INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

CONCEPCIÓN PROCESO-OBJETO DE FUNCIÓN EN LA COMPRENSIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Tesis para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
HUMBERTO MORA MARTÍNEZ

Director de Tesis:
Dr. César Augusto Delgado García

Codirector:
Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

México, D.F. Noviembre 2006.

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 31 del mes de octubre del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

Concepción Proceso-Objeto de Función en la Comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo

Presentada por el alumno:

Mora	Martínez	Humberto
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	3	4

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. César Augusto Delgado García

Codirector

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Dra. Gisela Montiel Espinosa

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 20 del mes noviembre del año 2006, el (la) que suscribe Humberto Mora Martínez, alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030234, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. César Augusto Delgado García y cede los derechos del trabajo intitulado "Concepción Proceso-Objeto de Función en la Comprensión del Teorema Fundamental de Cálculo", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección humomar_42@yahoo.es. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

HUMOMAR

Humberto Mora Martínez

Concepción Proceso-Objeto de Función en la Comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo

A Paola

A mi hijo Miguel Ángel

Y a mis padres

Agradecimientos

Primeramente doy gracias a Dios por haberme señalado el camino para mi superación intelectual.

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a mis profesores por sus enseñanzas durante mis estudios; a Elizabeth Mariscal por toda su ayuda extraacadémica; al doctor Javier Lezama por sus valiosos aportes académicos como codirector. A María Elena Quevedo por su abnegada y valiosa ayuda en la trascripción de este trabajo.

Quiero agradecer a Paola y a mi hijito Miguel Ángel que de una u otra forma fueron mi apoyo constante.

Finalmente quiero agradecer a mi profesor y director de tesis: César Augusto Delgado quien inspiró la realización de esta investigación y que con su valiosa ayuda en cada momento que requerí de ella hizo posible la culminación de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 2.

BREVE RESEÑA DEL PROCESO DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

CAPÍTULO 3.

PROBLEMA Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 4

INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

CAPÍTULO 5

RESULTADOS, ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES FINALES

RESUMEN

En este trabajo de investigación se hace un análisis sobre la forma en que puede incidir la concepción del concepto de función, en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. La investigación se realiza sobre un grupo de catorce (14) estudiantes del primer semestre de Ingeniería y Ciencias de la Universidad del Valle, en Cali, Colombia en la que se presentan dos resultados.

El primero muestra un estudio de carácter cuantitativo, en el que se consignan las mediciones que se realizaron con respecto a la concepción de los estudiantes del concepto de función, como proceso y/o como objeto, desde las perspectivas de Anna Sfard y David Tall, y cómo incide esta concepción en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo.

El segundo resultado muestra un estudio de tipo cognitivo en el que se explica la forma en que los estudiantes activan sus esquemas cognitivos, en procura de lograr desarrollos exitosos frente a problemas matemáticos, siguiendo una adaptación del modelo piagetiano sobre la comprensión.

ABSTRACT

In this research we perform an analysis on the form in which the comprehension of the Fundamental Theorem of the Calculus can be affected by the conception of the concept of function. The present work was applied to a group of fourteen first year students of the Science Faculty and the Engineering Faculty at the Universidad del Valle (Cali – Colombia). We show two results:

The first one show a quantitative study, in which there were recorded the measurements done with regard to the students' conception of the concept of function, as process and/or as object, from Anna Sfard and David Tall points of view, and how this conception is affecting the comprehension of the Fundamental Theorem of the Calculus.

The second one shows a cognitive type study in which it is explained how students activate their cognitive schemes, in order to achieve successful developments while solving mathematical problems. For this we followed an adaptation of the Piaget's approach on the comprehension.

PRESENTACIÓN

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación de carácter exploratorio sobre la influencia de una *concepción* dominante de función, *proceso* u *objeto*, en la *comprensión* del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) La población objeto de la investigación esta conformada por 14 estudiantes universitarios de primer semestre, en las carreras de ciencias e ingenierías en la Universidad del Valle, ubicada en la ciudad de Cali, Colombia

El interés que motivó la realización de este trabajo, surgió de la necesidad de encontrar explicaciones al fracaso de los estudiantes universitarios en el aprendizaje de los conceptos básicos del cálculo, centrando la indagación en los mecanismos cognitivos que permiten la comprensión de un concepto matemático

En el primer capítulo se presenta el marco teórico como estructura fundamental de toda nuestra investigación. Aquí, se describe la forma en que tres autores (Sfard, Tall y Piaget) a través de sus posiciones teóricas, entienden la forma en que se comprenden los conceptos matemáticos. Describiremos las definiciones de los términos utilizados por cada autor, y las podremos en relación unas con otras, para finalmente dar las razones por las cuales nos inclinamos a utilizar la teoría de esquemas de Piaget como la que mejor se adapta a nuestros propósitos.

En el segundo capítulo se presenta un breve estudio de carácter epistemológico del concepto de función, centrando la atención en los cambios de estatuto del concepto e intentando resaltar su concepción como proceso o como objeto en cada uno de estos periodos históricos observando su papel en el surgimiento y posterior desarrollo del TFC.

En el tercer capítulo se presenta la metodología que se siguió en esta investigación, la cual esta conformada por dos partes: la primera, caracterizada por la definición de unos indicadores que nos permitirán, como se muestra en el capítulo siguiente, calificar los niveles de éxito de los estudiantes en relación con el desarrollo de situaciones matemáticas propuestas en los instrumentos de la investigación, en relación con sus concepciones del concepto de función y su incidencia en la comprensión del TFC. La segunda parte de la metodología muestra una adaptación de la teoría de esquemas de Piaget, realizada por Delgado, para explicar los procesos y mecanismos cognitivos del sujeto cuando ejecuta una tarea matemática específica

El cuarto capítulo muestra los dos instrumentos utilizados para el desarrollo de la investigación. El primero de ellos, diseñado con la intención de identificar la concepción como proceso o como objeto del concepto de función. El segundo, diseñado con la intención de observar el estado de comprensión del TFC. Igualmente, se muestran en este capitulo los ciclos de interacción cognitiva de un estudiante ideal cuando desarrolla las diferentes situaciones propuestas en los instrumentos.

En el quinto capitulo se presentan los resultados correspondientes a las calificaciones de los niveles de éxito en los estudiantes en las diferentes situaciones, con el fin de poder dar un diagnóstico sobre su concepción del concepto de función como proceso o como objeto y su incidencia en la comprensión del TFC

En el sexto y último capítulo se presentan las conclusiones a las que llegamos en nuestra investigación, presentándolas en forma de respuestas a las preguntas, objetivos e hipótesis que motivaron el planteamiento y desarrollo de nuestro problema.

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Concepto matemático: Desde la perspectiva de Sfard, la palabra concepto (o también conocida como noción) se asocia a la idea matemática considerada en su forma oficial y aceptada por la comunidad.

Concepción: Según Sfard, es el conjunto de representaciones y asociaciones internas que el concepto evoca en el sujeto. Estas representaciones reflejan la forma en que el concepto es "concebido" por el sujeto.

Concepción como proceso: Un sujeto posee una concepción como proceso (también llamada concepción operacional) de un concepto, cuando este es considerado como una entidad potencial. El concepto es evocado mentalmente a través de una serie de acciones; se le asocia a esta concepción con una sola forma de concebir el concepto, cuando no se evidencia la posibilidad de relacionar el concepto con otros, o cuando no hay integración entre el concepto y sus propiedades. Se caracteriza a la concepción operacional por ser dinámica, secuencial y detallada.

Concepción como objeto: Un sujeto posee una concepción como objeto (también llamada concepción estructural) de un concepto, cuando este es evocado por la mente como una entidad compacta e integrada. No se necesita entrar en detalles para reconocer el concepto o tener una idea clara de él. Se evidencia en la concepción estructural la capacidad de relacionar el concepto con otros. Igualmente, se reconoce la posibilidad de alternar diferentes representaciones del concepto.

Esquema: En la terminología de Piaget nos acogemos a la siguiente definición de esquema -de acción-: *"llamaremos esquemas de acciones a lo que, en una acción es de tal manera transponible, generalizable o diferenciable de una situación a la siguiente, o dicho de otra manera lo que hay de común en las diversas repeticiones o aplicaciones de la misma acción"* (Piaget, 1969, pp. 8-9). A partir de la definición de esquemas de acción, estos se diferencian en sensoriomotores, operatorios y conceptuales. Podemos decir entonces que un esquema es un invariante que organiza la conducta del sujeto.

Esquemas conceptuales: Los entendemos como una estructura dinámica que se organiza en función del objetivo de la acción y la previsión de los resultados. Superan a los esquemas sensoriomotores y operatorios pues se tiene más conciencia de ellos y están ligados a lenguajes.

Esquema director: Esquema que el sujeto activa en sus acciones iniciales y que se asocia al nombre del concepto que dirigirá tales acciones.

Estructura teórico conceptual: Mapa conceptual constituido por los conocimientos necesarios y suficientes que organizan las acciones de un estudiante para alcanzar el objetivo planteado por una determinada situación.

Ciclo de interacción: Cuadro en el que se registra la información del análisis cognitivo. En este cuadro se reconstruye de manera esquemática un ciclo cognitivo virtual que describe, plausiblemente, la interacción en términos de los esquemas conceptuales necesarios y suficientes que el sujeto pone en juego para alcanzar el objetivo de la tarea. En cada casilla se consigna la información obtenida en términos de los observables y coordinaciones que el investigador atribuye al sujeto, a partir de sus realizaciones escritas respecto a una situación adidáctica.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1
MARCO TEÓRICO

Hacia la Elección del Modelo Cognitivo sobre la Comprensión para el Estudio de Esquemas

1. ELEMENTOS DE LA TEORÍA COGNITIVA Y SU ADAPTACIÓN A LA DIDÁCTICA

En este trabajo de investigación es fundamental tener conciencia acerca de la forma en que el ser humano concibe y aprende los conceptos matemáticos; aspecto que hace parte de la amplia problemática de la comprensión. Por tal razón, estableceremos inicialmente las diferentes posturas conceptuales y metodológicas, ligadas al problema de investigación que nos interesa indagar.

A pesar de que actualmente los investigadores están de acuerdo en separar *comprensión* de *conocimiento*, también aceptan que no se ha alcanzado una definición unificada del concepto. Es así como, además del modelo de Susan Pirie y Thomas Kieren sobre la evolución de la *comprensión* matemática y la teoría APOE de Ed Dubinsky, se han propuesto diversos marcos teóricos guiados por modelos inspirados en diferentes epistemologías constructivistas. (cf., Meel, 2003) para tratar de esclarecer los fenómenos relacionados con la *comprensión* de los conceptos matemáticos.

Todos estos marcos comparten el principio básico común a las diferentes variedades de constructivismo según el cual:

> "el conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto cognitivo sino activamente construido" (Glasersfeld, 1989, p. 182).

En el caso de la teoría APOE de Dubinsky (1996) y los marcos teóricos de Sfard (1991) Sierpinska (1992) y Tall (1994) se agrega el reconocimiento del carácter adaptativo de la cognición propuesto inicialmente por Piaget (cf., Piaget, 1969) y que da lugar a un segundo principio constructivista que se agrega al anterior y que Ernest von Glasersfeld (1989) expresa afirmando que en el constructivismo radical:

> "la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica." (Glasersfeld, 1989: p. 182).

Por consiguiente, en este paradigma el organismo deja de ser un explorador en busca de "propiedades estructurales" de una realidad inaccesible y se convierte en un organismo que *se adapta al medio construyendo y modificando sus propias estructuras cognitivas*, de tal modo que las variaciones son mejoras que le permiten responder a los problemas que esa realidad le plantea.

Desde el punto de vista ontológico, este segundo principio implica que, desde la perspectiva del sujeto, el objeto existe si y sólo sí se establece alguna relación experiencial con él. Esta posición ontológica también tiene repercusión en la "concepción de comprensión". El sujeto comprende el "objeto matemático" por construcciones y reconstrucciones de estructuras internas que nosotros llamaremos esquemas en el sentido piagetiano del término. El objeto matemático puede ser escrito y presentado como un estímulo externo, pero lo que el sujeto comprende depende de su capacidad de "asimilación" y de "acomodación", que están en relación con el desarrollo actual de sus esquemas cognitivos. Lo que nos lleva a decir, que el aspecto central de este trabajo trata precisamente con la comprensión del estudiante, que se construye mediante la formación de «*entidades mentales*» y de la realización de conexiones entre ellos.

En las secciones que siguen, primero presentaremos las ideas y conceptos que tomados de la Epistemología Genética de Piaget han sido adaptados por los didactas de las matemáticas para apoyar la construcción de teorías o marcos conceptuales que tratan de explicar los fenómenos asociados a la comprensión de conceptos matemáticos. En segundo lugar, daremos una breve descripción de algunos de estos marcos teóricos, centrando la atención en los aspectos pertinentes a nuestra investigación sobre el papel de la concepción del concepto de función en la *comprensión* del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). En particular, se hará un análisis con respecto a la hipótesis de Sfard, en lo referente a la concepción dual de las entidades matemáticas, más específicamente, cómo el dominio de una concepción operacional sobre la concepción estructural del concepto de función, podría incidir en la *comprensión* del TFC.

1.1 La Epistemología Genética de Piaget

En este marco teórico se toma como base la transposición de la teoría de la Epistemología Genética de Piaget al estudio de la génesis de las *entidades conc*eptuales matemáticas que hace César Delgado G. en su tesis doctoral de (1998) sobre la microgénesis de los conceptos de límite y continuidad en alumnos universitarios. Los conceptos que expondremos son sólo aquellos que adoptamos en el marco teórico de nuestro trabajo para disponer de unidades de análisis que nos ayuden a dar respuesta a nuestro problema de investigación: explicar el papel del concepto de función en la comprensión del teorema fundamental del cálculo (TFC). Es decir, nos referiremos a los conceptos de conocimiento, esquemas, funciones invariantes de los esquemas y los mecanismos de equilibración cognitiva.

1.2 El Concepto de Esquema

Una unidad básica de análisis, utilizada para el estudio de la construcción de los conceptos matemáticos desde una perspectiva psicológica, es el concepto de esquema piagetano (Delgado 1998, pp. 23-88). Delgado diferencia y pone en relación los esquemas de acción, sensoriomotores, operatorios y conceptuales. El esquema es un constructo que se identifica en la acción del sujeto, puesta en relación con una situación particular o conjunto de situaciones, por ello Piaget define en primera instancia los esquemas de acción y a partir de ellos los diferencia en esquemas:

- Sensoriomotores, designando con este nombre a aquellos que están ligados a las percepciones directas del objeto y que implican el funcionamiento del sistema sensoriomotor. Estos esquemas son esquemas de acción, como serán definidos más adelante en la terminología propia de Piaget
- Operatorios, que superan el esquematismo de la acción porque son acciones interiorizadas y representadas en el pensamiento, pero que, además, tienen el carácter de ser reversibles.
- Conceptuales, que son esquemas operatorios pero superan el esquematismo operatorio porque se tiene más conciencia de ellos y están ligados a lenguajes. Es decir, los esquemas conceptuales son operatorios, de acción y están en relación con esquemas sensoriomotores.

Para Piaget, el conocimiento no es producto del aporte de la experiencia, ni mucho menos es innato. El conocimiento se construye, por eso reconoce la ciencia como la forma más avanzada de conocimiento.

> *"…el conocimiento no puede concebirse como si estuviera predeterminado, ni en las estructuras internas del sujeto, puesto que son el producto de una construcción efectiva y continua, ni en los caracteres pre-existentes del objeto, ya que solo son conocidos gracias a la mediación necesaria de estas estructuras, las cuales los enriquecen al encuadrarlos (aunque solo fuera situándolos en el conjunto de los posibles). En otras palabras, todo conocimiento supone un aspecto de elaboración nueva y el gran problema de la epistemología consiste en conciliar esta creación de novedades con el doble hecho de que, en el terreno formal, se convierten en necesarias apenas elaboradas y, en el plano de lo real, permiten (y son las únicas que lo permiten) la conquista de la objetividad".* (Piaget, 1977 p. 1)

Bajo esta convicción, Piaget desarrolló su "*Epistemología Genética*"; una epistemología experimental fundamentada en los aportes de la psicología y de la historia de la ciencia, como una alternativa frente al apriorismo, el innatismo y el empirismo.

Como acabamos de ver, el modelo cognitivo Piagetano asume que todo nuevo conocimiento presupone una estructura cognitiva previa, que tuvo su génesis en los primeros años de vida del sujeto y su desarrollo siempre está ligado a la acción en el intercambio con el mundo externo, lo que imprime una cierta dirección al desarrollo de tal manera que cada estado de equilibrio alcanzado aparece al término como necesario. En efecto, las acciones son susceptibles de repetición y generalización, constituyendo así, los primeros instrumentos de intercambio, ligados a la percepción, pero que gradualmente la subordinan y superan y que Piaget denomina *esquemas de acción*:

> "llamaremos *esquemas* de acciones a lo que, en una acción es de tal manera transponible, generalizable o diferenciable de una situación a la siguiente, o dicho de otra manera lo que hay de común en las diversas repeticiones o aplicaciones de la misma acción" (Piaget, 1969, pp. 8-9)

La evolución de un esquema de acción a un esquema conceptual, en un individuo, es un proceso dinámico, que Piaget explica en términos del concepto de abstracción. Piaget distingue tres clases de abstracción (Piaget, 1979): empírica, pseudoempírica y reflexiva.

La abstracción empírica se refiere a la construcción interna de estructuras que permiten interpretar ciertas propiedades o regularidades de los objetos físicos que el sujeto percibe como externas o, en otro caso, la que explica la incorporación de nuevos contenidos a un esquema activado, por «generalización inductiva» el paso de lo singular o específico a lo general.

> "[...] derivan su origen de las propiedades físicas de los objetos y por esta razón es llamada «abstracción empírica»" (Piaget, 1986, p. 222)

Este tipo de abstracción se contrasta con la denominada «*abstracción reflexiva*» que se diferencia, de la ya mencionada, por su origen: "la coordinación general de las acciones". Esta forma de abstracción es la que permite explicar la construcción de las entidades conceptuales matemáticas. El adjetivo "reflexiva" es para señalar dos "reflexiones" de diferente naturaleza:

> "[...] por una parte «refleja» (en el sentido de un reflector o de una proyección) algo que procede de un plano inferior (por ejemplo las acciones) para proyectarlo en un plano superior de pensamiento o de representación mental, y, por otra constituye una «reflexión», en el sentido de una actividad mental de reorganización, puesto que reconstruye en este plano superior lo que ha obtenido a partir de las coordinaciones de la acción" (Piaget, 1986, p. 222)

Esta abstracción reflexiva puede ser de diferentes tipos, según Piaget: interiorización, condensación, encapsulación, y generalizaciones «constructivas» (cf., Piaget, 1984) y que algunos didáctas (Sfard, 1991; Dubinsky, 1992) consideran importantes para el estudio de la construcción de los objetos matemáticos.

1.3 Sobre la Asimilación y la Acomodación

Según Delgado (1998) el enfoque funcionalista de Piaget se pone de manifiesto la inseparabilidad de la estructura (esquema) de las funciones que el reconoce como invariantes funcionales: asimilación y acomodación. El término "asimilación" proviene de la biología y se refiere a la incorporación de elementos a una estructura particular activada, en tanto que la acomodación es la función recíproca de adecuación del esquema a los elementos particulares que se asimilan y ello por:

> "la necesidad en que se encuentra la asimilación de tener en cuenta las particularidades propias de los elementos que hay que asimilar" (Piaget, 1990, p. 8)

Los desequilibrios entre estas dos funciones de los esquemas dan lugar a las novedades, ya sean el resultados de la ampliación de los esquemas a nuevos contenidos a los cuales se aplican (por la actividad asimiladora del esquema) o modificación de los esquemas (por la acomodación). Estos desequilibrios se presentan cuando el objeto de la acción opone resistencia (obstáculos que impiden alcanzar el objetivo de la acción) a la actividad (asimiladora o de acomodación) del esquema.

1.4 Las Entidades Conceptuales

La comprensión de un concepto se inicia cuando el sujeto va desarrollando un equilibrio, en la terminología de Piaget, «mayorante» (que mejora el funcionamiento de una estructura anterior) ya sea por *interiorización* de la acciones que se realizan sobre objetos familiares (ya sen físicos o entidades abstractas), *condensación* de procesos, *encapsulación* (constitución de nuevas entidades) o *generalización*. Es decir, la comprensión se desarrolla por la construcción de nuevas entidades estructurantes o la extensión del dominio sobre el cual trabajan las ya existentes. Estos procesos constructivos son reconocidos por Piaget (1986) como propios de las matemáticas cuando afirma, respecto a la ontología de los objetos matemáticos que:

> "Por tanto, todas las matemáticas pueden traducirse en términos de construcción de estructuras y tal construcción permanece abierta indefinidamente. El signo más elocuente de esta especie de deshielo, que ha señalado la extensión extraordinaria de las matemáticas recientes, es el nuevo sentido que ha tomado el término «entes» matemáticos: dejando de constituir especies de objetos ideales dados de una vez para siempre en nosotros o fuera, dejando, por tanto, de presentar un sentido ontológico, cambian sin cesar de función al cambiar de nivel, y una operación referida a tales entes se convierte a su vez en objeto de la teoría, y así sucesivamente hasta estructuras alternativamente estructurantes Y estructuradas por estructuras más fuertes; por tanto, todo puede llegar a ser un «ente», según el nivel, y depende así de esta relatividad de formas y de contenidos [...]." (Piaget, 1986, pp. 120-121)

Desde esta perspectiva, constructivista, el *aprendizaje es adaptación a situaciones nuevas* y tal adaptación consiste en *modificación* de estructuras existentes en función de los intercambios con el "medio" (informaciones y retroalimentaciones) de tal manera que las variaciones así obtenidas aumentan los intercambios exitosos con el medio. Y, la comprensión es vista como un proceso iterativo de abstracciones realizadas de la coordinación de acciones sobre estructuras (entes familiares) para dar lugar a novedades en un plano superior del pensamiento que se diferencian e integran en estructuras de "más fuertes". Como veremos a continuación esta es la idea que Sfard (1991) adopta para diferenciar dos "concepciones", según ella complementarias, de los objetos matemáticos.

1.5 Conocimiento Figurativo y Conocimiento Operatorio

Esta diferenciación entre los dos tipos de conocimiento que surge con la aparición de la función semiótica (cf. Piaget 1975) resulta importante para nuestro estudio puesto que permite analizar el funcionamiento de los esquemas conceptuales –que como ya se ha dicho son esquemas operatorios ligados a lenguajes– desde dos miradas complementarias: aquella de la representación simbólica y esta otra del carácter operatorio presente en la inferencia y coordinación de medios para alcanzar el objetivo de la acción. Delgado muy acertadamente señala que la aparición, en el terreno del desarrollo cognitivo del sujeto, de la función semiótica:

> [...] resulta vital para la constitución de las estructuras posteriores porque, si bien en un principio la asimilación y la acomodación constituyen un todo indiferenciado, con el surgimiento de la representación se produce toda una revolución por la diferenciación progresiva de estas dos funciones, dando origen al *pensamiento representativo* que prolonga el pensamiento práctico de la inteligencia sensoriomotríz que actúa sobre cuadros perceptivos y actuales, en pensamiento preoperatorio (preconceptual) sobre imágenes o recuerdo-imagen, luego, con la aparición del lenguaje, sobre signos y expresiones verbales y, por último, en pensamiento operatorio (conceptual) que se apoya sobre "configuraciones" o estructuras pero que logra su independencia operatoria de la configuración ya que se trata de transformaciones de un estado a otro y no como ocurría

> con sus antecesores (el pensamiento práctico y preconceptual) que se referían a un estado como tal. Lo figurativo desempeña, entonces, el papel de ilustración que puede o no acompañar a las transformaciones operatorias. Se alcanza, así, la representación cognoscitiva propia del pensamiento reflexivo." (Delgado, 1998, p. 25)

La consecuencia de tales adquisiciones es que, a nivel del pensamiento representativo, en la génesis de las *entidades conceptuales* intervienen tanto los esquemas figurativos como las transformaciones de tipo operatorio que caracterizan el funcionamiento de los esquemas conceptuales. Así, las entidades conceptuales matemáticas se construyen a partir de las coordinaciones de las acciones de esquemas operatorios que actúan ya sobre objetos materiales o signos, o, que se apoyan en imágenes mentales dando lugar a una construcción en la que se diferencian los significantes (símbolos y signos) de los significados (esquemas –invariantes que organizan la conducta del sujeto– o significados institucionales –socialmente compartidos.). De tal manera que, como expresa Delgado:

> "Los significantes se constituyen en esquemas "figurativos" y los "significados" en esquemas conceptuales u operativos, prolongando los primeros las percepciones actuales y los segundos los esquemas de acción de la inteligencia sensoriomotríz, dando lugar –gracias al lenguaje y la socialización progresiva– a la constitución de un sistema de significaciones (significantes relacionados a significados) de orden superior sobre los que opera la inteligencia reflexiva. (Delgado, 1998, p. 20)

Esta característica del vínculo de los esquemas operatorios a lenguajes que, desde el punto de vista interno del sistema cognitivo, se constituyen en esquemas figurativos para conformar la «identidad conceptual», permite explicar ciertos aprendizajes de corto plazo ligados a la evocación de un cuadro mental que resulta de bajo nivel operatorio y contrastarlos con aprendizajes que superan el esquematismo y constituyen una unidad en la que lo operatorio,

> "se libera de la imagen por su misma generalidad y no la emplea sino a título de ilustración" (Delgado, 1998, p. 32)

Y, nosotros agregaríamos que tales ilustraciones sirven de apoyo a la coordinación de esquemas que son las que permiten las inferencias y la organización de la acción en términos de los objetivos de la acción.

2. LA COMPRENSIÓN SEGÚN SFARD

Anna Sfard (1991) estudia el problema de la comprensión en las matemáticas y se apoya en la teoría de Piaget que acabamos de presentar. La trasposición a la didáctica que hace Sfard de los conceptos de interiorización, condensación y encapsulación de Piaget tiene el mérito de poner en evidencia dos maneras de concebir los objetos matemáticos y se vuelve operativa cuando permite explicar las causas de las limitaciones de las concepciones (esquemas conceptuales en la teoría de Piaget) para alcanzar ciertos conceptos o realizaciones matemáticas. A continuación presentaremos nuestra lectura de este trabajo de Sfard señalando los conceptos más pertinentes a nuestra investigación.

2.1 Concepto matemático y Concepciones

En primer lugar, Sfard considera fundamental diferenciar el término “concepto” del término “concepción”:

> La palabra “concepto” (algunas veces reemplazada por “noción”), será mencionada cuando una idea matemática está considerada en su forma “oficial”–como un constructo teórico dentro de “el universo formal del conocimiento ideal”–; el grupo total de representaciones y asociaciones internas evocadas por el concepto –la contraparte del concepto en el interior y subjetivo “universo del conocimiento humano”– será llamada por nosotros una concepción”. (Sfard, 1991. p. 3)

Esta precisión nos permite diferenciar el conocimiento matemático, que se comparte socialmente y que es objeto de transformaciones para ubicarlo como un saber escolar que será el objeto de enseñanza, de aquel conocimiento subjetivo (y por tanto idiosincrásico) que los alumnos asocian al conocimiento oficial. Así pues, según Sfard y nosotros compartimos este punto de vista, de un concepto matemático poseemos una concepción. Tal concepción, es la que “vive” en la mente y dependerá de las experiencias que han permitido establecer cierta relación personal con todo aquello, que desde la perspectiva del sujeto, se relaciona con el concepto. Es de suponer que esta concepción está sujeta a cambios, dependiendo de las diferentes y continuas interacciones entre el sujeto y las situaciones asociadas al concepto.

Desde la perspectiva de Sfard, la comprensión exige mucho más que ejecutar procesos y aplicar resultados matemáticos. Para ella “*la comprensión es un proceso constructivo*” que implica establecer un vínculo entre acciones sobre objetos familiares y representaciones internas de la acción, dando lugar a la construcción de una estructura interna asociada a los signos y significados matemáticos externos, en contextos que son objeto de la acción del sujeto y objeto de aprendizaje. Este vínculo se expresa en una estructura que organiza, regula y controla el comportamiento intelectual frente a situaciones y problemas matemáticos.

En la construcción de tal estructura interviene un mecanismo trifásico: interiorización-condensación-cosificación que es el responsable de esta labor constructiva. Los objetos de la acción pueden ser un material concreto o situaciones que se representan en significantes (signos).

El término interiorización es usado por Sfard en el mismo sentido como el dado por Piaget: proceso de representación interna de eventos externos de tal manera que para evocarlos no se requiere de su realización actual. La interiorización implica una nueva construcción de aquello que ya vive como proceso de acción y por ello es la re-construcción del esquema de acción en un esquema operatorio o conceptual que ontológicamente pertenece a un plano superior al de la acción:

> “[...] la interiorización de las acciones supone su reconstrucción en un plano superior y, en consecuencia, la elaboración de una serie de novedades irreductibles a los instrumentos del nivel inferior.” (Piaget, 1986. p. 52)

En el nuevo plano el proceso “se puede llevar a cabo usando representaciones mentales” siendo éstas representaciones instrumentos más potentes por que son formas generales, reversibles y coordinables entre sí en un nuevo espacio diferente a aquel de la experiencia física.

2.2 Aspecto dual de los objetos matemáticos

Para Sfard, existen dos formas concebir un concepto: como proceso (concepción operacional) y como objeto (concepción estructural):

> " [ ]*Concebir una noción como un proceso implica considerarla como una entidad potencial más que como entidad actual, que viene a nuestra existencia interior en petición de una secuencia de acciones…la concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada".* (Sfard, 1991, p. 4).

En tanto que

> *"Concebir una entidad matemática como un objeto, significa referirse a ella como si fuera una cosa real-una estructura estática, que existe en alguna parte en el espacio y en el tiempo-. Significa también ser capaz de reconocer la idea "con una mirada" y manipularla como una totalidad sin entrar en detalles.* (Sfard, 1991, p.4)

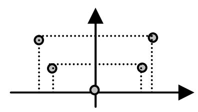
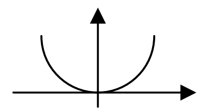
Aunque estas dos formas de concebir un concepto dan la impresión de ser incompatibles, según Sfard, son complementarias; algo que permitiría decir que en el aprendizaje efectivo, estas dos formas de concebir se enlazan hasta alcanzar un nivel de comprensión ideal.

El siguiente cuadro (Sfard, 1991) muestra un resumen de las características de cada una de las concepciones de un concepto.

	Concepción Operacional	**Concepción Estructural**
Característica general	Una entidad matemática es concebida como un producto de un cierto proceso o es identificada como el proceso mismo.	Una entidad matemática es concebida como una estructura estática. Como si fuera un objeto real.
Representaciones interna	Se apoya en representaciones verbales.	Es apoyada por imaginería visual.
Su lugar en el desarrollo del concepto	Se desarrolla en la primera etapa de formación del concepto.	Evoluciona de la concepción operacional.
Su papel en los procesos cognitivos	Es necesario, pero no suficiente, para las soluciones de problemas y el aprendizaje.	Facilita todos los procesos cognitivos (aprendizaje, solución de problemas)

Figura 9. Concepciones Operacional Estructural. –Resumen
(Sfard, 1991, p. 33)

En la tabla que se muestra a continuación, se da una interpretación de las concepciones estructural (como objeto) y operacional (como proceso) en dos ejemplos particulares.

EXPRESIÓN SIMBÓLICA	**CONCEPCIÓN PROCESO (Descripción operacional)**	**CONCEPCIÓN OBJETO (Descripción estructural)**
$f(x) = 3x^2$	• Proceso de elevar al cuadrado un número y multiplicarlo por tres. • Gráfica: punteo 	• Función cuadrática. Parábola, cóncava hacia arriba. Gráfica: visión global 
$f'(x) = 6x$	• Proceso de aplicar la regla $f´(x) = n\ x^{n-1}$ a la función $f(x) = 3x^2$ para obtener su derivada en un punto x_0, $f´(x_0) = 6x_0$.	• Función: $f´(x) = 6x$ De pendientes de las rectas tangentes, a la gráfica de $f(x)= 3x^2$, en el punto $(x,f(x))$.

La lectura del marco teórico de Sfard permite inferir que, según ella, la concepción operacional precede a la estructural, aunque ella acepta que la influencia externa de la estrategia de enseñanza puede influir en el resultado del aprendizaje, también afirma que:

> "existen ciertas características constantes que son inmunes a cambios en los estímulos externos" (Sfard, 1991)

y una de ellas es…

> *"la precedencia de lo operacional sobre lo estructural"*. (Sfard, 1991)

Esta hipótesis de Sfard en el desarrollo de la teoría de la comprensión, es un detalle con el que algunos investigadores no están del todo de acuerdo. Lo que sí es claro, es que si el estado de concepción de un concepto se encuentra sólo en el estado operacional, la evolución de la comprensión se encontrará en un estado "incipiente" –el estudiante no podrá afrontar con éxito la resolución de problemas.

Vale aclarar que estas formas de concepción de los conceptos, están descritas en términos de características externas, tales como conductas, actitudes y habilidades de los estudiantes, es entonces la observación de las acciones de los estudiantes cuando enrentan una situación matemática lo que nos va a permitir una verificación del estado de comprensión de un concepto. Por ello resulta importante caracterizar y definir indicadores para los tipos de concepción. A continuación se presenta un esquema que permite discriminar los distintos indicadores de concepción de un concepto como proceso o como objeto.

INDICADORES DE CONCEPCIÓN DE UN CONCEPTO COMO PROCESO Y COMO OBJETO

COMO PROCESO (CONCEPCIÓN OPERACIONAL)	COMO OBJETO (CONCEPCION ESTRUCTURAL)
■ El concepto es considerado como una entidad potencial: se percibe como algo que se realiza en el tiempo	■ El concepto es considerado como una entidad actual: tiene existencia real como una cosa.
■ El concepto tiene una concepción que es dinámica, secuencial y detallada.	■ El concepto tiene una concepción que es estática, que existe en alguna parte en el tiempo y en el espacio.
■ No existe una “visualización” integrada del concepto.	■ Existe una imagen compacta e integrada del concepto.
■ No es posible notar la relación del concepto con otros conceptos.	■ Es posible relacionar el concepto con otros y definir nuevos conceptos a partir del concepto en cuestión.
■ Existe sólo una representación del concepto. Un solo contexto.	■ Se nota la posibilidad de alternar diferentes representaciones del concepto, según el contexto
■ No hay integración entre el concepto y sus propiedades	■ Existe una coordinación entre el concepto y sus propiedades

2.3 El mecanismo de la comprensión

Según Sfard, la comprensión de un concepto es un proceso que implica un mecanismo trifásico en el cual las entidades conceptuales se pueden ver como procesos u objetos según que estructuras más fuertes operen sobre ellos o éstas entidades sean las estructurantes de otra novedades.

Desde tal perspectiva Sfard precisa, en el campo de la didáctica, el concepto de interiorización, condensación y cosificación de Piaget:

2.3.1 Interiorización

> “Diremos que un proceso ha sido interiorizado si “puede llevarse a cabo a través de representaciones [mentales]” y para ser considerado, analizado y comparado, éste no necesita ser realizado en el acto.”(Sfard, 1991, p. 18)

En esta etapa el aprendiz se familiariza con los procesos que darán origen a un nuevo concepto

2.3.2 Condensación

> “…es un proceso de secuencias prolongadas “comprimidas” de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa una persona llega a ser más y más capaz de pensar en un proceso dado como una totalidad, sin sentir un impulso de entrar en detalles”. (Sfard, 1991, p. 19)

En esta fase se manifiesta una facilidad de alternar diferentes representaciones del concepto.

2.3.3 Cosificación

> "La etapa de condensación dura tanto como la nueva entidad permanezca estrechamente ligada a un cierto proceso. Solamente cuando una persona llega a ser capaz de concebir la noción como un objeto maduro, diremos que el concepto ha sido cosificado. La *cosificación*, por tanto, se define como un movimiento ontológico –una repentina habilidad para ver alguna cosa como familiar con una luz totalmente nueva–. Así, mientras la interiorización y la condensación son cambios cuantitativos graduales, más que cambios cualitativos, la cosificación es un salto cuántico instantáneo: un proceso se solidifica en un objeto, en una estructura interna estática. Varias representaciones del concepto llegan a ser unificadas semánticamente por este constructo, abstracto, puramente imaginario. La nueva entidad es rápidamente separada del proceso del cual es producto y comienza a dibujar su significado a partir del hecho de su existencia como un miembro de una cierta categoría. [...]Nuevos objetos matemáticos pueden ahora ser construidos a partir del presente.. (Sfard, 1991, p. 19-20)

Nótese que en la fase de cosificación se da inicio a la interiorización de conceptos de nivel superior, lo que da lugar a que las tres fases se conviertan en un "ciclo interminable" de comprensión, queriendo decir con esto que la comprensión del objeto se logra por aproximaciones sucesivas, es en proceso que está en constante evolución. El siguiente esquema puede dar una mejor interpretación a lo que se dice del ciclo

- **Interiorización**
  Acciones sobre objetos familiares, que se ejecutan como un proceso, se representan internamente: en esta fase el proceso se puede evocar, simbolizar y describir de forma verbal.

La experiencia con diferentes tipos de representaciones mentales del proceso (realizado sobre objetos del nivel inferior) da origen a una...

- **Condensación**
  El proceso se convierte en una unidad autónoma: más que pensar en la secuencia de operaciones se piensa en la entrada y el producto del proceso.

El proceso manipulado como una unidad autónoma da origen a un salto cualitativo y súbito: un cambio ontológico del proceso

- **Cosificación**
  El proceso se constituye como un objeto: una "forma" interna, una entidad con vida propia sobre la cual se puede actuar, transformar y relacionar con otras entidades.

Los nuevos objetos se ven como si fueran objetos "reales", de un plano superior, sobre los cuales se realizarán acciones dando continuidad al ciclo...

3. LA COMPRENSIÓN SEGÚN TALL

En varios artículos (ver [2], [3] en particular), Tall y Vinner introducen la noción de *concepto-imagen* (concept image) y señalan diferencias entre *definición formal o* *institucional* y *definición personal* de un concepto matemático, con el fin de establecer, en primer lugar, la enorme diferencia que existe entre un concepto matemático tal como se expresa y concreta en el discurso matemático socialmente existente y el concepto matemático tal como es apropiado por las personas y que podríamos llamar la versión sicológica o versión personal del concepto, o simplemente *concepto-imagen*. En segundo lugar, para identificar algunos problemas fundamentales en la comprensión de conceptos matemáticos comunes, al parecer, a estudiantes de todos los países.

David Tall y Solomon Vinner (1981) diferencian entre definición del concepto "Concept definition"y el concepto imagen "Concept image" y señalan diferencias entre *definición formal o institucional* y *definición personal* de un concepto matemático, con el fin de establecer la enorme diferencia que existe entre un concepto matemático tal como se expresa y concreta en el discurso matemático socialmente existente y el concepto matemático tal como es apropiado por las personas y que podríamos llamar la versión sicológica o versión personal del concepto, o simplemente *concepto-imagen*. Además ellos usan estos conceptos para identificar y explicar algunos problemas fundamentales en la comprensión de conceptos matemáticos. Dichos problemas de comprensión se revelan como incoherencias entre los *significados*, relacionados con el respectivo concepto, cuando son activados por el sujeto ante demandas cognitivas planteadas por situaciones problemáticas diferentes o cuando los *significados* asociados al nombre del concepto no consultan su *definición institucional*.

3.1 Definiciones fundamentales

Estas definiciones son semejantes a las que plantea Sfard de "objeto matemático" y "concepción" pero se diferencian en cuanto al funcionamiento, en los procesos de comprensión, que cada autor le asigna a los términos.

Concepto-imagen (Concept Image):

> "*We shall use the term* ***concept image*** *to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures*". (Tall& Vinner, 1981, p. 152)

Vinner (19919 complementa esta definición:

> "*A concept name when seen or heard is a stimulus to our memory. Something is evoked by the concept name in our memory. Usually, is not the concept definition, even in the case the concept does have a definition…The concept image is something non-verbal associated in our mind with the concept name. It can be a visual representation of the concept in case the concept has a visual representations; it also can be a collection of impressions or experiences. The visual representations, the mental pictures the impressions and the experiences associated with the concept name can be translated into verbal forms. But it is important to remember that these verbal forms were not the first thing evoked in our memory. They came into being only at a later stage*".(Vinner, 1991, p. 68)

Cuando los sujetos enfrentan una situación particular activan una parte del concepto imagen que los autores denominan concepto imagen evocado (evoked concept image):

> “*We shall call the portion of concept image which is activated at a particular time* ***evoked concept image*”** (Tall& Vinner, 1981, p. 152)

También se define el concepto de *definición personal* (*personal concept definition*) de un concepto, diferenciándola de la *definición institucional o formal* del concepto (*formal concept definition*):

> *The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater o lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for this own explanation of his evoked concept image. In this way a* ***personal concept definition*** *can differ from a formal concept definition*”. (*Idem*, pp. 152)

3.2 Comprensión en la perspectiva teórica de Tall y Vinner

Según Tall y Vinner, el *concepto-imagen* determina la forma en que entendemos el concepto.

> *“We assume that to acquire a concept means to form a concept image for it. To know by heart a concept definition does not guarantee understanding the concept. To understand, so we believe, means to have a concept image”*[Vinner, 1991, p. 69]

Como ya se dijo, el concepto imagen es una estructura que evoluciona con el tiempo y con los encuentros con experiencias de todo tipo. Las explicaciones de esta evolución se inspiran en las teorías de la representación de Jerome Bruner (1996) que sostiene que los seres humanos representamos nuestras experiencias empleando tres sistemas íntimamente relacionados entre sí: Enctivo, icónico y visuo-simbólico (ver figura).

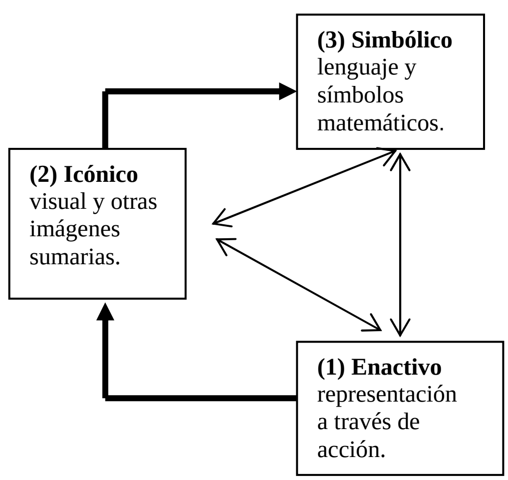


Figura 1: Los tres modos de representación de Bruner.

Así, Tall (1995) sostiene que en la evolución de los conceptos imagen intervienen diferentes sistemas de representación que se poyan entre sí para producir estructuras que son cada vez más completas y abstractas.

Para explicar el papel de la visualización y la simbolización como herramientas mediadoras en los procesos cognitivos movilizados por los objetos matemáticos, Tall adapta la clasificación de los sistemas de representación propuestos por Bruner y concuerda con Bruner en que es la interacción entre estas tres formas lo que conduce a la comprensión del significado de los objetos matemáticos. Sin embargo, Tall divide el sistema simbólico en tres sub-sistemas: verbal, proceptual y lógico para poder dar cuenta de las particularidades de los objetos matemáticos, sus formas de tratamiento y de validación.

El funcionamiento de estos sistemas es muy diferenciado. En particular, los procesamientos en el subsistema lógico-formal implican un salto cualitativo en la comprensión del objeto matemático. Allí, el objeto matemático se define por demandas o necesidades del contexto teórico en los que el objeto cobra vida. Esto es contrario a lo que sucede en los otros sistemas. Así:

- En el *sistema enactivo* el objeto simplemente se percibe, se expresa en modelos de acción y los resultados se validan por experiencias físicas.
- En el *sistema icónico* el objeto se representa en dibujos, gráficas o figuras, se razona sobre los dibujos y figuras y se valida por visualizaciones.
- En el *sistema verbal*, el objeto se describe usando palabras, se razona considerando expresiones verbales y se valida por pruebas euclidianas.
- En el *sistema proceptual*, el objeto se representa en procesos, se razona sobre manipulaciones y cálculos numéricos y la prueba es por chequeos.
- En el sistema lógico, que es característico del pensamiento matemático avanzado, se define el objeto, las relaciones son deducidas o construidas lógicamente y la validación corresponde a la demostración formal usando lógicas de primer orden.

En todos los sistemas, con excepción del sistema lógico, el objeto responde, por así decirlo, a una necesidad meramente funcional, mientras que en el plano de lo formal, el La *definición del objeto* obedece a una necesidad lógica del sistema matemático.

Para nosotros, es este salto cualitativo al nivel del pensamiento formal, donde los sistemas de representación se unen al sistema lógico, es el que crea grandes dificultades en el proceso de enseñanza y genera resistencias para el aprendizaje de conceptos matemáticos. La razón radica en que la inversión del papel de la definición el objeto, que en el pensamiento elemental era la de describir un objeto que se percibe en la acción o se visualiza, o se expresa mediante un proceso, ahora, en el pensamiento lógico-formal su función es a la inversa: designar al objeto, y es esta designación la que tiene consecuencias en términos de las características y relaciones del objeto con otros objetos. Tal designación y relaciones son las que regulan, o deberían regular las acciones de lo sujetos cuando enfrentan una situación matemática.

Nosotros veríamos entonces en la propuesta de Tall, que el desarrollo de la comprensión es un proceso que se inicia con la percepción de lo objetos y por tanto está ligado a esquemas sensoriomotrices que el sujeto ya ha construido progresivamente desde su nacimiento y que evolucionan hacia esquemas operatorios y conceptuales. Pero tal evolución no es lineal, sino que resulta de la interacción entre los sistemas de representación que están disponibles de acuerdo al grado de desarrollo del sujeto y que involucran tales esquemas.

3.3 Relaciones y diferencias respecto a los procesos de comprensión de Sfard y Tall

Parecería que esta forma de ver la génesis de los conceptos matemáticos se corresponde con los planteamientos de Piaget respecto al funcionamiento de los esquemas conceptuales en su aspecto figurativos y, a la vez, operatorio.

La siguiente cita de Piaget parece confirmar nuestra lectura respecto a la constitución de la "*entidades conceptuales*" como un proceso, que según las ideas de Bruner (y aquí las de Piaget) se realiza con el apoyo entre lo *icónico* (imágenes mentales, pensamiento figurativo), *lo simbólico* (que proporciona los significantes en los que se apoyan a los esquemas operatorios y se torna en instrumento de expresión de los esquemas conceptuales), el *procepto* (que tiene la función de reunir el símbolo y la operación e imágenes) y *lo enactivo* (modelos de acción, esquemas sensorio-motores)

> "Por lo demás es claro que ambas clases de representaciones, amplias y limitadas, presentan relaciones entre sí: el concepto es un esquema abstracto y la imagen un símbolo concreto, pero sin llegar a reducir el pensamiento a un sistema de imágenes, se puede decir que todo pensamiento se acompaña de imágenes, puesto que si pensar, consiste en relacionar significaciones, la imagen sería un "significante" y el concepto un "significado". Además, es muy posible que ambas se constituyan en forma concurrente." (Piaget, 1994, p. 92)

Lo arriba expresado llevaría entonces a cuestionar la hipótesis de Sfard (respecto al orden de las concepciones de los objetos: proceso y luego objeto) y llamaría la atención más sobre los aspectos referentes a la retroalimentación entre las formas de representación, que contribuyan (o no sean favorables) a la constitución de una concepción estructural, pero vista esta como el objeto definido en el plano de la representación lógico formal, lo cual implicaría tomar en consideración un conjunto de acciones que permitan la evolución de los objetos matemáticos (definición de objetos), hacia objetos definidos matemáticamente, es decir, en términos de sus características y relaciones con otros objetos matemáticos.

Independientemente de la validación de esta hipótesis o la de Sfard, observamos que las dos coinciden en que para lograr el desempeño en el plano lógico-formal del pensamiento, es necesario estar en posesión de una concepción estructural de los objetos matemáticos.

4.0 PRECISIONES TEÓRICAS FINALES

Finalizamos este capítulo haciendo un análisis comparativo de las formas en que Sfard, Tall y Piaget interpretan la forma en que evoluciona el proceso de comprensión de los conceptos matemáticos en los estudiantes y la razón por la cual hemos elegido el concepto de esquema de Piaget como guía en nuestra investigación, en lo referente al aspecto cognitivo

Los términos concepción (Sfard), Concept Image (Tall) y esquema conceptual (Piaget) que ya hemos presentado más arriba, se refieren a una estructura interna construida por el sujeto que aprende, como producto de múltiples experiencias de diferente tipo y que se manifiesta en el comportamiento del sujeto frente a determinadas situaciones. Estas manifestaciones pueden estar asociadas a diferentes funcionamientos de tal estructura interna. De esta forma, Sfard habla de concepción procedimental para referirse a procesos y propiedades con más o menos conciencia, que permiten realizar acciones en torno a una tarea matemática. De igual manera, Tall involucra estos dos aspectos en la definición de concepto imagen. En la terminología de esquemas de Piaget, la estructura interna expresa estos mismos aspectos en términos de esquemas de acción u operatorios.

De manera similar, la concepción estructural de Sfard se podría entender en la definición de Tall, en términos de los modos de representación proceptual y lógico; en tanto que en términos de esquemas piagetianos se interpretaría como esquema conceptual.

Nosotros entendemos el término esquema conceptual como una estructura dinámica que se organiza en función del objetivo de la acción y la previsión de los resultados (carácter teleonómico de la acción). Esta estructura esta conformada por esquemas que constituyen los medios necesarios para realizar la acción. Tal organización es posible por el carácter operatorio de los esquemas y sus asimilaciones y acomodaciones recíprocas (entre esquemas) dirigidas por el esquema que Delgado (1998) llama, esquema director, para conformar un ciclo de interacción cognitivo. Esta manera de concebir el esquema conceptual, posibilita asociarlo con el nombre del concepto matemático que dirigirá las acciones del sujeto

Lo anterior nos permite decir que el esquema piagetano toma en consideración lo que dicen Tall y Sfard en relación con los procesos, las propiedades y las imágenes mentales (el aspecto figurativo), pero adiciona las funciones de la asimilación, acomodación y la equilibración entre estas, como mecanismo que permite explicar las novedades y los errores de los estudiantes; razón por la cual consideramos que este concepto es el que mejor se adapta a los objetivos de nuestra investigación, dado que facilita las explicaciones respecto a la forma en que funciona el sistema cognitivo de los estudiantes, cuando realizan tareas matemáticas.

CAPÍTULO 2

BREVE RESEÑA DEL PROCESO DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

CAPÍTULO 2

BREVE RESEÑA DEL PROCESO DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

PRESENTACIÓN.

A continuación se muestra un breve estudio de tipo epistemológico, relativo al concepto de función, con la intención de repasar los diferentes estatutos del concepto. Nos interesa la observación de cómo este evoluciona desde una concepción en la acción, hasta llegar a una definición institucional[1], que posibilita una concepción estructural del mismo, y finalmente, observar cómo se articula con la primera demostración formal del TFC realizada por Augustin Cauchy (1789-1857).

1. ESTATUTO PROTOMATEMÁTICO:

Este estatuto comprende el mundo antiguo donde se consolidaron las culturas Mesopotámica, Babilónica y de los Griegos Antiguos, la baja Edad Media de las culturas Hindúes, Egipcias y Árabes incluyendo, también, la alta Edad Media hasta la creación de las primeras universidades a finales del siglo X –Oxford, Bolonia, Paris.

Así, los babilonios emplean el concepto de función construyendo tablas para facilitar operaciones aritméticas; los griegos, trabajando con proporciones, o, estableciendo relaciones entre medidas de las cuerdas en un círculo; los Hindúes, utilizando colores para denotar los números, etc. Durante este período, el concepto era utilizado en la práctica y no se tenía de él ningún tipo de formulación.

Sin embargo, si nos referimos al hecho de que una ecuación debe estar presente a la hora de la constitución de una función, quedaría claro que en la antigüedad no se tenía una concepción explícita de las funciones. Al examinar las relaciones que podían establecerse

[1] Tomamos la categorización de Chevallard (1985) de los estatutos que se le reconocen a una noción en su proceso de institucionalización: estatuto *protomatemático* si ella interviene en los razonamientos y procesos matemáticos de forma implícita, la idea que en el futuro constituirá la noción funciona y se considera obvia; estatuto *paramatemático*, la noción se considera una herramienta útil y se usa, se tiene conciencia de ella y se le asigna un nombre pero, para el matemático, no es objeto de estudio; finalmente, su estatuto es *matemático* cuando la noción se nombra y define ingresando al dominio de la matemática y se constituye en objeto de estudio del matemático. (cf., Chevallard, 1985. *La transposición didáctica*, pp. 57-66)

entre las cantidades que resultaban de la observación de diferentes tipos de fenómenos –relaciones que generalmente eran consignadas en tablas– es fácil ver que el concepto de función estaba presente en los escritos antiguos. Esta presencia se encuentra en los Elementos de Euclides (en el manejo de razones y proporciones); en Arquímedes cuando trabaja con la curva que lleva su nombre: la espiral de Arquímedes; en el tratamiento de las cónicas de Apolonio (262 aC.- 190 aC.), llamado "El Gran Geómetra", para las que calcula sus tangentes y encuentra (geométricamente) sus ecuaciones usando una especie de coordenadas generalizadas, con las cuales se permite establecer relaciones entre las "*ordenadas*" asociadas a los puntos. Similarmente se el concepto de función se encuentra en el *Almagesto* de Ptolomeo (85 dC- 165 dc) donde se conservan los trabajos del astrónomo griego, y respecto al cual Olaf Pedersen (1974) afirma que:

> *But if we conceive a function, not as a formula, but as a more general relation associating the elements of one set of numbers with the elements of another set, it is obvious that the functions in that sense abound throughout the Almagest.(Pedersen, 1974)*

Se concluye que, si bien la noción de función está implícita en los escritos de los antiguos, ellos no se plantearon la necesidad de hacerla explícita porque para los asuntos prácticos y teóricos, de los que ellos se ocupaban, encontraron los caminos que les proporcionaron las explicaciones que, en su momento, fueron suficientes.

Se infiere que, bajo la perspectiva de Sfard, en esta época se disponía de una concepción operacional de la noción de función, pues vivía en el acto. (cf. Sfard, acerca de las características de una concepción procedimental de un concepto). Más aún la noción de variable estaba representada en las tablas mismas en los diferentes valores que allí se consignaban y en los uso que de ellos se hacía, pero no se tenía conciencia de la noción de variable como tal, la cual solo hasta Euler se definiría en términos de "cantidad indeterminada...que comprende todos los valores determinados". Tales valores son números tanto positivos como negativos, racionales e irracionales. La noción de variable, es, a nuestro modo de ver, determinante en el cambio de estatuto del concepto de función.

2. ESTATUTO PARAMATEMÁTICO:

Este estatuto comprende el período que va desde la creación de las primeras universidades en el siglo X –Oxford, Bolonia, Paris, hasta Johann Bernoulli (1710,1790).

Se tienen las primeras evidencias del concepto, es reconocido como herramienta en la resolución de problemas, pero no se toma como objeto de estudio. Por ejemplo, Descartes amplía el dominio de las curvas y las acepta también como aquellas que se pueden escribir mediante una ecuación. Es indudable que la representación mediante signos de las cantidades variables y de las operaciones, facilitó un cambio ontológico en el álgebra, que pasó de ser un campo de la matemática referido a los procesos para encontrar incógnitas, a ser, en una nueva visión, el estudio de las relaciones entre cantidades que cambian, y sus operaciones:

> [...]El uso por parte de Descartes de las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes, y de las últimas para las incógnitas o variables, adoptando para ellas la notación exponencial, y la utilización de los símbolos germánicos + y –hacen,

> combinados todos estos elementos, que la notación algebraica de Descartes se parezca tanto a la nuestra, debido obviamente a que ésta se deriva de aquella (Boyer, 2001, p. 437)

Es indudable que el uso de los símbolos permitió realizar abstracciones que se expresaron en generalizaciones y en la aceptación de un conjunto inagotable de curvas lo cual era impensable en el tiempo de los griegos antiguos ya que ellos aceptaban como curvas solo aquellas que podían ser construidas con regla y compás.

> "Al argumentar que una curva es cualquier lugar geométrico que tiene una ecuación algebraica, Descartes abrió de un solo golpe el dominio matemático"(Kline, 1992, p. 425)

El desarrollo del álgebra simbólica propuesto por Descartes y desarrollado por Francis Vieta (1540-1603) servirá para que la noción de función sea, posteriormente, objeto de estudio. Se observa cómo el concepto de variable adquiere relevante importancia en el proceso de construcción del concepto de función. Con respecto a la noción de variable, Pierre Fermat (1601-1665), que define lugar geométrico como relación entre dos variables, afirma que

> Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva (Boyer, C. *Historia de las matemáticas. Cap. XVII: la época de Fermat y Descartes.Pp. 437. ciencia y tecnología. Alianza editorial, 2001)*

Continuando con la noción de variable como fundamental en la consolidación de la noción de función, Isaac Newton (1642-1727) introduce los conceptos de fluente (cantidad variable en un movimiento continuo) y fluxión (la velocidad de los fluentes) al abordar dos problemas: el primero, encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo, el recíproco del primero. De hecho el concepto de función, si bien no está plenamente definido, está presente en el desarrollo de este trabajo de Newton que dará lugar al TFC

De igual manera, Gottfried Leibniz (1646,1716), trabajaba implícitamente con el concepto de función, al descubrir en sus trabajos la relación inversa entre el problema del trazado de tangentes y el problema del cálculo de cuadraturas (áreas bajo curvas), obteniendo al igual que Newton, pero por métodos diferentes, el TFC.

Se puede inferir que la noción de función continúa en un estado operacional en los trabajos de Newton y Leibniz.

En el proceso de definición de lo que significa la palabra función hoy en día, en la historia se hace alusión a la palabra misma, aunque en un sentido no estrictamente matemático. Por ejemplo, Leibniz escribió en el año de 1673:

> "...other kinds of lines which, in a given figure, perform some function." (J. J. O´Connor y E. F. Robertson)

Johann Bernoulli, en una carta enviada a Leibniz, le da un matiz diferente a la palabra función:

> "...a quantity somehow from indeterminate and constant quantities." (J. J. O´Connor y E. F. Robertson)

Se observa que la noción de función se empieza a convertir en objeto de estudio y se hace necesaria una definición formal de ella. Podría decirse que se está dando inicio al estatuto matemático del concepto.

Recurriendo a Sfard, en relación con la concepción del concepto de función, podríamos decir que en este estatuto del desarrollo del concepto, la concepción que prima sobre el concepto de función es operacional. (Compárese con Sfard, acerca de las características de una concepción procedimental de un concepto).Podría adicionalmente afirmarse que Newton y Leibniz construyeron el cálculo sin una conceptualización explícita del concepto de función.

3. ESTATUTO MATEMÁTICO:

En esta etapa hay una toma de conciencia de la necesidad de presentar una definición formal del concepto, con el fin de articularlo con los conceptos que en su formulación requieren de una definición de éste.

Mostraremos ahora una serie de aproximaciones a la definición del concepto de función, en donde nuevamente, se observa la importancia de los conceptos de variable y constante, hasta llegar a las definiciones de Dirichlet, Goursat y Suppe, como predecesoras directas de la definición que tradicionalmente se presenta a los estudiantes en los cursos regulares de matemáticas en secundaria y en la universidad hoy en día.

Johann Bernoulli (1710,1790):

> 'Una función de una cantidad variable es una cantidad compuesta de manera arbitraria de esta variable y cantidades constantes. (1718; citado en Juszkiewicz,1976, p.160).

Se observa la importancia del concepto de variable en esta definición

Leonard Euler (1701-1783):

> 'Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números o cantidades constantes. Así cualquier expresión analítica para la cual, junto a la variable z, contiene también las cantidades constantes es una función de z. Por ejemplo: a+3z; az-4zz; az+b/aa-zz; cz, etc. son funciones de z.' (mi traducción de: Introductio à l' Analyse Infinitésimle, traduite du latin au français par J.B.Labey, 1797, París).

En esta definición quedan por fuera las funciones constantes y sólo reconoce como funciones aquellas que se pueden escribir mediante una sola fórmula, es decir, no existen las funciones a trozos

Joseph Louis Lagrange (1736-1813):

> 'Uno llama función de una o varias cantidades a toda expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de una manera arbitraria, mezcladas o no con otras cantidades que uno mira como siendo los valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así en la función uno no considera más que las cantidades que uno supone variables sin considerar las constantes que pueden y están mezcladas'. (Tehorie des fontions anlytiques contenan des principes du calcul Différentiel... A París, D l' Imprimiere de la Replubliqu, Prairial au V, Première Partie, p.1).

Esta definición mejora la definición dada por Euler. Aquí ya son reconocidas como funciones las funciones constantes

Josepth Fourier (1768-1830)[2]:

> 'En general la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas en donde cada una de ellas es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, existe un número igual de ordenadas $f(x)$. Y todas ellas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas están sujetas a una ley común a todas ellas, se suceden unas a otras de una manera arbitraria y cada una viene dada como si fuera una cantidad aislada'. (Art. 417) (Citado por Farfán, 1997, p.102)

En esta definición, el espectro de las funciones se amplía al admitir la construcción de funciones a trozos.

En su libro *Curso de análisis* se observan dos comentarios con respecto a la definición del concepto de función

Augustin Cauchy (1789-1857):

> 'Uno llama funciones de una o varias cantidades variables de las cantidades que se presentan, en el cálculo, como resultados de operaciones hechas sobre una o varias cantidades constantes o variables'.
>
> 'Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre si que, dado el valor de una de ellas, es posible calcular el valor de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable la llamamos funciones de esta variable'
>
> (cours d'Analyse de l'Ecole Polythnique, lère Partie, Analyse Algébrique, D l' Imprimiere Royale, 1821).

Se puede percibir el carácter algebraico que se le imprime a estas definiciones hasta ahora relacionadas; carácter que estaría dando lugar a una concepción operacional del concepto.

Peter G. L. Dirichlet (1805-1859)

> 'Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es función de la variable x. (Boyer, 1968, p.600)

En esta última definición, se amplía el espectro de las funciones. Se da lugar, por ejemplo, a funciones continuas pero no diferenciables en casi todas partes, funciones que no pueden ser concebidas como el resultado de un dibujo a mano alzada. Si bien es cierto que sigue primando la presencia de una fórmula en la definición de una función, para concebir funciones bajo esta definición, nos atrevemos a decir que podría estar abriéndose paso la necesidad de estar en posesión de una concepción más que operacional del concepto de función: una concepción como objeto.

Veamos algunas definiciones modernas del concepto:

---

[2] Ayudante de Lagrange y Laplace en los primeros años de la *École Polytechnique*. La obra en que aparece la definición de función es la titulada *Thèorié Analytique de la Chaleur* (1822). Su concepto de función es numérico y no simplemente descriptivo o de forma como en Euler. A primera vista la definición se aproxima al punto de vista moderno pero, al estudiar las funciones que él trabajaba vemos que no es así. (Farfan, 1997. p. 102)

Edouard Goursat (1858-1936)

> "Uno dice que y es función de x si para un valor de x corresponde un valor de y. Uno indica esta correspondencia por la ecuación $y = f(x)$

Esta definición es la que usualmente aparece en los textos actuales, sin embargo, se continúa observando la presencia de una ecuación en su definición.

Patrick Suppes (1922)

> Definición. A es una relación $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(x = (y, z))$.
> Escribimos yAz si $(y, z) \in A$.
>
> Definición. f es una función $\Leftrightarrow f$ es una relación y $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfy$ y $xfz \Rightarrow y = z)$

Nótese que en esta última definición la noción de función se presenta en términos de una relación entre elementos, se desprende por completo de un vínculo algebraico entre las variables que la constituyen. Esta definición es, tal vez, la que más se ajusta a la terna que considera Sierpinska conforma una función: Un conjunto A, un conjunto B y una relación especial entre los elementos de estos dos conjuntos.

4. CAUCHY Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Las definiciones de Cauchy de límite, derivada e integral, al igual que los procesos de demostración, son consideradas de gran importancia, pues él las presenta de tal forma que pueden verse aisladas de consideraciones geométricas. Por ejemplo, en la definición de derivada de Cauchy, la operación derivación se aplica sobre una función, obteniéndose de nuevo una función. De esta forma, a pesar de que Newton y Leibniz aplicaban el concepto de derivación, éstos lo hacían sobre valores particulares o algunas cantidades variables; Cauchy aplicaba el concepto de derivada a un dominio de funciones.

Si bien nuestra intención no es hacer un estudio epistemológico formal del TFC, consideramos pertinente comentar que en los trabajos de Newton y Leibniz el concepto de función estaba en un estado paramatemático; es bien cierto que en sus escritos se observan dependencias funcionales, pero estos encierran una definición implícita del concepto de función.

Para efectos de nuestra investigación, es la primera presentación y demostración rigurosa del teorema realizada por Cauchy la que nos llama la atención, puesto que, consideramos, el concepto de función es tratado como objeto. Además, el estilo de la presentación del teorema está enmarcado dentro del formalismo y rigor propios de los cursos de cálculo que impartimos a nuestros estudiantes.

Veamos los detalles de la demostración del TFC en la vigésima sexta lección de su libro *"Curso de análisis"*:

En principio, define una nueva función en términos de una integral definida:

> "Si en la integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ se hace variar uno de los dos límites; por ejemplo la cantidad X, la integral variará junto con esa cantidad. Si se sustituye el límite de la

variable X por x, se obtendrá como resultado una nueva función de x que será llamada una integral tomada a partir del *origen* $x = x_o$. Sea

(1) $$\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

esta nueva función…" (Cauchy, 1994)

En la continuación de la demostración utiliza los siguientes resultados obtenidos por él en lecciones anteriores: el teorema del valor medio, la propiedad de aditividad de la integral, y los conceptos de función finita (interprétese como acotada) y límite.

"…Se obtendrá de la fórmula (19) (lección 22)

(2) $\mathcal{F}(x) = (x - x_0)\, f[x_0 + \theta(x - x_0)\,]$, $\mathcal{F}(x_0) = 0$,

donde θ es un número menor que la unidad, y de la fórmula (7) (lección 23)

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta\,\alpha),$$

o bien

(3) $\mathcal{F}(x + \alpha) - F(x) = \alpha f(x + \theta\,\alpha)$, (3)" (Cauchy, 1994)

Nótese que la integral $\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx$ corresponde a la evaluación de la función $\mathcal{F}(x)$ en $x + \alpha$

Cauchy continúa en su demostración…

"Se sigue de las ecuaciones (2) y (3) que si la función $f(x)$ es finita y continua en la vecindad de un valor particular atribuido a la variable x, la nueva función $\mathcal{F}(x)$ será finita y además continua en la vecindad de este valor, ya que un incremento infinitamente pequeño de x corresponderá un incremento infinitamente pequeño de $\mathcal{F}(x)$. Así, si la función f(x) es finita y continua desde $x = x_0$ hasta $x = X$, lo mismo será valido para la función $\mathcal{F}$ (x). Podemos añadir que si se dividen entre α los dos miembros de la fórmula (3) se concluirá, al pasar al límite

(4) $\mathcal{F}'(x) = f(x)$." (Cauchy, 1994)

Nótese que Cauchy no hace ningún comentario especial al finalizar su demostración; al parecer era ya un resultado esperado, lo único que seguramente quería mostrar era el rigor y la formalidad que se le podía imprimir al TFC.

Es de observar también cómo el concepto de función aparece en Cauchy, a nuestro modo de ver, en una forma estructural, al construir la función $\mathcal{F}(x)$ en términos de una integral en la cual su límite superior de integración es tomado como la variable independiente, (cf. Sfard… Es posible relacionar el concepto con otros y definir nuevos conceptos a partir del concepto en cuestión.)

4.1 El teorema fundamental del cálculo en el texto guía.

Nótese la similitud en la presentación del Teorema en el libro de Cauchy y la forma en que se presenta en el texto "Cálculo con Geometría analítica" de Edwards y Penney (cuarta edición, 1996), el cual sirve de texto guía para los cursos de cálculo en la universidad en la cual realizamos este trabajo de investigación.

En la página 300 del texto se enuncia el teorema de la siguiente forma:

"Supongamos que la función *f* es continua en el intervalo cerrado [a, b].

- **Parte 1.** Si la función *F* está definida en [a,b] como

  F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$, entonces F es una primitiva de *f*. Es decir,
  $F'(x) = f(x)$ para x en (a, b).

- **Parte 2.** Si *G* es cualquier primitiva de *f* en [a, b], entonces

  $\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$."

Los conceptos claves que aparecen en el teorema y que deben activar diferentes esquemas en el estudiante son: Función, Función continua, Intervalo, Primitiva de una función, Derivada de una función, Integral de una función y Diferentes registros para una función.

En relación con la primera parte del teorema, ya hemos señalado el aspecto relativo a la comprensión de la función *F*. Otro aspecto a tener en cuenta es el siguiente:

Si se cumplen las hipótesis mencionadas, se concluye que existe *F '*(x) en cada punto *x* del intervalo (a, b) en el que *f* es continua, y para tal *x* se tiene $F'(x) = f(x)$. En esta parte se hace necesario comprender el sentido del intervalo abierto al referirnos a la derivada de la función F. Otro análisis a realizar se presenta en la demostración del teorema:

En la primera parte, los autores, utilizando la definición de derivada, propiedades de la integral y el teorema del valor promedio para integrales, concluyen que para *f* continua en [a, b], existe la función *F '*(x) y es igual a *f* (x).

El *esquema director* de la acción es el de "Derivada de una función". Este esquema desde el punto de vista de la *definición formal del concepto* conduce a expresar la derivada de la función *F* así:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

El objetivo de la acción es probar la igualdad $F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

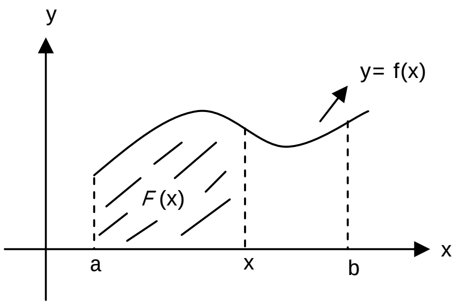
Una acción exitosa implica dar un significado a la expresión $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ sobre la cual actúa el operador "límite".

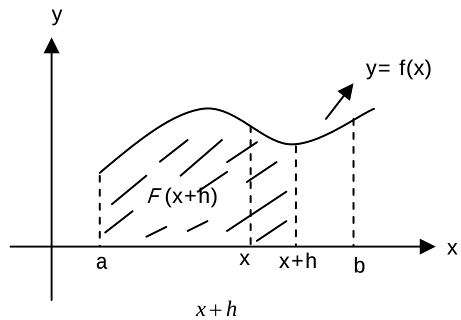
4.2 Dos conjeturas

- Sin la concepción de los conceptos de función y límite en *su forma estructural, no es* posible identificar la ley de formación de la función *F* y la variable sobre la que actúa la función *F*.
- La comprensión de la función *F ´* no es posible alcanzarla en su totalidad vía "*procesos*" sobre la función *F*. Se requiere mirar el cociente como un todo y en relación con su contexto (en este caso el operador límite), para determinar la función *f* y el valor *x* sobre los cuales actúa el operador *lím* (*F, h*).

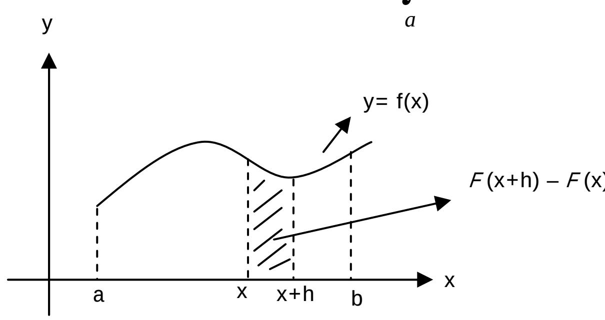
Una vez está definida *F*, es necesario dar significado a la función en términos del resultado que se pretende demostrar.

Cambiando del registro algebraico del cociente $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ a un registro geométrico, consideramos, es posible encontrar las ideas que permitan al menos una visualización diferente del teorema y dar una mejor interpretación a su demostración. Veamos:





$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad\qquad F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$$



$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Dado que f es continua en el intervalo [x, $x+h$], el teorema del valor promedio para integrales (pag. 299), afirma que existe un número u en el intervalo [x, $x+h$] tal que

$$f(u) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \qquad (2)$$

Nótese que por (1) y (2) $\quad \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\text{u})$.

Dado que $x < u < x+h$, si $h \to 0$ entonces $(x+h) \to x$, y por tanto $u \to x$ (ver Fig. 3), se tiene que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$$

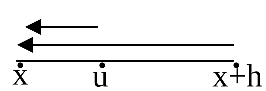


Fig. 3

y el teorema queda demostrado.

Cabe anotar que $\lim_{u\to x} f(u) = f(x)$ puesto que *f* es una función continúa.

Analicemos ahora la segunda parte del teorema:

Parte 2. "Si *G* es cualquier primitiva de *f* en [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a).\text{"}$$

Una acción exitosa en la comprensión del teorema y su demostración requiere conocer tres elementos:

- El concepto de primitiva de una función, es decir, F es una primitiva de f si F ´= *f*
- Visualizar el papel de la primitiva en el objetivo señalado.
- Dos primitivas de una misma función difieren en una constante.

La combinación de estos tres elementos deberá conducir a la activación del esquema asociado a la primera parte del TFC para aplicarlo a la función *f, e*n otras palabras, dado que por la primera parte del teorema, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{es una primitiva de } f \text{ (pues } F\,'(x) = f(x))$$

Si G(*x*) es otra primitiva de *f*, entonces por 3. *F* y G difieren en una constante (corolario 2 pag. 203), es decir, *F*(x) – G(*x*) = C

El valor de esta constante es posible calcularlo evaluando F(x) – G(x) = C en x = a. De esta forma, se tendrá que F(a) – G(a) = C. Pero dado que

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$ (Sugerido en el texto en la pág. 290), se obtiene que C = - G(a).

Regresando a la ecuación F(x) – G(x) = C y evaluándola en x = b se obtendrá que

F(b) – G(b) = C = -G(a) , de donde, F(b) = G(b) -G(a), es decir,

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Nótese que *F*(b) representa la evaluación de la función F(x) $= \int_a^x f(t)dt$ en *x* = b, procedimiento que no siempre es bien interpretado por los estudiantes, pues consideramos, para ello se requiere de una concepción estructural de la función F para la correcta comprensión del significado de F(b).

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

- Se encuentra que en el proceso de consolidación de la noción de función como concepto matemático, la noción de variable es preponderante; es constitutiva fundamental en el establecimiento del estatuto matemático del concepto.
- Desde los inicios de la definición del concepto de función, hasta llegar a la definición en Suppes, se percibe un tratamiento operacional del concepto. Tratamiento que dará lugar al nacimiento de dos reconocidos obstáculos epistemológicos:
  a) Sólo se tiene una función si existe una fórmula o expresión algebraica que relacione las variables que la definen.
  b) Se tiene una función en las variables *x*, *y* si *y* está despejado en términos de *x*.
- Cauchy deja como precedente en la historia del cálculo que la relación inversa entre la derivación y la integración es un resultado que puede y debe ser probado, como lo es hasta nuestros días.
- En lo que concierne a nuestra investigación, se ha dejado en claro que en la demostración hecha por Cauchy, la noción de función es concebida en su forma estructural, y está concepción será, si bien no suficiente, una condición necesaria para quien quiera acceder a la comprensión del TFC. De hecho, el tratamiento similar del teorema que el texto guía en la universidad hace del TFC hace presumir de igual forma, la necesidad de una concepción estructural del concepto de función, en el proceso de "enseñanza" del TFC

Con respecto al texto guía de los estudiantes, podemos hacer las siguientes observaciones:

Los objetivos fundamentales planteados por los autores los enuncian en los siguientes términos: *Concretez, legibilidad, motivación, aplicabilidad y precisión.*

Estos objetivos giran en torno al desarrollo de la habilidad para realizar cálculos, sin considerar –como los autores mismos reconocen– el aspecto conceptual de los temas.

Los temas se presentan acabados, sin aproximarse a su génesis, ni a pautas epistemológicas del desarrollo de los mismos, tal como lo hemos mencionado en el desarrollo histórico de los conceptos de función y del TFC

Previo al enunciado del teorema, los autores intentan presentar una visualización de la primera parte del mismo a partir de la definición de la <u>función área de una función *f*</u> en un intervalo I, en los siguientes términos:

> "Intuitivamente, en el caso f(x) > 0, denotamos con F(x) el área bajo la gráfica de f de un punto fijo a de I a x, un punto de I tal que x >a. Demostraremos que F´(x) = f(x).....
> Más precisamente, definimos la función F como sigue:
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ ,"}$$

Se observa que los autores del texto presumen que para el estudiante es natural aceptar que la expresión

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{representa una función.}$$

Debe notarse que en el enunciado del teorema se presentan dos funciones:

- La función *f* en la variable *t* con dominio [a, x] para x en el intervalo [a, b].
- La función *F* en la variable x, con dominio en [a, b].

Para el estudiante, la *discriminación* de estas dos funciones es esencial para comprender que le dice el teorema.

En resumen, la posición didáctica se enmarca dentro de los textos modernos de cálculo, que propenden por una visión "práctica" de los conceptos.

6. CONCLUSIONES

Nuestra hipótesis es que la presunción que comentamos inicialmente no es cierta si la concepción del concepto de función es meramente procedimental; en la medida en que la concepción de función por parte del estudiante sea estructural, es decir, como objeto, tal presunción será cierta.

El texto guía por si mismo presupone la comprensión del concepto de función como objeto, en su presentación y demostración del teorema Fundamental del cálculo.

En su demostración, el texto no hace el uso del cambio del registro algebraico al geométrico, una herramienta que podría servir de ayuda para la visualización del teorema y su demostración, y posiblemente, a la concepción de la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{como objeto.}$$

El enfoque del texto en relación con el aprendizaje y comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, se caracteriza por la presunción que mediante la comprensión gradual de las partes que conforman el teorema, se logra llegar a una comprensión total del mismo. Una de estas partes es el concepto de función, más precisamente, en el texto se espera que la comprensión de la definición de la <u>función área de una función f</u> en un intervalo I, sea de fácil acceso por parte de los estudiantes, algo que -precisamente queremos verificar en nuestro estudio- se convierte en un serio obstáculo en la comprensión estructural del teorema.

De acuerdo con los puntos anteriores, es necesario indagar acerca de las concepciones del estudiante con respecto al concepto de función y cómo influyen estas en la construcción del esquema asociado al Teorema Fundamental del Cálculo.

Finalmente, queremos repetir que la posición didáctica del texto tiene la clara intención de presentar una visión “práctica” de los conceptos. Posición que, a nuestra forma de ver, va en detrimento de la comprensión estructural de los conceptos, lo que redunda en la imposibilidad de responder exitosamente en situaciones en las que se requiere una concepción como objeto de tales conceptos.

CAPÍTULO 3

PROBLEMA Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 3

PROBLEMA Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

1. ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

Las situaciones de enseñanza y aprendizaje del cálculo no han variado significativamente en las últimas décadas. Se ha hecho una que otra modificación del currículo, pero nada que aporte al mejoramiento del aprendizaje. De hecho, los índices de fracaso estudiantil en estos cursos se ha mantenido en rangos bastante altos: 50 a 60 por ciento generalmente y en algunos momentos ha ascendido al 80 por ciento. Este fenómeno no es exclusivo de un país. Es un problema de carácter mundial, sin embargo, esta situación de fracaso siempre nos ha preocupado; no somos ajenos al drama de muchos estudiantes que son retirados de sus universidades debido a sus reiteradas pérdidas en los cursos de cálculo, a pesar de observar en ellos actitudes y aptitudes suficientes que les permitirían salir adelante en sus estudios. Es nuestra intención, dar aportes que se conviertan en posibles vías de solución a tan grave situación.

1.1 Planteamiento del problema

Una característica de las recientes investigaciones en Educación Matemática ha sido su orientación hacia la dilucidación de los *procesos mentales* que permiten *concebir y pensar* la matemática. En particular, una buena parte de los estudios acerca de pensamiento matemático se han focalizado en la pregunta: ¿Cómo comprenden los seres humanos las nociones matemáticas? Esta pregunta centra la indagación en torno al concepto psicológico de la "*comprensión*" y marca el terreno en el cual se desarrolla nuestra investigación que gira entorno al papel del concepto de función en la comprensión del teorema fundamental del cálculo (TFC).

Según nuestro análisis epistemológico, los fundadores del cálculo Newton y Lebniz, plantearon los conceptos de derivada e integral sin tener una formulación explícita de función. Pero, lo anterior no significa que la noción no existiera de alguna manera, en la cabeza de los matemáticos de la época, como un "objeto" sobre el cual se operaba para obtener las fluxiones y las cuadraturas y encontrar la relación entre estos dos "procesos". Éste y otro hechos respecto a la génesis histórica del objeto función matemática y su relación con el TFC, que ya hemos planteado en el estudio del capítulo anterior, unidos a los planteamientos de Sfard y Tall y nuestras propias investigaciones (Grupo EM, 2001) sobre la comprensión del concepto de función, nos dejan interrogantes respecto al estado de comprensión de éste concepto y su funcionamiento en el establecimiento del TFC. Los resultados de la investigación realizada por el Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle indica que:

> *[...] la inmensa mayoría de los estudiantes que ingresan a la Universidad del Valle a las carreras de ciencias e ingeniería, [...] prácticamente desconocen el tema de funciones. Es muy reducido el porcentaje de estudiantes que [...] pueden exhibir una comprensión básica razonable de función para adentrarse en los cursos de cálculo y álgebra lineal. Este porcentaje es prácticamente nulo en los grupos de ciencias y solo alcanza un porcentaje del orden del 17.1% entre los grupos de ingeniería que atraen los estudiantes con mejor formación matemática*. (Grupo EM, 20001, p. 47).

Conociendo el nivel de fracaso en el curso de Cálculo I, cercano al 70% de la población, la pregunta es ¿cómo se las arreglan los alumnos para comprender los conceptos fundamentales del cálculo? ¿Podemos encontrar respuestas con el estado de desarrollo de la teoría didáctica sobre el tema?

Como ya lo hemos planteado en el marco teórico, Anna Sfard (1991) ve la comprensión como un proceso relacionado con la abstracción reflexiva (Piaget, 1990), en el que se identifica una dualidad en la concepción –como proceso u objeto– de las *entidades matemáticas*. Desde una perspectiva diferente, David Tall (1994b, 2002) ve la comprensión en términos del funcionamiento de sistemas de representación, que se inspiran en las ideas de Jerome Bruner. En tal funcionamiento, el pensamiento matemático avanzado involucra ciertos procesos que entorno a la representación simbólica (verbal, proceptual y lógica) definen el carácter de la *«entidad conceptual»* y su funcionamiento en la comprensión de la teoría matemática. Esta explicación de Tall, para nosotros, está íntimamente ligada a las ideas de Piaget respecto al funcionamiento dual de los esquemas conceptuales (cf. Capítulo 1, sec. 1.5). Lo anterior es para observar que no hay una posición unificada respecto a los aspectos que influyen en la construcción de las *entidades conceptuales* y es por esta razón que este será uno de los aspectos que consideramos en el planteamiento de nuestro problema. Estos marcos teóricos permiten visualizar que existen problemas en la enseñanza de las matemáticas escolares cuando no se toma en consideración las formas de concebir los objetos matemáticos, ni las consecuencias de no hacerlo. Por ejemplo, ¿cuál es el efecto que se produce en un estudiante, cuando éste no alcanza el nivel estructural del concepto de función?

Las anteriores consideraciones nos permiten plantear el problema con la intención de encontrar respuestas a los siguientes interrogantes:

a) ¿Cuál es el estado de comprensión del concepto de función, como proceso o como objeto en los estudiantes, antes de tomar un curso de cálculo I?

b) ¿Cuál es la disponibilidad de un sistema de representación abstracto del concepto de función?

c) ¿Cuál es la incidencia del estado de comprensión del concepto de función-proceso, objeto- en el aprendizaje y comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo?

d) ¿la comprensión del concepto de función es secuencial, es decir, primero como proceso y luego como objeto, como sostiene Sfard?, o, ¿la comprensión se logra mediante la alternancia de concepciones operacionales y estructurales, como lo sostiene Tall?

2. OBJETIVOS

Una vez identificado el problema de investigación, los objetivos que se persiguen se podrían resumir así:

2.1 Objetivos Generales

2.1.1 Profundizar en el conocimiento de nuestra realidad educativa, en especial, en lo relativo a los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes en temas fundamentales de los cursos de cálculo.

2.1.2 Mediante la recolección de datos empíricos y el aporte de elementos teóricos, ayudar a comprender y explicar los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos en la matemática avanzada.

2.2 Objetivos Específicos

2.2.1 Analizar la eficacia de las situaciones planteadas en los instrumentos respecto a la identificación de los esquemas conceptuales del alumno, con relación a las nociones matemáticas de función y el Teorema Fundamental del Cálculo.

2.2.2 Identificar los obstáculos cognitivos y dificultades conceptuales en el estudiante respecto a los conceptos de función y el Teorema Fundamental del Cálculo, a través de situaciones problemáticas planteadas en los instrumentos y que, posiblemente, susciten problemas de asimilación o acomodación a sus esquemas conceptuales, con o sin conflicto cognitivo, respecto a las situaciones.

2.2.3 Mostrar el nivel de comprensión del concepto de función en los estudiantes que ingresan a los cursos de cálculo de la universidad y como incide en el aprendizaje de un tema específico del cálculo: el Teorema Fundamental del Cálculo.

3 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Durante el desarrollo de esta investigación esperamos verificar o refutar las siguientes hipótesis de investigación:

- Existen estudiantes en los cuales la comprensión del concepto función se encuentra solo en el estado procedimental (como proceso), es decir, la concepción estructural (como objeto), o no se tiene, ó, se encuentra en un estado primario.

- La concepción estructural del concepto de función en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo se hace necesaria.

Nuestra intención es reunir evidencia empírica que apoye las hipótesis que se han planteado y que permita confirmar, ampliar, sintetizar y generalizar las diferentes perspectivas teóricas que se perfilan sobre la concepción de los objetos matemáticos.

Esta investigación se aspira a que se convierta en un producto que contribuya a dar a aquellos que desarrollan el currículo, la posibilidad de encontrar estrategias que contribuyan a una mejor enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fundamentales y del cálculo.

4. METODOLOGÍA

La metodología diseñada consta de dos partes. La primera de ellas**,** examina la concepción del concepto de función, la cual se comprueba mediante el análisis de resultados de tipo cualitativo, consignados en una serie de tablas que muestran el desempeño de 14 estudiantes en diferentes situaciones que conformaron los instrumentos de la investigación. La segunda parte analiza dos casos particulares, ambos estudiados desde el punto de vista cognitivo. Estos dos casos se escogieron de acuerdo a los datos obtenidos en las tablas, en los cuales el estado de concepción del concepto de función se encontró notablemente diferenciado en cada uno de ellos. Se muestran, los mecanismos cognitivos utilizados por un estudiante cuando desarrolla una situación-problema particular, mediante inferencias plausibles acerca de los esquemas cognitivos activados que dirigen sus acciones, como se explicará más adelante.

4.1 Primera Parte: La Concepción del Concepto de Función (Instrumento N°1)

En el diseño del instrumento se tendrán en cuenta dos tipos de indicadores: los que tienen la intención de examinar las concepciones como proceso y los que tienen la intención de examinar las concepciones como objeto, del concepto de función basándonos en las características propias de una concepción como proceso y como objeto consignadas en el capítulo uno, pp. 16**.**

4.1.1 Definición de indicadores

Para definir los indicadores que permitieran observar los estados de concepción, se seleccionó un conjunto básico de contextos, relevantes en el manejo matemático del concepto, en los que se formularon los diferentes problemas de identificación y cálculo con funciones.

4.1.2 Contextos

Seleccionamos los siguientes contextos por su utilización en diferentes situaciones matemáticas:

Contexto Sagital. Se refiere a los diagramas sagitales utilizados frecuentemente en la enseñanza para representar funciones, muy especialmente para ilustrar la definición cuasi conjuntista[3] de función.

Contexto de conjuntos de Parejas ordenadas. Se refiere a los conjuntos de pares ordenados definidos por comprensión (PC), que se utilizan para representar funciones en lenguaje estrictamente conjuntista.

Contexto de Expresiones algebraicas variables. Son aquellas expresiones simbólicas que relacionan constantes y variables, y que se utilizan regularmente en los cursos de cálculo para definir funciones en forma simple o compuesta.

Contexto Gráfico. Se refiere a gráficas cartesianas de funciones numéricas.

Contexto de Ecuaciones. Se refiere fundamentalmente a ecuaciones en dos variables reales que pueden ser utilizadas para definir funciones numéricas.

Contexto Simbólico Abstracto. Se refiere al conjunto de símbolos y expresiones simbólicas (f, $f(f(x))$, $f \circ g$ etc.), usualmente asociadas con la definición matemática de función y que se utilizan para referirse en forma general a una función o para indicar operaciones entre funciones.

4.1.3 ¿Por qué la utilización del Sistema Simbólico Abstracto?

Como se dice en su definición, este sistema aparece cuando se introduce la definición matemática de función. En la medida que el sujeto puede interpretar el significado de símbolos tales como $f(a)$, $f(f(a))$, $b=f(x)$, en cualquier contexto, diremos que el sujeto dispone del sistema simbólico abstracto. Este punto está íntimamente relacionado con el conjunto de formas de lenguaje y no lenguaje que constituye el soporte de los procesos de conversión entre las representaciones mentales del sujeto y las representaciones semióticas con las cuales se comunica con otros sujetos; aspecto fundamental para el aprendizaje del estudiante, que en la enseñanza tradicional se suele dejar de lado.

4.1.4 Lo que se quiere observar

En los contextos seleccionados, estuvimos interesados en analizar y calificar las acciones de los estudiantes (soluciones escritas), midiendo su nivel de éxito al responder a un cuestionario sobre funciones. Estos niveles se calificaron y se registraron en tablas. La calificación de la acción se hace considerando el éxito o fracaso del estudiante en relación con el objetivo de la tarea respectiva. No relativa a la toma de conciencia de los medios para alcanzar el objetivo, sino, de alguna manera, referida a la eficiencia del esquema que

[3] Una función de un conjunto X en un conjunto Y es una asociación o correspondencia entre elementos de X y elementos de Y, de tal manera que a cada elemento de X corresponde un y solo un elemento de Y

se puso en juego para identificar una función o una función con inversa, realizar un cálculo, etc. Los indicadores se discriminaron de la siguiente forma:

- El *nivel* de *éxito* del estudiante al identificar *funciones*, en los diferentes contextos seleccionados, (**NEF**). En la **tabla No. 1** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con el literal a) de las situaciones 1), 2) y 3) La calificación en cada contexto es cero (0) si su respuesta es errada y uno (1) si es correcta. **NEF** se obtiene promediando las calificaciones obtenidas en cada contexto del primer instrumento.
- El *nivel* de *éxito* del estudiante al seleccionar *funciones* que posean *inversa*, en diferentes contextos, (**NEI**). En la **tabla No. 2** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con el literal d) de las situaciones 1), 2) y 3). La calificación en cada contexto es cero (0) si su respuesta es errada y uno (1) si es correcta. **NEI** se obtiene promediando las calificaciones obtenidas en cada contexto.
- El *nivel de éxito* del estudiante al calcular la composición de una función y su inversa, en diferentes contextos, (**NECCI**). En la **tabla No. 3** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con el literal e) de las situaciones 1), 2) y 3). La calificación en cada contexto es cero (0) si su respuesta es errada y (1) si es correcta. **NECCI** se obtiene promediando las calificaciones obtenidas en cada contexto.
- El *nivel* de *éxito* en la verificación de *igualdad* de *imágenes* de funciones en diferentes contextos, (**NEIIM**). En la **tabla No.4** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la sexta situación. La calificación en cada contexto va de cero (0) si su respuesta es errada hasta uno (1) si es correcta. **NEIIM** se obtiene promediando las calificaciones obtenidas en cada contexto.
- El *nivel de éxito* que tiene el estudiante para realizar *cálculos básicos* en los diferentes contextos, cuando se utiliza el simbolismo abstracto de funciones: $f(x)$, $f(f(x))$, d = $f(x)$. La calificación en cada contexto es cero (0) si su respuesta es errada y uno (1) si es correcta. El promedio de los diferentes tipos de cálculo descritos separadamente, dan origen a indicadores **NECB (1), NECB (2)** y **NECB (3)**, cuyo promedio produce el indicador **DSA** (Disponibilidad de un Sistema Simbólico Abstracto), que apunta a revelar en qué medida el estudiante ha construido en forma general el significado de los símbolos $f(a)$, $f(f(a))$, $f(x) = b$, analizando el nivel de éxito que obtiene al realizar tales cálculos en contextos específicos. En la **tabla No.5** están consignadas las calificaciones de estos indicadores.
- El nivel de éxito en la descripción algebraica de una familia de funciones (**NEFF**). En la **tabla No.6** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la séptima situación. La calificación va de cero (0) si su respuesta es errada hasta uno (1) si es correcta y corresponde al nivel de éxito que tiene en la descripción algebraica de una familia de rectas y otra de parábolas. **NEFF** se obtiene promediando las calificaciones obtenidas.

- El nivel de éxito en las diferentes interpretaciones de la integral $\int_0^x (t^2 + 1)dt$ en diferentes contextos. En la **tabla No.7** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la octava situación. Estas diferentes interpretaciones dan origen a indicadores (**NEIIN**) **(1), (2)** y **(3)**, calificados desde cero (0) hasta uno (1). El promedio produce el indicador (**NEIIN**)
- El nivel de éxito en la representación gráfica de la función área (**NEGFA**). En la **tabla No.8** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la novena situación. La calificación va de cero (0) si su respuesta es errada hasta uno (1) si es correcta.
- El nivel de éxito en la identificación de condiciones de igualdad de funciones (**NEIGF**). En la **tabla No.9** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la quinta situación. La calificación es cero (0) si su respuesta es errada y uno (1) si es correcta.

4.1.5 Indicadores de las concepciones proceso-objeto

Los símbolos **NEF**, **DSA**, **NEIIM** y **NEIIN (1,3)**, definen indicadores que examinarían una concepción operacional (como proceso) del concepto de función, en tanto que los indicadores **NEI**, **NECCI**, **NEIGF**, **NEFF**, **NEII** (**2**) y **NEGFA**, estarían examinando una concepción estructural (como objeto), tomando como guía la propuesta de Sfard, en lo que se refiere a los criterios para definir una situación como procedimental, ó, como estructural. Naturalmente las mediciones de estos indicadores están referidas a los problemas específicos que se le proponen al alumno en el instrumento, en los diferentes contextos que se toman como base. Los indicadores se discriminaron de la siguiente forma:

El indicador **CO**: que mide el nivel de éxito general en las situaciones propias de una concepción operacional. Las calificaciones de este indicador se consignaron en la **tabla No. 10** promediando las calificaciones obtenidas en **NEF**, **DSA**, **NEIIM** y **NEIIN** (**1**,**3**).

El indicador **CE**: que mide el nivel de éxito general en las situaciones propias de una concepción estructural. Las calificaciones de este indicador se consignaron igualmente en la **tabla No. 10**, promediando las calificaciones obtenidas en **NEI**, **NECCI**, **NEIGF**, **NEFF**, **NEIIN (2)** y **NEGFA**.

Consideramos que un estudiante posee una concepción operacional aceptable del concepto de función si $CE \geq 0.67$, y posee una concepción estructural aceptable si $CO \geq 0.67$. Es obvio que si ambas calificaciones son superiores a estos valores, entonces el estudiante estaría en posesión de las dos concepciones, esperando de él que de acuerdo a la situación que enfrente, active los esquemas propios de cada concepción. Se espera que si no posee una concepción estructural ($CE < 0.67$), entonces no tenga una buena comprensión del TFC, pues en las hipótesis de nuestra investigación hemos sostenido que es necesario un estado estructural del concepto de función para la comprensión del TFC. La forma en que discriminaremos la comprensión del TFC la trataremos a continuación.

4.2 El Estado de Comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (Instrumento N°2)

En el diseño del instrumento se tendrán en cuenta situaciones en las que se requería aplicar el TFC de manera directa, es decir, dada una función de la forma $\int_a^x f(t)\,dt$, calcular su derivada, y otras situaciones en la que el TFC se requiere como instrumento en el desarrollo de las mismas. Vale aclarar que inicialmente se indagó acerca del éxito en la aplicación de la regla de la cadena, pues esta se requiere en la aplicación del TFC en integrales de la forma $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$.

4.2.1 Definición de indicadores

Para definir los indicadores que permitieran observar los estados de de comprensión del TFC, se seleccionó un conjunto básico de contextos, relevantes en el manejo matemático del concepto, en los que se formularon los diferentes problemas de aplicación directa del TFC, como aquellos en los que el TFC fue utilizado como parte de la solución.

4.2.2 Lo que se quiere observar

En los contextos seleccionados, estuvimos interesados en analizar y calificar las acciones de los estudiantes (soluciones escritas), midiendo su nivel de éxito al responder a un cuestionario sobre el TFC. Estos niveles se calificaron y se registraron en tablas. Los indicadores se discriminaron de la siguiente forma:

- El nivel de éxito en la aplicación de la regla de la cadena (**NERC**). En la **tabla No. 11** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con las situaciones 1) y 2).La calificación va de cero (0) si su respuesta es errada hasta uno (1) si es correcta. Esta calificación se obtiene promediando las calificaciones obtenidas en cada situación.
- El nivel de éxito que tiene en la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo (**NETFC**) en cada situación. En la **tabla No. 12** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con las situaciones 3) y 4). La calificación en cada situación va de cero (0) si su respuesta es errada hasta uno (1) si es correcta. (**NETFC**) se obtiene promediando las calificaciones obtenidas.
- El nivel de éxito que tiene al discriminar la continuidad del integrando en la solución de una integral definida (**NECID**). En la **tabla No. 13** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la quinta situación. La calificación es cero (0) si su respuesta es errada y uno (1) si es correcta.
- El nivel de éxito que tiene en la solución de una situación problema en la que debe aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo (**NETFCP1**). En la **tabla No. 14** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la situación 6). La calificación en cada situación va de cero (0) si su respuesta es errada hasta uno (1) si es correcta. (**NETFCP1**) se obtiene promediando las calificaciones obtenidas.

- El nivel de éxito que tiene en la solución de una situación problema en la que debe aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo (**NETFCP2**). En la **tabla No. 15** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la situación 7). La calificación en cada situación va de cero (0) si su respuesta es errada hasta uno (1) si es correcta. (**NETFCP2**) se obtiene promediando las calificaciones obtenidas.

  El estado de comprensión del TFC lo quisimos medir con un indicador que recogiera el desempeño de los estudiantes en las situaciones en la que debían activar el esquema asociado al TFC. De esta forma, definimos el indicador número 6.

- El nivel de éxito de los estudiantes en aquellas situaciones en las que se requiere la aplicación del TFC, ya sea en forma directa, o como instrumento para la solución de una situación problema (**NCTFC**). Este indicador, consideramos, nos mostró el estado de comprensión del TFC en los estudiantes. La calificación es cero (0), si su respuesta es errada y uno (1) si es correcta. **NCTFC** corresponde al promedio de las calificaciones obtenidas en las situaciones (**NETFC**), (**NETFCP1**) y (**NETFCP2**). En la **tabla No. 16** están registradas las calificaciones correspondientes a este indicador. Consideramos que un estudiante posee una comprensión aceptable del TFC si **NCTFC** $\geq$ 0.67

Finalmente, en la **tabla No. 17** pusimos en contraste las concepciones operacional (**CE**) y estructural (**CO**) del concepto de función definidos en la primera parte, con el indicador (**NCTFC**) -nivel de éxito la comprensión del TFC- con la intención de comparar el estado de comprensión del concepto de función y su relación con la comprensión el TFC.

4.3. Segunda Parte: Estudio Cognitivo de Dos Casos Particulares

En el análisis de esta parte se distinguen dos eventos: el que corresponde a un *análisis a priori*, que consiste en el análisis del ciclo cognitivo en un sujeto ideal y el que se observa de los datos conformados por las producciones escritas de dos estudiantes: *análisis a posteriori*, el cual nos permitirá, a través de sus respuestas en la solución de las diferentes situaciones, hacer inferencias plausibles en relación con los esquemas que se activan y dirigen sus acciones en procura de los objetivos determinados por las situaciones mismas.

4.3.1 Estructura del análisis:

Para cada situación se detallan los conceptos matemáticos que el sujeto expresa implícita o explícitamente en su producción escrita. Esta estructura da entonces la información respecto a su organización lógica, lo que permite enfocar la atención en los factores operativos del ciclo cognitivo que se activa por la situación particular que el estudiante resuelve o trata de resolver. Es decir, en las habilidades y capacidades, en cada momento del desarrollo de la guía.

Se describe igualmente, para cada situación, (en el análisis *a priori*), una *estructura teórico conceptual* descrita mediante un mapa conceptual, en el cual están consignados los conocimientos necesarios y suficientes que organizan las acciones de un estudiante para alcanzar el objetivo planteado por la situación. Estos conceptos se confrontan con los que el sujeto expresa implícita o explícitamente en su producción escrita.

Estas consideraciones brindan información respecto a la organización lógica del comportamiento del estudiante, frente a cada situación y ayuda a enfocar la atención en los factores operativos del ciclo cognitivo que son activados en relación con la situación.

Para el análisis cognitvo utilizaremos una adaptación del modelo de Piaget que Delgado utiliza en su trabajo de tesis doctoral (1999).

La información de la dimensión del análisis cognitivo se interpreta usando el concepto de *ciclo de interacción*, consignando en cada casilla la información obtenida en términos de los observables y coordinaciones que el investigador atribuye al sujeto a partir de las realizaciones respecto a una situación adidáctica $\mathbf{S_i}$.

1

Obs S	**Coord S**	**Obs O**
Se consigna: una descripción de la acción del sujeto respecto al objeto	Se consigna: las inferencias implícitas o explícitas, que organizan y dan sentido a la acción en términos del objetivo de la tarea.	Se consigna: lo que el sujeto ***cree comprobar*** respecto al objeto

Donde (**1**) representa el proceso de asimilación, (**2**) el de acomodación y la doble flecha (←→) representa la equilibración de los dos procesos. El primero atribuye significados (esquemas conceptuales) a los observables del objeto y el segundo desempeña el papel de significador que permite la evocación de esquemas ya constituidos que serán coordinados, en términos de las inferencias extraídas del significado proporcionado por la asimilación de los observables del objeto y los esquemas evocados. Se trata de un proceso iterativo de la forma

$$\text{Obs O} \to \text{Obs S} \to \text{Coord S} \to \text{Obs O} \to \text{Obs S} \to \text{etc.}$$

que desemboca en la realización final del estudiante

En resumen, en la interacción sujeto medio: se expresa en el *ciclo de interacción cognitivo*:

$$\text{Obs } \mathbf{S}(n) \to \text{Coord } \mathbf{S}(n) \ \leftrightarrow\ \text{Obs } \mathbf{O}(n)$$

A partir de las realizaciones del estudiante (sus decisiones explícitas), podemos reconstruir de manera esquemática un ciclo cognitivo virtual que describe, plausiblemente, la interacción en términos de los esquemas conceptuales necesarios y suficientes para alcanzar el objetivo de la tarea y que el sujeto se obliga a poner en juego. Este ciclo se representa en la forma:

$$\mathcal{A} \text{ x } \mathbf{S} \to \mathcal{B}\mathbf{;}\ \mathcal{B} \text{ x } \mathbf{S^{(1)}} \to \mathcal{C}\mathbf{;...;}\ \mathcal{Z} \text{ x } \mathbf{S^{(n)}} \to \mathcal{A}_r$$

Donde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,..., $\mathcal{Z}$. representan los esquemas conceptuales que están actuando sobre la situación **S** y sus aspectos más particulares $\mathbf{S}^{(1)}$ ....$\mathbf{S}^{(n)}$. Aquí $\mathcal{A}$ es el esquema director de la acción total. Es decir, es un esquema anticipador que vincula el objetivo y el resultado previsto, y ello lleva a coordinar en el ciclo otros esquemas que aparecen como medios necesarios para alcanzar el objetivo.

El esquema director actúa sobre la situación externa **S** asimilando de ella los elementos que son compatibles con su estructura y acomodándose a las condiciones particulares de éstos (apertura del ciclo), como resultado se activa un conjunto de esquemas necesarios para dar continuidad al proceso hasta alcanzar la equilibración (satisfacción de la necesidad y cerradura del ciclo). Si el sistema aún no se equilibra, el esquema producto del proceso cognitivo anterior busca su alimento en los elementos $\mathbf{S}^{(i)}$ de **S** o en los esquemas de que dispone el sujeto (asimilación recíproca) para la satisfacción de la necesidad que ha surgido por el propio funcionamiento interno del ciclo. El proceso termina cuando se alcanza el éxito o se producen rechazos, parciales o totales, en caso de fracaso; la característica en ambas situaciones es el tipo de equilibración alcanzada. El cierre del ciclo se señala en la forma $\mathcal{A}_r$ que dirige el proceso y evalúa los resultados que en criterio del sujeto constituyen una respuesta válida a la situación.

CAPÍTULO 4

INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

CAPÍTULO 4

INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

PRESENTACIÓN

En principio trataremos de mostrar las evidencias que permiten conocer el estado de concepción del concepto de función, bajo el marco teórico definido por Sfard (proceso-objeto). Para tal efecto se realizó un primer instrumento y se aplicó a un grupo de 15 estudiantes de primer semestre de ingenierías. Cabe anotar que en el momento de la aplicación del instrumento, los estudiantes aún no habían recibido la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), aunque el concepto de integral definida y de área bajo una curva si se les había enseñado, bajo la modalidad tradicional de clase magistral, siguiendo como texto guía el "Cálculo con Geometría analítica" de Edwards y Penney (cuarta edición, 1996), texto al cual ya nos referimos en el capítulo 2.

Con el análisis de este instrumento, desde la dimensión cognitiva, se espera indagar sobre la comprensión del concepto de función, en términos de las concepciones (proceso-objeto) que poseen los estudiantes.

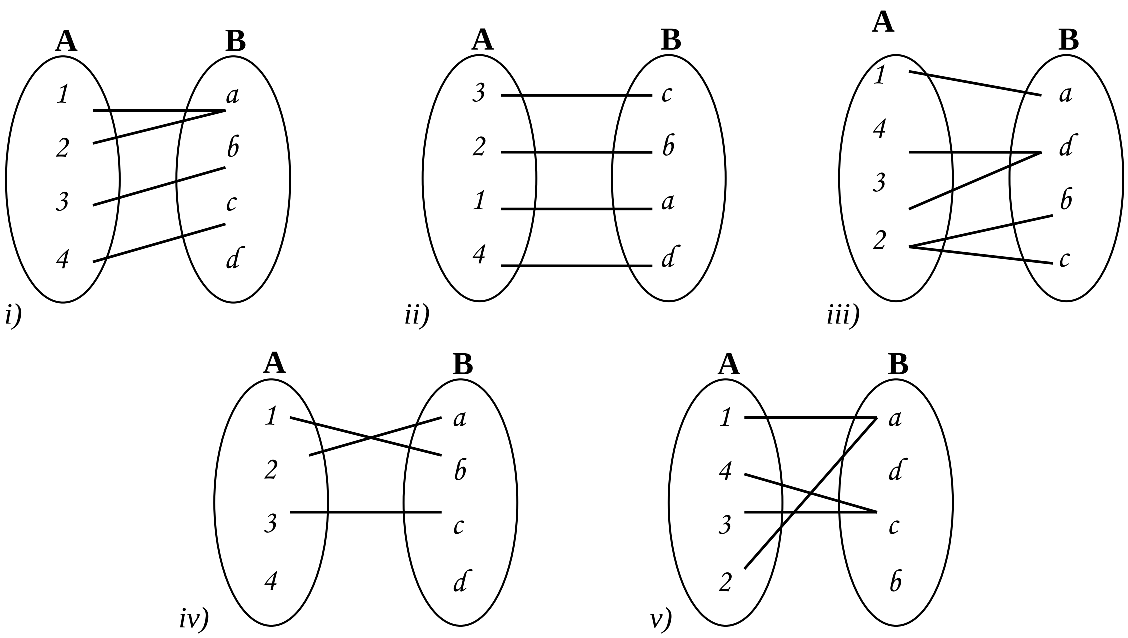
Posteriormente se aplicó a los estudiantes un segundo instrumento –justo después de enseñárseles el TFC bajo la misma modalidad de enseñanza– con el cual se esperaba indagar sobre aspectos referentes a la comprensión del TFC y de alguna forma poder conjeturar acerca de la incidencia de la concepción del concepto de función en la comprensión de este teorema. Por último, se hizo un análisis de dos casos particulares con el fin de observar la relación existente entre las concepciones del concepto de función y del TFC. Presentamos a continuación los dos instrumentos:

1. INSTRUMENTO NÚMERO UNO

Este instrumento consta de nueve situaciones que fueron diseñadas basándonos en los indicadores, ya definidos con anterioridad, de tal forma que se pudiera discriminar las concepciones como proceso o como objeto del concepto de función, presente en los estudiantes que participaron en la investigación.

PRIMERA SITUACIÓN

(a) En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique cada una de sus respuestas.*



(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), un valor x tal que f(x) = d

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

(**e)** Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h (g(a)).

SEGUNDA SITUACIÓN

Considere los siguientes conjuntos de parejas.

i) $\{(x,y):\ y^2 = x\}$

ii) $\{(x,y):\ y = 1+ 1/x^3\}$

iii) $\{(x,y):\ y^2 - x^2 - 1 = 0\}$

iv) $\{(x,y):\ x+y-1 = 0\}$

(a) Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma y = f(x). *Justifique* *<u>cada una de</u>* *<u>sus respuestas.</u>*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f (–2). ¿Se puede calcular f (f (–2))?

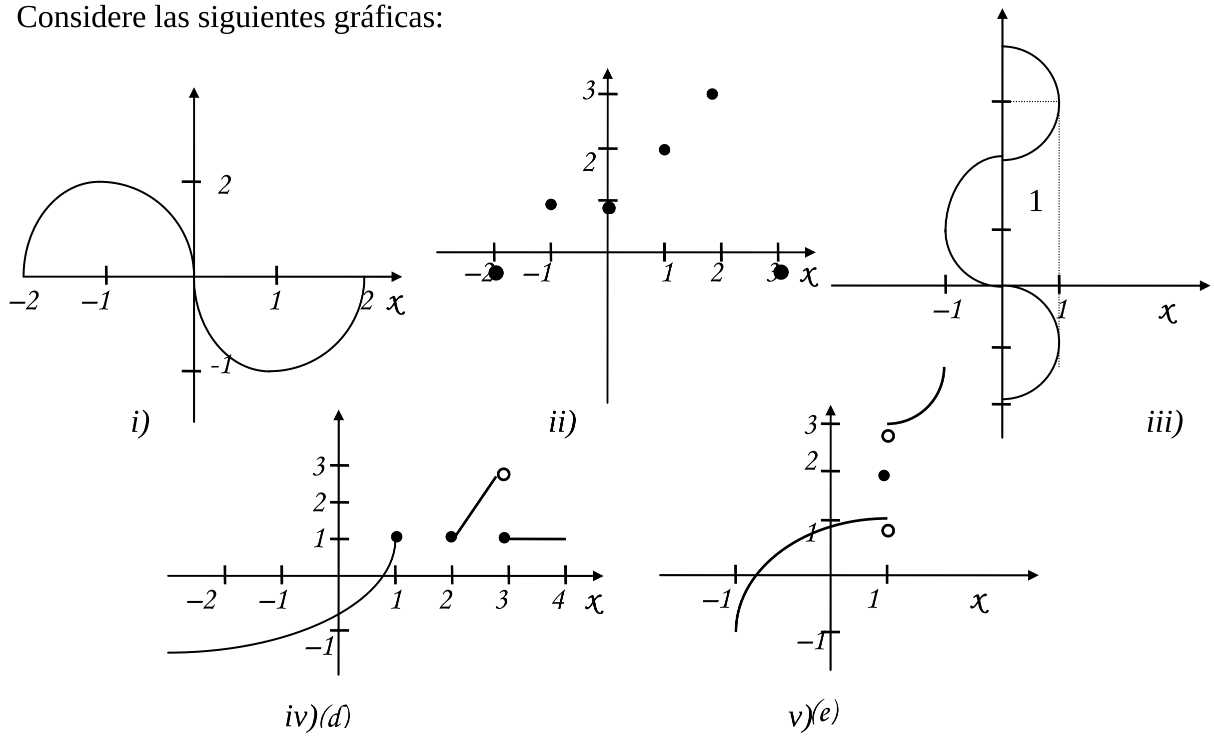
(c) Determine, usando la misma f de (b), un x tal que f(x)=9.

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* <u>cada una</u> *de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule g (h (2)).

TERCERA SITUACIÓN

Considere las siguientes gráficas:



Nota: La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.

(a) Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique* *<u>cada una</u>* *de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como *f*. Calcule *f*(1). ¿Se puede calcular *f*(*f*(1))?

(c) Determine, usando la misma *f* de (*b*), *x* tal que *f*(*x*)=2.

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* <u>cada una</u> *de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h(g(1)).

CUARTA SITUACIÓN

Defina el concepto de función matemática.

QUINTA SITUACIÓN

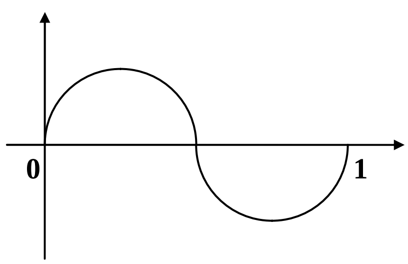
Si F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1], determine si F[0,1]$\subset$ F[0,2]. *Justifique su respuesta.*

SEXTA SITUACIÓN

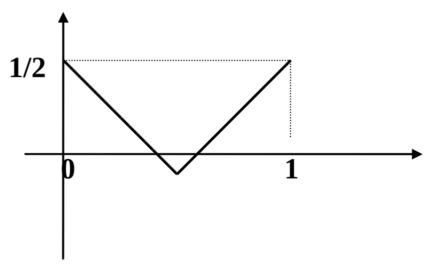
Sea **W** el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en **W**?

a) $f(x) = -2,\ x\in[0, 1]$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ **c)** $h(x) = \sqrt{x^2+1},\ x\in[0, 1]$

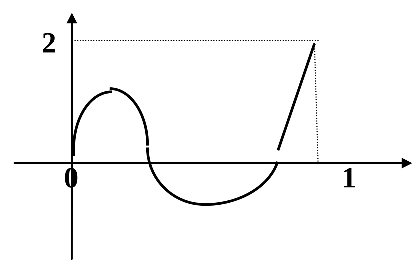
d)



e)

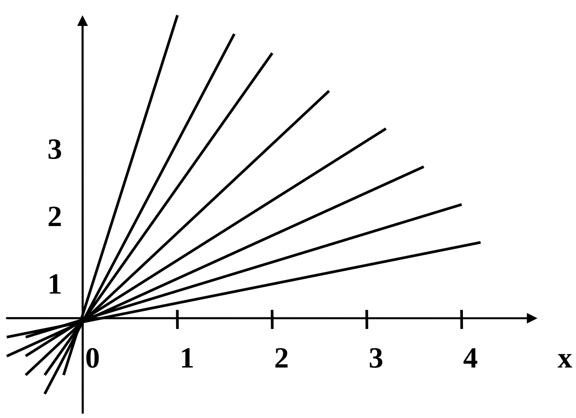


f)

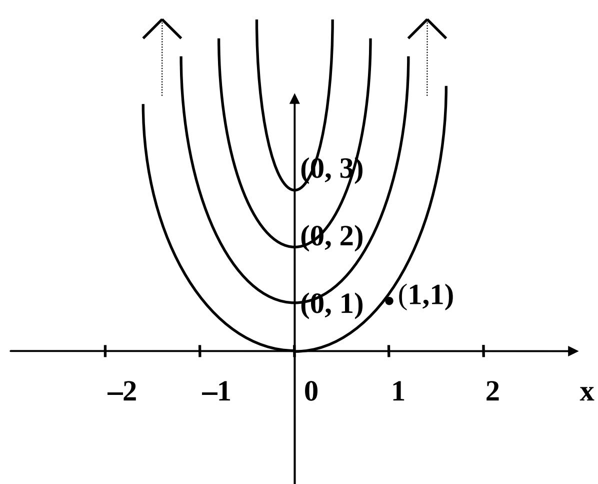


SEPTIMA SITUACIÓN

Encuentre la expresión analítica que corresponde a cada una de las dos familias de funciones que se describen gráficamente a continuación:



Las gráficas llenan todo el primer y tercer cuadrante



Las gráficas siguen ascendiendo indefinidamente como se indica con las flechas punteadas

OCTAVA SITUACIÓN

Considere la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo (0,+∞), y las siguientes afirmaciones con respecto a ella:

1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo.

2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo.

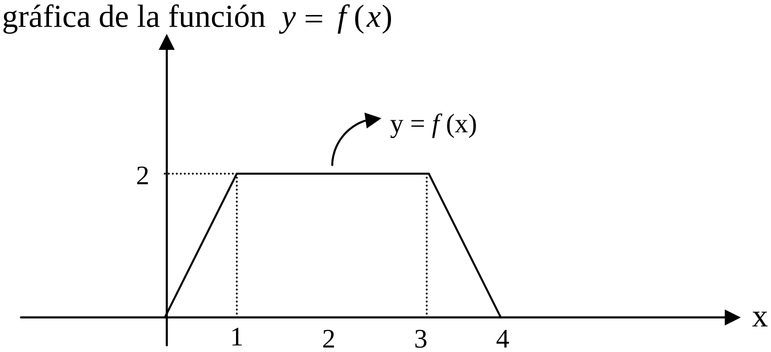
3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo (0,+∞).

4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$, desde x = 0.

¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas? *Justifique su respuesta*

NOVENA SITUACIÓN

La siguiente es la gráfica de la función $y = f(x)$



Bosqueje, si es posible, la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

2. INSTRUMENTO NÚMERO DOS

Este instrumento está conformado por siete situaciones en las que se indaga sobre la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, aclarando que las dos primeras se refieren a la comprensión de la regla de la cadena, considerada como concepto necesario en la comprensión del TFC.

PRIMERA SITUACION

Si $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

SEGUNDA SITUACION

Sea $g(x) = f(x^2)$ una función diferenciable. Calcule $g'(x)$.

TERCERA SITUACION

Calcule $g'(x)$ si $g(x) = \int_1^x t^2 \sqrt{t^2 + 1}\, dt$

CUARTA SITUACIÓN

Sea $h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\, dt$. Calcule $h'(x)$

QUINTA SITUACION

Una de las propiedades de la integral definida afirma que si una función $f(x)$ es positiva en un intervalo cerrado [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ es positiva. Utilizando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo en el siguiente ejemplo, parecería que se está contradiciendo la afirmación inicial ¿Qué está fallando?:

$g(x) = -\frac{1}{x}$ es una antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ por tanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \Big]_{-1}^{1} = (-\frac{1}{1} - (-\frac{1}{-1})) = -2$$

SEXTA SITUACION

Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \le t \le 1$, la posición viene dada por la integral $f(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}\, dx$. (No intente el cálculo de esta integral). Calcule:

a) Su velocidad cuando $t = 1$ b) Su aceleración cuando $t = 1$

SEPTIMA SITUACION

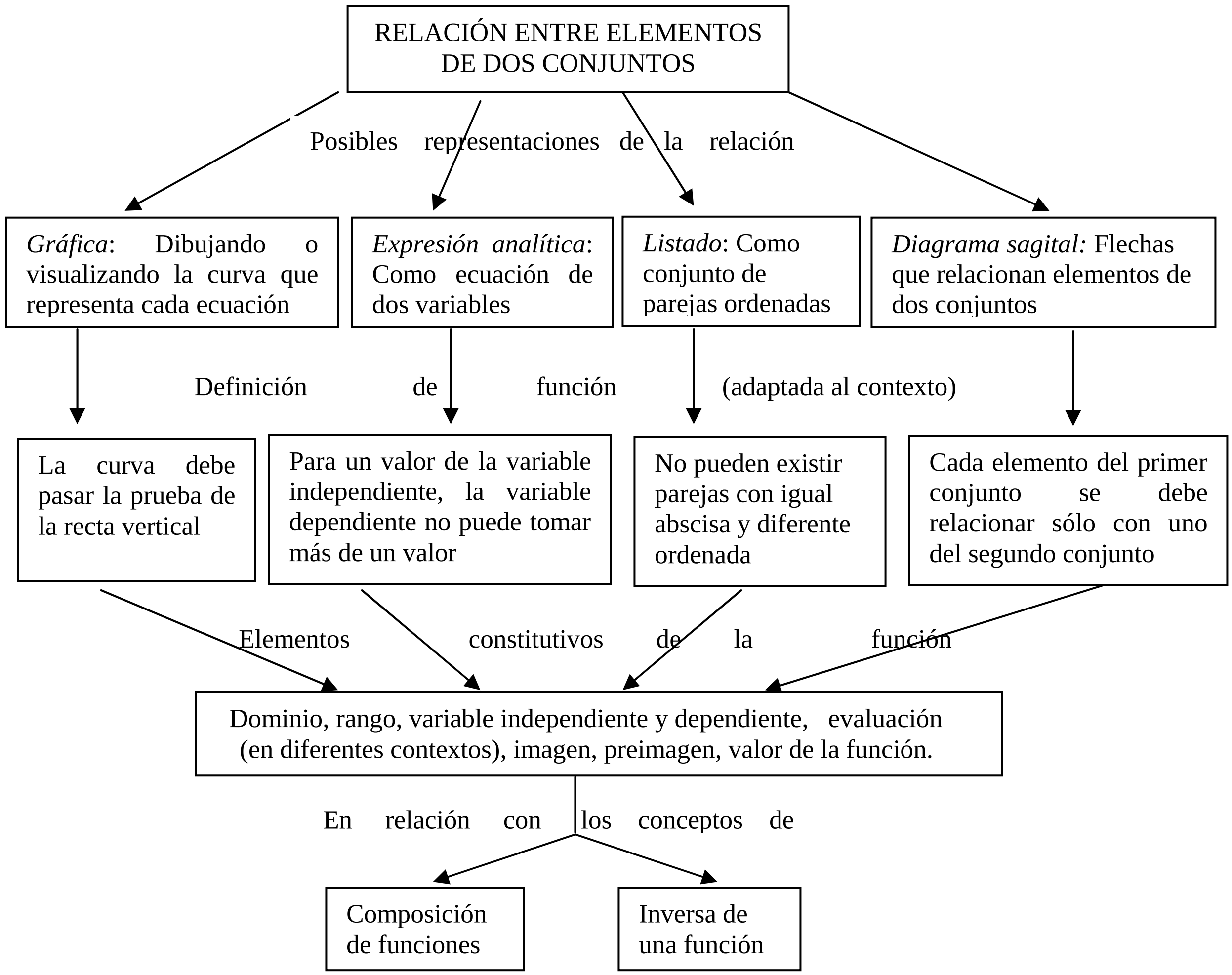
Encontrar una función *f* y un valor de la constante *c*, tal que:

$$\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½ \text{ para todo } x \text{ real.}$$

3. ANÁLISIS A PRIORI DEL INSTRUMENTO NÚMERO UNO

A continuación se presenta la estructura teórico conceptual, correspondiente a las dos primeras situaciones del primer instrumento.

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:



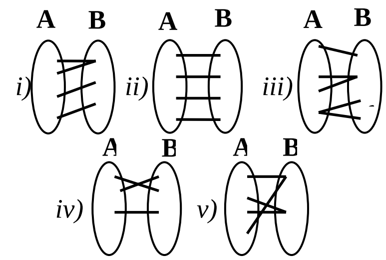
Se presentan ahora los ciclos de interacción cognitiva, correspondientes a cada uno de los literales de cada situación. Recordemos, como se explicó en la metodología, que en estos ciclos se consignan las informaciones obtenidas en términos de los observables y coordinaciones que atribuimos al sujeto a partir de sus realizaciones escritas en las diferentes situaciones.

PRIMERA SITUACIÓN

Para el literal a)

En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique cada una de sus respuestas.*

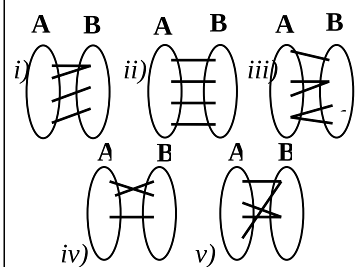
Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifica 5 diagramas de flechas que relacionan dos conjuntos A y B.	Establece un criterio que permita decidir que diagramas representan una función. El criterio estará determinado por una definición o una concepción del concepto de función	Se presentan 5 diagramas de flechas en los que se pide identificar cuáles de ellos representan una función de A en B. Se pide justificar la respuesta. 
Identifica que en los diagramas i), ii) y v) cada elemento de A está relacionado sólo con uno de B En el diagrama iii) un elemento de A está relacionado con dos de B En el diagrama iv) un elemento de A no está relacionado con ninguno de B	Verifica que diagramas se ajustan a la definición dada de función	Ej. :Una función entre dos conjuntos A y B es una relación en la que cada elemento de A está en relación con un y sólo un elemento de B
		Los diagramas i), ii) y v) representan funciones pues *“ Cada elemento de A está en relación con un y sólo un elemento de B”*

Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifica como funciones los diagramas i), ii) y v) Elige uno de estos diagramas **Ej:** Para el diagrama v)	Debe establecer un criterio que le permita calcular *f* (2) **Ej:** *f*(2) es posible calcularlo, observando en el conjunto B el elemento relacionado con 2.	Se presentan 5 diagramas de flechas en los que se pide identificar uno de ellos como una función f y se pide calcular *f(2).* De igual manera se pregunta si es posible calcular *f (f(2)).* 
f(2)=a y se pregunta si es posible calcular *f*(*f*(2))	Aplica el concepto de función compuesta	*f*(2)=*a*
Se pregunta si es posible calcular *f*(*a*)	f(a) es posible calcularlo si a pertenece al dominio de f	Si *f(2)=a* entonces f(f(2))=f(a)
		f(*f*(2)) = *f*(*a*) no es posible calcularlo pues a no pertenece al dominio de *f*

Para el literal c)

Determine, usando la misma *f* de (*b*), un valor *x* tal que *f*(*x*) = *d*

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Interpreta que debe hallar la preimagen de d mediante la función elegida en el literal anterior.	Debe observar si existe un elemento de A relacionado con el elemento d en B. Es posible que use diferentes criterios para la evaluación. Podría por ejemplo, simplemente observar los diagramas, o definir para los diagramas elegidos, una función a trozos, con el fin de hallar la preimagen de d.	Se pide, utilizando la misma función f que eligió en el literal (b), hallar un valor de x tal que f(x)=d
		Ej.: El elemento x será aquel elemento de A, relacionado con una flecha con el elemento d; si tal flecha no existe, entonces x no existe.

Para el literal d)

¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica que entre los diagramas i), ii) y v) debe elegir una función que posea inversa.	Debe elegir aquel diagrama que cumpla las condiciones para que posea inversa. Una función posee inversa si y solo si es biyectiva.	Se observa que los diagramas que representan funciones son i), ii) y v) Se pregunta cuáles de las funciones que se identificaron poseen inversa.
		la única función que puede tener inversa es la ii) porque es inyectiva.

Para el literal e)

Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h (g(a)).

En el desarrollo de esta situación se pueden presentar dos formas diferentes de desarrollos exitosos. En la primera de ellas, bastaría que el estudiante activara el esquema asociado a la definición de función inversa en el sentido de que la composición es igual a la función idéntica, procedimiento que, podría decirse, es propio de una concepción estructural del concepto de función asociado a la inversa. En el segundo, podría proceder operacionalmente, calculando en primer lugar g(a) y posteriormente h (g(a)), conjeturando igualmente, que este procedimiento es propio de una concepción procedimental del concepto de función asociado a la inversa.

Ciclo de Interacción:

PRIMER CASO

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debe identificar entre los diagramas uno que represente una función con inversa. Llamará h a la función que posee inversa y la inversa la denotará con la letra g.	Establece un criterio para calcular h(g(x)): Si g es la inversa de h entonces h(g(x))=x para todo x en el dominio de g y tal que g(x) pertenezca al dominio de h.	Se pide que identifique con la letra h la función que posea inversa y con g la inversa asociada. Se pide posteriormente que calcule h(g(a))
		h(g(a))=a

SEGUNDO CASO

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debe identificar entre los diagramas uno que represente una función con inversa. Llamará h a la función que posee inversa y la inversa la denotará con la letra g.	Establece un criterio para calcular h(g(a)): Primero se debe calcular g(a)	Se pide que identifique con la letra h la función que posea inversa y con g la inversa asociada. Se pide posteriormente que calcule h(g(a))
Después de calculado g(a) se pide calcular h(g(a))	Para calcular h(g(a)) se evalúa h en g(a)	g(a) se ha calculado
		h(g(a))=a

SEGUNDA SITUACIÓN

Para el literal a):

Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma $y = f(x)$. *Justifique cada una de sus respuestas.*

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifica 4 conjuntos de parejas ordenadas. Identifica que cada pareja se forma en acuerdo con una ecuación. El valor que tome la variable *y* en cada pareja dependerá del valor que tome la respectiva variable *x* Identifica cuales de estos conjuntos definen una función de la forma y = f(x)	Hay diferentes formas de proceder: 1. Identificando las curvas que representa cada ecuación:(propio de quien posee una concepción del concepto de función como objeto) De acuerdo con esta idea, los conjuntos i) y iii) no representan una función pues la primera es una parábola que se abre hacia la derecha y la tercera es una hipérbola cuyas ramas se abren hacia arriba y hacia abajo. En ambos casos cada *x* tendría dos imágenes. El conjunto ii) representa una curva que se comporta de manera similar a una hipérbola, pero en este caso las ramas se abren hacia la izquierda y hacia la derecha. Lo cual implica que es la gráfica de una función El conjunto iv) representa una recta de pendiente negativa, por tanto es una función. NOTA: en este caso el estudiante procede mediante una concepción estructural de función. 2. Despejando y en términos de x: En esta situación, si por cada valor de la variable x, la variable y puede tomar más de un valor, entonces el conjunto en referencia no será una función, situación que se presenta en las ecuaciones de los conjuntos i) y iii) y no en ii) y iv). Por tanto, los conjuntos que representan una función son ii) y iv) NOTA: en este caso el estudiante procede mediante una concepción procedimental (como proceso) del concepto de función 3. Reemplazando la variable x por diferentes valores, y observar que si por cada valor de la variable "*x*", la variable "*y*" puede tomar más de un valor, entonces el conjunto en referencia no será una función, situación que se presenta en las ecuaciones de los conjuntos i) y iii) y no en ii) y iv). Por tanto, los conjuntos que representan una función son ii) y iv) NOTA: en este caso el estudiante está haciendo uso de una concepción operacional (como proceso) del concepto de función. Podría inferirse que no posee una concepción estructural de función ni de la ecuación asociada a ella.	Se presentan los siguientes conjuntos de parejas ordenadas determinados por comprensión: **i)** $\{(x,y):\ y^2 = x\}$ **ii)** $\{(x,y):\ y = 1+ 1/x^3\}$ **iii)** $\{(x,y):\ y^2-x^2-1= 0\}$ **iv)** $\{(x,y):\ x+y-1= 0\}$ Se pide Identificar cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma y = f(x), *Justificando* <u>*cada una de sus respuestas.*</u>
		Los conjuntos que representan una función son ii) y iv)

Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule $f(-2)$. ¿Se puede calcular $f(f(-2))$?

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica como f a la representada por la ecuación $x+y-1=0$. Se debe evaluar f en -2 Se debe evaluar f en f(-2)	Para calcular f(-2) se debe despejar *y* en términos de *x*. A *y* se le llamará f(x)	Se pide que: i) Una de las funciones elegidas la denote con la letra f ii) Calcule f(-2) Se pregunta si es posible calcular f(f(-2))
		$f(-2)=3$ y $f(3)=-2$

Para el literal c):

Determine, usando la misma f de (b), un x tal que $f(x)=9$.

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debe interpretar el significado de $f(x)=9$	$f(x)=9$ es una ecuación	Se pide, utilizando la función del literal b), hallar un x, tal que $f(x)=9$
Interpreta que debe resolver la ecuación $9=-x+1$	La ecuación $9=-x+1$ se resuelve despejando la variable x	Si $f(x)=9$ entonces : $9=-x+1$
		$x=-8$

Para el literal d):

¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* *<u>cada una</u>* *de sus respuestas.*

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifica que debe decidir cuáles de las funciones dadas en **ii)** $y = 1+ 1/x^3$ y **iv)** $x+y–1= 0$ poseen y por qué.	Debe enunciar las características de una función que tenga inversa. Una función posee inversa si es inyectiva. De acuerdo con lo anterior la función que posee inversa es la función dada por $x+y–1= 0$ pues es inyectiva	Se pide que diga cuales de las funciones **ii)** $y = 1+ 1/x^3$ y **iv)** $x+y–1= 0$ poseen inversa, justificando la respuesta
Debe identificar cuál de las funciones es inyectiva	Aplicación de criterios para decidir sobre la inyectividad de las funciones dadas	Una función posee inversa si es inyectiva
		$x+y–1= 0$ posee función inversa por ser inyectiva

Para el literal e):

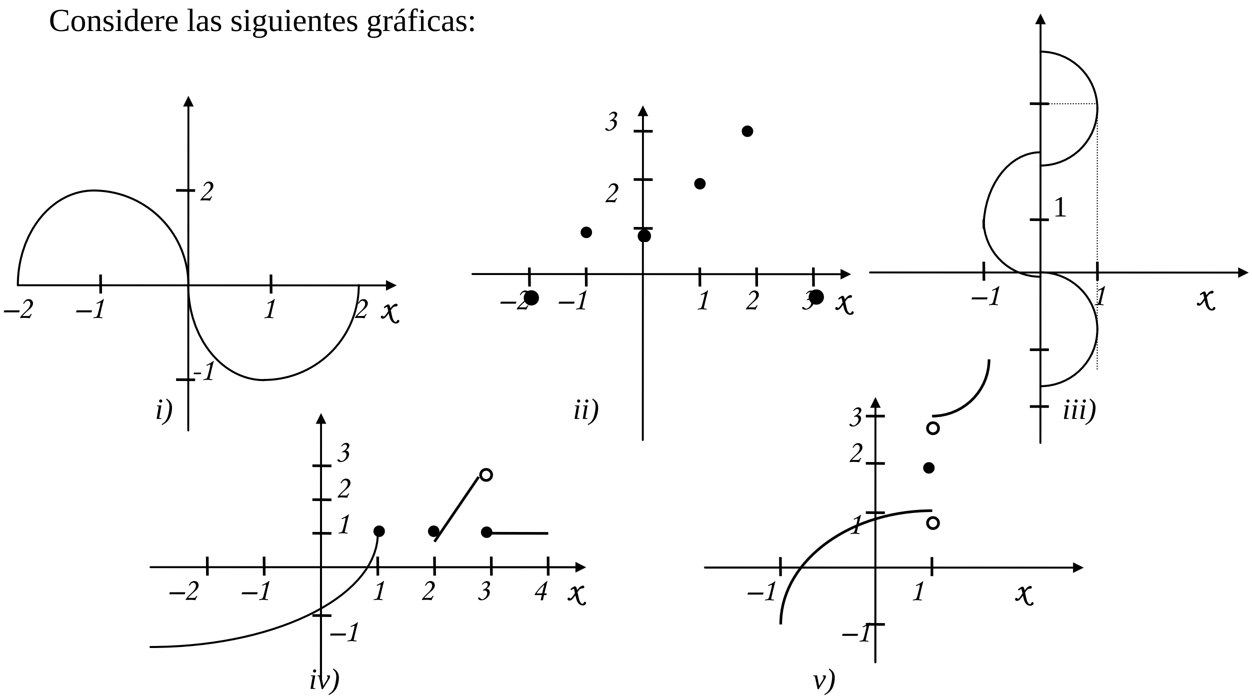
Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule g (h (2)).

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica que la función dada por el conjunto {(x,y):x+y–1=0} posee inversa Debe llamar h a la función que ha elegido Debe hallar la inversa de h y llamarla g Se debe evaluar g en h(2)	En la ecuación x+y–1= 0 la variable *y* se cambia por h y se despeja en términos de *x*. De esta forma se puede calcular h(2)	Se pide que: Denote con h la función que posea inversa Denote con g la inversa asociada Calcule g(h(2))
Identifica que debe hallar la inversa de h	La inversa se halla cambiando *x* por *y* y despejando *y* en términos de *x.* Se cambia *y* por g(x)	h(2)=-1
Identifica que debe calcular g(h(2))	Para calcular g(h(2)) reemplaza h(2) por -1	La inversa es g(x)= -x+1
		g(-1)) = 1+1=2 g(h(2)) = 2

TERCERA SITUACIÓN

Considere las siguientes gráficas:



Nota: La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.

(a) Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como *f*. Calcule *f*(1). ¿Se puede calcular *f*(*f*(1))?

(c) Determine, usando la misma *f* de (b), *x* tal que *f*(x)=2.

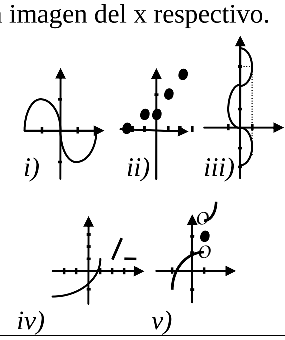
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h(g(1)).

Para el literal a):

Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

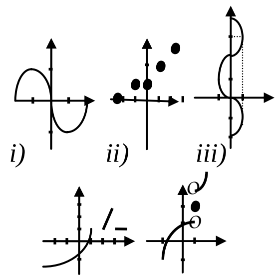
Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Debe identificar cuáles de las 5 gráficas que se le presentan representan una función	Hay diferentes formas de proceder: 1. Identificando las curvas que satisfagan la prueba de la recta vertical (razón que al ser expuesta por un estudiante no permitiría identificar que concepción tiene del concepto de función. Es posible que la regla la exprese sin tener conciencia de su significado) De acuerdo con esta idea, las gráficas *i), ii), iv) y v)* representan una función. 2. Observando si en cada una de la gráficas se satisface la condición de que a cada “x” del eje de abscisas le corresponde una y sólo una imagen “y” del eje de ordenadas. De acuerdo con esta condición, las gráficas *i), ii), iii), iv) y v)* representan una función.	Se presentan 5 gráficas y se pide identificar cuál o cuáles de ellas representan la gráfica de una función. **Nota:** La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo. 
		Las gráficas *i), ii), iii), iv) y v)* representan una función.

Para el literal b):

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f(1). ¿Se puede calcular f(f(1))?

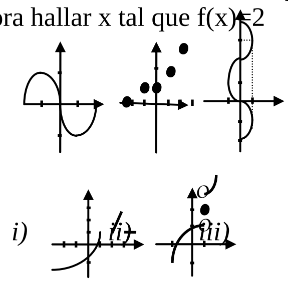
Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debe elegir una de las gráficas que escogió corresponden a una función. Denotar a esta función con la letra f. Calcular la imagen de 1 y ver si es posible calcular la función compuesta f(f(1))	En cualquiera de las gráficas que elija, deberá proceder de la siguiente forma: Ubicarse sobre el eje de abscisas en el punto de abscisa 1. A partir de este punto, trasladarse paralelamente al eje de ordenadas, hasta intersecar la curva y luego proyectar este punto de intersección sobre el eje de ordenadas, el cual será f(1). f(f(1)) es posible calcularlo si al tomar el valor de f(1) ahora sobre el eje de abscisas, es posible repetir el procedimiento anterior.	De las gráficas identificadas como funciones, se pide denotar una de ellas como f y calcular f(1). Se pregunta si es posible calcular f(f(1))  *i)* *ii)* *iii)* *iv)* *v)*
		En la gráfica *i), f(1)=-1 y f(f(-1))=f(-1)=2*

Para el literal c):

Determine, usando la misma f de (b), x tal que f(x)=2.

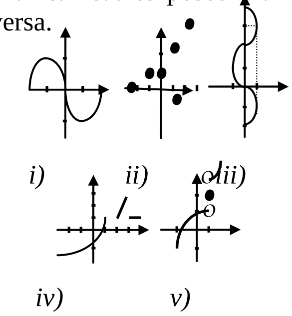
Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debe elegir una de las gráficas que escogió corresponden a una función. Denotar a esta función con la letra f. Debe calcular la (o una) preimagen de 2.	En cualquiera de las gráficas que elija, deberá proceder de la siguiente forma: Ubicarse sobre el eje de ordenadas en el punto de ordenada 2. A partir de este punto, trasladarse paralelamente al eje de abscisas hasta intersecar la curva y luego proyectar este punto de intersección sobre el eje de abscisas, el cual será el valor de x tal que f(x)=2	De las gráficas identificadas como funciones, se pide denotar una de ellas como f. Se pide ahora hallar x tal que f(x)=2  *i)* *ii)* *iii)* *iv)* *v)*
		En la gráfica *i), el valor de x tal que f(x)=2 es x=-1*

Para el literal d):

¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debe decidir cuáles de las que identificó como funciones poseen inversa.	Hay diferentes formas de proceder en cualquiera de las gráficas que elija: Una forma puede ser, usando la prueba de la recta vertical, identificar aquellas que sean inyectivas. Estas tendrán inversa. Otra forma podría ser mediante la verificación visual de aquellas gráficas en las que tomando como dominio el eje de ordenadas, cada punto de este eje tiene solo una imagen sobre el eje de abscisas.	De las gráficas identificadas como funciones, se pide identificar cuales poseen función inversa. 
		La única gráfica que pasa la prueba de la recta horizontal, para verificar que es inyectiva y por tanto invertible es la *v)*

Para el literal e):

Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h(g(1)).

Ciclo de Interacción:

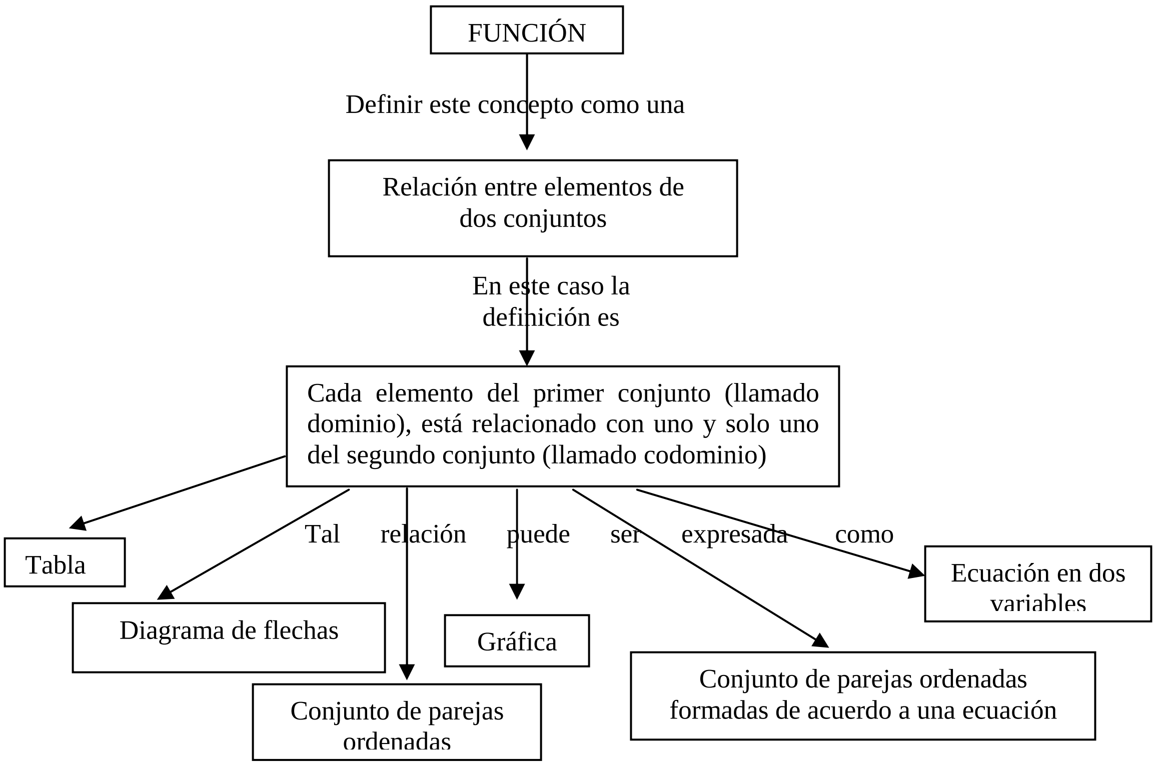
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
En la gráfica elegida como invertible, debe denotar con g la inversa y calcular h(g(1)).	Puede proceder de dos maneras diferentes: 1) Usando la definición de inversa. La compuesta de f con su inversa es la idéntica. $f(f^{-1}(x))=x$ 2) Ubicarse sobre el punto de ordenada 1 y posteriormente hallar su preimagen. Acto seguido calcular la imagen de esta preimagen; deberá coincidir con 1.	De una de las gráficas identificadas como función invertible de pide denotar con g la inversa asociada. Se pide calcule h(g(1)).
		En el caso de la función *v)*, que posee inversa, no es posible calcular f(g(1)) pues g(1) no existe

CUARTA SITUACIÓN

Defina el concepto de función matemática.

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:

Aquí se consigna la estructura teórico conceptual de una de las diferentes definiciones del concepto que un estudiante podría dar. Por ejemplo:



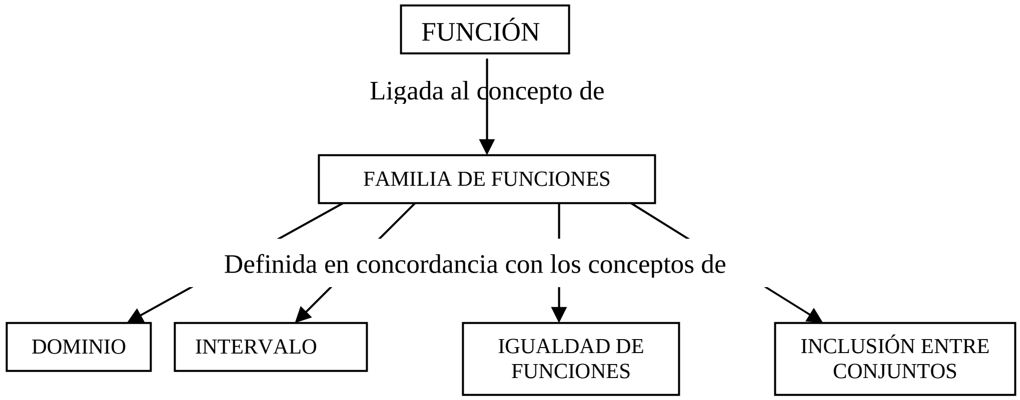
Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica que debe definir que es una función.	Debe escribir una de las definiciones del concepto de función	Se pide dar la definición del concepto de función matemática
		Se consigna una de las diferentes definiciones de función. *Ej:* *"Una función de un conjunto A en un conjunto B, es una relación en la que cada elemento de A está relacionado con un y sólo un elemento de B."*

QUINTA SITUACIÓN

Si F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1], determine si F[0,1]$\subset$ F[0,2]. *Justifique su respuesta.*

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica F[0, 1] como el conjunto de las funciones con dominio en el intervalo [0,1]. Identifica F[0, 2] como el conjunto de las funciones con dominio en el intervalo [0,2]. Se pregunta si es cierto que toda función con dominio en [0,1] es también una función con dominio en [0,2]	Debe dar condiciones para que dos funciones sean iguales.	F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1]. F[0, 2] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,2]. Se pregunta si F[0,1] está contenido en F[0,2].
F[0, 1 y F[0, 2] tienen dominios diferentes	Una de las condiciones para la igualdad de funciones no se cumple	Una de las condiciones para que dos funciones sean iguales es que posean el mismo dominio.
		F[0,1] no es un subconjunto de F[0,2]

SEXTA SITUACIÓN

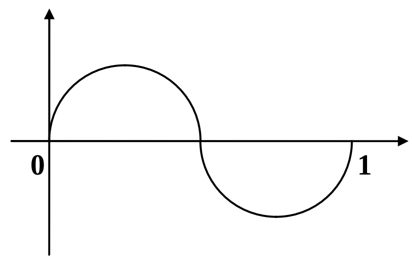
Sea **W** el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en **W**?

a) $f(x) = -2,\ x \in [0, 1]$

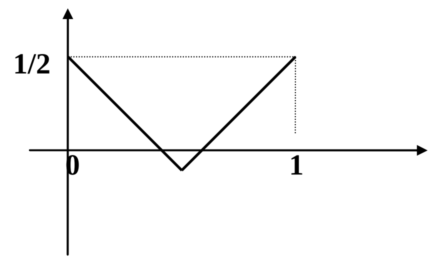
b) $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x \in [0, 1]$

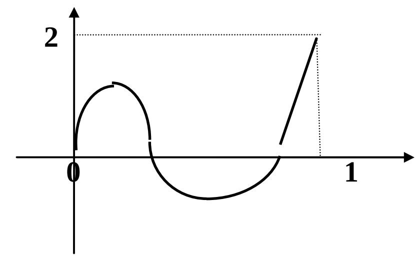
d)



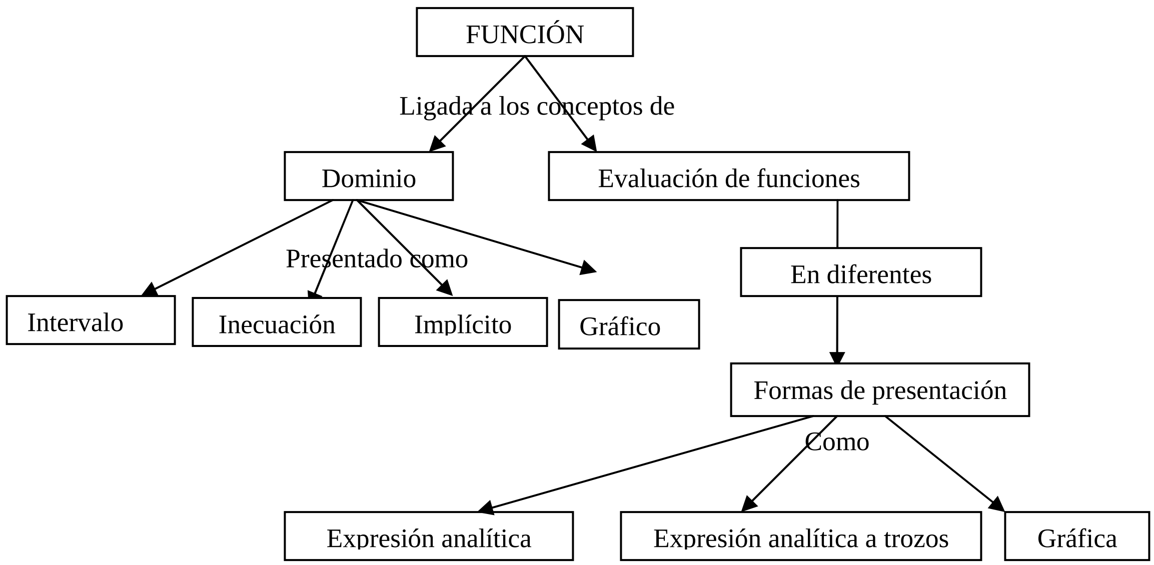
e)



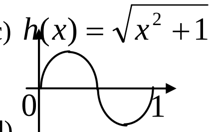
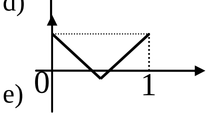
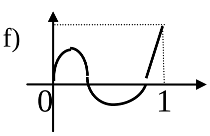
f)



ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:

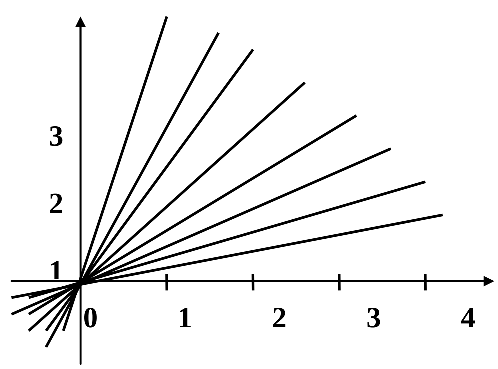


Ciclo de Interacción:

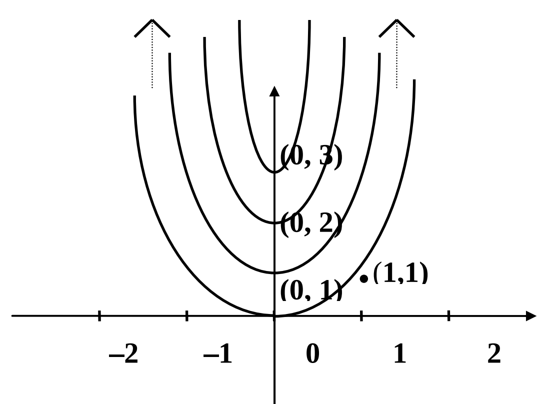
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
W es el conjunto de las funciones con dominio en el intervalo [0, 1] de tal forma que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1 Se da una serie de funciones presentadas de diversas formas. Se pide identificar cuales de las funciones están en W	Se observa que todas las funciones que se presentan tienen dominio en el intervalo [0, 1] Para la función en el literal **a):** f(0) = f(1) = -2, pues f es constante Luego f está en W Para la función en el literal **b):** $g(0) = 0+1=1 \quad g(1) = -2(1)+3=1$ Luego g está en W Para la función en el literal **c):** $h(0)=\sqrt{0^2+1}=1$ $h(1)=\sqrt{1^2+1}=\sqrt{2}$ Luego h no está en W Para la funciones en los literales **d)** y **e)** La parejas $(0,0)$ y $(1,0)$ pertenecen a la gráfica. Luego en estas gráficas se cumple que la imagen en 0 es la misma que la imagen en 1, por tanto están en W Para la función en el literal **f):** La pareja $(0,0)$ está en la gráfica pero en lugar de la pareja $(1,0)$ está la pareja $(1,2)$. Luego no se cumple que que la imagen en 0 es la misma que la imagen en 1, es decir esta función no está en W	Se presenta **W** como el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. Se pregunta cuáles de las siguientes funciones están en **W** a) f(x) = –2, x∈[0, 1] b) $g(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2}< x\le 1\end{cases}$ c) $h(x)=\sqrt{x^2+1}$, x∈[0,1] d)  e)  f) 
		a), b) ,d) y e) están en W

SEPTIMA SITUACIÓN

Encuentre la expresión analítica que corresponde a cada una de las dos familias de funciones que se describen gráficamente a continuación:

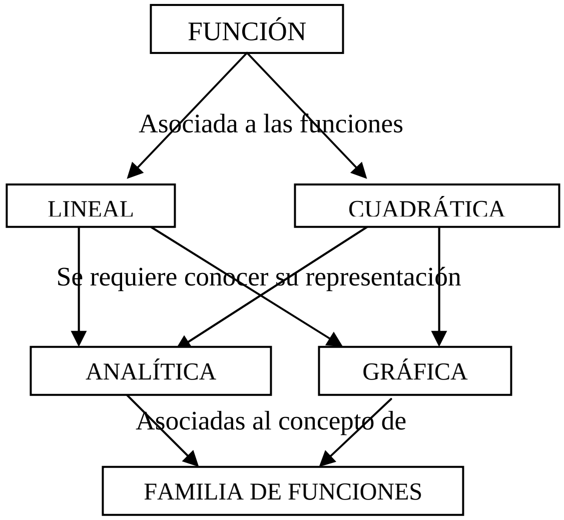


Las gráficas llenan todo el primer y tercer cuadrante

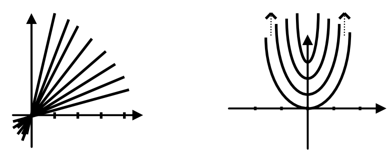


Las gráficas siguen ascendiendo indefinidamente como se indica con las flechas punteadas

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Se presenta una familia de rectas crecientes en un plano cartesiano, y en otro una familia de parábolas que se abren hacia arriba. En ambas situaciones se pide encontrar la expresión analítica que corresponde a cada una de estas familias.	Debe relacionar las características geométricas con las algebraicas, tanto de las rectas como de las parábolas.	Encuentre la expresión analítica que corresponde a cada una de las dos familias de funciones que se describen gráficamente a continuación: 
		Con respecto a la familia de rectas: La expresión analítica de la recta es $y = mx + b$, en donde *m* es la pendiente y *b* es la ordenada del corte con el eje *y*. Puesto que la familia de rectas es creciente, la pendiente de cada una de estas rectas es positiva, y dado que la familia corta el origen de coordenadas, la ordenada del corte con el eje *y* será *b* = 0. Entonces la ecuación de la familia será $y = mx$, con $m > 0$ Con respecto a la familia de parábolas: La expresión analítica de la parábola con vértice en el origen es $y = ax^2$, en donde el signo de *a* indica si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo. Puesto que la familia se abre hacia arriba, entonces *a* es positiva. Además dado que cada parábola se puede ver como el desplazamiento hacia arriba, de la parábola que tiene vértice en el origen, entonces la ecuación de la familia será de la forma $y = ax^2 + c$, en donde $a > 0$ y *c* es un entero positivo. Las ecuaciones de las familias son : $y = mx$, con

$0 < m < \infty$ y $y = ax^2 + c$, en donde $a > 0$ y c es un entero positivo.

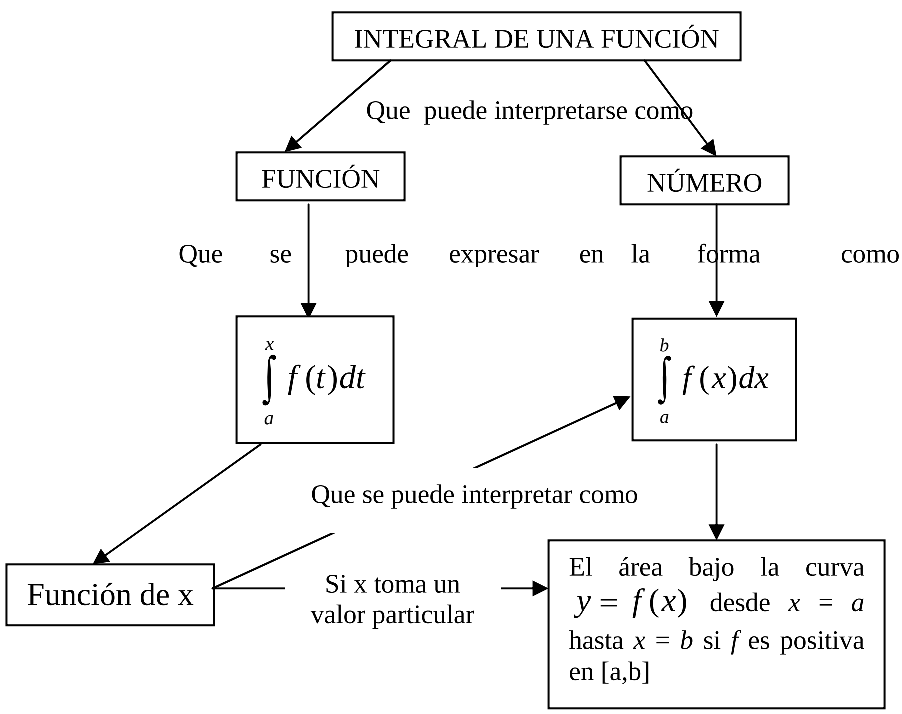
OCTAVA SITUACIÓN

Considere la integral $\int_0^x (t^2 + 1)dt$, con x en el intervalo $(0,+\infty)$, y las siguientes afirmaciones con respecto a ella:

1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo.
2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo.
3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$.
4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$, desde x = 0.

¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas? *Justifique su respuesta*

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:

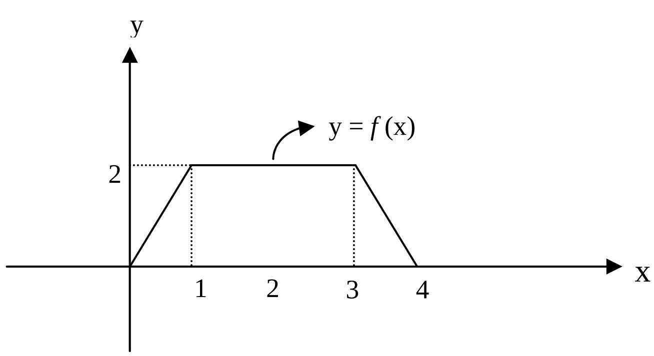


Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica que la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$ con x en el intervalo $(0,+\infty)$. Identifica que se hacen 4 afirmaciones con respecto a ella y se pide decidir cuáles de ellas son ciertas. En la primera afirmación se dice que es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo. En la segunda afirmación se dice que en caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo En la tercera afirmación se dice que representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$. En la cuarta afirmación se dice que para diferentes valores de x, representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0.	La primera afirmación es falsa pues dado que la función $f(x)=x^2+1$ es continua en el intervalo $(0,+\infty)$, entonces la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$ estará bien definida para cualesquier valor de *x* en este intervalo. La segunda afirmación es verdadera pues por lo que se ha dicho de la primera afirmación, si *x* toma un valor particular, entonces la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$ representará una integral definida cuyo resultado se puede interpretar como un número real positivo. La tercera afirmación es verdadera ya que para cada valor de *x*, el valor de la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$ es único, lo cual define a la integral como una función de *x* La cuarta afirmación es verdadera, pues dado que la función $f(x)=x^2+1$ es positiva en el intervalo $(0,+\infty)$, la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$ se puede interpretar como el área bajo la gráfica de *f* entre *x* = 0 y cada valor de *x* en el intervalo $(0,+\infty)$	Se presenta la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo $(0,+\infty)$, y se hacen las siguientes afirmaciones con respecto a ella: 1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo. 2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo. 3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$. 4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0. Se pregunta: Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas. Se pide Justificar la respuesta.
		Las afirmaciones 2),3) y 4) son ciertas

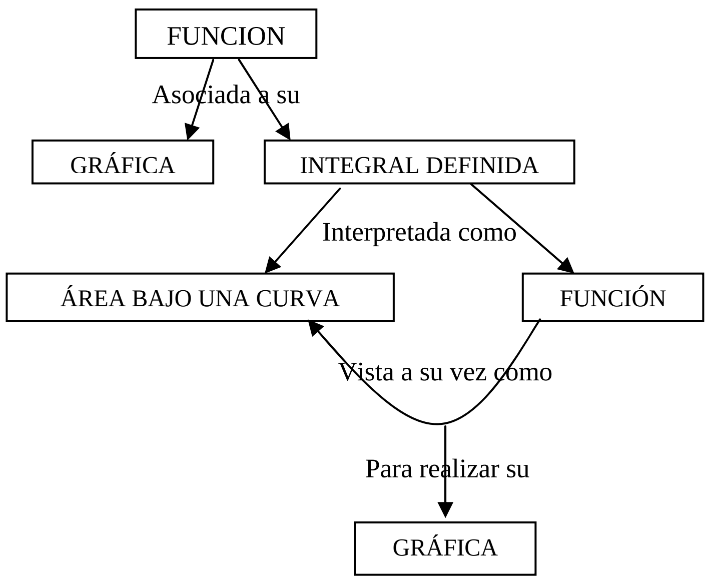
NOVENA SITUACIÓN

La siguiente es la gráfica de la función $y=f(x)$

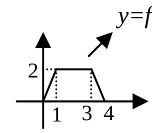
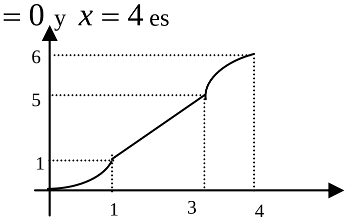


Bosqueje, si es posible, la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica que se da una función *f* continua y positiva en el intervalo [0,4], formada por tres segmentos de recta: El primero une los puntos (0,0) y (1,2) El segundo une los puntos (1,2) y (3,2) El tercero une los puntos (3,2) y (4,0) Identifica que se pide bosquejar la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x=0$ y $x=4$.	El área bajo la gráfica de *f* se puede ver como la función dada por la integral $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, con *x* en el intervalo [0,4]. Puesto que la función *f* es creciente en el intervalo [0,1], entonces la función área *g* será también creciente en el intervalo y cóncava hacia arriba. La función g irá desde (0,0) hasta (1,1) pues el área del triángulo que se forma es 1 En el intervalo [1,3] es constante, por tanto la función área *g* crecerá constantemente en este intervalo. La función *g* irá desde (1,1) hasta (3,5) pues el área del rectángulo que se forma es 4 Por último, dado que la función *f* es decreciente en el intervalo [3,4], se tiene que la función área *g* será creciente en este intervalo, pero cóncava hacia abajo. La función *g* irá desde (3,5) hasta (4,6) pues el área del triángulo que se forma es 1.	Se presenta la gráfica de una función *f* continua y positiva en el intervalo [0,4]. Se pide bosquejar la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x=0$ y $x=4$. 
		La gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x=0$ y $x=4$ es 

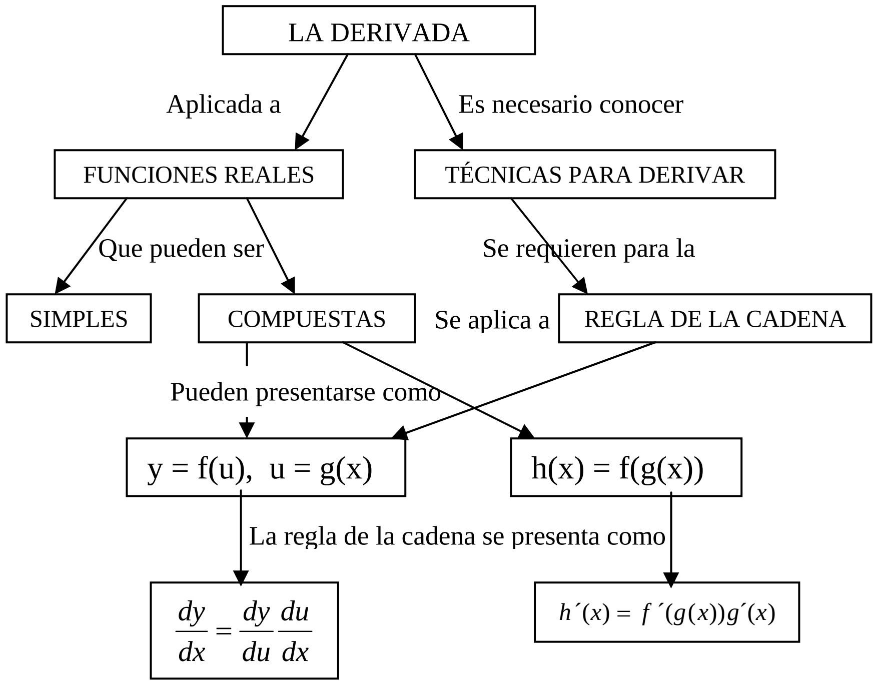
4 ANÁLISIS A PRIORI DEL INSTRUMENTO NÚMERO DOS

A continuación se presenta el análisis a priori de cada una de las situaciones del segundo instrumento:

PRIMERA SITUACION

1. Si $y=3u^2+1$ y $u=senx+x^2$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
y es función de la variable *u*. *u* es función de la variable *x*. Se solicita calcular la derivada de *y* respecto a la variable *x*.	*y* es una función compuesta $y = f(u) \quad , \quad u = g(x)$ Se debe aplicar la regla de la cadena	Si $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$ Calcule $\frac{dy}{dx}$
Cálculo de las derivadas $\frac{dy}{du} = 6u \qquad \frac{du}{dx} = \cos x + 2x$	Aplicación de la regla de la cadena. $\frac{dy}{dx} = 6u.(\cos x + 2x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ *y* es derivable respecto a *u*. *u* es derivable respecto a *x*
		$\frac{dy}{dx} = 6u.(\cos x + 2x)$

De forma alternativa, el sujeto ideal puede considerar que la derivada $\frac{dy}{dx}$ es posible expresarla en términos de *x*, reemplazando $u = senx + x^2$ en la expresión $\frac{dy}{du}$, así, la derivada $\frac{dy}{dx}$ quedaría expresada sólo en términos de la variable *x*. En este caso, la tabla anterior se completaría así:

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Interpreta que hay dos funciones: *y* en función de la variable *u*. *u* en función de la variable *x*. Se solicita calcular la derivada de *y* resp la variable *x*.	*y* se puede interpretar como una función compuesta $y = f(u), u = g(x)$ Se aplica la regla de la cadena	Se presentan dos funciones: $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$ Se pide calcular $\dfrac{dy}{dx}$
Interpreta que debe calcular las derivadas $\dfrac{dy}{du}$ y $\dfrac{du}{dx}$ y aplicar la regla de la cadena	Cálculo de las derivadas $\dfrac{dy}{du}$ y $\dfrac{du}{dx}$ Aplicación de la regla de la cadena.	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ y además *y* es derivable respecto a *u*. *u* es derivable respecto a *x*
Interpreta que la derivada está en función de *u* y de *x*	Puesto que u está en términos de x, se puede sustituir en $\dfrac{dy}{dx} = 6u.(\cos x + 2x)$	$\dfrac{dy}{du} = 6u$ $\dfrac{du}{dx} = \cos x + 2x$ $\dfrac{dy}{dx} = 6u.(\cos x + 2x)$
Interpreta que la derivada es el producto: $(6senx + 6x^2)(\cos x + 2x)$	Efectúa el producto de las expresiones $6senx + 6x^2$ y $\cos x + 2x$	$\dfrac{dy}{dx} = (6senx + 6x^2)(\cos x + 2x)$
		$\dfrac{dy}{dx} = 6senx\cos x + 12xsenx + 6x^2\cos x + 12x^3$

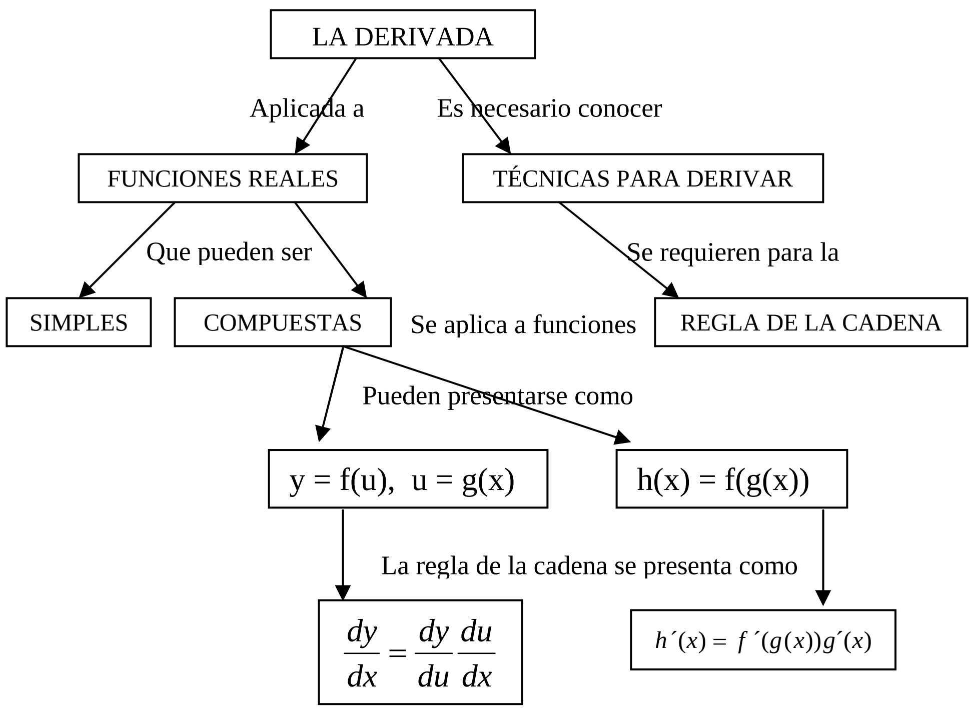
Según las consideraciones que se han hecho en torno a la presencia de la concepción del concepto de función como objeto en un desarrollo exitoso de la situación, esta presencia se hace evidente en la correcta interpretación de una composición de funciones con el objetivo de aplicar la regla de la cadena. Es de anotar que existe la posibilidad de que el desarrollo exitoso de la situación pueda obedecer a un esquema puramente figurativo. La segunda situación trata de dirimir esta ambigüedad.

SEGUNDA SITUACION

Sea $g(x) = f(x^2)$ una función diferenciable. Calcule $g'(x)$.

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL

Con respecto a la segunda de las situaciones, el mapa conceptual que se observó en la situación anterior, es ideal para describirse los conceptos que guían la acción del sujeto para enfrentar la situación.



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función *g* se presenta en términos de otra función: (*f*) *f* está en función de x^2 Se solicita calcular la derivada de la función *g*	*La derivada de g debe ser igual a la derivada de f*	Se presenta $g(x) = f(x^2)$ como una función diferenciable Se pide calcular $g'(x)$
$g'(x) = (f(x^2))'$ es la derivada de la función compuesta de f con x^2	La derivada de f compuesta con h es igual a la derivada de f evaluada en h, por la derivada de h	$g'(x) = (f(x^2))'$

Interpreta que debe calcular la derivada de x^2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$g'(x) = (f(x^2))' = f'(x^2)(x^2)'$
		$g'(x) = f'(x^2)(2x)$

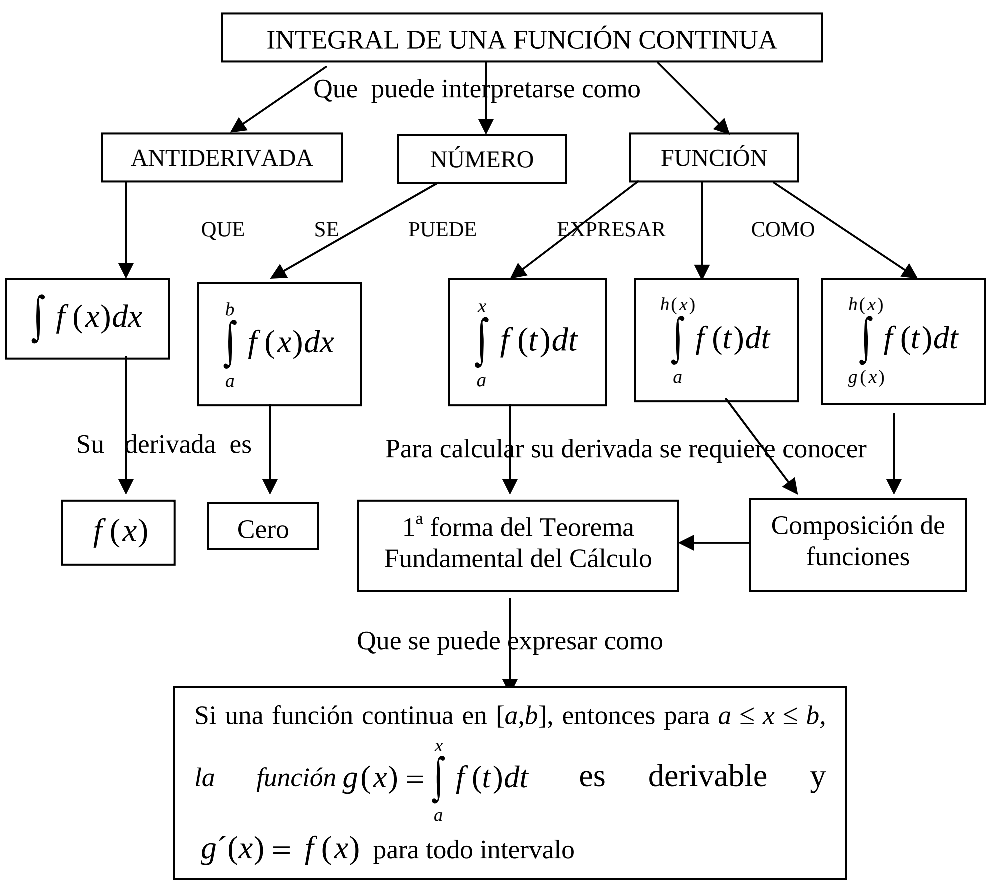
En esta situación la función g no se presenta en función de una variable, sino en función de otra función de manera implícita. Esta vez la relación funcional exige un conocimiento de las diferentes formas en que se puede representar la composición de funciones, y aquí se puede percibir aún más la necesidad de una concepción estructural del concepto de función asociado a la regla de la cadena.

TERCERA SITUACION

Calcule $g'(x)$ si $g(x) = \int_1^x t^2 \sqrt{t^2+1}\, dt$

La siguiente estructura sirve de referencia para las situaciones tres, cuatro, y seis, aclarando que en esta última se requiere el conocimiento de que la primera y segunda derivadas de la función que expresa la posición de un cuerpo, representan respectivamente, su velocidad y su aceleración.

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica que la función $g(x)$ está expresada por medio de la integral $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\,dt$ y que debe calcular la derivada de g	Para calcular la derivada de g se debe aplicar la primera forma del Teorema Fundamental del Cálculo	Se presenta la función $g(x)=\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\,dt$ Se pide calcular $g'(x)$
		$g'(x)=x^2\sqrt{x^2+1}$

En esta situación se quiere observar si el estudiante puede activar el esquema asociado con la primera forma del TFC, en una situación básica.

CUARTA SITUACIÓN

Sea $h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$. Calcule $h'(x)$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifica que la función *h*(*x*) está dada por la integral $\int_a^{f(x)} p(t)\, dt$ Identifica que debe calcular la derivada de h	Para derivar *h* se debe tener presente que el límite superior de la integral es la función *f*(*x*). de esta forma $h(u)=\int_a^u p(t)\, dt$	Se presenta la función $h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\, dt$. Se pide calcular $h'(x)$
Identifica que *h* esta en función de *u*, y a su vez, *u* está en función de *x*. Se quiere calcular $\frac{dh}{dx}$	Se aplica la regla de la cadena para Calcular la derivada de *h*: la derivada de *h* con respecto a *x* es igual a la derivada de *h* con respecto a *u* multiplicada por la derivada de *u* con respecto a *x*	Se hace $u=f(x)$; $h(u)=\int_a^u p(t)\, dt$ y $u=f(x)$.
Identifica que debe calcular $\frac{dh}{du}$ y $\frac{du}{dx}$	La derivada de *h* con respecto a *u* se calcula aplicando la primera forma del teorema fundamental del cálculo. La derivada de u con respecto a x es	$\frac{dh}{dx}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dx}$
Identifica que $\frac{dh}{dx}$ está en términos de *u* y de *x*	$u=f(x)$ se reemplaza en $p(u)$	$\frac{dh}{du}=p(u)$ y $\frac{du}{dx}=f'(x)$ Por tanto $\frac{dh}{dx}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dx}=p(u)\,f'(x)$
		$h'(x)=p(f(x))\,f'(x)$

Si se ha considerado la integral $\int_1^x f(t)\,dt$ como una función de la variable *x*, es de esperar que se reconozca la existencia de una composición de funciones, cuando la función $h(x)$ se presenta como la integral $h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$. De esta forma, los esquemas asociados al TFC, la composición de funciones y la regla de la cadena es necesario activarlos para el desarrollo exitoso de la situación. Se observa que la concepción estructural del concepto de función asociada a los conceptos anteriormente mencionados, desempeña un papel fundamental.

QUINTA SITUACION

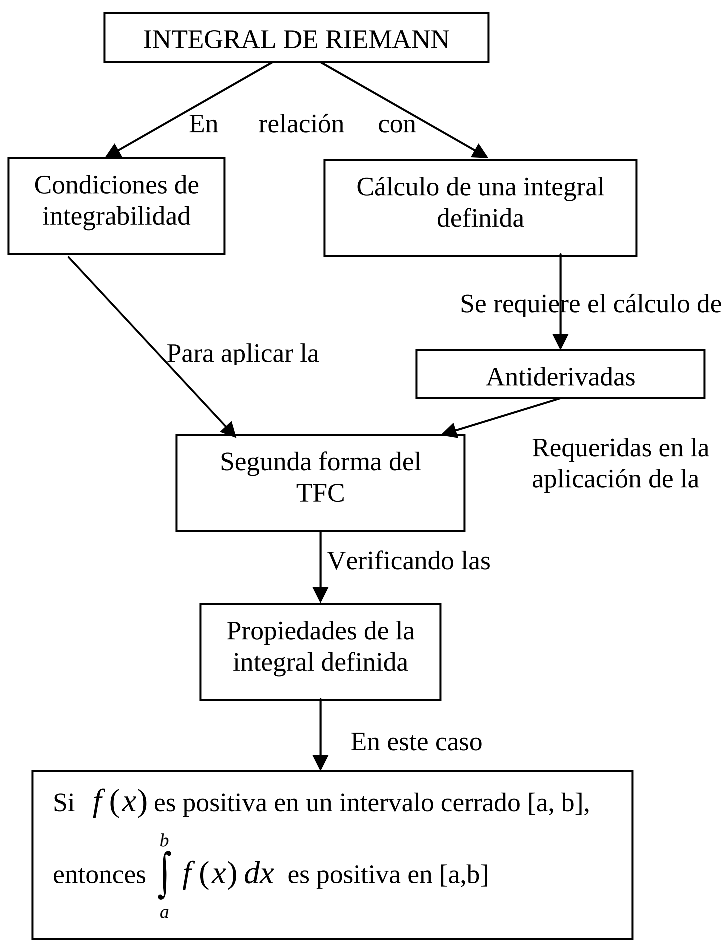
Una de las propiedades de la integral definida afirma que si una función $f(x)$ es positiva en un intervalo cerrado [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es positiva. Utilizando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo en el siguiente ejemplo, parecería que se está contradiciendo la afirmación inicial ¿Qué está fallando?:

$$g(x) = -\frac{1}{x} \text{ es una antiderivada de la función } f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ por tanto:}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right)\right) = -2$$

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$, en el sentido de Riemann, exige la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo [a, b]. En una situación ideal, se espera que la acción a seguir sea la de notar que la no continuidad de la función, no permite activar el esquema asociado al cálculo de la integral tal y como lo sugiere la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, pues la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no es continua en el intervalo [-1,1].

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifica que la función $h(x)$ está dada por la integral $\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$ Identifica que debe calcular la derivada de h	Para derivar h se debe tener presente que el límite superior de la integral es la función $f(x)$. de esta forma $h(u) = \int_a^{u} p(t)\,dt$	$h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\,dt$. Se pide calcular $h'(x)$
Identifica que h esta en función de u, y a su vez, u está en función de x. Se quiere calcular $\frac{dh}{dx}$	Se aplica la regla de la cadena para Calcular la derivada de h: la derivada de h con respecto a x es igual a la derivada de h con respecto a u multiplicada por la derivada de u con respecto a x	Se hace $u = f(x)$; $h(u) = \int_a^{u} p(t)\,dt$ y $u = f(x)$.
Identifica que debe calcular $\frac{dh}{du}$ y $\frac{du}{dx}$	La derivada de h con respecto a u se calcula aplicando la primera forma del teorema fundamental del cálculo. La derivada de u con respecto a x es	$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du}\frac{du}{dx}$
Identifica que $\frac{dh}{dx}$ está en términos de u y de x	$u = f(x)$ se reemplaza en $p(u)$	$\frac{dh}{du} = p(u)$ y $\frac{du}{dx} = f'(x)$ Por tanto $\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du}\frac{du}{dx} = p(u)\,f'(x)$
		$h'(x) = p(f(x))\,f'(x)$

SEXTA SITUACION

Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \le t \le 1$, la posición viene dada por la integral $f(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}\,dx$. (No intente el cálculo de esta integral). Calcule:

a) Su velocidad cuando $t = 1$

b) Su aceleración cuando $t = 1$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Para la función posición dada por $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$, se pide calcular la velocidad y la aceleración para $0 \le t \le 1$	Se debe relacionar la función posición con la función velocidad y a su vez la velocidad con la aceleración.	Se presenta la posición de una partícula en el instante t mediante la función $f(t)$ Cuando $0 \le t \le 1$, la posición viene dada por la integral $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$. Se pide no calcular la integral Se pide calcular: a) Su velocidad cuando $t=1$ b) Su aceleración cuando $t=1$
Se debe derivar la función $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$ para obtener la velocidad $v(t)$ Al derivar $v(t)$ se obtiene la aceleración $a(t)$	Se debe aplicar el teorema fundamental del cálculo para obtener $v(t)$ Posteriormente derivar $v(t)$ para obtener $a(t)$	La derivada de la función posición es la velocidad y la derivada de la velocidad es la aceleración.
La velocidad es $v(t)=\frac{1}{1+t^3}$ y la aceleración es $a(t)=\frac{-3t^2}{(1+t^3)^2}$. Debo calcular $v(1)$ y $a(1)$	Para calcular $v(1)$ y $a(1)$ reemplazo t por 1 en la funciones $v(t)$ y $a(t)$	$v(t)=\frac{1}{1+t^3}$ y $a(t)=(\frac{1}{1+t^3})'=\frac{-3t^2}{(1+t^3)^2}$ Se pide calcular $v(1)$ y $a(1)$
		$v(1)=\frac{1}{2}$ y $a(1)=-\frac{3}{4}$

Si se presenta la función posición $f(t)$ de un objeto, se espera que se active el esquema asociado a la concepción de las funciones velocidad y aceleración como las derivadas primera y segunda, respectivamente, de $f(t)$.

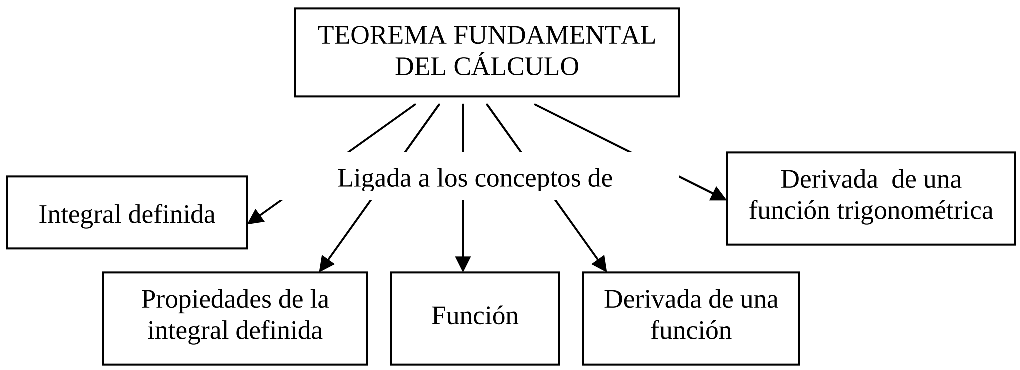
De otro lado, se sigue evidenciando la necesidad de interpretar la expresión $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$ como una función de *t*.

Después de estas consideraciones, se sigue naturalmente que si la función $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$ representa la función posición, entonces la función $f'(t)=\frac{1}{1+t^3}$ será la función velocidad y a su vez, la función $f''(t)=(\frac{1}{1+t^3})'=\frac{-3t^2}{(1+t^3)^2}$ será la función aceleración. Por último, el paso a seguir será el de evaluar las funciones velocidad y aceleración en $t=1$ para obtener la velocidad y aceleración deseadas.

SÉPTIMA SITUACIÓN

Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que: $\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½$ para todo x real.

ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL



Ciclo de Interacción

Cabe anotar que el estudiante puede desarrollar esta situación exitosamente sin la aplicación explícita de la primera forma del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). En principio, utilizando la segunda forma del TFC podría escribir $\int_c^x f(t)dt = g(t)\Big]_c^x = g(x) - g(c)$, donde la función g es una antiderivada de la función f. Entonces $g(x) - g(c) = \cos x - \frac{1}{2}$; se tiene entonces que $g(x) = \cos x$ y $g(c) = \frac{1}{2}$. De estas últimas dos expresiones se puede obtener que $\cos c = \frac{1}{2}$. Entonces $c = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$. Por otro lado, si $g(x) = \cos x$ es una antiderivada de la función *f*, entonces la función *f* es la derivada de *g*, de donde $f(x) = sen\, x$.

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifica que $\int_c^x f(t)dt$ es una función de *x* dada por una integral. Identifica que $\int_c^x f(t)dt$ = cos *x* – ½ es una igualdad de funciones. Identifica que debe hallar la función *f*(*x*) y la constante *c* tal que $\int_c^x f(t)dt$ = cos *x* – ½	Para calcular $f(x)$ se puede aplicar la primera forma del Teorema Fundamental del Cálculo	Se pide encontrar una función *f* y un valor de la constante *c*, en donde se verifique que $\int_c^x f(t)dt$ = cos *x* – ½ para todo *x* real.
Identifica que $\int_c^x f(t)dt$ = cos *x* – ½ y se y $f(x) = -senx$, se pide calcular el valor de la constante *c*	Ya se tiene que $f(x) = -senx$ Si se evalúa la ecuación $\int_c^x f(t)dt$ = cos *x* – ½ en $x = c$ se puede obtener el valor de c	Derivando en ambos lados de la ecuación $\int_c^x f(t)dt$ = cos *x* – ½ se obtiene $f(x) = -senx$. Se debe calcular el valor de *c*.
Identifica que $0 = \cos c - \frac{1}{2}$, es una ecuación trigonométrica	La ecuación $0 = \cos c - \frac{1}{2}$ se puede calcular usando la inversa de la función coseno	$f(x) = -senx$ Evaluando $\int_c^x f(t)dt$ en *c* se tiene: $\int_c^c f(t)dt = \cos c - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 = \cos c - \frac{1}{2}$
		$\cos c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ En resumen $f(x) = -senx$ y $c = \frac{\pi}{3}$

CAPÍTULO 5

RESULTADOS, ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

CAPÍTULO 5

RESULTADOS, ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

1.1 Resultados de la Primera Parte

Como se describió en la metodología, a continuación consignamos en una serie de tablas los resultados obtenidos en la primera parte de la investigación, en los que se mostrarán los niveles de éxito dados por los indicadores que ya hemos definido. Estos indicadores nos permitieron hacer un diagnostico cuantitativo con respecto a la comprensión del concepto de función como proceso o como objeto, presente en los estudiantes examinados. Los estudiantes son identificados por un número desde 1 hasta 14.

1.1.1 Sobre el estado de comprensión del concepto de función (primer instrumento)

En la tabla No. 1 están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con el literal a) de las situaciones 1), 2) y 3). (cf. Anexo No. 1)

NIVEL DE EXITO AL IDENTIFICAR FUNCIONES (NEF)					
Estudiante	Identifica funciones en el contexto			TOTAL	NEF
	Sagital	Ecuación	Gráfico		
1	0	0	1	1	0,33
2	1	1	0	2	0,67
3	1	0	1	2	0,67
4	1	0	0	1	0,33
5	1	0	1	2	0,67
6	1	0	1	2	0,67
7	1	1	1	3	1,00
8	1	0	1	2	0,67
9	1	0	1	2	0,67
10	0	0	1	1	0,33
11	1	0	1	2	0,67
12	0	0	1	1	0,33
13	1	0	1	2	0,67
14	1	0	1	2	0,67

Tabla No. 1

Consideramos que un estudiante tiene éxito en la identificación de funciones, si **NEF** ≥ 0.67. De acuerdo con este criterio, los estudiantes 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9,11 13 y 14 tuvieron éxito en esta situación (71%). Este resultado los consideramos propio de una concepción como proceso del concepto de función.

En la **tabla No. 2** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con el literal d) de las situaciones 1), 2) y 3) (cf. Anexo No. 1)

NIVEL DE EXITO AL SELECCIONAR FUNCIONES QUE POSEEN INVERSA (NEI)					
Estudiante	Identifica funciones invertibles en el contexto			TOTAL	NEI
	Sagital	Ecuación	Gráfico		
1	0	0	0	0	0,00
2	1	1	0	2	0,67
3	1	0	1	2	0,67
4	1	0	0	1	0,33
5	1	1	1	3	1,00
6	1	0	0	1	0,33
7	0	0	0	0	0,00
8	0	0	1	1	0,33
9	1	1	0	2	0,67
10	0	1	1	2	0,67
11	1	0	0	1	0,33
12	0	0	0	0	0,00
13	1	0	0	1	0,33
14	1	1	0	2	0,67

Tabla No. 2

Consideramos que un estudiante tiene éxito en la identificación de funciones que poseen inversa si **NEI** $\geq$ 0.67. De acuerdo con este criterio, los estudiantes 2, 3, 5, 9, 10 y 14 tuvieron éxito en esta situación (43%). Este resultado los consideramos propio de una concepción como objeto del concepto de función.

En la **tabla No. 3** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con el literal e) de las situaciones 1), 2) y 3). (cf. Anexo No. 1)

NIVEL DE ÉXITO AL CALCULAR LA COMPOSICIÓN DE *f* Y SU INVERSA (NECCI)					
Estudiante	Cálculo de la compuesta en el contexto			Total	NECCI
	Sagital	Ecuación	Gráfico		
1	0	0	0	0	0,00
2	1	1	0	2	0,67
3	1	1	0	2	0,67
4	1	0	0	1	0,33
5	1	1	1	3	1,00
6	1	0	0	1	0,33
7	0	0	0	0	0,00

8	0	0	0	0	0,00
9	0	0	1	1	0,33
10	1	1	0	2	0,67
11	1	0	0	1	0,33
12	0	1	0	1	0,33
13	1	1	0	2	0,67
14	1	1	1	3	1,00

Tabla No. 3

Consideramos que un estudiante tiene éxito en el cálculo de la composición de una función y su inversa si **NECCI** $\geq$ 0.67. De acuerdo con este criterio, los estudiantes 2, 3, 5, 10, 13 y 14 tuvieron éxito en esta situación. (43%). Situación que la consideramos propia de una concepción como objeto del concepto de función. Se observa una estabilidad en los estudiantes que responden correctamente en esta dos últimas situaciones, sin embargo nótese lo que sucede con los estudiantes 9 y 13: sería de esperar que su desempeño fuera similar en ambas situaciones, si es actúan guiados por una concepción como objeto del concepto de función, pero, de acuerdo a sus calificaciones, podríamos inferir que los esquemas que guían sus acciones no son propios de concepciones estructurales. Esta es una razón más para reafirmar nuestra hipótesis de que en algunas situaciones, los esquemas que guían las acciones exitosas de los estudiantes son más figurativos que operatorios.

En la **tabla No.4** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la sexta situación. (cf. Anexo No. 1)

NIVEL DE ÉXITO EN LA VERIFICACIÓN DE IGUALDAD DE IMÁGENES EN DIFERENTES CONTEXTOS (NEIIM)					
Estudiante	Verifica que $f(0) = f(1)$ en diferentes contextos				NEIIM
	F. Constante	F. a Trozos	F. Algebraica	F. Gráfica	
1	1,00	1,00	1,00	0,00	0,75
2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
4	0,00	1,00	1,00	1,00	0,75
5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
6	1,00	0,00	1,00	1,00	0,75
7	1,00	0,00	1,00	1,00	0,75
8	0,00	1,00	0,00	1,00	0,50
9	1,00	0,00	1,00	0,00	0,50
10	1,00	1,00	1,00	0,33	0,83
11	1,00	0,00	1,00	0,33	0,58
12	0,00	0,00	1,00	0,00	0,25
13	1,00	0,00	1,00	1,00	0,75
14	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabla No. 4

Consideramos que un estudiante tiene éxito en la verificación de igualdad de imágenes en diferentes contextos, si **NEIIM** $\geq$ 0.67. De acuerdo con este criterio, los estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13 y 14 tuvieron éxito en esta situación. (71%). Situación que la consideramos propia de una concepción como proceso del concepto de función.

En la **tabla No.5** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con los literales b) y c) de las situaciones 1), 2) y 3). (cf. Anexo No. 1)

Consideramos que un estudiante dispone de un sistema simbólico abstracto **(DSA)**, si **DSA** ≥ 0.67. De acuerdo con este criterio, los estudiantes 1 y 4 son los únicos que no lo poseen. Es de esperar que estos estudiantes sean los de más baja calificación en el indicador CO (concepción operacional), el alto nivel de éxito en esta tabla nos estaría garantizando que los estudiantes tienen la capacidad de interpretación de los símbolos utilizados en las diferentes situaciones.

DISPONIBILIDAD DE UN SISTEMA SIMBOLICO ABSTRACTO (DSA) NIVEL DE ÉXITO QUE TIENE EL ESTUDIANTE PARA REALIZAR CÁLCULOS BASICOS (NECB)													
Estudiante	Cálculo de la Imagen			**NECB (1)**	Cálculo de Compuestas			**NECB (2)**	Cálculo de Preimagenes			**NECB (3)**	**DSA**
	Sagital	**Ecuación**	**Gráfico**		**Sagital**	**Ecuación**	**Gráfico**		**Sagital**	**Ecuación**	**Gráfico**		
1	0	1	1	0,67	0	1	0	0,33	0	1	0	0,33	0,44
2	1	1	0	0,67	1	1	0	0,67	1	1	0	0,67	0,67
3	1	1	1	1,00	0	0	0	0,00	1	1	1	1,00	0,67
4	1	1	1	1,00	0	0	0	0,00	1	1	0	0,67	0,56
5	1	1	1	1,00	1	1	1	1,00	1	1	1	1,00	1,00
6	1	1	1	1,00	0	1	1	0,67	1	1	1	1,00	0,89
7	1	1	1	1,00	0	1	1	0,67	0	0	1	0,33	0,67
8	1	1	1	1,00	0	1	1	0,67	0	1	1	0,67	0,78
9	1	1	1	1,00	0	0	0	0,00	1	1	1	1,00	0,67
10	1	1	1	1,00	0	1	0	0,33	1	1	1	1,00	0,78
11	1	1	1	1,00	1	1	1	1,00	1	0	1	0,67	0,89
12	1	1	1	1,00	0	1	0	0,33	1	1	1	1,00	0,78
13	1	1	1	1,00	1	0	0	0,33	1	1	0	0,67	0,67
14	1	1	1	1,00	0	0	0	0,00	1	1	1	1,00	0,67

Tabla No. 5

En la **tabla No.6** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la séptima situación. (cf. Anexo No. 1)

NIVEL DE ÉXITO EN LA DESCRIPCIÓN ALGEBRAICA DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES (NEFF)			
Estudiante	Descripición algebraica de una familia de		NEFF
	Rectas	Parábolas	
1	0,00	0,00	0,00
2	1,00	1,00	1,00
3	1,00	1,00	1,00
4	0,50	0,00	0,25
5	0,00	0,00	0,00
6	0,50	0,50	0,50
7	0,00	0,00	0,00
8	1,00	0,00	0,50
9	0,00	0,00	0,00
10	0,00	1,00	0,50
11	0,00	1,00	0,50
12	0,00	1,00	0,50
13	0,00	0,00	0,00
14	0,50	0,50	0,50

Tabla No. 6

Aquí se comienza a notar el bajo desempeño de los estudiantes en una clásica situación en la que las funciones se deben tratar como objetos de conocimiento. Si continuamos con el criterio de que su calificación debe ser igual o superior a 0.67, entonces sólo los estudiantes 2 y 3 estarían activando exitosamente esquemas de tipo operatorio. Sin embargo, nos gustaría reflexionar sobre lo siguiente: asociar la forma de una curva con su expresión algebraica puede obedecer a un esquema predominantemente figurativo, así que no podríamos inferir con toda certeza que quien responde exitosamente en esta situación está activando esquemas de tipo operatorio, esto parecería estar siendo reforzado según lo que sucede con los estudiantes 10, 11 y 12 que pueden "reconocer" la expresión algebraica de una familia de parábolas, pero no logran realizar el mismo ejercicio para una, supuestamente más sencilla, familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas. Pongámoslo de una forma equivalente, pero más simple: ¿Podría uno afirmar que un estudiante sabe sumar números naturales si reconoce que 71+21 = 92, a pesar de que ignora que 1+2 = 3?

En la **tabla No.7** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la octava situación. (cf. Anexo No. 1). Los numerales **(1)**, **(2)** y **(3)** que aparecen en la tabla, nos servirán más adelante para discriminar los indicadores **NEIIN(1,3)** y **NEIIN(2)**.

NIVEL DE ÉXITO EN LAS DIFERENTES INTERPRETACIONES DE LA INTEGRAL (NEIIN)					
Estudiante	Interpreta la Integral $\int_0^x (t^2+1)\,dt$ como			Total	NEIIN
	Número real (1)	Función (2)	Área bajo una curva (3)		
1	0	0	1	1	0,33
2	1	1	1	3	1,00
3	1	1	1	3	1,00
4	1	0	0	1	0,33
5	1	0	0	1	0,33
6	1	0	0	1	0,33
7	0	1	0	1	0,33
8	0	0	1	1	0,33
9	1	0	1	2	0,67
10	1	0	1	2	0,67
11	1	0	0	1	0,33
12	0	0	0	0	0,00
13	1	0	0	1	0,33
14	1	0	1	2	0,67

Tabla No. 7

En este cuadro se pueden hacer las siguientes lecturas: La sola interpretación de la integral $\int_0^x (t^2+1)\,dt$ ya se como un número real cuando *x* toma un valor fijo, o como el área bajo la curva, podríamos decir que, son interpretaciones resultantes de una concepción operacional, pero si se puede interpretar la integral como una función con dominio $(0,+\infty)$, podríamos decir que se la está tratando desde un punto de vista estructural. Se observa que únicamente los estudiantes 2, 3 y 7 reconocen que se tiene una función, el resto, (78.6%), no le asigna tal significado. Por el contrario, el 71.4% considera que se tiene una integral definida para valores fijos de *x*, es decir, una función y el 50% considera que para valores fijos de *x* representa el área bajo una curva. Un dato curioso se presenta con el estudiante 7: reconoce la integral como una función real, sin embargo, niega que represente un número real para valores fijos de la variable *x*, algo que está implícito en la consideración de la integral como función, al igual que representa el área bajo una curva.

En la **tabla No.8** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la novena situación. (cf. Anexo No. 1)

NIVEL DE ÉXITO EN LA IDENTIFICACIÓN DE CONDICIONES DE IGUALDAD DE FUNCIONES (NEIGF)		
Estudiante	Verifica que F[0,1] no está contenida en F[0,2]	NEIGF
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
11	1	1
12	0	0
13	1	1
14	0	0

Tabla No. 8

El éxito en esta situación demanda un tratamiento como objeto del concepto de función, así inclusive lo reconocemos en el capítulo 1 cuando presentamos una lista de indicadores de la concepción de un concepto como objeto. Un sujeto tiene una concepción estructural de un concepto, si, entre otras cosas, *"existe una coordinación entre el concepto y sus propiedades"*. Nótese como esta situación es tratada exitosamente sólo por los estudiantes 11 y 13. Se esperaría que en otras situaciones, en las que se requiere una activación de esquemas propios de una concepción estructural, este par de estudiantes actuaran de manera similar, sin embargo, como se puede observar en la lectura de cada uno de las tablas anteriores, no es así, es decir, parece que fuera una concepción operacional la que guiara sus acciones. Se podría entonces inferir, acaso contraviniendo la hipótesis de Sfard, que en el proceso de comprensión de un concepto, la comprensión como objeto y como proceso se dan en paralelo y no secuencialmente.

En la **tabla No.9** están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la quinta situación. (cf. Anexo No. 1)

NIVEL DE ÉXITO EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ÁREA (NEGFA)		
Estudiante	Gráfica de la función que representa el área de una función descrita gráficamente	NEGFA
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	1	1
5	1	1
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
11	0	0
12	0	0
13	1	1
14	1	1

Tabla No. 9

Esta tabla permite hacer una discusión muy similar a la anterior, pues la situación que se califica en este cuadro también demanda poseer una concepción de función como objeto. Nótese como los niveles de éxito en este tipo de situaciones es bastante bajo, lo que va señalando una conclusión: los estudiantes examinados no tienen una concepción estructural del concepto de función.

La tabla No. 10 muestra el resumen de las calificaciones de los niveles de éxito en las diferentes situaciones propuestas en el instrumento número uno, promediando las calificaciones de los indicadores de situaciones propias de una concepción operacional **(CO)** y las propias de una concepción estructural **(CE)**

Estado de comprensión del concepto de función (proceso-objeto)												
Estudiante	Concepción Operacional				CO	Concepción Estructural						CE
	NEF	DSA	NEIIM	NEIIN (1,3)		NEI	NECCI	NEIGF	NEFF	NEIIN (2)	NEGFA	
1	0,33	0,44	0,75	0,50	0,51	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,67	0,67	1,00	1,00	0,84	0,67	0,67	0,00	1,00	1,00	0,00	0,56
3	0,67	0,67	1,00	1,00	0,84	0,67	0,75	0,00	1,00	1,00	0,00	0,57
4	0,33	0,56	0,75	0,50	0,53	0,33	0,33	0,00	0,25	0,00	1,00	0,32
5	0,67	1,00	1,00	1,00	0,92	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,50
6	0,67	1,00	0,75	0,50	0,73	0,33	0,33	0,00	0,50	0,00	0,00	0,19
7	1,00	0,67	0,75	0,00	0,60	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,17
8	0,67	0,78	0,75	0,50	0,67	0,33	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,14
9	0,67	0,67	0,50	1,00	0,71	0,67	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17
10	0,33	0,78	0,88	1,00	0,75	0,67	0,67	0,00	0,50	0,00	0,00	0,31
11	0,67	0,89	0,63	0,50	0,67	0,33	0,33	1,00	0,50	0,00	0,00	0,36
12	0,33	0,78	0,00	0,50	0,40	0,00	0,33	0,00	0,50	0,00	0,00	0,14
13	0,67	0,78	0,75	0,50	0,67	0,33	0,67	0,00	0,00	0,00	1,00	0,33
14	0,67	0,67	1,00	1,00	0,83	0,67	1,00	0,00	0,50	0,00	1,00	0,53

Tabla No. 10

Si aceptamos que se tiene una u otra concepción si la calificación es igual o superior a 0.67, se observa entonces que en los estudiantes 1, 4, 7 y 12 la concepción del concepto de función no alcanza la calificación mínima establecida ni como operacional ni como estructural. En tanto que, los estudiantes 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14 y 15 alcanzan una concepción operacional y se subraya que ninguno de los estudiantes examinados presenta una concepción estructural del concepto de función.

Los resultados hasta aquí obtenidos y que acabamos de relacionar, como veremos más adelante, nos sirvieron para apoyar nuestra hipótesis respecto a que la concepción estructural de función tiene el carácter de necesaria para la comprensión del TFC.

En la siguiente sección presentamos los resultados correspondientes a las situaciones que evaluaron la comprensión del TFC.

1.1.2 Sobre el Estado de Comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (Segundo Instrumento)

En la tabla No. 1 están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con las situaciones 1) y 2). (cf. Anexo No. 2)

NIVEL DE ÉXITO EN LA APLICACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA (NERC)			
Estudiante	**Aplica la regla de la cadena en el contexto**		**NERC**
	y = f(u) , u=g(x)	**y = f (g(x))**	
1	0,7	0,0	0,35
2	1,0	0,7	0,85
3	1,0	0,0	0,50
4	1,0	0,0	0,50
5	1,0	0,0	0,50
6	1,0	0,0	0,50
7	1,0	0,7	0,85
8	1,0	0,0	0,50
9	1,0	0,0	0,50
10	1,0	0,7	0,85
11	1,0	0,7	0,85
12	0,0	0,0	0,00
13	1,0	0,0	0,50
14	1,0	0,0	0,50

Tabla No. 11

Consideramos que el conocimiento de la regla de la cadena es necesario para indagar por la derivada de funciones de la forma $\int_a^{f(x)} g(t)dt$, razón por la cual decidimos evaluar el nivel de éxito de los estudiantes en situaciones que requieren de la aplicación de esta regla. Sin embargo, aunque la intención inicial era la que acabamos de comentar, no debe sorprendernos el hecho de que el éxito en la aplicación de esta regla en el primer contexto sea de aproximadamente del 93%. Este éxito se explica por una concepción como proceso de la regla de la cadena. Aclarando que esta concepción se apoya en un f*uncionamiento figurativo,* más que operativo, del esquema conceptual asociado a la regla de cadena. Así, dada $y = f(u)$ y $u = g(x)$, el estudiante activa el esquema $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ y efectúa las derivadas por separado y finalmente multiplica los resultados. Procede como obedeciendo a señales, más que operando (coordinando esquemas) sobre otros esquemas. El éxito está asegurado.

Sin embargo, la demanda cognitiva, de la situación planteada en términos del registro f(g(x)), es superior. En este último caso, el esquema director (asociado a derivada) aplicado a la situación de una función compuesta debe coordinar (aspecto operatorio del esquema conceptual) otros esquemas en los que el concepto de función se ha encapsulado como una estructura total para que, de esa manera, el esquema derivada actúe sobre la composición de funciones como una función.

No consideramos aventurado afirmar que estaríamos mostrando la necesidad de una concepción estructural del concepto de función, en la comprensión de la regla de la cadena.

En la tabla No. 12 están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con las situaciones 3) y 4). (cf. Anexo No. 2)

NIVEL DE ÉXITO EN LA APLICACIÓN DEL TFC (NETFC)			
Estudiante	Cálculo de g ´(x) y h´(x) en el contexto		NETFC
	$g(x)=\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\,dt$	$h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$	
1	0	0	0,00
2	1	0	0,50
3	1	0	0,50
4	0	0	0,00
5	0	0	0,00
6	0	0	0,00
7	1	1	1,00
8	0	0	0,00
9	0	0	0,00
10	1	1	1,00
11	1	0	0,50
12	0	0	0,00
13	0	0	0,00
14	1	0	0,50

Tabla No. 12

Nótese que 6 (44%) estudiantes tuvieron éxito al aplicar el TFC en el primer contexto, mientras que apenas 2 (14%) tuvieron éxito al aplicar el TFC en el segundo contexto. Si nos atenemos a los resultados en el primer contexto, podríamos decir que más del 50% de los estudiantes analizados no comprenden el TFC. Con respecto al segundo contexto, la situación es más dramática, casi el 90% de los estudiantes responden erróneamente. Podríamos dar dos causas tratando de explicar el fracaso en este último caso: la primera, que no le asignan un significado correcto a la integral $\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$. La segunda, que desconocen la regla de la cadena. Sea cual fuere la causa, el hecho es que en ambas se requiere de una concepción estructural del concepto de función, ya sea para interpretar la integral $\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$ como una función compuesta, o para la aplicación de la regla de la cadena en un contexto en el que los registros semióticos no son los que se exponen cuando se da a conocer por primera vez esta regla.

Los estudiantes 7 y 10 parecerían estar dando evidencias de comprensión del TFC, sin embargo, más adelante veremos resultados de estos dos estudiantes que apoyarían la hipótesis de que sus ‘éxitos no corresponden a una concepción estructural del TFC

En la tabla No. 13 están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la quinta situación. (cf. Anexo No. 2)

NIVEL DE ÉXITO EN LA DISCRIMINACIÓN DE LA CONTINUIDADAD PARA LA EXISTENCIA DE LA INTEGRAL DEFINIDA (NECID)		
Estudiante	Discrimina la continuidad del integrado en la solución de $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$	**NECID**
1	NO	0
2	SI	1
3	SI	1
4	NO	0
5	SI	1
6	NO	0
7	SI	1
8	SI	1
9	NO	0
10	NO	0
11	SI	1
12	NO	0
13	NO	0
14	NO	0

Tabla No. 13

Hay algo que no queríamos dejar de lado y era la confirmación de que en la aplicación de la segunda forma del TFC en la resolución de la integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$, el estudiante requiere tener en consideración la continuidad de la función que está en el integrando. Se observa apenas 6 de los 14 estudiantes examinados, es decir, aproximadamente el 43% tiene en cuenta esta condición necesaria para la aplicación de esta segunda forma del Teorema Fundamental.

En la tabla No. 14 están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la sexta situación. (cf. Anexo No. 2)

NIVEL DE ÉXITO EN LA APLICACIÓN EL TFC EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA (NETFCP1)			
Estudiante	Calcula la velocidad y la aceleración, dada la posición como $f(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$		NETFCP1
	Calcula la velocidad	Calcula aceleración	
1	0,00	0,00	0,00
2	0,80	1,00	0,90
3	1,00	1,00	1,00
4	0,00	0,00	0,00
5	1,00	0,40	0,70
6	0,80	0,80	0,80
7	1,00	0,00	0,50
8	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,00
10	1,00	0,00	0,50
11	1,00	1,00	1,00
12	0,00	0,00	0,00
13	0,80	0,80	0,80
14	0,80	0,80	0,80

Tabla No. 14

En la situación correspondiente a las calificaciones mostradas en la tabla se requiere del TFC como instrumento para resolver una situación problema. Con respecto a los resultados consideramos pertinente hacer el siguiente análisis: los estudiantes 2, 3, 7, 10, 11 y 14 respondieron exitosamente esta situación (calculando la velocidad) y la equivalente a la aplicación del TFC mostrada en la tabla No. 12, algo de esperar; sin embargo, nótese que los estudiantes 5 y 13 calculan correctamente la velocidad habiendo errado en el cálculo de la derivada de la función $g(x) = \int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}dt$. Una vez más, podríamos decir que en estos estudiantes su éxito en esta situación no está respaldado por una comprensión del TFC, es muy posible que este éxito se deba a la activación de un esquema figurativo. Varios de los estudiantes que erraron, o, no aplicaban el TFC, o al aplicarlo, derivaban incorrectamente, o no discriminaban las variables *t* y *x*. Era común encontrar expresiones como $v(t) = \frac{1}{1+x^2}$, denotando el tratamiento de las variables como meras etiquetas

En la tabla No. 15 están consignadas las calificaciones obtenidas por los estudiantes, en relación con la séptima situación. (cf. Anexo No. 2)

NIVEL DE ÉXITO EN LA APLICACIÓN EL TFC EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA (NETFCP2)			
Estudiante	**Calcula la función *f* y la constante *c* en la ecuación** $\int_c^x f(t)\,dt = \cos x - \frac{1}{2}$		**NETFCP2**
	Calcula la función *f*	**Calcula la constante *c***	
1	0	0	0,00
2	0	1	0,50
3	1	1	1,00
4	0	0	0,00
5	1	0	0,50
6	0	0	0,00
7	0	0	0,00
8	0	0	0,00
9	0	0	0,00
10	1	1	1,00
11	0	0	0,00
12	0	0	0,00
13	0	0	0,00
14	0	0	0,00

Tabla No. 15

Igual que en la situación anterior, en esta también se requiere del TFC como instrumento para resolver una situación problema. Esta tabla permite hacer una discusión muy similar a la anterior, pues en la situación que se califica en este cuadro también se requiere del uso del TFC para resolver un problema. A diferencia de la anterior, en esta situación el nivel de éxito en el cálculo de la función *f* disminuye (solo 3 estudiantes tienen éxito), algo que permitiría inferir que los estudiantes examinados no poseen un nivel de comprensión mínimo el TFC.

Hemos querido recoger en esta tabla lo que se podría llamar el nivel de comprensión el TFC. (**NCTFC**) lo obtuvimos promediando las calificaciones de los indicadores (**NETFC**), (**NETFCP1**) y (**NETFCP2**)

NIVEL DE COMPRENSIÓN DEL TFC (NCTFC)				
Estudiante	**NETFC**	**NETFCP1**	**NETFCP2**	**NCTFC**
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,50	0,90	0,50	0,63
3	0,50	1,00	1,00	0,83
4	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,70	0,50	0,40
6	0,00	0,80	0,00	0,27
7	1,00	0,50	0,00	0,50
8	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,00	0,00
10	1,00	0,50	1,00	0,83
11	0,50	1,00	0,00	0,50
12	0,00	0,00	0,00	0,00
13	0,00	0,80	0,00	0,27
14	0,50	0,80	0,00	0,43

Tabla No. 16

Si aceptamos como un nivel mínimo de comprensión la correspondiente a una calificación del indicador **NCTFC** mayor o igual a 0.67, observamos que sólo dos estudiantes (3 y 10) tendrían una comprensión aceptable del TFC y uno de ellos (el 2) casi llegando a un nivel de comprensión mínimo. Con respecto al estudiante 10 haremos un comentario más adelante que podría explicar las razones de sus calificaciones. Con respecto al estudiante número 3, su éxito parece obedecer a esquemas figurativos, como se lo hemos comentado en relación con las calificaciones de los indicadores **NERC** segundo contexto y **NETFC** segundo contexto. En relación con el estudiante 2, que se acerca a un nivel mínimo de comprensión el TFC, decidimos escogerlo como uno de los casos particulares que se estudiaron en la segunda parte de la investigación.

Finalmente queremos hacer una comparación de los estados de concepción del concepto de función y su relación con la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. Tal comparación se presenta en la siguiente tabla

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS CONCEPCIONES PROCEDIMENTAL-ESTRUCTURAL DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN vs. LA COMPRENSIÓN DEL TFC			
Estudiante	**Concepción operacional**	**Concepción estructural**	**NCTFC**
1	0,51	0,00	0,00
2	0,84	0,56	0,63
3	0,84	0,57	0,83
4	0,53	0,32	0,00
5	0,92	0,50	0,40
6	0,73	0,19	0,27
7	0,60	0,17	0,50
8	0,67	0,14	0,00
9	0,71	0,17	0,00
10	0,73	0,27	**0,83**
11	0,66	0,36	0,50
12	0,40	0,14	0,00
13	0,67	0,33	0,27
14	0,83	0,53	0,43

Tabla No. 17

Los resultados nos muestran una correlación entre una débil concepción estructural del concepto de función y una débil comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. Sin embargo el estudiante 10 parecería salirse de la norma. ¿Cómo explicar que sin una concepción como objeto del concepto de función, pudiera tener éxito en la comprensión del TFC. Este fenómeno podría justificarse en el hecho de que el estudiante estaba repitiendo el curso de cálculo, un motivo más para inferir que él acudía a "recuerdos" (léase esquemas figurativos) más que a esquemas operatorios a la hora de responder a las situaciones problema que se le plantearon.

Los estudiantes dos y tres que mostraron estar aproximándose a una concepción estructural del concepto de función, mostraron igualmente el más alto nivel de comprensión del TFC. Sin embargo, como ya lo comentamos, los desarrollos exitosos del estudiante 3 parecen obedecer a esquemas figurativos.

1.2 Resultados de la Segunda Parte

Estos resultados nos permitieron, a través del estudio de las respuestas escritas de los estudiantes en las diferentes situaciones, hacer inferencias plausibles en relación con los esquemas que activaron y dirigieron sus acciones en procura de desarrollos exitosos.

1.2.1 Análisis Cognitivo de Dos Casos Particulares

A continuación se presenta el análisis, desde la dimensión cognitiva, de cada una de las situaciones en dos casos particulares. Se han elegido dos estudiantes que por sus resultados en la primera parte de la investigación mostraron niveles extremos de comprensión, tanto del concepto de función, como del Teorema Fundamental del Cálculo. Los estudiantes elegidos fueron el No.1 al que llamaremos Carlos, y el estudiante 2 al que llamaremos Juan.

Trataremos, en lo posible, evidenciar el rol que desempeñaron las concepciones como proceso y/o como objeto del concepto de función para el desarrollo exitoso o errado en las diferentes situaciones.

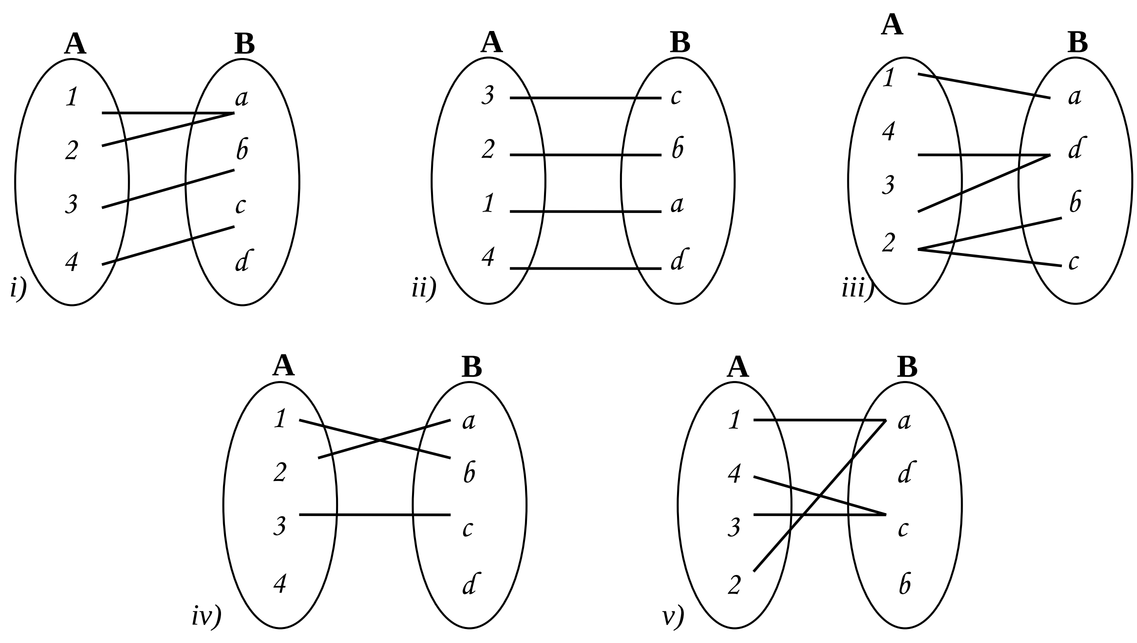
PRIMER CASO:

Estudiante número dos: Juan

A. INSTRUMENTO NÚMERO UNO

PRIMERA SITUACIÓN

(a) En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique cada una de sus respuestas.*



(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), un valor x tal que f(x) = d

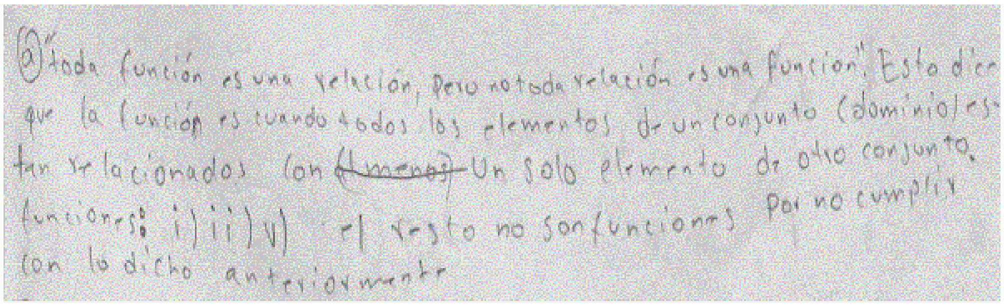
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h (g(a)).

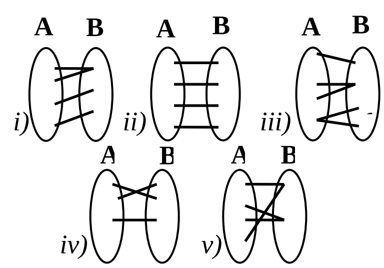
Para el literal a)

En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique cada una de sus respuestas.*

La siguiente es la respuesta de Juan:


a) "toda función es una relación, pero no toda relación es una función". Esto dice que la función es cuando todos los elementos de un conjunto (dominio) están relacionados con ~~almenos~~ Un sólo elemento de otro conjunto.
funciones: i) ii) v) el resto no son funciones por no cumplir con lo dicho anteriormente

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Hay 5 diagramas de flechas que relacionan dos conjuntos A y B. En los diagramas i), ii) y v) cada elemento de A está relacionado sólo con uno de B En el diagrama iii) un elemento de A está relacionado con dos de B En el diagrama iv) un elemento de A no está relacionado con ninguno de B	Establezco un criterio que permita decidir que diagramas representan una función.	Se presentan 5 diagramas de flechas en los que se pide identificar cuáles de ellos representan una función de A en B. Se pide justificar la respuesta. 
		"Toda función es una relación, pero no toda relación es una función". Esto dice que la función es cuando todos los elementos de un conjunto (dominio) están relacionados con un solo elemento de otro conjunto. Funciones: i), ii) y v) el resto no son funciones por no cumplir con lo dicho anteriormente"

Nótese que Juan, en la justificación de su respuesta aplica una de las diferentes definiciones de función, lo que le permite resolver con éxito la situación. Para Juan es claro que cada elemento de A debe estar relacionado sólo con un elemento de B.

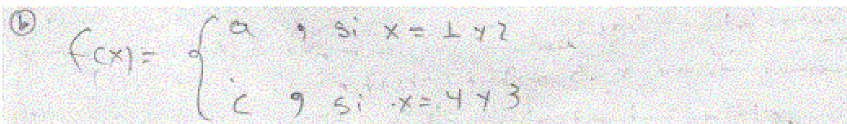
Existen diferentes criterios para decidir cuando se está ante una función. Por ejemplo, si la situación se hubiese presentado con curvas, posiblemente la guía para decidir que curvas representan funciones sería la prueba de la recta vertical, o ante un conjunto de parejas ordenadas la guía sería diferente, tal y como se observa en el literal a) de la segunda situación. Si Juan sólo respondiera bien ante cierto tipo de situaciones podríamos inferir que la concepción del concepto en Juan es procedimental pues sus acciones obedecen a uno de los indicadores de concepción del concepto como proceso ya relacionados en el capítulo 1: “*El concepto es considerado como una entidad potencial: se percibe como algo que se realiza en el tiempo*”

Estas razones permiten inferir que el desempeño exitoso en la situación considerada en este literal no sería una prueba concluyente de que Juan posee una concepción procedimental o estructural del concepto. Se requiere de más pruebas.

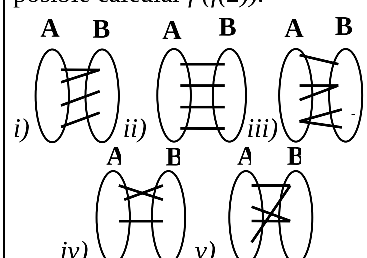
Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?

La siguiente es la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico como funciones los diagramas i), ii) y v) Elige el diagrama *v)*	*f(2)* es posible calcularlo describiendo de forma algebraica la función *f* determinada por este diagrama Puesto que cuando x toma el valor de 1 y 2 la imagen es a y cuando x toma el valor de 4 y 3 la imagen es c entonces la función *f* que permite calcular *f(2)* se puede definir como una función a trozos	Se presentan 5 diagramas de flechas en los que se pide identificar uno de ellos como una función f y se pide calcular *f(2).* De igual manera se pregunta si es posible calcular *f (f(2)).* 
En la función $f(x)=\begin{cases} a\ , & si\, x=1\ y\ \ 2 \\ c\ , & si\, x=3\ y\ \ 4 \end{cases}$ se puede calcular *f(2)*	Puesto que *x=2*, según la definición de f se observa que al reemplazar x por 2, se puede evaluar *f(2)*	El diagrama elegido se define mediante la siguiente función a trozos $f(x)=\begin{cases} a\ , & si\, x=1\ y\ \ 2 \\ c\ , & si\, x=3\ y\ \ 4 \end{cases}$
		f(2)=a

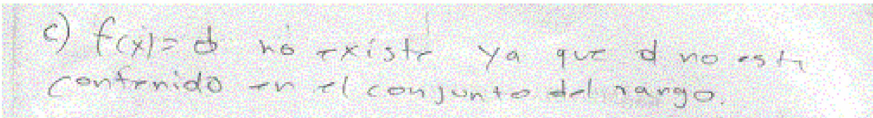
Nótese que Juan después de definir *f* no calcula explícitamente *f(2),* sin embargo de acuerdo con sus acciones puede inferirse que *f(2)=a*.

Se observa que Juan domina exitosamente el cambio de registro gráfico al registro simbólico, propio de un estudiante que dispone de un sistema simbólico abstracto apropiado a cada situación. Infortunadamente en el desarrollo de esta situación no respondió si era posible calcular *f(f(2))*. En resumen, podría inferirse que Juan resuelve esta situación bajo las concepciones procedimental del concepto de función.

Para el literal c)

Determine, usando la misma *f* de (b), un valor *x* tal que *f*(*x*) = *d*

La siguiente es la respuesta de Juan: VER IMAGEN # 3


c) f(x)=d no existe ya que d no esta contenido en el conjunto del rango.

Ciclo de Interacción:

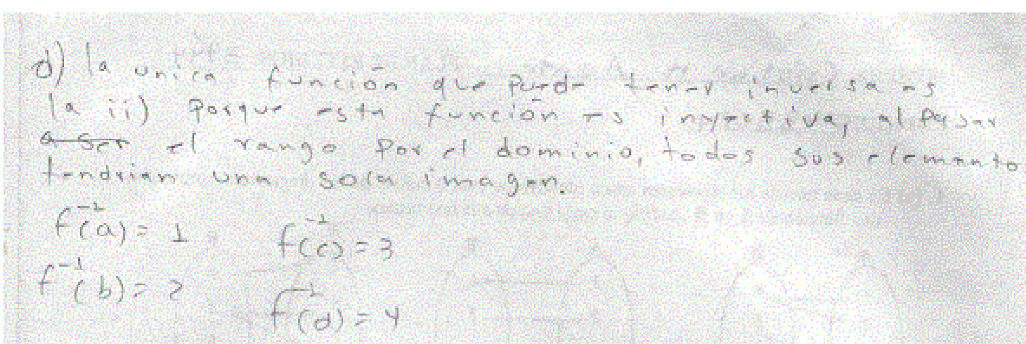
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo resolver la ecuación *f(x) =d*	La ecuación *f(x)=d* existe (léase *"se puede resolver"*) si *d* está en el rango de *f*.	Se pide, utilizando la función *f* que eligió en el literal (b), un valor de *x* tal que *f(x)=d*
Debo verificar si *d* pertenece al rango de *f*	El rango de *f* está formado por *a* y *c*.	Se debe verificar la existencia de la solución de la ecuación *f(x)=d*, indagando sobre la pertenencia de *d* al rango de *f*
		"f(x)=d no existe ya que d no está contenido en el conjunto del rango"

Sigue infiriéndose que Juan posee la concepción operacional bien estructurada del concepto de función, pues se nota en él la alternancia de diferentes representaciones del concepto reflejado en el hecho de que hallar el valor de *x* tal que *f(x)=d*, es interpretado por Juan de diferentes maneras: como una ecuación que debe resolver, ó, decidir por inspección si existe un elemento del dominio de *f* tal que *f(x)=d*.

Para el literal d)

¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* <u>*cada una*</u> *de sus respuestas.*

La siguiente es la respuesta de Juan:


d) la unica función que puede tener inversa es la ii) porque esta función es inyectiva, al pasar ~~a ser~~ el rango por el dominio, todos sus elementos tendrían una sola imagen.

$f^{-1}(a)=1$ $f^{-1}(c)=3$

$f^{-1}(b)=2$ $f^{-1}(d)=4$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Entre los diagramas i), ii) y v) debo elegir una función que posea inversa.	Debo elegir aquel diagrama que cumpla las condiciones para que posea inversa	Se observa que los diagramas que representan funciones son i), ii) y v) Se pregunta cuáles de las funciones que se identificaron poseen inversa.
Aquel diagrama que sea la representación de una función inyectiva será el que posee inversa	Debo mostrar que cada elemento del rango tiene una sola imagen mediante la inversa	*"la única función que puede tener inversa es la ii) porque esta función es inyectiva, al pasar el rango por el dominio, todos sus elementos tendrían una sola imagen"*
		$f^{-1}(a)=1$, $f^{-1}(b)=2$, $f^{-1}(c)=3$ y $f^{-1}(d)=4$

Se nota, según las acciones de Juan que la condición de sobreyectividad, o está implícita en su análisis de la situación, o está ausente, en referencia a la existencia de la función inversa.

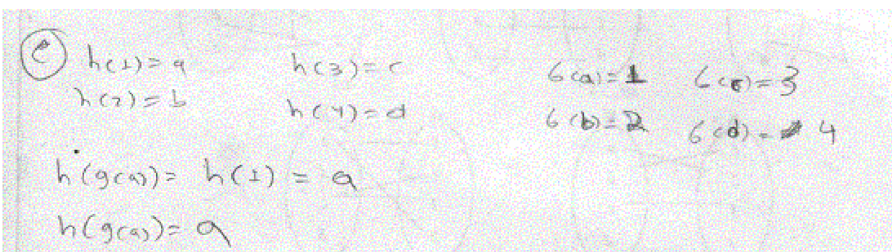
Nótese que en esta situación, Juan continúa evidenciando una concepción estructural del concepto de función, sin embargo, en la siguiente situación podría intuirse que Juan no actúa bajo una concepción estructural de función cuando se asocia con la inversa.

Para el literal e)

Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada.

Calcule h (g(a)).

La siguiente es la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo identificar entre los diagramas uno que represente una función con inversa. Llamaré h a la función que posee inversa y la inversa la denotaré con la letra g.	La función h será la representada por el diagrama ii). Los elementos del dominio tienen imágenes distintas	Se pide que identifique con la letra h la función que posea inversa y con g la inversa asociada. Se pide posteriormente que calcule h(g(a))
Debo identificar la función inversa g	Las imágenes de la función h corresponden al dominio de la función g g(a)=1, por tanto: h(g(a))=h(1)=a	h(1)=a, h(2)=b, h(3)=c, h(4)=d La función h posee inversa y permite calcular h(g(a))
Debo calcular h(g(a))	Por la forma en que se expresan h y g, se puede calcular h(g(a))	g(a)=1, g(b)=2, g(c)=3, g(d)=4
		h(g(a))= h(1)=a

El desarrollo de la situación por parte de Juan es exitoso, sin embargo, se esperaría que si la concepción de Juan del concepto de función asociado a la inversa fuera estructural, bastaría que hubiese escrito h(g(a)) = a, de cuerdo con la definición de la función inversa, sin pasar por el cálculo de g(a). Según el desarrollo de la situación, al parecer Juan actúa bajo una concepción procedimental, de acuerdo con los indicadores de concepción proceso-objeto expuestos en el capitulo 1

SEGUNDA SITUACIÓN

Considere los siguientes conjuntos de parejas.

i) $\{(x,y):\ y^2 = x\}$

ii) $\{(x,y):\ y = 1+ 1/x^3\}$

iii) $\{(x,y): y^2 - x^2 - 1= 0\}$

iv) $\{(x,y):\ x+y-1= 0\}$

(a) Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma y = f(x). *Justifique cada una de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como *f*. Calcule *f* (–2). ¿Se puede calcular *f* (*f* (–2))?

(c) Determine, usando la misma *f* de (*b*), un x tal que *f*(*x*)=9.

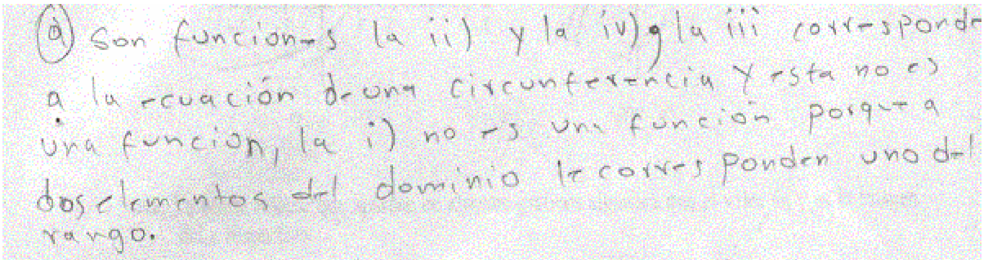
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule *g* (*h* (2)).

Para el literal a):

Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma y = *f*(*x*). *Justifique cada una de sus respuestas.*

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Entre las cinco ecuaciones existen algunas que representan una función	Utilizo un criterio que permita decidir cuales ecuaciones representan funciones	Se presentan 4 ecuaciones en las que se pide que identifique cuales representan una función de la forma $y = f(x)$: **i)** $y^2 = x$ **ii)** $y = 1+ 1/x^3$ **iii)** $y^2–x^2 –1= 0$ **iv)** $x+y–1= 0$
Debo identificar cuales ecuaciones no representan funciones	Explico las razones por las cuales una ecuación no es una función	*"Son funciones la ii) y la iv)"*
		"La iii) corresponde a la ecuación de una circunferencia y esta no es una función, la i) no es una función porque a dos elementos del dominio le corresponden uno del rango".

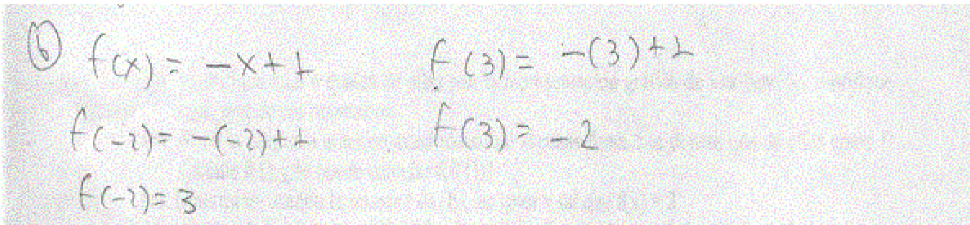
Juan da la respuesta correcta al problema planteado en la situación, sin embargo, nótese que descarta que el conjunto $\{(x,y): y^2–x^2 –1= 0\}$ corresponde a una función, pues asocia la ecuación $y^2–x^2 –1= 0$ con su representación gráfica. Parece tener en su memoria que una circunferencia no corresponde a la gráfica de una función pero sin claros argumentos del por qué, en otras palabras, se infiere que obedece a un esquema figurativo, pues la ecuación $y^2–x^2 –1= 0$ no corresponde a una circunferencia.

También se observa un error en relación con su justificación del por qué la ecuación $y^2=x$ no es una función. En sus palabras: "*no es función porque a dos elementos del dominio le corresponden uno del rango*". Es común encontrar este tipo de error en los estudiantes a la hora de confrontarlos con el concepto de función. Confunden la inyectividad con la definición misma de función. Se comienza a percibir una concepción estructural "apenas en formación" de acuerdo con las acciones de Juan.

Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como *f*. Calcule $f(–2)$. ¿Se puede calcular $f(f(–2))$?

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

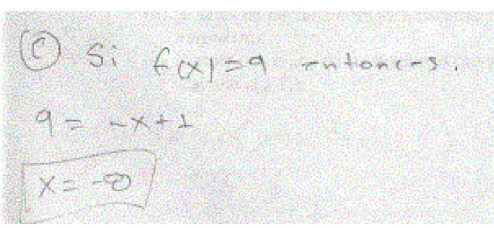
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico como *f* a la representada por la ecuación *x*+*y*–1= 0. Se debe evaluar *f* en -2 Se debe evaluar *f* en *f*(-2)	Para calcular *f*(-2) se debe despejar *y* en términos de *x*. A *y* se le llamará *f*(*x*)	Se pide que: i) Una de las funciones elegidas la denote con la letra *f* ii) Calcule *f*(-2) Se pregunta si es posible calcular *f*(*f*(-2))
Se tiene f(x) = -x+1 y se pide calcular f(-2)	Para calcular f(-2) se debe reemplazar *x* por -2:	La función f es f(x) = -x+1
f(-2)= 3 y se pide calcular *f*(*f*(-2))	Calculando *f*(3) se podrá calcular *f*(*f*(-2))	*f*(-2)= -(-2)+1=3 *f*(-2)=3
		f(-2)=3 y *f*(3)= -2

En esta situación se observa una correcta aplicación el esquema director activado correspondiente a la asociación del concepto de función y el de ecuación. De igual manera se observa que desarrolla exitosamente la composición de funciones por medio del análisis de una ecuación.

Para el literal c):

Determine, usando la misma f de (b), un x tal que f(x)=9.

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo interpretar el significado de *f*(*x*)=9	f(x)=9 es una ecuación	Se pide, utilizando la función del literal b), hallar un *x*, tal que *f*(*x*)=9
Debo resolver la ecuación 9 = -x+1	La ecuación 9 = -*x*+1 se resuelve despejando la variable *x*	Si f(x)=9 entonces : 9 = -x+1
		x = -8

En esta situación, Juan asocia la búsqueda de la preimagen de 9 con la resolución de la ecuación $f(x)=9$. Se sigue notando en él, las correctas asociaciones entre los diferentes registros relacionados con el concepto de función, propios de un estudiante que dispone de un sitema simbólico abstracto bien fundamentado.

Para el literal d):

¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* <u>*cada una*</u> *de sus respuestas.*

La siguiente fue la respuesta de Juan:

d) Posee función inversa la iv) por ser inyectiva

El análisis desde la dimensión cognitiva se hará a partir de los conjuntos ii) y iv) identificados por Juan como funciones

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Debo decidir cuáles de las funciones dadas en **ii)** $y = 1+ 1/x^3$ y **iv)** $x+y–1= 0$ poseen y por que	Enuncio las características de una función que tenga inversa.	Se pide que diga cuales de las funciones **ii)** $y = 1+ 1/x^3$ y **iv)** $x+y–1= 0$ poseen inversa, justificando la respuesta.
Debo identificar cuál de las funciones es inyectiva	Aplico criterios para decidir sobre la inyectividad de las funciones dadas	Una función posee inversa si es inyectiva
		$x+y–1= 0$ posee función inversa por ser inyectiva

Con respecto al desarrollo de la situación, debe anotarse que Juan relaciona el concepto de inyectividad con la existencia de la inversa, sin embargo al no hacer ningún análisis de la función dada por $y = 1+ 1/x^3$, inferimos que considera que no es inyectiva. Al parecer vincula la inyectividad con la linealidad de la función a manera de equivalencia lógica, es decir, se tiene inyectividad si y solo si la ecuación es lineal. Se sigue notando una concepción procedimental a la hora de enfrentar situaciones relacionadas con el concepto de función asociado a la inversa.

Para el literal e):

Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule g (h (2)).

Eligiendo el conjunto $\{(x,y): x+y–1= 0 \}$ procede de la siguiente manera:

e) $h(2) = -1$ y $g(x) = -x+1$ $g(-1) = 1+1 = 2.$
$g(h(2)) = 2$

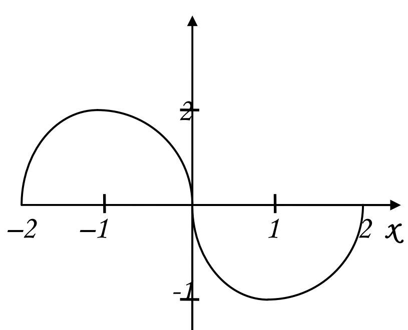
Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función dada por el conjunto $\{(x,y):x+y–1=0\}$ posee inversa Llamaré h a la función que ha elegido Hallaré la inversa de h y se llamará g Se debe evaluar g en h(2)	En la ecuación x+y–1= 0 la variable *y* se cambia por h y se despeja en términos de *x*. De esta forma se puede calcular h(2)	Se pide que: Denote con h la función que posea inversa Denote con g la inversa asociada Calcule g(h(2))
Debo hallar la inversa de h	La inversa se halla cambiando *x* por *y* y despejando *y* en términos de *x*. Se cambia *y* por g(x)	h(2)=-1
Debo calcular g(h(2))	Para calcular g(h(2)) reemplaza h(2) por -1	La inversa es g(x)= -x+1
		g(-1)) = 1+1=2 g(h(2)) = 2

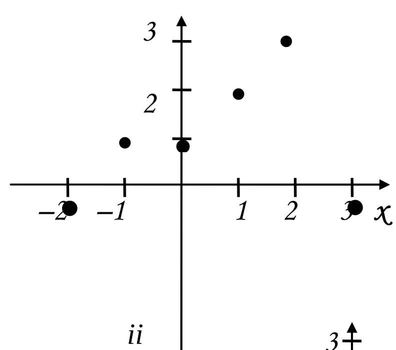
A pesar del desarrollo exitoso de la situación, cabe anotar que Juan continúa manifestando una concepción operacional del concepto de función cuando se asocia con la inversa

TERCERA SITUACIÓN

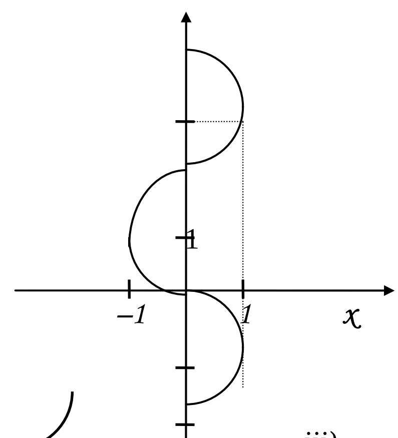
Considere las siguientes gráficas:



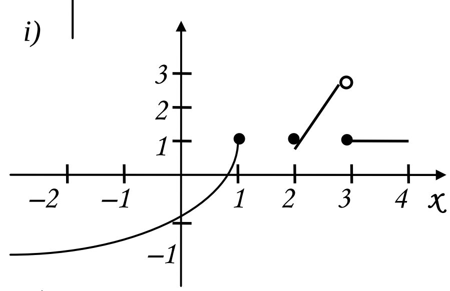
i)



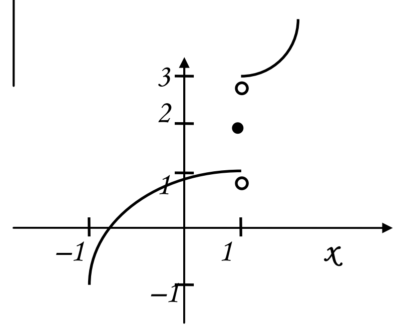
ii



iii)



iv)



v)

Nota: La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.

(a) Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como *f*. Calcule $f(1)$. ¿Se puede calcular $f(f(1))$?

(c) Determine, usando la misma *f* de (b), *x* tal que $f(x)=2$.

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con *g* la inversa asociada. Calcule $h(g(1))$.

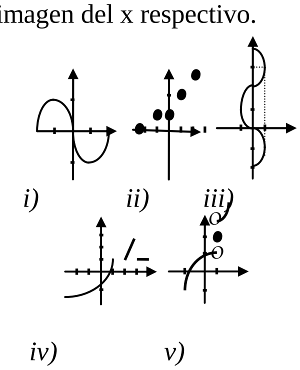
Para el literal a)

Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

La siguiente fue la respuesta de Juan:

(a) Son funciones i) y v porque sus paralelas al eje y la cortan en solo un punto y todos sus elementos del dominio estan relaciona-
dos

Ciclo de Interacción

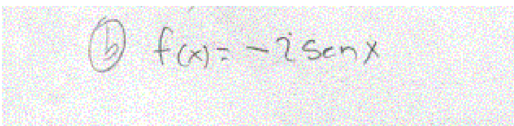
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo identificar cuáles de las 5 gráficas que se presentan representan una función.	Debo identificar las curvas que satisfagan la prueba de la recta vertical.	Se presentan 5 gráficas y se pide identificar cuál o cuáles de ellas representan la gráfica de una función. **Nota:** La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.  *i)* *ii)* *iii)* *iv)* *v)*
		Son funciones *i)* y v porque sus paralelas al eje y la cortan en un solo punto y todos sus elementos del dominio están relacionados

Con respecto al desarrollo de esta situación, se observa que Juan activa el esquema asociado con la prueba de la recta vertical (o paralela al eje de ordenadas) para decidir cuál de las curvas representa una función, sin embargo, cuando afirma "…y todos sus elementos del dominio están relacionados", al parecer considera que el dominio debe ser un intervalo; no se puede aceptar que sea discreto. Por esta razón, es que desestima que las gráficas *ii)* y *iv)* son funciones. No se percibe un tratamiento como objeto del concepto de función según las acciones de Juan.

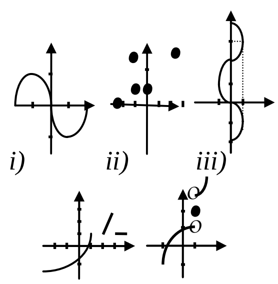
Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f(1). ¿Se puede calcular f(f(1))?

La siguiente fue la respuesta de Juan



Ciclo de Interacción

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo elegir una de las gráficas que corresponde a una función. Llamaré a esta función con la letra f. Debo asignarle una expresión algebraica a esta función	La gráfica *i)* es un estiramiento de la función sen x.	De las gráficas identificadas como funciones, se pide denotar una de ellas como *f* y calcular *f*(1). Se pregunta si es posible calcular *f*(*f*(1))  *i)* *ii)* *iii)* *iv)* *v)*
		f(x)=2senx

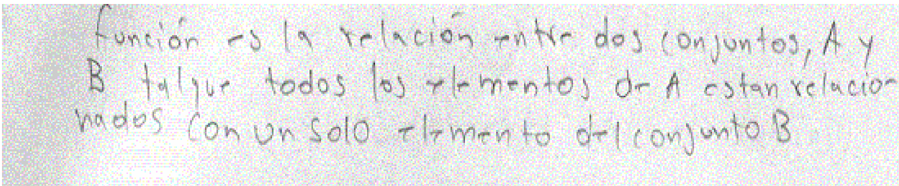
Parece ser que Juan acude a un esquema figurativo para resolver la situación. Asocia la forma de la curva de la gráfica *i)* con la gráfica de la función seno.

Los literales c), d) y e) no fueron desarrollados por Juan. Esto unido a lo anterior permite inferir con más fundamento, que la concepción estructural del concepto de función se encuentra en un estado primario.

CUARTA SITUACIÓN

Defina el concepto de función matemática.

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo dar la definición de función	Expresa la definición de función como una propiedad especial de una relación entre conjuntos	Se pide que dé la definición de función
		"Función es la relación entre dos conjuntos, A y B tal que todos los elementos de A están relacionados con un solo elemento del conjunto B"

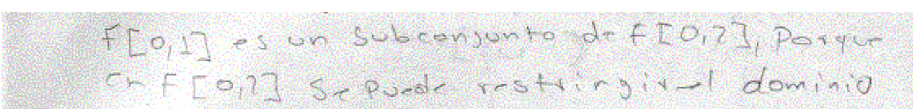
Nótese que la definición de Juan del concepto de función está dada en términos de una relación especial entre conjuntos. La definición es correcta, sin embargo se percibe en los procedimientos de Juan en las situaciones anteriores, que no siempre la evoca a la hora de necesitar una definición del concepto. Podría esto estar indicando que actúa guiado una concepción estructural del concepto en la medida en que, como se aprecia en los indicadores de la concepción estructural de un concepto descritos en el capítulo 1: "*Se nota la posibilidad de alternar diferentes representaciones del concepto*".

QUINTA SITUACIÓN

Si F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1], determine si

F[0,1]$\subset$ F[0,2]. *Justifique su respuesta.*

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
F[0,1] representa las funciones cuyo dominio es [0, 1] F[0,2] representa las funciones cuyo dominio es [0, 2] Debo decidir si F[0,1] es un subconjunto de F[0,2]	Doy un criterio que le permita decidir si F[0,1] es un subconjunto de F[0,2]	Se presenta: F[0, 1] como el conjunto de las funciones con dominio en el intervalo [0,1]. F[0, 2] como el conjunto de las funciones con dominio en el intervalo [0,2]. Se pregunta si F[0,1]$\subset$ F[0,2].
		F[0,1] es un subconjunto de F[0,2] porque en F[0,2] se puede restringir el dominio

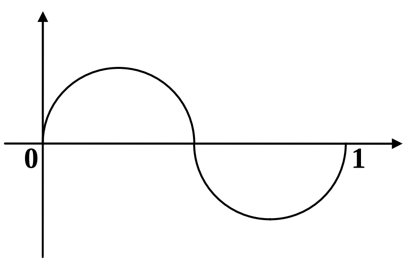
En esta situación se observa que Juan no considera como condición necesaria para la igualdad de funciones, la igualdad de dominios, es decir, desconoce una propiedad ligada al concepto de función. Situación que debería ser superada en pro de una concepción estructural del concepto de función.

SEXTA SITUACIÓN

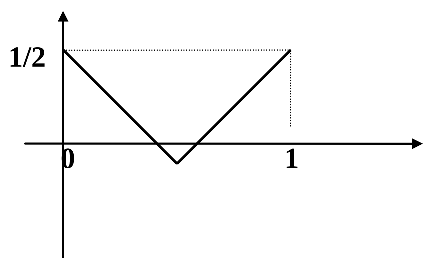
Sea **W** el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en **W**?

a) f(x) = –2, x∈[0, 1] **b)** $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ **c)** $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, x∈[0, 1]

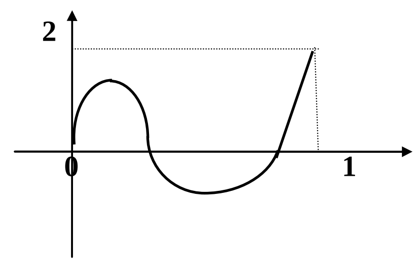
d)



e)



f)

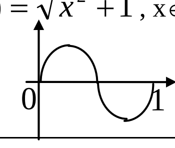


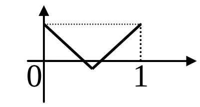
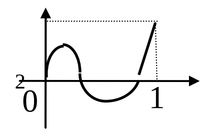
La siguiente fue la respuesta de Juan:

R// a b d y e

Por la respuesta de Juan, puede inferirse que la dimensión cognitiva corresponde a la del análisis a priori

Ciclo de Interacción:

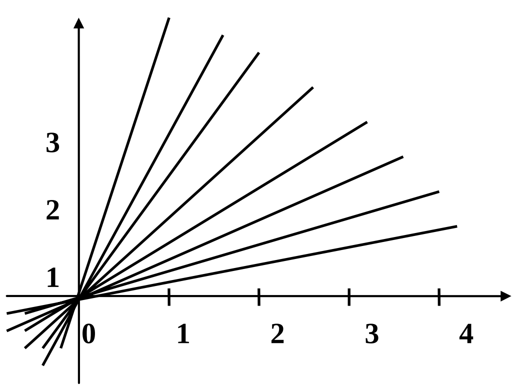
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
W es el conjunto de las funciones con dominio en el intervalo [0, 1] de tal forma que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1 Se da una serie de funciones presentadas de diversas formas. Se pide identificar cuales de las funciones están en W	Una función está en W si la imagen de cero y uno son iguales. Debe calcular las imágenes cero y uno en cada función. Para la función en el literal **a):** f(0) = f(1) = -2, por tanto f está en W Para la función en el literal **b):** $g(0) = 0+1 = 1$ y $g(1) = -2(1)+3 = 1$ Luego g está en W Para la función en el literal **c):** $h(0) = \sqrt{0^2+1} = 1$ $h(1) = \sqrt{1^2+1} = \sqrt{2}$	Se presentan seis funciones, definidas mediante diferentes registros con dominio en el intervalo [0, 1]. a) f(x) = –2, x∈[0, 1] b) $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ c) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, x∈[0,1] d) 

	Luego h no está en W Para la función en el literal **d):** Las parejas $(0,0)$ y $(1,0)$ pertenecen a la gráfica. Luego se cumple que la imagen en 0 es la misma que la imagen en 1, por tanto la función está en W Para la función en el literal **e):** Las parejas $(0,\frac{1}{2})$ y $(1,\frac{1}{2})$ pertenecen a la gráfica. Luego se cumple que la imagen en 0 es la misma que la imagen en 1, por tanto la función está en W Para la función en el literal **f):** La pareja $(0,0)$ está en la gráfica pero en lugar de la pareja $(1,0)$ está la pareja $(1,2)$. Luego no se cumple que la imagen en 0 es la misma que la imagen en 1, es decir, esta función no está en W	e)  f)  Se define W como el conjunto con dominio en el intervalo [0,1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. Se pregunta cuáles de las funciones que se presentan est en W
		a), b) ,d) y e) están en W

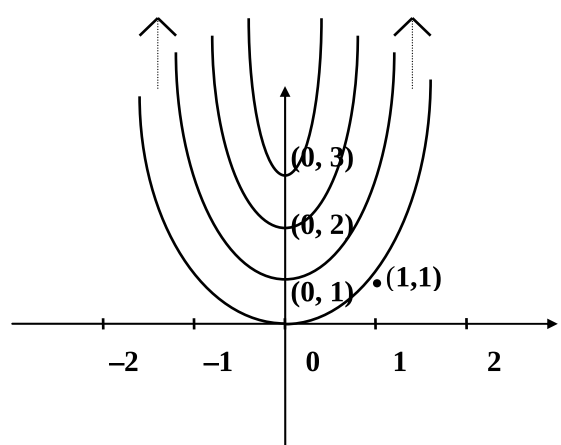
Se infiere que Juan alterna diferentes representaciones del concepto de función a la hora de enfrentar la situación. Una característica propia de quien tiene una concepción estructural de un concepto.

SEPTIMA SITUACIÓN

Encuentre la expresión analítica que corresponde a cada una de las dos familias de funciones que se describen gráficamente a continuación:

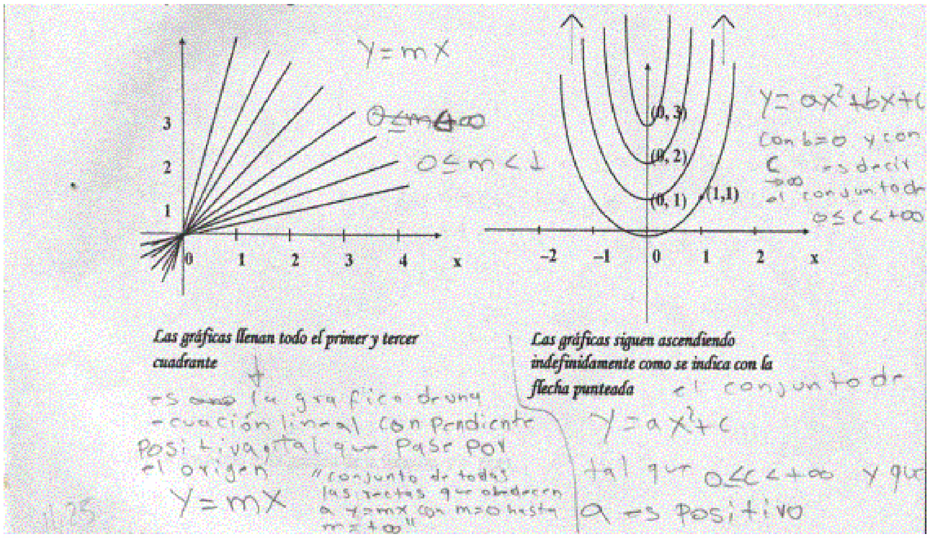


Las gráficas llenan todo el primer y tercer cuadrante

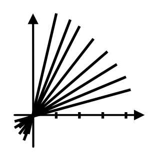


Las gráficas siguen ascendiendo indefinidamente como se indica con las flechas punteadas

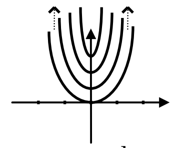
La siguiente fue la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción Para la Familia de Rectas

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Se tiene un conjunto de rectas a las que debe encontrar la ecuación que las representa.	Las rectas pasan por el origen	Se presenta un conjunto de rectas en un plano cartesiano.  Se pide encontrar la expresión analítica que describe a las rectas
Debo identificar la característica del parámetro m	m es la pendiente de las rectas y son crecientes	Las rectas tienen ecuación y = mx
Debo identificar los diferentes valores que debe tomar m	Las rectas se inclinan hacia el eje de ordenadas	$m \geq 0$
		La familia corresponde al *“conjunto de todas las rectas que obedecen a y = mx, con m = 0 hasta m = $+\infty$ ”*

PARA LA FAMILIA DE PARÁBOLAS

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Se tiene un conjunto de curvas en un plano cartesiano a las que debe encontrar la ecuación que las representa	Las curvas son parábolas.	Se presenta un conjunto de curvas en un plano cartesiano.  Se pide encontrar la expresión analítica que describe a las parábolas
Debo identificar las características de los parámetros *b* y *c*.	Las parábolas tienen vértice en el eje *y* y se desplazan por encima del eje y	Las parábolas tienen ecuación y = $ax^2 + bx + c$
Debo identificar las características del parámetro *a*	Las parábolas se abren hacia arriba	$b = 0$ y $c \to \infty$ .Las parábolas tiene ecuación $y = ax^2 + c$
		La ecuación que describe la familia de parábolas es $y = ax^2 + c$, en donde $0 \le c \le \infty$ y a es positivo

El cambio exitoso del registro gráfico al simbólico, es una de las características propias de un estudiante que posee la concepción estructural del concepto de función. Por las acciones de Juan en esta situación, se puede inferir que tal concepción es la que ha guiado sus acciones.

Vale hacer el siguiente comentario de acuerdo con el análisis que hasta ahora hemos realizado: existe un contraste derivado de las acciones de Juan, en principio se podría pensar que su concepción del concepto de función, si bien responde a algunos indicadores en los que la concepción estructural se requiere, tal concepción, aún no llegado a un estado "maduro", si se acepta el término.

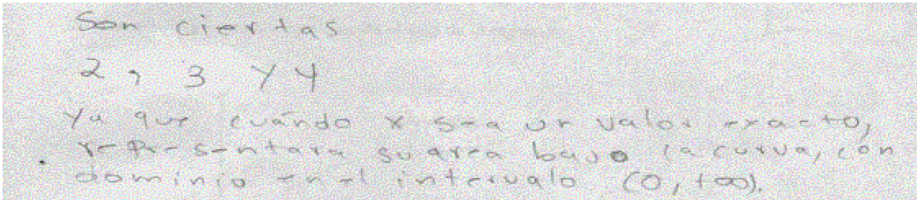
OCTAVA SITUACIÓN

Considere la integral $\int_0^x (t^2 + 1)dt$, con x en el intervalo $(0,+\infty)$, y las siguientes afirmaciones con respecto a ella:

1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo.
2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo.
3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$.
4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$, desde x = 0.

¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas? *Justifique su respuesta*

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Son ciertas
2, 3 y 4
ya que cuando x sea un valor exacto, representara su area bajo la curva, con dominio en el intervalo $(0,+\infty)$.

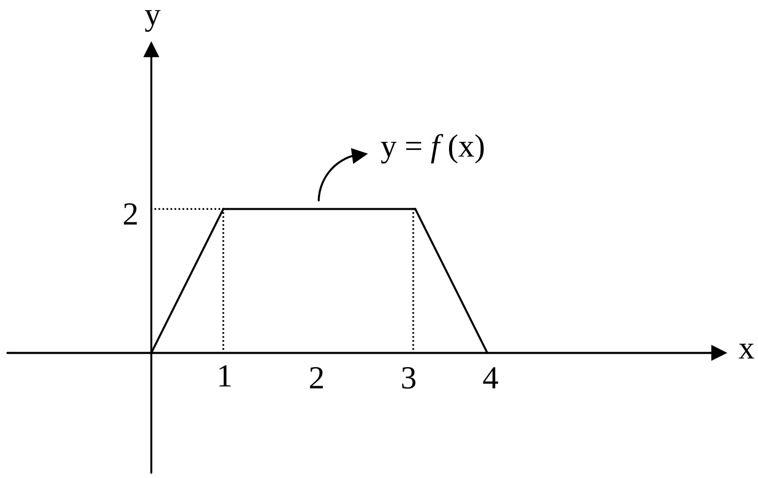
Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$ con x en el intervalo $(0,+\infty)$. Identifico que se hacen 4 afirmaciones con respecto a ella y se pide decidir cuáles de ellas son ciertas. En la primera afirmación se dice que es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo. En la segunda afirmación se dice que en caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo En la tercera afirmación se dice que representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$. En la cuarta afirmación se dice que para diferentes valores de x, representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0.	La afirmación en la que $\int_0^x (t^2+1)dt$ se pueda interpretar como el área bajo la curva y = x^2 será verdadera.	Se presenta la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo $(0,+\infty)$, y se hacen las siguientes afirmaciones con respecto a ella: 1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo. 2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo. 3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$. 4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0. Se pregunta: Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas. Se pide Justificar la respuesta.
		"Son ciertas 2),3) y 4) ya que cuando x sea un valor exacto, representará su área bajo la curva, con dominio en el intervalo $(0,+\infty)$"

En esta situación, Juan activa como esquema director el asociado a la interpretación de $\int_0^x (t^2+1)dt$ como un área bajo una curva y lo utiliza para responder a las demás situaciones.

NOVENA SITUACIÓN

La siguiente es la gráfica de la función $y = f(x)$



Bosqueje, si es posible, la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

La siguiente fue la respuesta de Juan:

de 0 a 1 $f(x) = 2x$
de 1 a 3 $f(x) = 2$
y de 3 a 4 $f(x) = \cancel{2x}\ -2x+8$

$$A_T = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^3 2\,dx + \int_3^4 -2x+8\,dx$$

$$A_T = x^2 + 2x + (-x^2 + 8x$$

$32 - 16 = 16$

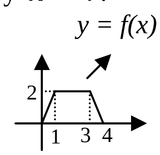
$$A_T = 1 + 4 + 1$$

$24 - 9 = 15$

$$A_T = 4 + 2$$

$$\boxed{A_T = 6}$$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifico la gráfica de una función *f* continua y positiva en el intervalo [0,4]. Debo calcular el área bajo la gráfica de f desde x = 0 hasta x = 4.	Para calcular el área bajo la gráfica de f es necesario conocer la ecuación de la gráfica de f	Se presenta la gráfica de una función *f* continua y positiva en el intervalo [0,4]. Se pide bosquejar la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.  La gráfica está formada por una línea quebrada de tres trazos
Debo calcular la ecuación de la curva que va de 0 a 1	La curva que va de 0 a 1 es una recta que une los puntos (0,0) y (1,2)	En el intervalo [0,1] la gráfica de f es una recta que une los puntos (0,0) y (1,2)
Debo calcular la ecuación de la recta que va de 1 a 3	La curva que va de 1 a 3 es una recta paralela a l eje x en donde y =2	La ecuación de la recta que va de 0 a 1 es y =2x
Debo calcular la ecuación de la recta que va de 3 a 4	La curva que va de 3 a 4 es una recta que une los puntos (3,2) y (4,0)	La ecuación de la recta que va de 1 a 3 es y =2
Debo calcular el área bajo la gráfica de cada curva	El área A_T bajo la gráfica de f es la suma de las áreas bajo la gráfica de cada función hallada.	La ecuación de la recta que va de 3 a 4 es y =-2x+8
Debo calcular cada una de las integrales	Cada integral se resuelve utilizando la segunda forma del teorema fundamental del cálculo.	$A_T =$ $\int_0^1 2x\,dx + \int_1^3 2\,dx + \int_3^4 (-2x+8)\,dx$
		A_T = 1+4+1= 4+2 = 6

Con relación a esta situación, se observa que Juan interpreta en su desarrollo que debe calcular el área bajo la curva, a pesar de que se le pregunta explícitamente por la gráfica de la función área. Podría inferirse que no le asigna un significado apropiado a *"la función que representa el área bajo la gráfica de f, entre las rectas* $x = 0$ *y* $x = 4$*"*, algo que podría contrastarse con sus respuestas en la séptima situación, en donde reconoce que la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, así como representa una función cuyo dominio es el intervalo (0,+∞), también reconoce que para diferentes valores de *x* representa el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$, desde *x* = 0.

Sin embargo, hay algo rescatable en el desarrollo de esta situación. Si se hubiese preguntado por el cálculo del área bajo la curva, su desarrollo habría sido exitoso. Juan muestra el conocimiento que posee, en relación con la construcción de funciones a partir de una gráfica[4], la interpretación del cálculo del área como una integral definida, el cálculo de integrales definidas y las propiedades de aditividad de la integral.

Conclusiones

Podemos concluir lo siguiente de acuerdo al análisis de los desarrollos mostrados por Juan:

Identifica exitosamente las funciones en contexto sagital y ecuaciones. Su éxito es parcial al identificar funciones en el contexto gráfico. Es capaz de representar familias de funciones por medio de ecuaciones. Dispone de un sistema simbólico abstracto que le brinda posibilidades de realizar desarrollos exitosos en aquellas situaciones en las que se requiere de una concepción operacional.

De acuerdo con el análisis de los desarrollos de Juan, en ciertas situaciones los esquemas activados por él son propios de una concepción estructural del concepto de función, pero en otras no. Podríamos decir que su concepción del concepto es “intermitente”, lo cual puede ser indicio, de la alternancia de las concepciones estructural y operacional, según la hipótesis de Tall.

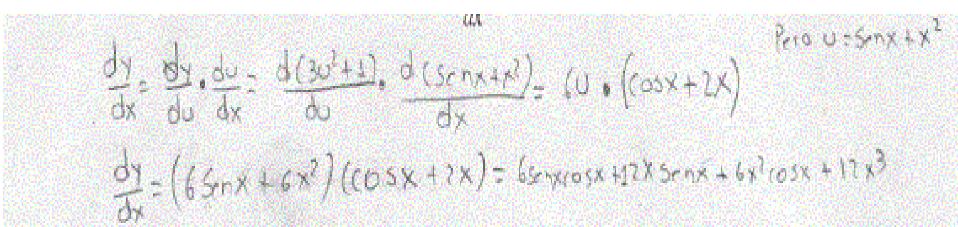
Se estaría confirmando la calificación que obtuvo en el indicador de concepción operacional (**CO)** de la primera parte (0.84), la cual estaría mostrando una concepción procedimental del concepto de función bien estructurada. Sin embargo, se nota que no siempre procede bajo una “concepción estructural” a la hora de enfrentar situaciones propias de esta concepción, lo que confirmaría igualmente la calificación obtenida por Juan en el indicador de concepción operacional **(CE)** estudiado en la primera parte (0.56).

B. INSTRUMENTO NÚMERO DOS

PRIMERA SITUACIÓN:

Si $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Según el desarrollo de Juan, el ciclo de interacción puede corresponderse con el descrito en el cuadro número 2 de esta misma situación del capítulo anterior en el análisis a priori

---

[4] Propio de una concepción estructural del concepto de función.

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Hay dos funciones: *y* en función de la variable *u*. *u* en función de la variable *x*. Se solicita calcular la derivada respecto a la variable *x*.	"*y*" se puede interpretar como una función compuesta $y = f(u), u = g(x)$ En consecuencia, al derivar se aplica la regla de la cadena	Se presentan dos funciones: $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$ Se pide calcular $\frac{dy}{dx}$
Debo calcular las derivadas $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ y aplicar la regla de la cadena	Calculo las derivadas $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ Posteriormente aplico la regla de la cadena.	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ y además *y* es derivable respecto a *u*. *u* es derivable respecto a *x*
$\frac{dy}{dx}$ se puede escribir en términos de x	Puesto que $u = senx + x^2$ Se sustituye $u = senx + x^2$ en $\frac{dy}{dx} = 6u.(\cos x + 2x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3u^2+1)}{du}\frac{d(senx + x^2)}{dx}$ $= 6u.(\cos x + 2x)$ La derivada está en función de *u* y de *x*
La derivada es el producto: $(6senx + 6x^2)(\cos x + 2x)$	Se efectúa el producto de las expresiones $6senx + 6x^2$ y $\cos x + 2x$	$\frac{dy}{dx} = (6senx + 6x^2)(\cos x + 2x)$
		$\frac{dy}{dx} = 6senx\cos x + 12xsenx +$ $6x^2\cos x + 12x^3$

En la solución de esta situación, Juan activa correctamente como esquema director, el asociado a la aplicación de la regla de la cadena y responde de manera exitosa.

La pregunta que aún queda por resolver es si la concepción del concepto de función como objeto ha guiado las acciones en esta situación, o si las acciones de Juan corresponden a aquellas propias de un sujeto que posee un esquema figurativo, el cual lo conduce a la resolución exitosa de la situación. Con la situación número 2 se pretende despejar este interrogante.

SEGUNDA SITUACION

Sea $g(x) = f(x^2)$ una función diferenciable. Calcule $g'(x)$.

La siguiente fue la respuesta de Juan:

$$g'(x) = f'(x^2) = f'(x^2) \cdot (x^2)'$$
$$g'(x) = f'(x^2) \cdot 2x$$

Ciclo de Interacción

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función *g* es igual a la función *f* evaluada en x^2	La derivada de *g* debe ser igual a la derivada de *f*	$g(x) = f(x^2)$ es una función diferenciable. Se pide calcular $g'(x)$.
$f\,'(x^2)$ es la derivada de la función compuesta de f con x^2 $h'(x) = 2x$	La derivada de *f* compuesta con *h* es igual a la derivada de *f* evaluada en *h*, multiplicada por la derivada de *h*. Se aplica la regla de la cadena: $g'(x) = f\,'(x^2)(2x)$	$g'(x) = f\,'(x^2)$
Debo calcular la derivada de x^2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$g'(x) = f'(x^2) = f\,'(x^2)(x^2)'$
		$g'(x) = f\,'(x^2)(2x)$

Tal y como se mencionaba en el análisis a priori, en esta situación la función g no se presenta en función de una variable, sino en función de otra función de manera implícita. Esta vez la demanda cognitiva es superior pues la relación funcional exige un mejor conocimiento de los diferentes registros en que se puede representar la composición de funciones, al igual que la aplicación de la regla de la cadena. Aquí se puede percibir aún más la necesidad de concebir el concepto de función de manera estructural. Igual que en el punto anterior, Juan activa y aplica correctamente el esquema asociado a la aplicación de la regla de la cadena. Vale anotar por lo observado en las primeras dos situaciones, que, en apariencia, Juan aplica correctamente la regla de la cadena en diferentes contextos. Según lo que se ha teorizado en el marco de referencia, la concepción del concepto de función como objeto, permite la resolución exitosa de este tipo de problemas.

Sin embargo, con respecto al desarrollo de esta situación, nótese que Juan escribe $g'(x) = f'(x^2) = f'(x^2)(x^2)'$, donde la primera igualdad no es verdadera. Al escribir: $f\,'(x^2) = f'(x^2)(x^2)'$, se podría pensar que el error de notación de la primera igualdad es un simple descuido y que el estudiante interpreta $f\,'(x^2)$ como $(f(x^2))'$.De acuerdo con el desarrollo de Juan en las situaciones del primer instrumento, podríamos aceptar que el error se cometió por incorrección en la notación, sin embargo, en otro tipo de caso, es muy probable que su error tenga unas connotaciones diferentes, que llevarían inclusive a pensar que tiene problemas con la composición de funciones. De hecho, se ha observado que los estudiantes responden a algunas situaciones exitosamente, obedeciendo a esquemas figurativos que permiten alcanzar el éxito de la acción siguiendo simples señales perceptivas.

TERCERA SITUACION

Calcule $g'(x)$ si $g(x) = \int_1^x t^2 \sqrt{t^2+1}\, dt$

La siguiente fue la respuesta de Juan:

$$g'(x) = \frac{d\left(\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt\right)}{dx} = x^2 (x^2+1)^{1/2}$$

Ciclo de Interacción

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función g está dada por la integral $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$. x es una variable y por tanto $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$ es una función de x Debo calcular la derivada con respecto a x de la función $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$	Para calcular la derivada de $g(x) = \int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$ se debe aplicar la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo: Si $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, entonces $g'(x) = f(x)$ En este caso $f(t) = t^2\sqrt{t^2+1}$	Se presenta la función $g(x) = \int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$ Se pide calcular $g'(x)$ si
		$g'(x) = \dfrac{d(\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}dt)}{dx} = x^2(x^2+1)^{1/2}$

Tal y como se comentó el desarrollo de la situación número uno, en la solución de esta situación, Juan activa correctamente el esquema asociado a la aplicación de la primera parte del Teorema Fundamental del cálculo y responde de manera exitosa.

La pregunta que aún queda por resolver es si la concepción del concepto de función como objeto ha tenido incidencia en la solución de esta situación, o si las acciones de Juan corresponden a aquellas propias de un sujeto que posee un esquema figurativo, el cual lo conduce a la resolución exitosa. Igual que en la situación 2, con la siguiente situación se pretende despejar este interrogante.

CUARTA SITUACIÓN

Sea $h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\, dt$. Calcule $h'(x)$

La siguiente fue la respuesta de Juan:

$$h(x) = \int p(t)dt \Big]_a^{f(x)}$$
$$h'(x) = p(t)$$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función h está definida en términos de una integral: $h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\, dt$	*h(x)* es una función que se evalúa en *a* y *f(x)*	$h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\, dt$ es una función Se pide calcular $h'(x)$
Debo calcular $h'(x)$	$h'(x)$ es la función que está dentro de la integral	$h(x) = \int p(t)dx \Big]_a^{f(x)}$
		$h´(x) = P(t)$

Se observa que Juan no asigna el significado correcto a la función $h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\, dt$. Por lo comentado en la situación anterior, al parecer el desarrollo exitoso en la tercera situación no es un indicador de que Juan interpreta $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$ como una función de *x*. Basta ver que al cambiar *x* por *f(x)*, al parecer no considera que se sigue teniendo una función, ya que el esquema que activa es el relacionado con el cálculo de una integral definida. Toma entonces más fuerza la afirmación de que el desarrollo exitoso en la tercera situación, corresponde a una interpretación de $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$ como una función corresponde a la activación de un esquema figurativo.

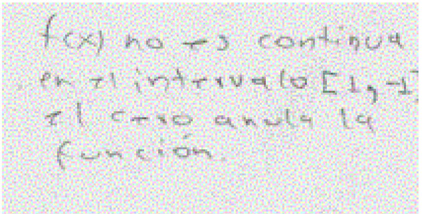
QUINTA SITUACION

Una de las propiedades de la integral definida afirma que si una función $f(x)$ es positiva en un intervalo cerrado [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ es positiva. Utilizando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo en el siguiente ejemplo, parecería que se está contradiciendo la afirmación inicial ¿Qué está fallando?:

$g(x) = -\dfrac{1}{x}$ es una antiderivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ por tanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \Big]_{-1}^{1} = (-\frac{1}{1} - (-\frac{1}{-1})) = -2$$

La siguiente fue la respuesta de Juan:


f(x) no es continua en el intervalo [1,-1] el cero anula la función.

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo verificar las hipótesis que debe cumplir el integrando de una integral definida	Verifico si la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es continua	Se presenta el desarrollo de la integral definida $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ en la que aparentemente el procedimiento para desarrollarla es correcto. Se muestra que el resultado es contradictorio con la propiedad de que la función $\frac{1}{x^2}$ es positiva. Se pregunta que está fallando
¿Por qué la función no es continua en cero?	La función f se evalúa en cero	$f(x)=\frac{1}{x^2}$ no es continua en el intervalo [1,-1]
		El cero anula la función

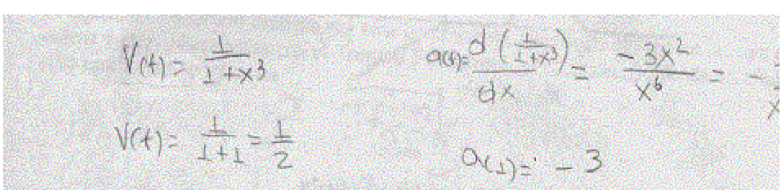
En esta situación, plausiblemente, se puede interpretar que Juan considera la frase *"El cero anula la función"* como que la función se indetermina en cero, pues la presenta como razón de la discontinuidad de *f* en cero.

SEXTA SITUACION

Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \le t \le 1$, la posición viene dada por la integral $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$. (No intente el cálculo de esta integral). Calcule:

a) Su velocidad cuando $t=1$ b) Su aceleración cuando $t=1$

La siguiente fue la respuesta de Juan:


$V(t)=\frac{1}{1+x^3}$ $a(t)=\frac{d\left(\frac{1}{1+x^3}\right)}{dx}=\frac{-3x^2}{x^6}=-$

$V(t)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $a(1)=-3$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función *f* es una integral que representa la posición de una partícula. Debo calcular la velocidad y la aceleración cuando t = 1	La velocidad *v(t)* es la función que hay dentro de la integral	La función $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$ representa la posición de una partícula. Se pide calcular (sin resolver la Integral) su velocidad y su aceleración cuando t =1
Debo calcular la velocidad cuando t = 1	La velocidad *v(t)* se obtiene reemplazando x por 1	$v(t)=\frac{1}{1+x^3}$
Debo calcular calcular la aceleración	La aceleración es la derivada de la función $\frac{1}{1+x^3}$	$v(t)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$
Debo calcular la aceleración cuando t = 1	La aceleración *a(t)* se obtiene reemplazando x por 1	$a(t)=\frac{d\left(\frac{1}{1+x^3}\right)}{dx}=\frac{-3x^2}{x^6}=-\frac{3}{x^4}$
		$a(1)=-3$

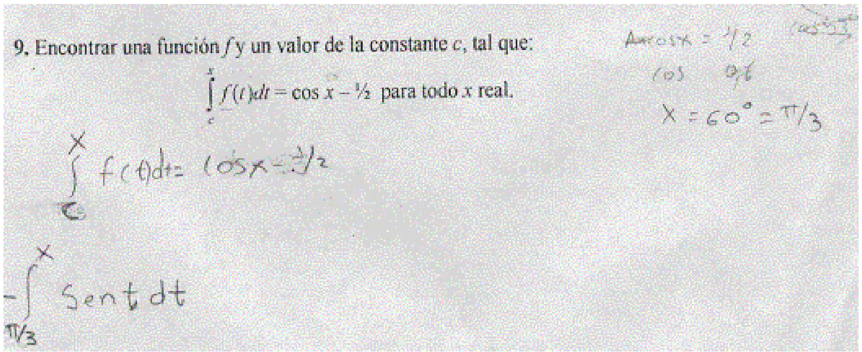
En principio podría decirse que Juan aplica el TFC derivando la función dada por $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$, sin embargo, nótese que al escribir $v(t)=\frac{1}{1+x^3}$ y $a(t)=-\frac{3}{x^4}$, se observa que Juan presenta problemas con la noción de variable, parece ser que *x* y *t* son simples etiquetas que se reemplazan por números.

Nótese como Juan activa el esquema correspondiente a la aplicación de la parte uno del Teorema Fundamental del Cálculo para el cálculo de la función velocidad, derivando la función dada por $f(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$, sin embargo, debe notarse también que Juan ignora el hecho de que la expresión “$V(t)=\frac{1}{1+x^3}$”debería estar escrita como $V(t)=\frac{1}{1+t^3}$. Pero al parecer, es un error que no le impide la evaluación de la función *V* en *t* = 1, aunque escribe $V(t)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$. Este error persiste en la notación de la función aceleración como “$a(t)=\frac{d(\frac{1}{1+x^3})}{dx}$”. Aunque nuevamente hace una correcta evaluación de la función en t = 1. Se nota también como comete un error al calcular la derivada del cociente $\frac{1}{1+x^3}$, hecho que lo conduce a un cálculo errado de la aceleración en t = 1.

SÉPTIMA SITUACION

Encontrar una función *f* y un valor de la constante *c*, tal que: $\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½$ para todo *x* real.

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


9. Encontrar una función *f* y un valor de la constante *c*, tal que:

$\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½$ para todo *x* real.

$\int_c^x f(t)dt = \cos x - 1/2$

$-\int_{\pi/3}^x \text{Sent}\, dt$

Arccos x = 1/2

cos 0.6

x = 60° = π/3

Ciclo de Interacción

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Interpreto la igualdad $\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½$, como el cálculo de una integral	La integral de la función f es una función que al evaluarla en x es cos(x) y al evaluarla en c es 1/2	Se pide encontrar la función *f* y la constante *c* tal que $\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½$
Debo encontrar c tal que cos(c)=1/2	Para calcular el valor de c se puede utilizar $\cos^{-1}$	La integral de la función menos seno es la función coseno
		El valor de c tal que cos(c)=1/2 es $60^0 = \frac{\pi}{3}$ Se debe reemplazar f por – sent y la constante c por 60^0 : $-\int_{\frac{\pi}{3}}^x sentdt$

Nótese que según las acciones de Juan, no se percibe que haya utilizado el TFC en el desarrollo de esta situación. Al parecer todo su desarrollo giró en torno al tanteo. De hecho, si no hubiese podido “descubrir” la antiderivada planteada, no habría podido desarrollar con éxito la situación.

Una característica de la concepción como objeto de función parece que no se está cumpliendo y es la caracterizada por la relación del concepto con otros conceptos, tal y como se menciona en el capítulo 1 con respecto a los indicadores de concepción operacional o estructural *“Es posible relacionar el concepto con otros y definir nuevos conceptos a partir del concepto en cuestión.”*

Conclusiones.

Podemos concluir lo siguiente de acuerdo al análisis de los desarrollos mostrados por Juan:

Aplica correctamente la regla de la cadena, usando la notación de Leibniz. Tiene éxito al aplicar la regla de la cadena, cuando la composición de funciones está dada implícitamente. Aplica correctamente la primera forma del teorema fundamental del cálculo, en situaciones "directas". No discrimina las variables cuando aplica la primera forma del teorema fundamental del cálculo, en la resolución de un problema. Resuelve parcialmente problemas en los que el TFC es requerido como herramienta.

Según las acciones de Juan en las diferentes situaciones de este instrumento, se podría inferir que la comprensión del TFC está, si se nos permite el término, en formación. Lo cual se refleja en la calificación del indicador CTFC que obtuvo en la primera parte (0.63)

SEGUNDO CASO

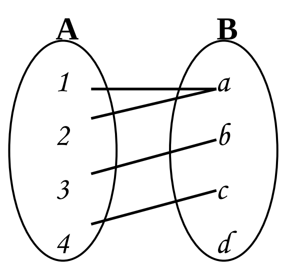
Este caso se ha escogido como diametralmente opuesto al caso de Juan-el estudiante número dos-.Como ya lo vimos en el análisis del caso anterior, la comprensión que Juan posee del concepto de función le permitió desarrollar algunas situaciones exitosamente, en las que el concepto de función se requería, al menos, en un estado procedimental.

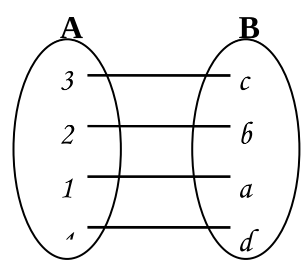
Mostraremos cómo el estudiante número 2 al que llamaremos Carlos, no posee una mínima comprensión del concepto de función. Algo que, se supone, redundará en una serie de inconsistencias y errores en el desarrollo de situaciones en las que debe hacer cálculos con funciones, interpretar gráficas, calcular derivadas, aplicar la regla de la cadena, el TFC, etc.

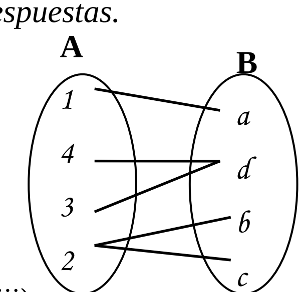
A. INSTRUMENTO NÚMERO UNO

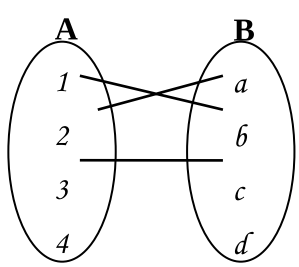
PRIMERA SITUACIÓN

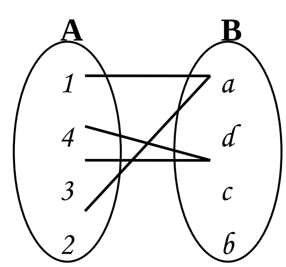
(a) En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique* *<u>cada una</u>* *de sus respuestas.*

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

v) 

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como *f*. Calcule $f(2)$. ¿Se puede calcular $f(f(2))$?

(c) Determine, usando la misma *f* de (*b*), un valor x tal que $f(x) = d$

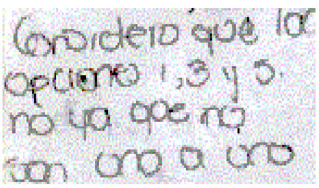
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule $h(g(a))$.

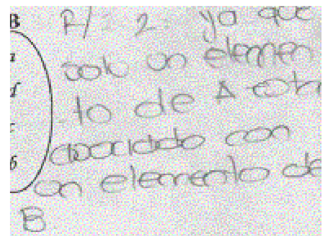
Para el literal a)

En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

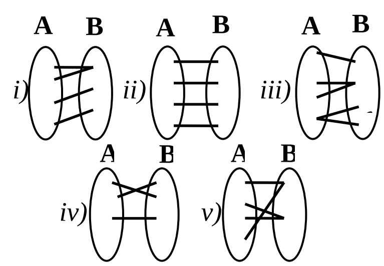
La siguiente es la respuesta de Carlos:



y después escribe



Ciclo de Interacción:

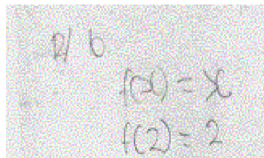
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico 5 diagramas de flechas que relacionan dos conjuntos A y B. En los diagramas i), iii) y v) más de un elemento de A está relacionado con uno de B En el diagrama ii) cada elemento de A está relacionado sólo con uno de B En el diagrama iv) un elemento de A no está relacionado con ninguno de B	Establezco un criterio que permita decidir que diagramas no representan una función.	Se presentan 5 diagramas de flechas en los que se pide identificar cuáles de ellos representan una función de A en B. Se pide justificar la respuesta. 
El diagrama ii) es uno a uno	Establezco un criterio que permita decidir que diagramas representan una función.	Considero que las opciones 1,3 y 5 no son funciones ya que no son uno a uno
		El diagrama ii) representa una función ya que solo un elemento de A está asociado con un elemento de B

Según las acciones de Carlos, la imagen que posee del concepto de función, parecería corresponder a la de función inyectiva. Más aún, Carlos no hace ningún comentario con respecto al diagrama 4, en el que un elemento del dominio no aparece relacionado con ninguno de B. Por lo que se observa, Carlos posee y aplica una definición errada del concepto de función.

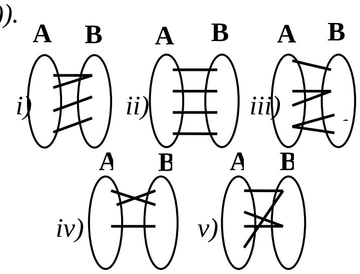
Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?

La siguiente es la respuesta de Carlos:

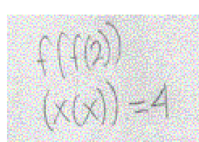


Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico como función el diagrama ii)	*f(2)* es posible calcularlo describiendo de forma algebraica la función *f* determinada por este diagrama	Se presentan 5 diagramas de flechas en los que se pide identificar uno de ellos como una función f y se pide calcular *f(2).* De igual manera se pregunta si es posible calcular *f (f(2)).* 
		$f(x) = x$ $f(2) = 2$

Por las acciones de Carlos, se observa que el diagrama ii) lo relaciona con la función idéntica, sin advertir que los elementos de A son diferentes a los elementos de B. Continúa presentando serias inconsistencias en relación con el concepto de función. Algo que se evidencia aún más en complemento del desarrollo de la situación, cuando se le pregunta: ¿Se puede calcular f (f (2))?

Su respuesta fue:



Ciclo de Interacción:

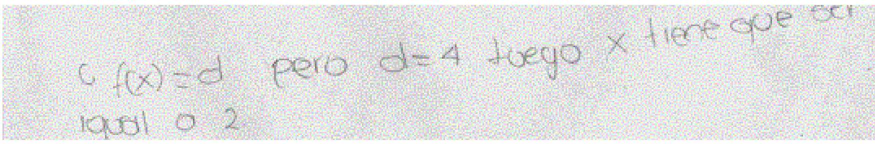
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico que f(f(2)) es un producto	f(f(2)) es posible calcularlo describiendo de forma algebraica esta expresión	Dada la función f(x)=x, se pregunta si es posible calcular f (f(2)).
Identifico que (x(x)) es un producto	(x(x)) se puede calcular si se reemplaza x por 2	f(f(2)) = (x(x))
		(x(x)) = 4

Nótese que Carlos interpreta la función f como x (en este caso x = 2), además f(f(2)) representa el producto (x(x)). Puesto que x = 2, obtiene que (x(x)) = 4. Carlos parece no tener una mínima comprensión del concepto de función.

Para el literal c):

Determine, usando la misma f de (b), un x tal que f(x)=d.

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


c f(x)=d pero d=4 luego x tiene que ser
igual a 2

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo calcular x tal que f(x)=d	f(x)=d es la misma ecuación que (x(x))=4	Se pide, utilizando la función f(x)=x, hallar x tal que f(x)=d
Debo hallar el valor de x que corresponda a d =4	Se debe hallar el valor de x para el cual x(x) = 4	f(x)=d pero d=4
		x tiene que ser igual a 2

Obsérvese que asumir f(x)=(x(x)) carece de todo fundamento. Al parecer, Carlos actúa guiado por una serie de esquemas figurativos, espontáneos.

Los literales **d)** y **f)**, relacionados con la inversa no fueron desarrollados por Carlos, lo cual permite conjeturar un desconocimiento del concepto de función inversa en lo relacionado con los diagramas sagitales.

SEGUNDA SITUACIÓN

Considere los siguientes conjuntos de parejas.

i) $\{(x,y):\ y^2 = x\}$

ii) $\{(x,y):\ y = 1+ 1/x^3\}$

iii) $\{(x,y):\ y^2 - x^2 - 1 = 0\}$

iv) $\{(x,y):\ x+y-1 = 0\}$

(a) Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma y = f(x). *Justifique cada una de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f (–2). ¿Se puede calcular f (f (–2))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), un x tal que f(x)=9.

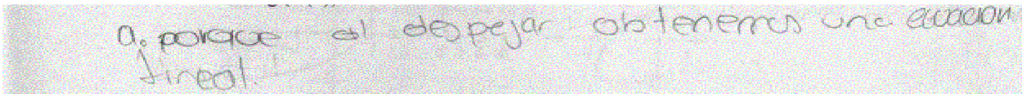
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule g (h (2)).

Para el literal a):

Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma y = f(x). *Justifique cada una de sus respuestas.*

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


a. porque al despejar obtenemos una ecuacion lineal.

Ciclo de Interacción

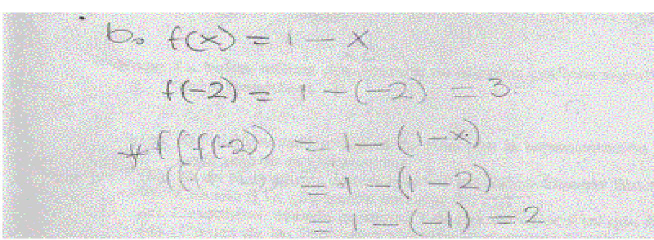
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo elegir entre las ecuaciones que se presentan aquellas que sean funciones	Aplico un criterio para decidir que ecuaciones representan funciones	Se presentan 5 ecuaciones en las que se pide que identifique cuales representan una función de la forma y = f(x): **i)** $y^2 = x$ **ii)** $y = 1 + 1/x^3$ **iii)** $y^2 - x^2 - 1 = 0$ **iv)** $x + y - 1 = 0$
		Es función la iv) porque al despejar obtenemos una ecuación lineal.

Nótese que el esquema director relacionado con el concepto de función en esta situación, da dos características a las funciones-como ecuaciones-. En primer lugar, la variable "*y*" debe poder despejarse en términos de la variable "*x*". En segundo lugar, una ecuación representa una función, si es lineal. Esquema que lo guiará a resultados erróneos.

Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f(–2). ¿Se puede calcular f (f (–2))?

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


b. $f(x) = 1 - x$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(f(-2)) = 1 - (1 - x)$

$= 1 - (1 - 2)$

$= 1 - (-1) = 2$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Identifico como f a la representada por la ecuación x+y–1= 0. Se debe evaluar f en -2 Se debe evaluar f en f(-2)	Para calcular f(-2) se debe despejar "*y*" en términos de "*x*". A "*y*" se le llamará f(x)	Se pide que: i) Una de las funciones elegidas la denote con la letra f ii) Calcule f(-2) Se pregunta si es posible calcular f(f(-2))
Se tiene f(x) = -x+1 y se pide calcular f(-2)	Para calcular f(-2) se debe reemplazar x por -2:	La función f es f(x) = 1-x
f(-2)= 3 y se pide calcular f(f(-2))	Para calcular f(f(-2)) se debe evaluar f en f(x)	f(-2)= 1-(-2)=3
		f(f(-2))=1-(1-x) =1-(1-2)=1-(-1)=2

En esta situación se observa, en principio, una correcta asociación del concepto de función y el de ecuación realizada por Carlos, sin embargo, nótese cómo en la igualdad f(f(-2)) = 1-(1-x), de donde se infiere que f(-2) = f(x), se evidencia que el concepto de variable no está estructurado.

Para el literal c):

Determine, usando la misma f de (b), un x tal que f(x)=9.

La siguiente fue la respuesta de Carlos:

Ciclo de Interacción:

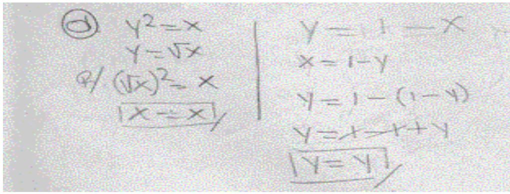
Observables del sujeto	**Coordinaciones del sujeto**	**Observables del objeto**
Debo Interpretar el significado de f(x)=9	f(x)=9 es una ecuación	Se pide, utilizando la función del literal b), hallar un x, tal que f(x)=9
Debo resolver la ecuación 9 = 1-x	La ecuación 9 = 1-x se resuelve despejando la variable x	Si f(x) =1-x entonces : 9 = 1-x
		x = -8

En esta situación, Carlos asocia la búsqueda de la preimagen de 9 con la resolución de la ecuación f(x) = 9. Esta es la única situación, de las analizadas hasta ahora, en la que Carlos muestra un desarrollo exitoso, sin embargo, este hecho no permite hacer ninguna inferencia sobre alguna evolución en relación con su concepción del concepto de función.

Para el literal d):

¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

La siguiente fue la respuesta de Carlos:



Ciclo de Interacción:

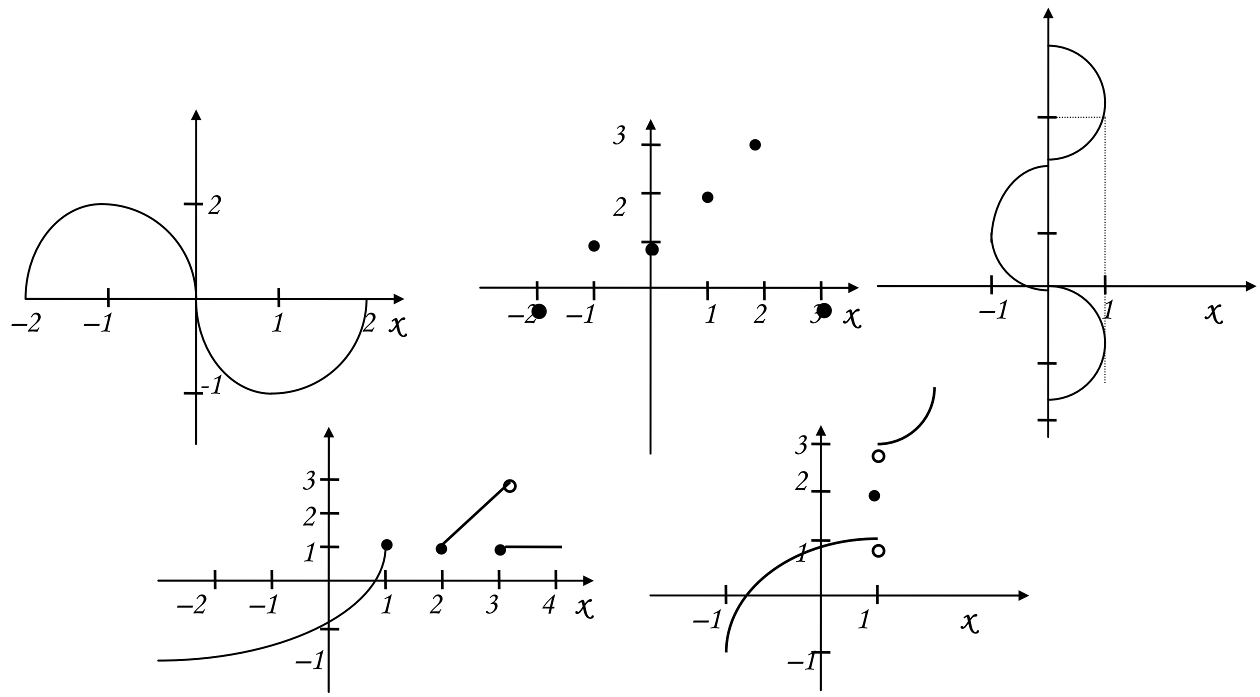
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo decidir cuáles de las funciones dadas en **i)** $y^2 = x$ **ii)** $y = 1+ 1/x^3$ **iii)** $y^2–x^2 –1= 0$ **iv)** $x+y–1= 0$ poseen inversa y por qué	Se tiene una función cuando “y” está despejada.	Cuál de las funciones poseen inversa
$y = \sqrt{x}$ y $y = 1\text{-}x$ son funciones que tienen inversa	Una función es la inversa si al reemplazar x por y se obtiene una identidad	$y^2 = x$ $y = 1\text{-}x$ $y = \sqrt{x}$ $x = 1 - y$
		$(\sqrt{x})^2 = x$ $y = 1-(1-y)$ $x = x$ $y = 1-1+y$ $y = y$

Carlos activa los siguientes esquemas en el desarrollo de esta situación: en primer lugar, se tiene una función si la variable “y” está despejada en términos de la variable “x”. En segundo lugar, la inversa se obtiene despejando la variable “x” en términos de la variable “y”. Por último, al parecer está activando el esquema asociado a la prueba de que la composición de una función y su inversa es igual a la idéntica, pero lo que hace no corresponde en absoluto con lo que reza la regla. En resumen, esta situación es una confirmación de cómo los esquemas que Carlos activa en la solución de las diferentes situaciones están asociados a definiciones completamente erradas.

El literal **e)** no fue desarrollado por Carlos.

TERCERA SITUACIÓN

Considere las siguientes gráficas:



Nota: La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.

(a) Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f(1). ¿Se puede calcular f(f(1))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), x tal que f(x)=2.

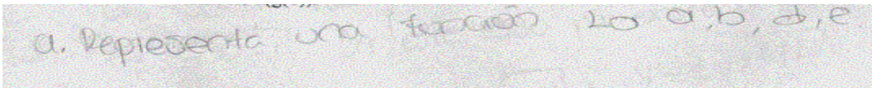
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h(g(1)).

Para el literal a)

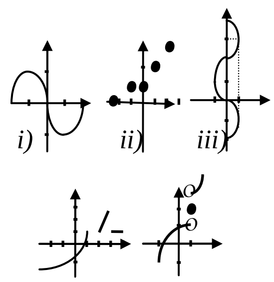
Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique <u>cada una</u> de sus respuestas.*

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


a. Representa una función la a,b,d,e

:

Ciclo de Interacción

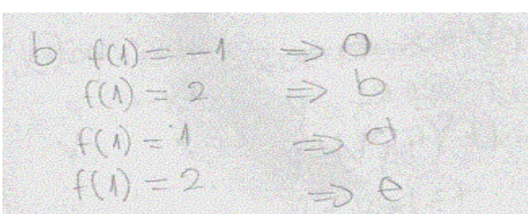
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo identificar cuáles de las 5 gráficas que se presentan representan una función.	Debo identificar las curvas que satisfagan la prueba de la recta vertical.	Se presentan 5 gráficas y se pide identificar cuál o cuáles de ellas representan la gráfica de una función. **Nota:** La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo. 
		Representa una función la a, b, d, e (Léanse como *i)* , *ii)* *iv)* *y* *v)* respectivamente*)*

Nótese que Carlos tiene un desarrollo completamente exitoso de la situación. Al parecer utiliza la prueba de la recta vertical, pues en su cuestionario de preguntas la gráfica correspondiente al literal *iii)* aparece rayada con varias líneas paralelas al eje y.

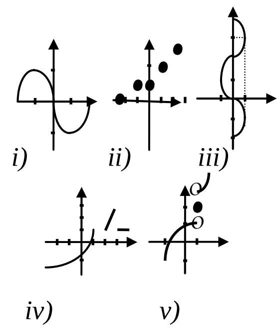
Para el literal b)

Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f(1). ¿Se puede calcular f(f(1))?

La siguiente fue la respuesta de Carlos


b f(1) = −1 ⇒ a
f(1) = 2 ⇒ b
f(1) = 1 ⇒ d
f(1) = 2 ⇒ e

Ciclo de Interacción

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo elegir las gráficas que corresponden a una función. Llamaré a cada una de estas funciones con la letra f. Debo calcular f(1) en cada una de ellas	En cada gráfica ubico sobre el eje de abscisas en el punto de abscisa 1. A partir de este punto, hago un traslado paralelo al eje de ordenadas, hasta intersecar la curva y luego proyecto este punto de intersección sobre el eje de ordenadas, el cual será f(1).	Se p De las gráficas identificadas como funciones, se pide denotar una de ellas como f y calcular f(1). Se pregunta si es posible calcular f(f(1)) 
		$f(1)=-1 \Rightarrow a$ $f(1)=2 \Rightarrow b$ $f(1)=1 \Rightarrow d$ $f(1)=2 \Rightarrow e$

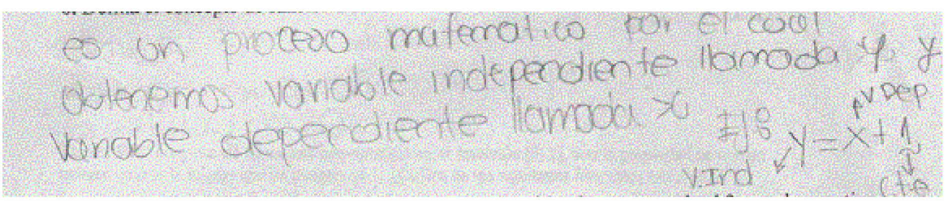
Nuevamente se observa un desarrollo completamente exitoso en esta situación. Podría concluirse que en el contexto gráfico, Carlos identifica funciones y calcula imágenes correctamente.

Los literales c), d) y e) no fueron desarrollados por Carlos.

CUARTA SITUACIÓN

Defina el concepto de función matemática.

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


es un proceso matematico por el cual
obtenemos variable independiente llamada y, y
variable dependiente llamada x. #1,8 y=x+1
v.dep
V.Ind
cte

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico que debo dar la definición de función	Expreso la definición de función en términos de una relación entre variables	Se pide que dé la definición de función
		"Es un proceso matemático por el cual obtenemos variable independiente llamada "y" y variable dependiente llamada x. *V Dep* *Ej. : y = x + 1* *V. Ind C te."*

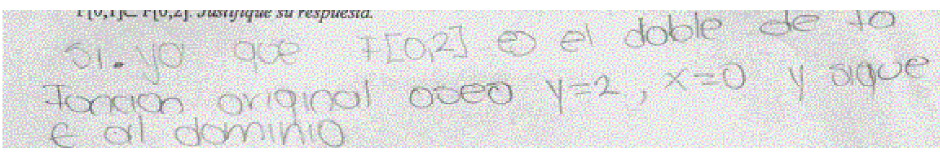
Se observa que el esquema director que guía la definición del concepto de función, es el que relaciona una función con una ecuación en dos variables. Según el ejemplo que Carlos exhibe, su esquema asociado al concepto muestra que una función es una ecuación, en donde una de las variables está despejada en términos de la otra. Nótese Que los nombres asociados a las variables no son los correctos, según la idea que él quiere transmitir.

QUINTA SITUACIÓN

Si F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1], determine si

F[0,1]⊂ F[0,2]. *Justifique su respuesta.*

La siguiente fue la respuesta de Carlos


F[0,1]⊂ F[0,2]. Justifique su respuesta.
Si. ya que F[0,2] es el doble de la
Función original osea y=2, x=0 y sigue
∈ al dominio

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico que F[0,1] representa una función en donde x = 0 y y =1 Identifico que F[0,2] representa una función en donde x = 0 y y =2 Identifica que debe decidir si F[0,1] es un subconjunto de F[0,2]	Debo dar un criterio que me permita decidir si F[0,1] es un subconjunto de F[0,2]	Se presentan F[0, 1] y F[0, 2] como dos funciones. Se pregunta si F[0,1]⊂ F[0,2].
		"Sí ya que F[0,2] es el doble de la función original o sea y=2, x=0 y sigue ∈ al dominio".

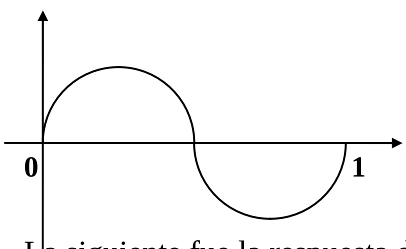
En esta situación, Carlos no asigna el significado correcto a F[0,1] y F[0,2]; al parecer no concibe que puedan representar conjuntos de funciones. Según su desarrollo, considera a F[0,1] y F[0,2] como funciones, y le basta que F[0,2] sea "más grande" que F[0,1] para responder afirmativamente a la pregunta. En su frase "*…y sigue ∈ al dominio*" se podría inferir que Carlos no tiene el concepto de dominio bien definido.

SEXTA SITUACIÓN

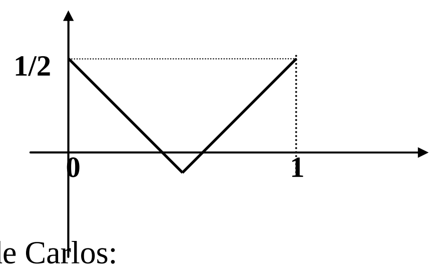
Sea **W** el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en **W**?

a) f(x) = –2, x∈[0, 1] **b)** $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ **c)** $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, x∈[0, 1]

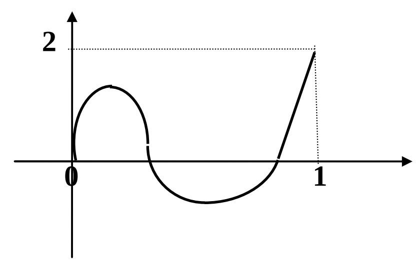
d)



e)



f)



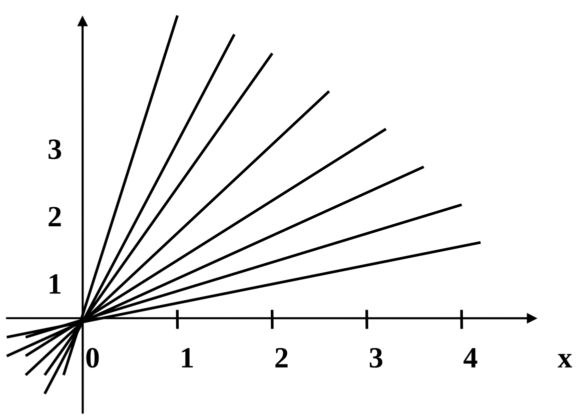
La siguiente fue la respuesta de Carlos:

4 están en W; a,b,d y f.

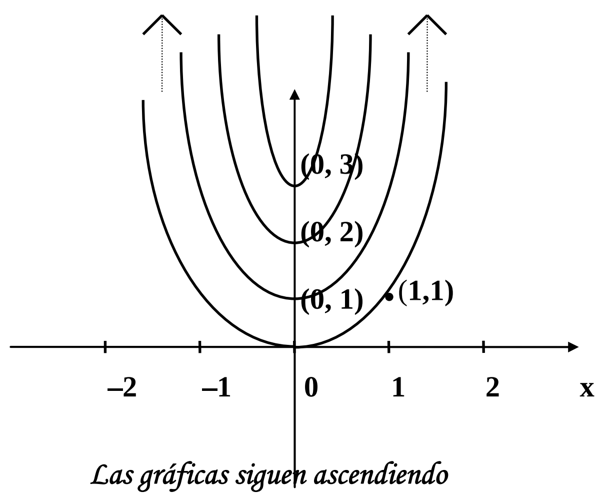
Debido a que no se muestra ningún desarrollo en esta situación y por las acciones exhibidas por Carlos en las anteriores situaciones, se considera que no es pertinente hacer un ciclo de interacción en donde se pudieran consignar, plausiblemente, los esquemas que dirigen las acciones de Carlos. Cabe resaltar una contradicción en sus acciones, al considerar que las funciones dadas en d) y f) pertenecen a W. Contradicción que se confirma al afirmar que la función dada en f) pertenece a W.

SEPTIMA SITUACIÓN

Encuentre la expresión analítica que corresponde a cada una de las dos familias de funciones que se describen gráficamente a continuación:



Las gráficas llenan todo el primer y tercer cuadrante



Las gráficas siguen ascendiendo indefinidamente como se indica con las flechas punteadas

Esta situación no fue desarrollada por Carlos. Podría inferirse que hay un total desconocimiento de los conceptos ligados a la situación.

OCTAVA SITUACIÓN

Considere la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo $[0,+\infty)$, y las siguientes afirmaciones con respecto a ella:

1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo.
2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo.
3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $[0,+\infty)$.
4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0.

¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas? *Justifique su respuesta*

La siguiente fue la respuesta de Carlos:

respuesta

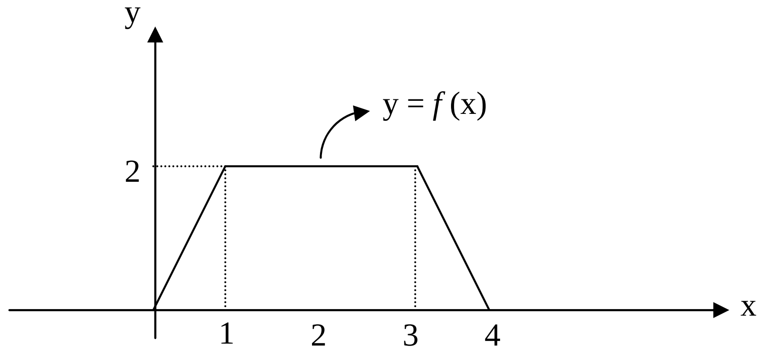
Considero. que '2y4' ya que toda Integral
Representa un area bajo una curva que va desde cero
hasta infinito. es decir x puede tomar cualquier valor
siempre que sea positivo ya que como representa
un area y las areas nunca seran negativas.

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico que la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$ con x en el intervalo $(0,+\infty)$. Identifico que se hacen 4 afirmaciones con respecto a ella y se pide decidir cuáles de ellas son ciertas. En la primera afirmación se dice que es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo. En la segunda afirmación se dice que en caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo En la tercera afirmación se dice que representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$. En la cuarta afirmación se dice que para diferentes valores de x, representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0.	Toda integral es un área, en particular $\int_0^x (t^2+1)dt$ es el área bajo la curva	Se presenta la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo $(0,+\infty)$, y se hacen las siguientes afirmaciones con respecto a ella: 1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo. 2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo. 3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$. 4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0. Se pregunta: Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas. Se pide Justificar la respuesta.
		"Considero que 2 y 4 ya que toda integral representa un área bajo una curva que va desde cero hasta infinito es decir x puede tomar cualquier valor siempre que sea positivo ya que como representa un área y las áreas nunca serán negativas"

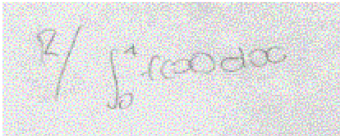
NOVENA SITUACIÓN

La siguiente es la gráfica de la función $y = f(x)$

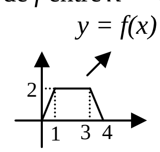


Bosqueje, si es posible, la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x=0$ y $x=4$.

La siguiente fue la respuesta de Juan:



Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Identifico la gráfica de una función *f* continua y positiva en el intervalo [0,4]. Debo calcular el área bajo la gráfica de f desde x = 0 hasta x = 4.	El área bajo la gráfica de f está dada por una integral definida	Se presenta la gráfica de una función *f* continua y positiva en el intervalo [0,4]. Se pide expresar el área bajo la gráfica de *f* entre $x = 0$ y $x = 4$. 
		$\int_0^4 f(x)dx$

En esta situación se observa que Carlos no interpreta que se le está indagando por el bosquejo de la gráfica de una función. Al parecer sólo atina a conectar el área con la integral $\int_0^4 f(x)dx$.

Conclusiones con respecto al desarrollo del primer instrumento

Podemos concluir lo siguiente de acuerdo al análisis de los desarrollos mostrados por Carlos:

Fracasa en la utilización del concepto de variable. Fracasa al identificar las funciones en contexto sagital y ecuaciones. Curiosamente tiene éxito al identificar funciones en el contexto gráfico. Al parecer en esta situación acude a esquemas figurativos, que por lo analizado no están en correspondencia con las definiciones institucionales. Fracasa al definir el concepto de función. Fracasa al representar familias de funciones por medio de ecuaciones. Fracasa en relacionar el carácter positivo de una función que se define por una integral en la que el integrando es una función positiva en todo su dominio.

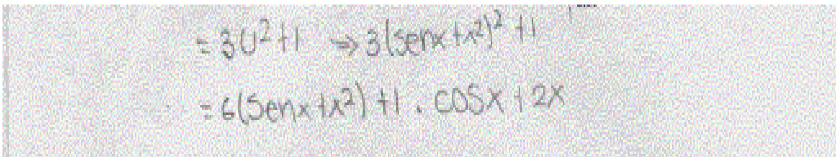
Según el desarrollo de Carlos en cada una de las diferentes situaciones, se observa que su concepción del concepto de función se encuentra en un estado apenas en formación. Muestra de ello, podría inferirse, es su fracaso en el desarrollo de casi todas las situaciones presentadas en este primer instrumento. Igualmente muestra en sus acciones la no presencia de una concepción estructural del concepto de función. Lo anterior queda confirmado en la calificación que obtuvo en los indicadores de concepción operacional (**CO**) de 0.51 y 0.0 en el indicador de concepción estructural del concepto de función (**CE**).

B. INSTRUMENTO NÚMERO DOS

PRIMERA SITUACION

Si $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


$= 3u^2 + 1 \Rightarrow 3(senx + x^2)^2 + 1$

$= 6(Senx + x^2) + 1 \,.\, \cos x + 2x$

Ciclo de Interacción

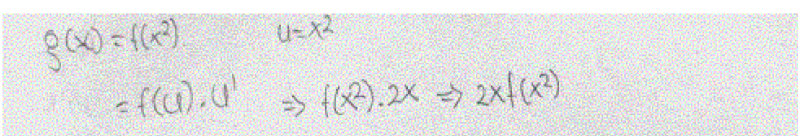
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Hay dos funciones: y en función de la variable u. u en función de la variable x. Se pide calcular la derivada de y con respecto a la variable x.	$u = senx + x^2$ se reemplaza en $y = 3u^2 + 1$	Se presentan dos funciones: $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$ Se pide calcular $\dfrac{dy}{dx}$
Debo calcular la derivada de $3(senx + x^2)^2 + 1$	Aplico la regla de la cadena.	$= 3u^2 + 1 \Rightarrow 3(senx + x^2)^2 + 1$ $= 6(senx + x^2) + 1.\cos x + 2x$

En principio, el esquema que dirige las acciones de Carlos en esta situación es el relacionado con la regla de la cadena. Pero se observan en él falencias relacionadas con la notación simbólica y el cálculo de la derivada.

SEGUNDA SITUACION

Sea $g(x) = f(x^2)$ una función diferenciable. Calcule $g'(x)$.

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


$g(x) = f(x^2)$ $u = x^2$

$= f(u) \,.\, u' \Rightarrow f(x^2).2x \Rightarrow 2xf(x^2)$

Ciclo de Interacción

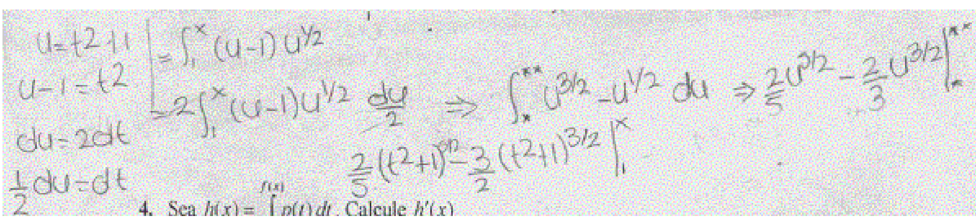
Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función *g* se presenta en términos de otra función: (*f*) *f* está en función de x^2 Se solicita calcular la derivada de la función *g*	*g* es una función compuesta: x^2 se puede reemplazar por una variable	Se presenta la función g escrita como: $g(x) = f(x^2)$ g es una función diferenciable. Se pide calcular $g'(x)$.
g(x) queda expresada como f(u). Debo calcular la derivada de f(u)	Se aplica la regla de la cadena: $h(x) = h(x).x´$	$u = x^2$
La derivada está en términos de u	Se debe escribir la derivada en términos de x	$g(x) = f\ (x^2) = f(u).u´$
		$\Rightarrow f(x^2).2x \Rightarrow 2x\, f(x^2)$

Se observa que el esquema director de las acciones de Carlos es el relacionado con la regla de la cadena, pero de sus acciones se infiere que no asigna un significado correcto a la derivada de $f\ (x^2)$, pues según su desarrollo $f\ ´(x^2) = f(x^2).2x$

TERCERA SITUACION

Calcule $g'(x)$ si $g(x) = \int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$

La siguiente fue la respuesta de Carlos:


$u=t^2+1$ $\Big| = \int_1^x (u-1)u^{1/2}$
$u-1=t^2$ $= 2\int_1^x (u-1)u^{1/2}\,\frac{du}{2} \Rightarrow \int_{*}^{x*} u^{3/2} - u^{1/2}\,du \Rightarrow \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|$
$du=2dt$ $\quad \frac{2}{5}(t^2+1)^{5/2} - \frac{3}{2}(t^2+1)^{3/2}\Big|_1^x$
$\frac{1}{2}du = dt$
4. Sea $h(x) = \int^{f(x)} p(t)\,dt$. Calcule $h'(x)$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función g está dada por la integral $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$. Se debe calcular esta integral	Para calcular $\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$, se debe hacer un cambio de variable y resolver la integral	Se presenta la función $g(x) = \int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$ Se pide calcular la integral
		u = t^2 +1 u – 1 = t^2 du = 2dt ½ du = dt $= \int_1^x (u-1)u^{1/2} = \ldots.$

$$= \frac{2}{5}(t^2+1)^{5/2} - \frac{3}{2}(t^2+1)^{3/2}\Big|_1^x$$

Nuevamente el esquema que dirige las acciones de Carlos es el esquema asociado al cálculo de una integral definida. Obviamente, la expresión $g(x)=\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\,dt$, para Carlos no representa una función. Es evidente la falta de una concepción estructural.

CUARTA SITUACIÓN

Sea $h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$. Calcule $h'(x)$

La siguiente fue la respuesta de Carlos:

$$h(x) = \frac{1}{2}P(t)^2\Big|_0^{f(x)} = \frac{1}{2}P(f(x))^2 - \frac{1}{2}P(a)^2$$

Ciclo de Interacción:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Debo calcular la derivada de $h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$	La derivada de $h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$ es igual al cálculo de esta integral, teniendo en cuenta que $\int f(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2$	$h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$ es una función Se pide calcular $h'(x)$
		$h'(x)=\frac{1}{2}P(t)^2\Big\vert_0^{f(x)}=$ $\frac{1}{2}P(f(x))^2-\frac{1}{2}P(a)^2$

De nuevo el esquema que dirige las acciones de Carlos es el esquema asociado al cálculo de una integral definida. La expresión $h(x)=\int_a^{f(x)} p(t)\,dt$, para Carlos no representa una función, ni mucho menos una composición de funciones.

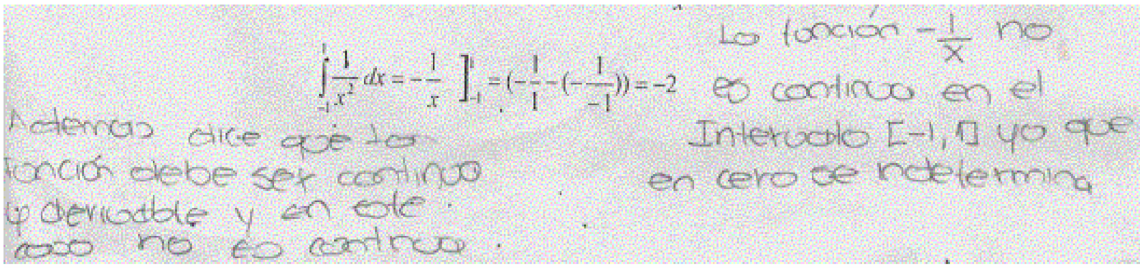
QUINTA SITUACION

Una de las propiedades de la integral definida afirma que si una función $f(x)$ es positiva en un intervalo cerrado [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es positiva. Utilizando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo en el siguiente ejemplo, parecería que se está contradiciendo la afirmación inicial ¿Qué está fallando?:

$g(x)=-\frac{1}{x}$ es una antiderivada de la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ por tanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = (-\frac{1}{1} - (-\frac{1}{-1})) = -2$$

La siguiente fue la respuesta de Carlos:



$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big]_{-1}^{1} = (-\frac{1}{1} - (-\frac{1}{-1})) = -2$

La función $-\frac{1}{x}$ no es continua en el Intervalo [−1,1] ya que en cero se indetermina

Además dice que la función debe ser continua y derivable y en este caso no es continua.

Ciclo de Interacción

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
Se afirma que en el cálculo de $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ usando el TFC hay un error. Se pide hallar este error	Debo verificar si la antiderivada de la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es continua	Se presenta el desarrollo de la integral definida $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ en la que aparentemente el procedimiento para desarrollarla es correcto. Se muestra que el resultado es contradictorio con la propiedad de que la función $\frac{1}{x^2}$ es positiva. Se pregunta que está fallando
		La función $-\frac{1}{x}$ no es continua en el intervalo [1,-1] ya que en cero se indetermina. Además dice que la función debe ser continua y derivable y en este caso no es continua

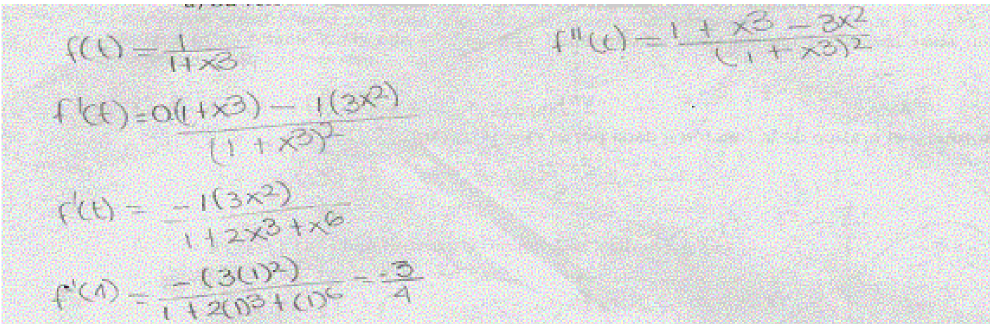
Es un hecho que Carlos en respuesta a esta situación, asocia una serie de palabras que "parece recordar", en relación con las condiciones del integrando para la existencia de la integral definida. Es evidente que los esquemas que dirigen las acciones de Carlos son figurativos.

SEXTA SITUACION

Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \le t \le 1$, la posición viene dada por la integral $f(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$. (No intente el cálculo de esta integral). Calcule:

a) Su velocidad cuando $t = 1$ b) Su aceleración cuando $t = 1$

La siguiente fue la respuesta de Carlos:



$f(t) = \frac{1}{1+x^3}$

$f''(t) = \frac{1+x^3-3x^2}{(1+x^3)^2}$

$f'(t) = \frac{0(1+x^3)-1(3x^2)}{(1+x^3)^2}$

$f'(t) = \frac{-1(3x^2)}{1+2x^3+x^6}$

$f'(1) = \frac{-(3(1)^2)}{1+2(1)^3+(1)^6} = \frac{-3}{4}$

Ciclo de Interacción

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La función *f* es una integral que representa la posición de una partícula. Se debe calcular la velocidad y la aceleración cuando t = 1	La posición es la función que hay dentro de la integral	La función $f(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}dx$ representa la posición de una partícula. Se pide calcular (sin resolver la Integral) su velocidad y su aceleración cuando t =1
La velocidad es la derivada de la posición.	Par calcular la derivada se aplica la regla del cociente	$f(t) = \frac{1}{1+x^3}$
Se debe calcular la velocidad en t = 1	Para calcular la velocidad se reemplaza t = 1 en $f´(t) = \frac{-1(3x^2)}{1+2x^3+x^6}$	$f´(t) = \frac{0(1+x^3)-1(3x^2)}{(1+x^3)^2}$ $f´(t) = \frac{-1(3x^2)}{1+2x^3+x^6}$
Se debe calcular la aceleración	La aceleración se obtiene hallando la segunda derivada de *f (t)*	$f´(1) = \frac{-1(3(1)^2)}{1+2(1)^3+(1)^6} = \frac{-3}{4}$
		$f´´(t) = \frac{1+x^3-3x^2}{(1+x^3)^2}$

En principio, el esquema que se activa para dirigir las acciones de Carlos es el asociado con la velocidad como derivada de la función posición, evalúa correctamente, sin embargo, la segunda derivada es incorrecta, no la evalúa y no hay justificación de su respuesta. Nótese además que la combinación de variables en una misma expresión, da muestra del uso de las variables como simples etiquetas.

SEPTIMA SITUACIÓN

Encontrar una función *f* y un valor de la constante *c*, tal que:

$$\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½ \text{ para todo } x \text{ real.}$$

La siguiente fue la respuesta de Carlos:

$$\text{Senx} - \frac{1}{2}x + C = 0$$

$$C = -\text{senx} + \frac{1}{2}x$$

CICLO DE INTERACCIÓN:

Observables del sujeto	Coordinaciones del sujeto	Observables del objeto
La igualdad $\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½$, es una ecuación.	La integral de la función f es igual a la integral de $\cos x - ½$.. Así aparecerá la constante c. Para calcular c, se debe igualar a cero	Se pide encontrar la función f y la constante c tal que $\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½$
		$senx - \frac{1}{2}x + c = 0$ $c = -senx + \frac{1}{2}x$

Se sigue observando que la fuente de los errores cometidos por Carlos, radica en la no consideración de la expresión $\int_c^x f(t)dt$ como una función.

Conclusiones

Podemos concluir lo siguiente de acuerdo al análisis de los desarrollos mostrados por Carlos:

Fracasa al aplicar la regla de la cadena, usando la notación de Leibniz. Fracasa al aplicar la regla de la cadena, cuando la composición de funciones está dada implícitamente. Fracasa al aplica correctamente la primera forma del teorema fundamental del cálculo, en situaciones “directas”. Fracasa al aplicar la primera forma del TFC, en situaciones en las que el límite superior de integración es una función. No discrimina las variables cuando aplica la primera forma del TFC, lo que obviamente se confirma con su calificación de 0.0 en el indicador de comprensión del Teorema Fundamental el Cálculo (**CTFC**).

En contraste con el primer caso, se observa que las concepciones erradas de Carlos en relación con diferentes conceptos básicos como, variable, función, derivada, son su fuente de errores en la resolución de las diferentes situaciones que conformaron los instrumentos de evaluación.

Dada la calidad de los desarrollos de Carlos en las diferentes situaciones, se puede inferir, en lo que respecta a la concepción del concepto de función, que ésta no existe en un estado estructural, y que apenas da indicios de estar formándose una concepción como proceso del concepto.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES FINALES

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES FINALES

A continuación presentamos las conclusiones de esta investigación con respecto a los interrogantes que motivaron el planteamiento del problema, los objetivos y las hipótesis de investigación.

1. CON RESPECTO A LOS INTERROGANTES:

"a) ¿Cuál es el estado de comprensión del concepto de función, como proceso o como objeto en los estudiantes, antes de tomar un curso de cálculo I?"

Los resultados de la primera parte de la investigación evidenciaron que los estudiantes poseen una concepción operacional (como proceso) del concepto de función que prima sobre una concepción estructural (como objeto); aclarando que esta última no llega a un nivel mínimo en el 100% de los estudiantes.

" b) ¿Cuál es la disponibilidad de un sistema de representación abstracto del concepto de función?"

La tabla número 5 nos mostró que el 85.7% de los estudiantes disponían de un sistema simbólico abstracto que les permitió afrontar todas las situaciones problemáticas dando una correcta significación a los símbolos tales como $f(a)$, $f(f(a))$, $b=f(x)$, etc. en cualquier contexto.

" c) ¿Cuál es la incidencia del estado de comprensión del concepto de función-proceso, objeto- en el aprendizaje y comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo?"

En la tabla número 17 pudimos observar que existe una estrecha correlación entre una débil comprensión del concepto de función como objeto y una débil comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo.

" d) ¿La comprensión del concepto de función es secuencial, es decir, primero como proceso y luego como objeto, como sostiene Sfard?, o, ¿La comprensión se logra mediante la alternancia de concepciones operacionales y estructurales, como lo sostiene Tall?"

Se observaron estudiantes en los que sus desarrollos en algunas situaciones obedecían a la activación de esquemas propios de una concepción estructural, comportamiento que debería ser constante a lo largo de su desempeño, sin embargo se observó que en otras situaciones en las que tal concepción debiera ser la que guiara sus acciones, no fue así. Lo cual podría estar sugiriendo que las concepciones procedimentales y operacionales son concurrentes en el proceso de comprensión de un concepto o al menos en lo que se refiere al concepto de función, es decir, con respecto a la hipótesis de Sfard en lo relacionado con la linealidad de la formación de un concepto inicialmente de forma procedimental, seguido de la estructural, pudimos, al menos en este trabajo que tal linealidad no se vislumbra. La "comprensión" de los conceptos matemáticos es tan compleja que, según pudimos constatarlo, un concepto "vive" en la mente de los estudiantes, ya en su forma estructural, ya en su forma procedimental. Así como hay situaciones en las que un estudiante particular responde exitosamente pues para ello se requiere de la concepción estructural, falla en algunas situaciones en las que, para el mismo estudiante, la formación procedimental es requerida y viceversa.

2. CON RESPECTO A LOS OBJETIVOS

2.1 Objetivos Generales

> "A) Profundizar en el conocimiento de nuestra realidad educativa, en especial, en lo relativo a los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes en temas fundamentales de los cursos de cálculo."

Pudimos constatar que la comprensión del TFC como concepto particular e importante en un curso de cálculo, no es alcanzada por la gran mayoría de los estudiantes después de una enseñanza tradicional del concepto. Al respecto queremos se nos permita hacer una reflexión: en una enseñanza en la que el docente, muchas veces presionado por la exigencia del currículo, en una sola clase presenta el TFC y sus alcances, así como otros conceptos claves, no tendrá la oportunidad de recibir las devoluciones de los estudiantes con el fin de saber si se continúa o se modifican las estrategias de enseñanza, en procura de cumplir una labor verdaderamente mediadora entre el conocimiento y nuestros estudiantes.

> *"B) Mediante la recolección de datos empíricos y el aporte de elementos teóricos, ayudar a comprender y explicar los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos en la matemática avanzada."*

El marco teórico nos brindó los elementos necesarios para la elaboración de los instrumentos de evaluación, que nos permitieron realizar inferencias sobre la forma en que los sujetos construyen y reconstruyen sus esquemas cognitivos en el proceso de aprendizaje de un concepto o en la resolución de una situación problema.

2.2 Objetivos Específicos

Acerca del objetivo específico Nº 1: Eficacia del instrumento

> *"Analizar la eficacia de las situaciones planteadas en los instrumentos respecto a la identificación de los esquemas conceptuales del alumno, con relación a las nociones matemáticas de función y el teorema fundamental del cálculo."*

Los instrumentos, a nuestro modo de ver, permitieron observar los esquemas que dirigían las acciones de los estudiantes en las distintas situaciones. Estas situaciones, junto con las variables didácticas que se pusieron en juego, permitieron observar el estado de comprensión no sólo de los conceptos considerados como objetivo de estudio en esta investigación-función y TFC-, sino el de otros, tales como los conceptos de variable y regla de la cadena. Del análisis a posteriori concluimos que el cambio de variables didácticas permitió observar que algunos estudiantes no estaban en posesión de un esquema conceptual más evolucionado, que aquel que les proporcionaba el éxito en situaciones básicas. Algo que quedo de manifiesto al observarse estudiantes que respondieron correctamente las situaciones 1 y 3, pero erróneamente las situaciones 2 y 4, todas ellas del segundo instrumento.

Acerca del objetivo específico Nº 2: **Sobre los obstáculos epistemológicos y dificultades conceptuales.**

> *"Identificar los obstáculos cognitivos y dificultades conceptuales en el estudiante respecto a los conceptos de función y el Teorema Fundamental del Cálculo, a través de situaciones problemáticas planteadas en los instrumentos y que, posiblemente, susciten problemas de asimilación o acomodación a sus esquemas conceptuales, con o sin conflicto cognitivo, respecto a las situaciones".*

Con respecto a los obstáculos se resaltan los siguientes:

- Relación bilateral entre una función y la expresión algebraica que lo representa. Este obstáculo se presenta cuando el estudiante reconoce una función en términos de una ecuación algebraica: se tiene una función cuando una de las variables está despejada en términos de la otra.
- Relativo a la noción de función. Este obstáculo se presenta cuando se dice que se tiene una función, si hay una ecuación que la determine. Una gráfica corresponde a una función si es continua

Con respecto a las dificultades se resaltan las siguientes:

- Con la definición de función. En una gran mayoría los estudiantes no logran dar una definición correcta de función.
- Con respecto al dominio de una función. Casi todos los estudiantes examinados consideran que una función no cambia si se altera su dominio.
- La no identificación de $\int_a^x f(x)\,dx$ como una función de *x*. De hecho sólo 2 de los 14 estudiantes reconocieron esta integral como una función. Esta dificultad, nos dio argumentos suficientes para inferir que no sería posible una completa comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).

Acerca del objetivo específico N° 3: sobre la comprensión del concepto de función

> ***"****Mostrar el nivel de comprensión del concepto de función en los estudiantes que ingresan a los cursos de cálculo de la universidad".*

Los instrumentos permitieron evidenciar, en el primer caso, un estado de comprensión estructural "en formación" del concepto de función. Estado que, sin embargo, consideramos no es suficiente para la formación de un esquema conceptual, que pudiera confirmar una comprensión estructural del TFC. En el segundo caso se presentó una situación diferente a la del primero, en relación con una comprensión más "primitiva" del concepto de función. Los esquemas a los que acudía el estudiante examinado, permitían evidenciar una comprensión casi nula del concepto.

3. CON RESPECTO A LAS HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN:

> *"**1.** Existen estudiantes en los cuales la comprensión del concepto función se encuentra en el estado procedimental (como proceso), es decir, aún no se ha llegado al estado de comprensión estructural (como objeto)."*

Esta hipótesis se verificó de manera clara en el desarrollo de esta primera parte de la investigación, mostrando que 10 de los 14 estudiantes tenían éxito en situaciones en la que se requería activar esquemas propios de una concepción procedimental (como proceso) del concepto de función. Igualmente se mostró que sólo 4 estudiantes se aproximaban a una comprensión estructural (como objeto) mínima del concepto de función.

> *"**2.** La concepción estructural del concepto de función en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo es necesaria."*

Si bien esta hipótesis parecería obvia, en nuestra investigación fue certificada. La tabla número 17 nos permitió deducir que si la comprensión del concepto de función no se encuentra en un estado estructural, entonces no comprenderá el TFC.

4. CONCLUSIONES ADICIONALES.

1. La concepción estructural de un concepto no es posible inferirla a partir de la observación aislada de situaciones particulares. Debe ser el resultado de un análisis global del desarrollo de sus acciones en diferentes situaciones. En el análisis de los dos casos particulares, se observó que el desarrollo exitoso en situaciones en las que era requerida una concepción procedimental o estructural, en realidad podía corresponder al seguimiento de esquemas figurativos. El estudiante, a pesar de sus resultados exitosos, mostraba no tener conciencia de los conceptos involucrados en el desarrollo de sus acciones. Además, la concepción estructural que en un principio se podría inferir en situaciones básicas, ante situaciones de un grado de complejidad superior se mostró que no se tenía.
2. Finalizando, nos atreveríamos a conjeturar que la concepción estructural del concepto de función es necesaria, más no suficiente en el logro de la comprensión

del TFC. En la comprensión de este teorema pudimos observar que además es necesario poseer esquemas conceptuales asociados a la derivada como un operador sobre el conjunto de las funciones diferenciables, a la regla de la cadena y por supuesto a las propiedades de la derivada y la integral.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 10, Nº2 3, pp. 243-285.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'espirit scientifique*. Libririe Philosophique. París Traducción al castellano: *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI. México (1990).

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas.* Alianza editorial. (Edición consultada 2001).

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol.4, Nº 2, pp. 165-198.

Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction,* New York: Norton.

Delgado, C. & Álvarez, J. (2002). The Tall-Vinner Problem. An Operative Reformulation. *Proceedings of 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, , Vol 1, pp. 261, 2002

Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a Definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Tesis Doctoral. Universidad Autònoma de Barcelona. Bellaterra

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetiana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática, **8**,* **3**, *24-41.*

Farfan, R. (1997) Ingeniería Didáctica un Estudio de la variación y el Cambio. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. México

García, R. (1997). *La Epistemología Genética y la Ciencia Contemporánea. Homenaje a Jean Piaget en su centenario.* Editorial Gedisa. Barcelona.

Grupo de Educación Matemática, Departamento de Matemáticas. Univalle.(2001) *El problema de la imagen conceptual en el aprendizaje de función*. Doc. 3 Informe final proyecto Los sistemas de computación simbólica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas básicas universitarias.

Grupo EM: Alvarez, J., Delgado, C., Espinoza, A., Hoyos J., Mora, H., Pinzón, M. (2001). (Grupo de Educación Matemática, Departamento de Matemáticas. Univalle). El Problema de la Imagen Conceptual en el Aprendizaje de Función. *Documento N°3: Informe Final Proyecto Los sistemas de computación simbólica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas básicas universitarias.* COLCIENCIAS. Bogotá, Colombia.

Meel, D. (2003). Modelos y Teorías de la Comprensión Matemática: Comparación de los Modelos de Pirie y Kieren Sobre la Evolución de la Comprensión Matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol., 6 N° 3. pp. 221-271.

Pedersen O. (1974) *A Survey of the Almagest,* Odense University Press. Odense.

Piaget, J y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo XXI Editores. México.

Piaget, J. (1949). *Introduction à l'Épistémologie Génétique*.: *La Pensée Mathematique.* Vol 1. Presses Universitaires de France. París (P. U. F.), Paris. Traducción al castellano: *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático*. Paidos. Buenos Aires. (Edición consultada 1975).

Piaget, J. (1964) *Six Études de Psychologie*, De Gambier. Génève. Traducción al castellano: *Seis estudios de psicología*. Labor. Barcelona. (Edición consultada 1992).

Piaget, J. (1969). *Biología y conocimiento*. Siglo XXI. Madrid. Título original *Biologie et Connaissance,* 1967. Gallimard, Paris.

Piaget, J. (1975). *L'Équilibration des Structures Cognitives. Problème Central du Développement*. «Etudes d'Epitemologie Génétique». Vol. 33, P.U.F. Paris. Traducción al castellano: *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Siglo XXI. Madrid. (Edición consultada 1990).

Piaget, J. (1977c). *Recherches sur l'Abstraccion Réfléchissante,* «Etudes d'Epistémologie Génétique». Vol. 35. P.U.F. Paris. Traducción al castellano: *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante.* Editorial Huemul S.A. (Edición consultada 1979).

Piaget, J. (1986) Observaciones sobre la educación matemática'´En J. Piaget, G. Choquet, J. Dieudonne y Otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*., p.p. 219-227,. Hernández, J. (Comp). Alianza Universidad. Madrid. (Edición consultada 1986). Título original: *Remarques sur l'Éducation Mathématique*. (1973). Match Ecole, 58, 1-7.

Piaget, J. (1986). *La Epistemología genética*. Editorial Debate. Madrid. Título original L'épistémologie génétique. Colección «Que-sais-je?.», num. 1399. Presses Universitairies. Paris. 1970.

Piaget, J. (1990). *La Equilibración de las Estructuras Cognitivas. Problema central del desarrollo*. Siglo XXI. Madrid. Título original, *L'Équilibration des Structures Cognitives. Problème Central du Développement*. «Etudes d'Epitemologie Génétique». Vol. 33, 1975. P.U.F. Paris.

Piaget, J. et al. (1977b). *Epistémologie Génétique et Équilibration,* Delachaux & Niestlé S. A. Neuchâtel. Traducción al castellano: *Homenaje a Jean Piaget. Epistemología genética y equilibración.* Editorial Fundamentos Madrid. (Edición consultada 1981).

Piaget, J. *Psicología y pedagogía.* Ariel. Barcelona. 1977. *Psychologie et Pédagogie*. Denoël-Gonthier. Paris: (1969)

Rosas, R. y Sebastián C. (2001) *Piaget, Vigotski y Maturana. Constructivismo a tres voces.* Aique Grupo Editor S.A.Chile.

Sfard, A. (1991). *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*. Educational Studies in Mathematics. Vol 22, Nº 4, pp. 1-32.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics* **10**, **3**, (Noviembre, 1990, 10 (3). 24-36.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, Vol. 26, N° 3, 9-15.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Images and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 12, pp. 151-169.

Tall, D. (1992b).The Nature of Advanced Mathematical Thinking. *Advanced Mathematical Thinking*. Editor, Tall, D.. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London.

Tall, D. (1994a). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *International Congress of Mathematicians*, Zurich, August.

Tall, D. (1994b). A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics. *Comission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, Toulouse, France. (Pre print)

Tall, D. (1995) Justifying and Proving in School Mathematics. *Institute of Education*., pp. 27-38, Londres, Diciembre.

Vygotski, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje.* La Pléyade. Buenos Aires.

ANEXOS

ANEXO 1

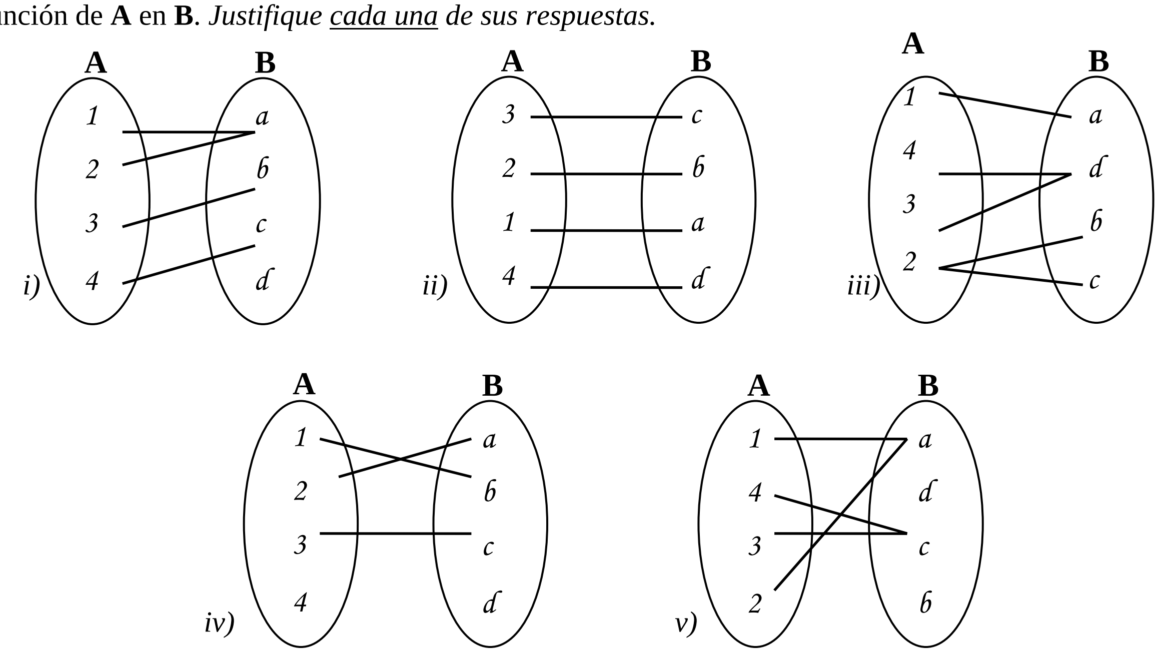
PRIMER INSTRUMENTO

EXAMEN DIAGNÓSTICO

NOMBRE: ________________________________ PLAN DE ESTUDIOS: ___________

CÓDIGO: ________________

1 (a) En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique cada una de sus respuestas.*



- **(b)** Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?
- **(c)** Determine, usando la misma f de (b), un valor x tal que f(x) = d
- **(d)** ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*
- **(e)** Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h (g(a)).

2. Considere los siguientes conjuntos de parejas.

- **i)** $\{(x,y):\ y^2 = x\}$
- **ii)** $\{(x,y):\ y = 1+ 1/x^3\}$
- **iii)** $\{(x,y):\ y^2-x^2-1= 0\}$
- **iv)** $\{(x,y):\ x+y-1= 0\}$

(a) Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma y = f(x). *Justifique* <u>*cada una de*</u> <u>*sus respuestas.*</u>

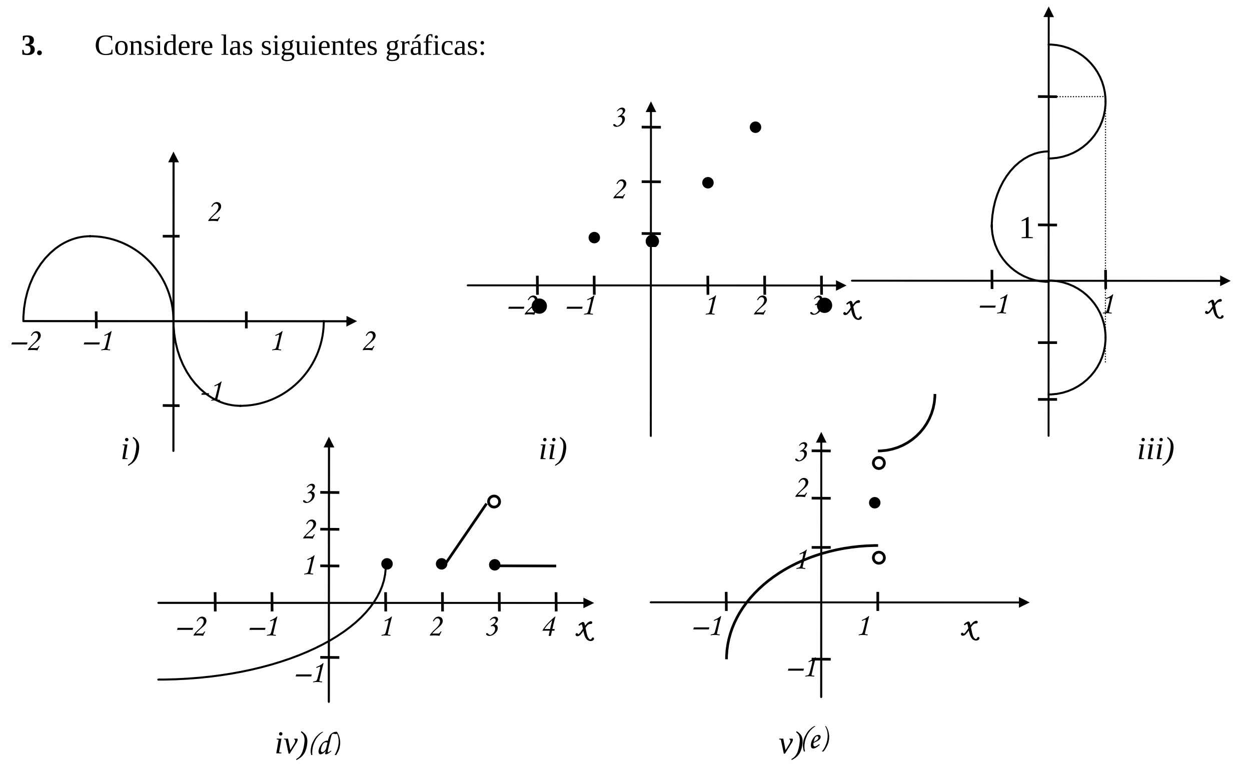
(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f (–2). ¿Se puede calcular f (f (–2))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), un x tal que f(x)=9.

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* <u>*cada una*</u> *de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule g (h (2)).

3. Considere las siguientes gráficas:



Nota: La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.

(a) Identifique cuales de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique* <u>*cada una*</u> *de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f(1). ¿Se puede calcular f(f(1))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), x tal que f(x)=2.

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* <u>*cada una*</u> *de sus respuestas.*

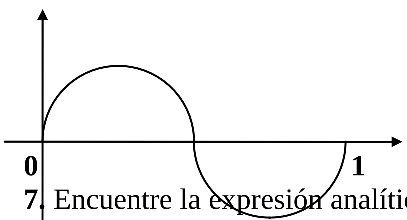
(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h(g(1)).

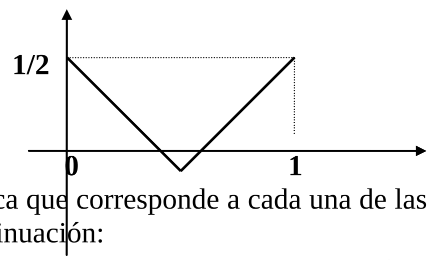
4. Defina el concepto de función matemática.

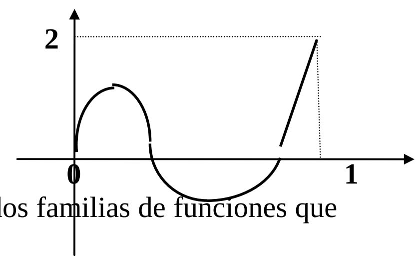
5. Si F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1], determine si F[0,1]$\subset$ F[0,2]. *Justifique su respuesta.*

6. Sea **W** el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en **W**?

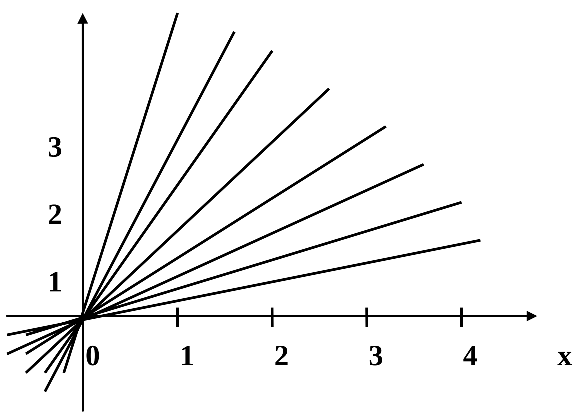
a) f(x) = –2, x∈[0, 1] **b)** $g(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2}< x\le 1 \end{cases}$ **c)** $h(x)=\sqrt{x^2+1}$, x∈[0, 1]

d) 

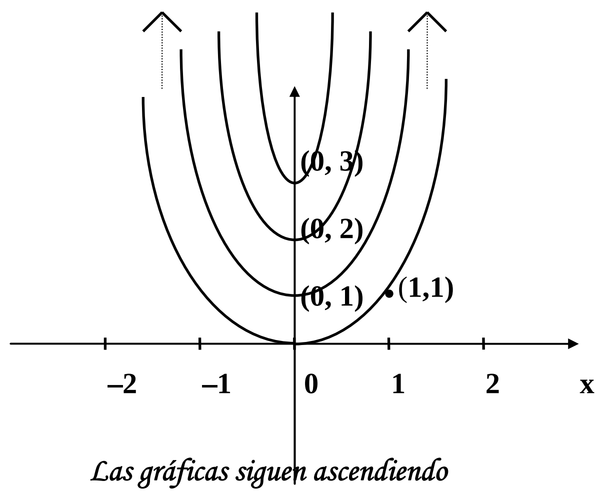
e) 

f) 

7. Encuentre la expresión analítica que corresponde a cada una de las dos familias de funciones que se describen gráficamente a continuación:



Las gráficas llenan todo el primer y tercer cuadrante



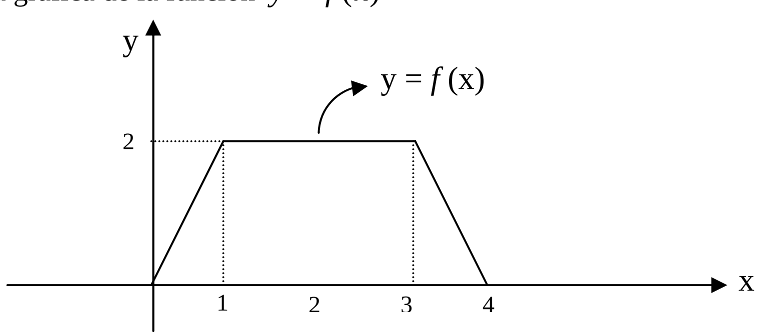
Las gráficas siguen ascendiendo indefinidamente como se indica con las flechas punteadas

8. Considere la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo (0,+∞), y las siguientes afirmaciones con respecto a ella:

1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo.
2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo.
3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo (0,+∞).
4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0.

¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas? *Justifique su respuesta*

9. La siguiente es la gráfica de la función $y = f(x)$



Bosqueje, si es posible, la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de *f*, entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

ANEXO 2

SEGUNDO INSTRUMENTO

PRUEBA DE COMPRENSIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

NOMBRE: ____________________________________ CÓDIGO: ________________

El siguiente cuestionario contiene una serie de preguntas, algunas de ellas sobre la regla de la cadena y otras relacionadas con el Teorema Fundamental del Cálculo. Responda cada una de ellas justificando su respuesta.

1. Si $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Sea $g(x) = f(x^2)$ una función diferenciable. Calcule $g'(x)$.

3. Calcule $g'(x)$ si $g(x) = \int_1^x t^2 \sqrt{t^2 + 1}\, dt$

4. Sea $h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\, dt$. Calcule $h'(x)$

5. Una de las propiedades de la integral definida afirma que si una función $f(x)$ es positiva en un intervalo cerrado [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ es positiva. Utilizando la segunda parte del

Teorema Fundamental del Cálculo en el siguiente ejemplo, parecería que se está contradiciendo la afirmación inicial ¿Qué está fallando?:

$g(x) = -\frac{1}{x}$ es una antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ por tanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = (-\frac{1}{1} - (-\frac{1}{-1})) = -2$$

6. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \le t \le 1$, la posición viene dada por la integral $f(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}\,dx$. (No intente el cálculo de esta integral). Calcule:

a) Su velocidad cuando $t = 1$ b) Su aceleración cuando $t = 1$

7. Encontrar una función *f* y un valor de la constante *c*, tal que:

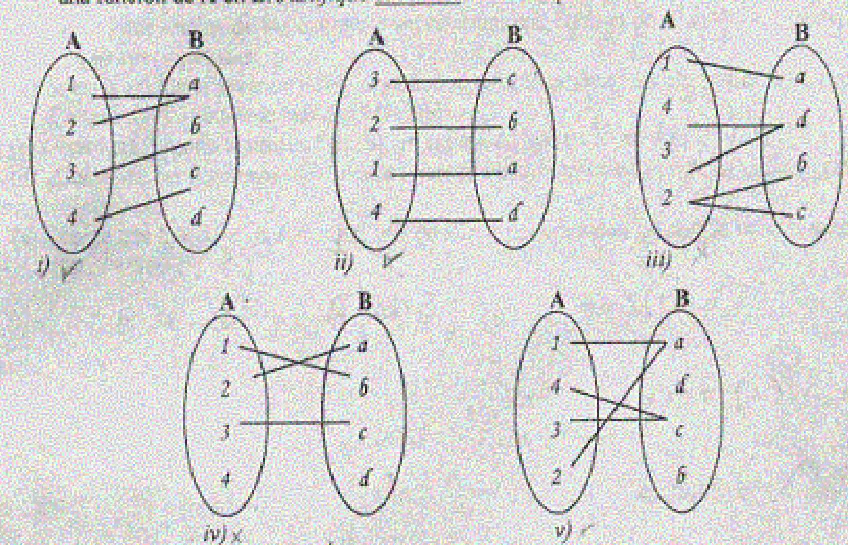
$$\int_c^x f(t)dt = \cos x - ½ \text{ para todo } x \text{ real.}$$

ANEXO 3

Se anexa el desarrollo de los instrumentos 1 y 2 correspondientes al estudiante a quien llamamos Juan

INSTRUMENTO NÚMERO 1

1. (a) En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique* *cada una* *de sus respuestas.*



(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), un valor x tal que f(x) = *d*

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique* *cada una* *de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h (g(a)).

a) Toda función es una relación, pero no toda relación es una función. Esto dice que la función es cuando todos los elementos de un conjunto (dominio) están relacionados con ~~al menos~~ un solo elemento de otro conjunto. funciones: i) ii) v) el resto no son funciones por no cumplir con lo dicho anteriormente

b)

$$f(x) = \begin{cases} a \;, \; si \; x = 1 \; y \; 2 \\ c \;, \; si \; x = 4 \; y \; 3 \end{cases}$$

c) $f(x)=d$ no existe ya que d no esta contenido en el conjunto del rango.

d) la unica función que puede tener inversa es la ii) porque esta funcion es inyectiva, al pasar ~~a ser~~ el rango por el dominio, todos sus elemento tendrian una sola imagen.

$f^{-1}(a)=1$ $\quad f^{-1}(c)=3$

$f^{-1}(b)=2$ $\quad f^{-1}(d)=4$

e) $h(1)=a$ $\quad h(3)=c$ $\quad g(a)=1$ $\quad g(c)=3$

$h(2)=b$ $\quad h(4)=d$ $\quad g(b)=2$ $\quad g(d)=4$

$h(g(a))=h(1)=a$

$h(g(a))=a$

3. Considere los siguientes conjuntos de parejas.

i) $\{(x,y):\ y^2 = x\}$ ✗
ii) $\{(x,y):\ y = 1 + 1/x^3\}$ ✓
iii) $\{(x,y):\ y^2 - x^2 - 1 = 0\}$ ✗
iv) $\{(x,y):\ x + y - 1 = 0\}$ ✓

(a) Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma $y = f(x)$. *Justifique cada una de sus respuestas.*
(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule $f(-2)$. ¿Se puede calcular $f(f(-2))$?
(c) Determine, usando la misma f de (b), x tal que $f(x)=9$.
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*
(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule $g(h(2))$.

(a) Son funciones la ii) y la iv), la iii corresponde a la ecuación de una circunferencia y esta no es una funcion, la i) no es una función porque a dos elementos del dominio le corresponden uno del rango.

(b) $f(x) = -x+1$ $\quad f(3) = -(3)+1$

$f(-2) = -(-2)+1$ $\quad f(3) = -2$

$f(-2) = 3$

(c) Si $f(x)=9$ entonces.

$9 = -x+1$

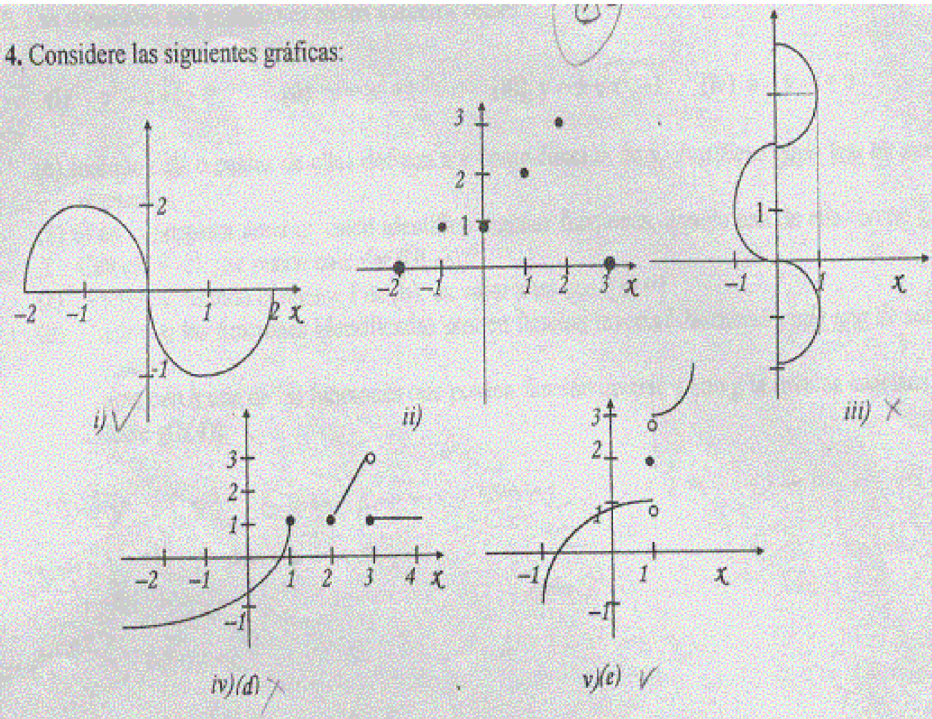
$\boxed{x = -8}$

(d) Posee función inversa la iv) por ser inyectiva

(e) $h(2) = -1$ y $g(x) = -x+1$ $\quad g(-1) = 1+1 = 2$

$g(h(2)) = 2$

4. Considere las siguientes gráficas:



Nota: La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.

(a) Identifique cuál o cuáles de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique cada una de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f(1). ¿Se puede calcular f(f(1))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), un valor x tal que f(x) = 2.

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h(g(1)).

a) Son funciones i) Y V Porque sus paralel al eje y la cortan en solo un punto y todos sus elementos del dominio estan relaciona dos

b) $f(x) = -2\,\text{sen}\,x$

6. Defina el concepto de función matemática.

función es la relación entre dos conjuntos, A y B talque todos los elementos de A estan relacionados con un solo elemento del conjunto B

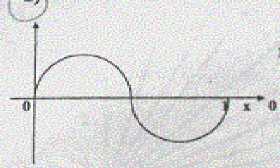
11. Si F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1], determine si F[0,1]$\subseteq$F[0,2]. *Justifique su respuesta.*

F[0,1] es un subconjunto de F[0,2], Porque en F[0,2] se puede restringir el dominio

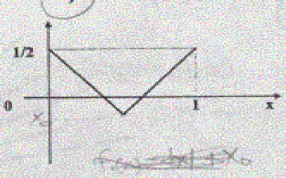
12. Sea **W** el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en **W**?

a) $f(x) = -2,\ x\in[0, 1]$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ **c)** $h(x) = \sqrt{x^2+1},\ x\in[0, 1]$ ×

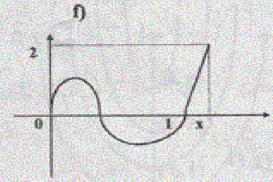
d)



e)

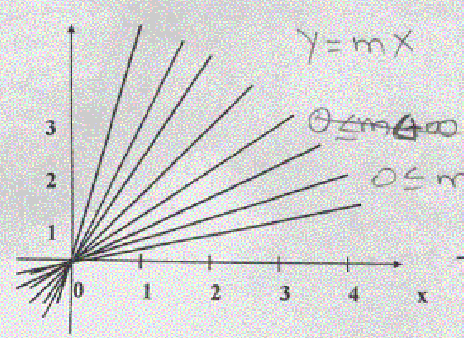


f)



R// a b d y e

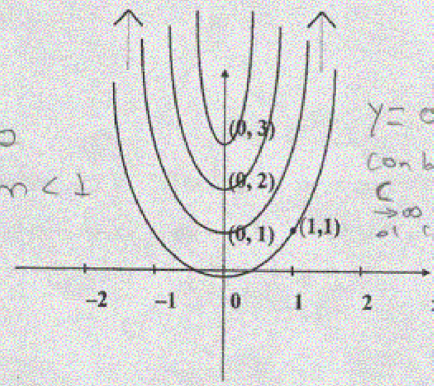
15. Encuentre la expresión analítica que corresponde a cada una de las dos familias de funciones que se describen gráficamente a continuación:



$Y=mX$

~~$0\leq m<\infty$~~

$0\leq m<1$



$Y=ax^2+bx+c$

con $b=0$ y con $c\to\infty$ es decir el conjunto de $0\leq c<+\infty$

Las gráficas llenan todo el primer y tercer cuadrante

es ~~una~~ la gráfica de una ecuación lineal con pendiente positiva y tal que pase por el origen

$Y=mX$

"conjunto de todas las rectas que obedecen a $y=mx$ con $m=0$ hasta $m=+\infty$"

Las gráficas siguen ascendiendo indefinidamente como se indica con la flecha punteada

el conjunto de $Y=ax^2+c$ tal que $0\leq c<+\infty$ y que a es positivo

1.75

17. Considere la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo $(0,+\infty)$, y las siguientes afirmaciones con respecto a ella:

1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo.
2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo.
3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$.
4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde x = 0.

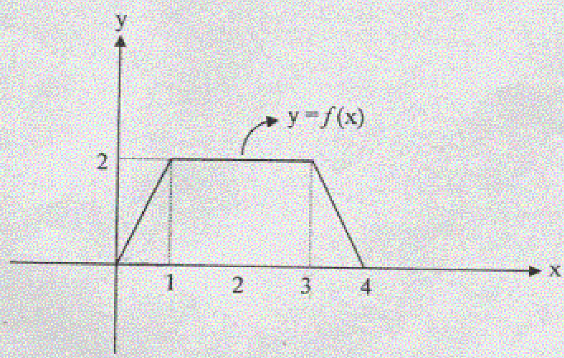
¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas? *Justifique su respuesta*

Son ciertas

2, 3 y 4

Ya que cuando x sea un valor exacto, representara su area bajo la curva, con dominio en el intervalo $(0,+\infty)$.

18) La siguiente es la gráfica de la función $y=f(x)$ R = 6



$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$\frac{2}{-1} = -2$

Bosqueje, si es posible, la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de f, entre las rectas $x=0$ y $x=4$.

de 0 a 1 $f(x)=2x$ | y de 3 a 4 $f(x)= \cancel{2x}\ -2x+8$
de 1 a 3 $f(x)=2$

$$A_+ = \int_0^1 2x \, dx + \int_1^3 2 \, dx + \int_3^4 -2x+8 \, dx$$

$$A_+ = x^2 + 2x + (-x^2 + 8x$$

$32 - 16 = 16$

$$A_+ = 1 + 4 + 1$$

$24 - 9 = 15$

$$A_+ = 4 + 2$$

$$\boxed{A_+ = 6}$$

INSTRUMENTO NÚMERO 2

1. Si $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

Pero $u = Senx + x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d(3u^2+1)}{du} \cdot \frac{d(Senx + x^2)}{dx} = 6u \cdot (cosx + 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (6 Senx + 6x^2)(cosx + 2x) = 6senxcosx + 12x\,senx + 6x^2cosx + 12x^3$$

2. Sea $g(x) = f(x^2)$ una función diferenciable. Calcule $g'(x)$.

$$g'(x) = f'(x^2) = f'(x^2) \cdot (x^2)'$$

$$g'(x) = f'(x^2) \cdot 2x$$

3. Calcule $g'(x)$ si $g(x) = \int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\,dt$

$$g'(x) = \frac{d\left(\int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\,dt\right)}{dx} = x^2(x^2+1)^{1/2}$$

4. Sea $h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\,dt$. Calcule $h'(x)$

$$h(x) = \int p(t)dt\Big]_a^{f(x)}$$

$$h'(x) = p(t)$$

5. Una de las propiedades de la integral definida afirma que si una función $f(x)$ es positiva en un intervalo cerrado [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es positiva. Utilizando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo en el siguiente ejemplo, parecería que se está contradiciendo la afirmación inicial ¿Qué está fallando?:

$g(x) = -\frac{1}{x}$ es una antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ por tanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right)\right) = -2$$

f(x) no es continua en el intervalo [1, -1] el cero anula la función.

9. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_c^x f(t)\,dt = \cos x - ½ \text{ para todo } x \text{ real.}$$

~~Ar~~cos x = 1/2

cos 0/6

$x = 60° = \pi/3$

$$\int_c^x f(t)\,dt = \cos x - 1/2$$

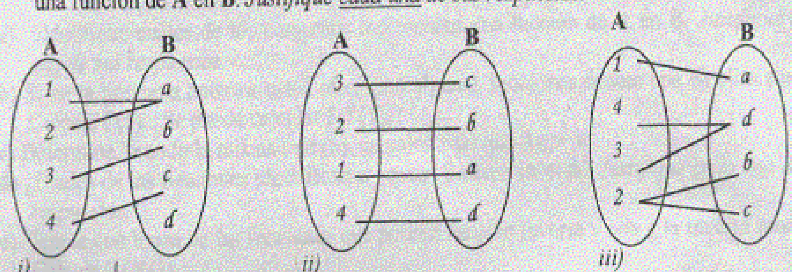
$$-\int_{\pi/3}^{x} \text{sen}\, t\, dt$$

ANEXO 4

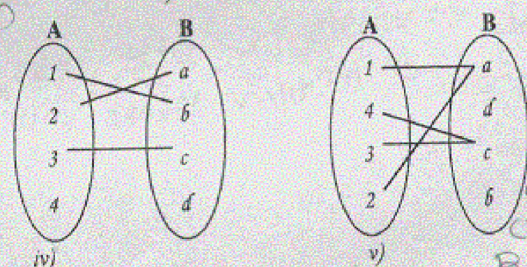
Se anexa el desarrollo de los instrumentos 1 y 2 correspondientes al estudiante a quien llamamos Carlos.

INSTRUMENTO NÚMERO 1

1. (a) En cada uno de los siguientes casos identifique cuál o cuáles de los diagramas representan una función de **A** en **B**. *Justifique cada una de sus respuestas.*



Considero que las opciones 1,3 y 5. no ya que no son uno a uno



R/ 2 ya que sol un elemento de A esta asociado con un elemento de B

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones, denote una de ellas como f. Calcule f (2). ¿Se puede calcular f (f (2))?

(c) Determine, usando la misma f de (b), un valor x tal que f(x) = *d*

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h (g(a)).

R/ b.

f(2) = x   f(f(2))

f(2) = 2   (x(x)) = 4

c f(x) = d   pero d = 4 luego x tiene que ser igual a 2

3. Considere los siguientes conjuntos de parejas.

i) $\{(x,y):\ y^2 = x\}$
ii) $\{(x,y):\ y = 1 + 1/x^3\}$
iii) $\{(x,y):\ y^2 - x^2 - 1 = 0\}$
iv) $\{(x,y):\ x + y - 1 = 0\}$ $\Rightarrow y = 1 - x$

(a) Identifique cuál o cuáles de los conjuntos definen una función de la forma $y = f(x)$. *Justifique cada una de sus respuestas.*

(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule $f(-2)$. ¿Se puede calcular $f(f(-2))$?

(c) Determine, usando la misma f de (b), x tal que $f(x)=9$.

(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*

(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule $g(h(2))$.

a. porque al despejar obtenemos una ecuación lineal.

b. $f(x) = 1 - x$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$x = 1 - y$

$f(f(-2)) = 1 - (1 - x)$
$= 1 - (1 - 2)$
$= 1 - (-1) = 2$

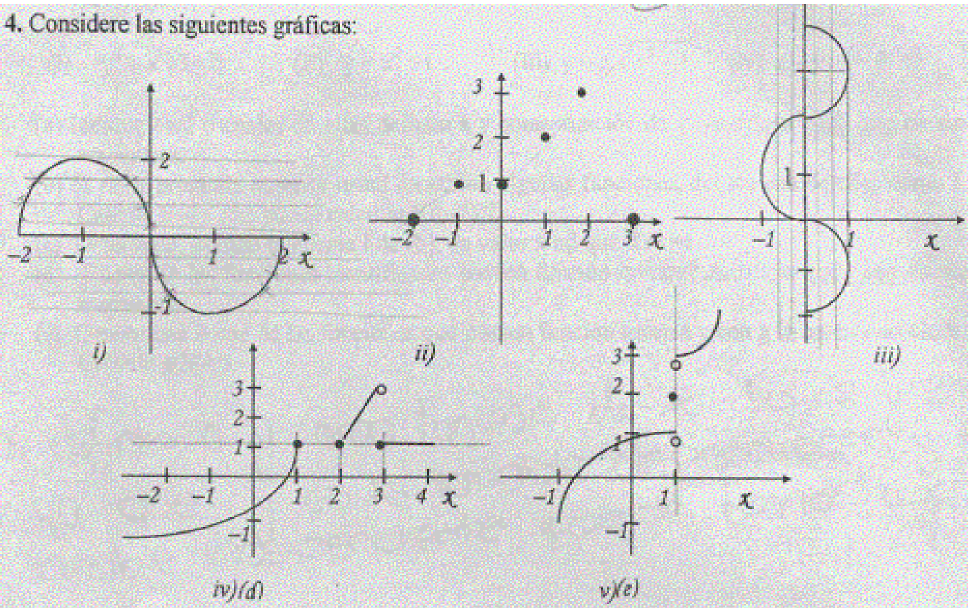
c) $f(x) = 1 - x$ $\boxed{x = -8}$
$9 = 1 - x$

d) $y^2 = x$
$y = \sqrt{x}$
$(\sqrt{x})^2 = x$
$\boxed{x = x}$

$y = 1 - x$
$x = 1 - y$
$y = 1 - (1 - y)$
$y = \cancel{1} - \cancel{1} + y$
$\boxed{y = y}$

e)

4. Considere las siguientes gráficas:



Nota: La bolita rellena que aparece en algunos gráficos significa que el valor en y es la imagen del x respectivo.

(a) Identifique cuál o cuáles de ellas son la representación gráfica de una función. *Justifique cada una de sus respuestas.*
(b) Si en la pregunta anterior usted identificó algunas funciones denote una de ellas como f. Calcule f(1). ¿Se puede calcular f(f(1))?
(c) Determine, usando la misma f de (b), un valor x tal que f(x) = 2.
(d) ¿Cuáles de las funciones identificadas poseen función inversa? *Justifique cada una de sus respuestas.*
(e) Denote con h una de las funciones que poseen función inversa y con g la inversa asociada. Calcule h(g(1)).

a. Representa una función lo a, b, d, e

b $f(1) = -1 \Rightarrow a$
$f(1) = 2 \Rightarrow b$
$f(1) = 1 \Rightarrow d$

6. Defina el concepto de función matemática.

es un proceso matemático por el cual obtenemos variable independiente llamada y, y variable dependiente llamada x

Ej: $y = x + 1$ (V Dep, V.Ind, cte)

11. Si F[0, 1] es el conjunto de todas las funciones con dominio en el intervalo [0,1], determine si F[0,1]$\subset$ F[0,2]. *Justifique su respuesta.*

Si. ya que F[0,2] es el doble de la funcion original osea y=2 , x=0 y sigue e al dominio

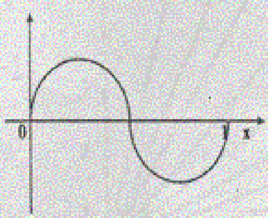
12. Sea **W** el conjunto de funciones con dominio en el intervalo [0, 1], con la propiedad de que su imagen en 0 es la misma que su imagen en 1. ¿Cuáles de las siguientes funciones están en **W**?

a) $f(x) = -2,\ x \in [0, 1]$

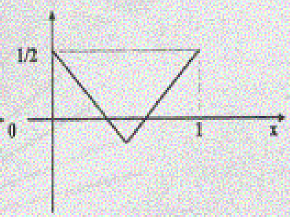
b) $g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+3 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2+1},\ x \in [0, 1]$

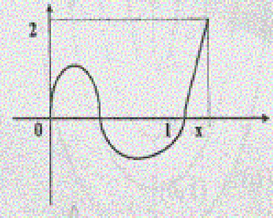
d)



e)



f)



R/ estan en w ; a,b,d y f.

17. Considere la integral $\int_0^x (t^2+1)dt$, con x en el intervalo $(0,+\infty)$, y las siguientes afirmaciones con respecto a ella:

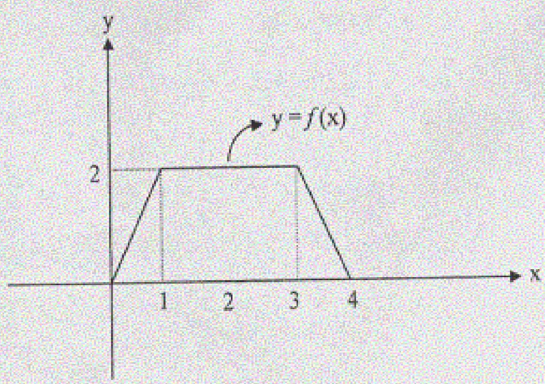
1) Es una integral que no está bien definida pues x no tiene un valor fijo.
2) En caso de que x tome un valor exacto, estará bien definida y representará un número real positivo.
3) Representa una función cuyo dominio es el intervalo $(0,+\infty)$.
4) Para diferentes valores de x representa valores del área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2+1$, desde $x=0$.

¿Cuál o cuáles de las anteriores afirmaciones considera que son ciertas? *Justifique su respuesta*

Considero que '2 y 4' ya que toda Integral representa un area bajo una curva que va desde cero hasta infinito es decir x puede tomar cualquier valor siempre que sea positivo ya que como representa un area y los areas nunca seran negativas.

18) La siguiente es la gráfica de la función $y=f(x)$

R/ $\int_0^4 f(x)dx$



Bosqueje, si es posible, la gráfica de la función que representa el área bajo la gráfica de f, entre las rectas $x=0$ y $x=4$.

INSTRUMENTO NÚMERO 2

1. Si $y = 3u^2 + 1$ y $u = senx + x^2$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

$= 3u^2 + 1 \Rightarrow 3(senx + x^2)^2 + 1$

$= 6(Senx + x^2) + 1 \cdot cosx + 2x$

2. Sea $g(x) = f(x^2)$ una función diferenciable. Calcule $g'(x)$.

$g(x) = f(x^2)$ $\quad u = x^2$

$= f(u) \cdot u' \Rightarrow f(x^2) \cdot 2x \Rightarrow 2x f(x^2)$

3. Calcule $g'(x)$ si $g(x) = \int_1^x t^2\sqrt{t^2+1}\,dt$ $\Rightarrow \int_1^x t^2 (t^2+1)^{1/2}$ $\quad t=1 \;\; u=2 \; *$ $\quad t=x \;\; u=x^2+1 \; **$

$u = t^2 + 1$

$u - 1 = t^2$

$du = 2dt$

$\frac{1}{2}du = dt$

$= \int_1^x (u-1)u^{1/2}$

$= 2\int_1^x (u-1)u^{1/2}\frac{du}{2} \Rightarrow \int_*^{**} u^{3/2} - u^{1/2}\,du \Rightarrow \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_*^{**}$

$\frac{2}{5}(t^2+1)^{5/2} - \frac{3}{2}(t^2+1)^{3/2}\Big|_1^x$

4. Sea $h(x) = \int_a^{f(x)} p(t)\,dt$. Calcule $h'(x)$

$h'(x) = \frac{1}{2}P(t)^2\Big|_b^{f(x)} = \frac{1}{2}P(f(x))^2 - \frac{1}{2}P(a)^2$

5. Una de las propiedades de la integral definida afirma que si una función $f(x)$ es positiva en un intervalo cerrado [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es positiva. Utilizando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo en el siguiente ejemplo, parecería que se está contradiciendo la afirmación inicial ¿Qué está fallando?:

$g(x) = -\frac{1}{x}$ es una antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ por tanto:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right)\right) = -2$$

La función $-\frac{1}{x}$ no es continua en el Intervalo [-1,1] ya que en cero se indetermina

Además dice que la función debe ser continua y derivable y en este caso no es continua.

6. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \leq t \leq 1$, la posición viene dada por la integral $f(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}\,dx$. (No intente el cálculo de esta integral). Calcule:

a) Su velocidad cuando $t = 1$

b) Su aceleración cuando $t = 1$

$f(t) = \frac{1}{1+x^3}$

$f'(t) = \frac{0(1+x^3) - 1(3x^2)}{(1+x^3)^2}$

$f'(t) = \frac{-1(3x^2)}{1+2x^3+x^6}$

$f'(1) = \frac{-(3(1)^2)}{1+2(1)^3+(1)^6} = \frac{-3}{4}$

$f''(t) = \frac{1+x^3-3x^2}{(1+x^3)^2}$

9. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_c^x f(t)\,dt = \cos x - \tfrac{1}{2} \text{ para todo } x \text{ real.}$$

$\Rightarrow \int \cos x - \frac{1}{2}\,dx$

$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x + C = 0$