

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

**DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA
CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN
HIELE Y LA VISUALIZACIÓN**

Tesis que para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Especialidad
en Matemática Educativa presenta:

Carla Kerlegand Bañales

Asesor:

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12 horas del día 19 del mes de Noviembre del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización

Presentada por el alumno:

Kerlegand

Apellido paterno

Bañales

materno

Carla

nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	4	0	1
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Dr. Apolo Castañeda Alonzo

Dr. Javier Lezama Andalón

M. C. Maria Guadalupe Calles Sanchez

M. C. Karina Viveros Vela

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día __09_ del mes _Diciembre____ del año __2008, el (la) que suscribe____CARLA KERLEGAND BAÑALES__ alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro __A050401____, ~~adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada,~~ Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de _____DR. ALEJANDRO ROSAS MENDOZA_____ y cede los derechos del trabajo intitulado _____DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACION____, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección _____kerabar@yahoo.com_____. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.


CARLA KERLEGAND BAÑALES
Nombre y firma

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

A Luis Manuel, Rodrigo, María José y Santiago

Glosario

Software de Geometría Dinámica. Programa que permite realizar construcciones geométricas en las cuales unos elementos dependen de otros, de manera que al cambiarse uno cambia también el otro.

Visualización. Proceso en el cual la percepción de imágenes estimula el pensamiento abstracto.

ÍNDICE DE FIGURAS Y GRÁFICAS

	<i>Pág.</i>
Índices de reprobación por temas (2006-2007)	5
Índices de reprobación por temas (2007-2008)	6
Resultados de encuesta de opinión sobre uso de Cabri	11
Niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele	18
Fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele	20
Criterios de validación de una solución mediante un software de Geometría Dinámica.	24
Niveles de razonamiento generales encontrados en el análisis preliminar	35
Nivel de razonamiento observado por pregunta en el análisis preliminar	36
Construcción de Alberto en la fase 2, nivel 1	62
Construcción de Alberto en la actividad C, fase 4, nivel 1	63
Construcción de Alberto en la actividad D, fase 4, nivel 1	64
Construcciones de Alberto en la fase 5, nivel 1	67
Construcción de Alberto en la actividad D, fase 2, nivel 2	68
Construcciones de Alberto en la fase 4, nivel 2	71
Construcción de Alberto en la actividad A, fase 5, nivel 2	72
Construcción de Alberto en la actividad B, fase 5, nivel 2	73
Construcción de Juan en la actividad D, fase 2, nivel 1	75
Construcciones de Juan en la fase 4, nivel 1	77
Construcciones de Juan en la fase 5, nivel 1	78
Construcción de Juan en la actividad D, fase 2, nivel 2	80
Construcción de Juan en la actividad B, fase 4, nivel 2	82
Construcción de Juan en la actividad A, fase 5, nivel 2	83
Construcción de Ambar en la actividad E, fase 2, nivel 1	88
Construcción de Ambar en la actividad D, fase 4, nivel 1	91
Construcciones de Ambar en la fase 5, nivel 1	92
Construcciones de Ambar en la fase 2, nivel 2	94

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Construcción de Ambar en la actividad C, fase 4, nivel 2	97
Construcción de Ambar en la actividad A, fase 5, nivel 2	98
Construcción de Ambar en la actividad B, fase 5, nivel 2	99
Construcción de Masayiri en la actividad D, fase 2, nivel 1	100
Construcción de Masayiri en la actividad B, fase 4, nivel 1	103
Construcción de Masayiri en la actividad D, fase 4, nivel 1	104
Construcción de Masayiri en la actividad A, fase 5, nivel 1	105
Construcción de Masayiri en la actividad B, fase 5, nivel 1	106
Construcción de Masayiri en la actividad A, fase 2, nivel 2	109
Construcción de Masayiri en la actividad C, fase 4, nivel 2	110
Construcción de Masayiri en la actividad A, fase 5, nivel 2	112
Construcción de Raúl en la actividad D, fase 2, nivel 1	113
Construcción de Raúl en la actividad B, fase 4, nivel 1	116
Construcción de Raúl en la actividad C, fase 4, nivel 1	116
Construcción de Raúl en la actividad D, fase 4, nivel 1	117
Construcciones de Raúl en la fase 5, nivel 1	119
Construcción de Raúl en la actividad A, fase 2, nivel 2	120
Construcción de Raúl en la actividad A, fase 4, nivel 2	122
Construcción de Raúl en la actividad B, fase 4, nivel 2	123

ÍNDICE DE TABLAS

	<i>Pág.</i>
Aspectos a evaluarse en el análisis preliminar	26
Niveles de razonamiento encontrados en el grupo de estudio (análisis preliminar)	38
Resultados globales de la actividad didáctica	125
Características observadas después de la aplicación de la actividad didáctica	126

RESUMEN

En este trabajo se muestra el desarrollo y los resultados de una investigación sobre la construcción de dos propiedades de la circunferencia en el marco teórico del Modelo de Van Hiele y la Visualización, apoyándose para ello en el uso de una herramienta tecnológica: el software de geometría dinámica Cabri-Géometre. Las etapas seguidas en la investigación fueron: exploración del contexto escolar, delimitación del marco teórico, análisis *a priori*, diseño de la actividad didáctica, análisis de resultados y conclusiones.

Una de las conclusiones más importantes de este trabajo es la factibilidad de que la herramienta tecnológica empleada favorece el proceso de visualización de las nociones y agiliza el tránsito de los estudiantes desde un nivel de razonamiento geométrico al inmediato superior de acuerdo al Modelo de Van Hiele. Este hecho es de particular importancia considerando que los programas de estudio marcan tiempos muy limitados para cada tema e involucran una gran cantidad de nociones.

ABSTRACT

This work shows the development and results of a two circumference properties construction research, within the framework of the Van Hiele Model and the Visualization Theory, supported in a technological instrument: the dynamic geometry software, Cabri Géomètre. The stages followed in the research were: examination of the school context, delimitation of the theoretical framework, an *a priori* analysis, the didactic sequence design, the analysis of the results and conclusions.

One of the most important conclusions of this work is the feasibility that the use of technological instruments facilitates the knowledge visualization processes and speeds up the pupil's transition from one geometric reasoning level to the upper one, in accordance with the Van Hiele Model. This fact has special importance if we consider that the curriculum designates short periods of time for each subject and involves a large number of notions.

ÍNDICE

	<i>Pág.</i>
Glosario	iii
Índice de figuras y gráficas	iv
Índice de tablas	vi
Resumen	vii
Abstract	viii
Capítulo I. Contexto Escolar.	
Introducción	1
1.1 El programa escolar	2
1.2 La situación escolar actual	5
1.3 Origen del problema de investigación	10
1.4 Estado del arte	13
Capítulo II. Marco Teórico	
Introducción	15
2.1 El modelo de Van Hiele	16
2.2 Teoría de la Visualización	23
Capítulo III. Actividad Didáctica sobre la Circunferencia	
Introducción	25
3.1 Actividad exploratoria	26
3.2 Diseño de la actividad didáctica	39
3.3 Análisis de resultados	60
Capítulo IV. Conclusiones	126
Referencias	132

CAPÍTULO I. CONTEXTO ESCOLAR

Introducción

En este capítulo hacemos un recuento de las razones que originaron este trabajo. En nuestra práctica docente, de 1992 a la fecha, en forma empírica se observó que en el curso de Geometría Analítica, especialmente durante el estudio de la circunferencia, los estudiantes experimentan diversos tipos de dificultades que en muchos casos les impiden alcanzar los objetivos propuestos por el programa de estudios.

Este capítulo aborda el contexto escolar en que se realizó la investigación, analizando particularmente lo siguiente:

- El programa escolar, en donde se muestran los objetivos que se plantean de forma general y de manera específica para el tema de circunferencia, además de las actividades que señalan su amplitud y el tiempo que se deberá dedicar a ellas.
- La situación escolar actual, en donde se describen las dificultades que de forma empírica hemos observado en los estudiantes al abordar el tema.
- El origen del problema de investigación, es decir, las razones por las que se decidió reflexionar sobre este tema y dentro de este marco teórico.
- El estado del arte, haciendo referencia a algunas investigaciones semejantes a la nuestra y que han sido realizadas por otros investigadores.

1.1- El programa escolar

El Colegio Indoamericano S. C. es una institución privada que ofrece estudios de bachillerato (nivel medio superior - 15 a 18 años) incorporados a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por lo que sus planes de estudio vigentes son los que se aprobaron en 1996 para la Escuela Nacional Preparatoria (ENP). El programa operativo desglosado de cada profesor/asignatura es revisado cada ciclo escolar por la Dirección General de Incorporación y Revalidación de Estudios (DGIRE), el cual debe respetar los contenidos temáticos del plan de estudios oficial de la ENP. A continuación mostramos los objetivos que señala dicho plan para los temas de esta investigación.

El programa de Matemáticas V del plan de estudios de la ENP (1996) abarca temas de Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones. Los objetivos generales del curso son:

1. *El alumno conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de las funciones con sus características y sus propiedades así como su representación gráfica en el plano cartesiano, las funciones trigonométricas directas e inversas, las funciones exponencial y logarítmica, la localización de puntos en tres dimensiones, la existencia del sistema de coordenadas polares, los conocimientos básicos de operación de la Geometría Analítica, la discusión de una ecuación de un lugar geométrico.*
2. *Reafirmar y profundizar los conocimientos de Geometría Euclidiana y Trigonometría adquiridos en cursos anteriores para plantear y resolver problemas de diversas disciplinas.*
3. *Fomentar en los alumnos la capacidad de razonamiento lógico, su espíritu crítico y el deseo de investigar para adquirir nuevos conocimientos, para plantear y resolver problemas de diversas disciplinas.*

(UNAM, 1996, p. 1)

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

La unidad 8 de dicho programa está dedicada al estudio de la circunferencia.

Los objetivos específicos para esta unidad son:

1. *Que el alumno determine la ecuación de un lugar geométrico, llamado circunferencia, de acuerdo con las condiciones dadas.*
2. *Que el alumno aplique los conceptos del lugar geométrico a problemas de su entorno.*

(UNAM, 1996, p. 23)

Entre los contenidos temáticos que involucra esta unidad se encuentra el de *Circunferencia determinada por tres condiciones* y *Elementos de una circunferencia*. Respecto a estos temas el programa sugiere algunas actividades como las siguientes:

- *El alumno obtendrá la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos.*
- *El alumno obtendrá la ecuación de una recta tangente a una circunferencia, conociendo el centro y el punto de tangencia.*
- *El alumno encontrará la ecuación de una circunferencia que incluya otros datos como el que sea concéntrica a otra circunferencia o cuyo centro esté sobre una recta y que pase por dos puntos conocidos.*
- *El profesor seleccionará diferentes problemas de aplicación para que el alumno los resuelva en el aula.*

(UNAM, 1996, p. 24)

El tiempo sugerido para el estudio de estos dos temas en particular es de seis clases, cada clase con una duración de 50 minutos, aunque el profesor, al calendarizar los contenidos de todo el programa tiene la libertad de asignar a cada tema tantas clases como crea conveniente siempre y cuando cubra todos los objetivos del programa durante el ciclo escolar.

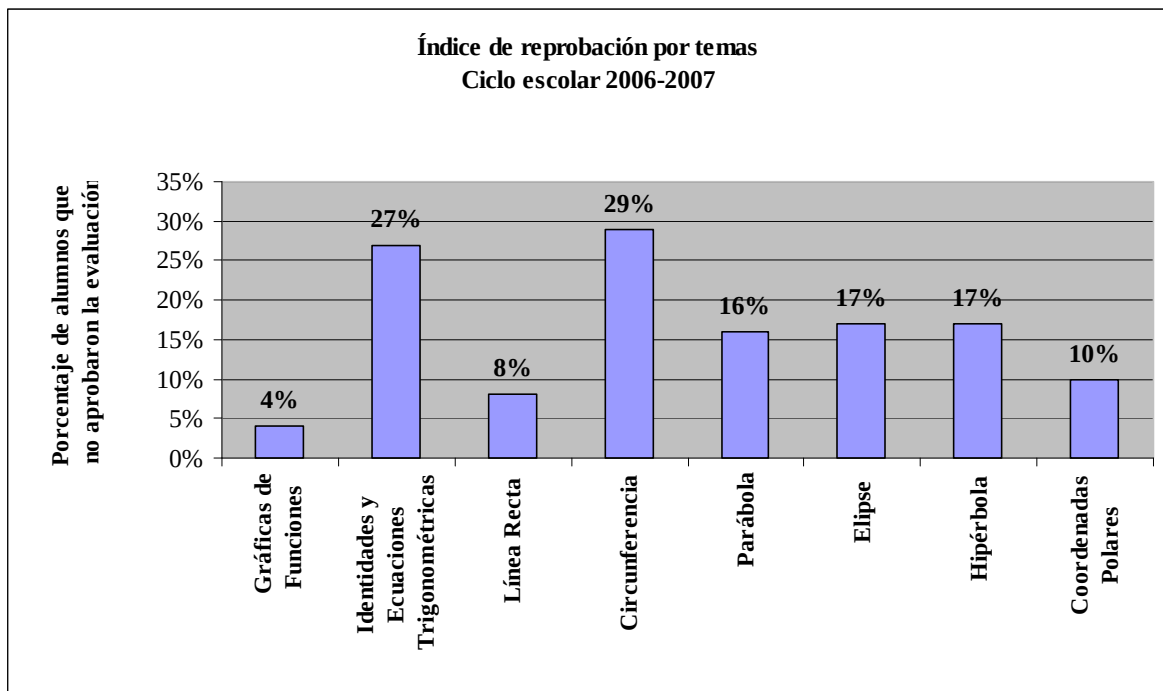
DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

De acuerdo a los objetivos del curso, generales y específicos, y las actividades que sugiere el programa para los temas mencionados relativos a la circunferencia, estos son los conocimientos que deben haber adquirido los alumnos al concluir este curso. Sin embargo, la pregunta natural que surge es si los estudiantes conocen los conceptos básicos que requieren para lograr lo que marca el programa de estudios. Los resultados que hemos obtenido a lo largo de varios años sugieren que los objetivos no se alcanzan en su totalidad y que los estudiantes presentan repetidamente dificultades para adquirir las nociones que se marcan en el programa de estudios.

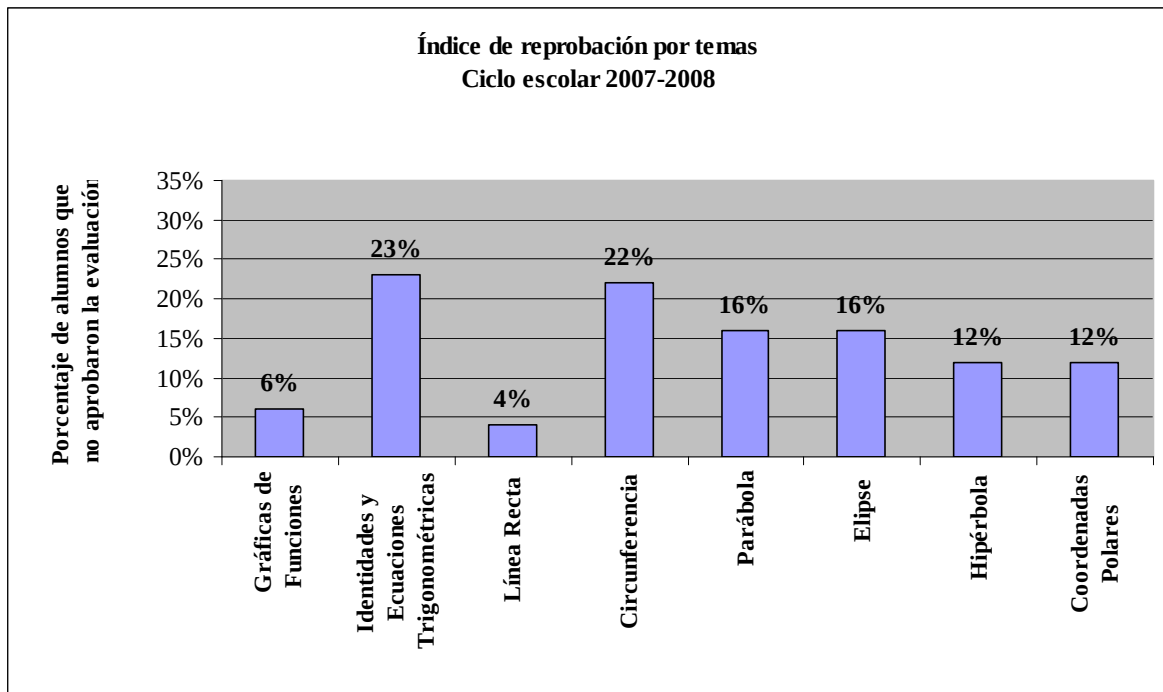
1.2- La situación escolar actual

El estudio de la circunferencia presenta dificultades para la mayoría de los estudiantes debido al grado de complejidad que exige el programa curricular y que no es semejante para otras curvas, como la parábola y la elipse, ya que se pide una mayor profundidad en el conocimiento de las propiedades de la circunferencia para la realización de las actividades sugeridas además de la resolución de problemas de aplicación. Los estudiantes, en general, no poseen el nivel de razonamiento geométrico requerido para ellas. Debido a lo cual, la Academia de Matemáticas del Colegio le ha asignado un mayor número de horas-clase al estudio de la circunferencia y decidió aplicar una evaluación exclusiva de este tema.

Al realizar un análisis del desempeño escolar de los alumnos considerando los temas específicos incluidos en cada evaluación se obtuvieron las siguientes gráficas que muestran los índices de reprobación que se han presentado en los alumnos del 5° año de bachillerato en el Colegio, en los ciclos escolares 2006-2007 y 2007-2008:



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



En estas gráficas se observa que los temas correspondientes a la trigonometría y la circunferencia son los que presentan mayores índices de reprobación y que en general en los temas de Geometría Analítica (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) el porcentaje de reprobados nunca es menor al 12%, como ocurre en otros temas en donde no se utiliza la Geometría.

Tomando en cuenta los resultados anteriores y de acuerdo con observaciones empíricas, basadas en nuestra experiencia docente, se ha observado en la mayoría de los estudiantes alguna de las siguientes dificultades:

- En algunas ocasiones los alumnos pueden relacionar las propiedades de una figura con otras propiedades de la misma figura, pero en diferentes circunstancias no pueden hacer esa relación. Cuando estamos estudiando la línea recta, por ejemplo,

pueden reconocer las propiedades de la mediatriz de un segmento de recta relacionando la perpendicularidad con un ángulo de 90° y al punto medio con distancias iguales a ambos lados de él. Pero si al estudiar la circunferencia y algunas de sus propiedades se le pide a los estudiantes que tracen la mediatriz de una cuerda de una circunferencia es frecuente que los alumnos pregunten: *¿Qué ángulo debe tener?*, aún cuando hayan leído la definición de mediatriz en donde se menciona la perpendicularidad.

- Los alumnos no poseen el vocabulario propio al nivel que el programa de estudios asume que debían tener. Si la instrucción de un ejercicio o el texto de un libro utiliza términos como *circunscrito*, *equidistante*, *colineal*, etc., la mayoría del grupo suele decir que no entiende el problema cuando en realidad es sólo una palabra la que desconocen.
- Los alumnos comprenden algunas de las interrelaciones existentes entre diversas propiedades de una figura geométrica cuando se hace que centren su atención en ellas pero si se les presenta dos situaciones aparentemente diferentes por sí mismos no las clasifican como pertenecientes a la misma familia, por lo que les es difícil resolver problemas distintos a los explicados como ejemplos por el profesor. Cuando los estudiantes no pueden resolver un problema suelen emplear frases como *Eso no lo hemos visto* o preguntar: *¿Nos lo va a explicar?*

A manera de evidencia realizamos la transcripción de las respuestas dadas por una de las alumnas a algunas preguntas que al respecto se le hicieron:

- Mariana, *¿Qué fue lo que te impidió resolver estos ejercicios?*
- *No me acuerdo de nada. Cuando usted explica los temas en el pizarrón sí le entiendo, pero yo sola no puedo resolverlos.*
- *En el ejercicio 3 (de una lista de 8 ejercicios que se le proporcionó) se te pide lo mismo que en el 2, que sí resolviste. ¿Qué pasó allí?*

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

- *¿Es lo mismo?*
- *En el problema 2 se te pide que encuentres la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos, y en el 3 que encuentres la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo. Y se te dan los vértices del triángulo. Me parece que es lo mismo. ¿A ti no?*
- *¿Qué quiere decir circunscrita?*
- ... (El profesor hace un pequeño croquis en el papel y le explica lo que pide el problema)
- *Mmm. Pues sí, sí es lo mismo. No le había entendido.*
- *Fíjate en el problema 5 (en donde se pide encontrar un punto equidistante de otros tres). ¿Qué se pide allí?*
- *No sé. No le entiendo.*
- ... (Otra vez el profesor... hace un croquis y le explica el concepto de equidistante)
- *O sea que sería como sacar el centro de una circunferencia, ¿no? Sí, ya le entendí. Déjeme hacerlo.*

Aunque sólo se platicó al respecto con Mariana, se ha observado que las dificultades que ella muestra al resolver los problemas dados, aún cuando es una estudiante que sobresale en matemáticas, se reproducen en la mayor parte de los alumnos continuamente durante el estudio de la circunferencia.

En general, la materia de Matemáticas V representa un reto para los estudiantes fundamentalmente por dos razones:

1. La Trigonometría y Geometría Analítica, áreas que abarca principalmente, están sostenidas en su mayor parte por contenidos matemáticos desconocidos por ellos; en el caso de la Trigonometría, han abordado en educación secundaria los conceptos básicos, como las razones trigonométricas y el

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

círculo trigonométrico, y para la Geometría Analítica sólo ideas generales sobre la circunferencia y polígonos. La idea de una curva cuyos puntos están representados por una relación algebraica se presenta como un primer gran obstáculo, seguido de la noción de que una relación puede estar sujeta a ciertas condiciones.

2. Los contenidos temáticos del programa de estudios son muy extensos para el tiempo del que se dispone para abordarlos. La necesidad de calendarizar en tiempos cortos implica que las nociones deberán construirse de manera rápida.

1.3.- Origen del problema de investigación

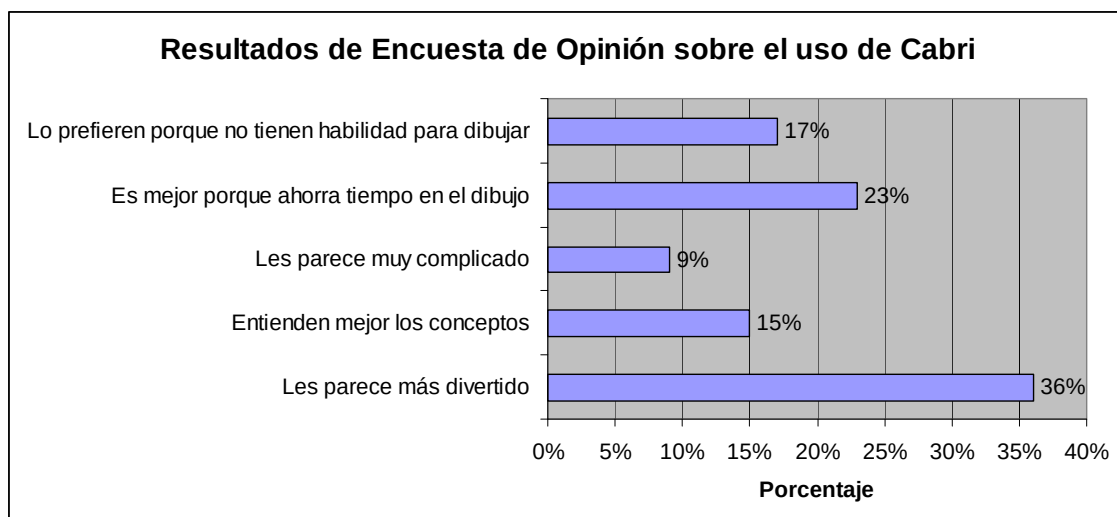
Las dificultades en el estudio de las propiedades de la circunferencia descritas en el apartado anterior se han presentado en los grupos de estudiantes repetidamente durante muchos ciclos escolares. En pláticas informales con otros profesores se corroboró, también en repetidas ocasiones, que dichas dificultades se presentaban de igual modo en sus estudiantes lo que generalizaba la problemática no sólo a grupos atendidos por un mismo profesor sino a toda la escuela. A partir de mi conocimiento del modelo de Van Hiele y de la teoría de la Visualización surgieron algunas interrogantes a las que pretendía responder, por lo menos parcialmente, al iniciar esta investigación:

- *¿Poseen los estudiantes el nivel de razonamiento geométrico necesario, de acuerdo al modelo de Van Hiele, para desarrollar las actividades que plantea el programa de estudios para el tema de circunferencia?*
- *Si se diseñara una secuencia didáctica siguiendo las Fases de Aprendizaje del modelo de Van Hiele, ¿podría agilizarse el tránsito de los estudiantes a un nivel de razonamiento superior teniendo como objeto matemático a dos propiedades de la circunferencia?*
- *¿Cómo contribuye la visualización, como proceso de elaboración de conjeturas y como proceso validador de ellas, al tránsito de los estudiantes por las fases de aprendizaje, si se apoya en un software de Geometría Dinámica?*
- *¿El uso de una herramienta tecnológica como Cabri puede constituirse como una herramienta útil y no como una dificultad más?*

La utilidad de Cabri en el proceso de visualización, como proceso *validador* de conjeturas, ya ha sido probada en estos mismos estudiantes, objetos de estudio de esta investigación, en tópicos propios de la Geometría Analítica. Cabri lo habíamos

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

utilizado para probar, por ejemplo, las definiciones de circunferencia y elipse, y para verificar ecuaciones obtenidas analíticamente. En estas actividades previas no observamos dificultades por parte de los estudiantes en el uso del programa, aunque cabe decir que en ellas no se requería de una clara comprensión de las relaciones de dependencia entre unos elementos y otros de las construcciones ya que no estaban sujetas a la prueba del *dragging* o arrastre. En esta investigación, en donde se pretende que el alumno elabore conjeturas y las valide a través del programa, el entendimiento de las relaciones de dependencia mencionadas podría presentarse como un obstáculo. Sin embargo, debido a la utilidad ya mencionada de Cabri y a su aparente influencia en la disminución del índice de reprobación en los estudiantes al evaluarse estos temas, se consideró utilizarlo como una herramienta viable para lograr el objetivo, además de la preferencia que tienen los estudiantes del uso de herramientas tecnológicas. Para ilustrar esto, se aplicó a un grupo de 40 alumnos una encuesta de preferencia del uso del software vs. pizarrón-lápiz-papel en el estudio de algunos temas de Geometría Analítica, observándose en sus respuestas las siguientes tendencias:



Debido a esta preferencia por parte de los estudiantes a utilizar un software de Geometría Dinámica, a los tiempos limitados de que disponemos para construir las

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

nociones de acuerdo al Programa de Estudios y a la utilidad de esta herramienta ya demostrada, por nosotros mismos y más profundamente en otras investigaciones, es que consideramos diseñar actividades en el ambiente Cabri con el propósito de que los estudiantes alcancen un nivel de razonamiento geométrico superior, de acuerdo al modelo de Van Hiele, teniendo como objeto matemático a dos propiedades de la circunferencia.

1.4.- Estado del arte

Existen una gran cantidad de trabajos de investigación referentes a temas de Cabri, temas que van desde la potencialidad del software en general hasta estudios muy específicos sobre un tópico en particular.

Uno de estos trabajos es el de Jones (2000), en el cual el objeto matemático incluido es la clasificación de cuadriláteros, el cual tiene diferentes fundamentos teóricos, como el modelo de Van Hiele sobre la enseñanza y el aprendizaje de conceptos geométricos, trabajos de Balacheff (1988), deVilliers (1990) y Hanna (1998) sobre las perspectivas del razonamiento deductivo y el ejercicio de las pruebas en el entendimiento de la Geometría, y otros más. Una de las conclusiones más importantes de esta investigación es que el uso del programa de geometría dinámica, bajo las suposiciones de que

- se diseñan cuidadosamente las tareas a asignar al estudiante,
- se realiza una adecuada intervención por parte del profesor, y
- se facilita la elaboración y prueba de conjeturas,

permite a los estudiantes alcanzar niveles más altos en la adquisición de nociones de geometría.

Jones (2000) afirma en este trabajo que la experiencia con Cabri parece eliminar la separación que tradicionalmente existe entre la construcción de figuras y la deducción de sus propiedades; al contrario de esto, Cabri juega un importante rol en la elaboración de nuevas conjeturas por parte del estudiante, pero parece también reducir, gracias a la ya mencionada función de *dragging*, la necesidad de pruebas o demostraciones formales.

También menciona que el estudiante, al pasar del nivel 2 de razonamiento geométrico de Van Hiele (identificación de figuras por sus propiedades, vistas

independientemente) al nivel 3 (donde se reconoce que una propiedad geométrica de la figura está relacionada con otras), está logrando un gran progreso sentando aquí las bases necesarias para las deducciones y pruebas en el nivel 4.

Según Jones (2000), el uso de Cabri puede ayudar a los estudiantes a alcanzar niveles de razonamiento más altos, no porque simplemente facilite los procesos mentales que se llevan a cabo en ambientes tradicionales sino transformándolos.

En otro trabajo, de Medina, Astiz y otros (2001), se describe una experiencia con Cabri en la cual el objetivo era construir con el programa un triángulo equilátero de cualquier medida, y una vez construido, que la propiedad de equilátero se mantuviera al cambiar la longitud de cualquiera de sus lados. Las conclusiones de este trabajo fueron que el uso del software permite al alumno generar estrategias ya que tiene la posibilidad de modificar las condiciones originales en la construcción de las figuras, y que dichas estrategias son trasladadas después a otros objetos (como, en este caso, a la construcción de triángulos isósceles).

Ambos estudios tienen un punto en común: una etapa fundamental en la construcción de nociones con Cabri-Géomètre es el establecimiento de las relaciones de dependencia entre los distintos objetos que conforman la figura, sobre todo para que sea posible la prueba de dragging sin afectarse las condiciones de construcción, situación que no es determinante en el ambiente tradicional de lápiz, papel y juego de geometría. El establecer estas relaciones de dependencia corresponde a un nuevo proceso mental de *matematización*, propio entonces al ambiente Cabri. El trabajo de Jones, además, está ubicado en el contexto del modelo de Van Hiele.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

Introducción

En este capítulo se describen las dos teorías que sirvieron de marco para esta investigación: El Modelo de Van Hiele y la Teoría de la Visualización.

El Modelo de Van Hiele explica, desde una perspectiva cognitiva, cómo se desarrolla el pensamiento geométrico de los estudiantes, y desde una perspectiva didáctica la manera en que el profesor puede guiar este desarrollo para alcanzar niveles de razonamiento más altos.

Por otro lado, la Teoría de la Visualización explica cómo los estudiantes aprenden viendo, considerando a este proceso principalmente de dos formas: uno, como proceso formador de imágenes, y otro como proceso validador de conjeturas.

2.1.- El Modelo de Van Hiele.

Para Braga (1991), las dos escuelas psicopedagógicas que más ideas han aportado respecto a la didáctica psicológica de la enseñanza de la geometría han sido la escuela piagetiana y la de los esposos holandeses Pierre y Dina Van Hiele. En esta última la pareja, a partir de su experiencia docente, elaboró un modelo que trata de explicar por un lado cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y por otro cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento.

De esta forma los componentes principales del modelo van Hiele son la "teoría de los niveles de razonamiento", que explica cómo se produce el desarrollo en la calidad de razonamiento geométrico de los estudiantes cuando éstos estudian geometría, y las "fases de aprendizaje", que constituye su propuesta didáctica para la secuenciación de actividades de enseñanza-aprendizaje en el aula, con el objeto de facilitar el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediato superior.

Jaime y Gutiérrez (1990) describen las ideas centrales del Modelo de Van Hiele de la siguiente manera:

- Se pueden encontrar diferentes niveles de perfección en el razonamiento geométrico de los estudiantes.
- Un estudiante sólo podrá comprender aquellos conceptos que correspondan a su nivel de razonamiento geométrico.
- Si una noción matemática no puede ser presentada a un estudiante de acuerdo a su nivel actual de razonamiento geométrico, entonces se deberá esperar a que alcance el adecuado para abordarla.
- No se puede enseñar a una persona a razonar de determinada manera. Pero sí se puede, mediante actividades diseñadas para ello, ayudarla a que lo haga.

Esta última idea representa una gran diferencia entre las teorías del aprendizaje de la escuela piagetana y la de los Van Hiele: en la primera se considera que el desarrollo del razonamiento está fuertemente ligado a la madurez biológica de la persona, en la segunda se consideran como procesos independientes de manera que un profesor, mediante actividades adecuadas, puede influir y acelerar la evolución del razonamiento del individuo.

Los niveles de razonamiento

En el modelo de Van Hiele los *niveles de razonamiento* describen los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que va desde el razonamiento intuitivo de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las Facultades de Ciencias. De acuerdo con el modelo, si el aprendiz es guiado por instrucciones adecuadas avanza a través de los cinco niveles de razonamiento, empezando con el reconocimiento de figuras como un todo, sin identificar características especiales (nivel 1), progresando hacia el descubrimiento de las propiedades de las figuras y hacia el razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 2 y 3), y culminando con un estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 4 y 5).

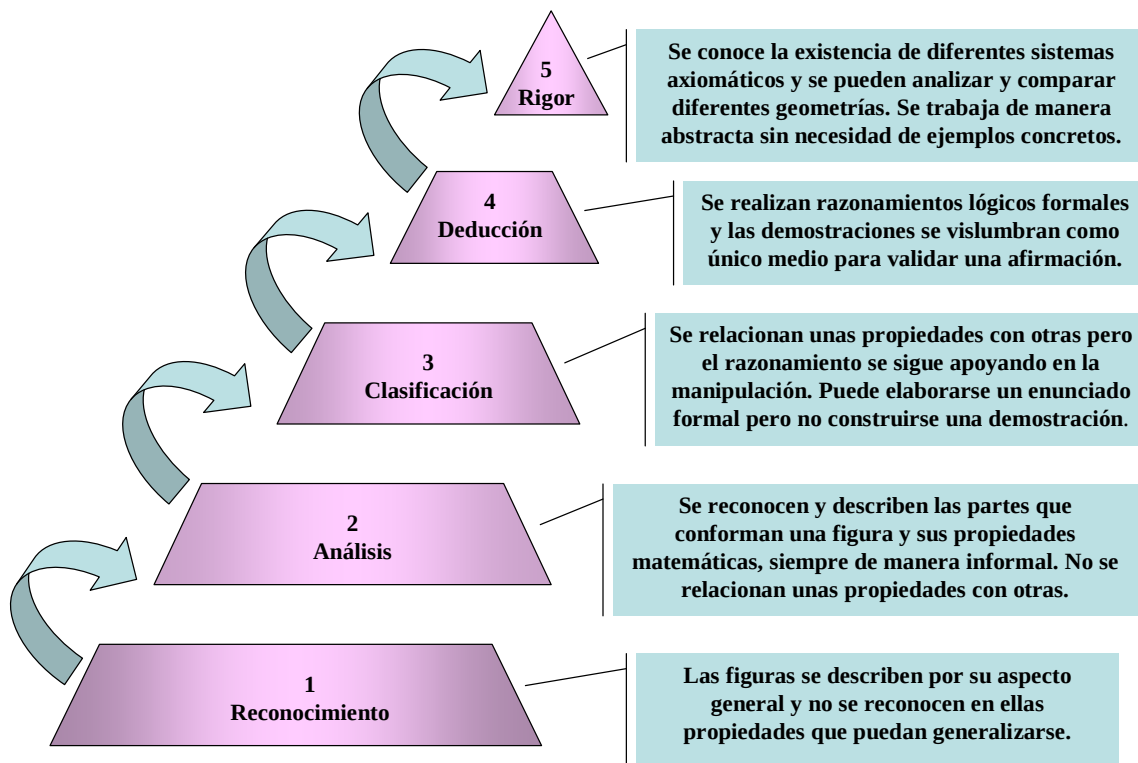
El nivel 1 es denominado nivel de *reconocimiento o visualización*; el nivel 2, *nivel de análisis*; el nivel 3 *clasificación o abstracción*; el nivel 4 *deducción*, y el nivel 5 *rigor*. Otros autores, como Teppo (1991), hacen referencia a estos mismos cinco niveles con numeración distinta, es decir, comienzan con el nivel 0 como primer nivel y culminan con el nivel 4. Algunos investigadores consideran que el último nivel aquí mencionado, el de *rigor*, en realidad no existe, y otros que es imposible que un estudiante promedio lo alcance y sólo es accesible para matemáticos muy avanzados con niveles de abstracción privilegiados.

Los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global. El modelo es recursivo, es decir cada nivel

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

se construye sobre el anterior, coincidiéndose el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas. No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel anterior.

NIVELES DE RAZONAMIENTO DEL MODELO DE VAN HIELE



Algunas características del razonamiento geométrico en cada uno de estos niveles son:

- **Nivel 1: Reconocimiento o Visualización.** Las figuras se describen por su aspecto general y no se reconocen en ellas propiedades que puedan

generalizarse. En este nivel las descripciones suelen ser comparaciones con otras formas y en ellas suele hacerse alusión a características irrelevantes. No se reconocen partes o componentes de las figuras.

- **Nivel 2: *Análisis*.** Se reconocen y describen las partes que conforman una figura y sus propiedades matemáticas, siempre de manera informal. Este reconocimiento puede hacerse a partir de la observación o bien a través de la experimentación hacer la deducción de otras propiedades; sin embargo, no se pueden clasificar familias de figuras ya que no se relacionan unas propiedades con otras.
- **Nivel 3: *Clasificación o Abstracción*.** Se relacionan unas propiedades con otras por lo que pueden reconocerse familias de figuras pero el razonamiento se sigue apoyando en la manipulación. Puede elaborarse un enunciado formal pero no construirse una demostración, aunque puede seguirse y entenderse cuando el profesor la hace en el pizarrón.
- **Nivel 4: *Deducción*.** Se realizan razonamientos lógicos formales y las demostraciones se vislumbran como único medio para validar una afirmación. En este nivel los teoremas o axiomas adquieren sentido y se vislumbra su utilidad.
- **Nivel 5: *Rigor*.** Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar diferentes geometrías. Se trabaja de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos.

Como explican Jaime y Gutiérrez (1990) a cada nivel de razonamiento geométrico corresponde un tipo de lenguaje específico: existe una estrecha relación entre los niveles y el lenguaje. Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada nivel no solo se reflejan en la forma de resolver problemas sino también en la forma de expresarse o de interpretar el vocabulario. Esto implica que una palabra puede entenderse de distinta forma en los distintos niveles de razonamiento y este hecho debe ser tomado muy en cuenta por el profesor: siendo que el lenguaje es la vía de comunicación entre docente-alumno, si el primero quiere ser comprendido deberá dirigirse a sus alumnos con palabras

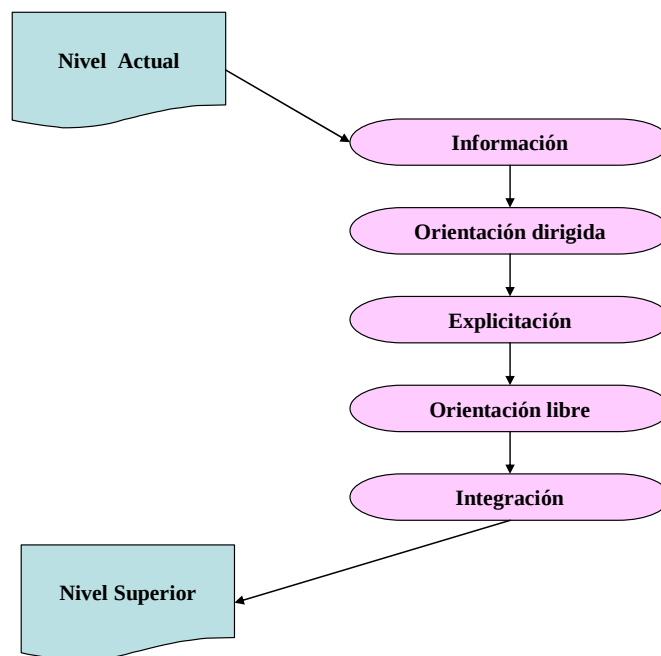
adecuadas a su nivel de razonamiento y a partir de ahí transitar con ellos por cada etapa hasta alcanzar un nivel superior.

Las fases de aprendizaje

De acuerdo al modelo de Van Hiele, para pasar de un nivel de razonamiento geométrico al nivel inmediato superior es necesario que el estudiante realice distintas actividades, las cuales deben ser diseñadas para que transite por el nivel en el que se encuentra hacia el siguiente pasando por cinco fases a las que se les llama *fases de aprendizaje*.

Esta parte del modelo ha permitido que tenga una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países, ya que provee una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tienen actualmente.

FASES DE APRENDIZAJE DEL MODELO DE VAN HIELE



Las características generales de las actividades en cada fase de aprendizaje son:

1. **Información.** En esta fase las actividades deben revelar a los estudiantes el área de la geometría a estudiar; también tienen como objetivo que conozcan el material a utilizar y el dirigir la atención de los estudiantes. Los problemas que aquí se planteen, si se hace, no deben necesariamente ser resueltos sino hacer ver la necesidad del conocimiento matemático.
2. **Orientación dirigida.** En esta etapa las actividades deben enfocarse a delimitar los elementos principales – conceptos, propiedades, etc. – que los estudiantes deben reconocer y aprender a razonar, es decir, en ellas los alumnos deben descubrir y comprender los conceptos y propiedades deseados. Los problemas deberán plantear una situación en cuya resolución aparezcan dichos elementos. Los conceptos y estructuras deben presentarse en forma progresiva.
3. **Explicitación.** Aquí los estudiantes deberán intercambiar sus experiencias, explicar cómo han resuelto sus actividades y justificar sus resultados. Es una fase de revisión del trabajo realizado y de perfeccionamiento del lenguaje (entendiéndose como el vocabulario correspondiente al nuevo nivel de razonamiento al que se desea acceder).
4. **Orientación libre.** En esta fase las actividades deben plantear problemas más complejos donde los estudiantes combinen sus conocimientos y los apliquen en situaciones diferentes a las iniciales, en donde deban emplear una nueva forma de razonar. Si en la primera fase no se resolvió algún problema, aquí puede volver a formularse.
5. **Integración.** En esta etapa final las situaciones que se revisen deben representar una acumulación, comparación y combinación de conceptos adquiridos y en donde no se vislumbre ningún conocimiento nuevo. En esta fase también se puede comprobar si el conocimiento fue adquirido.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Para cada nivel de razonamiento las actividades deben contener elementos explícitos, que se abordan y manipulan abiertamente en ellas, que ya han sido adquiridos por los estudiantes, y elementos implícitos, es decir, aquellos que deben incorporarse paulatinamente y que empiezan a adquirirse, pero de los cuales los estudiantes no son conscientes de su importancia y por lo cual no los emplearán explícitamente sino hasta encontrarse en el nivel superior de razonamiento. El reconocimiento por parte del profesor de ambos tipos de elementos, implícitos y explícitos, en las nociones que pretenda que el estudiante construya, y su conocimiento del nivel en que se encuentran sus alumnos será su guía en el diseño de las actividades.

2.2.- Teoría de la Visualización.

La visualización puede definirse de diversas formas, más allá de la idea inmediata de observar algo o utilizar el sentido de la vista. En matemáticas, visualizar no significa simplemente ver al objeto matemático, ya sea una figura, gráfica, representación algebraica o cualquiera otra, sino que refiere a un proceso más complejo en donde las imágenes estimulan el pensamiento abstracto del que las percibe o genera.

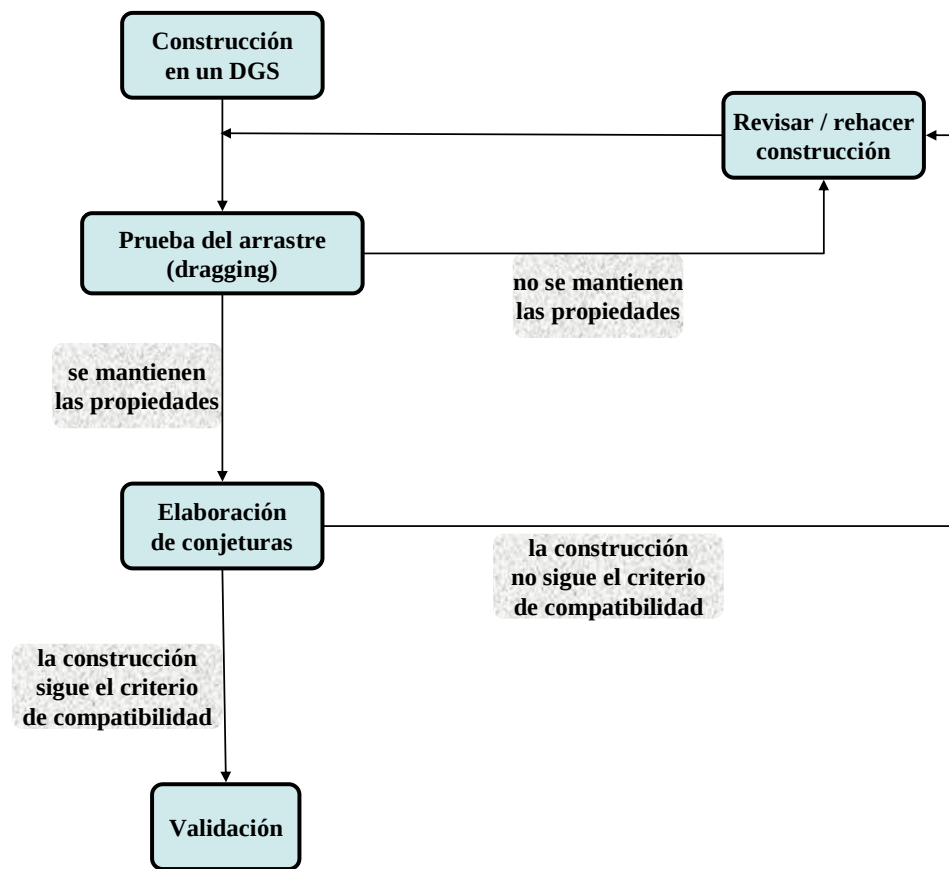
Para Zimmermann y Cunningham (1991), por ejemplo, la visualización es un *proceso mediante el cual se forman imágenes* (mentalmente, con lápiz y papel, o con ayuda de la tecnología) y se utilizan para una mejor comprensión de los objetos matemáticos y para estimular el proceso de descubrimiento y construcción de las nociones. La experimentación y la visualización permiten reorganizar el pensamiento matemático, elaborar más fácilmente conjeturas que promuevan la investigación y construcción de conocimiento. Esta interpretación de la visualización ha sido ampliamente discutida y existen numerosas investigaciones en donde se analiza su rol en el aprendizaje de las matemáticas.

Una interpretación diferente es aquella en donde se define a la visualización como un *proceso de validación de conjeturas*, la cual ha sido menos discutida principalmente por una razón: para la mayoría de los matemáticos, una solución mostrada de esta forma no representa una prueba formal.

Según Stylianides (2005) existen dos criterios mediante los cuales se puede determinar si una solución obtenida a través de una construcción con un Software de Geometría Dinámica (DGS, por sus siglas en inglés) se considera válida:

1°. Si al *arrastrar* los elementos de la figura (dragging) se siguen conservando sus propiedades geométricas (Drag Test Criterion)

2º. Si la construcción conserva las propiedades después del *dragging* y además se utilizan únicamente los operadores del programa equivalentes al uso de regla y compás (Compatibility Criterion), es decir, a los instrumentos tradicionales para el trazo de figuras geométricas.



Cabri, y en general los DGS, son una herramienta útil para la formulación de conjeturas y validar soluciones, si bien esta validación no sustituye a una prueba o deducción formal. Sin embargo, como demostraron Hallack y León (2004), también puede conducirnos a formular conclusiones erróneas. Al adoptar Cabri o cualquier DGS como un instrumento didáctico el profesor debe prever esta posibilidad e incluso manipularla con objetivos bien definidos; los DGS son finalmente sólo instrumentos y como tales tienen limitaciones.

CAPÍTULO III.

ACTIVIDAD DIDÁCTICA SOBRE LA CIRCUNFERENCIA

Introducción

En este capítulo se describen los pasos seguidos en el diseño y aplicación de la actividad didáctica sobre la circunferencia:

1. Actividad exploratoria, cuyo objetivo fue el identificar el nivel de razonamiento geométrico de un grupo de 41 estudiantes de 5° año de bachillerato que ya habían estudiado a la circunferencia. De este grupo se eligió a seis estudiantes para continuar la investigación.
2. Diseño de la actividad didáctica a desarrollarse con Cabri, con la que se pretendía que los estudiantes alcanzaran un nivel de razonamiento geométrico superior teniendo como objeto matemático a dos propiedades de la circunferencia.
3. Análisis de resultados, en donde se observa el trabajo realizado por cada uno de los estudiantes.

3.1.- Actividad exploratoria

Con el fin de identificar en qué nivel de razonamiento geométrico, de acuerdo al modelo de Van Hiele, se encuentra cada uno de los estudiantes de un grupo de 5º grado de bachillerato, se diseñó y aplicó un cuestionario; esos alumnos están por concluir su curso de Geometría Analítica dentro del cual se aborda el tema de circunferencia. Consiste en 8 preguntas las cuales contemplan los siguientes aspectos generales:

No. de pregunta	Aspecto(s) que evalúa
1, 4 y 5	<i>Descripción.</i> Los elementos que componen una definición de la figura (atributos dados, vocabulario, partes y propiedades que reconoce, simbología, etc.) se distinguen para cada nivel de razonamiento geométrico.
2 y 3	<i>Diferenciación.</i> El reconocimiento y la explicación de semejanzas y diferencias entre figuras geométricas varían de acuerdo al nivel de razonamiento.
6	<i>Reconocimiento.</i> El reconocimiento de propiedades se logra a partir del nivel 2 de razonamiento geométrico.
7	<i>Relación.</i> La relación de propiedades se logra a partir del nivel 3 de razonamiento geométrico.
8	<i>Deducción.</i> Característica del nivel 4 de razonamiento geométrico.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

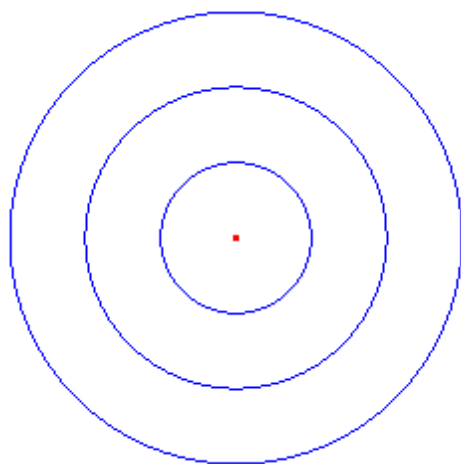
El cuestionario es el siguiente:

1.- ¿Cómo defines a una circunferencia?

Esta pregunta tiene como objetivo el analizar la descripción hecha por el alumno. Para un estudiante con nivel de razonamiento 1, una descripción se basa en su semejanza con otros objetos, matemáticos o no, sin reconocer los elementos que lo componen ni sus propiedades matemáticas y sin generalizar sus características para todos los objetos de su misma clase. Para un estudiante en nivel 2, las figuras geométricas están compuestas de elementos y propiedades, aunque las describen de manera informal, y son capaces de generalizar sus características. En el nivel 3, un estudiante puede dar una definición formal, matemáticamente correcta y que cumpla con los requisitos que una definición implica, mientras que un estudiante en nivel 4 es capaz, además, de definir al objeto con símbolos matemáticos y efectuar razonamientos lógicos y deducciones formales.

Dado que los alumnos a los que se aplicará el cuestionario ya han estudiado a la circunferencia, se espera que su descripción contenga elementos como el centro y el radio o que se refieran a ella como el *lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano* con determinadas condiciones.

2.- Observa las siguientes figuras.



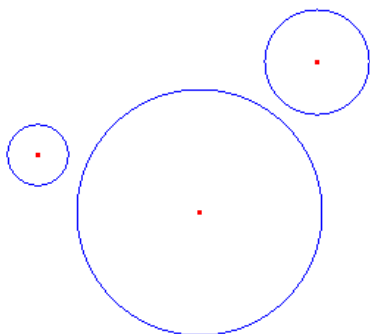
¿Encuentras semejanzas entre ellas? _____

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas semejanzas?

¿Encuentras diferencias entre ellas? _____

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas diferencias?

3.- Observa las siguientes figuras:



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

¿Encuentras semejanzas entre ellas? _____

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas semejanzas?

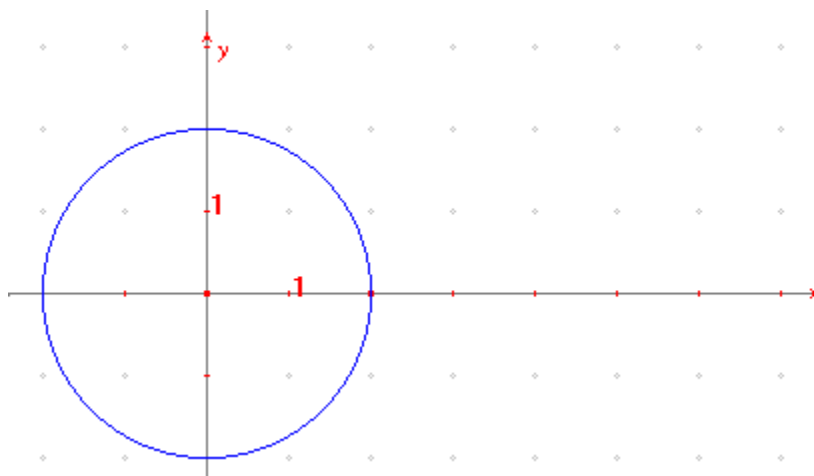
¿Encuentras diferencias entre ellas? _____

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas diferencias?

Las preguntas 2 y 3 tienen como objetivo el observar las diferenciaciones que son capaces de hacer los estudiantes entre varias figuras. El reconocimiento y la explicación de semejanzas y diferencias entre figuras geométricas varían de acuerdo al nivel de razonamiento. En el nivel 1, las semejanzas o diferenciaciones se explican por características globales, sin hacer referencia a una característica, propiedad o elemento en particular, referencia que sí se hace al encontrarse en el nivel 2. En el nivel 3, además de observarse las propiedades, pueden hacer relaciones entre ellas y analizar sus implicaciones, sin lograr hacer una demostración formal. En el nivel 4 el estudiante puede relacionar las propiedades de las figuras, hacer la demostración formal de un teorema y plantear definiciones equivalentes de un mismo concepto.

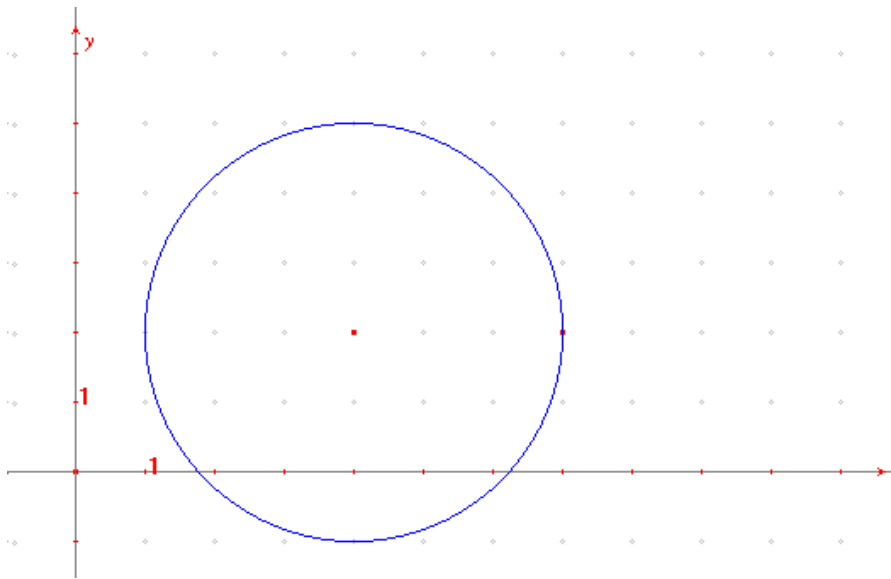
En las dos preguntas anteriores se espera que hagan referencia a *distinto radio* o *mismo centro*, es decir, que mencionen propiedades de la circunferencia para explicar las semejanzas y diferencias.

4.- Observa la siguiente figura y descríbela.



5.- Observa la siguiente figura y descríbela.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

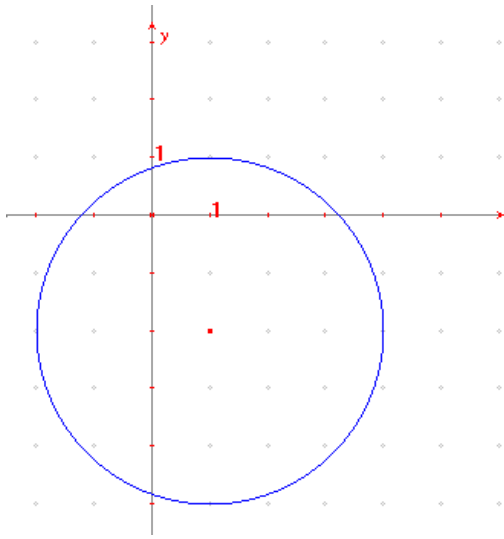


Las preguntas 4 y 5 tienen como objetivo analizar las descripciones de los estudiantes al aparecer en las figuras el sistema de ejes de referencia y la cuadrícula, por lo que se esperan datos cuantitativos en ellas, en estudiantes con nivel superior al 1. En el nivel 2, la descripción incluye ya elementos matemáticos y se hace alusión a las propiedades de la figura pero de manera informal y sin relacionarlas entre ellas. En el nivel 3 el estudiante ya es capaz de reconocer que de unas propiedades se deducen otras y las implicaciones que ello tiene, manipula elementos matemáticos y los incluye en su definición, formal. En el nivel 4, la descripción ya incluye términos específicos, innecesarios para quien se encuentra en el nivel 3, pero necesarios para que englobe rigurosamente los objetos de la misma clase del que se describe.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

En estas dos preguntas se espera que los estudiantes definan las circunferencias mencionando la magnitud del radio y las coordenadas del centro o que, en su defecto, las definan *con centro en el origen* o *con centro fuera del origen*.

6.- La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, donde (h,k) son las coordenadas del centro y r es su radio. ¿Cuál de las ecuaciones dadas corresponde a la circunferencia mostrada en la siguiente figura?



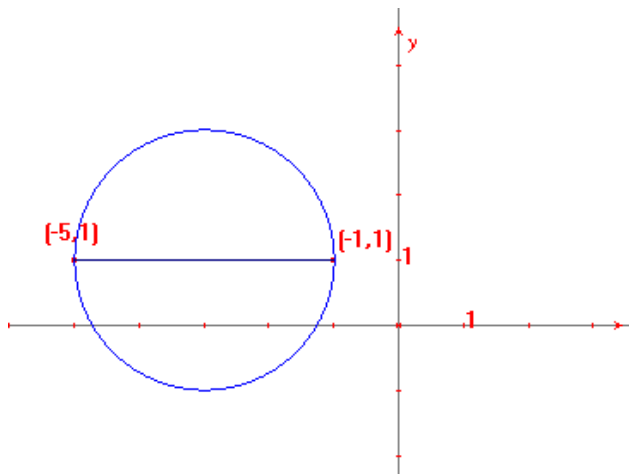
a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$
b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$
c) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$
d) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

¿Por qué?

El objetivo de esta pregunta es observar si el estudiante reconoce las propiedades de la figura y las relaciona con la ecuación dada. Este reconocimiento se logra a partir del nivel 2.

En esta pregunta se espera que el estudiante explique su respuesta diciendo cuáles son las coordenadas del centro y la longitud del radio. Se espera que varios de ellos equivoquen la respuesta ya que en nuestra experiencia hemos observado que no relacionan las propiedades observadas con la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y confunden los signos de las coordenadas del centro u olvidan que el radio aparece al cuadrado.

7.- Determina la ecuación de la siguiente circunferencia si el segmento mostrado es uno de sus diámetros:



Para poder determinar la ecuación de la curva, el estudiante deberá de relacionar varias propiedades diferentes de ella, capacidad que tiene a partir del nivel 3.

Se espera que sólo unos pocos estudiantes puedan obtener la ecuación correcta. En nuestra experiencia hemos observado que al poco tiempo de la evaluación los estudiantes parecen haber olvidado las nociones aprendidas.

8.- ¿De qué manera se deduce la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$?

El razonamiento lógico formal se logra en el nivel 4.

Para esta pregunta no se espera que alguno de los estudiantes pueda responder correctamente. Durante las sesiones de clase se ha observado que algunos de ellos pueden *seguir* una demostración hecha por el profesor pero no se ha presentado evidencia de que puedan construirla por sí mismos.

Se aplicó este cuestionario a un grupo de 41 alumnos de 5º grado de bachillerato, los cuales habían estudiado con anterioridad temas relacionados con la circunferencia dentro de su curso de Geometría Analítica. En base a lo que cada alumno contestó a cada una de las preguntas se le asignó a cada respuesta un valor entre 1 y 4 de acuerdo al nivel de razonamiento mostrado, según el modelo de Van Hiele, y se observó la frecuencia de cada nivel en las respuestas (por alumno y por pregunta).

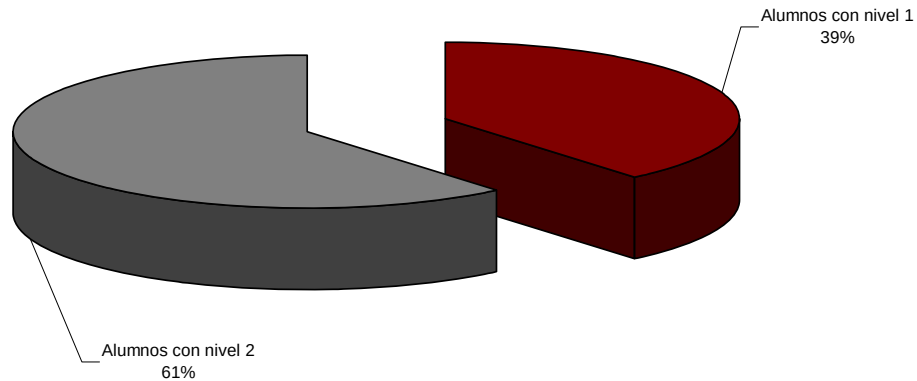
Los resultados que se obtuvieron son:

1.- El 39% de los alumnos (16 alumnos) muestra un nivel de razonamiento predominante en sus respuestas igual a 1 y el 61% restante (25 estudiantes) nivel 2.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

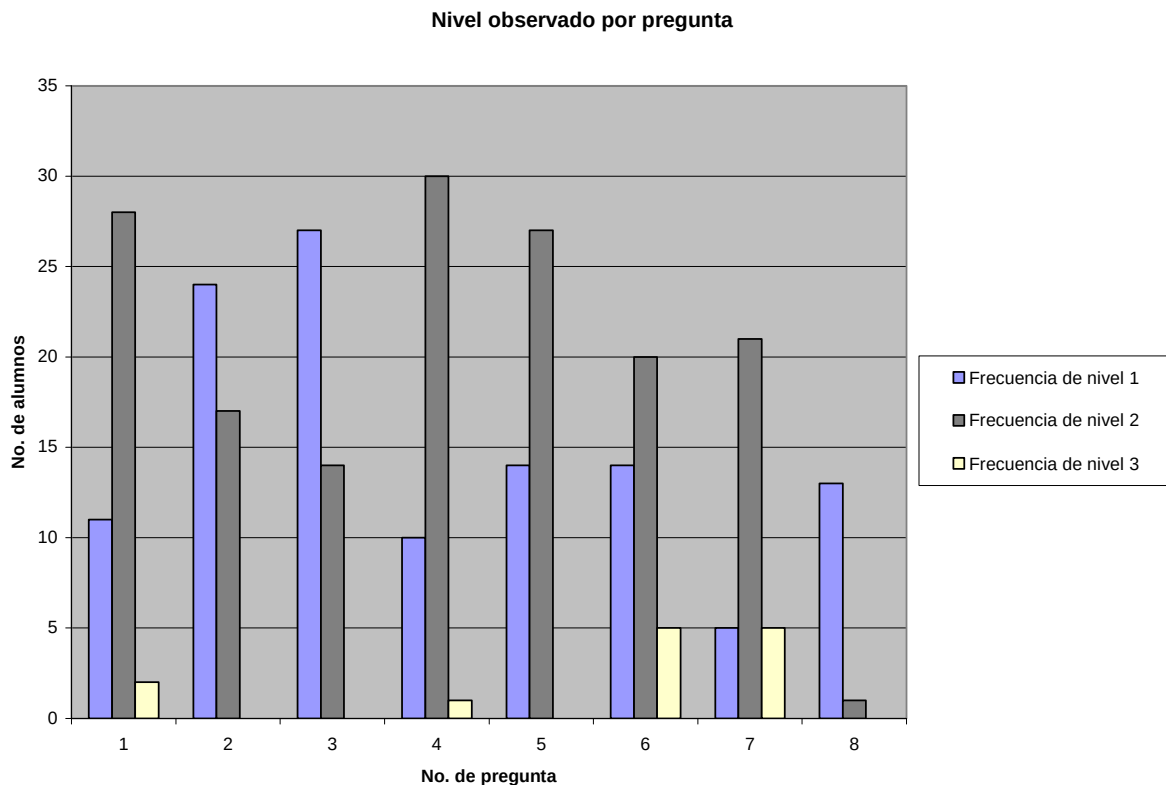
En el grupo ningún alumno dio respuestas en las que se observara nivel predominante de 3 ó 4, lo cual se esperaba en base a nuestra experiencia con alumnos con características semejantes.

Niveles de razonamiento encontrados en el grupo



2.- Los niveles de razonamiento que predominaron en el grupo para cada pregunta fueron variables, como se observa en la siguiente gráfica:

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Para las preguntas 2 y 3, en las cuales los estudiantes debían describir las semejanzas y diferencias entre algunas circunferencias, la mayor parte del grupo mostró nivel de razonamiento 1, lo cual no se esperaba ya que, habiendo llevado un curso previo sobre circunferencia y siendo estudiantes de bachillerato, en sus explicaciones utilizaron únicamente términos generales, como *tienen distinto tamaño*, *tienen la misma forma*, etc., refiriéndose al aspecto global de la figura y sin hacer mención de propiedades específicas como *centro*, *radio* o *diámetro*.

3.- En las preguntas 6 y 7 es donde se observó un mayor número de estudiantes con nivel de razonamiento 3. En ninguna de ellas se pide al alumno hacer descripciones o diferenciaciones, sino reconocer propiedades cuantitativas a partir de las figuras (y posteriormente utilizarlas para establecer su ecuación). Probablemente esto se deba al

trabajo más arduo que se hizo en este sentido durante el curso previo que ellos llevaron.

4.- En algunos casos aislados se observó lo siguiente:

- A las ecuaciones que son opciones de respuesta para la pregunta 6, algunos estudiantes les llaman *fórmulas*.
- Para argumentar su respuesta a esta misma pregunta, algunos alumnos describen relaciones entre los datos observados que en realidad no existen.
- Ante la pregunta 8, algunos alumnos mencionan que la pregunta no es clara, es decir, que el término *deducir* no tiene significado para ellos.

De los 41 alumnos que participaron en la actividad exploratoria se invitó a 10 de ellos con nivel predominante 1 y a 10 con nivel predominante 2 a realizar la secuencia didáctica con Cabri; al hacerlo se tenía la intención de diferenciar el desarrollo de los dos grupos en dicha actividad de acuerdo a su nivel predominante mostrado en la actividad exploratoria. Sin embargo, y debido principalmente a que muchos de ellos debían presentar exámenes finales de varias asignaturas, sólo se pudo aplicar la actividad didáctica a seis de ellos:

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Alumno(a)	Nivel de las respuestas dadas en la actividad exploratoria	Nivel de razonamiento predominante en sus respuestas
Alberto	1 nivel 1 5 nivel 2 1 nivel 3	2
Juan	3 nivel 1 3 nivel 2 1 nivel 3	1 – 2
Sabrina	1 nivel 1 6 nivel 2	2
Ambar	3 nivel 1 3 nivel 2 1 nivel 3	1 – 2
Masayiri	2 nivel 1 6 nivel 2	2
Raúl	3 nivel 1 5 nivel 2	2

3.2.- Diseño de la actividad didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica a desarrollarse con Cabri se tomaron en cuenta los siguientes aspectos:

1. La secuencia debía seguir las Fases de Aprendizaje del modelo de Van Hiele: Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración.
2. Dado que todos los estudiantes que iban a realizarla habían dado por lo menos una respuesta que mostraba nivel 1 de razonamiento geométrico, las actividades debían tener la intención de facilitar primero el alcance del nivel 2 y posteriormente el nivel 3. Una de las premisas del modelo de Van Hiele es esta: no puede alcanzarse un nivel de razonamiento superior sin antes haber alcanzado el anterior.
3. El lenguaje a utilizarse en las instrucciones de las actividades debía corresponder al nivel en que se aplican.
4. Para cada nivel de razonamiento las actividades a diseñarse debían contener los elementos explícitos e implícitos necesarios para construir las nociones deseadas, en este caso, dos propiedades de la circunferencia:
 - **La mediatriz de cualquier cuerda de una circunferencia pasa por el centro de la misma.**
 - **Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado desde el centro hasta el punto de tangencia.**
5. En las actividades debía hacerse énfasis en que las construcciones hechas con Cabri debían pasar la prueba del arrastre o *dragging*. Cada construcción debía facilitar el proceso de visualización de las nociones.

La secuencia didáctica quedó así integrada por las siguientes actividades:

Actividades Nivel 1

Al terminar el alumno estas actividades se espera que se encuentre en el **nivel 2** de razonamiento geométrico.

Elementos explícitos (formas y figuras básicas): punto, punto medio, punto de intersección, segmento, recta, circunferencia, ángulo.

Elementos implícitos (partes y propiedades): centro, radio, cuerda, diámetro, recta tangente, punto de tangencia, recta secante, recta perpendicular, mediatriz.

Fase 1: Información

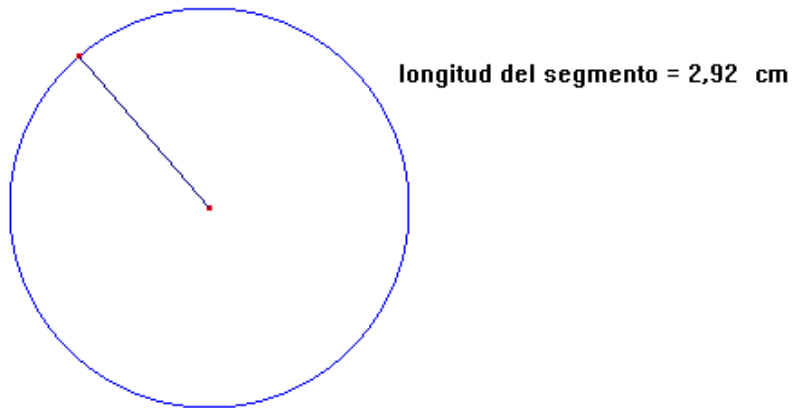
En esta primera sesión se les explicará a los estudiantes que el objetivo de las actividades a realizarse será el estudiar algunas propiedades de la circunferencia. Se les presentará el programa Cabri-Géomètre como la herramienta a utilizarse. Se les mostrará, de forma general, las funciones que tiene el programa, y de forma específica se les mostrará el trazo de un punto, de un segmento de recta, el punto medio de un segmento, de una recta y de una circunferencia, y la colocación de etiquetas y comentarios a los elementos de la figura. También se mostrará cómo hacer mediciones de longitud de los segmentos y como hacer el *dragging* de algún elemento de la construcción, haciendo notar la relación de dependencia entre los objetos que la conforman.

Fase 2: Orientación dirigida

Actividad A. Traza una circunferencia con cualquier punto para el centro y otro distinto cualquiera para el radio. Coloca un punto en cualquier lugar sobre la circunferencia y traza un segmento desde este punto hacia el centro. Obtén la longitud

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

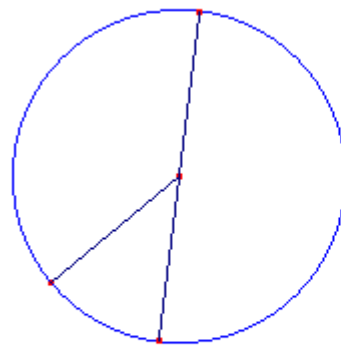
de este segmento. ¿Qué nombre recibe este segmento de recta perteneciente a la circunferencia? ¿Cuánto mide en la construcción que hiciste? Ahora *arrastra* el punto sobre la circunferencia o utiliza la opción *animación* de una de las ventanas del programa para que lo haga. ¿Cómo es la medida del segmento?



En base a esta experiencia, trata de definir a una circunferencia.

Actividad B. Traza una circunferencia con cualquier punto para el centro y otro distinto cualquiera para el radio. Traza un radio cualquiera y obtén su magnitud. Ahora traza un diámetro cualquiera de la misma circunferencia y obtén su magnitud (coloca comentarios a las mediciones). ¿Qué relación observas entre ambas medidas? Ahora *arrastra* el punto que utilizaste para trazar inicialmente la circunferencia de manera que se haga más grande y luego más pequeña. ¿Qué observas en las medidas del radio y diámetro? ¿Siguen teniendo la misma relación?

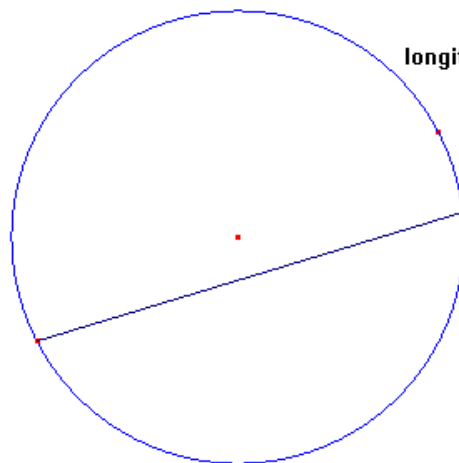
DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



diámetro = 4,40 cm

radio = 2,20 cm

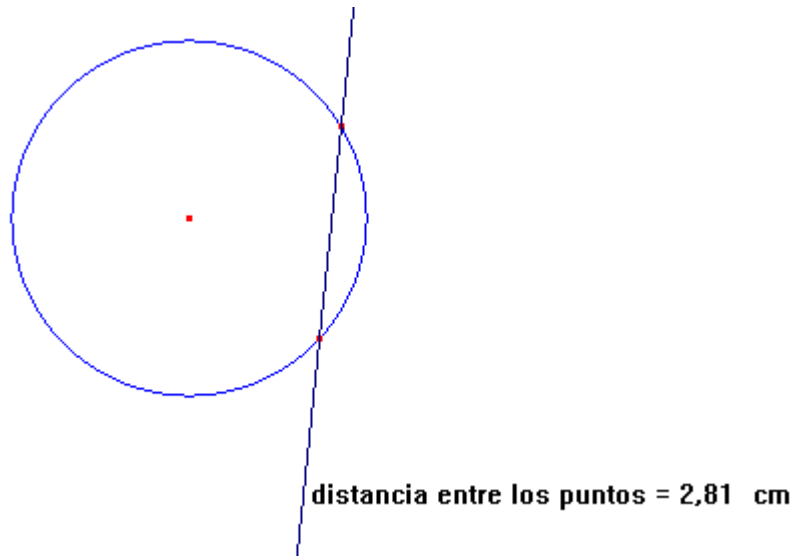
Actividad C. Traza una circunferencia con cualquier punto para el centro y otro distinto cualquiera para el radio. Coloca dos puntos en cualquier lugar sobre la circunferencia y traza el segmento de uno a otro. Este segmento será una cuerda de la circunferencia. Mide la longitud de la cuerda y colócale etiqueta o comentario. *Arrastra* ahora cualquiera de los extremos de la cuerda. ¿Cambia la apariencia de la cuerda? ¿Y su longitud? ¿Cuándo alcanza su valor máximo? ¿Qué nombre recibe esta cuerda?



longitud de la cuerda=7,05 cm

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

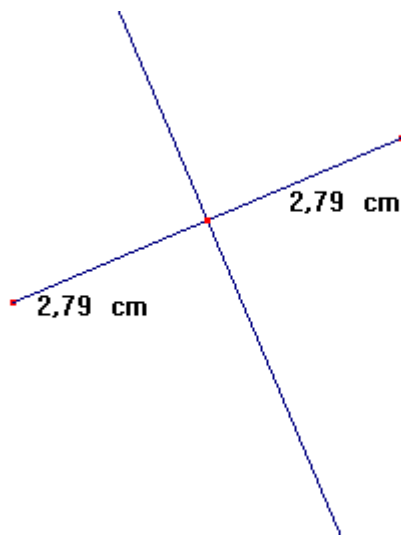
Actividad D. Traza una circunferencia con cualquier punto para el centro y otro distinto cualquiera para el radio. Coloca dos puntos sobre la circunferencia, en cualquier lugar, y traza una recta que pase por ellos. A esta recta se le llama recta secante a la circunferencia. Ahora *arrastra* uno de los puntos que definen a la recta a lo largo de la circunferencia y observa la nueva posición de la recta y la variación de la distancia entre ellos. ¿Cuál es la distancia mínima que observas entre los puntos? ¿Cómo se le llama a la recta que cumple esa condición? ¿Cuántos puntos observas en ese caso sobre la circunferencia?



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

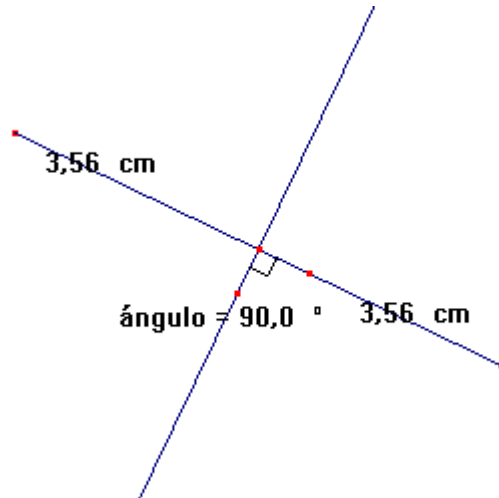


Actividad E. Coloca sobre la hoja dos puntos diferentes cualesquiera y traza un segmento con ellos como extremos. Elige la opción mediatriz de la ventana correspondiente y traza la mediatriz del segmento. Ahora marca el punto de intersección de la mediatriz con el segmento y mide la distancia entre este punto y cada uno de los extremos. ¿Cómo son estas distancias? ¿Se mantiene esta característica al *arrastrar* alguno de los extremos del segmento?



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Ahora coloca un punto sobre la mediatriz y otro sobre el segmento (distinto al punto medio). Coloca una marca de ángulo con los tres puntos (el que está sobre la mediatriz, el punto medio y el otro sobre el segmento) y mide la magnitud de este ángulo. ¿Cuánto mide? ¿Se mantiene esta característica al *arrastrar* alguno de los extremos del segmento?



En base a lo que observaste en esta actividad, define lo que es la mediatriz de un segmento de recta.

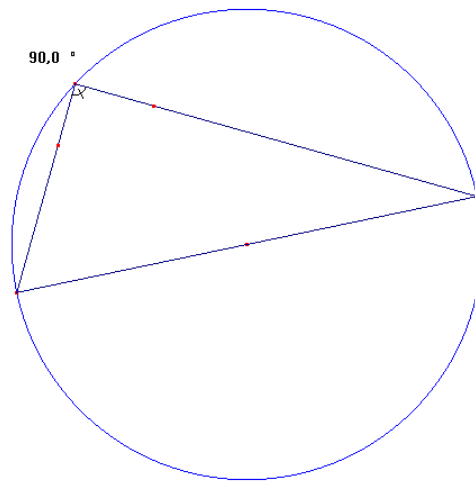
Fase 3: Explicitación

En esta fase, se le pedirá a cada uno de los estudiantes que explique al grupo sus respuestas a las actividades de la Fase 2 mostrando a los demás las construcciones que hizo para cada una de ellas. Si existen diferencias entre las respuestas dadas por ellos, se discutirán hasta que el grupo identifique cuál es la que considera correcta en cada caso.

Fase 4: Orientación libre

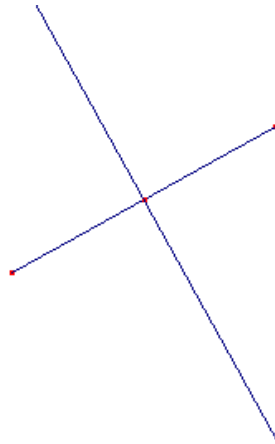
En esta fase la resolución de las actividades requiere la combinación de los conceptos de recta tangente, cuerda, radio, diámetro, recta secante, punto de tangencia y mediatriz, o bien la aplicación a situaciones diferentes a las iniciales (dadas en las fases 1 y 2).

Actividad A. Traza una circunferencia cualquiera. Coloca ahora, con la opción *punto sobre objeto*, tres puntos cualesquiera sobre ella y dibuja las tres cuerdas que los unen, formando entre sí un triángulo. *Arrastra* los puntos hasta que formes un triángulo rectángulo (comprueba con la opción *ángulo* que efectivamente un ángulo interior del triángulo mida 90°). ¿Cómo podrías describir esta figura?

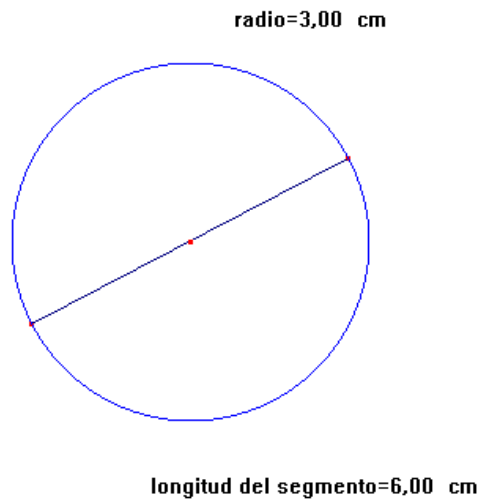


Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento.

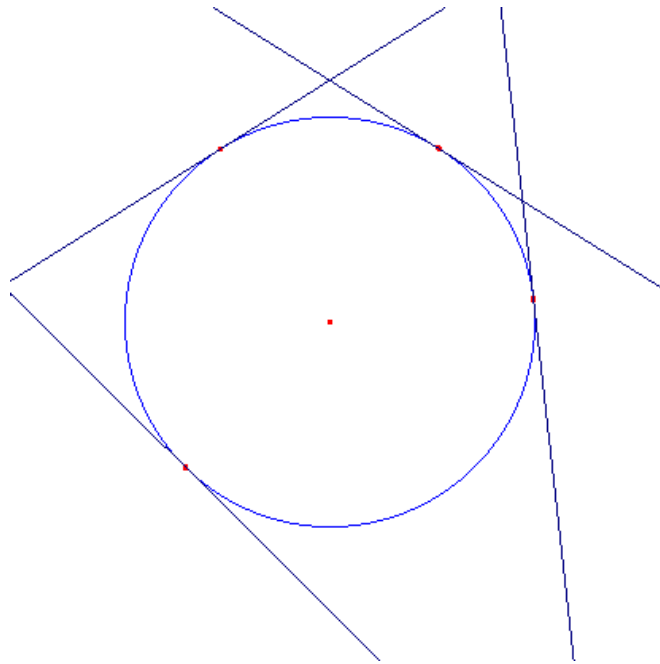
DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Actividad C. Traza un segmento de recta de longitud igual a 6 cm. Traza una circunferencia de radio igual a 3 cm utilizando este segmento como uno de sus diámetros.



Actividad D. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Traza al menos cuatro rectas tangentes distintas a esta circunferencia.

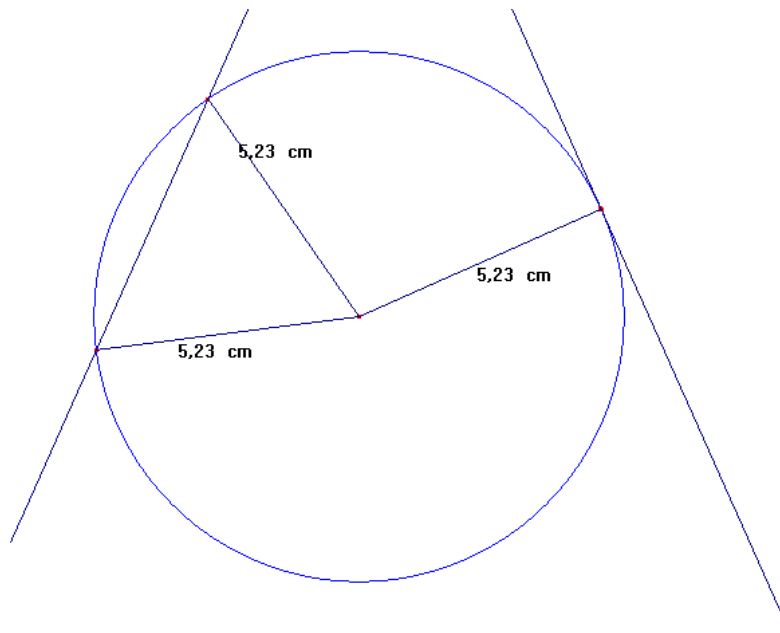


Fase 5: Integración

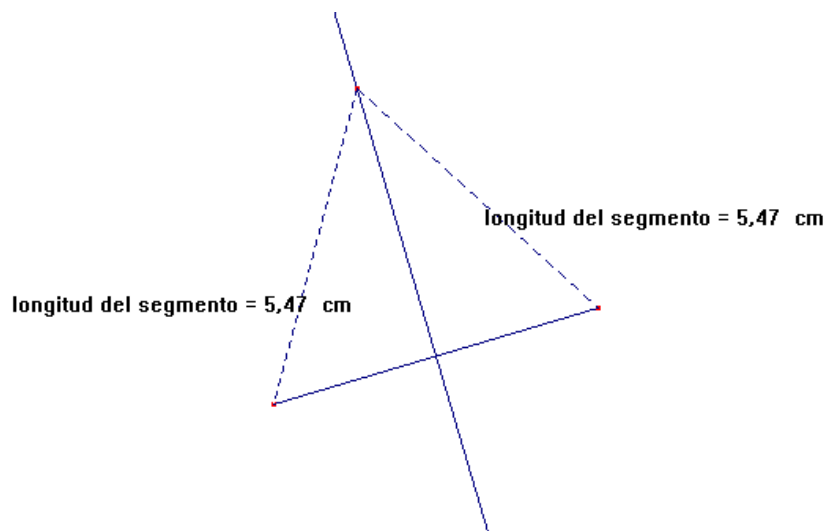
En esta fase se pretende que las construcciones involucren a todos los elementos estudiados y se establezcan comparaciones entre ellos sin introducir alguno nuevo. Al realizar las actividades no se resolverán dudas a los estudiantes pues permitirán evaluar si se ha adquirido el conocimiento que se pretende (conceptos matemáticos y uso del programa).

Actividad A. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Ahora traza una recta secante a la circunferencia y traza los segmentos que hay desde el centro hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia. Mide la longitud de estos segmentos. Ahora traza una recta tangente a la circunferencia y traza el segmento del centro al punto de tangencia y obtén su longitud. *Arrastra* los elementos de la construcción. En base a lo que observas, señala al menos una semejanza y una diferencia entre ambas rectas.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento. Coloca un punto sobre la mediatriz con la opción *punto sobre objeto*, traza los segmentos desde este punto hasta los extremos del segmento inicial y mide sus longitudes. *Arrastra* el punto colocado sobre la mediatriz y observa. En base a lo que observas, señala al menos dos características de la mediatriz de un segmento de recta.



Actividades Nivel 2

Al terminar el alumno estas actividades se espera que se encuentre en el **nivel 3** de razonamiento.

Elementos explícitos (partes y propiedades): centro, radio, cuerda, diámetro, recta tangente, recta secante, recta perpendicular, mediatriz.

Elementos implícitos (implicaciones entre propiedades): la mediatriz de cualquier cuerda de una circunferencia pasa por el centro de la misma, una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado desde el centro hasta el punto de tangencia.

Fase 1: Información

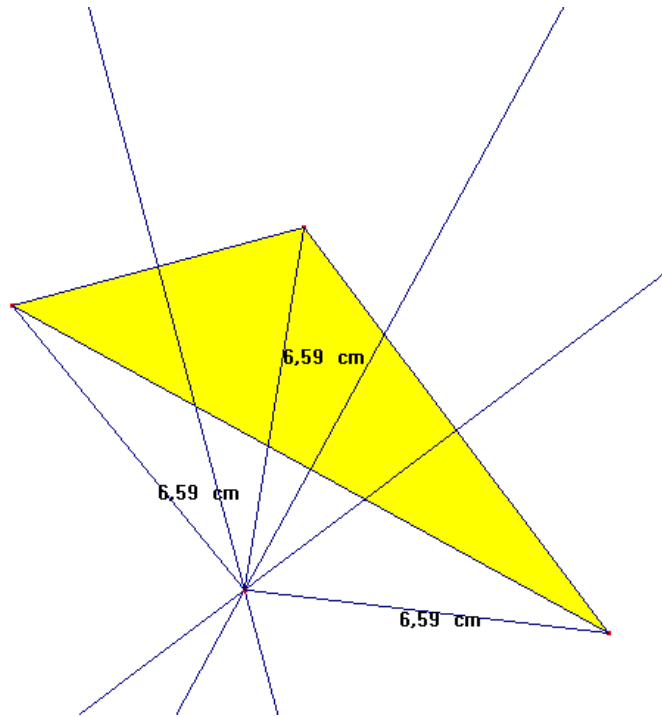
En esta etapa se les explicará a los estudiantes que el objetivo de las actividades a realizarse será el estudiar algunas propiedades de la circunferencia y se hará un breve resumen de las conclusiones obtenidas en las actividades del nivel 1. Se les mostrarán otras herramientas del programa Cabri-Géomètre: *mostrar ejes, definir cuadrícula, ecuación y coordenadas, recta perpendicular, rellenar y pertenece* y se volverán a mostrar ejemplos en los que se muestre la relación de dependencia entre los elementos de una construcción.

Fase 2: Orientación dirigida

Actividad A. Con la opción triángulo traza un triángulo cualquiera y *rellénalo* con algún color. Traza ahora la mediatriz de cada uno de sus lados y marca el punto de intersección de ellas. Dibuja los segmentos que unen a este punto con los vértices del triángulo y calcula la longitud de cada uno de ellos. ¿Cómo son estas longitudes? ¿Se

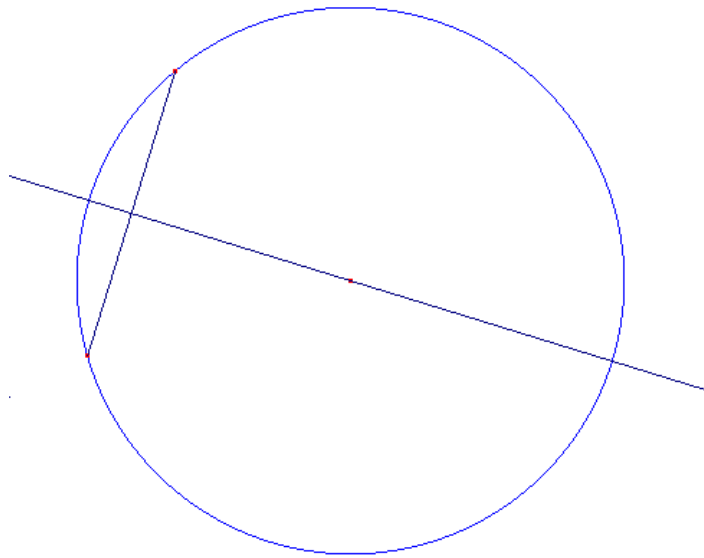
DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

mantiene esta característica al arrastrar cualquiera de los vértices? ¿Para qué podría utilizarse el punto de intersección de las mediatrices?



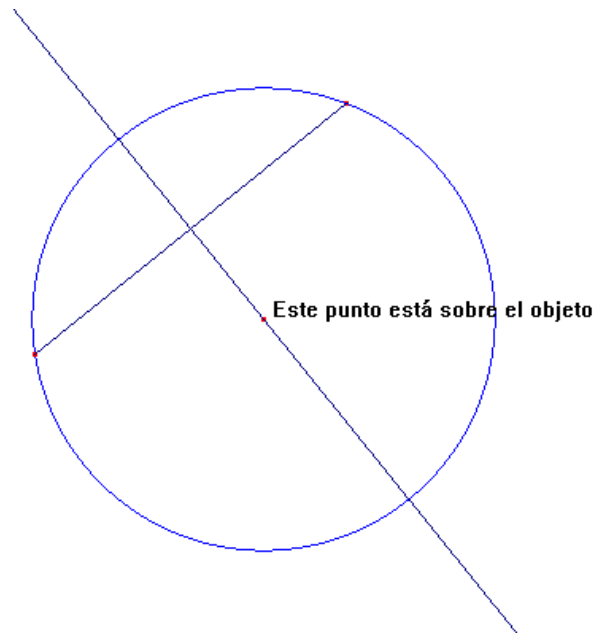
Actividad B. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Con la opción *punto sobre objeto*, coloca dos puntos sobre la circunferencia y traza el segmento entre ellos, lo que será una cuerda. Con la opción *mediatriz* traza ahora la mediatriz del segmento. *Arrastra* cualquiera de los puntos extremos de la cuerda y observa los elementos de la figura que construiste. ¿La mediatriz pasa por algún punto importante relativo a la circunferencia? ¿Cuál? ¿Ocurre siempre esto sin importar al radio de la circunferencia o la longitud de la cuerda?

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



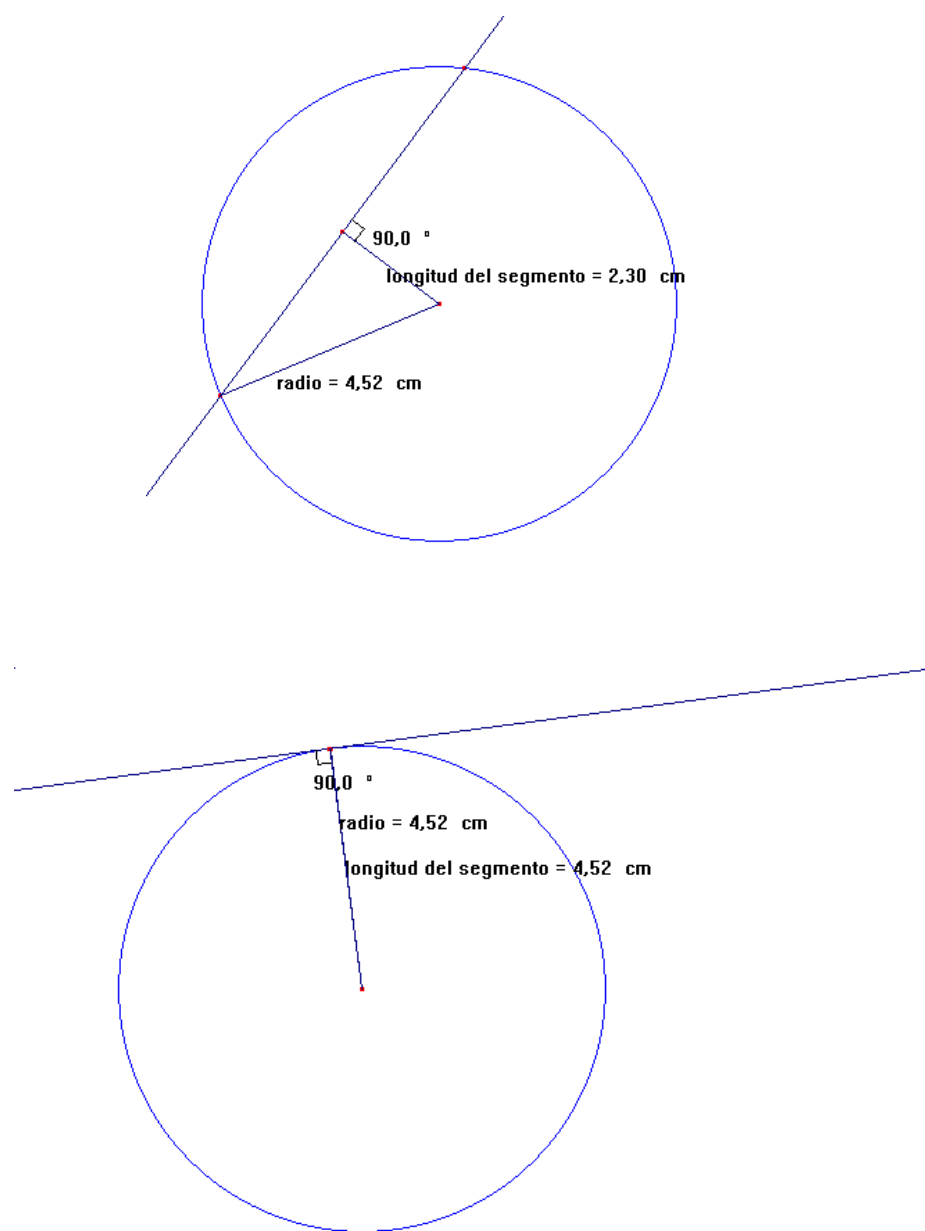
Actividad C. Coloca dos puntos cualesquiera y traza una circunferencia con uno de ellos como centro y el otro para el radio. Con este último y otro más sobre la circunferencia traza un segmento de recta. Con la opción *mediatriz* traza la mediatriz del segmento. Ahora con la opción *pertenece* averigua si el centro de la circunferencia está sobre la mediatriz. *Arrastra* los dos extremos del segmento o cuerda trazada y observa si se mantiene la propiedad mostrada. ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Actividad D. Traza una circunferencia cualquiera y coloca dos puntos sobre ella. Dibuja el punto medio entre estos dos puntos y traza la recta secante a la circunferencia que pasa por todos ellos. Traza un segmento de recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto medio de la cuerda trazada, y calcula su longitud. Mide el ángulo que hay entre este segmento y la cuerda trazada. *Arrastra* ahora uno de los puntos sobre la circunferencia. ¿Cómo es el ángulo medido? Ahora traza un segmento desde el centro de la circunferencia hasta uno de los extremos de la cuerda, y mide su longitud (que será igual al radio de la curva). *Arrastra* uno de los puntos sobre la circunferencia y observa las longitudes medidas. ¿Cómo son estas cantidades? ¿Y cuándo la recta secante se convierte en tangente? Si mueves los puntos sobre la circunferencia, de modo que cambie el punto de tangencia, ¿se mantiene la medida del ángulo medido? ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Fase 3: Explicitación

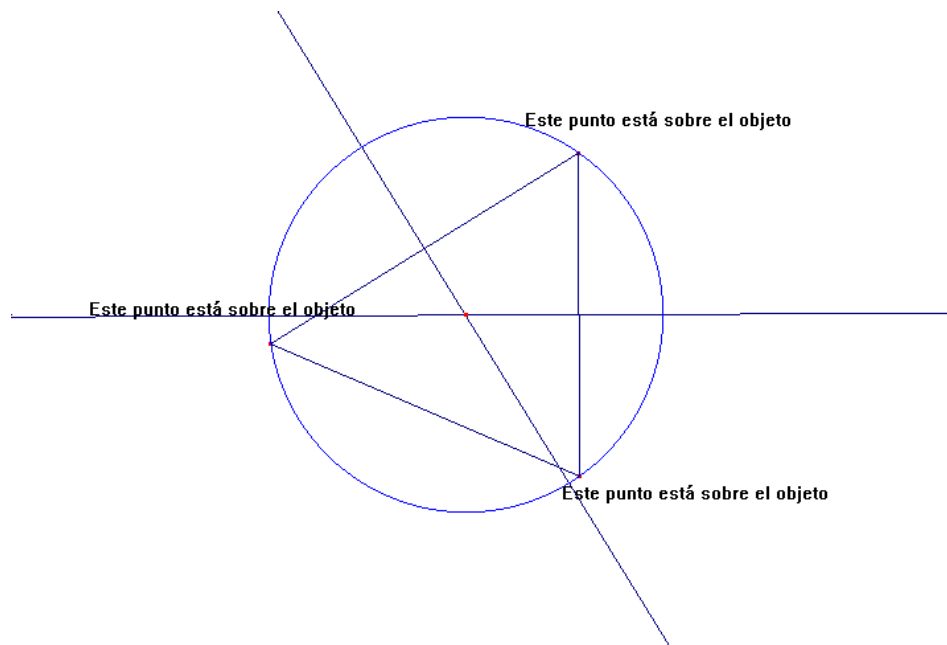
En esta fase, al igual que en el nivel 1, se le pedirá a cada uno de los estudiantes que explique al grupo sus respuestas a las actividades de la Fase 2 de este nivel mostrando

a los demás las construcciones que hizo para cada una de ellas. Si existen diferencias entre las respuestas dadas por ellos, se discutirán hasta que el grupo identifique cuál es la que considera correcta en cada caso.

Fase 4: Orientación libre

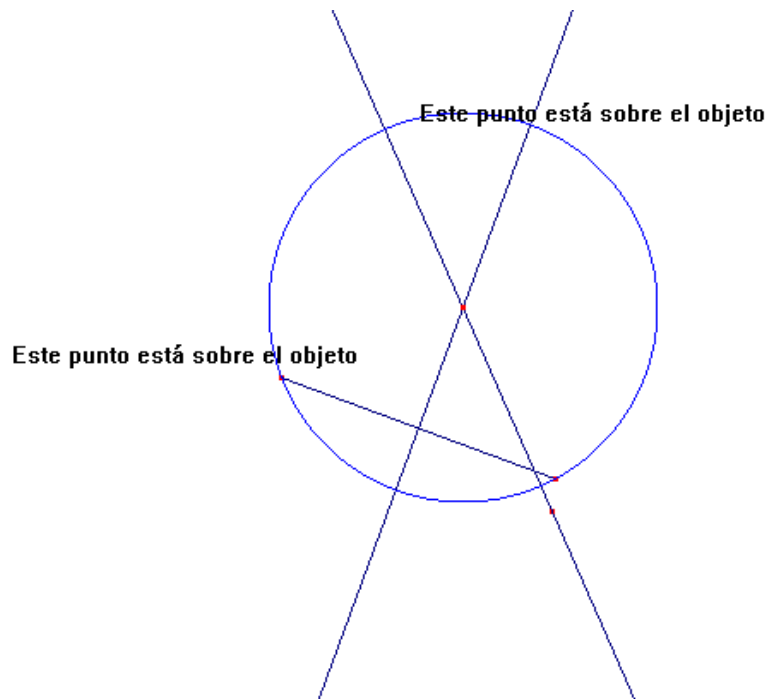
Actividad A. Repite la actividad B de la Fase 2, con las siguientes condiciones iniciales: radio de la circunferencia igual a 3 cm, mediatriz trazada sin utilizar la función *mediatriz* del programa. Al terminar tu construcción, arrastra los puntos extremos de la cuerda y revisa el enunciado de la propiedad que hiciste anteriormente.

Actividad B. Coloca sobre tu hoja de trabajo tres puntos cualesquiera y traza la circunferencia que pasa por todos ellos. Utiliza la opción *pertenece* para verificar que los tres puntos están sobre la circunferencia. Verifica tu construcción *arrastrando* los puntos iniciales.

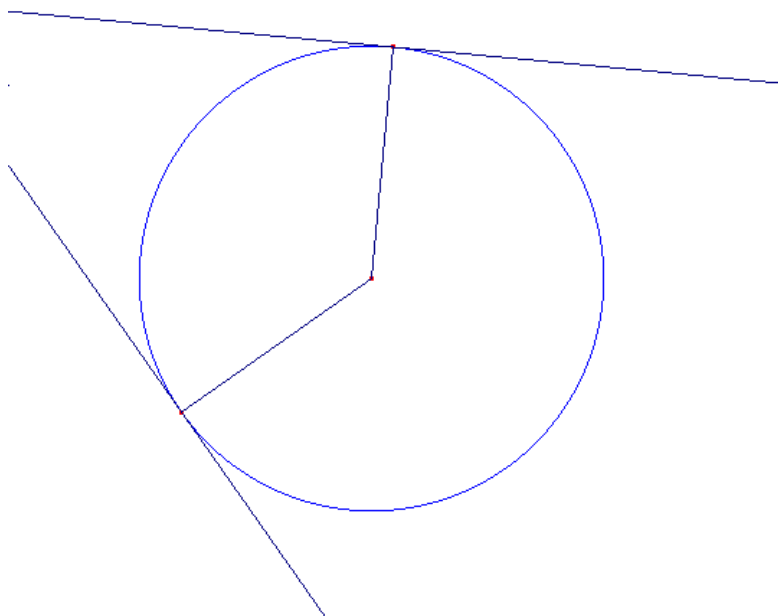


DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Actividad C. Coloca sobre tu hoja de trabajo dos puntos cualesquiera y una recta cualquiera. Traza la circunferencia que pasa por los dos puntos y que tiene su centro sobre la recta dada. Utiliza la opción *pertenece* para verificar que los tres puntos están sobre la circunferencia. Verifica tu construcción *arrastrando* los puntos iniciales.



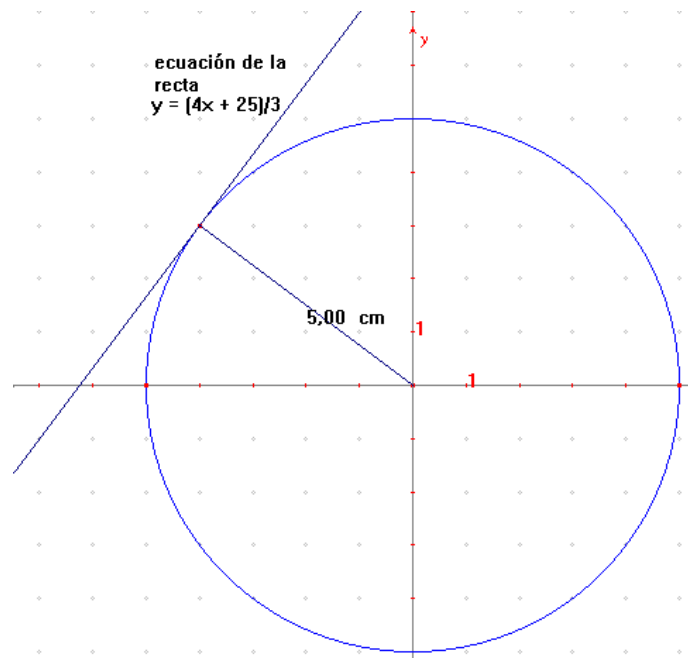
Actividad D. Con la opción *recta perpendicular*, dibuja dos rectas tangentes a una circunferencia cualquiera. *Arrastra* los elementos de tu construcción para verificar que se mantiene esta característica de ella.



Fase 5: Integración

Actividad A. Para una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 5, obtén la ecuación de la recta que es tangente a ella en el punto $(-4, 3)$.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Actividad B.

Situación: Tres pequeños poblados, A, B y C, se encuentran separados entre sí. La distancia para llegar a cada uno de ellos se midió a partir de la estación del tren más cercana, y fueron las siguientes:

Poblado A, 9 km al este y 3 km al norte.

Poblado B, 2 km al oeste y 1 km al norte.

Poblado A, 1 km al este y 3 km al sur.

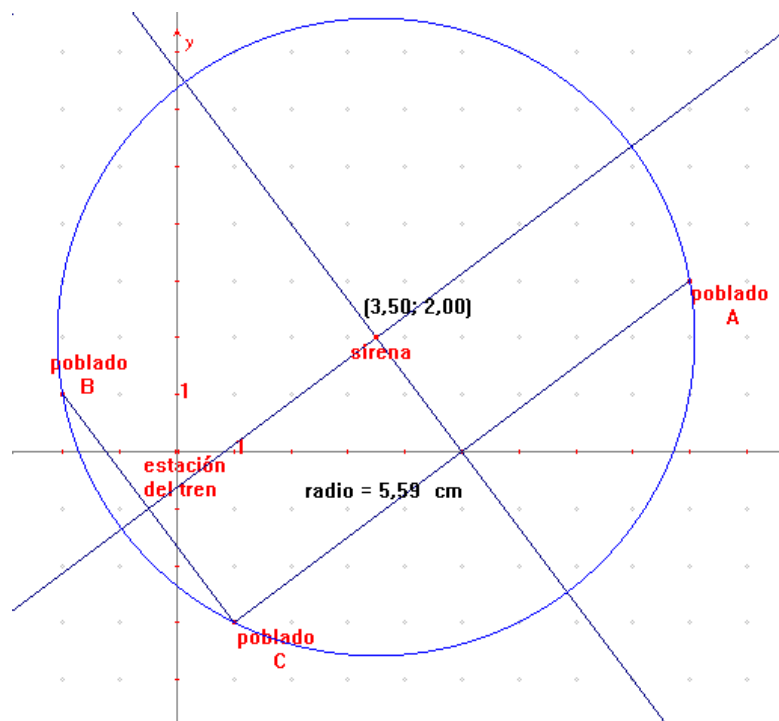
Los habitantes de estos poblados han decidido colocar una sirena como alarma ante algún desastre natural.

Si las ondas sonoras emitidas por la sirena se propagan de forma circular, ¿en dónde deberá colocarse para que se encuentre a la misma distancia de los tres poblados?

Si el alcance máximo del sonido emitido por la sirena es de 6 km, ¿se escuchará esta señal en las poblaciones?

Sugerencia: Elabora tu construcción colocando la estación del tren en el origen de un sistema de ejes coordenados.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



3.3.- Análisis de resultados

Las actividades descritas anteriormente se aplicaron a los seis estudiantes seleccionados. Estos estudiantes, en los que predomina el nivel 2 de razonamiento geométrico de acuerdo a sus respuestas en el análisis preliminar, desarrollaron las actividades preparadas para nivel 1 y 2 con el objeto de alcanzar el nivel 3 de razonamiento geométrico.

Alberto

En el análisis preliminar	{	5 respuestas nivel 2
		1 nivel 1
		1 nivel 3

Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 1

En esta fase el alumno logró:

- Reconocimiento del radio: El alumno reconoció al radio como la mitad del diámetro.
- Definir circunferencia: Comenzó su definición de circunferencia como punto que gira, presentó luego confusión de ideas para finalmente concluirla como “figura redonda”.
- Reconocimiento de la cuerda más larga de la circunferencia: Esto es, “cuando toca el extremo opuesto del punto hasta formar un diámetro”.
- Reconocimiento de la recta tangente: La describe como aquella que se forma “cuando son el mismo punto y sólo se observa uno”.
- Definir mediatriz: En su definición la describe como la recta que cruza a un segmento perpendicularmente, pero no menciona que en su punto medio.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Radio

5,34 cm

Igual

Es un punto al cual gira a una distancia constante de otro el cual es el centro y forman una figura redonda.

Que una es el doble de la otra es decir el radio es la mitad del diámetro y el diámetro el doble del radio

Que siguen siendo de igual relación Si, solo cambia la longitud pero siguen teniendo relación

Si,

Si, aumenta o disminuye cuando toca el extremo opuesto del punto y este fijo, hasta formar un diámetro

Diámetro

El mismo punto tangente

Uno

Iguales

Si

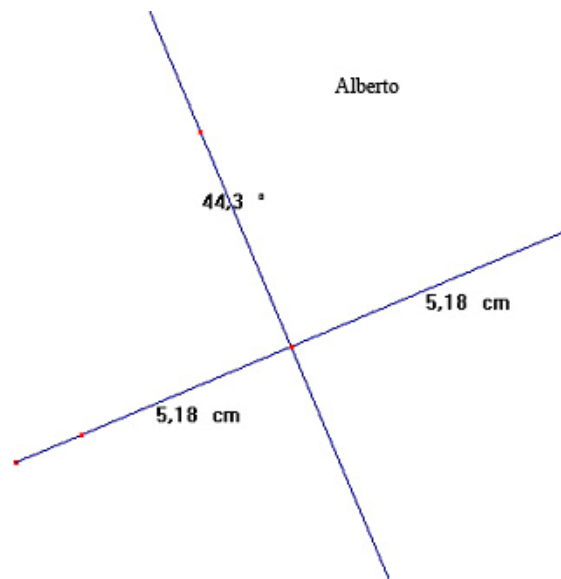
57,2

No

Mediatriz es la recta que cruza otro segmento perpendicularmente

Alberto

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Fase 3, Explicitación, Nivel 1

Después de realizar el análisis del video obtenido durante el desarrollo de esta fase, encontramos que Alberto logra explicar de manera breve las construcciones hechas en la resolución de las actividades, así como las propiedades que pudieran observarse en cada una de ellas.

- Llama a la circunferencia “curva” y no define de manera alguna a la recta tangente, aunque sí define, de manera informal, a la mediatriz.
- En la mayoría de sus descripciones utiliza lenguaje geométrico básico, mencionando de forma explícita componentes como centro, radio y diámetro, y de forma implícita a los otros componentes.

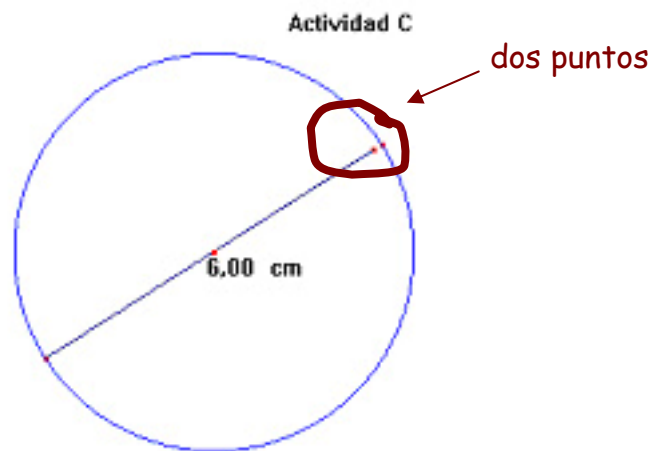
Esto nos permite afirmar que Alberto presenta elementos del nivel 1 y 2.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 1

En la actividad A, Alberto mostró que conoce los conceptos necesarios para resolver esta actividad de acuerdo a lo que establecimos en nuestro análisis a priori.

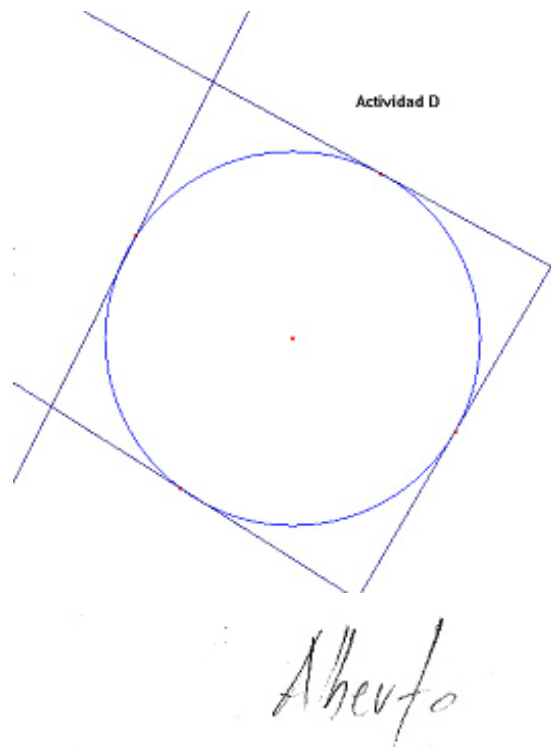
En la Actividad B trazó de manera correcta la mediatriz, es decir, estableció el punto medio del segmento de recta y trazó la mediatriz con las funciones *punto medio* y *recta perpendicular* de Cabri.

En la Actividad C, al trazar la circunferencia a partir de un diámetro, demuestra que conoce el que el punto medio es el centro de ella pero trazó la circunferencia de manera incorrecta por falta de dominio de Cabri: con la opción *punto medio* del programa ubica el centro de la circunferencia, pero al trazarla no utiliza uno de los puntos extremos del diámetro como referencia sino que traza otro punto interior el cual define a la circunferencia, por lo cual su construcción no pasa la prueba del arrastre. Si al utilizar Cabri no se señala exactamente el punto que se utilizará para definir el radio y aparece la leyenda *este punto para el radio*, el programa toma como punto el lugar donde se encuentre el cursor.



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

En la actividad D traza las tangentes sin utilizar dos puntos, es decir, sin emplear el concepto de la tangente como recta secante al hacerse cero la distancia entre los puntos. Es necesario trazar de esta forma la tangente ya que el programa no cuenta con esta opción y aún no se construye la segunda propiedad de la circunferencia a tratarse. Debido a lo anterior obtuvo una construcción con rectas que en apariencia son tangentes pero que no soporta la prueba del *dragging*.



Fase 4, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia cualquiera. Coloca ahora, con la opción *punto sobre objeto*, tres puntos cualesquiera sobre ella y dibuja las tres cuerdas que los unen, formando entre sí un triángulo. *Arrastra* los puntos hasta que formes un triángulo rectángulo (comprueba con la opción *ángulo* que efectivamente un ángulo interior del triángulo mida 90°). ¿Cómo podrías describir esta figura?

Es un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia y una de sus rectas pasa por el centro de la circunferencia.

Fase 5, Integración, Nivel 1

En la actividad A, menciona de forma correcta una semejanza y una diferencia entre la secante y la tangente:

- Semejanza: los dos segmentos que define la secante (trazados desde el centro hasta los puntos de intersección de la recta y la circunferencia) y el que define la tangente (trazado desde el centro hasta el punto de tangencia) siempre miden lo mismo.
- Diferencia: la recta tangente toca sólo un punto de la circunferencia (aunque él escribe *recta*) y la secante dos.

La construcción de la tangente la hace a partir de un punto, como en la actividad D de la fase anterior, por lo que no soporta la prueba de arrastre.

En la actividad B, construye la figura y menciona correctamente dos características de la mediatriz:

1. Si se coloca un punto sobre la mediatriz y se mide la distancia de él a los extremos del segmento se forma un triángulo.
2. Estas distancias siempre miden lo mismo.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 5, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Ahora traza una recta secante a la circunferencia y traza los segmentos que hay desde el centro hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia. Mide la longitud de estos segmentos. Ahora traza una recta tangente a la circunferencia y traza el segmento del centro al punto de tangencia y obtén su longitud. *Arrastra* los elementos de la construcción. En base a lo que observas, señala al menos una semejanza y una diferencia entre ambas rectas.

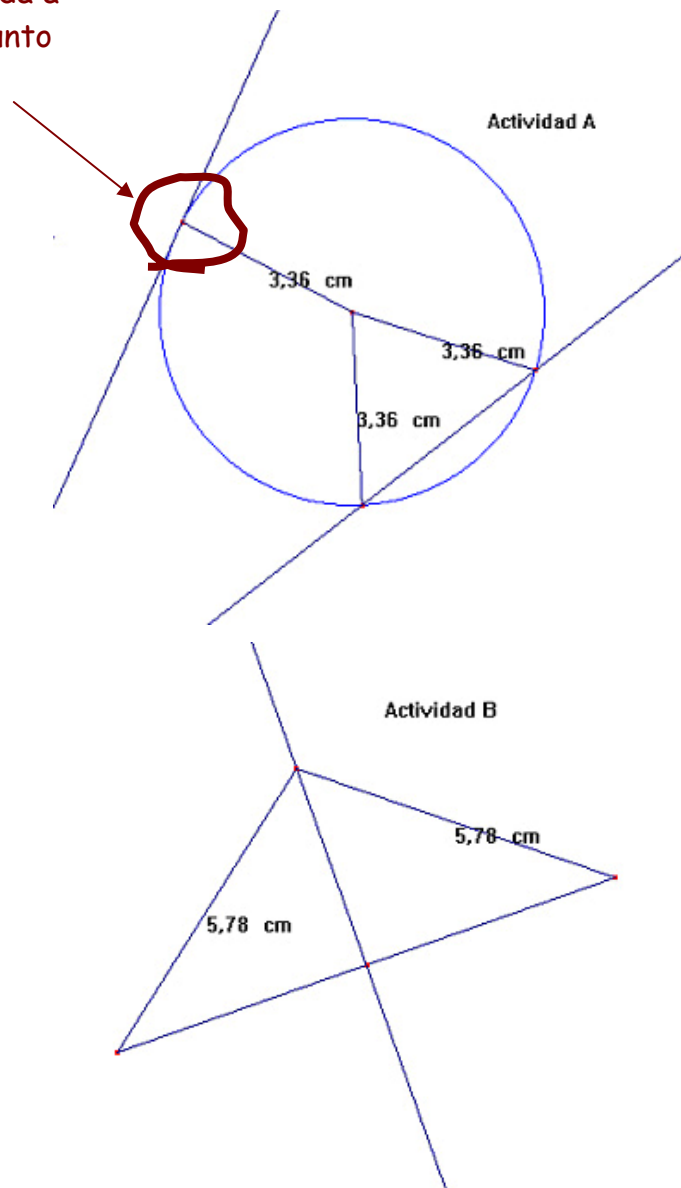
- > Sin importar en donde estén los puntos van a medir lo mismo
- > la tangente es una recta q' pasa por un solo punto de la recta y la secante toca 2 puntos

Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento. Coloca un punto sobre la mediatriz con la opción *punto sobre objeto*, traza los segmentos desde este punto hasta los extremos del segmento inicial y mide sus longitudes. *Arrastra* el punto colocado sobre la mediatriz y observa. En base a lo que observas, señala al menos dos características de la mediatriz de un segmento de recta.

- > Al colocar un punto en una mediatriz y medir la distancia de ese punto a los extremos del otro segmento se formará un Δ
- > Sin importar a donde movamos el punto las distancias de los dos segmentos serán iguales

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

tangente trazada a
partir de un punto



De acuerdo a las respuestas y construcciones dadas en esta última fase, se observa que Alberto ha alcanzado el nivel 2 de razonamiento geométrico tomando como principales elementos implícitos el diámetro de una circunferencia, recta tangente a ella y mediatriz de un segmento de recta. Aparentemente ha logrado comprender la relación de dependencia entre los elementos en una construcción con Cabri, aunque aún le falta experiencia para dominar sus funciones básicas.

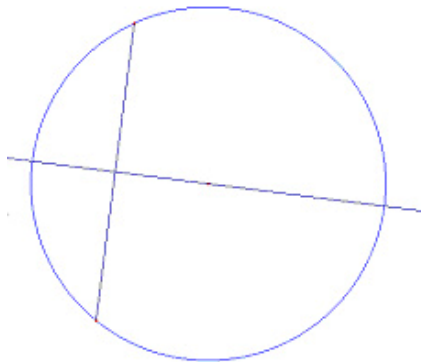
Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 2

En la actividad A, Alberto observa que las distancias de cada vértice al punto de intersección de las mediatrices son iguales y menciona que dicho punto puede servir para trazar triángulos pero no lo relaciona a una circunferencia.

En la actividad B, observa que la mediatriz de la cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

En la actividad C, enuncia la propiedad de la mediatriz observada de forma correcta pero no de manera formal, sino haciendo referencia a la actividad que realizó.

En la actividad D, enuncia la propiedad de forma general pero de forma incorrecta, mal estructurada, sin mencionar los elementos involucrados (“circunferencia”, “centro”, “cuerda”, “tangente” o “secante”).



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 2, Nivel 2

Actividad A. Con la opción triángulo traza un triángulo cualquiera y *rellénalo* con algún color. Traza ahora la mediatriz de cada uno de sus lados y marca el punto de intersección de ellas. Dibuja los segmentos que unen a este punto con los vértices del triángulo y calcula la longitud de cada uno de ellos. ¿Cómo son estas longitudes? ¿Se mantiene esta característica al arrastrar cualquiera de los vértices? ¿Para qué podría utilizarse el punto de intersección de las mediatrices?

- iguales
- Si
- Para trazar triángulos

Actividad B. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Con la opción *punto sobre objeto*, coloca dos puntos sobre la circunferencia y traza el segmento entre ellos, lo que será una cuerda. Con la opción *mediatriz* traza ahora la mediatriz del segmento. Arrastra cualquiera de los puntos extremos de la cuerda y observa los elementos de la figura que construiste. ¿La mediatriz pasa por algún punto importante relativo a la circunferencia? ¿Cuál? ¿Ocurre siempre esto sin importar al radio de la circunferencia o la longitud de la cuerda?

- Si
- Centro

Actividad C. Coloca dos puntos cualesquiera y traza una circunferencia con uno de ellos como centro y el otro para el radio. Con este último y otro más sobre la circunferencia traza un segmento de recta. Con la opción *mediatriz* traza la mediatriz del segmento. Ahora con la opción *pertenece* averigua si el centro de la circunferencia está sobre la mediatriz. Arrastra los dos extremos del segmento o cuerda trazada y observa si se mantiene la propiedad mostrada. ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

> Sin importar en q. puntos de la circunferencia este el segmento cuya mediatriz obtuvimos esta siempre pasara por el centro

Actividad D. Traza una circunferencia cualquiera y coloca dos puntos sobre ella. Dibuja el punto medio entre estos dos puntos y traza la recta secante a la circunferencia que pasa por todos ellos. Traza un segmento de recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto medio de la cuerda trazada, y calcula su longitud. Mide el ángulo que hay entre este segmento y la cuerda trazada. Arrastra ahora uno de los puntos sobre la circunferencia. ¿Cómo es el ángulo medido? Ahora traza un segmento desde el centro de la circunferencia hasta uno de los extremos de la cuerda, y mide su longitud (que será igual al radio de la curva). Arrastra uno de los puntos sobre la circunferencia y observa las longitudes medidas. ¿Cómo son estas cantidades? ¿Y cuando la recta secante se convierte en tangente? Si mueves los puntos sobre la circunferencia, de modo que cambie el punto de tangencia, ¿se mantiene la medida del ángulo medido? ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

- Recto
- Diferentes
- cambian
- Si

- El ángulo de los segmentos siempre sera igual

Fase 3, Explicitación, Nivel 2

En el video que se tomó en esta fase a Alberto se observa lo siguiente:

- Puede enunciar la primera propiedad de la circunferencia observada, que la mediatriz de cualquier cuerda pasa por el centro de ella, después de hacerle diversas preguntas dirigidas a que lo lograra, aún de manera informal.
- No enuncia, de forma alguna, la segunda propiedad observada; al tratar de hacerlo, únicamente describe lo que se hizo en la actividad, paso a paso, pero no generaliza lo observado.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 2

En las actividades que Alberto realizó en esta fase se observa poca relación entre las propiedades estudiadas; de cuatro construcciones, solo dos pasan la prueba del *arrastre* de los elementos:

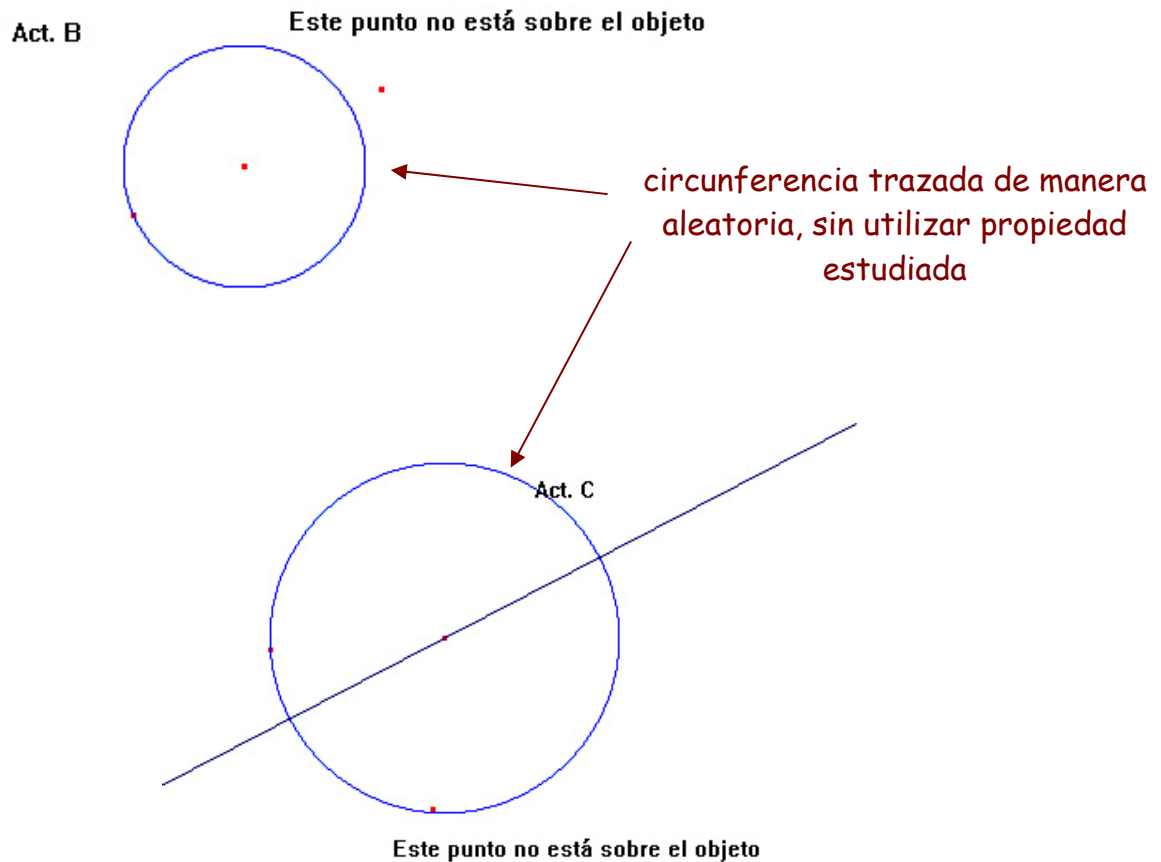
En la actividad A, Alberto construye correctamente la mediatriz de una cuerda de la circunferencia y su construcción soporta el *dragging*. No hace alusión al enunciado de la propiedad que enunció anteriormente.

En la actividad B hace una construcción errónea: colocó tres puntos pero uno de ellos lo usó como centro de la circunferencia, es decir, no utilizó en ningún momento a la mediatriz por lo que no soporta el *arrastre* de los puntos y el programa dice que los puntos no pertenecen a la circunferencia. Alberto no recordó la actividad del triángulo de la fase 2 ni a la propiedad mostrada.

En la actividad C, Alberto hace una construcción errónea que tampoco soporta la prueba del *dragging* pues traza de manera aleatoria la circunferencia, otra vez ignorando las propiedades estudiadas. El programa señala que los puntos no pertenecen a la circunferencia.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

En la actividad D, Alberto construye de manera correcta las rectas tangentes a la circunferencia y su construcción soporta el *arrastre* de los puntos.



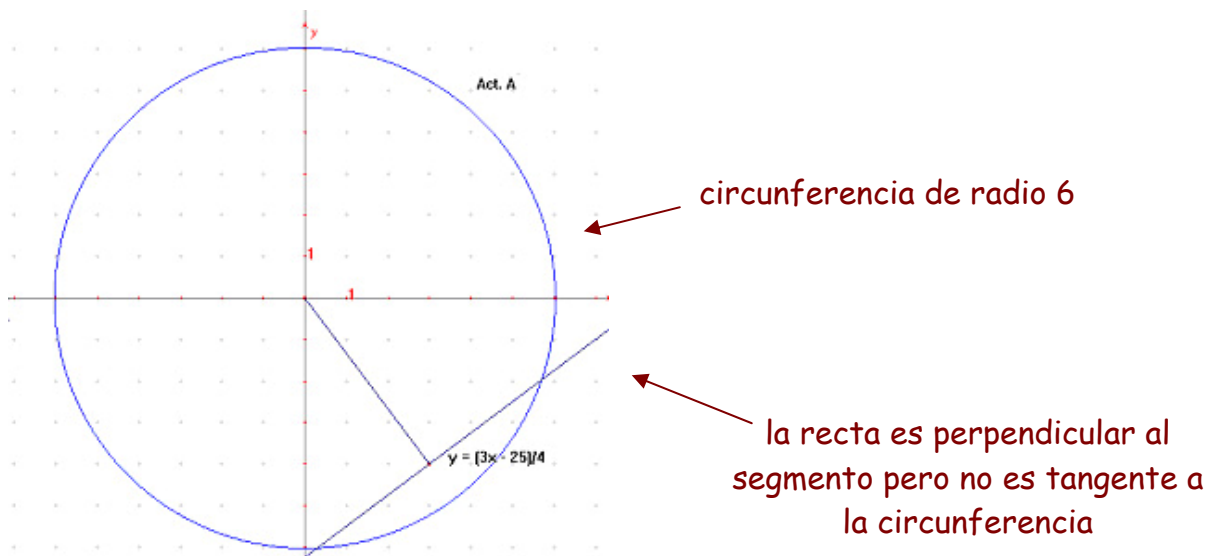
Fase 5, Integración, Nivel 2

En la actividad A, traza la circunferencia con radio 6 en lugar de 5, por lo que su construcción es errónea, pero traza la recta tangente con la opción *recta perpendicular* al radio que trazó con anterioridad, por lo que se observa que recuerda esta propiedad. Al darse cuenta de su error en el radio de la circunferencia, repite la construcción con el radio y el punto de tangencia ubicados correctamente, pero esta vez traza la tangente teniendo como apoyo únicamente el sentido de la vista sin

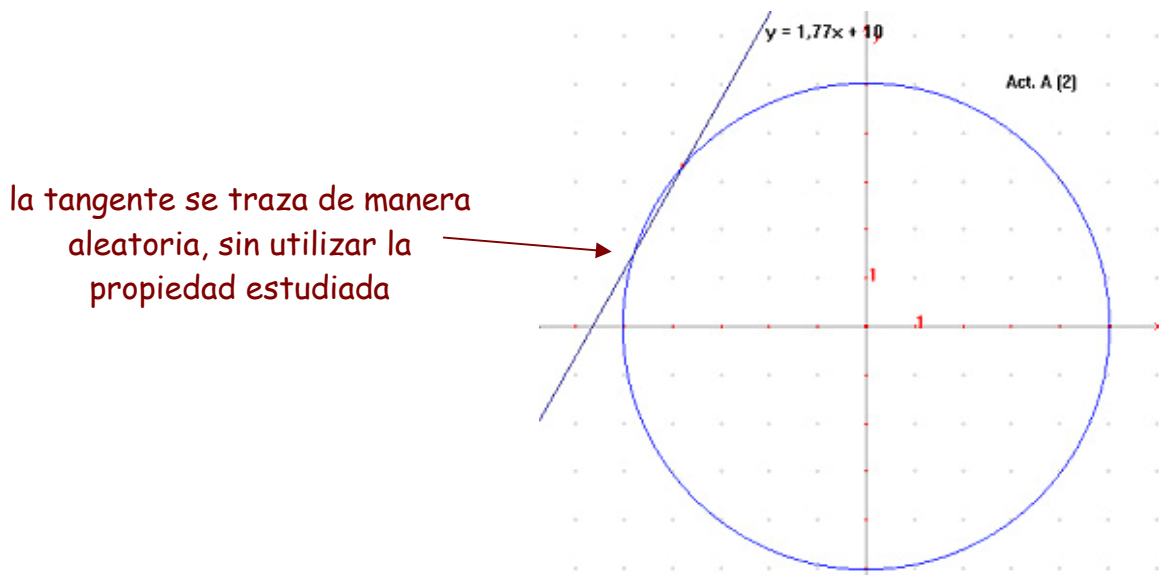
DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

utilizar la opción *recta perpendicular* (es decir, sin utilizar la propiedad estudiada) por lo que su construcción no soporta el *arrastre* de puntos.

En la actividad B, encuentra las coordenadas correctas del lugar donde deberá colocarse la sirena dibujando un triángulo y encontrando el punto de intersección de las mediatrices de sus lados. En su construcción trazó las mediatrices con *punto medio* y *recta perpendicular*, es decir, no utilizó la función *mediatriz* del programa. Sin embargo, la idea de hacerlo así, mediante el trazo del triángulo, no fue de él, ya que pidió ayuda a Juan que estaba sentado cerca de él.



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



De acuerdo a las respuestas y construcciones de Alberto en las dos últimas fases de este nivel se observa que las propiedades de la circunferencia estudiadas no son reconocidas por él salvo en los casos en que las instrucciones dadas en la actividad lo dirijan a ello, cuando es asesorado por otra persona o cuando las condiciones dadas son similares a las que ya ha observado con anterioridad. Al no relacionar unas propiedades con otras, en este caso en las situaciones planteadas en que debía trasladarse un conocimiento a un contexto diferente, y al no poder enunciar de manera correcta y formal las nociones adquiridas, se puede concluir que Alberto permaneció en un nivel 2 de razonamiento geométrico.

Juan

En el análisis preliminar

{	3 respuestas nivel 2
	3 nivel 1
	1 nivel 3
	1 no contestó.

Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 1

En esta fase el alumno logró:

- Reconocimiento del radio. Reconoce al radio como la mitad del diámetro.
- Definir circunferencia. Trata de dar una definición formal y aunque se percibe que tiene una idea correcta no logra estructurar correctamente la oración.
- Reconocimiento del diámetro. Reconoce que la cuerda alcanza su mayor longitud al pasar por el centro y dice que ahí “se convierte en diámetro”.
- Reconocimiento de la recta tangente. Reconoce la recta tangente cuando la distancia entre los puntos es cero y sólo observa a uno de ellos.
- Definir mediatriz. Define correctamente a la mediatriz, enumerando sus propiedades.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Actividad A Juan y Gutierrez SD

1 Radio

2 4.74

3 Igual

Una circunferencia es un punto estatico con otro q gira alrede
de el siempre a la misma distancia

Actividad B

1 Q el radio es la mitad del diametro

2 Si

Actividad C

1 Solo la longitud

1 Cuando pasa por el centro pero se convierten diametro

Actividad D

1 Cuando estan en el mismo punto

2 tangente

3 Uno

Actividad E

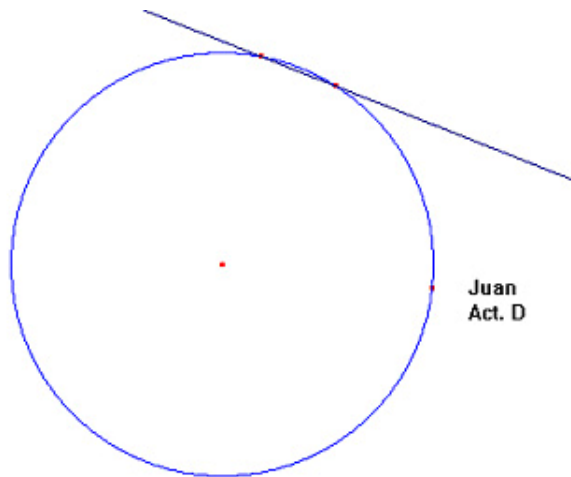
1 iguales

2 Si

165,3°

No

Mediotriz es una recta q perpendicular a un segmento q corta
al segmento por la mitad



Fase 3, Explicitación, Nivel 1

En el video que se tomó a Juan durante esta fase se puede observar lo siguiente:

- Explica que la circunferencia se obtiene a partir de dos puntos, uno de los cuales se queda estático y el otro se mueve a una distancia constante de él.
- De manera acertada utiliza el concepto de cuerda, secante y tangente, y da una definición de esta última de acuerdo a la actividad realizada.
- En su definición de mediatriz, menciona las propiedades fundamentales de esta recta (que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a él) y otras (que la distancia de un punto cualquiera de la mediatriz a los extremos del segmento es siempre igual), de manera acertada.

En todas sus explicaciones muestra un nivel 2 de razonamiento geométrico.

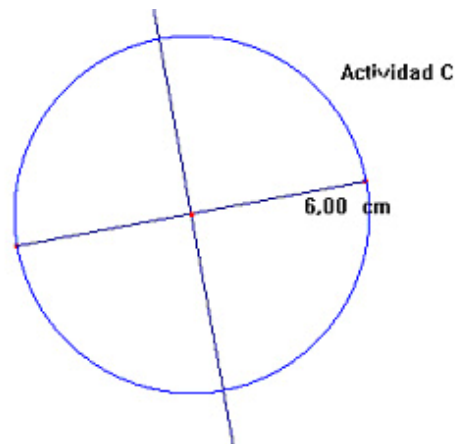
Fase 4, Orientación Libre, Nivel 1

En la actividad A, Juan reconoce a la hipotenusa del triángulo rectángulo como diámetro de la circunferencia.

En la actividad B traza correctamente la mediatriz, con las opciones *punto medio* y *recta perpendicular* de Cabri.

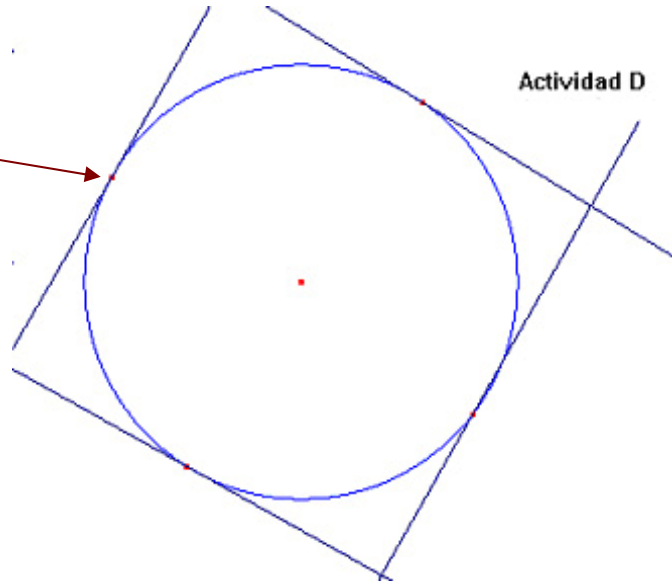
En la actividad C, busca el centro de la circunferencia trazando la mediatriz del diámetro y marcando el punto de intersección entre ambos. Aunque la opción más clara sería utilizar simplemente el punto medio del diámetro, parece que busca utilizar el concepto de mediatriz de la actividad anterior.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



En la actividad D, traza las tangentes sin utilizar rectas secantes en las cuales la distancia entre los puntos es cero.

tangentes trazadas de
manera aleatoria. No
soportan la prueba del
dragging.



Juan

Fase 4, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia cualquiera. Coloca ahora, con la opción *punto sobre objeto*, tres puntos cualesquiera sobre ella y dibuja las tres cuerdas que los unen, formando entre sí un triángulo. *Arrastra* los puntos hasta que formes un triángulo rectángulo (comprueba con la opción *ángulo* que efectivamente un ángulo interior del triángulo mida 90°). ¿Cómo podrías describir esta figura?

Un triángulo rectángulo dentro de un círculo y su hipotenusa pasa por el centro

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 5, Integración, Nivel 1

Actividad A, nota claramente que los segmentos trazados son, los tres, radios de la circunferencia, y por ello, miden lo mismo. En la actividad B, construye correctamente la mediatriz y enuncia dos propiedades de ella.

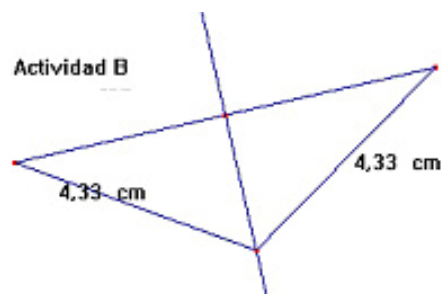
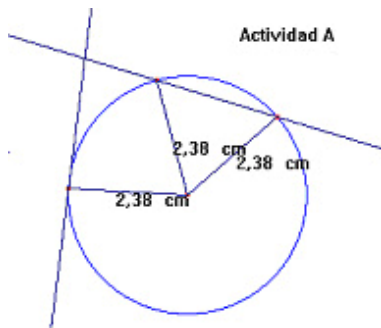
Fase 5, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Ahora traza una recta secante a la circunferencia y traza los segmentos que hay desde el centro hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia. Mide la longitud de estos segmentos. Ahora traza una recta tangente a la circunferencia y traza el segmento del centro al punto de tangencia y obtén su longitud. Arrastra los elementos de la construcción. En base a lo que observas, señala al menos una semejanza y una diferencia entre ambas rectas.

los puntos donde se intersectan tienen la misma distancia ya q son radios
la secante toca 2 puntos de la circunferencia y la tangente 1

Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento. Coloca un punto sobre la mediatriz con la opción *punto sobre objeto*, traza los segmentos desde este punto hasta los extremos del segmento inicial y mide sus longitudes. Arrastra el punto colocado sobre la mediatriz y observa. En base a lo que observas, señala al menos dos características de la mediatriz de un segmento de recta.

Cualquier punto sobre una mediatriz tiene la misma distancia de los extremos de la recta a la cual es ~~la~~ mediatriz
la recta al unirlos con los extremos siempre forma 2 angulos de 90°



De acuerdo a las construcciones y respuestas dadas en esta última fase, se observa que Juan ha alcanzado el nivel 2 de razonamiento geométrico tomando como principales elementos implícitos el diámetro de una circunferencia, recta tangente a ella y mediatriz de un segmento de recta. Muestra un buen entendimiento en cuanto a la relación de dependencia entre los elementos en una construcción con Cabri, y en sus construcciones no se observa que presente confusión respecto a las funciones básicas del programa. Juan puede relacionar unos conceptos con otros, cualidad del nivel 3 de razonamiento geométrico.

Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 2

En la actividad A, Juan observa que las distancias de cada vértice al punto de intersección de las mediatrices son iguales y que sirve para trazar una circunferencia siendo dicho punto el centro.

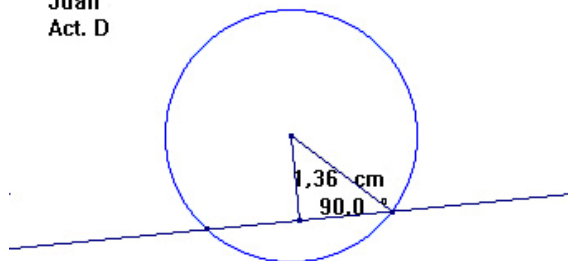
En la actividad B, sí observa que la mediatriz pasa por el centro de la circunferencia.

En la actividad C, define la propiedad en general, sin mencionar la actividad realizada, pero en ella faltan elementos fundamentales (no menciona “circunferencia”).

En la actividad D, da una definición general, bien estructurada, pero en la cual faltan elementos para estar completa (“circunferencia” y “recta tangente”).

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Juan
Act. D



Fase 2, Nivel 2

Actividad A. Con la opción triángulo traza un triángulo cualquiera y *rellénalo* con algún color. Traza ahora la mediatriz de cada uno de sus lados y marca el punto de intersección de ellas. Dibuja los segmentos que unen a este punto con los vértices del triángulo y calcula la longitud de cada uno de ellos. ¿Cómo son estas longitudes? ¿Se mantiene esta característica al arrastrar cualquiera de los vértices? ¿Para qué podría utilizarse el punto de intersección de las mediatrices?

Si
Para hacer un círculo y el punto de intersección es el centro

Actividad B. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Con la opción *punto sobre objeto*, coloca dos puntos sobre la circunferencia y traza el segmento entre ellos, lo que será una cuerda. Con la opción *mediatriz* traza ahora la mediatriz del segmento. Arrastra cualquiera de los puntos extremos de la cuerda y observa los elementos de la figura que construiste. ¿La mediatriz pasa por algún punto importante relativo a la circunferencia? ¿Cuál? ¿Ocurre siempre esto sin importar al radio de la circunferencia o la longitud de la cuerda?

Si; 2 el centro si

Actividad C. Coloca dos puntos cualesquiera y traza una circunferencia con uno de ellos como centro y el otro para el radio. Con este último y otro más sobre la circunferencia traza un segmento de recta. Con la opción *mediatriz* traza la mediatriz del segmento. Ahora con la opción *pertenece* averigua si el centro de la circunferencia está sobre la mediatriz. Arrastra los dos extremos del segmento o cuerda trazada y observa si se mantiene la propiedad mostrada. ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

la mediatriz de cualquier cuerda siempre atraviesa el centro

Actividad D. Traza una circunferencia cualquiera y coloca dos puntos sobre ella. Dibuja el punto medio entre estos dos puntos y traza la recta secante a la circunferencia que pasa por todos ellos. Traza un segmento de recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto medio de la cuerda trazada, y calcula su longitud. Mide el ángulo que hay entre este segmento y la cuerda trazada. Arrastra ahora uno de los puntos sobre la circunferencia. ¿Cómo es el ángulo medido? Ahora traza un segmento desde el centro de la circunferencia hasta uno de los extremos de la cuerda, y mide su longitud (que será igual al radio de la curva). Arrastra uno de los puntos sobre la circunferencia y observa las longitudes medidas. ¿Cómo son estas cantidades? ¿Y cuando la recta secante se convierte en tangente? Si mueves los puntos sobre la circunferencia, de modo que cambie el punto de tangencia, ¿se mantiene la medida del ángulo medido? ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

1 igual 2 igual 3 si 4 El ángulo de la mediatriz de cualquier secante siempre va a ser recto

Fase 3, Explicitación, Nivel 2

En el video que se tomó en esta fase se observa que Juan:

- Enuncia la primera propiedad observada de manera informal, con la idea general correcta pero mostrando confusión con los términos al decir “mediatriz de cualquier recta”, en lugar de *segmento*.
- No reconoce ni formula el enunciado referente a la última actividad de la fase anterior, es decir, no enuncia la segunda propiedad de la circunferencia mostrada.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 2

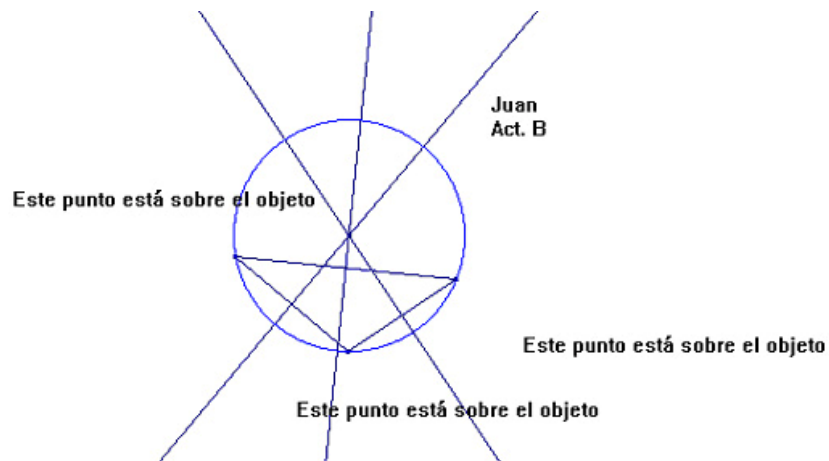
Actividad A, la construcción hecha por Juan es correcta; no hace alusión al enunciado de la propiedad de la que se habla en la actividad.

En la actividad B, Juan hace correctamente la construcción de la circunferencia utilizando para ello un triángulo que pasa por los tres puntos iniciales y trazando sus mediatrices, es decir, que emplea de forma correcta la primera propiedad estudiada.

En la actividad C, Juan pide asesoría para poder realizar la construcción pedida como se observa en el video. Con las instrucciones que se le dan en forma oral puede hacer la construcción pedida y expresa después de ello que la situación es una variante a la propiedad usada en la actividad anterior.

En la actividad D, traza las tangentes a la circunferencia con la opción *recta perpendicular* de forma correcta, por lo que su construcción soporta el *arrastre* de los puntos.

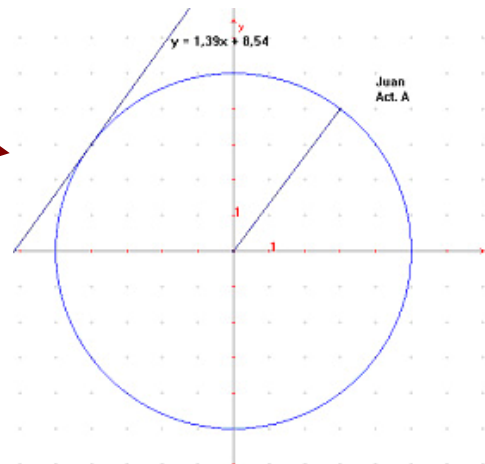
DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Fase 5, Integración, Nivel 2

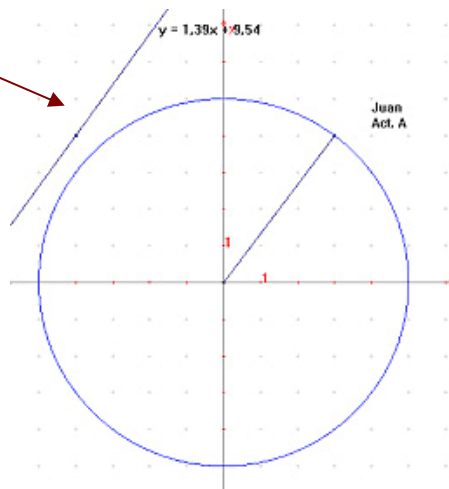
En la actividad A la construcción hecha por Juan es errónea ya que traza la tangente de forma aleatoria, ignorando la segunda propiedad de la circunferencia que se está estudiando. En la actividad B, en cambio, la construcción es correcta y soporta el *arrastre* de los puntos, dando una solución adecuada al problema planteado.

la tangente la traza de forma
aleatoria, sin utilizar la
propiedad estudiada



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

la construcción no
soporta la prueba
del *dragging*



De acuerdo a las construcciones y respuestas dadas en estas dos últimas fases, se observa que Juan maneja con facilidad las funciones básicas de Cabri.

Respecto a la primera propiedad estudiada, resuelve de manera correcta los problemas que se le plantean, incluso en un contexto distinto a los que se emplearon originalmente, y puede enunciar dicha propiedad de manera correcta y formal, mencionando todos los elementos involucrados. Estas dos características observadas en su trabajo corresponden a un nivel 3 de razonamiento geométrico.

Respecto a la segunda propiedad de la circunferencia estudiada, se observa que reconoce dicha propiedad cuando se le plantea una situación en contexto similar al dado con anterioridad, pero no la aplica al variar las condiciones ni puede enunciar correctamente, aún de manera informal, dicha propiedad, mostrando confusión con los términos, características ambas de un nivel 2 de razonamiento geométrico.

Sabrina

En el análisis preliminar

{	6 respuestas nivel 2
	1 nivel 1
	0 nivel 3
	1 no contestó.

Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 1

En esta fase la alumna logró:

- Reconocimiento del radio.
- Definir circunferencia. Define la circunferencia como la trayectoria seguida por un punto que se mueve a una distancia constante de un punto fijo. Carácter dinámico.
- Definir al diámetro. Define al diámetro como dos veces el radio. Reconoce a la cuerda más larga como el diámetro.
- Reconocimiento de la recta tangente. Reconoce a la tangente cuando un punto está sobre el otro y sólo se observa uno.
- Definir mediatriz. Define correctamente a la mediatriz, enumerando sus propiedades.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Sabrina .

- A). radio. = 5,71 cm.
es igual.
es ~~la~~ la línea que deja un punto ~~en~~ que se mueve a
la misma distancia de un punto fijo.
- B) $r = 5.83$ que el diámetro es igual a 2 veces el radio.
 $d = 11.66$
si, conservan la misma relación, pues aumentan a proporción.
- C) se vuelve más larga o corta, según se mueva.
si, su longitud cambia.
cuando pasa por el centro.
diámetro.
- D) que uno queda sobre el otro, ~~en~~ dejar de estar sobre la
tangente. circunferencia.
no.
- E) iguales.
si.
 90° .
si
es una recta que corta a un segmento por exactamente la
mitad, formando un ángulo de ~~90~~ 90° .

Fase 3, Explicitación, Nivel 1

En el video tomado en esta fase a Sabrina se observa que:

- Define a la circunferencia como un punto que se mueve alrededor de otro, a una distancia fija, utilizando de forma explícita el concepto de radio.
- Menciona de forma explícita el concepto de cuerda y diámetro.
- Menciona que la tangente es una recta que toca un solo punto de la circunferencia *por fuera* de ella.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

- Explica de manera correcta el concepto de mediatriz, sin establecer alguna nueva propiedad de esa recta (solo menciona que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a él).

Sus descripciones muestran un nivel de razonamiento 1 y 2.

Desafortunadamente Sabrina no pudo asistir a las siguientes sesiones, por lo que se interrumpió en esta etapa la investigación de su caso.

Ambar

En el análisis preliminar

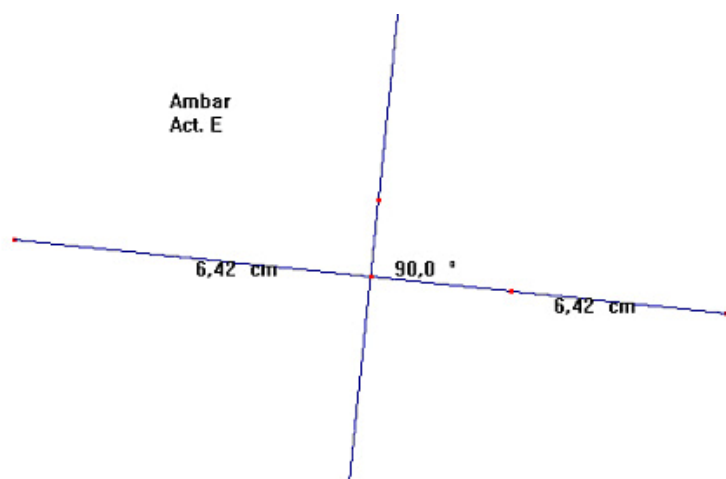
{	3 respuestas nivel 2
	3 nivel 1
	1 nivel 3
	1 no contestó.

Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 1

En esta fase la alumna logró:

- Reconocimiento del radio.
- Definir circunferencia. Define a la circunferencia como lugar geométrico con un centro. Para aclarar su idea menciona al radio como la distancia de un punto cualquiera al centro y que no cambia. Su definición fue la siguiente: “Es un lugar geométrico con un centro. Cualquier punto que vaya de la circunferencia al centro se llama radio y su tamaño/distancia no cambia, es constante”.
- Reconocimiento del diámetro. Reconoce al diámetro como el doble del radio. Más adelante presenta confusión en sus conceptos ya que reconoce a la cuerda más larga cuando “va de un extremo a otro y pasa por el centro” y le llama radio.
- Reconocimiento de la tangente. Sí reconoce a la tangente, cuando sólo se observa un punto.
- Definir mediatriz. Define correctamente a la mediatriz y sus propiedades.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Ambar

A

- 1.- Radio
- 2.- 3.05 cm
- 3.- Igual, no cambia
- 4.- Es un lugar geométrico con un centro.
Cualquier punto que vaya de la circunferencia al centro se llama radio y su tamaño/distancia nunca cambia, es constante.

B

- 1.- El diámetro es lo doble de el radio ~~y se va por el centro~~
ya que va de un extremo al otro cruzando por el centro
- 2.- Su valor crece o disminuye pero la relación es la misma.

C

- 1.- Si cambia su apariencia, puede ser más pequeña o más grande
- 2.- Su longitud también cambia, si los puntos están cerca mide menos, (valores pequeños); si los puntos están alejados los valores aumentan.
- 3.- Cuando la cuerda va de un extremo al otro y pasa por el centro.
- 4.- Esto es el radio.

D

- 1.- La dist. mínima es la tangente, solo toca un punto de la circunferencia.

2.- Es la recta tangente

3.- Solo uno en la circunferencia.

4.- Una mediatriz

es una recta que corta a un segmento justo a la mitad formando un ángulo de 90°

E

1.- Los extremos miden exactamente lo mismo

2.- Sí, siguen siendo iguales

3.- 90°

4.- 90°

Fase 3, Explicitación, Nivel 1

En el video tomado a Ambar en esta etapa se observa que:

- Al igual que en sus respuestas escritas, reconoce componentes y propiedades pero no es capaz de dar una definición ordenada, formal.
- En sus descripciones utiliza un lenguaje geométrico básico, mostrándose segura al mencionar elementos como el radio o el diámetro, incluso la tangente, pero se muestra insegura al hablar de la mediatriz. Resalta los elementos básicos: ángulo de 90° , que pasa por el centro.

En esta fase Ambar muestra características del nivel 1 y 2.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 1

En la actividad A, reconoce a la hipotenusa como diámetro de la circunferencia y establece que *sólo así* el triángulo puede ser rectángulo.

En la Actividad B, construye correctamente a la mediatriz, utilizando las opciones *punto medio* y *recta perpendicular* de Cabri.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Ambar

Fase 4, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia cualquiera. Coloca ahora, con la opción *punto sobre objeto*, tres puntos cualesquiera sobre ella y dibuja las tres cuerdas que los unen, formando entre sí un triángulo. *Arrastra* los puntos hasta que formes un triángulo rectángulo (comprueba con la opción *ángulo* que efectivamente un ángulo interior del triángulo mida 90°). ¿Cómo podrías describir esta figura?

Resp

De la circunferencia se puede trazar un triángulo y para que este pueda ser rectángulo su hipotenusa debe cruzar de un lado al otro atravesando el centro (diámetro).

Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento.

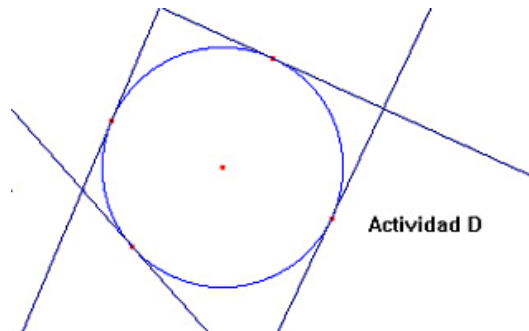
Con punto medio y recta perpendicular

Actividad C. Traza un segmento de recta de longitud igual a 6 cm. Traza una circunferencia de radio igual a 3 cm utilizando este segmento como uno de sus diámetros.

Actividad D. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Traza al menos cuatro rectas tangentes distintas a esta circunferencia.

En la actividad C, traza la circunferencia utilizando el punto medio del diámetro para el centro.

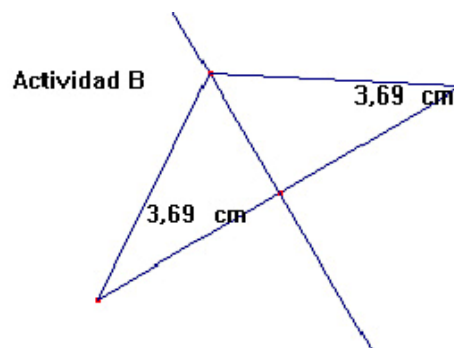
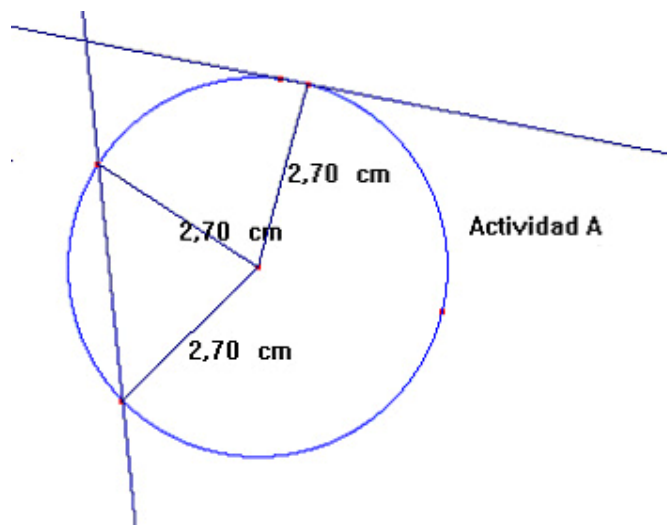
En la actividad D, traza las tangentes a partir de rectas secantes.



Fase 5, Integración, Nivel 1

En la actividad A, Ambar reconoce las distancias medidas como iguales por ser radios de la circunferencia. Traza la tangente a partir de una secante y menciona aquí que esta recta puede volverse tangente al unirse sus puntos.

En la actividad B, construye correctamente la mediatriz y realiza las mediciones pedidas. Al enunciar las propiedades relaciona las características que observa con las de un triángulo isósceles lo que coincide con nuestro análisis a priori.



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 5, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Ahora traza una recta secante a la circunferencia y traza los segmentos que hay desde el centro hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia. Mide la longitud de estos segmentos. Ahora traza una recta tangente a la circunferencia y traza el segmento del centro al punto de tangencia y obtén su longitud. Arrastra los elementos de la construcción. En base a lo que observas, señala al menos una semejanza y una diferencia entre ambas rectas.

Las distancias no cambian, se mantienen constantes.
Ya que en todos los casos se podía determinar que
de el centro a los dif. puntos es un radio.

Con la recta secante y sus segmentos se pueden
formar triángulos dependiendo de a donde se muevan los
puntos.

La secante puede volverse tangente si se unen sus puntos

Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento. Coloca un punto sobre la mediatriz con la opción *punto sobre objeto*, traza los segmentos desde este punto hasta los extremos del segmento inicial y mide sus longitudes. Arrastra el punto colocado sobre la mediatriz y observa. En base a lo que observas, señala al menos dos características de la mediatriz de un segmento de recta.

Al unir los tres puntos se forma un triángulo
isocel, siendo su característica principal
que sus lados o caras opuestas tienen la misma
medida, no importa como movamos los
puntos siempre medran lo mismo.

La mediatriz mantiene su característica
de que tiene un ángulo de 90° .

En las respuestas y construcciones de Ambar en esta última fase se observa un nivel 2 de razonamiento geométrico, teniendo como principales elementos implícitos el diámetro de una circunferencia, recta tangente a ella y mediatriz de un segmento de recta. Hace buen uso de las funciones básicas de Cabri, en sus construcciones no se observa confusión al utilizarlas y demuestra entendimiento en la relación de dependencia entre los elementos de las construcciones. En las actividades de la fase de Integración se observa claramente que ha adquirido el conocimiento. Ambar relaciona en ocasiones las propiedades mostradas con las de otras figuras, característica del nivel 3 de razonamiento geométrico.

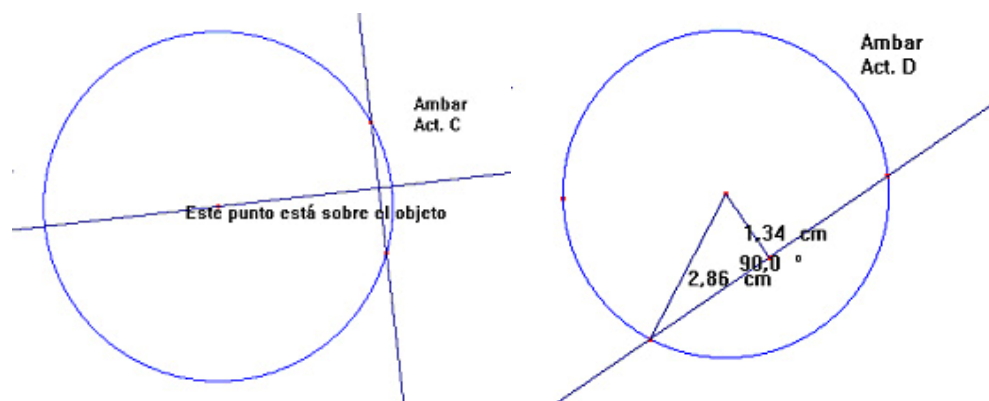
Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 2

Actividad A, Ambar observa que las distancias de cada vértice al punto de intersección de las mediatrices son iguales y menciona que dicho punto sirve para trazar una circunferencia que pase por los tres vértices.

En la actividad B, sí observa que la mediatriz pasa por el centro de la circunferencia.

En la actividad C, da un enunciado de la propiedad mal estructurado: aunque en él demuestra conocer la propiedad observada, no se muestra capaz de dar una definición correcta y completa, aún de manera informal.

En la actividad D, al tratar de enunciar la propiedad explica lo que observa en la figura pero no lo generaliza para todas las circunferencias. Al igual que en la actividad anterior, no se muestra capaz de dar una definición correcta y completa, aún de manera informal.



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

/ Fase 2, Nivel 2

Actividad A. Con la opción triángulo traza un triángulo cualquiera y rellénalo con algún color. Traza ahora la mediatriz de cada uno de sus lados y marca el punto de intersección de ellas. Dibuja los segmentos que unen a este punto con los vértices del triángulo y calcula la longitud de cada uno de ellos. ¿Cómo son estas longitudes? ¿Se mantiene esta característica al arrastrar cualquiera de los vértices? ¿Para qué podría utilizarse el punto de intersección de las mediatrices?

Las longitudes son exactamente iguales. No importa cuanto se mueva ni cual sus distancias son iguales.

Para poder ~~determinar~~ ^{trazar} una circunferencia que pase por los tres ^{vértices}
Actividad B. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Con la opción punto sobre objeto, coloca dos puntos sobre la circunferencia y traza el segmento entre ellos, lo que será una cuerda. Con la opción mediatriz traza ahora la mediatriz del segmento. Arrastra cualquiera de los puntos extremos de la cuerda y observa los elementos de la figura que construiste. ¿La mediatriz pasa por algún punto importante relativo a la circunferencia? ¿Cuál? ¿Ocurre siempre esto sin importar al radio de la circunferencia o la longitud de la cuerda?

La mediatriz siempre pasa por el centro sin importar hacia donde se mueva ni la distancia de la cuerda o el radio.

Actividad C. Coloca dos puntos cualesquiera y traza una circunferencia con uno de ellos como centro y el otro para el radio. Con este último y otro más sobre la circunferencia traza un segmento de recta. Con la opción mediatriz traza la mediatriz del segmento. Ahora con la opción pertenece averigua si el centro de la circunferencia está sobre la mediatriz. Arrastra los dos extremos del segmento o cuerda trazada y observa si se mantiene la propiedad mostrada. ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

Si se mantiene, el centro si esta sobre la mediatriz y la mediatriz siempre mantendría esa característica.

Actividad D. Traza una circunferencia cualquiera y coloca dos puntos sobre ella. Dibuja el punto medio entre estos dos puntos y traza la recta secante a la circunferencia que pasa por todos ellos. Traza un segmento de recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto medio de la cuerda trazada, y calcula su longitud. Mide el ángulo que hay entre este segmento y la cuerda trazada. Arrastra ahora uno de los puntos sobre la circunferencia. ¿Cómo es el ángulo medido? Ahora traza un segmento desde el centro de la circunferencia hasta uno de los extremos de la cuerda, y mide su longitud (que será igual al radio de la curva). Arrastra uno de los puntos sobre la circunferencia y observa las longitudes medidas. ¿Cómo son estas cantidades? ¿Y cuando la recta secante se convierte en tangente? Si mueves los puntos sobre la circunferencia, de modo que cambie el punto de tangencia, ¿se mantiene la medida del ángulo medido? ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

El ángulo es de 90° y así se mantiene

la medida de ~~el~~ centro a extremo de la cuerda se mantiene siempre constante.

La medida entre el centro y el punto medio varía pero al momento de juntarse los puntos y volverse tangente las dos miden lo mismo.

Fase 3, Explicitación, Nivel 2

En el video que se tomó durante esta fase se puede observar que Ambar:

- Puede enunciar la primera propiedad de la circunferencia mostrada, de manera informal, haciendo siempre referencia a las actividades realizadas (no generalizando).
- No puede enunciar la segunda propiedad y tampoco observa la relación entre la recta tangente a la circunferencia y el centro de la circunferencia.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 2

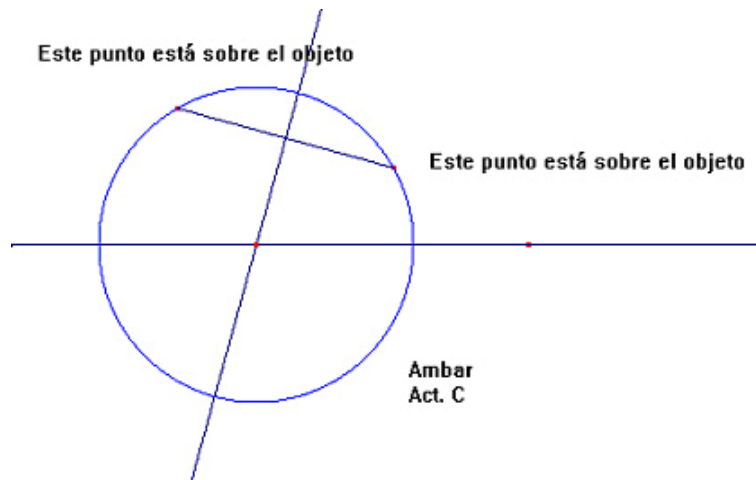
En la actividad A, Ambar traza de manera correcta la figura indicada, utilizando *punto medio* y *recta perpendicular* en lugar de la opción *mediatriz* del programa, lo que muestra un claro dominio de las características principales de esta recta.

En la actividad B, Ambar construye correctamente la circunferencia a partir de los tres puntos iniciales, utilizando un triángulo y la opción *mediatriz* para cada uno de sus lados, de manera que soporta la prueba del *dragging*.

En la actividad C, Ambar hizo varios intentos para su resolución y finalmente pidió asesoría, como se observa en el video, realizando correctamente la construcción.

En la actividad D, hace correctamente la construcción de las rectas tangentes, utilizando una recta que pasa por el centro de ella y la función *recta perpendicular*, aplicando la segunda propiedad que se está estudiando.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



Fase 4, Nivel 2

Actividad A. Repite la actividad B de la Fase 2, con las siguientes condiciones iniciales: radio de la circunferencia igual a 3 cm, mediatriz trazada sin utilizar la función *mediatriz* del programa. Al terminar tu construcción, arrastra los puntos extremos de la cuerda y revisa el enunciado de la propiedad que hiciste anteriormente.

La mediatriz siempre pasa por el centro
y no importa hacia donde se mueva siempre
mantendrá esta característica

Actividad B. Coloca sobre tu hoja de trabajo tres puntos cualesquiera y traza la circunferencia que pasa por todos ellos. Utiliza la opción *pertenece* para verificar que los tres puntos están sobre la circunferencia. Verifica tu construcción *arrastrando* los puntos iniciales.

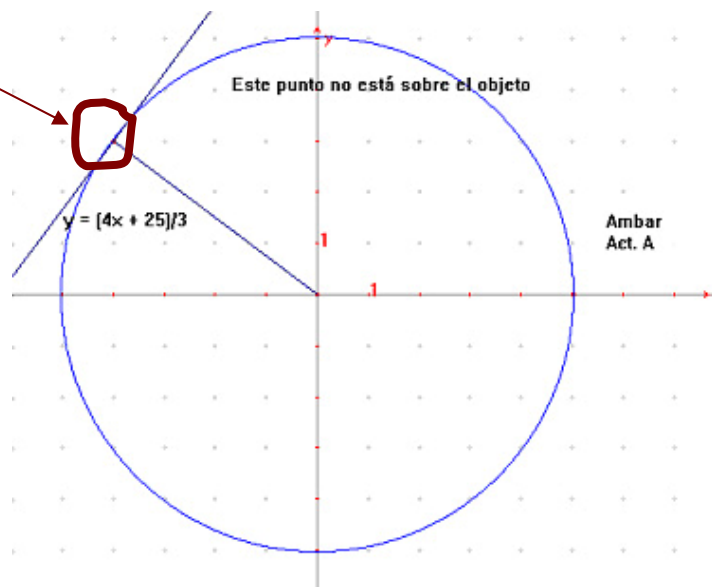
Fase 5, Integración, Nivel 2

En la actividad A, Ambar traza correctamente la recta tangente a la circunferencia en el punto $(-4,3)$, utilizando la opción *recta perpendicular* al radio dibujado con anterioridad. Sin embargo, su construcción no soporta la prueba del *arrastre* de puntos ya que el punto de tangencia no lo colocó *sobre la circunferencia* sino *sobre la parrilla* (en la coordenada dada).

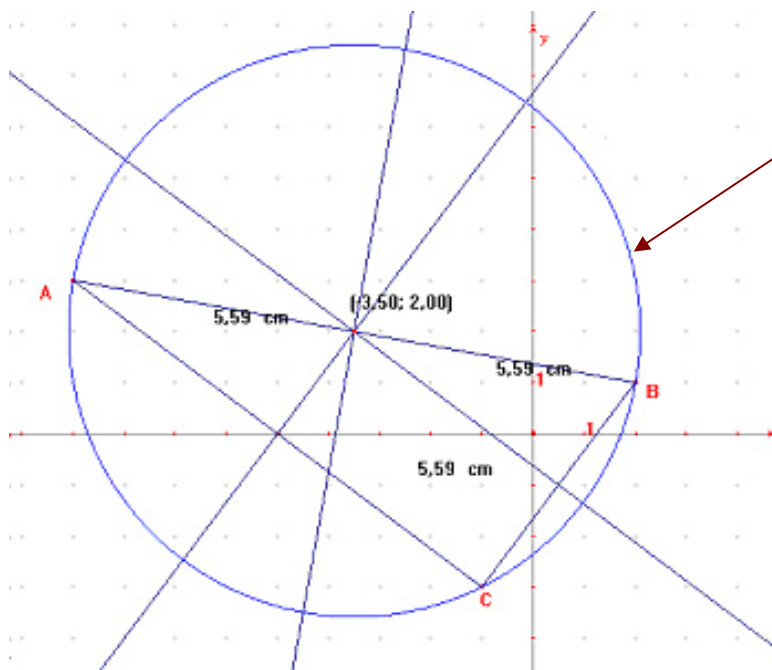
DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

En la actividad B, Ambar realiza el planteamiento del problema dibujando un triángulo con los tres pares de coordenadas dados y utilizando la opción *mediatriz* da cada uno de los lados, señalando después su punto de intersección como aquel en donde deberá colocarse la sirena a que se refiere el problema. A pesar de ello la solución que da no es correcta, pero únicamente porque confunde la orientación (el este con el oeste).

el punto no está colocado
sobre la circunferencia,
por lo que la construcción
no soporta la prueba del
dragging



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



en la construcción se utiliza
correctamente una de las
propiedades estudiadas
pero se invierte la
orientación este-oeste

De acuerdo a las construcciones y respuestas dadas en estas dos últimas fases, se puede observar que Ambar ha adquirido los elementos implícitos que se manejaron en este nivel y que aplica las propiedades de la circunferencia estudiada en problemas de naturaleza distinta a los vistos en la fase de orientación dirigida; además, puede enunciar de manera correcta y completa dichas propiedades (lo que no había podido hacer en la fase de Explicitación), por lo que en su trabajo con ambas se observa un nivel 3 de razonamiento geométrico. Las principales dificultades que se le presentaron a ella se refirieron a cuestiones de la tecnología empleada y no a los conceptos involucrados.

Masayiri

En el análisis preliminar

{	6 respuestas nivel 2
	2 nivel 1
	0 nivel 3
	1 no contestó.

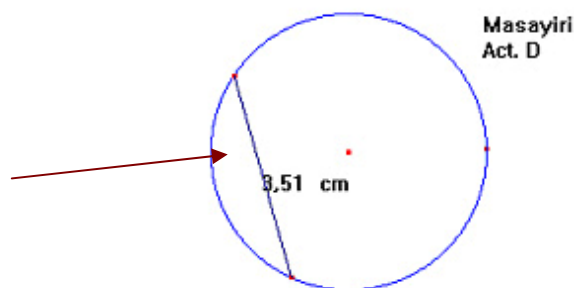
Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 1

En esta fase el alumno logró:

- Reconocimiento del radio.
- Definir circunferencia. Construye una definición hecha en términos simples pero acertada, indicando la distancia constante del centro a un punto cualquiera de ella.
- Reconocimiento del diámetro. Reconoce al diámetro como el doble del radio. Reconoce que la cuerda alcanza su mayor longitud al pasar por el centro y la reconoce como diámetro.
- Definir mediatriz: Define a la mediatriz correctamente pero respecto de una recta, no un segmento de recta.

Nota: El alumno no reconoce en la figura a la recta tangente, siempre observa dos puntos sobre la circunferencia.

traza un segmento de recta
en lugar de una recta



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

- ① radio (3.94cm)
- ② La medida es la misma
- ③ Figura en la cual tomamos un punto cualquiera de la circunferencia va a medir lo mismo al centro y no importa de donde se tome ese punto

Actividad B

- ① Que el diámetro tiene el doble del radio $r = 6.01$ $d = 12.02$
- ② Se sigue manteniendo su relación
- ③ si su relación no cambia

Actividad C

- ① si
- ② También cambia su longitud
- ③ Cuando pasa x el centro
- ④ Diámetro

Actividad D

- ① 1.9
- ② tangente
- ③ 2

Actividad E

- ① Sus distancias son iguales
- ② si se mantienen las medidas
- ③ 44.7°
- ④ No se mantiene
- ⑤ Es la recta que pasa justo por el centro de la recta y forma un ángulo de 90°

Masagini

Fase 3, Explicitación, Nivel 1

En el video tomado en esta fase a Masayiri se observa que:

- Explica sus construcciones en su mayoría con lenguaje coloquial, empleando expresiones como *agrandando la circunferencia*.
- Explica lo que hizo en cada caso pero no menciona las propiedades y características de la recta tangente ni del diámetro como la cuerda de mayor longitud, ni define a la circunferencia a partir de la primera actividad.
- Únicamente describe a la mediatriz, y a partir de sus características fundamentales: pasa por el punto medio del segmento y forma un ángulo de 90° con él.

En esta fase Masayiri muestra características de un nivel de razonamiento geométrico 1 y 2.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 1

En la actividad A, Masayiri menciona que la hipotenusa pasa por el centro de la circunferencia pero no la reconoce como diámetro.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

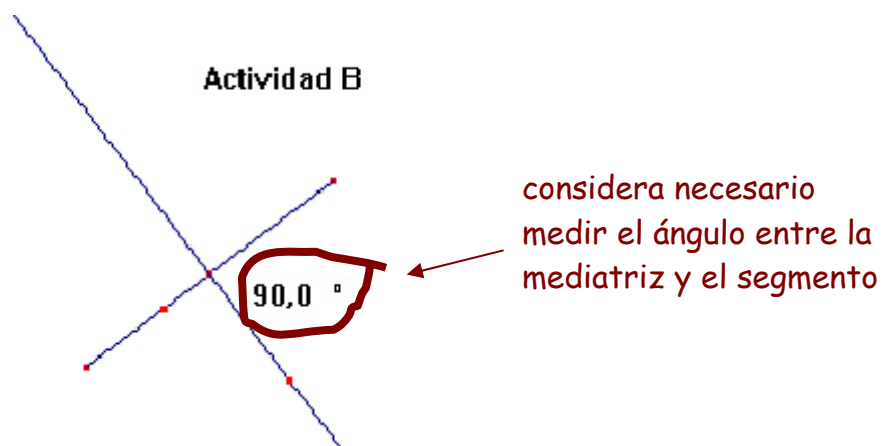
Masayin

Fase 4, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia cualquiera. Coloca ahora, con la opción *punto sobre objeto*, tres puntos cualesquiera sobre ella y dibuja las tres cuerdas que los unen, formando entre sí un triángulo. *Arrastra* los puntos hasta que formes un triángulo rectángulo (comprueba con la opción *ángulo* que efectivamente un ángulo interior del triángulo mida 90°). ¿Cómo podrías describir esta figura?

Es un triángulo rectángulo que ~~pasa~~ dentro de la circunferencia, la hipotenusa pasa x el centro de la circunferencia

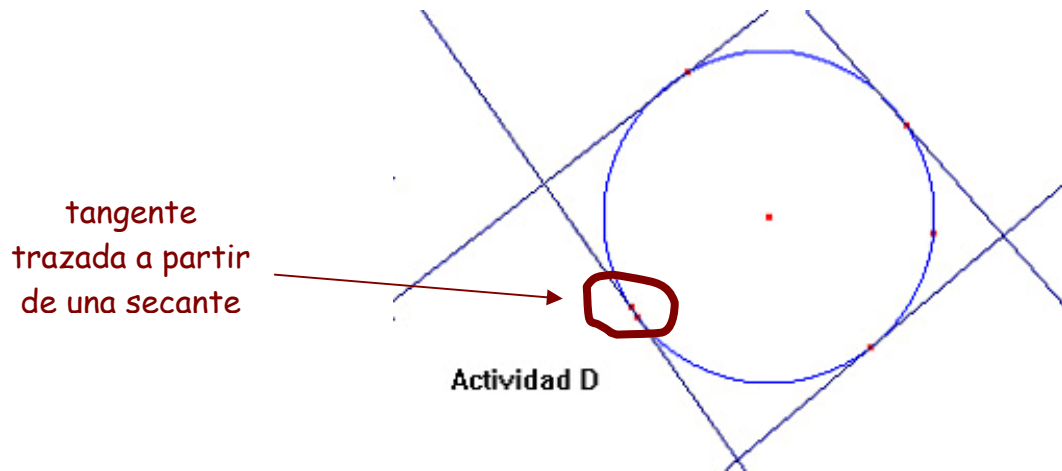
En la actividad B, traza correctamente la mediatriz a partir de las opciones *punto medio* y *recta perpendicular* del programa. A pesar de utilizar esta última función de Cabri, considera necesario verificar el ángulo entre el segmento y la recta. No solamente en este caso consideró necesario la comprobación mediante otra función de Cabri; más adelante, al trazar mediatrices en las siguientes fases, volvió a medir el ángulo que forma con el segmento.



En la actividad C, traza la circunferencia utilizando el punto medio del diámetro como centro.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

En la actividad D, construyó tres tangentes a la circunferencia pero sólo la tercera de ellas tangente a partir de una recta secante (única tangente que soporta la prueba del *dragging*).



Fase 5, Integración, Nivel 1

En la actividad A, Masayiri menciona la semejanza y diferencia entre ambas rectas. No reconoce de forma explícita que los segmentos medidos e iguales sean radios de la circunferencia. La recta tangente la traza a partir de un solo punto sobre la circunferencia.

En la actividad B traza correctamente la mediatriz y los segmentos señalados y realiza las mediciones pedidas. Menciona las dos características pedidas.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 5, Nivel 1

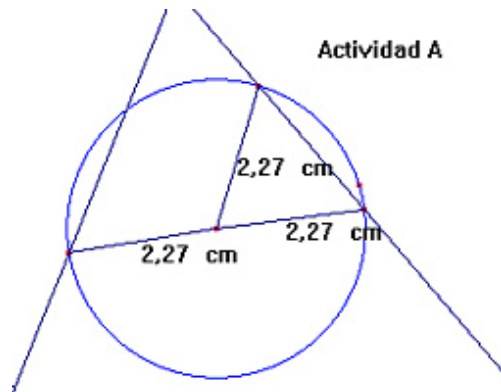
Actividad A. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Ahora traza una recta secante a la circunferencia y traza los segmentos que hay desde el centro hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia. Mide la longitud de estos segmentos. Ahora traza una recta tangente a la circunferencia y traza el segmento del centro al punto de tangencia y obtén su longitud. Arrastra los elementos de la construcción. En base a lo que observas, señala al menos una semejanza y una diferencia entre ambas rectas.

La semejanza es que los 3 puntos de intersección tienen la misma medida al centro

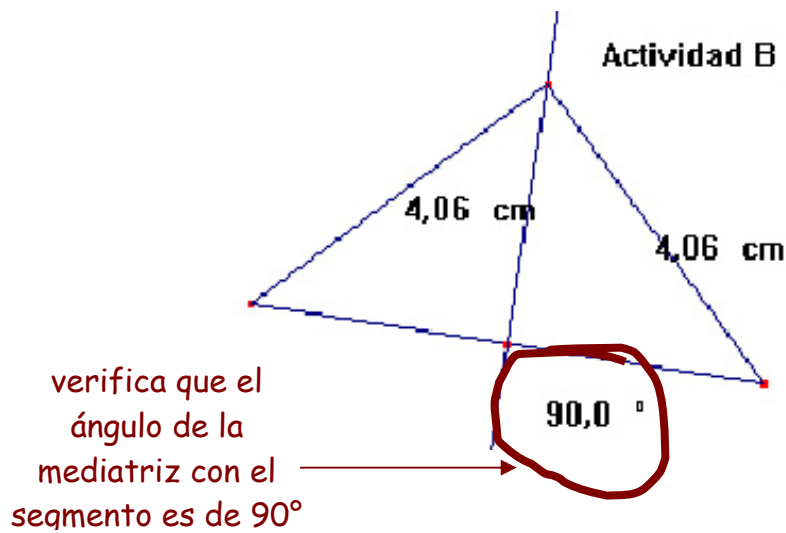
La diferencia sería que la tangente solo toca un punto y la secante 2

Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento. Coloca un punto sobre la mediatriz con la opción *punto sobre objeto*, traza los segmentos desde este punto hasta los extremos del segmento inicial y mide sus longitudes. Arrastra el punto colocado sobre la mediatriz y observa. En base a lo que observas, señala al menos dos características de la mediatriz de un segmento de recta.

- corta al segmento de recta y forma un ángulo de 90°
- la distancia de cada lado del segmento de recta es igual



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



En las actividades de esta última fase se observa que Masayiri tiene un nivel 2 de razonamiento geométrico, teniendo como principales elementos implícitos, al igual que sus compañeros, el diámetro de una circunferencia, recta tangente a ella y mediatriz de un segmento de recta. No muestra confusión en el uso de las funciones básicas de Cabri y se observa buena comprensión en las relaciones de dependencia entre los elementos de sus construcciones. En las actividades muestra también haber adquirido el conocimiento de las características básicas de la mediatriz y de la recta tangente a una circunferencia y las describe de manera informal. No relaciona las propiedades mostradas con las de otras figuras.

Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 2

En la actividad A, Masayiri menciona que las distancias de los vértices al punto de intersección de las mediatrices son iguales, pero no relaciona este punto con figura alguna.

En la actividad B, sí observa que la mediatriz de la cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

En la actividad C, enuncia la propiedad de forma general, correcta y bien estructurada.

En la actividad D, al describir la propiedad se observa que el concepto o idea general que él tiene es correcto, pero su enunciado no es acertado pues utiliza el término “punto medio de la tangente”.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 2, Nivel 2

Actividad A. Con la opción triángulo traza un triángulo cualquiera y *rellénalo* con algún color. Traza ahora la mediatriz de cada uno de sus lados y marca el punto de intersección de ellas. Dibuja los segmentos que unen a este punto con los vértices del triángulo y calcula la longitud de cada uno de ellos. ¿Cómo son estas longitudes? ¿Se mantiene esta característica al arrastrar cualquiera de los vértices? ¿Para qué podría utilizarse el punto de intersección de las mediatrices?

las longitudes son iguales 4.80, si se mantiene para sacar su centro

Actividad B. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Con la opción *punto sobre objeto*, coloca dos puntos sobre la circunferencia y traza el segmento entre ellos, lo que será una cuerda. Con la opción *mediatriz* traza ahora la mediatriz del segmento. Arrastra cualquiera de los puntos extremos de la cuerda y observa los elementos de la figura que construiste. ¿La mediatriz pasa por algún punto importante relativo a la circunferencia? ¿Cuál? ¿Ocurre siempre esto sin importar al radio de la circunferencia o la longitud de la cuerda?

pasa x el centro

si la mediatriz siempre pasa x el centro

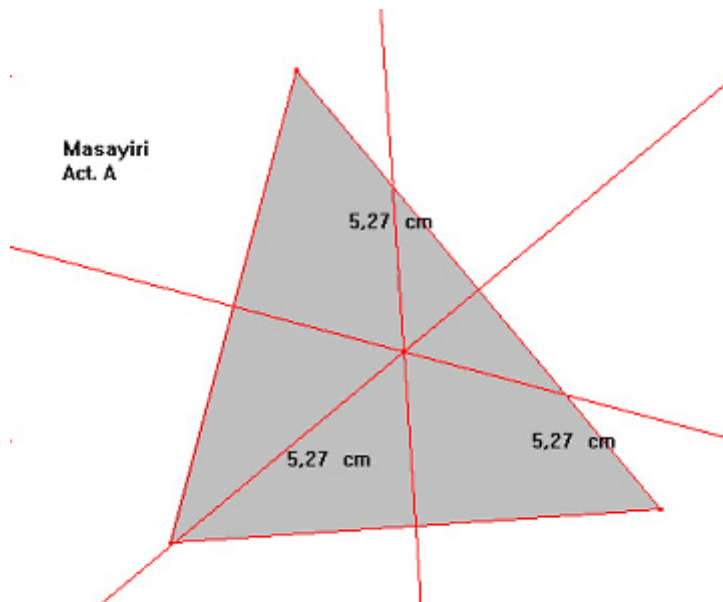
Actividad C. Coloca dos puntos cualesquiera y traza una circunferencia con uno de ellos como centro y el otro para el radio. Con este último y otro más sobre la circunferencia traza un segmento de recta. Con la opción *mediatriz* traza la mediatriz del segmento. Ahora con la opción *pertenece* averigua si el centro de la circunferencia está sobre la mediatriz. Arrastra los dos extremos del segmento o cuerda trazada y observa si se mantiene la propiedad mostrada. ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

→ la mediatriz de cualquier cuerda de una circunferencia siempre pasa por el centro de esta

Actividad D. Traza una circunferencia cualquiera y coloca dos puntos sobre ella. Dibuja el punto medio entre estos dos puntos y traza la recta secante a la circunferencia que pasa por todos ellos. Traza un segmento de recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto medio de la cuerda trazada, y calcula su longitud. Mide el ángulo que hay entre este segmento y la cuerda trazada. Arrastra ahora uno de los puntos sobre la circunferencia. ¿Cómo es el ángulo medido? Ahora traza un segmento desde el centro de la circunferencia hasta uno de los extremos de la cuerda, y mide su longitud (que será igual al radio de la curva). Arrastra uno de los puntos sobre la circunferencia y observa las longitudes medidas. ¿Cómo son estas cantidades? ¿Y cuando la recta secante se convierte en tangente? Si mueves los puntos sobre la circunferencia, de modo que cambie el punto de tangencia, ¿se mantiene la medida del ángulo medido? ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

→ El ángulo es de 90° , las cantidades son iguales *

→ El ángulo formado por el centro de una circunferencia y el punto medio de una recta tangente o secante siempre será de 90°



Fase 3, Explicitación, Nivel 2

En el video tomado en esta fase se observa que Masayiri:

- Enuncia de manera correcta y formal la primera propiedad de la circunferencia estudiada, generalizando lo que observó en las tres primeras actividades de la fase anterior.
- Explica lo que construyó en la cuarta actividad, construcción que hizo de forma correcta, pero no lo generaliza enunciando de alguna manera la propiedad de la circunferencia observada.

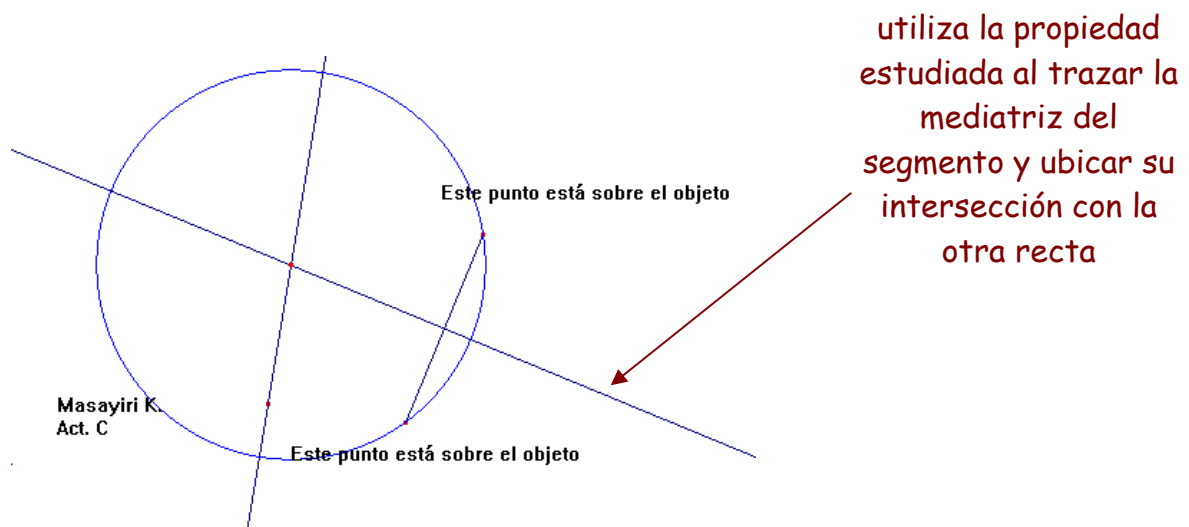
De acuerdo a esto, podemos decir que el alumno presenta características del nivel 3 de razonamiento en la primera propiedad de la circunferencia que se está construyendo y nivel 2 en la segunda.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 2

En la actividad A, Masayiri hace correctamente la construcción de la mediatriz, sin utilizar esta opción del programa.

En la actividad B, construye de manera correcta la circunferencia, trazando un triángulo teniendo como vértices los puntos iniciales y luego la mediatriz de cada uno de ellos con la opción del programa. Su construcción soporta el *arrastre* de los puntos.

En la actividad C, realiza correctamente y sin ayuda la construcción pedida, trazando un segmento con los dos puntos dados y luego su mediatriz, reconociendo el centro de la circunferencia como la intersección de esta mediatriz con la otra recta dada; su construcción sí soporta la prueba del *arrastre* de los elementos.



En la actividad D, traza tres tangentes a una circunferencia, dibujando para cada una primero un radio y luego la recta tangente con la opción *recta perpendicular*. Su construcción sí soporta la prueba del *dragging*.

Fase 5, Integración, Nivel 2

En la primera actividad, Masayiri construye correctamente la recta tangente a la circunferencia pedida, y soporta la prueba del *arrastre* de puntos; aplica de manera correcta la segunda propiedad de la circunferencia estudiada.

En la segunda actividad, obtiene la solución correcta al problema planteado dibujando un triángulo con los puntos que corresponden a las coordenadas de los poblados y trazando después las mediatrices de sus lados y su punto de intersección, aplicando entonces la primera propiedad de la circunferencia estudiada.

Fase 5, Nivel 2

Actividad A. Para una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 5, obtén la ecuación de la recta que es tangente a ella en el punto $(-4, 3)$.

$$y = [4x + 25]/3$$

Actividad B.

Situación: Tres pequeños poblados, A, B y C, se encuentran separados entre sí. La distancia para llegar a cada uno de ellos se midió a partir de la estación del tren más cercana, y fueron las siguientes:

Poblado A, 9 km al este y 3 km al norte.

Poblado B, 2 km al oeste y 1 km al norte.

Poblado C, 1 km al este y 3 km al sur.

Los habitantes de estos poblados han decidido colocar una sirena como alarma ante algún desastre natural.

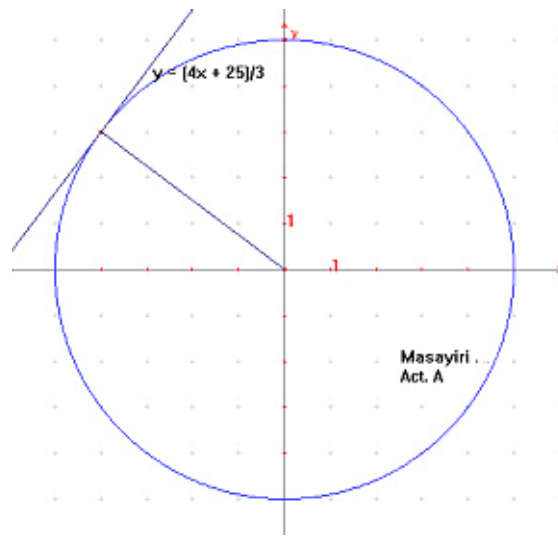
Si las ondas sonoras emitidas por la sirena se propagan de forma circular, ¿en dónde deberá colocarse para que se encuentre a la misma distancia de los tres poblados?

Si el alcance máximo del sonido emitido por la sirena es de 6 km, ¿se escuchará esta señal en las poblaciones?

Sugerencia: Elabora tu construcción colocando la estación del tren en el origen de un sistema de ejes coordenados.

la sirena debe de estar en $(3,50; 2,00)$
y si se escuchara en los 3 poblados medido
desde la estación del tren.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



En las actividades de las dos últimas fases se observa que Masayiri puede aplicar las dos propiedades estudiadas en situaciones distintas a las vistas con anterioridad. Además, describe de manera formal y correcta a estas propiedades en la fase de integración, características ambas de un nivel 3 de razonamiento geométrico. No se observa que haya tenido alguna dificultad en ninguna de las actividades, ni en cuanto a los conceptos empleados ni respecto al uso de la tecnología.

Raúl

En el análisis preliminar

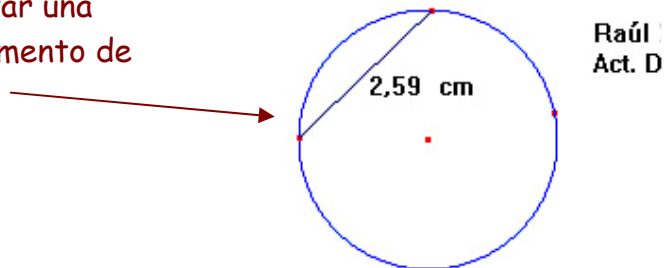
{	5 respuestas nivel 2
	3 nivel 1
	0 nivel 3
	0 no contestó.

Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 1

En esta fase el alumno logró:

- Reconocimiento del radio.
- Definir circunferencia. Trata de dar una definición formal con un resultado confuso pues mezcla los conceptos involucrados: *“lugar geométrico que tiene un punto que recorre un lugar a otro punto a la misma distancia en el plano”*. Carácter dinámico.
- Reconoce al diámetro como la doble medida del radio. Reconoce a la cuerda más larga cuando pasa por el centro y le llama “segmento”.
- Reconocimiento de la recta tangente. Menciona que cuando la distancia entre ellos es mínima a la recta se le llama tangente, pero siguen siendo dos los puntos sobre la circunferencia para él.
- Definir mediatriz. Define a la mediatriz como *“línea recta que pasa por un segmento de recta”*.

En lugar de trazar una
recta traza un segmento de
recta



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

- 1- Distancia del centro a un punto de la circunferencia = radio
- 2- 3.53 cm
- 3- Es igual 3.53 cm
- 4- Es el lugar geométrico que tiene un punto que recorre un lugar a otro punto a la misma distancia en el plano.

Actividad B

- 3.76
- 7.30
- Que el diámetro es la doble medida del radio.
- Crece pero mantiene la misma relación.
- Si el diámetro sigue siendo el doble.

Actividad C

- Si
- También, va disminuyendo
- Cuando pasa por el punto del centro
- Segmento

Actividad D

- A la distancia mínima se le llama tangente
- Tangente
- 2

Actividad E

- Iguales
- No
- 90°
- Si
- Es una línea recta que pasa por un segmento de recta.

Rail

Fase 3, Explicitación, Nivel 1

Raúl describe lo realizado en la primera actividad pero no define a la circunferencia a partir de ella. Relaciona correctamente el radio y el diámetro y menciona que puede utilizarse este último para obtener el perímetro. A partir de la actividad donde se traza una cuerda, Raúl intenta definir a la circunferencia pero sus ideas se muestran confusas y desiste en el intento. Esta confusión la vuelve a mostrar al explicar la última actividad de esta fase, en donde afirma que se le pide *obtener el ángulo de tres puntos*. Muestra nivel de razonamiento geométrico nivel 1 y 2.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 1

En la actividad A, Raúl realiza la construcción de manera acertada. Al describir la figura emplea términos incorrectos mostrando una gran confusión al decir que *es una circunferencia que tiene un triángulo rectángulo dentro de él, recuerdo que se llama mediatriz o directriz*.

Raúl

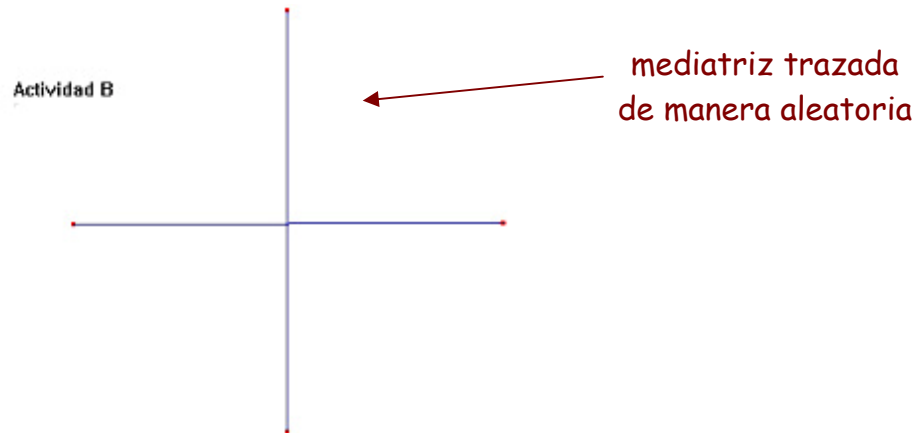
Fase 4, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia cualquiera. Coloca ahora, con la opción *punto sobre objeto*, tres puntos cualesquiera sobre ella y dibuja las tres cuerdas que los unen, formando entre sí un triángulo. *Arrastra* los puntos hasta que formes un triángulo rectángulo (comprueba con la opción *ángulo* que efectivamente un ángulo interior del triángulo mida 90°). ¿Cómo podrías describir esta figura?

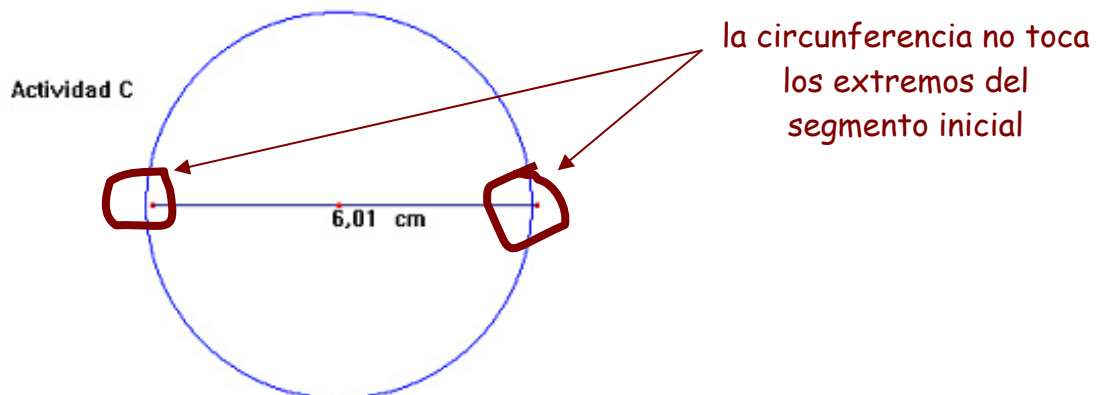
Es una circunferencia que tiene un triángulo rectángulo dentro de él, recuerdo que se llama mediatriz o directriz.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

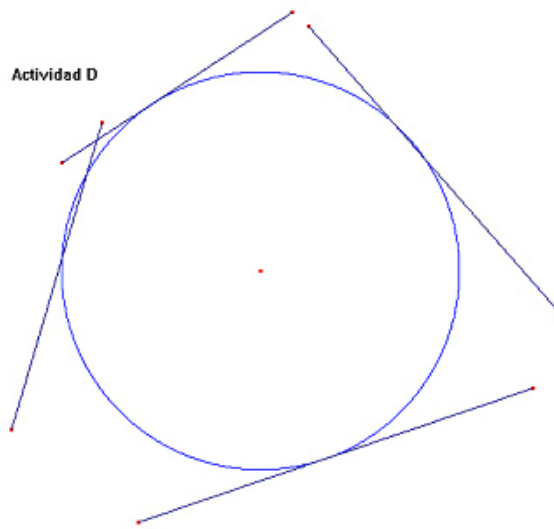
En la actividad B, construye de manera incorrecta a la mediatriz; utilizando la vista como único apoyo localiza el punto medio del segmento y ahí coloca el segmento de recta que dice ser la mediatriz en una posición aparentemente perpendicular. Al no haber utilizado las opciones de *punto medio* y *recta perpendicular* de Cabri, la construcción no pasa la prueba del *arrastre* de los elementos o *dragging*.



En la actividad C, Raúl traza la circunferencia tomando como centro un punto sobre el segmento, aparentemente en su punto medio. Al no utilizar la opción de *punto medio* de Cabri, esta construcción tampoco pasa la prueba del *dragging*.



En la actividad D, Raúl traza las tangentes a partir de puntos que coloca fuera de la circunferencia, dando como resultado unas rectas que parecen ser tangentes a ella y otras que claramente no lo son.



Fase 5, Integración, Nivel 1

En la actividad A, Raúl traza la tangente a la circunferencia como en la fase anterior, es decir, a partir de puntos fuera de ella, por lo que las longitudes pedidas no son iguales como correspondería a esta construcción. Su construcción no pasa la prueba de *dragging*, y es posible que por ello no coloque en su figura la etiqueta que el programa permite asignar a las longitudes que mide, lo que indicaría que reconoce la propiedad pero no es capaz de realizar la construcción. Sin embargo, al responder a las preguntas planteadas sus razonamientos no concuerdan con un entendimiento de las propiedades involucradas.

En la actividad B, no utiliza la opción de punto medio y recta perpendicular en su construcción de la mediatriz por lo que la figura no soporta el *dragging*. La primera característica que menciona muestra que sabe lo que se espera se observe en la construcción y en la segunda no define de manera correcta a la mediatriz.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 5, Nivel 1

Actividad A. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Ahora traza una recta secante a la circunferencia y traza los segmentos que hay desde el centro hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia. Mide la longitud de estos segmentos. Ahora traza una recta tangente a la circunferencia y traza el segmento del centro al punto de tangencia y obtén su longitud. *Arrastra* los elementos de la construcción. En base a lo que observas, señala al menos una semejanza y una diferencia entre ambas rectas.

Semejanza

1- Las rectas siguen manteniendo su longitud a pesar de arrastrar los puntos

Diferencia

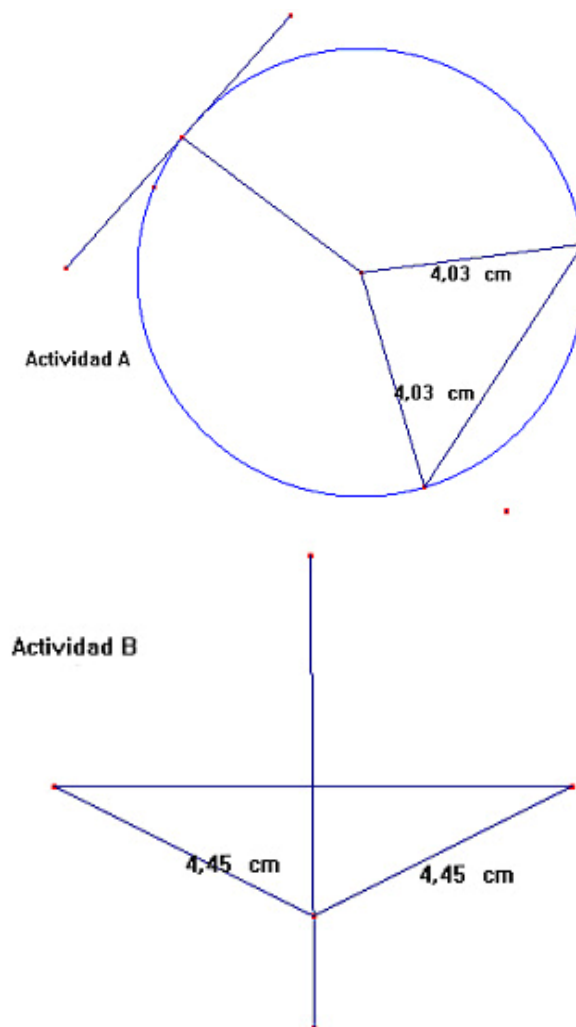
1- Solo cambia el lugar de la recta con la otra.

Actividad B. Traza un segmento de recta cualquiera. Sin utilizar la función *mediatriz* del programa, traza la mediatriz del segmento. Coloca un punto sobre la mediatriz con la opción *punto sobre objeto*, traza los segmentos desde este punto hasta los extremos del segmento inicial y mide sus longitudes. *Arrastra* el punto colocado sobre la mediatriz y observa. En base a lo que observas, señala al menos dos características de la mediatriz de un segmento de recta.

1- Tienen igual longitud los segmentos de ambos lados hacia el punto de la mediatriz.

2- La mediatriz es la recta que pasa por un segmento cualquiera de recta.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN



En las actividades de las fases 4 y 5 de este nivel, se observa que Raúl comprende las características de una mediatriz de un segmento, del diámetro de la circunferencia, de la recta tangente a la circunferencia, pero no tiene claras las relaciones de dependencia entre los elementos de una construcción en Cabri ni domina las funciones básicas de este programa, por lo que no puede realizar una construcción que soporte la prueba del arrastre o dragging. Raúl percibe las componentes y propiedades de las figuras, característica de un nivel 2 de razonamiento geométrico, pero no las describe de acuerdo a ellas, ni aún de manera informal, situación propia de un nivel 1 de razonamiento geométrico.

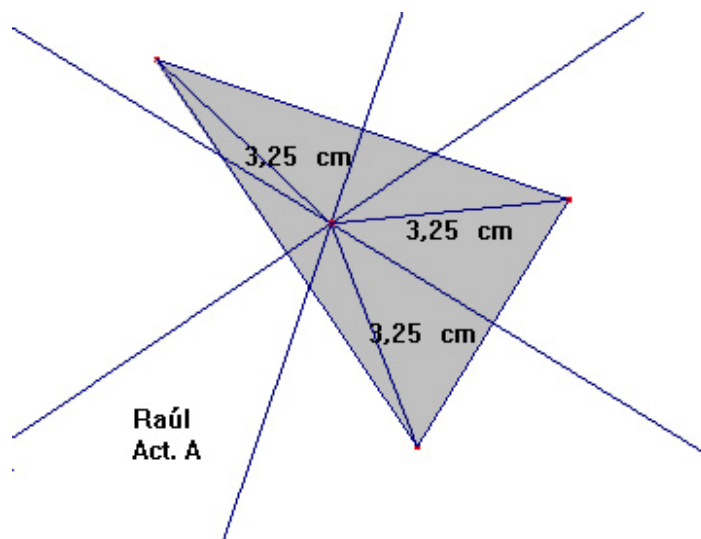
Fase 2, Orientación Dirigida, Nivel 2

En la actividad A, Raúl sí observa que las distancias de los vértices al punto de intersección de las mediatrices son iguales, pero no relaciona este punto con figura alguna como era de esperar.

En la actividad B, sí observa que la mediatriz pasa por el centro de la circunferencia.

En la actividad C, trata de enunciar la propiedad mostrada mediante un enunciado mal estructurado e incorrecto (escribe “mediatriz de una recta” y no de una *cuerda* o *segmento*).

En la actividad D, la propiedad enunciada está mal estructurada, debido a que no hace referencia al centro de la circunferencia. En todas estas actividades muestra confusión entre los términos *segmento*, *punto* y *recta*, y los utiliza de forma errónea.



DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Fase 2, Nivel 2

Actividad A. Con la opción triángulo traza un triángulo cualquiera y rellénalo con algún color. Traza ahora la mediatriz de cada uno de sus lados y marca el punto de intersección de ellas. Dibuja los segmentos que unen a este punto con los vértices del triángulo y calcula la longitud de cada uno de ellos. ¿Cómo son estas longitudes? ¿Se mantiene esta característica al arrastrar cualquiera de los vértices? ¿Para qué podría utilizarse el punto de intersección de las mediatrices?

~~1- Igual a los lados~~

1- Iguales a los lados

2- Si

Actividad B. Traza una circunferencia de radio cualquiera. Con la opción punto sobre ~~objeto~~, coloca dos puntos sobre la circunferencia y traza el segmento entre ellos, lo que ~~será una cuerda~~ ^{hacia los} ~~será una cuerda~~. Con la opción mediatriz traza ahora la mediatriz del segmento. ~~Arrastra cualquiera de los puntos extremos de la cuerda y observa los elementos de la figura que construiste. ¿La mediatriz pasa por algún punto importante relativo a la circunferencia? ¿Cuál? ¿Ocurre siempre esto sin importar al radio de la circunferencia o la longitud de la cuerda?~~ ^{triángulo.}

1- Si, el centro

2- Si

Actividad C. Coloca dos puntos cualesquiera y traza una circunferencia con uno de ellos como centro y el otro para el radio. Con este último y otro más sobre la circunferencia traza un segmento de recta. Con la opción mediatriz traza la mediatriz del segmento. Ahora con la opción pertenece averigua si el centro de la circunferencia está sobre la mediatriz. Arrastra los dos extremos del segmento o cuerda trazada y observa si se mantiene la propiedad mostrada. ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

1- Si

A - Que cualquier recta que pase por el círculo su mediatriz ^{siempre va a tocar el centro.}

Actividad D. Traza una circunferencia cualquiera y coloca dos puntos sobre ella. Dibuja el punto medio entre estos dos puntos y traza la recta secante a la circunferencia que pasa por todos ellos. Traza un segmento de recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto medio de la cuerda trazada, y calcula su longitud. Mide el ángulo que hay entre este segmento y la cuerda trazada. Arrastra ahora uno de los puntos sobre la circunferencia. ¿Cómo es el ángulo medido? Ahora traza un segmento desde el centro de la circunferencia hasta uno de los extremos de la cuerda, y mide su longitud (que será igual al radio de la curva). Arrastra uno de los puntos sobre la circunferencia y observa las longitudes medidas. ¿Cómo son estas cantidades? ¿Y cuando la recta secante se convierte en tangente? Si mueves los puntos sobre la circunferencia, de modo que cambie el punto de tangencia, ¿se mantiene la medida del ángulo medido? ¿Cómo podrías enunciar esta propiedad?

1- Recto 90°

2- Se cambia la cantidad del centro al punto medio de la cuerda

3- Cuando los dos segmentos se tocan.

4- Si

5- Que el ángulo de la recta tangente no cambia a pesar de mover los puntos sobre la circunferencia

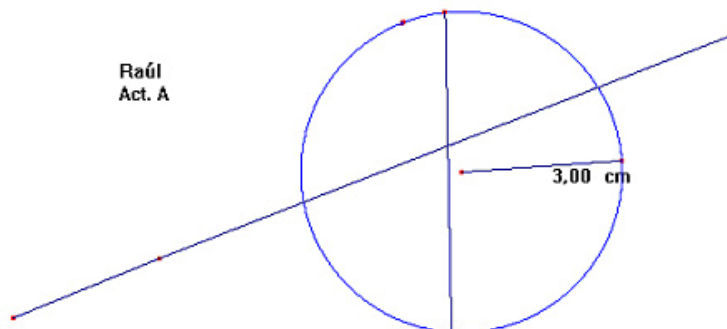
Fase 3, Explicitación, Nivel 2

En el video tomado a Raúl en esta fase se observa que:

- Explica cómo realizó las construcciones de la fase anterior, pudiendo generalizar lo que observa en ellas referente a la primera propiedad de la circunferencia estudiada y proporcionando un enunciado de ella, correcto pero informal.
- Al explicar la construcción que hizo en la actividad D no generalizó lo observado ni enunció la segunda propiedad estudiada, observándose en él mucha confusión y titubeo respecto a los términos que debe emplear para ello por lo que desiste en el intento.

Fase 4, Orientación Libre, Nivel 2

En la actividad A, Raúl no realiza correctamente la construcción pedida: la mediatriz de la cuerda la traza con la opción *recta*, utilizando dos puntos cualesquiera que no parecen cumplir con alguna condición en particular.



En la actividad B no sigue las instrucciones sino que traza una circunferencia y luego coloca sobre ella dos puntos y posteriormente coloca un tercer punto pero no sobre ella. En la revisión de su construcción no se observa que haya trazado algún triángulo

o alguna mediatriz, es decir, que no se observa que relacione el problema planteado con la primera propiedad de la circunferencia estudiada. Raúl borró del archivo las otras construcciones con las que intentó resolver esta actividad, por lo que no es posible saber si en algún momento hizo esta relación.



En la tercera actividad, Raúl pide asesoría y realiza correctamente la construcción pedida en ella. Se repite esta misma situación en la actividad D.

Fase 5, Integración, Nivel 2

Para las dos actividades de este nivel Raúl pidió la ayuda de Masayiri por lo que sus construcciones son correctas. Desafortunadamente Raúl borró del archivo las construcciones hechas por él mismo, de manera que no es posible saber si en alguna de ellas relacionó los problemas planteados con las propiedades que se estudiaron de la circunferencia.

En las actividades y construcciones que Raúl hizo en las últimas dos fases no se observa que relacione las situaciones planteadas con las propiedades de la circunferencia que se están estudiando ni puede, por tanto, enunciarlas de manera alguna. Como se mencionó al final de las actividades del nivel 1, el trabajo de Raúl muestra algunas características del nivel 1 de razonamiento geométrico y otras del nivel 2. Las dificultades que se observan en su desempeño son relativas tanto a los conceptos a emplearse como al uso del programa.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

A manera de resumen, la siguiente tabla muestra los resultados globales que se observan después de que los estudiantes desarrollaron la actividad didáctica:

Alumno (a)	Nivel de razonamiento observado al concluir actividades Nivel 1 al 2	Nivel de razonamiento observado al concluir actividades Nivel 2 al 3
Alberto	2	2 en ambas propiedades de la circunferencia
Juan	2	3, para la primera propiedad 2, para la segunda propiedad
Ambar	2	3 en ambas propiedades de la circunferencia
Masayiri	2	3 en ambas propiedades de la circunferencia
Raúl	1 (Descripción de figuras sólo a partir de características generales) 2 (Percibe los componentes de las figuras)	Para ambas propiedades muestra elementos de los niveles 1 y 2

CAPÍTULO IV.

CONCLUSIONES

- Las actividades diseñadas tenían como objetivo el tránsito de los estudiantes desde un nivel 1 de razonamiento geométrico hasta un nivel 3, de acuerdo a los niveles de Van Hiele, teniendo como principales elementos implícitos a dos propiedades de la circunferencia. La primera, el que *la mediatriz de cualquier cuerda de una circunferencia pasa por el centro de la misma*, y la segunda, que *una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado desde el centro hasta el punto de tangencia*. Los resultados observados en los cinco estudiantes que realizaron todas las actividades son:

Alumno (a)	Nivel en el análisis a priori	Nivel al concluir actividad didáctica	Características que se observan
Alberto	2	2	Las propiedades de la circunferencia estudiadas no son reconocidas por él salvo en los casos en que las instrucciones dadas en la actividad lo dirijan a ello, cuando es asesorado por otra persona o cuando las condiciones dadas son similares a las que ya ha observado con anterioridad. No enuncia de manera correcta y formal las nociones adquiridas.

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

Juan	2	2 y 3	Maneja con facilidad las funciones básicas de Cabri. Respecto a la primera propiedad estudiada, resuelve de manera correcta los problemas que se le plantean, incluso en un contexto distinto a los que se emplearon originalmente, y puede enunciar dicha propiedad de manera correcta y formal, mencionando todos los elementos involucrados. Respecto a la segunda propiedad de la circunferencia estudiada, se observa que reconoce dicha propiedad cuando se le plantea una situación en contexto similar al dado con anterioridad, pero no la aplica al variar las condiciones ni puede enunciar correctamente, aún de manera informal, dicha propiedad.
Ambar	1 y 2	3	Aplica las propiedades de la circunferencia estudiada en problemas de naturaleza distinta a los vistos en la fase de orientación dirigida. Puede enunciar de manera correcta y completa dichas propiedades. Las principales dificultades que se le presentaron a ella se refirieron a cuestiones de la

DESARROLLO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA USANDO
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA VISUALIZACIÓN

			tecnología empleada y no a los conceptos involucrados.
Masayiri	2	3	Puede aplicar las dos propiedades estudiadas en situaciones distintas a las vistas con anterioridad. Describe de manera formal y correcta a estas propiedades. No se observa que haya tenido alguna dificultad en ninguna de las actividades, ni en cuanto a los conceptos empleados ni respecto al uso de la tecnología.
Raúl	2	1 y 2	No se observa que relacione las situaciones planteadas con las propiedades de la circunferencia que se están estudiando ni que las enuncie. Las dificultades que se observan en su desempeño son relativas tanto a los conceptos a emplearse como al uso del programa.

- La mayor parte de las actividades diseñadas están dirigidas a la construcción de la primera propiedad de la circunferencia, lo cual se refleja en los resultados finales obtenidos. Se observa en los estudiantes que no hay confusión respecto a las características de una mediatriz, aunque sí en los términos involucrados (por ejemplo, algunos utilizan indistintamente los términos *segmento* y *recta*) y que les fue más sencillo construir esta primera propiedad y por ello realizar las actividades que la involucraban. Solamente dos estudiantes lograron construir la segunda propiedad estudiada, por lo que en una etapa posterior de investigación se realizará un rediseño de las actividades guiadas a lograr la segunda propiedad.

- Las actividades realizadas con *Cabri* permiten visualizar ciertas representaciones de los conceptos involucrados y verificar la relación entre unos elementos y otros mediante la prueba del *arrastre* o *dragging* que permite el programa. Debido a esto se convierte en una gran herramienta para la construcción de conceptos, ya que permite de manera inmediata el descartar o generalizar alguna característica de la construcción dada o alguna relación entre distintos elementos de ella, es decir, es una herramienta poderosa para la demostración o verificación inductiva de los conceptos, siendo de vital importancia el corto tiempo que se emplea para el trazo de figuras dada la gran cantidad de nociones a construirse en un ciclo escolar de acuerdo al programa de estudios. Sin embargo, no parece facilitar el elaborar una definición o enunciado, informal o formal, de lo que se observa, ni generar la necesidad de una demostración deductiva de las propiedades mostradas en las construcciones. En lo referente a las definiciones, es posible que se deba al uso mínimo del lenguaje que se requiere para usar el programa, por lo que se requiere una mayor interacción alumno-profesor o el diseño de actividades dirigidas específicamente para la construcción de la definición. Esto lo afirmamos debido a que en las actividades realizadas por los estudiantes en esta investigación, la resolución de problemas que involucraban a las propiedades se lograba con anterioridad a la construcción de la definición: la elaboración y validación de conjeturas pudo realizarse, como se esperaba de acuerdo a la Teoría de la Visualización, con el uso de *Cabri*; la elaboración de una definición se observó, en cambio, durante las fases de Explicitación, en donde la interacción no era alumno-software sino alumno-alumno o alumno-profesor, generándose mediante el diálogo y el cuestionamiento un intercambio de palabras y la necesidad de formular el enunciado, y durante las actividades en donde se les pedía por escrito (es decir, en ambiente lápiz-papel) dicho enunciado. De acuerdo a la teoría de los esposos Van Hiele, a cada nivel de razonamiento geométrico corresponde un lenguaje propio a él, y debido a las evidencias que logramos reunir afirmamos que en este sentido no todos los alumnos que participaron en este estudio alcanzaron el nivel de razonamiento deseado. En lo que se refiere a la necesidad de una demostración deductiva,

característica propia del siguiente nivel de razonamiento (nivel 4), es necesario también motivar a los estudiantes mediante preguntas concretas para que vean este trabajo como una explicación a las demostraciones inductivas que pueden realizar con el programa (De Villiers, 1996).

- Se aplicaron las actividades diseñadas para pasar del nivel 2 al 3 aún en Raúl que no tenía, como se observó en el análisis posterior de los resultados, el nivel 2 requerido para ello y que implica la utilización de los elementos ahora de forma explícita, obteniéndose en él pocos o ninguno de los resultados esperados. Esto confirma lo que establece la teoría de Van Hiele: es posible transitar de un nivel de razonamiento geométrico al inmediato superior, una vez que se ha alcanzado el primero y de forma secuenciada, es decir, no es posible “saltarse” de un nivel a otro sin pasar por todas las etapas que requiere cada uno.
- En el caso de Alberto, él tenía nivel 2 de razonamiento geométrico al iniciar las actividades para alcanzar el nivel 3, pero el análisis muestra que no parece haberlo conseguido; en el caso de Juan, no parece haber logrado el nivel 3 para la segunda propiedad de la circunferencia estudiada. De acuerdo a los Van Hiele, y como pudimos comprobar aquí en el caso de Raúl, en ellos no podría esperarse alcanzar el nivel inmediato superior, nivel 4, en tales circunstancias, por lo que habría que diseñar actividades complementarias para cada fase de aprendizaje con el fin de construir las nociones alcanzando el nivel 3.
- Se observa que los estudiantes tienen una gran capacidad para aprender a utilizar la tecnología empleada, en este caso el programa *Cabri* en sus funciones básicas. Aunque en las primeras actividades del nivel 1 algunos muestran cierta confusión al establecer las relaciones de dependencia entre los elementos de una construcción en *Cabri*, una vez aclaradas éstas ya no se aprecia que ninguno de ellos tenga algún problema al establecerlas en sus construcciones posteriores.

- El uso del programa permite que se diseñe rápidamente un “modelo a escala” de una situación real, sin la necesidad de transformar los resultados obtenidos a las unidades contenidas en los datos originales. Muchos estudiantes suelen olvidar que la construcción con la que trabajan, en lápiz y papel, surgió de datos con unidades distintas a las que emplean en su dibujo y las omiten al dar sus soluciones.

Después de analizarse los resultados obtenidos y de formularse estas conclusiones, consideramos que podrían realizarse futuras investigaciones en donde se contemple:

- Rediseñar y complementar las actividades encaminadas a construir la segunda propiedad de la circunferencia tratada en esta investigación.
- Complementar toda la secuencia didáctica con otras actividades (en ambiente Cabri o no) a fin de propiciar en los estudiantes la adquisición del vocabulario acorde a su nivel de razonamiento geométrico y de generar la necesidad (a partir del nivel 3) de una demostración deductiva de lo observado.
- Analizar los resultados de cada estudiante al concluir las actividades propias de un nivel de razonamiento geométrico antes de realizar aquéllas propias al nivel inmediato superior. Si el estudiante no alcanzó el nivel deseado, diseñar actividades alternativas que faciliten este tránsito y evaluar cada vez su desempeño.

Referencias

Braga, G. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. El modelo de enseñanza- aprendizaje de van Hiele. *Signos, Teorías y Prácticas de la educación*. Número 4, páginas 52 - 57.

De Villiers, M. (1996). Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría. The future of Secondary School Geometry. *La lettre de la preuve*. Fragmento (3).

Hallack, S. y León, M. (2004). Cuadrando el círculo y trisectando el ángulo: arribando a conjeturas erróneas con Cabri. *Departamento de Matemáticas, Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora*. Plantel Nuevo Hermosillo.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele, en S. Llinares, M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, Spain), pp. 295-384 (fragmentos).

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics* 44, 55-85.

Medina, P., Astiz, M., Rocerau, C. y Vilanova, S. (2001). Una experiencia con Cabri Gèomètre. *OEI – Revista Iberoamericana de Educación – Experiencias e Innovaciones*.

Stylianides, G. y Stylianides, A. (2005). Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments. En *International Journal of Computers for Mathematical Learning* (2005)10: 31 -47. U.S.A.: Springer.

Teppo, A. (1991) Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited. *Mathematics Teacher*. March 1991, pp. 210-221.

Universidad Nacional Autónoma de México (1996). Plan de estudios de Bachillerato – Matemáticas V (Clave:1500). *Escuela Nacional Preparatoria, México*.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics, *MAA notes num. 19, Washington, Mathematical Association of America*.