ha denominado preferencia por lo algorítmico

Problemática que, de manera general, emergió, en sus inicios, en las periferias de los centros metropolitanos de la academia, y hoy, ante la extensión y agudización de la problemática de los aprendizajes como de las enseñanzas¹ requiere echar una nueva mirada, realizar una comprensión más profunda para poder establecer esas formas dialógicas de comunicación entre el lenguaje formal y el lenguaje de uso.

Por lo que expresiones como: “pensándolo matemáticamente” para llamar e indicar la relación con las ecuaciones, o “están muy pegaditas, así como las tortillas” para referir el paralelismo entre planos o que no tiene solución, en correspondencia con los paralelismos en las gráficas horizontal y vertical, con y sin ejes de referencia, nos indican que tendrán que ser aceptadas para expresar además de entendimientos, concepciones y nociones, la constitución y, por tanto, dar cuenta del proceso de construcción de la solución de un problema matemático. Por otro lado, la dificultad a la que se enfrentaron al trabajar y pensar *sobre los coincidentes*, como: tres rectas coincidentes, dos rectas coincidentes y otra paralela en el plano, tres planos coincidentes, o dos coincidentes y uno paralelo en el espacio. O *sustituyan* en los niños de primaria, obtenidos en trabajos anteriores (Guadarrama, 2000; 2001), son muestra, de la regularidad en lo sociocultural, propuesto en Guadarrama (2001), en relación con el lenguaje empleado: en el nivel de educación básica “sustituyan”; en la educación superior, “coincidentes”, términos que actúan como marcadores discursivos que entorpecen la comprensión del significado en un determinado discurso, debido a la inexistencia de mediadores discursivos o reconocidos que establezcan esas relaciones dialógicas que a veces se presuponen, pero que no están.

Lo singular de la investigación fue por qué mirar la situación de solución como todo aquello que se esté intersectando, en el caso de los antecedentes, pues

¹ Aumento en los niveles de reprobación, o el sostenimiento constante de los índices de reprobación, aunado a los cambios tecnológicos, como de los resultados internacionales respecto a la poca eficiencia en los aprendizajes de la matemática, desapropiación de formas de aprehensión del conocimiento, reemplazo de epistemologías válidas socialmente por otras nuevas que no necesariamente representan progreso en las personas cognitivamente y epistémicamente, mucho menos en lo social, etcétera.

era condicionante para la indicación: tiene solución o no tiene solución gráficamente, como fue el caso de la intersección dos a dos de los tres planos que se consideró como solución.

¿Cómo se da este proceso de construcción social de la solución?, ¿cómo se establecen los entendimientos y concepciones referentes a este proceso, sobre todo cuando están sometidas a tensión con el discurso matemático escolar, que deviene del discurso matemático teórico, empleado para su transmisión? Al respecto se observaba ya, por ejemplo, entre los entrevistados una regularidad en lo sociocultural. Por ejemplo, el lenguaje empleado, términos y frases como: “coincidentes”, “sentido de intersección”, “empleo de un lenguaje analítico”, “formalidad lógico estructural con que se trabaja”, etcétera, que actuaron dificultando la comprensión del significado en el discurso, y que se establecieron, a su vez, como marcadores discursivos que entorpecieron la comunicación.

Todas estas formas de entendimiento y comprensión podrían, desde otra mirada, indicar la búsqueda, por parte de las personas, de mediadores en esta relación entre el lenguaje formal y el lenguaje de uso para explicitar sus entendimientos y concepciones dirigidas a capturar lo que el lenguaje formal define por solución en un ámbito analítico, y que no se reconoce en el lenguaje de uso, pero también pueden ser entendidas, lo cual es sustancial en esta investigación doctoral, como la presencia de otras epistemologías que se construyen alternativamente para comprender el discurso matemático teórico racional de la modernidad, que exige la comprensión monotópica y ontológica de sus conceptos.

Además, si agregamos que otros grupos culturales reciben el flujo de conocimientos mediado a su vez por un lenguaje ajeno al suyo, la problemática no sólo expresa complejidad, sino también absurdos. Por ejemplo, en las explicaciones que se han ofrecido sobre la constitución de los conocimientos matemáticos, expresiones como las que se dan a continuación:

<p>Tobi ne tobi biasi chupa Chupa gaxha nu chupa biasi gasti</p> <p>Uno más uno igual a dos Dos menos dos igual a cero</p>	<p>O tobi ne tobi biasi chupa, gaxha nu chupa biasi gasti</p> <p>Uno más uno son a dos, quita dos, no te queda nada</p>
--	---

no son consideradas como expresiones válidas, que tengan sentido para el conocimiento en general, mucho menos para el conocimiento matemático universal. Sin embargo, las expresiones, además de tener sentido en un contexto matemático específico, expresan muchas más relaciones de conocimiento que las que se supone que no las tienen.

En este sentido, Cantoral y Farfán (2000) sostienen la tesis de “que el conocimiento matemático, ..., tiene un origen y una función social asociada con el grupo socialmente establecido, luego prácticas humanas,” seguido indican: “esta afirmación puede no ser entendida en el sentido que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica”, lo que apoyó

fuertemente no al proyecto en sí, que desde luego se ve beneficiado, sino para dar una idea, de una manera condensada, sintética, sobre las condiciones con que se opera en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, así como de la magnitud del problema que se enfrenta en la propuesta que se señala en esta investigación.

De ahí que al formular por qué atender la construcción social del concepto de solución, se observó que en todo grupo humano se realizan prácticas sociales y como señalan Cantoral y Farfán, son prácticas humanas, que refieren entendimientos y concepciones de las personas en el sistema didáctico, las cuales se tipifican como prácticas sociales, culturales y discursivas que expresan la relación entre la actividad humana y los objetos de conocimiento matemático, en nuestro caso la solución, lo que permitió reflexionar, desarrollar y extender la investigación.

Por otro lado, la aserción sobre el punto de vista de Sierpínska en los aspectos generales sobre la matemática: “que en la evolución de la matemática se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento: Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural”, en el marco teórico ya indicado, permitió establecer la no concordancia con esta caracterización de la evolución de la matemática.

En la medida en que se profundizó en el ámbito de los referentes teóricos, como en la comprensión de los pensamientos de avanzada que se formulan, obtenidos a través de una minuciosa revisión bibliográfica, como el caso de una geopolítica del conocimiento de Mignolo (2001), o de una visión historiográfico-filosófica de Dussel (1995), observadas en el apartado II de la memoria predoctoral, en relación con la comprensión de los eventos sociales, y paralelamente a ello, la obtención de nuevas evidencias respecto a *cómo conciben la solución en la clase*, obtenidas a través de registros de tipo etnográfico con alumnos de una primaria en Juchitán, como de las observaciones efectuadas en los profesores-alumnos de licenciatura de la Universidad Pedagógica Nacional con sede en Ixtepec, estado de Oaxaca, al *modificar los enunciados* de los problemas formulados, para que tuvieran sentido según su comprensión, viabilizada por la pertenencia a su cultura, y por un carácter “didáctico” más cercano y concordante con la realidad sociocultural de la población; que hiciera más asequible los conocimientos matemáticos a sus alumnos y, en segundo lugar, cuando se trató de que esos nuevos alumnos de la escuela primaria, actuaran *empleando su propia lengua*, la lengua zapoteca, y partieran de ubicar la solución la solución en su perspectiva sociocultural y resolvieran el problema a través de sus tres componentes.

El acercamiento al estudio de los sistemas socioculturales parte de la caracterización que ofrece la dimensión sociocultural, para estudiar, localizar y documentar los mecanismos de acción con que opera el sistema, mediante la interacción social, que diera cuenta, además de los procesos socioculturales, del carácter epistémico en que se ubica la problemática, cuyos resultados de este trabajo son parte de los primeros indicios obtenidos, registrados en la memoria predoctoral, y en los que se exhibe la complejidad que se establece bajo la consideración de los aspectos aquí discutidos, lo que condujo a un punto de interés: la orientación filosófica que se encontraba atrás de este planteamiento y

que si bien la inicia Descartes, es sistematizada, y terminada por establecerse, con la formulación de Kant.

Aspecto que este trabajo pretende realizar con el concepto de solución, desde luego nos colocaba a estas alturas, en la necesidad de comprender la aproximación sistémica que los autores referidos llamaban Socioepistemología, que permitió discurrir de manera articulada con tres componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, bajo la interacción de dimensiones en la que se ha estructurado como es su naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los niveles de materia cognitiva y de modos de transmisión a través de la enseñanza.

Los componentes (cultura, identidad, y prácticas discursivas), en la dimensión sociocultural, permitieron mostrar la existencia de otras epistemologías que se generan en los grupos humanos como fue el caso de la indagación en las personas pertenecientes a distintas poblaciones del Istmo de Tehuantepec, que son expresadas en las aulas² y al momento de crear y expresar sus entendimientos y concepciones relativas a lo que entienden por solución, y cómo constituyen la solución, así también importantes son, por los argumentos, los razonamientos, las nociones y, desde luego, por los conocimientos que proporcionaron, permitiendo por este motivo, ser una extensión de la reflexión, y del desarrollo del proyecto doctoral “La construcción social del concepto de solución”.

También fue relevante, pues demuestra cómo operan —“sus epistemologías”—, y cómo resuelven los problemas matemáticos, sus problemas específicos y desde luego, los de su cotidianidad, lo que concretizó y verificó lo sostenido por el autor, como tesis en este trabajo, al señalar *que todo conocimiento matemático obedece a necesidades de naturaleza práctica*.

Al tratar de hallar la solución a los problemas matemáticos formulados en las diferentes contextualizaciones y situaciones los condujo a verificar sus formas de apropiación del conocimiento, ya que se vieron afectados por los cambios que experimentan las sociedades, en ese sentido, examinar la construcción de sus concepciones o de los conceptos matemáticos que se apropian, no sólo fue un requisito epistemológico, didáctico y cognitivo, sino una consecuencia del devenir histórico y social de las mismas sociedades, y por tanto sociocultural.

En consecuencia, para la investigación en Matemática Educativa es de interés entender los mecanismos de construcción del conocimiento, pues se basan en prácticas sociales y culturales, como fue al obtener el resultado que aparece en el ámbito de la discusión hasta el momento planteado.

Tanto profesores como alumnos, no sólo recurrieron a construir una relación lingüística para *entender lo matemático* de la situación del aula, que identificamos como la posición estratégica de *los alumnos*, sino también a *lo no matemático* para instalarlo en lo colectivo, es decir, en el mundo de los significados —constituyendo sistemas conceptuales en el ámbito sociocultural de sus saberes matemáticos—, que resignificaron, crearon y recrearon en el contexto sociocultural y de su lengua, y desde luego de su pensamiento filosófico, a lo que

² Que también expresan dialécticas entre la actividad y el objeto en cuestión, atravesadas a su vez por componentes culturales, lingüísticos o discursivos e identitarios, no marcado fuertemente, este último, por razones del trabajo.

los antropólogos denominan “cosmovisión”, y esto lo hicieron no sólo en castellano. Sin embargo, es pertinente mencionar que a pesar de la riqueza de las experiencias realizadas y registradas etnográficamente, es necesario observar la trascendencia de fijar la atención en los fenómenos con otra visión que implique la recuperación de la práctica cultural, posibilidad y riqueza que guardan estas relaciones instaladas en el imaginario colectivo.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

Acevedo, M y Falk, M (1997). *Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Editorial, Colombia.

Aldaz, I. (1995). "Matemáticas y educación indígena. La educación en los pueblos indios. El caso de Cacalotepec, Mixe". En: *Revista Educación Básica*. México Págs. 8-11.

Barrera J, Cano O. y Cervantes J. (1998). "Coexistencia del Pensamiento Sintético y Analítico del Concepto de Solución en un Sistema de Tres Ecuaciones Lineales con Tres Variables". Tesina de Especialidad. UAEH. México.

Bell (1985). *Historia de las matemáticas* Ediciones Olimpia, México, 608 pp

Bello, J. (1997). "La Lengua indígena". En: *Revista Xictli*. Año VII. Núm. 28. UPN. Págs. 11-15 .

Berger, P y Luckman, T. (1966). *The social construction of reality. A treatise in the sociology of knowlede*. Anchor Books Doubleday. EU. 219 pp.

Bertely, M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*. Maestros y Enseñanza 6. Paidós. México.

Blau, P. (1964). *Exchange and power in social life*. Edit. John Wiley. EU.

Bonfil G. (1991). *Pensar nuestra cultura*. Alianza Editorial. México.

Bonilla, E. (1992). *El prisionero de la verdad Bertrand Russell*. Pangea Editores. México.

Boron, A. (2003). Seminario: Retos y desafíos del pensamiento en América Latina, UACM, julio, México

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Número 18. Segunda edición. Alianza Universidad. España.

Boyer, Carl. (1994). "Orígenes del álgebra actual". En: *Revista Contactos de educación en ciencias básicas e ingeniería*. Tercera época. Número 1. UAM. México.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers. Gran Bretaña.

Bruner, J. y Haste, H. (1990). *La elaboración del sentido*. Ediciones Paidós. España.

Cabañas (2000). *Qué es resolver un problema matemático*. Editorial grupo editorial Iberoamericano, México

Canales, H. (1992). "El álgebra lineal aplicada al análisis estructural". Tesis de Maestría. Cinvestav del IPN DME. México.

Cantoral, R. (1990). "Desequilibrio y Equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas". Tesis Doctoral. Cinvestav del IPN DME. México.

- -. (1995). "Matemática educativa". En: *Revista Pedagogía*. Tercera época 10 (5): 4-13.

- -. (1997). "An example of the Sociological Point of View in Math Education: The Case of Analytical Functions at the University Level". Presentado en: Conference on Research in Math Education. Michigan State University. Estados Unidos.

Cantoral, R.; Cordero, F., y Farfán R. (1999). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas. México.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2000). "A sociocultural approach to infinitesimal calculus". Texto presentado en International Congress (¿?), 32-33. Agosto de 2000, Japón.

Castrejón, J. (1999). *Acerca de la racionalidad científica, Feyerabend y los límites de la argumentación*. Serie cuadernos de metodología sobre investigación y desarrollo tecnológico. PESTYC-IPN, 37-43. Diciembre de 1999. México.

Chargoy, R. (2000). *Modos de pensamiento sintético y analítico; el caso de la base de un espacio vectorial*. Memoria predoctoral. Cinvestav. México.

Chevallard, Y., et al., (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. ICE-Horsori. España.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. Aique. Argentina.

De la Cruz, V. (1999). *Guie' sti' diidxazá. La flor de la palabra*. Nueva biblioteca mexicana 135. Universidad Nacional Autónoma de México. México.

De Sousa, B. (2001). "Nuestra América. Reinventando un paradigma subalterno de reconocimiento y redistribución". En: *Revista Chiapas*. Número 12. Era y IIE-UNAM. México.

Del Búfalo, E. (1999). "Positividad y métodos en las Ciencias Sociales". En: *Revista Latinoamericana de Estudios Avanzados. Teoría de la pasión comunicativa*. Número 9. Septiembre-diciembre. Venezuela.

Despina, A. (1998). "Undergraduate Students' Understanding of Solutions of Systems of Equations". En memorias del *International Conference on the Teaching of Mathematics*. Julio 3-6, Págs. 284-286.

Dieudonné, J. (1953). "Lógica y Matemática". En: *Revista de Matemáticas Elementales*. Vol. II. Fascículo 1. Marzo. Universidad de los Andes, Colombia.

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. Iberoamérica. México. Págs. 61-97.

Dussel, E. (1995). *Ética de la liberación en la edad de la globalización y la exclusión*. Editorial Trotta. México.

- -. (1996). *Hacia una ética de la liberación ecológica*. Serie Análisis/Ecología México. Págs. 55-59.

Dussel, E., y Casanova (2002) Seminario de pensamiento y cultura en América Latina, Flacso, septiembre, México.

Eslava, M., y Villegas, M. (1998). "Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano". Tesina de Especialidad. UAEH. México.

Farfán, R. (1993). "Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso". Tesis Doctoral Cinvestav del IPN DME. México.

- -. (1995). "Ingeniería didáctica". En: *Revista Pedagogía*. Tercera época 10 (5). México, UPN. Págs. 14-23.

- -. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. Edit. Iberoamérica. México.

- Fariás, E. (1994). "Interacción entre representaciones visuales y representaciones simbólicas, un estudio experimental". Tesis de Maestría. Cinvestav del IPN DME. México.
- Fingermann, G. (1979). *Lógica y teoría del conocimiento*. Editorial El Ateneo. Argentina.
- Galilei, Galileo (1994). *La gaceta sideral*. Alianza Cien-Conaculta. México.
- Goffree, F. (1996). *Trabajando en la Educación en Matemáticas, Hans Freudenthal*. Traducción Jorge Martínez Sánchez. Cinvestav DME. México. Págs. 13-14.
- Gorostiza (1991). "La matemática en México". Revista Avance y Perspectiva, Cinvestav, mayo-junio. México
- Guadarrama, J. (2000). "Estudio de la interpretación geométrica del concepto de solución en los sistemas de ecuaciones lineales". Tesis de Maestría. Cinvestav del IPN DME. México.
- -. (2001). "Construcción social de la noción de solución en sistemas de ecuaciones lineales". Proyecto de Doctorado. Cicata-IPN México.
- -. (2001). "La construcción social de conceptos matemáticos". En: *Antología de la V Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. CLAME. Oaxaca, México. Págs. 225-247.
- -. (2002a). "La construcción social del concepto de solución". Memoria predoctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), IPN. México.
- -. (2002b). "El desafío para la Educación Intercultural, la superioridad cultural occidental ¿Podrá?". Ponencia presentada en el Congreso Regional de Educación Indígena e Intercultural. Junio de 2002.
- -. (2002, c), "El proyecto...para contrastar el papel de la epistemología". Revista Investigación en el aula, julio-diciembre, ENUFI, México, Oaxaca: 4-21
- Guzmán, J. (1983). "El Desarrollo Conceptual de la Resolución y la Teoría de Ecuaciones". Tesis de Maestría. Cinvestav del IPN DME. México.
- Habermas, J. (1997). *La modernidad: un proyecto incompleto*. Editorial red editorial iberoamerica. México.

- Harris, M. (1987). *El materialismo cultural*. Alianza universidad. Madrid.
- Hernández, J. (1900). *Curso completo de aritmética superior*. ¿Editorial, lugar?
- Huntington, S (2001), *El choque de civilizaciones y la reconfiguración del orden mundial*. Editorial Paidós, México.
- Lander, E. (2001). “¿Conocimiento para qué? ¿Conocimiento para quién? Reflexiones sobre la universidad y la geopolítica de los saberes hegemónicos”. Artículo presentado en el Seminario qué significa y cómo se manifiesta en nuestro tiempo la colonialidad del saber. Octubre. Colmex.
- Larousse (1998) diccionario, México
- Lecourt, Dominique (1982). “Sobre la arqueología y el saber (con respecto a Michel Foucault)”. En: *Para una crítica de la epistemología*. Cuarta edición. Siglo XXI. México.
- López, F. (1991). “Etnografía en Educación. Cuestiones introductorias para la investigación educativa”. En: *Revista Pedagógica*. Mexico. Sinaloa, UPN. Págs. 26-29.
- López, G. (1955). “La Filosofía de los Zapotecas”. En *Filosofía y Letras*. Revista de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM. Números 57-58-59. Enero-diciembre de 1955. Tomado de internet
- Maier, H. (1999). *El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje común*. Pitagora Editrice Bologna(¿?). Número 2. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Marines, J., y Monroy, A. (1998). “Dificultades en la transición del pensamiento sintético y analítico en sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables”. Tesina de Especialidad. UAEH. México.
- Martínez, V. (2001). “Sociología, relaciones personales, comportamiento y personalidad”. En: *Revista Casa del Tiempo*. Vol. III. Época III. Número 28. UAM, México. Págs. 11-17.
- Máynez, P. (2001). “El náhuatl en la historia de México”. En: *Revista Ciencia y Desarrollo*. Número 158. CONACYT, México. Págs. 43-49.
- Méndez, R. (1990). “La enseñanza de las matemáticas, ¿un problema didáctico?”. En: *Revista Cero en Conducta*. México, Págs. 5-8.

- Mignolo, W. (2001). *Capitalismo y geopolítica del conocimiento*. Ediciones del Signo. Argentina.
- Montemayor, C. (2001). *Los pueblos indios de México, temas de hoy*. Editorial Planeta. México.
- Morton, R., y Kendall, P. (1956). "The Focused Interview". En: *American Journal of Sociology*. LI: 541-542. Estados Unidos.
- Pardinas, F. (1993). *Metodología. Técnicas de Investigación en Ciencias Sociales*. Siglo XXI. México.
- Parsons, T., y Shils, E. (1952). *Toward a general theory of action*. Cambridge, Harvard University Press. Estados Unidos.
- Pérez, A. (1999). *Kunh y el cambio científico*. Fondo de Cultura Económica. México.
- Pérez, R. (2000). *¿Existe el método científico?* Colección: La ciencia para todos. Número 161. Fondo de Cultura Económica. México.
- Piaget y García (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Séptima edición. Siglo XXI. México
- Poincaré, H. (1984). *Filosofía de la Ciencia*. Segunda edición. Conacyt. México.
- Polya (1974). *Cómo plantear y resolver problemas matemáticos*, editorial Trillas, México
- Ponce, A. (1980). *Educación y lucha de clases*. Editorial Cartago. México.
- Quijano, A. (1995). "Raza, etnia y nación en Mariategui: cuestiones abiertas". En: *Estudios Latinoamericanos*. Número 3. Nueva Época. Enero-junio. México.
- Quijano, A (1998). "La colonialidad del poder y la experiencia cultural latinoamericana". En: R. Briceño, y H. Sonntag (eds.). En: *Pueblo, época y desarrollo: la sociología de América Latina*. Editorial Nueva sociedad. Lima. Págs. 27-38.
- Ramírez, J. (1989). "El estudio del desarrollo histórico del álgebra lineal, como un elemento que puede sugerir algunos aspectos didácticos para los cursos de álgebra lineal". En: *Revista Ciencia*. Vol. 1 (Números 2 y 3)(¿?). UAG, México, Guerrero. Págs. 44-49.

Ramírez, R., y González, J. (1998). "Las nociones de Comunidad Epistémica y planeación prospectiva: fundamentos de la escuela modelo del siglo XXI". En: *La Casa del Pensamiento*. Revista mexicana de crítica y análisis científico de la realidad. Julio-diciembre. Plaza y Valdés editores. México. Págs. 3-12.

Ramírez, R. (1995). "Lenguaje y educación". En: *Revista de Investigación Hoy*. IPN. Mayo-junio. México. Págs. 37-42.

Ríos, J. (1991). "La microetnografía... Una opción metodológica apropiada para el estudio y transformación de la práctica educativa". En: *Revista Pedagógica*. UPN, México Sinaloa. Págs. 34-39.

Sierpinska, A. (1996). *Synthetic And Analytic Modes Of Thinking In Linear Algebra*. Editores Kilpatrick J., Hoyles C., Skousmore O. Meaning and Communication.

- -. (1998). Evaluation of a Teaching Design In Linear Algebra: The Case of Linear Transformations. En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Francia.

Schoijet, M. (2003). "Relaciones entre ciencia y religión: ¿cómo las viven los científicos?". En: *Revista Ciencia*, de la Academia Mexicana de Ciencias. Vol. 54. Número 1 Enero-marzo. Págs. 70-77.

Spindler, G. (1993). "La transmisión de la cultura". En: H. Velasco; J. García *et al.*, (eds.). *Lecturas de antropología para educadores: el ámbito de la antropología de la educación y de la etnografía escolar*. Editorial Trotta. Madrid. Págs. 205-241.

Tappan, J. (1992). "Cultura e Identidad". En: L. Méndez y Mercado (comp.). *I Seminario sobre identidad*. Cuadernos de investigación. Instituto de Investigaciones Antropológicas. UNAM. México. Págs. 70-90.

Tecla, A. (1997). *Premisas de la Teoría del Conocimiento*. Ediciones Taller Abierto. México.

Torres, J. (1992). "Una propuesta de contenidos matemáticos para el curso de álgebra lineal de las carreras del área de ciencias sociales y administración de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo". Tesis de Maestría. Cinvestav del IPN DME. México.

Vergnaud, G. (1990). "La théorie des champs conceptuels". En: *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(Números 2 y 3), Francia. Págs. 133-170.

Villegas, T. (1999).

Vygotski, L. (1988). *Pensamiento y lenguaje*. Ediciones Quinto Sol. México.

- -. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Editorial Grijalbo. México.

Wallerstein, I. (2000). *El sistema mundo moderno*. Editorial paidos, México

Wallerstein, I. (2001). “Los intelectuales en una época de transición”. Ponencia presentada en el Coloquio Internacional de Economía, Modernidad. Universidad de San Carlos. Guatemala. 27 al 30 de marzo.

Zubieta, G. (1993). *Taller de lógica matemática*. Editorial McGraw-Hill. México.

ANEXOS

Anexo 1. Para enfrentar el *cómo llevar a cabo este proceso de conocimiento*

Resaltan como uno de los aspectos en este acercamiento, el mirar la construcción desde un pensamiento epistémico, que articula y organiza en relación con la cultura que se expresa a través de la religiosidad, en coincidencia a lo formulado por Huntington, ya que si bien él parte de la existencia de diferentes paradigmas por los que ha pasado la humanidad, ello le permite además observar que el problema no sólo es expresar y explicar la realidad, sino que también ver ante los cambios que se dan en su reemplazo por otros nuevos que permitan explicar la realidad cambiante, pues algunas de las funciones de los paradigmas son ordenar la realidad, entender las relaciones entre los fenómenos, prever acontecimientos, distinguir lo importante de lo no importante, fijar los pasos a dar para lograr mejores resultados de investigación, etcétera.

Pero la elección del planteamiento de Huntington es hecha para discutir el aspecto de la existencia de el choque de las civilizaciones que hoy vemos con mucha nitidez, lo que hace vigente sus planteamientos, por tanto sostiene lo analizado en *cambios de paradigmas o cambios en la validación de la razón instrumental*, como también en la posibilidad de analizar la cuestión de la diferencia desde otros referentes de explicación, como es su inserción en la globalización. Para ello Huntington se detiene en un paradigma que le permitirá entender al mundo, en una nueva forma, se trata en efecto de una forma nueva pero que podría ser también muy vieja, pues dice que el mundo se encuentra constituido por diversas civilizaciones. El mundo global se ha vuelto multicivilizacional. Esto es, que existen muchas civilizaciones. De la influencia de una sola civilización hemos pasado hacia finales del siglo XX a las interacciones de las diferentes civilizaciones. Huntington no niega el proceso de globalización, pero éste habrá de estar constituido por la existencia de varias civilizaciones.

Para ello determina que *existe una política global de lineamientos culturales*, la cual se reorganiza conforme a estos lineamientos culturales. Las identidades culturales son la base de la cohesión y el conflicto del mundo de posguerra fría. En la posguerra fría las distinciones ya no son ideológicas, políticas o económicas sino culturales. *La gente ya no se alía por la ideología sino por la cultura*. Puede haber diversos niveles de desarrollo en los pueblos —político, económico, etc.—, pero las diferencias básicas son culturales.

Las fuerzas que rigen al mundo se deben a la afirmación cultural. De manera que el nuevo orden mundial ya no se asienta en bases meramente ideológicas o de economía política, sino en bases culturales, esto es, en pueblos con tradiciones históricas, lenguas afines, prácticas religiosas, costumbres compartidas, valores morales, etc. Determinando para ello elementos claves de una civilización, como: la sangre, la lengua, la religión, una peculiar forma de vida, una historia, costumbres, valores, etc. El más importante es el de la religión.

Además, los individuos se agrupan en torno a ciertos símbolos: banderas, cruces, medias lunas, etc. Por otro lado la política global se define ya no por el choque de Estados sino por el de civilizaciones. La característica básica de la “política global” es el choque entre civilizaciones. El cual amenaza la paz mundial. Si bien el socialismo ha dejado de ser una amenaza externa para occidente, hoy en día esta amenaza la protagonizan otros tipos de civilizaciones dominantes como la sínica (China) o la islámica.

El resurgimiento islámico y el dinamismo económico de Asia demuestran que otras civilizaciones están vivas y con buena salud, y amenazan, al menos potencialmente a Occidente. Una guerra en la que intervengan Occidente y los Estados centrales de otras civilizaciones no es inevitable, pero podría suceder.¹

¹ *Ibid.*, pág. 362. Huntington, S (2001), *El choque de civilizaciones y la reconfiguración del orden mundial*,

En este posible choque de civilizaciones es muy factible que sus protagonistas sean musulmanes por un lado y no musulmanes por el otro, pero el crecimiento económico de China también pudiera desencadenar una contienda bélica a escala mundial.

El choque de civilizaciones se podría agravar si se habla de alianzas entre los Estados de la misma civilización o incluso con otras civilizaciones. Si bien Huntington imagina un posible escenario bélico en que se alíen por una parte Estados Unidos, Europa, Rusia e India en contra de China, de Japón y el Islam, el hecho es que el choque entre civilizaciones dañaría gravemente a los contendientes rivales. Los únicos beneficiados de esta guerra podrían ser los países o regiones que no intervengan en el enfrentamiento como Latinoamérica, por tanto, tendrían la posibilidad de articular y reenergizar un poderoso movimiento indígena que reivindique la necesidad de la identidad, su condición pobre y marginado como excluido que se ancle en el desarrollo de su cultura, compartida con los no indígenas de esta América Latina.

Huntington señala varios factores que parecen ser los síntomas de la declinación interna de Occidente, que a su juicio empezó a principios del siglo XX y que podría prolongarse por algún tiempo más. Occidente ya no tiene el dinamismo económico y demográfico suficiente como para imponer su voluntad a otras civilizaciones. Los propios Estados Unidos retroceden hegemónicamente. En Occidente existen bajos índices de crecimiento económico, bajo crecimiento poblacional y una decadencia moral que se traduce en una conducta antisocial y un desinterés por la vida intelectual.

Para los años noventas se han dado a escala mundial muchos eventos que cuestionan los logros de décadas anteriores en materia de seguridad social y derechos humanos como el quebrantamiento de la ley, la ola de crímenes, mafias internacionales, cárteles de droga, creciente drogadicción, debilitamiento del núcleo familiar, descenso de la solidaridad social, violencia étnica y religiosa, imperio de las armas, etc. Han surgido muchos conflictos étnicos, resurgido movimientos neofascistas, neocomunistas, fundamentalistas, etc. Occidente, según Huntington, también se ha debilitado al disminuir uno de sus componentes centrales: el cristianismo. Los que profesan esta religión son cada vez menos. De manera que pronto se ha revelado el espejismo de un mundo global armonioso, paradigma que está alejado de la realidad.

Las otras civilizaciones para la última década del siglo XX. Cobra cada vez mayor vigencia el fortalecimiento de civilizaciones no occidentales, como la asiática y la musulmana, pero también la de América Latina. La influencia de las dos primeras civilizaciones en el mundo es cada vez mayor y rivaliza con Occidente. Por sus propias pretensiones de universalidad, pugna contra éstas (el Islam o China) sin dejar de tener en cuenta lo que ocurre en América Latina, siempre latente y que se refiere a los derechos autonómicos y culturales de los pueblos, a través de su cada vez mayor involucramiento e intervención de parapeto de la lucha contra el tráfico de droga y el combate a los grupos armados, como es el caso de Colombia. El resurgimiento de estas civilizaciones le demuestra a Occidente que no está sola en el mundo.

Pero en la medida que Occidente toma más contacto con otras civilizaciones es más consciente de su propia existencia, de su identidad y de los valores en que se cimienta. Lo que parece claro es que la diversidad de civilizaciones cuestiona la validez universal de los valores occidentales. El propio Huntington advierte que esta creencia universalista es falsa, inmoral y hasta peligrosa, porque conduciría a una guerra con otras civilizaciones que podrían ocasionar su derrota. Los pueblos rivales se alían a sus respectivas culturas. Colaboran entre sí los que pertenecen a una sola cultura.

Por ejemplo, en el conflicto de los Balcanes, los serbios son afines a Rusia, los croatas a los occidentales y los bosnios a los musulmanes. Los mayores conflictos se dan en las líneas divisorias de las civilizaciones, es decir, entre los Estados de civilizaciones diferentes. Los

conflictos fuertes se dan entre los Estados de civilizaciones diferentes. Dice Huntington que terminó la “expansión de Occidente” y que ha comenzado la “rebelión contra Occidente”. Como lo podemos ver en los movimientos antiguerra en el caso de Irak, contra la globalidad, de *Los sin tierra*, *Un mundo es posible* y de los zapatistas en México. El poder de Occidente ha disminuido en el mundo, en cambio, las otras civilizaciones reaccionan ante Occidente. Las sociedades no occidentales crecen, afirman su poder y valores, y rechazan los que les impone Occidente. Hoy en día sigue siendo importante el poder de Occidente, pero poco a poco declina debido a su corrupción interna y al auge de otras civilizaciones.

Otro punto que se añadiría es que junto con las formulaciones de Huntington se observa también la correspondencia con algunos aspectos que interesan discernir en la realización del presente proyecto con lo formulado por Wallerstein respecto de que estos choques de civilizaciones, en particular los promovidos por la civilización occidental, llamada por Wallerstein el *sistema-mundo moderno*, se aproxima a su fin, que ya no es capaz de manejar las presiones estructurales a las que está sometida, y que éste está ingresando en una era de transición hacia un sistema histórico nuevo, cuyos contornos no conocemos ahora —no podemos conocerlos por anticipado—, pero cuya estructura podemos ayudar a modelar.

Hoy, dice dicho autor, como parte de la crisis estructural de la economía del mundo capitalista “también estamos presenciando el fin del modo en que hemos *sabido* el mundo, en el sentido de que el marco actual de nuestro *sistema de saber* ya no sirve como antes”, por tanto la postura personal afecta no sólo al hacer investigación, sino las consecuencias y resultados derivan de lo mismo, como del tipo de razonamiento con el que miramos la realidad, de hecho hasta el estudio de los objetos de conocimiento que formulamos, en particular la problemática indígena de la cual no escapa, pues ella es parte de la producción material, objetiva y subjetiva de la cultura que provee el sostenimiento construido por el sistema-mundo moderno. La que es identificada aquí como la matriz cultural que la enuncia, a la cual actúa en dirección de su sostenimiento que, así lo menciona el autor citado, está por finalizar, por lo que nos encontramos en un punto de su transición hacia otro nuevo. Particularmente y respecto al marco actual de nuestro *sistema de saber* que el autor refiere, ya no sirve como antes, pues infiere que “la idea de que el saber científico y el filosófico-humanístico son radicalmente diferentes, como si constituyeran dos formas intelectualmente opuestas de *saber* el mundo” —el autor indica al respecto lo que en algún momento dio en llamarse la tesis de “las dos culturas”—, y que no sólo se está volviendo inadecuada como explicación de la masiva transición social que atravesamos, sino que incluso se convierte en un obstáculo a la hora de enfrentar la crisis de manera inteligente.

Anexo 2. Instrumento de exploración, primera parte
Construcción social del concepto de solución

Nombre:

Escuela de procedencia:

Edad:

Originario de:

Cuántos años lleva en el servicio:

1. ¿Consideras que existen diferencias en el lenguaje escolar (que él maneja o que él recibe) de la secundaria y el bachillerato, del bachillerato y el nivel profesional?
Da ejemplos (al menos 2 en cada caso).

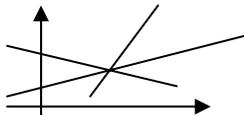
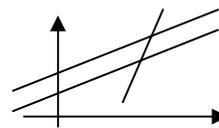
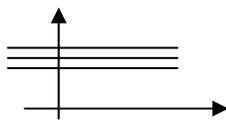
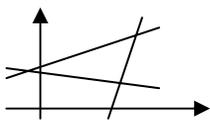
2. ¿Qué es solución para ti?

3. ¿Qué es resolver?

4. Resuelve $5x + 3y - 3 = 0$

5. ¿Es la única o tiene varias o ninguna?

6. En las siguientes disposiciones de tres rectas,



en cada caso, determina si tiene solución el sistema asociado, no tiene solución o un número infinito de los mismos.

En el caso de que tenga una o un número infinito, encierra el lugar donde visualizas la solución.

¿Qué dificultades tuviste? Especifica.

Anexo 3. Instrumento de trabajo de los profesores del nivel de Educación Básica

	Matemáticas
2h	Primera sesión
	Propósitos
	A través de las actividades de esta sesión se pretende que los participantes: 1- Distingan el trabajo que consiste en buscar una solución a un problema nuevo y apliquen reglas o fórmulas previamente aprendidas. 2- Comprendan que la búsqueda de la solución de un problema empieza a veces por tanteos, ensayos un poco al azar, errores y rectificaciones. 3- Valoren los procedimientos informales que se producen cuando se intenta resolver un problema nuevo, como parte de un proceso necesario y como experiencia de creatividad matemática.
	Material
	<i>Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado.</i>
1 h 20 min	1. Un problema matemático
	<i>Actividades</i>
20 min	1. En equipo, resuelvan los siguientes problemas: a) De un tubo galvanizado se cortan primero $\frac{3}{7}$, después $\frac{2}{7}$, y finalmente $\frac{1}{7}$. ¿Qué fracción del tubo original sobró? b) -¿Más cordel? -preguntó la madre, sacando las manos de la tina en la que lavaba. Ayer mismo te di un carrete. ¿Para qué necesitas tanto? ¿Dónde lo has metido? -¿Dónde lo he metido?, contestó el muchacho-. Primero tú tomaste la mitad... -¿Con qué quieres que amarre los paquetes de ropa blanca? -La mitad de lo que quedó se lo llevó Toña para pescar. -Debes ser condescendiente con tu hermano mayor. -Lo fui. Quedó muy poquito y de ello papá tomó la mitad para arreglarse los tirantes que se le habían roto de tanto reírse con el accidente de automóvil. Luego María necesitó dos quintos del resto, para amarrar no sé qué... -¿Qué has hecho con el resto del cordel? -¿Con el resto? ¡No quedaron más que 30 cm! ¿Qué longitud tenía el cordel al principio?
30 min	2. Un equipo, explique al grupo el o los procedimientos que utilizaron para resolver los problemas. Si otros equipos siguieron procedimientos diferentes, explíquenlos también.
30 min	3. En grupo, comenten las respuestas a las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none">• ¿Cuántos procedimientos distintos surgieron para cada problema?• ¿Por qué fue importante conocer los diferentes procedimientos que se utilizaron?• ¿Cuál de los dos problemas representó un reto para ustedes?• ¿Cómo obtuvieron la respuesta del primer problema?

Anexo 4. Dos procesos elegidos de los estudiantes-profesores

Proceso de resolución A. Por ejemplo, un estudiante-profesor del 7°A, dibujó 6 recuadros pintando rayitas verticales en cada uno, para de esta forma distribuir los elementos hasta que llegó en llenar de 4 rayitas cada recuadro, observando él mismo que de esta forma asociativa llevaba 24 lápices representados, sobrándole 4, a lo cual dijo que si los repartía con este mismo procedimiento tendría cajas con cinco elementos, lo que no era posible, ya que en el enunciado se señalaba que o bien eran de 4 o bien de 6, por lo que decidió posteriormente elegir los dos últimos registros de los recuadros y marcar 2 rayitas más en cada uno y, de esta forma obtener el resultado 4 de 4 y 2 de 6. En este proceso podemos observar que el profesor-estudiante establece una relación semejante a la de ensayo prueba y error, o bien por una búsqueda de guardar la coherencia lógica del enunciado, dicho de otra manera, su pretensión es tomar en cuenta las condiciones del problema.

Este procedimiento, se les comentó a los estudiantes-profesores del 1°C, lo había efectuado un estudiante-profesor del 7°A, debido a que le había despertado curiosidad en relación con la forma en que lo resolvió. La observación se hizo debido a que mostraban cierto interés sobre la manera en que había sido resuelto; al comentarlo en otros grupos, incluido éste, se les hizo notar que la estrategia empleada tenía más bien el tipo de ser una estrategia de repartición, de hecho, así se asumió, diciéndoles a los profesores-estudiantes que se podría considerar como una estrategia de repartición. Por otra parte, se consideró que su curiosidad se sostenía porque lo habían observado, que el problema había sido resuelto en una forma diferente a las que ellos habían examinado dentro del salón de clases.

Proceso de resolución B. En el caso del 7°B, la situación fue diferente, al ser planteada como parte de la exposición de un equipo formado en el grupo, donde se trataba de presentar el problema matemático como un reto hacia los demás, y una estudiante-profesora del equipo lo planteó al grupo, indicándoles que el problema además de ser visto como un reto podía ser considerado como un juego, señalando que se procediera a realizar el juego; después de transcurrido un tiempo razonable para que lo resolvieran los miembros del grupo y tomando en cuenta que lo hubiese resuelto la mayoría, fue ella quien formuló que podría ser parte de una posible estrategia didáctica que se podía implementar en el salón de clases, a través de su práctica docente. Pero, ¿cuál fue el proceso que ella mostró frente al grupo?

La referida estudiante-profesora procedió a pintar 28 rayitas verticales, tomando de 4 en 4, dibujó a la vez recuadros que los encerraran a éstos, deteniéndose cuando llevaba 16, o cuando había finalizado de pintar el cuarto recuadro de cuatro rayitas verticales, de ahí pasó rápidamente a indicar que llevábamos 16 y que quedaban 12 por lo que inmediatamente dibujó 2 recuadros, conteniendo cada uno 6 rayitas, señalando que había hecho de esta manera un total de 28 rayitas verticales, por tanto había repartido bajo esta representación todos los lápices.

Posteriormente preguntó si había dudas, a lo cual un maestro le mencionó que lo había resuelto de otra forma, por lo que la estudiante-profesora le pidió que pasara al pizarrón para indicar cómo lo había resuelto, una vez que el maestro lo platicó la profesora dio por terminada la exposición y la discusión sobre el tema.

Algunas notas

1. Ahora bien, puesto que el problema en efecto mostraba cierto interés de parte del grupo al que fue presentado es que se decidió aplicarlo al grupo del 7°A, y como las experiencias más o menos habían sido no disruptivas, el asesor del curso de Matemáticas II, lo retomó, pues estaban muy presentes las experiencias vividas con los alumnos de los anteriores dos grupos y lo introdujimos en la sesión de Metodología de la Investigación I con el 1°C, esperando el momento adecuado para engarzarlo con la dinámica de trabajo que trataba de mostrar el sentido metodológico de un contenido propio de cierto campo de conocimientos. En este caso correspondió al de las matemáticas, para ilustrar la importancia de la generación y explicitación de metodologías de enseñanza —consecuente al de la enseñanza de las matemáticas—, pero, también para precisar la diferencia con lo que es una metodología para la investigación, en el que el proceso anterior nos lo ilustraba adecuadamente, prestándose la situación para que el último equipo en intervención expusiera la investigación participativa bajo las condiciones anteriores ya descritas.

2. No se pretende argumentar aquí ni mucho menos justificar que la improvisación es lo alternativo, sino más bien describir el manejo de estrategias desarrolladas en el salón de clases, además de mostrar con la mayor fidelidad posible las características relevantes de la intervención del asesor, que considero, determinaron las posibles respuestas, asimismo los momentos de la vigilancia de un proceso de indagación que permitiera ilustrarlo, a la vez que obtener datos y someter a prueba el instrumento de investigación entre los profesores de educación básica.