



Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y
Tecnología Avanzada del IPN



Programa de Matemática Educativa

**Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en
profesores de matemáticas**

Tesis que presenta

Esteban Martín Martos Michaca

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Director de tesis:

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

México, D. F. Junio de 2008



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 28 del mes de mayo del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-LEGARIA para examinar la tesis de titulada:

“Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en profesores de matemáticas”

Presentada por el(la) alumno(a):

MARTOS
Apellido paterno

MICHACA
Apellido materno

ESTEBAN MARTÍN
Nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	4	0	4
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Apolo Castañeda Alonso
Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza
M. en C. Erika Saiz Maldonado Mejía

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 16 del mes junio del año 2009, el que suscribe Esteban Martín Martos Michaca alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A050404, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta y cede los derechos del trabajo intitulado "Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en profesores de matemáticas", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección emartos_2000@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.


Esteban Martín Martos Michaca
Nombre y firma

Dedicatoria

A mis queridos padres, mi hermana Adriana, mi cuñado Oscar y mis sobrinos Adrianita y Oscarito que en todo momento me apoyan y aconsejan incondicionalmente.

Agradecimientos

A el maestro Juan Gabriel Molina

A mis profesores de CICATA

A Rosa Araceli Rotaeché, Gustavo Saldaña y la gente de CIME que me apoyo en todo momento

A Javier Pimentel, Lucy Corona, Benjamín Rivero, y a todos los alumnos y el personal del Colegio TEKAX.

Al el Lic. Alejandro Juárez, Yannira Brito, Crisóforo Guzman y todos mis amigos del Colegio del Bosque.

Indice

ÍNDICE

	Página
Resumen	i
Abstract	i
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN	3
CAPÍTULO II	
MARCO TEÓRICO	5
Tareas y tipos de tareas	5
Las técnicas	6
Las tecnologías	10
Las teorías	13
Valores prácticos y epistémicos de los productos notables	14
CAPÍTULO III	
ANTECEDENTES	15
CAPÍTULO IV	
MÉTODO	19
Primera Sección. Descripción general del método	19
Segunda sección, los detalles	19
Diseño de la entrevista	19
Aplicación de la entrevista	22
Diseño de un método para analizar materiales publicados en Web	22
relativos a los productos notables	
CAPÍTULO V	
ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	27
Análisis de la entrevista-foro sobre productos notables	27
Observaciones generales de la entrevista-foro	35
Análisis de materiales Web sobre productos notables	37
Búsqueda libre	37
Observaciones	40
Búsqueda avanzada, documentos en formato PDF	43
Observaciones	46
Búsqueda avanzada, documentos en formato DOC	49
Observaciones	52
Reflexiones sobre los resultados del análisis de documentos Web	53
CAPÍTULO VI	
CONCLUSIONES	55
REFERENCIAS	59

Resumen

RESUMEN

En instituciones educativas de nivel medio, a los Productos Notables se les ha asignado un papel protagónico. En este trabajo discutimos acerca de los valores prácticos y epistémicos que profesores de matemáticas y algunas instituciones asignan a los Productos Notables. El marco teórico en que fundamentamos la investigación es la Teoría Antropológica de lo Didáctico

ABSTRACT

In educational institutes of junior high school, the Notable Products have been playing a protagonist role. In this work we discuss about practical and epistemic values which math professors and some institutions have assigned to Notable Products. The theoretical framework in which the investigation is based on is the Anthropological Theory of Didactics.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN

En varias instituciones educativas de nivel medio superior se pone énfasis en que estudiantes dominen los *productos notables*, evidencias de esta importancia asignada a tales operaciones son la gran cantidad de materiales que circulan en la Web y que en muchos casos tienen el propósito de enseñarlos o apoyar al estudiante. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: desde el punto de vista de profesores, ¿cuál es el valor de los *productos notables* en la escuela? En este trabajo damos una respuesta, para organizar la investigación elegimos como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999).

En relación a este documento, en el “Capítulo I. Objetivo de la investigación” presentamos el objetivo de investigación del trabajo y como éste parte de una inquietud personal producto de ser profesor de matemáticas de una institución educativa.

En el “Capítulo II. Marco teórico” exponemos los elementos teóricos relativos a la TAD, enfocándonos en el término *praxeología* y las nociones que la componen: *tarea*, *tipos de tareas*, *tecnologías* y *teorías*. También definimos los términos *valor práctico* y *valor epistémico* de los *productos notables*.

En el Capítulo III, discutimos sobre antecedentes encontrados en relación a los *productos notables*.

En el Capítulo IV exponemos el Método, los “pasos” que se siguieron para llevar a cabo la investigación explicando en qué consiste cada etapa. En esta sección del documento planteamos un análisis a priori de la entrevista diseñada, así como el diseño de un método para el análisis de materiales publicados en Web.

En el “Capítulo V. Análisis de los resultados” presentamos los análisis realizados a la información que proporcionó la aplicación de la entrevista y los análisis de materiales Web.

Además hacemos observaciones y reflexiones sobre ello en términos de nuestro marco teórico.

En el “Capítulo VI. Conclusiones” explicamos en términos de nuestro marco teórico los resultados finales de la investigación.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Por Producto Notable (PN) entendemos a “ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación” (Baldor, 2000, p. 97), sólo por poner algunos ejemplos de Productos Notables (PNs) mostramos expresiones algebraicas tales como $(a + b)(a - b)$ o $(a + b)(a + b)$, para los cuales su resultado es $a^2 - b^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ respectivamente. La influencia de ser profesor, el notar la problemática que enfrentan estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad para utilizar dentro del álgebra los productos notables y las factorizaciones, nos condujo inicialmente a proponer como proyecto de investigación el diseño de una secuencia didáctica para favorecer el aprendizaje de los productos notables en estudiantes de secundaria. En ese momento se pensaba fundamentar el diseño con alguna teoría de la matemática educativa, sin embargo había una reflexión que no se había considerado, la pertinencia de la investigación, pues se estaba dando por sentado que el tema es importante. El sentido de nuestra investigación cambió al reflexionar sobre la pertinencia del proyecto, las preguntas que nos hicimos fueron las siguientes:

1. ¿Es pertinente una secuencia didáctica para abordar ese tema?
2. ¿Son importantes los productos notables en la escuela?
3. ¿Cuál es su valor?

Para contestar a la pregunta uno consideramos que previamente debíamos poder responder las dos siguientes. En relación a la pregunta dos, por *importancia* nos referimos al interés que hay en el tema entre profesores de matemáticas, pues hay varias evidencias de que se invierte mucho tiempo preparando materiales para que los estudiantes aprendan tal contenido. Evidencia de la importancia asignada a este tema se puede comprobar haciendo una búsqueda en Internet del término “Productos notables”, se encontrará que arroja aproximadamente 500 resultados en los que se aborda, por lo menos en México; muchos de estos trabajos son respaldados por instituciones educativas, reflejan el propósito de promover el aprendizaje del tema en cuestión, en su momento profundizaremos en ese asunto. La tercer pregunta es la que acaparó nuestra atención en la investigación, ¿Cuál es valor de los PN? Como profesores nos resultan importantes, sin embargo tal creencia podría ser efecto del pertenecer a la cultura escolar. Finalmente las preguntas quedan como sigue:

según profesores de matemáticas, ¿cuál es el valor de los *productos notables* en la escuela?
¿Cuál es el valor de los PN que se puede desprender del análisis de materiales en línea?
Para discutir sobre ello hemos elegido la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de
Chevallard (1999) como marco teórico, la cual se discutirá en el siguiente apartado.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

A continuación explicaremos algunas ideas y definiciones en las cuales basamos nuestra investigación, estos elementos provienen de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, de Chevallard (Op. cit.). En este enfoque se parte de que toda actividad humana realizada con regularidad se puede describir con un modelo único que se llama *praxeología*, en esta aproximación se “sitúa a la actividad matemática y en consecuencia la actividad del estudio de la matemática en el conjunto de las actividades humanas y de instituciones sociales” (Chevallard, Op. cit. p. 223). La noción de praxeología está formada por las siguientes nociones: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. A continuación explicamos cada uno de ellas.

Tareas y tipos de tareas

Desde este enfoque teórico, las tareas (y el tipo de tarea) en el contexto de la escuela, son trabajos o ejercicios que se le encargan al alumno, y estas se expresan mediante un verbo. Por ejemplo¹, una *tarea t* es la siguiente: “factorizar la expresión $x^3 + x^2 - x - 1$ ”, es decir es un ejercicio concreto que se está encargando a alguien; por otra parte, un *tipo de tarea T* es un trabajo no específico que se expresa con el mismo verbo, como el siguiente, “factorizar algún polinomio”. La *tarea t* tiene cabida en el *tipo de tarea T* y se puede decir que $t \in T$. Por otra parte, desde este punto de vista expresiones como “Factorizar” o “Calcular” se consideran un *género de tareas*.

Concretamente, un género de tareas no existe más que bajo la forma de diferentes tipos de tareas, cuyo contenido está estrechamente especificado. Calcular... es, se ha dicho, un género de tareas; pero calcular el valor (exacto) de una expresión numérica conteniendo un radical es un tipo de tareas, lo mismo que calcular el valor de una expresión conteniendo la letra x cuando se da a x un valor determinado. Durante los años de colegio, el género calcular... se enriquece de nuevos tipos tareas; ocurrirá lo mismo en el instituto, donde el alumno va en primer lugar a aprender a calcular con vectores, después, más tarde, a calcular una integral o una primitiva,

¹ La mayoría de los ejemplos que se presentan están planteados en el contexto de esta investigación.

etc. Y se repetirá lo mismo, por supuesto, con los géneros Demostrar..., *Construir* ..., o también *Expresar ... en función de ...*

Por último, tareas, tipos de tareas, géneros de tareas *no son* datos de la naturaleza, son “artefactos”, “obras”, *construcciones institucionales*, cuya reconstrucción en tal institución, por ejemplo en tal clase, es un problema completo, ***que es el objeto mismo de la didáctica***. Chevallard (Op. cit. p.224, Negritas son nuestro énfasis).

Las técnicas

Un trabajo o un ejercicio para ser realizado requiere de una manera de hacerlo, a esto se le llama técnica.

Sea pues T un tipo de tareas *dado*. Una praxeología relativa a T requiere (en principio) *una manera de realizar* las tareas $t \in T$: a una determinada *manera de hacer*, δ , se le da aquí el nombre de *técnica* (del griego *tekhne*, saber hacer). Una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene pues, en principio, una técnica δ relativa a T . Contiene así un “bloque” designado por $[T/\delta]$, que se denomina bloque *práctico-técnico* y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina *un saber-hacer*: un determinado tipo de tareas, T y una determinada manera, δ , de realizar las tareas de este tipo. Chevallard (Op. cit, p.225)

Por ejemplo, la tarea simplificar la expresión $\frac{x^4-1}{x^2+1}$ podría ser resuelta utilizando la diferencia de cuadrados para factorizar el numerador, posteriormente cancelar términos semejantes, así $\frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} = x^2 - 1$. Nos interesa resaltar esta noción parte de la praxeología, porque el propósito de nuestro trabajo es discutir acerca de la importancia asignada a los productos notables. Desde esta perspectiva teórica los productos notables son parte de una técnica para resolver ciertos tipos de tareas, esta consideración conduce a plantear las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué tipos de tareas asignan profesores de matemáticas a sus estudiantes en donde la técnica de resolución involucra PN? Una respuesta a esta pregunta será discutida en el Capítulo V.

b) ¿Los profesores involucrados en el estudio perciben importantes a los Productos Notables por los tipos de tareas que con éstos se resuelven? ¿O su interés en que los estudiantes los aprendan son una manifestación de un *modelo docente*² implícito en su institución educativa? El *teoricismo* o el *tecnicismo*. En relación a este punto³ hacemos un paréntesis y para explicar este asunto:

Gascón (2001a y 2001b), plantea que el modelo epistemológico de las matemáticas implícitamente influye en las características del *modelo docente*. El investigador realiza una reconstrucción racional de la evolución del problema epistemológico de las matemáticas, y paralelamente resalta “[C]ómo se corresponden muchas decisiones y actuaciones docentes, e incluso ciertos *modelos docentes*, relativamente estructurados, con los modelos epistemológicos generales que han existido a lo largo de la historia de las matemáticas y que, perviven entremezclados en las diferentes instituciones didácticas” (Gascón, 2001a, p.130). Es decir, en forma análoga plantea una reconstrucción del *problema docente*, entendiéndolo como “el que se plantean las instituciones que tienen la responsabilidad de llevar a cabo el proyecto social de la enseñanza de las matemáticas” Gascón (Op.cit, 152).

Por su parte plantea tres estados en la evolución del problema epistemológico de las matemáticas, etiquetándolos como PE¹, PE², PE³ respectivamente. La problemática en cada estado es:

PE¹. ¿Cómo detener el regreso infinito⁴ y llevar a cabo una justificación lógica de las teorías matemáticas? La sitúa en el Euclidianismo.

PE². ¿Cuál es la lógica del desarrollo del conocimiento matemático? La coloca en los modelos cuasi-empíricos.

² Modelo docente se entiende “como conjunto de prácticas docentes compartidas que permiten organizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas en una institución determinada” (Gascón, 2001, p.131).

³ Cita tomada del artículo no publicado “Una formación didáctica para el profesor de matemáticas”, de Molina.

⁴ Se deseaba sustentar la matemática en un número finito de proposiciones verdaderas, sin embargo por simples que fueran las proposiciones éstas no garantizaban la verdad, haciéndose necesario ir a proposiciones elementales, las cuales tenían el mismo problema, provocando un ciclo infinito.

PE³. ¿Cuáles son los instrumentos y mecanismos (comunes a la historia y a la psicogénesis) del desarrollo del conocimiento matemático? A esta problemática la ubica en el constructivismo.

Señala que esta evolución en la problemática, puede interpretarse como una ampliación sucesiva del objeto de estudio de la epistemología, la cual está ligada al mismo tiempo a una ampliación de su base empírica.

Hemos visto que los modelos epistemológicos situados dentro del *euclidianismo* tenían como único objetivo la justificación lógica de las teorías matemáticas (no necesitaban ninguna base empírica); los epistemológicos *cuasi-empíricos* pretendían resolver el problema más amplio del *desarrollo del conocimiento matemático* (por ello requieren la utilización, como sustento empírico de los datos históricos), mientras que la *epistemología constructivista*, pretendía explicar no sólo cómo se establece que una teoría es superior a otra, sino también cuáles son los instrumentos y mecanismos que provocan el paso de una teoría de nivel inferior a otra superior. Este objetivo más amplio requiere utilizar como base empírica los datos de la psicogénesis, además de los que proporciona la historia de la ciencia...Gascón (2001a, p. 152).

En relación a la reconstrucción del *modelo docente*, a éste lo etiqueta con PD¹, PD² y PD³ respectivamente y los problemas los plantea así:

PD¹. ¿Cómo mecanizar y controlar la transmisión de teorías y el entrenamiento en el uso de técnicas algorítmicas? Esta problemática la asocia con los *modelos docentes clásicos*.

PD². ¿Cómo gestionar el proceso de descubrimiento inductivo y autónomo de los alumnos? Problemática asociada por el investigador a los *modelos docentes modernistas*.

PD³. ¿Cómo posibilitar que los alumnos construyan los conocimientos matemáticos siguiendo ciertas etapas en dicho proceso de construcción? Problemática de los *modelos docentes constructivistas*.

El autor afirma que cada uno de estos modelos está asociado a su respectivo modelo epistemológico general, señala que ambos tipos de modelos son ideales, no existen y nunca han existido en estado puro en las instituciones, se encuentran entremezclados. La

caracterización de cada uno de estos *modelos docentes* la hace “a partir de la *dimensión*⁵ (o *dimensiones*) del proceso de estudio de las matemáticas que dicho modelo remarca” (Gascón, 2001a, p.152). El investigador resume las limitaciones y características de estos modelos docentes descritos y los clasifica de *primer* y *segundo orden*:

- (a) De *primer orden*: Los modelos docentes *clásicos* y el *modernismo* son extremadamente reduccionistas porque enfatizan una **única dimensión** de la actividad matemática; por esta razón, pueden ser considerados en esta categoría. **El teoricismo se centra en el momento tecnológico-teórico, el tecnicismo en el trabajo con la técnica, y el modernismo en el momento exploratorio**, ignorando en todos los casos los restantes momentos de la actividad...
- (b) De *segundo orden*: El *procedimentalismo* y los *modelos docentes constructivistas*, pueden ser considerados aquí, puesto que **toman en consideración y conectan dos momentos o dimensiones de la actividad matemática**. Así **el procedimentalismo desarrolla el trabajo de la técnica** que sólo era incipiente en tecnicismo **y lo relaciona con el momento exploratorio**, llevando a cabo una indagación controlada de determinadas clases de problemas. Los modelos docentes constructivistas, por su parte, **conectan los momentos exploratorio y tecnológico-teórico pero, por el contrario continúan ignorando las funciones del trabajo con la técnica en el proceso de estudio**. Gascón (2001a, p. 153, las negritas son nuestro énfasis).

El énfasis es para resaltar cómo con los momentos didácticos del proceso de estudio descrito en la TAD, es posible proponer una forma de caracterizar modelos docentes en términos de los momentos didácticos⁶ que enfatiza.

Regresando al asunto de las *técnicas* comentamos las siguientes remarcaciones de Chevallard:

1. Para el *tipo de tarea T* simplificar una expresión algebraica no siempre se resuelve utilizando una *técnica t* que involucre productos notables, entonces un rasgo de las

⁵ Se refiere a las *dimensiones* o *momentos* del proceso de estudio en el sentido de la TAD.

⁶ En el sentido de Chevallard (1999).

técnicas es que sólo tienen éxito sobre una parte $P(\hat{o})$ de los *tipo de tarea T*. Por tanto una técnica puede ser superior a otra, si no sobre toda T , por lo menos sobre una parte de ella.

2. “[u]na técnica \hat{o} no es necesariamente de naturaleza *algorítmica* o *casi algorítmica*: no es así más que en casos poco frecuentes. Axiomatizar tal ámbito de las matemáticas, pintar un paisaje, fundar una familia son tipos de tareas para las cuales no existe forzosamente una técnica algorítmica... Pero es verdad que parece existir una tendencia bastante general a la algoritmización -aun cuando este proceso de *progreso técnico* parezca a veces detenerse por largo tiempo, en una determinada institución, a propósito de tal o cual tipo de tareas o de tal o cual complejo de tipo de tareas” (Chevallard, Op. cit., p.225).
3. “[E]n una institución I dada, y a propósito de un tipo de tareas T dado, existe en general una sola técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles -que pueden existir efectivamente pero en otras instituciones. Dicha exclusión es correlativa, entre los actores de I , de una ilusión de “naturalidad” de las técnicas institucionales en I -hacerlo así, es natural...-, por contraste con el conjunto de técnicas alternativas posibles, que los sujetos de I ignoran, o, si se les confronta a ellas, las miran espontáneamente como artificiales, y (por ello) “contestables”, “inaceptables”, etc. En esta visión, se observa frecuentemente, entre los sujetos de I , verdaderas pasiones institucionales para las técnicas naturalizadas en la institución” (Chevallard, Op. cit., p. 225). Posiblemente el uso de los productos notables para atender ciertos tipos de tareas son una de estas técnicas reconocidas por instituciones, llegando al grado de convertirse en las tareas mismas.

Las tecnologías

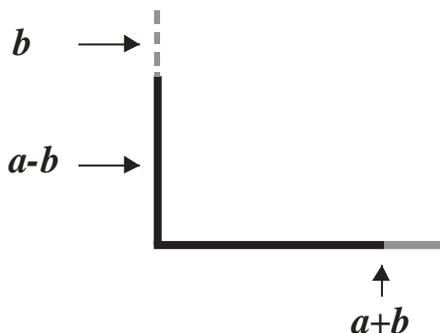
“Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ , un discurso racional –el logos- sobre la técnica -la tekhnê- \hat{o} , discurso cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica \hat{o} , para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T , es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera

que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución” (Chevallard, Op. cit., p.226). Por ejemplo, consideremos la técnica de utilizar la diferencia de cuadrados para factorizar, una tecnología para explicar por qué la técnica funciona es la siguiente⁷:

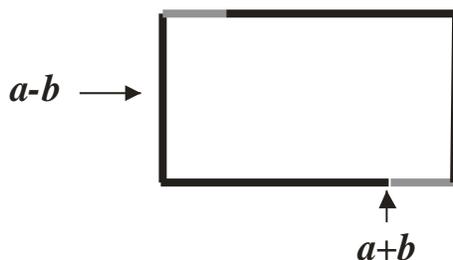
- Consideremos el segmento a :  y al segmento b : 
- Colocando consecutivamente ambos segmentos, formamos el segmento $a + b$:



- Si al segmento a le restamos el segmento b , obtendremos el segmento $a - b$, el cual lo colocaremos perpendicular al segmento $a + b$ como se muestra a continuación:

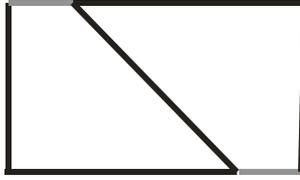


- Duplicando y rotando el segmento $a + b$ lo colocamos a la distancia $a - b$, se tiene la un rectángulo con área $(a - b)(a + b)$:

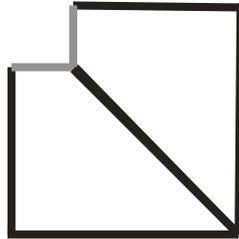


- Trazando una diagonal es posible partir la figura en dos figuras iguales:

⁷ Esta explicación está planteada en un video en internet, disponible en la dirección [http://www.youtube.com/watch?v=AEAedJ7Jc8I] fue consultado el 27 de mayo de 2009]



- Reflejando y girando una de las partes se puede acomodar como se muestra en la siguiente figura, sugiriendo dos cuadrados, uno de lado a y otro de lado b :



En la figura resultante se puede ver cómo el área del rectángulo $(a - b)(a + b)$ es igual al área del cuadrado de lado a menos el área del cuadrado de lado b , es decir $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

La explicación anterior está disponible como una animación en video, según el historial del sitio hasta la fecha en que lo consultamos había sido reproducido 22609 veces.

En relación a la noción de *tecnologías* Chevallard resalta los siguientes puntos:

1. Se admitirá en primer lugar como un hecho de observación que, en una institución I , cualquiera que sea el tipo de tareas T , la técnica \hat{o} relativa a T está siempre acompañada de al menos un *embrión* o más frecuentemente aún, de un *vestigio* de tecnología θ . En numerosos casos, incluso, algunos elementos tecnológicos están *integrados en la técnica*.

Así ocurre tradicionalmente en la aritmética elemental, en la que el mismo *pequeño discurso* tiene una doble función, técnica y tecnológica, que permite a la vez *encontrar* el resultado pedido (función técnica) y *justificar* que es correcto el resultado esperado (función tecnológica), como cuando se dice: “Si 8 caramelos cuestan 10 Francos, 24 caramelos, o sea, 3 veces 8 caramelos, costarán 3 veces más, es decir, 3 veces 10 Francos”.

Por otra parte, el hecho de que exista en *I* una técnica *canónica*, en principio la única reconocida y la única empleada, confiere a esta técnica una virtud “autotecnológica”: actuar de esta manera no exige justificación, porque es la *buena* manera de actuar (en *I*) [Chevallard, Op. cit., p.226].

2. Cabe señalar después que una segunda función de la tecnología es la de *explicar*, de *hacer inteligible*, de *aclarar* la técnica. Si la primera función -justificar la técnica consiste en asegurar que la técnica da lo pretendido, esta segunda función consiste en exponer *por qué* es correcta. Se observará que estas dos funciones son desigualmente asumidas por una tecnología dada. Desde este punto de vista, en matemáticas, la función de *justificación* predomina tradicionalmente, por medio de la exigencia demostrativa, sobre la función de *explicación*. (Chevallard, Op. cit., p.226).
3. Por último, una tercera función corresponde a un empleo más actual del término de tecnología: la función de *producción* de técnicas. Notemos aquí que siempre hay tecnologías *potenciales*, a la espera de técnicas, que no son aún tecnologías de alguna técnica o que lo son de muy pocas técnicas (Chevallard, Op. cit., p.227).

Las teorías

Por esta noción se entiende una explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología, por ejemplo una demostración matemática de alguna afirmación.

Por supuesto, se puede imaginar que esta regresión justificativa se persiga hasta el infinito -que exista una teoría de la teoría, etc. **De hecho, la descripción en tres niveles presentada aquí (técnica/tecnología/teoría) es suficiente en general para darse cuenta de la actividad que se quiere analizar.** La teoría, tierra de elección de perogrulladas, tautologías y otras evidencias, es incluso a menudo evanescente: **la justificación de una tecnología dada es, en muchas de las instituciones, tratada por simple reenvío a otra institución**, real o supuesta, censada como poseedora de una tal justificación. Éste es el sentido clásico: “Se demuestra en matemáticas...” del profesor de física, o aún del “Se ha visto en geometría ...” del profesor de matemáticas de antaño (Chevallard, Op. cit., p.226-227).

Por ejemplo, al finalizar la exposición de la tecnología del apartado “Tecnologías” se dice al final:

“En la figura resultante se puede ver cómo el área del rectángulo $(a - b)(a + b)$ es igual al área del cuadrado de lado a menos el área del cuadrado de lado b , es decir $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ”

Podríamos reenviar la justificación de esta tecnología a la geometría: se ha visto en geometría la semejanza de triángulos, a partir de ella se puede demostrar que la afirmación anterior es cierta. Este tipo de situaciones son las que son comunes en las instituciones, posiblemente por los tiempos destinados a cada tema. Ahora bien, si la demostración de la afirmación se concreta y se hacen explícitas las justificaciones, a esto se le conoce como teoría.

Valores prácticos y epistémicos de los productos notables

El *tipo de tareas* que permite atender la *técnica* con *productos notables*, le llamaremos valor práctico de la técnica. Por otra parte, las ideas a las cuales lleve el empleo de dicha técnica, le llamamos valor epistémico de la técnica.

Como se mencionó en la exposición del objetivo del trabajo, nos preguntamos: según profesores de matemáticas, ¿cuál es el valor de los productos notables en la escuela? ¿Cuál es valor de los PN que se puede deducir del análisis de materiales en línea? La respuesta que aportamos y el método con la cual la fundamentamos se encuentran enmarcados en los elementos teóricos expuestos en este apartado, pues en el trabajo se analiza el *discurso del profesor*⁸, y lo que se observa en este análisis son los *tipos de tareas* en que el profesor implica los productos notables, para discutir con base en ello sobre la importancia que los profesores perciben de estos productos en la escuela, esta importancia podría clasificarse en las dos categorías enunciadas anteriormente, los valores pragmáticos y los valores epistémicos de la técnica.

⁸ El discurso del profesor lo entendemos como una serie de las palabras y frases empleadas para manifestar lo que se piensa. Este es una manifestación del Discurso Matemático Escolar, en el sentido de Cordero y Flores (2005).

CAPÍTULO III

ANTECEDENTES

En relación a este apartado, los únicos antecedentes que encontramos son materiales publicados en la Web y tienen el propósito de apoyar al estudiante en el estudio de los *productos notables*, o son temas en libros como el de “Álgebra” de Baldor en que les dedica un capítulo. Cuando se buscan antecedentes sobre cierto concepto matemático en Internet, basta con escribir el nombre del concepto para que cuando el buscador haga su trabajo muestre todos los resultados que encuentra, en ellos ocurre comúnmente que algunos de los resultados son trabajos que fueron hechos en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, con los *productos notables* no ocurrió así. Por otra parte se esperaba encontrar información sobre ello en la base de datos de la biblioteca de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, pues en tal centro hay un grupo de investigadores que hacen trabajos de investigación sobre asuntos relacionados con el álgebra, como la transición de la aritmética al álgebra, sin embargo no encontramos información que se relacione con nuestro trabajo.

En relación a lo presentado por Baldor (1999) sobre los *productos notables*, comentamos lo siguiente:

El autor inicia su exposición del tema planteando la definición de los productos notables:

Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación” (Baldor, Op. Cit., p. 97).

Posteriormente explica casos de ellos:

1. Inicia con lo que llama “Cuadrado de la suma de dos cantidades” diciendo que elevar al cuadrado $a + b$ equivale a multiplicar ese binomio por sí mismo.
2. A continuación realiza la multiplicación mencionada usando un formato semejante al de la multiplicación de la aritmética, simplifica términos y luego presenta el resultado como una identidad algebraica: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. Posteriormente presenta el siguiente enunciado “el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el duplo de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad”.
4. Da ejemplos, inicia con el siguiente “Desarrollar $(x + 4)^2$ y enseguida va realizando cada etapa de las mencionadas en el inciso 3. De manera semejante da los siguientes ejemplos: *Desarrollar $(4a + 5b^2)^2$ y efectuar $(7ax^4 + 9y^5)(7ax^4 + 9y^5)$.*
5. Posterior presenta tareas el estudiante, 18 ejercicios semejantes a los presentados, la instrucción que los antecede es “Escribir, por simple inspección, el resultado de...”.
6. Luego presenta una representación gráfica del cuadrado de la suma de dos cantidades, en la que con dos rectángulos de lados a y b , un cuadrado de lado a y otro de lado b , muestra que se puede formar un cuadrado de lado $a + b$.
7. Posteriormente considera otros casos de productos notables y repite su proceder.

Algunas observaciones al documento de Baldor bajo la “mirada” de la TAD

Dado lo presentado en la viñeta uno, podría interpretarse que el autor comunica que la *tecnología* que explica la identidad (la cual consideraremos una técnica) es la multiplicación. En la viñeta tres, con el enunciado el autor comunica una *técnica* equivalente a la identidad algebraica de la viñeta dos. En el punto cuatro el autor muestra el trabajo con la *técnica* y dos *tareas*. En el apartado cinco el autor presenta a los productos notables como la tarea en sí misma, e indica una *técnica* para acometerla “por simple inspección”. Lo presentado en la viñeta 6 podría considerarse una *tecnología* que justifica la técnica presentada en las viñetas 2 y 3.

Algunas observaciones al documento de la SEP bajo la “mirada” de la TAD

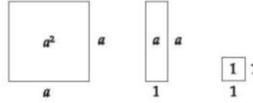
Otro documento que se consideró fue el plan de estudios de matemáticas de secundaria publicado por la Secretaría de Educación Pública en el 2006. En el apartado de segundo año presenta lo siguiente:

Conocimientos y habilidades

1.3. Reconocer y obtener expresiones algebraicas equivalentes a partir del empleo de modelos geométricos.

Orientaciones didácticas

Las identidades algebraicas son un concepto central del álgebra y constituyen la base para la transformación de expresiones algebraicas en la resolución de ecuaciones y en la simplificación de expresiones. El siguiente modelo geométrico permite establecer algunas identidades algebraicas sencillas.



Ejemplos

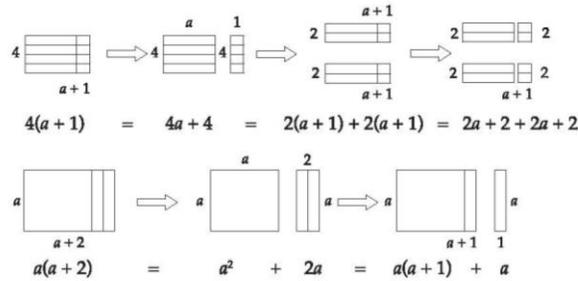


Figura 1.

No se toca el asunto de los productos, sin embargo se muestra una explicación que podría ser considerada una *tecnología* para explicar ciertos productos.

Para el tercer grado presenta lo siguiente:

Eje	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Significado y uso de las operaciones
Subtema	OPERACIONES COMBINADAS

Conocimientos y habilidades	Orientaciones didácticas
1.1. Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - a)$. Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 - a^2$.	<p>La realización de este tipo de cálculos tiene sentido en dos casos: <i>a</i>) para expresar o llevar a cabo cálculos numéricos; y <i>b</i>) para resolver ecuaciones o problemas diversos. Un ejemplo del primer caso es el siguiente: el producto de dos binomios de la forma $(x + a)(x - a)$ se puede expresar como:</p> $(x + a)(x - a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$ <p>De manera que el producto de estos binomios, a los que se les llama binomios conjugados, es igual a una diferencia de cuadrados. Esta ley general puede aplicarse en un cálculo aritmético particular, por ejemplo: $103 \times 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 9\,991$</p> <p>De manera similar se podría abordar el producto de dos binomios de la forma $(x + a)(x + b)$:</p> $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$ <p>Al aplicar este resultado a un cálculo aritmético particular se tendrá, por ejemplo:</p> $31 \times 32 = (30 + 1)(30 + 2) = 30^2 + (1 + 2)30 + 1 \times 2 = 992$ <p>Del producto de expresiones algebraicas se pasa a la factorización. Por ejemplo, el producto de dos números consecutivos se puede expresar como: $x(x + 1) = x^2 + x$</p> <p>Lo que significa que el producto de dos números consecutivos es igual al cuadrado del primer número más el mismo número. E inversamente, el cuadrado de un número más el mismo número es igual al producto del número por su consecutivo: $x^2 + x = x(x + 1)$. Por ejemplo: $15^2 + 15 = 15(15 + 1) = 15 \times 16 = 240$</p> <p>Para mostrar un ejemplo del segundo caso, en el que por cierto muchos alumnos enfrentan dificultades ante la ausencia de medidas expresadas con números, se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya base mide 3 metros más que su altura? En este caso las literales sirven tanto para asignar valores a la base y a la altura como para expresar el área del rectángulo.</p> <p>La formulación y resolución de ecuaciones brindan diversas oportunidades para que los alumnos efectúen cálculos con literales y los vinculen con las propiedades y cálculos aritméticos.</p>

Figura 2.

Tampoco se hace referencia a los *productos notables*, consideran dos casos, el cuadrado de *la suma de dos cantidades* y *el producto de la diferencia*. Sugiere a los productos notables como *tipos de tareas* y comenta la utilidad de éstos, hacer cálculos numéricos y resolver ecuaciones (*tipos de tareas*), ver la figura 2.

CAPÍTULO IV

MÉTODO

A continuación se expone el método por el cual se condujo la investigación, en la primera sección de este apartado se explica en términos generales en qué consiste cada etapa. En la segunda sección se exponen en detalle las fases a, b, c y d, pues los apartados e y f serán presentados en capítulos independientes.

Primera Sección. Descripción general del método

- a. Diseño de una entrevista-foro para profesores

Con base en las consideraciones teóricas se construye una entrevista para analizar el discurso de profesores de matemáticas e identificar el valor que ellos asignan a los *productos notables*.

- b. Aplicación de la entrevista.
- c. Diseño de un método para analizar materiales publicados en WEB relativos a los *productos notables*.
- d. Aplicación del método de análisis de materiales WEB.
- e. Análisis de resultados de la aplicación de la entrevista y de documentos Web.
- f. Conclusiones.

Segunda sección, los detalles

- a. Diseño de la entrevista

Entrevista para profesores acerca de Productos Notables

En el siguiente apartado se explica el propósito de cada una de las preguntas de la entrevista para profesores, así como posibles respuestas que pudieran surgir de las mismas.

1. ¿Qué entiendes por los Productos Notables?

El propósito de esta pregunta es obtener información directa que nos permita identificar la idea que el profesor podría tener sobre los productos notables. Esperamos que la pregunta de la pauta para que la persona a la que se pregunta reflexione sobre los PN y nos comunique sus ideas. Algunas respuestas que podrían surgir en esta interrogante son:

- a) Los productos notables son casos particulares de multiplicación de expresiones algebraicas.
- b) Son fórmulas para multiplicar rápido.
- c) Son técnicas para factorizar o multiplicar.

Si el profesor tuviera dificultades para responder, el que pregunta intervendrá comentando al profesor que explique lo que para él son los PN, aclarando que no se pide una definición formal. El entrevistador también podrían utilizar preguntas auxiliares como “¿A qué se refiere con...?” para aclarar o conocer más detalles en la respuesta del entrevistado. Por ejemplo, en una aplicación de la pregunta a un profesor, su respuesta fue:

“Los productos notables son expresiones de tipo algebraico que están dados por ciertas reglas cuyo resultado se da por simple inspección, por ejemplo y los más comunes son suma y diferencia de cubos, diferencia de cuadrados, etc.”

La pregunta que se puede formular es ¿A qué te refieres con: expresiones de tipo algebraico que están dadas por ciertas reglas? Con esto el profesor entrevistado robustecería su explicación y brindaría más elementos para determinar si su respuesta se puede clasificar del tipo 2 (b) Fórmulas para multiplicar.

2. ¿Es necesario enseñar los Productos Notables?

Con esta pregunta es posible que los entrevistados reflexionen sobre la importancia de los PN, su razón de ser, la validez del tema, para que nos comuniquen sus ideas cuando expliquen el por qué. En su respuesta el profesor podría manifestar elementos de las praxeologías matemáticas que involucran con los PN, el tipo de tareas que asocia a éstos es uno de los elementos de nuestro interés. Ejemplo, un profesor puede decir que los productos notables son muy importantes pues en ocasiones son necesarios para simplificar

expresiones algebraicas, lo cual es una tarea cotidiana en la clase de matemáticas. En la explicación hipotética del profesor está el término “simplificar expresiones algebraicas” la cual es un tipo de tareas para las que el PN es una técnica.

En caso de que hubiera dificultades para responder por parte del profesor, el entrevistador podría complementar la pregunta agregando ¿Para qué sirven los *productos notables*?, con esta pregunta también se podría obtener información sobre las praxeologías matemáticas en que los productos notables están involucrados.

Otra situación que podría manifestarse es que el profesor dé información implícita o que asume que quien pregunta conoce, o que es general. Cuando se probó esta pregunta un profesor respondió:

“Considero que tanto este tema (*productos notables*), como la mayoría de los temas de álgebra aunque son temas de bachillerato deberían ser de uso común entre los alumnos y no lo son, alguna ocasión tuve la oportunidad de impartir un curso de inducción para los alumnos de nuevo ingreso y se decidió que el tema era álgebra, considero que fue de gran apoyo para el curso de Matemáticas I, porque en comparación con otros grupos a los que no se les dio este curso introductorio tuvieron un mejor desempeño, por lo que considero que sí debe retomarse en el nivel superior estos temas”

Ante el comentario “la mayoría de los temas de álgebra aunque son temas de bachillerato deberían ser de uso común entre los alumnos y no lo son” se podría hacer preguntas con el propósito de hacer explícita la información implícita. ¿Por qué cree que deberían de ser de uso común? ¿Por qué no lo son?

Ante el comentario “considero que fue de gran apoyo para el curso de Matemáticas I, porque en comparación con otros grupos a los que no se les dio este curso introductorio tuvieron un mejor desempeño” el entrevistador puede intervenir preguntando ¿Cómo notó esta mejoría en los estudiantes?, así el profesor podría comentar acerca de las nuevas habilidades que el estudiante podría haber conseguido y el entrevistador obtendría información extra que podría complementar la primer respuesta.

3. ¿Qué pasaría si omitiéramos el enseñar los productos notables?

Con las respuestas dadas se espera conocer las estrategias utilizadas por el maestro para transmitir estas técnicas, estas podrían reflejar elementos de las praxeologías, por ejemplo si los profesores utilizan algún medio visual para justificar la técnica o si utilizan otros algoritmos.

b. Aplicación de la entrevista

La entrevista se aplica en *línea en un foro asincrónico*. La razón por la cual elegimos este formato de aplicación es la siguiente, posiblemente *los productos notables* sean una técnica *institucionalmente reconocida*, algo que no se cuestiona, estos productos pueden aparecer al profesor como *algo natural*, para ellos que los estudiantes los dominen es *lo correcto*, por lo cual al cuestionarlos sobre ello en tiempo real podrían tener dificultades para manifestar sus argumentos. Por otra parte si a los entrevistados se les da el tiempo suficiente, como ocurre en un foro asincrónico pudieran aparecer argumentos más elaborados. Sólo son tres los reactivos de la entrevista, pues en esta modalidad los participantes dispondrán de libertad de tiempo para dar su respuesta.

c. Diseño de un método para analizar materiales publicados en Web relativos a los *productos notables*

Se ha mencionado con anterioridad el gran esfuerzo que existe porque estudiantes dominen los *productos notables*, esto se refleja en el gran número de trabajos publicados en Web al respecto, por ejemplo en la última búsqueda realizada del término, encontramos 25500 resultados de los cuales un buen porcentaje son los PNs de nuestro interés, esto es un indicativo de la importancia que se les da a estos productos. El método que proponemos es sencillo en su estructura, sin embargo es eficaz, aprovecha un buscador Web famoso, Google. En términos generales el método consiste, primero, en realizar tres tipos de búsqueda del término “Productos notables” con esta herramienta, segundo, analizar los 10 primeros resultados arrojados de tal búsqueda, y finalmente presentar un informe de lo encontrado en tal análisis.

Acerca de los tres tipos de búsqueda:

- Búsqueda libre. Esta búsqueda deja ver cualquier tipo de material creado que se relacione con los PN, puede ser video, animaciones flash, java, diapositivas, archivos de texto, etc.

Consiste en que se escriba en la barra del buscador la palabra: “Productos notables” con comillas pues este formato permite que el buscador se limite estrictamente a localizar en los materiales publicados tal término, de lo contrario arrojaría cualquier resultado que incluya las palabras “Productos” y “notables”. Ver figuras 1 y 2.

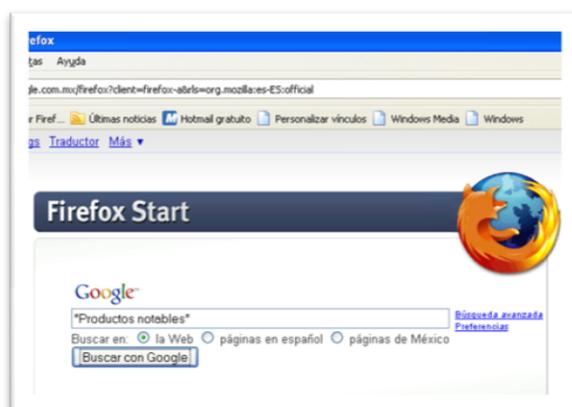


Figura 1



Figura 2

- Búsqueda de documentos en formato PDF y Word. Estos son los formatos más conocidos en que se presentan y comparten los distintos trabajos disponibles en

Web, por ello se eligió hacer una búsqueda específica para cada uno de estos formatos y analizar sus características. Aquí se realiza una *búsqueda avanzada*, la cual consiste en especificarle al *buscador* que se limite a un tipo de documentos, ver figura 3 en la cual se resalta el comando del *buscador* que permite activar el menú de *búsqueda avanzada*.



Figura 3.

En la figura 4 se resalta la configuración de la *búsqueda avanzada* que se considera en este trabajo para los documentos en formato PDF. En forma semejante se configura la búsqueda de documentos en formato DOC. Se puede observar que son muchas las posibles combinaciones que se pueden realizar dadas las prestaciones del *buscador*.



Figura 4.

- Análisis de los 10 primeros resultados. Las preguntas ante este planteamiento son: qué se analiza, cómo y para qué. Las respuestas son las siguientes, nos interesa conocer el valor que autores de los materiales asignan a los productos notables, entonces entre las cosas que observamos en los trabajos son:

- Dirección Web y fecha de consulta.
- ¿Cuál es el propósito del documento o sitio?

¿Es para enseñar los PN?

¿Es una investigación al respecto?

- ¿Quién presenta el documento?

El documento lo publica una institución educativa en su página Web.

- ¿Manifiesta argumentos del por qué son importantes? ¿Cuáles son?

¿Dan argumentos sobre la razón de ser de éstos? Si es así, ¿cuáles?

- Elementos de la praxeología.

Nos referimos a elementos de organizaciones matemáticas en que los productos notables estén implicados, ¿qué función desempeñan, son planteados como tareas, tipos de tareas, técnicas, cuál es la tecnología que los explica?

Los resultados de este análisis son evidencias que respalden las conclusiones o argumentos que presentamos sobre el valor de los PN, por razones prácticas sólo consideramos los 10 primeros resultados, los cuales según los criterios del buscador son los que mejor se adecuan a los criterios de búsqueda definidos. Si en el hipervínculo a la página Web que arroja el *buscador* faltara información para responder los cuestionamientos, se podrá

recorrir a la página principal en donde está publicado el documento, la cual está incluida en el hipervínculo de cada documento ubicado.

- d. Aplicación del método de análisis de materiales Web sobre *productos notables*. Se aplica el método, esto se discute en la sección Análisis de Resultados, que como se ha indicado anteriormente, se retomará en un capítulo independiente.
- e. Análisis de resultados de la aplicación de la entrevista y de la búsqueda en documentos Web. Esto se discute en un capítulo independiente, así llamado.
- f. Conclusiones. En términos de nuestras consideraciones teóricas expondremos las conclusiones a las que se ha llegado, asunto que se trata en el capítulo Conclusiones.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Análisis de la entrevista-foro sobre *productos notables*

El análisis de esta entrevista se organiza de la siguiente manera, en principio se muestran tablas con la información con los argumentos de los profesores, cada tabla incluye observaciones del investigador. Posteriormente se discute de información. La aplicación de la entrevista se realizó en un foro con alumnos que actualmente estudian la maestría en matemática educativa, en la plataforma Moodle, la cual ha sido adoptada por el IPN. Los participantes fueron distribuidos en seis grupos de tres hasta 5 integrantes como máximo, haciendo un total de 27 participantes. Para fines de análisis se tomó una muestra de seis participantes, en el capítulo Método se explica que consideramos tres preguntas como base:

- ¿Qué entiendes por Productos Notables?
- ¿Es necesario enseñar los Productos Notables?
- ¿Qué pasaría si omitiéramos enseñar los Productos Notables?

El foro arrojó información que muestra la gran importancia que profesores asignan en los diferentes niveles a los productos notables.

Tabla 1
NOMBRE DEL PROFESOR: Francisco
¿QUÉ ENTIENDEN POR PRODUCTOS NOTABLES?
Primero, debemos definir que es un producto: lo podemos entender como la relación que existe entre expresiones algebraicas mediante la operación multiplicación, con las propiedades definidas para tal operación. Un producto notable entonces es una expresión algebraica, producto, que se presenta en muchas situaciones y que se puede desarrollar siguiendo unas reglas fijas y establecidas, sin necesidad de demostrarlas. Es decir, se presenta una igualdad entre un producto (factorización) y sumas o restas.
¿ES NECESARIO ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?
Los productos notables deben, más que enseñarse, construirse con los estudiantes, es decir, comprender su significado y las diferentes formas de hacerlo. Para ello, deben mostrarse las diferentes formas en que se pueden encontrar y cómo saber identificar si una expresión algebraica corresponde o no a un producto notable. Debe fomentarse el principio de reversibilidad, para que los estudiantes sepan moverse y trabajar en ambos sentidos. Cuando me refiero a construir es primero que todo mostrar cómo algunos productos notables tienen relación directa con áreas y volúmenes , es decir, motivar inicialmente con algo concreto. Luego partir de casos particulares, por ejemplo, hacer el producto entre dos expresiones algebraicas iguales y observar cuales son las regularidades y los invariantes que se presentan en su desarrollo . De esta manera se pueden hacer generalizaciones y establecer algunas reglas fijas. Estas podrían ser algunas maneras de construirlos. Debe hacerse, por que así ellos fijarán estos procedimientos y serán más significativos que el simple hecho de escribirles en el tablero las fórmulas y reglas sin ninguna profundidad ni análisis.

Observaciones del investigador:

El profesor no da una explicación del por qué es necesario enseñar los PN. Al parecer, cuando menciona “Hacer el producto...” Manifiesta que con sus estudiantes calcula productos de expresiones algebraicas, las cuales son tipos de tareas que emplea para enseñarlos. Posiblemente cuando el profesor “muestra cómo algunos productos tienen relación con áreas y volúmenes” está empleando una tecnología con distintos propósitos, para mostrar que el producto funciona, y el estudiante vea algo concreto.

¿QUÉ PASARÍA SI OMITIERAMOS EL ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Creo que las consecuencias no serían perjudiciales en principio, puesto que a veces los productos notables se enseñan, y se aprenden (memorizan), como simples fórmulas y si el estudiante olvida la fórmula, se siente limitado para resolver una operación de forma diferente, es decir utilizando la propiedad distributiva por ejemplo.

Los productos notables sirven para simplificar **ciertas operaciones** y son útiles **en ciertos cálculos**. Ahora bien, no creo que exista un concepto matemático fundamental que se pierda si no se enseñan los productos notables, siempre y cuando las operaciones entre expresiones algebraicas sean bien comprendidas.

Observaciones del investigador:

El profesor manifiesta tipos de tareas en que se emplean PN, simplificar expresiones algebraicas. La expresión “Ciertas operaciones” muestra que el profesor está consciente de que esta técnica, sólo tiene éxito sobre una parte del tipo de tarea simplificar expresiones algebraicas.

Tabla 2

NOMBRE DEL PROFESOR: Trinidad

¿QUÉ ENTIENDEN POR PRODUCTOS NOTABLES?

Son aquellos productos que se rigen por reglas fijas y cuyo resultados puede hallarse por simple inspección, no necesitan desarrollarse de manera aritmética ni algebraica para encontrar su solución.

Aparecen de manera común dentro de geometría o cálculo y hay que identificarlos a simple vista. Esto nos permite, **enfocarnos a la solución de nuestro problema, sin tener que detenernos en un proceso perteneciente al álgebra.**

Por lo regular le comento a mis alumnos que si les llamamos notables es porque debemos "notarlos" dentro de nuestros procedimientos.

Observaciones del investigador:

El profesor manifiesta que los PNs le permiten economizar tiempo, asigna un valor práctico.

¿ES NECESARIO ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Es necesario enseñar los productos **notables basándonos en la utilidad que tienen y en la forma constante de aparecer dentro de geometría o cálculo por mencionar algunos ejemplos.**

Observaciones del investigador:

Según el profesor los PN aparecen constantemente en la escuela.

¿QUÉ PASARÍA SI OMITIERAMOS EL ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Si elimináramos los productos notables nos encontraríamos ante limitaciones en cursos como geometría o cálculo, ya que un curso como el de cálculo diferencial se transformaría en uno de álgebra, perdiendo el sentido para el cual fue diseñado que es el análisis de las variaciones. O en geometría analítica perderíamos la oportunidad que nos brinda de identificar a que tipo de figura pertenece una ecuación.

Observaciones del investigador:

Podría considerarse que son parte de una técnica para determinar qué lugar geométrico corresponde con cierta ecuación. El tipo de tarea implicado es dibujar el lugar geométrico de cierta ecuación.

Tabla 3

NOMBRE DE LA PROFESORA: María

¿QUÉ ENTIENDEN POR PRODUCTOS NOTABLES?

Si se considera "producto" al resultado de aplicarle la operación multiplicación a los elementos del conjunto numérico en el cual estemos trabajando, o en su defecto, a las expresiones algebraicas que los simbolizan, entiendo que producto notable no serían sólo aquellos que a simple vista se observan como multiplicación, sino al resultado de habérsela aplicado. Por ejemplo: si estamos en presencia de una diferencia de cuadrados, la misma es el resultado de haber realizado una multiplicación de expresiones conjugadas como sabemos, o sea sería en sí un producto (tomando a éste como resultado de operación multiplicación).

Entrarían también en esta acepción, a mi entender, aquéllas expresiones que expresan factorizaciones importantes para, por ejemplo, la resolución de diversas situaciones problemáticas, tanto en el área del álgebra como en el de la geometría.

Observaciones del investigador:

La profesora ve en los PNs utilidad práctica, pues los utilizar en la resolución de varios tipos de problemas.

¿ES NECESARIO ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Tiene sentido que los alumnos aprendan los productos notables, **pero más sentido adquiere cuando lleguen al algoritmo luego de diversas construcciones y fundamentaciones**. Los productos notables **como herramientas de resolución** son importantes en sí mismos, pero la construcción de los conceptos es sumamente enriquecedora porque supone que **debió realizar un proceso que lo conduzca a ellos**, proceso en el cual las operaciones del pensamiento tienen un papel sumamente relevante.

Considero que enseñar mediante pura exposición por parte del docente y recepción pasiva por parte del alumno puede generar en él **la angustia de no comprender**, algo que le produce sensación de fracaso frente a la matemática y lo hace sentir obligado a recurrir a la memoria para poder responder al profesor lo que el profesor está esperando escuchar del alumno.

Es variado el material que puede utilizarse para llegar a conceptos como los señalados.

Observaciones del investigador:

Nuevamente la profesora ve en los PNs utilidad práctica. Dado que hay evidencia del énfasis puesto en que estudiantes dominen PN, ya que estos están presentes en distintos tipos de tareas en la institución, el valor epistémico de estos podría estar ligado a asuntos motivacionales. Si el estudiante domina los PNs podrá acometer varios de estos tipos de tarea, ganará buenas experiencias por saber hacer las tareas, situación que podría ser favorable para su aprendizaje de la matemática y posiblemente tendrá éxito en la institución. Phkonen y Törner (1999) citado en Vila y Callejo (1999) comentan "las experiencias de aprendizaje del alumnado influyen en sus creencias, y a su vez, éstas mediatizan su manera de abordar y realizar actividades matemáticas".

¿QUÉ PASARÍA SI OMITIERAMOS EL ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

No participó en esta pregunta.

Tabla 4

NOMBRE DE LA PROFESORA: Cesiah

¿QUÉ ENTIENDEN POR PRODUCTOS NOTABLES?

Analizando el tema de los productos Notables, sería bueno empezar desde la composición del nombre "productos Notables".

Producto: Resultado obtenido de una multiplicación.

Producto Notable: Son ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación (Álgebra, Baldor, Aurelio).

Los productos notables son:

- Binomio al cuadrado
- Binomio al cubo
- Binomio a la n-ésima potencia
- Polinomio al cuadrado
- Binomios conjugados
- Binomios con término común
- Binomios con término semejante
- Binomios con términos iguales

* Por procedimientos directos o Binomio de Newton o Triángulo de Pascal.

La suma y diferencia de cubos, entran en casos de factorizaciones.

La factorización es un tema aparte, que viene siendo la operación inversa a los productos notables.

En el nivel medio (secundaria) se ven los productos notables básicos (binomio al cuadrado, al cubo, binomios de la suma y diferencia de dos cantidades, binomio con término semejantes). Sin embargo ahondando en el tema, hay más productos notables.

¿ES NECESARIO ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Mí respuesta es Sí!!!!, hay que traerlos pegados al cuerpo (hay que saberlos al derecho y al revés, desde identificarlos, analizar porque cada uno se llama así, que características tienen, los nombres de sus respuestas, porque reciben ese nombre, la verificación).

Y mi aportación es la siguiente:

En álgebra:

1) Un producto notable en una ecuación cuadrática, al igualar cada factor a cero, te permite encontrar las raíces de la ecuación. Te permite encontrar las intersecciones de los ejes de una gráfica, que esto también lo puedo utilizar en cálculo, en funciones.

En Geometría, saber productos notables, te permite:

1) **Calcular distancias**, Aquéllas por ejemplo en un triángulo rectángulo, donde la Hipotenusa o cualquier cateto sea binomio, al elevarlo al cuadrado, me produce un producto notable, que dependiendo de la expresión, se resuelve.

En Geometría Analítica:

1) Si partimos de que se nos proporciona la ecuación de una circunferencia fuera del origen en su forma

ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, podremos **obtener su forma general** (sin utilizar fórmulas), resolviendo los binomios al cuadrado y ordenando los términos. Al igual cuando trabajamos con la parábola $(y-k)^2=4p(x-h)$ tanto cuando es horizontal o vertical, determinar su general sin fórmulas, y las otras cónicas también: Elipse, la hipérbola (😞 aquí no puedo escribir fracciones rápido).

En cálculo Diferencial:

1) Cuando enfrentamos uno de los problemas de la geometría analítica (de los 2 que estudia), si se nos presentan ecuaciones de tipo racional los factores del denominador nos permiten **encontrar las asíntotas verticales de la función**.

En el cálculo integral:

1) Al integrar expresiones racionales (**integración de fracciones parciales**), después de analizado su composición, encontrándose ya el denominador en factores, nos permite determinar los casos a aplicar y continuar el método de fracciones parciales.

En la probabilidad:

El teorema del binomio nos permite deducir teoremas, que su aplicación deducen fórmulas aplicadas en la estadística.

Por lo pronto, **un producto notable, te ahorra mucho trabajo** y que el dominio de ellos lo necesitarás para los siguientes temas en otros cursos.

Me he quedado corta en el comentario, espero ampliarlo en el transcurso del día, pero me tengo que ir a clases.

En una ocasión recuerdo que leí que un producto notable, te permite saber ciertas características de los descendientes, en genética, pero no estoy muy segura, investigare más.

Tengo por ahí una idea que quiero compartir con ustedes, en el aspecto geométrico que podría desplegar un buen tema para mi tesis (ya ando viendo a futuro 😊), bueno la motivación ya esta).

Observaciones del investigador:

La profesora remarca el valor práctico de los PN, ahorran trabajo. Muestra varios tipos de tarea en que están implicados:

- Encontrar raíces de una ecuación determinada
- Hallar intersecciones de una gráfica con los ejes
- Calcular la distancia entre dos puntos
- Determinar la forma general de la ecuación de una cónica
- Determinar la posición de la curva de cónicas, si van sobre el eje x o sobre el y.
- Encontrar asíntotas verticales de una función.
- Integrar con el método de fracciones parciales

¿QUÉ PASARÍA SI OMITIERAMOS EL ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Cuando estamos analizando el tema de productos notables, analizamos las características, el procedimiento, y además las características de la respuesta. Así como supone, de que no se les enseña correctamente el procedimiento de los productos notables, y simplemente se les enseña a multiplicar, entonces: **El alumno no puede analizar el procedimiento inverso, que es la factorización.** Cómo el factorizar el resultado, nos da como resultado el producto notable de donde proviene. Incluso **cundo enseñó los productos notables, les remarco que veremos como realizar el proceso inverso**, y vamos analizando las respuestas, sus características, sus nombres, como comprobar. Si no le enseñamos al alumno los productos notables, lo desproveemos de armas, para facilitar su

procedimientos y resolución de problemas.

Imagínate un binomio a la quinta, con solo multiplicaciones básicas de binomios, definitivamente lo cansaríamos e iríamos matando poco a poco sus ganas de practicar.

Observaciones del investigador:

Nuevamente la profesora pone énfasis en el valor práctico de los PN. En relación al valor epistémico de los PNs, está en que son una vía para entender y poder realizar la factorización, la cual es una noción central del álgebra por estar implicada en el teorema fundamental de ésta.

Tabla 5

NOMBRE DE LA PROFESORA: Gloria

¿QUÉ ENTIENDEN POR PRODUCTOS NOTABLES?

Estos productos notables están vinculados, mayormente, con **la factorización de polinomios**. Agrego, también, que se definen como "algoritmos algebraicos cuyo uso y aplicación sistematiza y **simplifica la resolución de operaciones** polinómicas" (apunte casi apócrifo, digamos)

Me surgen, como aporte a nuestra discusión grupal, varias preguntas:

- **¿Se denominan así (productos notables) en todos lados? En Argentina (tanto en propuestas curriculares como en propuestas editoriales) no suele usarse esta denominación. ¿Qué pasa en los otros países?**
- **Solemos emplear modelos geométricos para abordarlos o para que los alumnos los reconsideren desde una mirada "menos algebraica". ¿Existe un orden para ese abordaje? ¿Todos los productos notables que menciona Cesiah merecen el abordaje desde el modelo geométrico?**
- Evidentemente, para que su trabajo en la escuela secundaria (12-17) sea el adecuado deben abordarse otras cuestiones en la escuela primaria (6-12). ¿Cuáles son esas cuestiones? Sería interesante pensar en la previa de las cuestiones algebraicas tanto como en la previa de las geométricas.
- Sabemos que **el interés de su enseñanza es la simplificación de ciertas operaciones. ¿Y en contexto? Esta pregunta nos la hacen siempre nuestros alumnos del secundario**, seguro. Sería ésta una buena oportunidad para poner en claro y organizar las respuestas que tenemos disponibles y, por ahí, generar algunas más.

Hola de nuevo: podríamos, entonces, entender que el polinomio factorizado es el producto notable o sería más adecuado afirmar que el producto notable es la igualdad que se plantea entre la versión factorizada y el polinomio? Se entiende lo que digo? A que llamamos producto notable a

$$(a+b)(a-b) \quad (1)$$

a

$$a^2-b^2 \quad (2)$$

o a la expresión

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2? \quad (3)$$

Por otra parte, el "pasaje" de (2) a (1), es el que conocemos como **factorización de polinomio**. ¿Podríamos llamar "empleo del producto notable" al paso de la expresión (1) a la expresión (2)? En ese caso, ¿no sería la expresión (2) el verdadero producto notable?

EL CORDINADOR DEL FORO PREGUNTA

-En relación a su abordaje, ¿debemos hacerlo?, ¿por qué?, por ello pregunto en otra intervención ¿es necesario enseñar los Productos Notables? ¿Qué opinas? En relación al punto tres, ¿cuál crees que es el trabajo adecuado de los Productos Notables? ¿Qué características tiene? Y finalmente, por qué consideras que el interés de su enseñanza es la simplificación de operaciones

En otra participación, comenté que me parecía interesante el abordaje con diferentes entradas: geométrica, algebraica, aritmética, y cualquier otra que pudiera surgir. Ahora, ¿es necesario el abordaje? Creo que en mi país y entre los docentes y padres de alumnos de 8° año (13 años) **el tema del cuadrado de binomio o de la diferencia de cuadrados tiene la misma carga que la división en 3° año (8 años): si el profesor decide no tratar el tema, se lo tildará de desconocedor, poco ilustrado, en fin, se lo tildará de mal profesor.** Creo que el tema tiene una fuerte carga en ese sentido: junto con ecuaciones, es EL tema de 8° año. Entonces, a la pregunta de por qué abordarlo, la respuesta es **"por la carga social que tiene en los grupos vinculados con el Octavo año". Creo que no es poca cosa.**

Por otro lado, es **una precuela al factoro.** Como bien decían las colegas en sus participaciones, el factoro de polinomios y los productos notables, están emparentados: **un alumno que domina los productos notables en 8° año, dominará el factoro dos años después.** Entonces, pensando en la organización de los contenidos de la Escuela Secundaria, sería interesante trabajar los productos notables, con el fin de ofrecer al alumno una posible entrada a otros conocimientos algebraicos.

Estas dos cuestiones (relevancia social y precuela) me parecen dos aspectos importantes a la hora de definir la incorporación de un conocimiento matemático a los contenidos de enseñanza.

Con respecto a cuál creo que es el trabajo adecuado con los productos notables, creo que comenté algo en otra intervención. Si a las dos cuestiones anteriores, le agregamos **la fuerte relación con la operatoria algebraica**, la cosa queda hecha: si el alumno reconoce algoritmos que le simplifiquen la tarea, **sentirá mayor confianza en sus conocimientos y avanzará con paso más firme en la resolución de situaciones y planteos matemáticos.**

Observaciones del investigador:

Resultan interesantes los cuestionamientos de la profesora, son en relación a los PN, cuestiona sobre cómo deben tratarse en la escuela, no se cuestiona su pertinencia, lo cual muestra que son aceptados como algo que los estudiantes deben dominar. Los tipos de tarea con los que asocia a los PN es la simplificación de expresiones algebraicas y la factorización de las mismas. En esta intervención el profesor muestra con claridad el carácter de técnica institucionalizada de los PN:

“A la pregunta de por qué abordarlo, la respuesta es "por la carga social que tiene en los grupos vinculados con el Octavo año". Creo que no es poca cosa”

Antes había comentado: “el tema del cuadrado de binomio o de la diferencia de cuadrados tiene la misma carga que la división en 3° año (8 años): si el profesor decide no tratar el tema, se lo tildará de desconocedor, poco ilustrado, en fin, se lo tildará de mal profesor”

El valor epistémico que el profesor asocia a los PN, es que son necesarios para entender la factorización, un tema importante en el álgebra y también en el aspecto motivacional, pues comenta que si los domina “sentirá mayor confianza en sus conocimientos y avanzará con paso más firme en la resolución de situaciones y planteos matemáticos”. También le asigna valor práctico al relacionarlo con la operatoria.

¿ES NECESARIO ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

No contestó esta pregunta, resultaba redundante, pues ya había comentado al respecto.

¿QUÉ PASARÍA SI OMITIERAMOS EL ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

No contestó esta pregunta. Resultaría redundante, pues ya había comentado al respecto.

Tabla 6

NOMBRE DEL PROFESOR: Darío

¿QUÉ ENTIENDEN POR PRODUCTOS NOTABLES?

Un producto notable es una multiplicación entre expresiones algebraicas "especial". Al decir esto, me refiero a que los productos notables presentan una estructura de resultado más regular que otras multiplicaciones de expresiones algebraicas.

Dada entonces su "regularidad especial", pueden describirse algoritmos que nos permitan aligerar su cálculo. Este tipo de cosas encanta a los matemáticos quienes se ven en la "necesidad" de nombrarlas y clasificarlas como expertos de la disciplina.

¿ES NECESARIO ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Ahora bien, hay que reconocer que **los productos notables pueden tener gran utilidad**. Un ejemplo es el caso de las potencias del binomio, dado que, como se dieron cuenta algunos matemáticos de tiempos pasados, nos permitían analizar el efecto de variación que se produce en una cantidad, dado el incremento de otra cantidad, donde la primera depende de alguna potencia de la segunda.

EL CORDINADOR DEL FORO PREGUNTA

¿Podrías mostrar un ejemplo concreto en el que realices este análisis que mencionas?

Con respecto al ejemplo que me solicitó recordemos el ejemplo más usado para explicar el cuadrado del binomio...así es el del cuadrado de lado a, el cual se incrementa en una cantidad b, de esta manera ¿cómo y cuánto varía el área dado el incremento b?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De lo anterior desprendemos que si el lado se incremento en b, el área del cuadrado aumenta en $2ab + b^2$. Esta expresión nos revela el "cómo" varía una magnitud bidimensional, como la superficie.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ahora vemos que si una magnitud (como el volumen de un cubo, por ejemplo) depende del cubo de otra, al incrementarse la segunda en b, la primera tendrá un crecimiento de la forma $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. El cual también es descrito por una potencia del binomio.

Gran importancia tienen los segundos términos en cada desarrollo de la potencia del binomio, pues como matemáticos anteriores se dieron cuenta, en este termino lineal para b está la clave para determinar la tasa de variación instantánea para una magnitud que depende de la potencia de otra.

Cambemos la notación un poco:

$$M = a^2 \quad \text{--->} \quad M + (\text{cambio en } M) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

$$N = a^3 \quad \text{--->} \quad N + (\text{cambio en } N) = (a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

Como usted puede ver, si consideramos a h como un incremento "muy chiquito", entonces el cambio o variación en M es gobernado por 2ah, mientras que para N, hace lo mismo $3a^2h$, que como nosotros sabemos, por nuestros cursos de calculo, se "parecen" a las derivadas de $M = a^2$ y $N = a^3$

¿QUÉ PASARÍA SI OMITIERAMOS EL ENSEÑAR LOS PRODUCTOS NOTABLES?

Suponiendo que un día dejamos de ver los productos notables y además suponemos que la estructura curricular de los cursos venideros en educación secundaria y post-secundaria sigue tal como está ahora.

En este escenario yo me imaginaría lo siguiente:

1) Tendríamos que detenernos en expresiones de la forma $(a + b)^n$, pero solo para explicar que, por ejemplo, $(a + b)^2$ significa $(a + b)(a + b)$, para que pudieran resolverla.

2) **Tendríamos que buscar alternativas al método de completación de cuadrados y sus archiutilizadas aplicaciones como el reescribir la expresión** $f(x) = ax^2 + bx + c$ como $f(x) = a(x - h)^2 + k$, para analizar el comportamiento gráfico a través de la variación de parámetros.

3) No tendría sentido enseñar algunas factorizaciones, pues si las enseñamos sería como enseñar los productos notables. Por ejemplo, si enseñamos a factorizar $x^2 - 9$ tendríamos que, de una u otra forma, echar un vistazo a la estructura de resultado del producto $(x + 3)(x - 3)$ y esto sería como "enseñar la suma por la diferencia de términos"

De esta manera quiero decir que la **estructura curricular, que nos dicta las pautas de lo que hay que enseñar en la escuela, se asemeja a una madeja de cosas interrelacionadas, y la decisión de marginar un contenido puede llegar a afectar otros contenidos de diversas formas, como los ejemplos antes mencionados.** Además, si el contenido marginado era enseñado en niveles escolares inferiores, el "efecto mariposa" producido en la madeja curricular será mayor.

Observaciones del investigador:

De la intervención del profesor destacamos el valor práctico que asocia a los PN y el carácter de técnica institucionalizada de los PN.

Observaciones generales de la entrevista-foro

En relación a la información presentada en estas tablas señalamos lo siguiente:

- Los profesores que intervinieron en el foro, tienen claro lo que son los productos notables.
- 5 de los 6 participantes están de acuerdo y le ven sentido a que los *productos notables* deben de ser enseñados, realza el valor práctico que a estos les asignan y el carácter de técnica institucionalizada de los PN, esto es notable en las tablas 5 y 6.
- En todos los casos los profesores mencionaron que los Productos Notables deben de ser enseñados cuidando el contexto en el que se enseñan y analizar la utilidad que pueden tener:
 - Uno comentó que debe enseñarse el principio de reversibilidad, es decir dada la expresión algebraica del producto, llegar a los factores o factor, según el caso.
 - 3 de los 6 comentaron que se debe de relacionar con Geometría, este podría considerarse un elemento *tecnológico* en el sentido de la TAD.
 - 1 lo relacionó con Geometría Analítica mostrando tipos de tareas en que están implicados.
 - Dos relacionaron los Productos Notables con Cálculo Diferencial e Integral
- En caso de omisión de la enseñanza de los productos Notables, se observa lo siguiente:

- Uno de los 6 profesores analizados en el foro expresó que no sería perjudicial el no enseñar los Productos Notables.
 - Tres de los 6 profesores comentaron que sí afectaría, dos de ellos no comentaron sobre la pregunta pues en la respuesta previa habían manifestado su opinión.
 - El profesor que dijo que no afectaría argumentó que los alumnos tienden a olvidar las fórmulas, si las fórmulas no son comprendidas se olvidan.
 - Uno de los profesores comentó que si no aprenden los Productos Notables en cursos posteriores de matemáticas se verían limitados.
 - Un profesor comentó que se afectaría porque toda la estructura curricular está interrelacionada y los productos Notables aparecen frecuentemente. En cierta medida compartimos su opinión, eso lo discutiremos en las conclusiones.
- En 5 de los seis profesores se reconocen a los Productos Notables como una técnica institucionalizada, pues no se cuestionan su existencia, se da como algo que simplemente así debe ser. Lo que se cuestiona es el modo de enseñarlos, la importancia que le asignan es con base en un valor práctico, pues permiten resolver *varios tipos de tareas*.
 - Elementos de la praxeología

Tipos de tareas. En esta categoría, los tipos de tarea más frecuentes son: simplificar expresiones algebraicas y factorizar expresiones algebraicas. Sin embargo, otros que considera un profesor son los siguientes:

- Encontrar las raíces de una ecuación determinada.
- Hallar intersecciones de una gráfica con los ejes.
- Calcular la distancia entre dos puntos.
- Determinar la forma general de la ecuación de una cónica.
- Determinar la posición de la curva de cónicas, si van sobre el eje x o sobre el y.
- Encontrar asíntotas verticales de una función.
- Integrar con el método de fracciones parciales.

Técnicas

- En cinco de los 6 profesores analizados hablan de construcciones para llegar a la técnica, su interés está en que dominen los PN para con ellos acometer distintos tipos de tareas, estos son parte fundamental de la técnica para realizar los tipos de tareas.

Las tecnologías

- En cinco casos se puede observar que los profesores aprueban explicar los PN con apoyo de materiales didácticos, de la geometría o gráficas. Estas explicaciones pueden verse como las tecnologías que predominan en la institución.

Teoría

- No la identificamos, al parecer para los profesores es suficiente la explicación que hemos llamado *tecnologías*, incluso ésta podría ser considerada por ellos una demostración.

Análisis de materiales Web sobre *productos notables*

El análisis de estos materiales Web se organiza de la siguiente manera, en principio se muestran tablas con la información que se produjo al considerar uno de los tres tipos de búsqueda, posteriormente se discute tal información. De la misma forma se procede con los restantes tipos de búsqueda realizado. Cuando se escribió el método para analizar materiales Web se realizó una primer búsqueda del término “Productos notables” la operación produjo 25500 resultados, cinco días después, cuando se aplicó el método, el número de resultados que arrojó tal búsqueda fue de 41600 resultados (de los cuales seguramente varios no tienen que ver con los PN tal como los estamos considerando). Es posible que esta notable variación de deba principalmente a que en esta nueva fecha estén disponibles servidores que pudieran haber estado inactivos y en menor grado a la publicación de nuevos materiales. Por otra parte, en los tres diferentes tipos de búsqueda planteados, los diez primeros resultados considerados para analizar sí correspondían con los PN de nuestro interés, es decir no eran empleados en contexto diferente.

Búsqueda libre

Tabla 7
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Informar.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Enciclopedia electrónica libre (wikipedia).

¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No explícitamente. Afirma que simplifica y sistematiza la resolución de multiplicaciones habituales.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Los productos notables son presentados como técnica para multiplicar. • Las tecnologías asociadas a esas técnicas son figuras geométricas que “hacen visible” que la técnica es correcta.

Tabla 8
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA
[Resultado google]: http://www.monografias.com/trabajos16/productos-notables/productos-notables.shtml
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Informar a quien esté interesado.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Un sitio Web que publica por colaboraciones voluntarias documentos de distintos temas.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No. Manifiesta que es un tema clásico.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Presenta tipos de tarea: <ul style="list-style-type: none"> ○ Calcular productos de binomios. ○ Simplificar expresiones algebraicas. ○ Hallar el valor de alguna variable determinada. • Los productos notables son técnicas para las tareas mencionadas.

Tabla 9
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA
[Resultado google]: http://www.youtube.com/watch?v=AEaEdJ7Jc8I
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Para enseñar productos notables.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Un usuario de Youtube.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No. Sin embargo, es un video con una animación geométrica, la explicación ha sido reproducida 23924 veces a la fecha.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Los productos notables son un tipo de tarea. • La tecnología es la explicación geométrica que incorpora.

Tabla 10
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA
[Resultado google]: http://www.genmagic.org/mates1/prod1c.swf
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Enseñar productos notables.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Un sitio Web español especializado en desarrollar materiales multimedia educativos.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No explícitamente. Sin embargo es un documento Web hecho en formato Flash, hubo esmero en su construcción.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Calcular el PN es el tipo de tarea en sí. • La técnica es enunciar el resultado del producto verbalmente y mostrar una animación en que

- calcula el producto de binomios, resaltando qué elemento se multiplica por cuál elemento.
- La tecnología es una representación geométrica en que se “mira” que el resultado es correcto.

Tabla 11
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA
[Resultado google]: http://www.mitecnologico.com/Main/ProductosNotables
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Documento de apoyo a estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Una página Web de un instituto tecnológico mexicano.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No explícitamente. Menciona que son útiles porque facilita realizar operaciones.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Son presentados como técnicas. • El tipo de tareas asociado es la multiplicación de binomios.

Tabla 12
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA
[Resultado google]: http://alumno.ucol.mx/al999613/public_html/Productos%20Notables.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Es la entrega de un trabajo por parte de un alumno en un espacio Web.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Un estudiante.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Calcular el PN es un tipo de tareas. • La técnica es el enunciado verbal del resultado del producto, es decir “El cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.”

Tabla 13
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA
[Resultado google]: http://mx.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090507210257AAcoVGu
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Responder a la pregunta planteada por un joven en un sitio Web que tiene una sección de preguntas y respuestas: “¿que son los productos notables y que tienen que ver con la vida cotidiana? necesito saber que es el producto notable y que tiene que ver con la vida cotidiana ya que eso vale mucho en mi calificación”.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Según el sitio Web, un colaborador destacado que tomó la información de otro sitio Web ya analizado.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No explícitamente. Dice “Realmente en la vida cotidiana no tiene mucho que ver a menos que seas un adolescente y estés tomando un curso de álgebra. Los productos notables tienen su aplicación en la resolución de modelos matemáticos que tienen que ver con la economía, la biología, la ingeniería, etc.”
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Son considerados una técnica. • Se relaciona con el tipo de tarea calcular el producto de un binomio.

Tabla 14
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://www.slideshare.net/tercergradovesperino/productos-notables-presentation
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Es la entrega de una tarea, que consiste en publicar un video en que se desarrolla el tema de PN.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Un estudiante.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Los muestra como técnicas para simplificar expresiones algebraicas.

Tabla 15
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://www.sectormatematica.cl/ppt/Productos%20notables.ppt
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Es material de apoyo para que estudiantes aprendan los PN.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Un profesor chileno, en un sitio Web con materiales didácticos.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No. Sin embargo es un documento PowerPoint con 14 diapositivas bien elaboradas con animación.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Presenta al PN como una técnica para calcular productos de binomios. • La tecnología es el producto de binomios, con animaciones geométricas que “explica” cada etapa.

Tabla 16
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://www.escuelasenaccion.org/portafolioescolar/UPLOADS/marko/www/250/3.html
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Apoyar al estudiante.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Una institución de educación secundaria
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Podría ser considerados una técnica, pues comentan que son identidades algebraicas.

Observaciones

El propósito de los materiales

La revisión total de los distintos materiales permite plantear las siguientes categorías:

- *Apoyo al estudiante.* Aquí agrupamos los materiales que presentan ejercicios y ejemplos sobre PN o que explícitamente digan que ese es su propósito. En esta categoría ubicamos 4 documentos.

- *Para enseñar al estudiante PN.* Son los materiales cuyo propósito es que estudiantes aprendan PN, aquí ubicamos 2 trabajos.
- *Otros.* Por ejemplo, tareas publicadas por estudiantes sobre PN, aquí ubicamos 4 trabajos (2 son tareas entregadas a profesores en un sitio Web, 2 para informar qué son los PN).

¿Quién presenta los materiales?

Hemos categorizado esta información en dos tipos:

- *Individuales.* En esta categoría contamos a quienes presentan el documento como una tarea, aquí ubicamos 3 trabajos.
- *De instituciones.* Cuando quien publica lo hace en el sitio Web de alguna institución educativa, o si se trata de un profesor presentado su material, en esta categoría ubicamos 7 trabajos.

¿Manifiesta argumentos de la importancia?

En este apartado establecimos dos categorías.

- *Sí.* Cuando explícitamente dan argumentos por qué son importantes, o cuando dan algún argumento en relación a su utilidad, aunque no digan explícitamente “son importantes por ...”. En relación a ello, al analizar los materiales 3 trabajos no dan argumentos en forma explícita pero explican que son útiles para realizar operaciones.
- *No.* Cuando no dan explicación al respecto. En este punto, 7 de los materiales no dan argumentos que justifiquen la razón de ser de los PN, posiblemente se deba a lo que se discutió en el planteamiento del método, los PN son una técnica institucionalmente reconocida, su pertinencia no se cuestiona, se acepta como natural.

Elementos de la praxeología

Tipos de tareas. Algunos documentos incluían más de un tipo de tarea:

- Los productos notables son presentados como un tipo de tarea, es decir hacen planteamientos en que la tarea es desarrollar un producto notable (3 veces), entonces decimos que *el PN es la tarea en sí*.
- Calcular productos de expresiones algebraicas (6 veces).
- Simplificar expresiones algebraicas (2 veces).
- Hallar el valor de una variable (1 vez).

Técnicas

- Los PN son presentados como técnicas (7 veces) para el tipo de tarea *calcular productos*, para *hallar el valor de una variable* (1 vez) y para *simplificar* (2 veces).

Las tecnologías

- Cuatro de estos utilizan figuras geométricas para “mostrar” la veracidad de la técnica, uno utiliza el producto de expresiones algebraicas para mostrar la técnica.

Teoría. No identificamos, sin embargo la tecnología empleada podría ser considerada por los proponentes del documento como una demostración de la veracidad de los PN.

Búsqueda avanzada, documentos en formato PDF

A continuación se muestran tablas con la información recabada de analizar los documentos en formato PDF.

Tabla 17
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://alumno.ucol.mx/elizabeth_daz/productos%20pdf/PRODUCTOS%20Y%20COCIENTES%20NOTABLES.pdf [Página principal]: http://alumno.ucol.mx/elizabeth_daz/
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Según enuncian en la página principal, “El propósito de esta página es que el alumno se le facilite el tema de productos notables”.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Es un documento de una página de la Universidad de Colima para enseñar productos notables.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
NO. Sin embargo los considera importantes por la información que hay en las página principal a la que pertenece el archivo: <ul style="list-style-type: none">• Presenta diapositivas PowerPoint con animaciones del <i>cubo de una suma</i>, <i>Cubo de una diferencia</i>, <i>Producto de la suma por la diferencia</i>, <i>el cuadrado de la suma</i>, <i>el cuadrado de la diferencia</i>• Presenta el documento PDF con ejemplos de productos notables.• Presenta un taller, en que usa material concreto para explicar los productos notables (usa fomi).
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none">• Los productos notables son la tarea.• La técnica en este caso es una descripción verbal de cómo calcular cada uno de los productos.

Tabla 18
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://chr1614.googlepages.com/Productosnotables.pdf
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Es para enseñarle al alumno PN.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Un profesor.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
NO. Se concreta a explicar métodos para resolver los PN. Se enfoca en aspectos visuales, es decir usa dibujos de cuadrados para explicar.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none">• Presenta una técnica y su respectiva tecnología. En el documento el autor explica la técnica para desarrollar $(a + b)^2$ y expone una tecnología asociada a esta técnica a la cual llama demostración. <p>En los ejercicios presenta los siguientes tipos de tareas:</p> <ul style="list-style-type: none">• Hallar el valor de x.• Dadas ciertas condiciones, calcular el valor de una expresión algebraica.• Factorizar una expresión algebraica.• Multiplicar expresiones algebraicas.• Simplificar expresiones algebraicas.• Determinar el equivalente algebraico.

Tabla 19
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://www.irfaperu.org/aulas/secundaria/secundaria2s11f3.pdf [Página principal]: http://www.irfaperu.org/
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Enseñar productos notables, es una clase de el tema para segundo año de secundaria, está acompañado de un audio en formato mp3.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Instituto Radiofónico Luz y Alegría del Perú, quien ofrece mediante la radio educación a distancia para los niveles de educación primaria y secundaria, para jóvenes y adultos.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No explícitamente, son parte de su programa de estudio. Manifiesta que son para simplificar el trabajo algebraico.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • La tarea es: <ul style="list-style-type: none"> ○ Calcular el área de un cuadrado, el resultado es el binomio al cuadrado. ○ Reducir el área de un cuadrado, el resultado es la diferencia de un binomio al cuadrado. • Tipos de tareas: simplificar expresiones algebraicas.

Tabla 20
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://www.eva.com.mx/sia/pdfs/libro_mate/Unidad01.pdf
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Material de apoyo para enseñarle al alumno PN.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Documento de una universidad privada.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • El producto notable es presentado como una tarea para resolver. • La técnica, “resolver por simple inspección”.

Tabla 21
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://ima.ucv.cl/jmena/jano/guias/productosnotables.pdf [Página principal]: http://ima.ucv.cl/mecemat.htm
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Guía con ejercicios.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Profesor de una universidad chilena.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
Implícitamente dan argumentos, son necesarios para que puedan simplificar expresiones algebraicas fácilmente, algo que utilizarán en unidades posteriores.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • Tipos de tareas: <ul style="list-style-type: none"> ○ Simplificar expresiones algebraicas. ○ Factorizar expresiones algebraicas.

Tabla 22
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://dgenp.unam.mx/direccgral/dg/sacademica/cmatematicas/pdf/m4reac05.pdf
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Ejercicios para estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Una escuela preparatoria de mexicana.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? No, es un tema de estudio.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA Tipos de tareas presentes: factorizar expresiones algebraicas.

Tabla 23
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://docencia.izt.uam.mx/cbicc/ejercicios/tarea01.pdf [Página principal] http://docencia.izt.uam.mx/cbicc/
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Material de apoyo dirigido a estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Profesor de una universidad.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? No explícitamente. Con ejemplos prácticos de diversos temas de física sugiere la importancia del manejo de los PN.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none"> • Los PN son presentados como la tarea en sí. • Un tipo de tarea presente es expandir (o desarrollar) una expresión algebraica.

Tabla 24
[DIRECCIÓN DE LA PÁGINA Resultado google: http://docente.ucol.mx/elizabeth_daz/productos%20pdf/Taller%20Algebra%20y%20Funciones%20Trigonometricas_2.pdf
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Material de apoyo dirigido a estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Profesor de una universidad.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? Sí. Brevemente se explica que la importancia esta en aprender a simplificar expresiones.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none"> • Los PN son la tarea en sí. • La técnica consiste en realizar el producto. • La tecnología son imágenes de material concreto (fomi) que “ilustra” el resultado.

Tabla 25
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://www-optica.inaoep.mx/~jjbaezr/diplomados/libros/algebra/sparks/Capitulo2.pdf
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Presentar métodos para efectuar productos mentalmente y para factorizar expresiones algebraicas. El documento es material de apoyo a estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Instituto de educación superior mexicano.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
Explica que la importancia esta en aprender a simplificar expresiones.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • El tipo de tarea presente es la multiplicación de binomios. • La técnica para resolver la remite a un capítulo previo del libro.

Tabla 26
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: http://www.sectormatematica.cl/pruebas/NM1/prod%20notables.pdf
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?
Es un examen para estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?
Una página Web chilena con diversos contenidos matemáticos, un tema de estos son los productos notables, son para estudiantes en el nivel de educación media.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?
No.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA
<ul style="list-style-type: none"> • El producto notable es la tarea en sí. • La técnica es “Resolver por simple inspección”. • Un tipo de tarea presente es resolver ecuaciones.

Observaciones

Esta búsqueda dio 3020 resultados.

El propósito del documento

- *Apoyo al estudiante.* 7 de los documentos son para estudiar el tema.
- *Para enseñar al estudiante.* 2.
- *Otros.* 1 uno, es un examen sobre este tema.

¿Quién presenta el documento?

- *Individuales.* 0 casos.
- *De Instituciones.* 10 casos. En el caso de estos documentos todos son presentados por una institución de enseñanza, como se mencionó en el apartado anterior, el caso de profesores lo contamos como una institución.

¿Manifiesta argumentos de la importancia?

- *Sí.* 5 casos. En 2 documentos comentan sobre su importancia para simplificar operaciones algebraicas, en tres lo hacen implícitamente, mencionan su utilidad para simplificar operaciones.
- *No.* 5 casos.

Elementos de la praxeología

Tipos de tareas. Los tipos de tareas identificados en los documentos son:

- El PN es la tarea en sí (ocurrió 5 veces).
- Simplificar expresiones algebraicas (3 veces).
- Resolver ecuaciones (1 vez).
- Multiplicar binomios (2 veces).
- Desarrollar una expresión algebraica (1 vez).
- Factorizar una expresión algebraica (3 veces).

Técnicas. Las técnicas identificadas son:

- Resolver “por simple inspección” (2 veces).
- Resolver por multiplicación de binomios y simplificar (2 veces).
- Descripción verbal del resultado del producto (1 vez).

Tecnologías. En este caso sólo 2 trabajos muestran elementos tecnológicos asociados a la técnica, consisten en imágenes de material concreto (fomi) o dibujos con áreas de cuadrados que “muestran” la veracidad del resultado (semejante a la tecnología mostrada como ejemplo en el marco teórico).

Teorías. No identificamos tales.

Análisis de los documentos DOC

A continuación se muestran tablas con la información recabada de analizar los documentos en formato DOC, posteriormente se hace una discusión en relación a la información encontrada.

Tabla 27
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_Productos_Notables-4.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Para enseñar a los estudiantes PN.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Profesores en una página Web chilena.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? Simplificar el cálculo algebraico.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none">• Los productos notables son la tarea en sí.• La tecnología asociada es el producto de binomios, y una exposición con elementos geométricos para explicar el <i>binomio al cuadrado y la diferencia de cuadrados</i>.

Tabla 28
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: www.geolay.com/modulos_primer/mat_productos-notables.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Enseñar productos notables
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Una sitio Web con contenidos de diversas asignaturas.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? No
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none">• Los PN son la tarea en sí.• La técnica son el resultado del producto enunciado en palabras para “resolver por simple inspección”.

Tabla 29
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: www.pro-octava.cl/arch_prado/T14PRODUCTOSNOTABLES.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Material de estudio para estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Una escuela pre-universitaria chilena.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? No
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none">• Los PN son la tarea en sí.• La técnica es calcular el producto y simplificar términos semejantes.

Tabla 30
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: www.liceoibericoamericano.com/docs/4ano/PRODUCTOSNOTABLES.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Tarea para el estudiante.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Una escuela pre-universitaria mexicana.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? No
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none"> • Los PN son la tarea en sí.

Tabla 31
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: www.utim.edu.mx/~navarrof/Docencia/MatematicasI/UT1T2.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Material de apoyo para profesores o estudiantes.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Un profesor en la Web de un instituto tecnológico mexicano.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? Si. Simplificar fracciones algebraicas, resolver ciertas clases de ecuaciones y en general, dentro del proceso de solución de problemas.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none"> • El tipo de tarea es factorizar expresiones algebraicas • Los PN son parte de la técnica para realizar la tarea • La tecnología es la propiedad distributiva de la multiplicación

Tabla 32
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: dptomates.files.wordpress.com/2008/03/productos_notables.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Para que los estudiantes se ejerciten en el tema.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Un blog de del departamento de matemáticas de una institución.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON? No. Sin embargo los consideran importantes por estar en un vínculo principal en la página del sitio Web.
ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA <ul style="list-style-type: none"> • Los PN son la tarea en sí.

Tabla 33
DIRECCIÓN DE LA PÁGINA [Resultado google]: usuarios.lycos.es/armandotareas/apuntesmatematicas/productosnotables.doc
¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO? Para apoyar al estudiante en el estudio del tema.
¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO? Un sitio Web español de apuntes de matemáticas.
¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?

No. Sin embargo hay sólo cuatro temas de álgebra, uno es dedicado a lo PN. Por otra parte los temas que incluyen son en función de la demanda de estos temas, lo cual es un indicativo de que los consideran importantes.

ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA

- El tipo de tarea es calcular productos de binomios

Tabla 34

DIRECCIÓN DE LA PÁGINA

[Resultado google]:

www.cienciaspuras.com/pdfs/2%20eso/potencias%20y%20raices/productos%20notables.doc

¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?

Que el estudiante se ejercite en el tema.

¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?

Un sitio Web de recursos didácticos.

¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?

No. Sin embargo el ser un recurso didáctico hace suponer que es algo importante para ellos.

ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA

- Los PN son la tarea en sí.

Tabla 35

DIRECCIÓN DE LA PÁGINA

[Resultado

google]:

www.rmm.cl/usuarios/joliv/doc/200804201506130.Guia%20de%20Matematica%201.doc

¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?

Una guía de estudio para estudiantes.

¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?

Sitio Web para formación de profesores, del ministerio de educación chileno, lo presentan profesores.

¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?

No. Es importante para los que lo presentan dadas las características del documento y por la institución que lo aloja en su sitio Web.

ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA

- Calcular PN son un tipo de tareas.
- Otros tipos de tareas son:
 - Expandir PN
 - Completar el termino faltante en los PN
 - Corregir el error en los PN

Tabla 36

DIRECCIÓN DE LA PÁGINA

[Resultado google]:

http://74.125.155.132/search?q=cache:BNs3Nhuhj8YJ:www.vicensvives.com/DIDACLIC/descarga_recursos/docs_comuns/docs_cd

¿CUÁL ES EL PROPÓSITO DEL DOCUMENTO O SITIO?

Exponer las competencias a desarrollar en su institución.

¿QUIEN PRESENTA EL DOCUMENTO?

Una institución de educación.

¿MANIFIESTA ARGUMENTOS DEL POR QUÉ SON IMPORTANTES? ¿CUÁLES SON?

No. Sin embargo los presenta como una competencia a desarrollar “reconocer productos notables”

ELEMENTOS DE LA PRAXEOLOGÍA

- Dado que es un plan de estudios, no hay información al respecto.

Observaciones

Esta búsqueda dio 1040 resultados.

El propósito del documento.

- *Apoyo al estudiante.* 7 casos.
- *Para enseñar al estudiante.* 2 casos.
- *Otros.* 1 caso, es un plan de estudios en que los menciona como una competencia a desarrollar.

¿Quién presenta el documento?

- *Individuales.* 0 casos.
- *De instituciones.* 10 casos, es una institución de educación quien los presenta.

¿Manifiesta argumentos de la importancia?

- *Sí.* 2 lo hacen, su importancia está en que simplifican operaciones algebraicas.
- *No.* 8 casos.

Elementos de la praxeología

Tipos de tareas. Los tipos de tareas identificados son:

- El PN es la tarea en sí, 8 casos.
 - Algunas de ellas son *calcular PN, expandir PN, completar el término faltante en los PN, corregir el error en los PN.*
- *Factorizar* una expresión algebraica, 1 caso.

Técnicas:

- Los PN son vistos como técnicas para factorizar, 1 vez.
- Cuando se presentan como un *tipo de tarea*, una técnica para resolverlo es “resolver por simple inspección”, o el resultado del producto enunciado en palabras.

Tecnologías. En un caso es la propiedad distributiva del producto de expresiones algebraicas y en otro una exposición con elementos geométricos (calculo de áreas).

Teorías. No las identificamos.

Reflexiones sobre los resultados del análisis de documentos Web

Evidentemente el tamaño de la muestra analizada es pequeño en relación al total de materiales que hay disponibles, sin embargo consideramos que la información es útil para nuestro propósito dado el origen de estos materiales. En la mayoría de los casos, quienes presentan estos materiales son instituciones educativas (27 de 30), las cuales inciden en todos sus estudiantes y profesores, quienes posiblemente superan en número a los materiales publicados.

En la mayoría de los casos el propósito de los documentos es apoyar al estudiante en el estudio de los PN, son ejercicios y ejemplos para ello. En segundo lugar están los materiales cuyo propósito es enseñar PN. Dado que la mayoría de quienes presentan los materiales son instituciones y que en la mayoría de los materiales los PN son el tipo de tarea en sí, es un indicativo del gran valor que a estos productos se les asigna, para estas instituciones son algo que estudiantes deben saber hacer, es decir los PN son una técnica institucionalizada. Otro aspecto que apoya esta explicación es que en la mayoría de los trabajos no se explica en qué consiste la importancia de los PN, dan la impresión de que se acepta que son algo que los estudiantes deben dominar, no se cuestionan, como ocurre con las técnicas institucionalizadas, y tal vez a ello se deba la ausencia de *teorías*.

Después de analizar todos los materiales de la búsqueda, notamos que con los PN ocurre lo siguiente, en la mayoría de los casos éstos son un tipo de tarea en sí (16 casos), otros tipos de tareas son:

- Calcular productos de expresiones algebraicas (8 veces).
- Simplificar expresiones algebraicas (5 veces).
- Factorizar una expresión algebraica (4 veces)
- Desarrollar una expresión algebraica (1 vez).
- Hallar el valor de una variable (1 vez).
- Resolver ecuaciones (1 vez).

Por los tipos de tarea que permiten resolver, los productos notables tienen un alto valor pragmático. En relación a las *tecnologías*, la más común utiliza elementos geométricos en los que “el estudiante puede mirar” la veracidad de ciertos productos notables.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

Con base en los análisis realizados, se concluye lo siguiente:

- Los productos notables son una *técnica* institucionalizada en instituciones educativas. El interés de las instituciones es notable por la gran cantidad de materiales que publican en Web, por lo bien confeccionados que están algunos de éstos, pues su elaboración implican tiempo y esfuerzo. Tales documentos pocas veces están acompañados de argumentos explícitos que digan por qué tanto interés en que los estudiantes los identifiquen y los puedan aplicar en las tareas que se les encomiendan en la institución, se cuestiona poco su razón de ser, son algo que “así debe ser”, lo cual de acuerdo con nuestras consideraciones teóricas es un rasgo de una *técnica* institucionalizada. Por otra parte, cuando preguntamos a profesores si es necesario enseñarlos, en forma inmediata contestan afirmativamente, sin embargo al preguntarles por qué, la respuesta es menos inmediata y en ocasiones se complica, o dan argumentos sobre cómo deben enseñarse.
- El valor que profesores asignan a los productos notables en su institución es práctico en mayor parte, por el *tipo de tareas* que les permite resolver a los estudiantes. Tal parece que el profesor percibe que los productos notables son parte importante en la *técnica* para resolver varios *tipos de tareas*, nota que si esta *técnica* es dominada, con ello garantizará el éxito del estudiante en su institución (no reprobará). Esta reflexión nos ha conducido a suponer la existencia de un fenómeno que requiere investigarse: en una institución I, los *tipos de tareas* que son parte del proceso de estudio de un tema o materia determinada, privilegian una *técnica*, la cual al ser dominada garantiza el éxito (la aprobación) del tema o materia. Por ejemplo, si un estudiante de álgebra en secundaria domina los productos notables, podrá simplificar expresiones algebraicas, factorizar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones de segundo grado (*tipos de tareas* del proceso de estudio del álgebra en tal institución), si estos *tipos de tareas* fueron escogidas de tal manera que la *técnica* que implica PN sea efectiva, el dominar esta *técnica* garantizaría acreditar la materia.
- Según nuestro análisis, los *tipos de tareas* en los que los productos notables son una *técnica* para su resolución son al menos los siguientes:
 - Calcular productos de expresiones algebraicas.
 - Simplificar expresiones algebraicas.
 - Factorizar una expresión algebraica.
 - Desarrollar una expresión algebraica.
 - Hallar el valor de una variable.
 - Encontrar las raíces de una ecuación determinada.

- Hallar intersecciones de una gráfica con los ejes.
 - Calcular la distancia entre dos puntos.
 - Determinar la forma general de la ecuación de una cónica.
 - Determinar la posición de la curva de cónicas, si van sobre el eje x o sobre el y .
 - Encontrar asíntotas verticales de una función.
 - Integrar con el método de fracciones parciales.
- El valor epistémico de los productos notables parece no ser reflexionado por los profesores en forma natural, como lo es el valor práctico de éstos. Parece ser que el utilizar representaciones geométricas para explicar con áreas cierto producto notable, es uno de los significados que debe tener esa *técnica*. Es decir, hay más preocupación por que estudiantes den significado a la *técnica*, que a los significados a que pudiera generar el estudiante con tal *técnica* (lo que llamamos valor epistémico de la *técnica*). En la institución, al producto notable parece que se le da estatus de concepto matemático, y no de *técnica*.
 - Dos valores epistémicos de los productos notables detectados:
 - Podrían ser un “puente” para que estudiantes aprendan la idea de factorización, la cual es fundamental en el álgebra porque el teorema fundamental del álgebra la involucra (este valor epistémico es intra-matemático).
 - El otro valor epistémico es extra matemático, motivacional. Dado que hay evidencia del énfasis puesto en que estudiantes dominen PN, ya que estos están presentes en distintos *tipos de tareas* en la institución, si el estudiante domina los PNs podrá acometer varios de estos *tipos de tareas*, ganará buenas experiencias por saber hacer las tareas, situación que podría ser favorable para su aprendizaje de la matemática y posiblemente tendrá éxito en la institución. Phkonen y Törner (1999) citado en Vila y Callejo (1999) comentan “las experiencias de aprendizaje del alumnado influyen en sus creencias, y a su vez, éstas mediatizan su manera de abordar y realizar actividades matemáticas”.
4. “Cabe señalar después que una segunda función de la *tecnología* es la de *explicar*, de *hacer inteligible*, de *aclarar la técnica*. Si la primera función -justificar la *técnica* consiste en asegurar que la *técnica* da lo pretendido, esta segunda función consiste en exponer *por qué* es correcta. Se observará que estas dos funciones son desigualmente asumidas por una *tecnología* dada. Desde este punto de vista, en matemáticas, la función de *justificación* predomina tradicionalmente, por medio de la exigencia demostrativa, sobre la función de *explicación*” (Chevallard, Op. cit.,

p.226). En los casos analizados ocurre lo contrario, la función de justificación de la *técnica* predomina por medio de la explicación, que por la exigencia demostrativa. Esta observación es con base en que en los análisis no se detectaron *teorías*, predominaron las *tecnologías*.

REFERENCIAS

Baldor, A. (2000). *Algebra*. México: Grupo Patria Cultural.

Chevallard, Y. (1999). L'Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2), 221-266.

Dirección General de Desarrollo Curricular (2006). *Programa de estudios de Matemáticas*. SEP: México.

Gascón, J. (2001a). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4(2), 129-160.

Gascón, J. (2001b). Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docente del profesor de matemáticas. *Ponencia presentada en las XVI jornadas del SI-IDM celebradas en Huesca (30-31 de marzo y primero de abril del año 2001)*. [Artículo disponible en Web], recuperado en abril de 2007 de http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/praticamatema/referencias/prac_investigaci5/Gascon_Problemas_de%20nvesti.pdf

Vila, A., y Callejo, Ma. L. (1999). *Matemáticas para aprender a pensar*. España: Narcea.