INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA
Unidad Legaria

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Tesis que para obtener el grado de
Maestra en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Rosa Araceli Rotaeche Guerrero

Directora de Tesis:
Dra. Gisela Montiel Espinosa

México, D. F., noviembre de 2008

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 15 del mes de octubre del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria

Presentada por el alumno:

Rotaeche	Guerrero	Rosa Araceli
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	4	0	8

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACIÓN DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dra. Gabriela Buendía Abalos

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

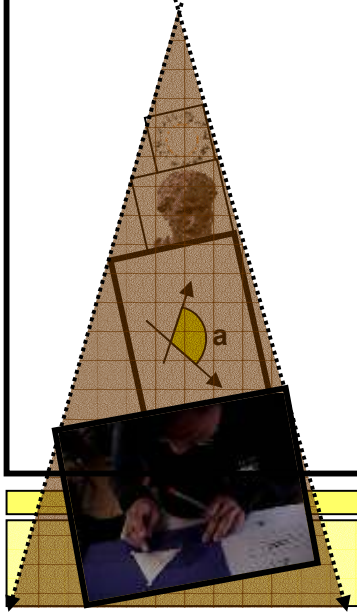
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 29 del mes octubre del año 2008, la que suscribe **Rosa Araceli Rotaeche Guerrero** alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro **A050408**, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la **Dra. Gisela Montiel Espinosa** y cede los derechos del trabajo intitulado **"La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria"**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

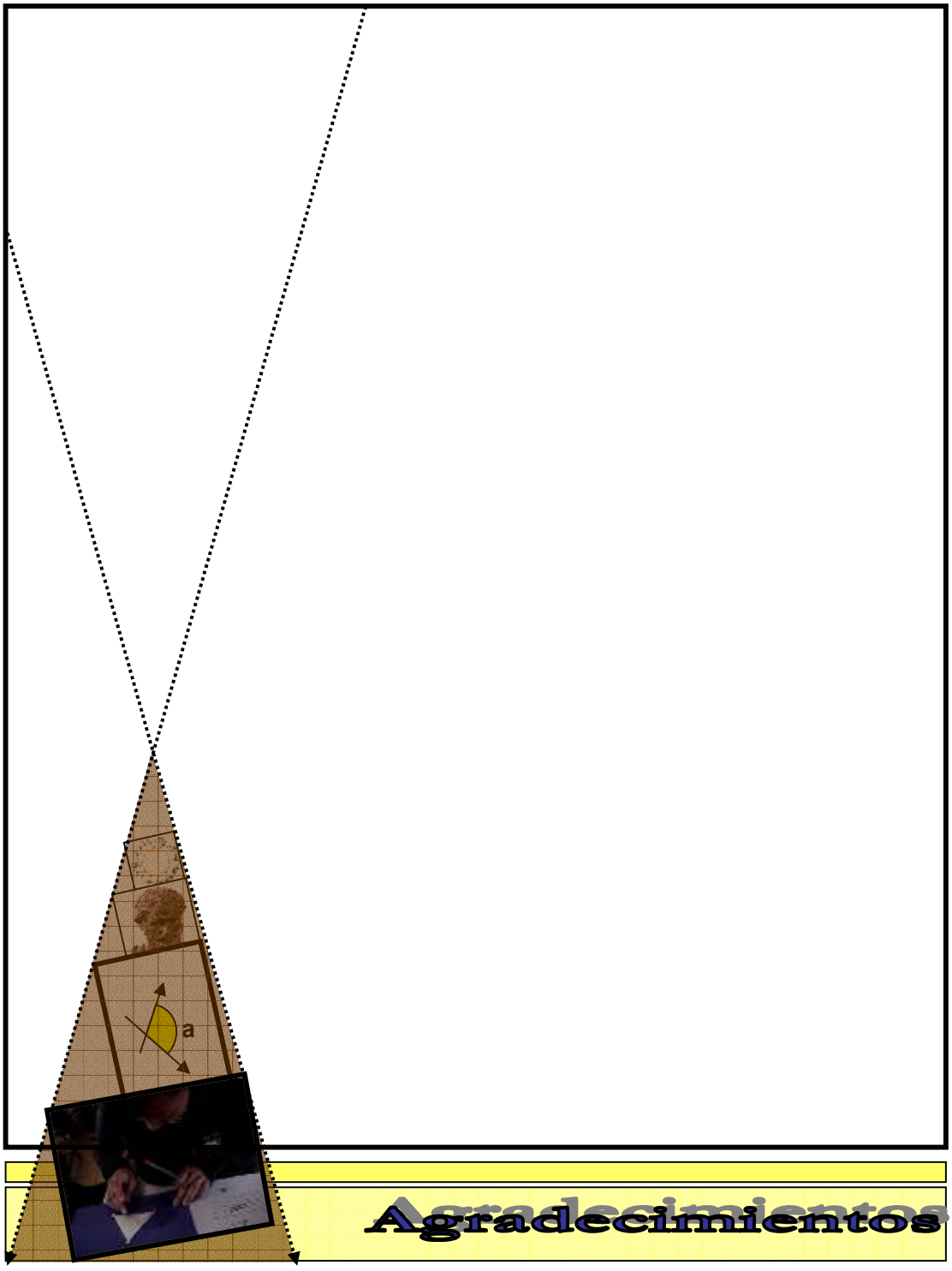
Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **araceli_rotaeche@yahoo.com.mx**. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Rosa Araceli Rotaeche Guerrero



Dedicatoria

A mi querida hija, Arantxa.
La bendición de ser madre y docente a la vez.



Agradecimientos

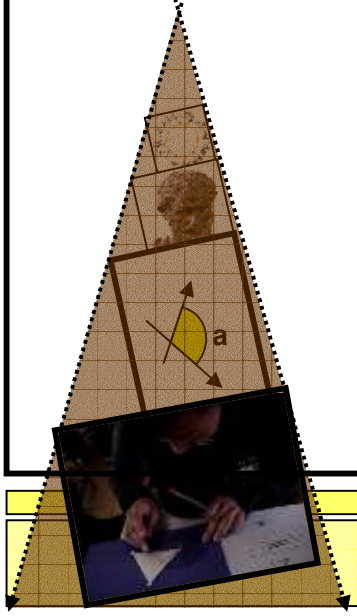
A mis padres, hermanos y familia.

A la Dra. Gisela Montiel E.

A todos mis profesores del CICATA

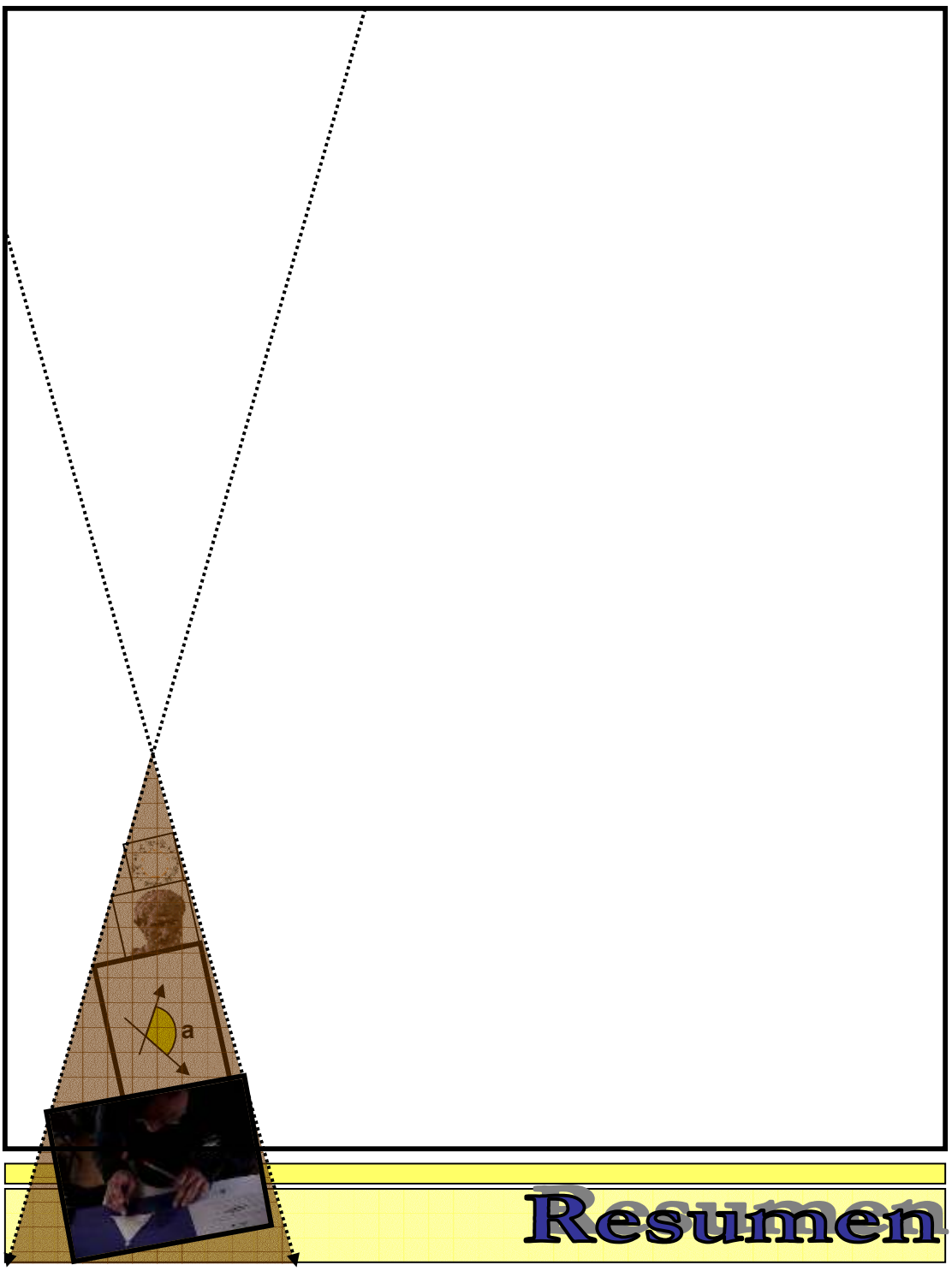
A mis amigos Maritza , Esteban, César y Gustavo.

Al Colegio Baden Powell y a todos mis Alumnos.



Índice

RESUMEN		**1**
ABSTRACT		**3**
INTRODUCCIÓN		**5**
CAPÍTULO I	**LA NOCIÓN DE ÁNGULO EN EL DISCURSO ESCOLAR**	**8**
	1. Educación básica Primaria	10
	2. Educación básica Secundaria	14
	3. Aplicaciones escolares del ángulo en el dibujo técnico	17
CAPÍTULO II	**ANTECEDENTES (INVESTIGACIONES PREVIAS)**	**26**
CAPÍTULO III	**TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS**	**33**
	A. Un modelo cognitivo para el desarrollo de la noción de ángulo.	35
	B. Naturaleza del conocimiento en juego	37
	1. Uso de la noción de ángulo	40
	2. Definición y discusión sobre la naturaleza del concepto de ángulo.	41
	3. Naturaleza epistemológica de la noción de ángulo manejada en la escuela.	48
CAPÍTULO IV	**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA**	**52**
	1. Fase de planeación	55
	2. Fase de diseño	63
	3. Fase de experimentación	81
	4. Fase de validación	84
CAPÍTULO V	**RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA**	**126**
CAPÍTULO VI	**CONCLUSIONES GENERALES**	**130**
ANEXO NO. 1	**SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL ALUMNO**	**134**
ANEXO NO. 2	**DEFINICIÓN DE ÁNGULO POR CADA ALUMNO**	**152**
BIBLIOGRAFÍA		**160**



Resumen

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

La noción escolar de ángulo ha jugado un papel ambiguo en la escuela. La tradición escolar asume que cuando se define, se caracteriza, se expone su tipología y se manipula el concepto en la clase de matemáticas, su uso, aplicación o interpretación en otras asignaturas no debiera representar una dificultad para los estudiantes. Sin embargo, es ahí donde podemos encontrar los conflictos más comunes.

La naturaleza del concepto de ángulo ha sido tema de debate por más de 2000 años y la discusión aún no termina (Matos, 1990). Quizá por ello no hay una única definición aceptada por la comunidad matemática y su transposición didáctica de ninguna manera se convierte en un proceso trivial.

Con base en un análisis a priori, orientado por la ingeniería didáctica en el marco de la teoría de situaciones didácticas, hemos diseñado una secuencia didáctica que contempla en la componente cognitiva el modelo de abstracción y del conocimiento situado de Mitchelmore y White (2000) y en la componente epistemológica la naturaleza cualitativa (por su forma), cuantitativa (por su medida) y como relación (por como se define) de la noción de ángulo que se maneja en el nivel básico-secundaria del sistema educativo mexicano. La componente didáctica rescata algunos posibles efectos del discurso escolar en los significados relacionados con la medición angular versus medición de longitudes, así como la construcción y significados de nociones como porción/proporción, figuras geométricas básicas como el cuadrado, el triángulo equilátero, el triángulo isósceles rectángulo, el triángulo escaleno rectángulo, el uso del transportador como instrumento de medición escolar, etc. , pero básicamente el diseño rompe con la programación escolar para trabajar con esta noción.

El presente trabajo contempla, en los diferentes capítulos que lo forman, cómo se aborda el concepto de ángulo actualmente en el discurso escolar, algunas investigaciones previas donde se presenta la problemática del concepto, la teoría que nos apoya en la investigación de este proyecto, la propuesta con el diseño de una secuencia didáctica y el análisis de resultados con base en nuestro marco teórico de referencia.

Abstract

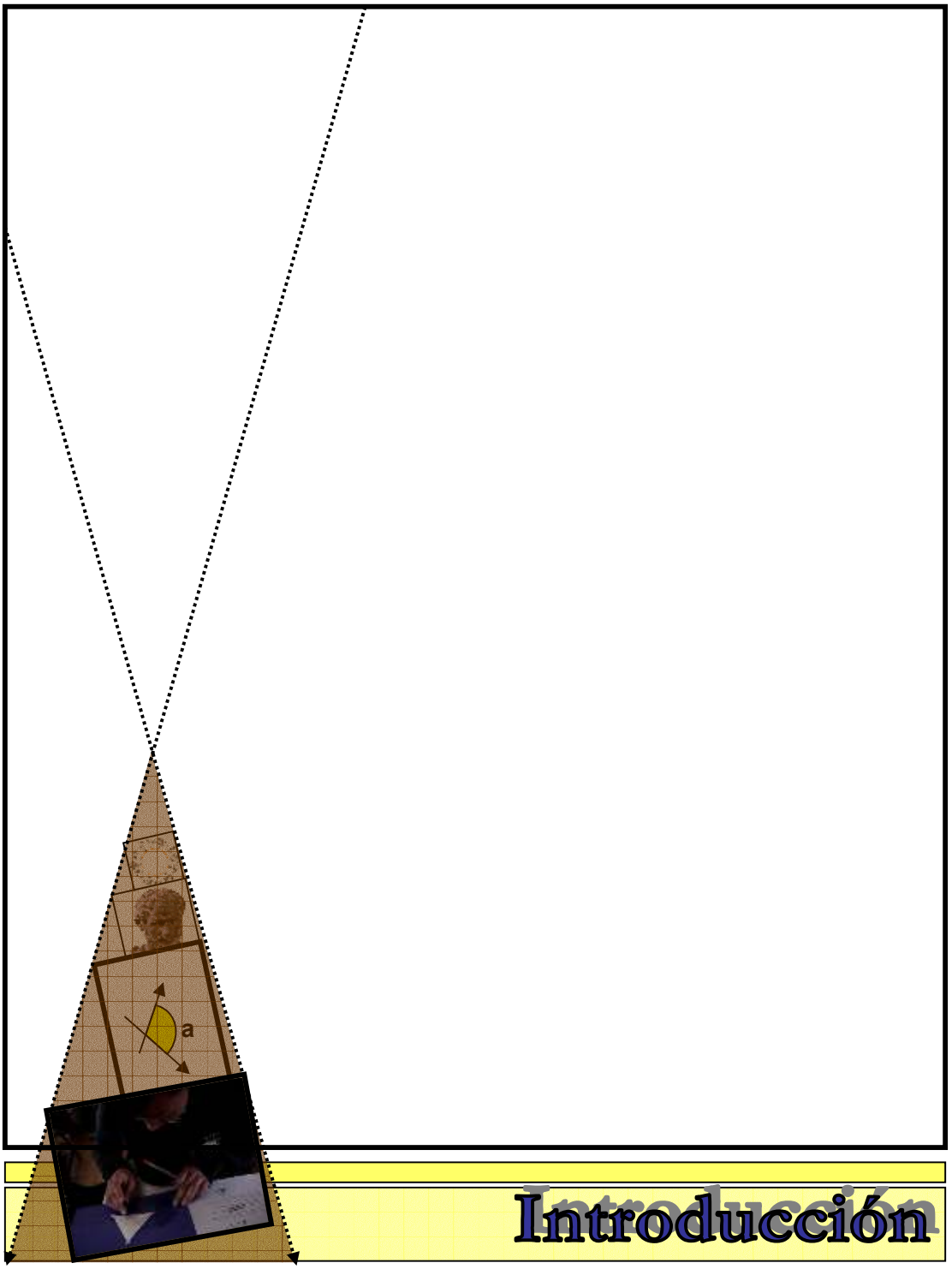
THE CONSTRUCTION OF THE ANGLE CONCEPT BY SECONDARY STUDENTS.

The scholar notion of angle has played an ambiguous role in the school, its definitions, characterizations and applications can be found in subjects like mathematics, physics and technical drawing. The school tradition assumes that when it is defined, characterized, its typology is exposed and the concept is manipulated in the class of mathematics, its use, application or interpretation in other subjects must not represent a difficulty for the students. Contrary to what is assumed, it is in this other subjects where the most common conflicts can be located in the managing of this notion.

The nature of the angle concept has been a topic of debate for more than 2000 years and the discussion still does not end (Matos, 1990). Probably for it there is no only one accepted definition in the mathematical community and its didactic transposition by no means turns into a trivial process.

On the base of an a priori analysis, guided by the didactic engineering on the setting of the Theory of didactic situations framework, we have designed a didactic sequence that contemplate on the cognitive component the Mitchelmore & White (2000) abstraction model and on the epistemological component the qualitative nature (for its form), quantitative (for its measurement) and as a relation (for how it is defined) nature of the angle notion that is managed on the basic-secondary level from the Mexican educative system. The didactic component recovers some possible effects of the school speech on the meanings related with the angular measurement versus length measurement, in the same way as the construction and meanings of notions such as portion/proportion, basic figures like the square, the equilateral triangle, the isosceles straight triangle, the scalene straight triangle, the use of the protractor as a measurement scholar instrument, etc, but basically the design breaks with the scholar planning that guides on the work of this notion.

This work presents on its different parts, how the concept of angle is approach in the school speech, some of the previous investigations where the misconceptions of the concept are presented, the theory that supports our project research, the proposal with the design of the didactic sequence and the results analyzed on the base of the setting of the theory of reference.

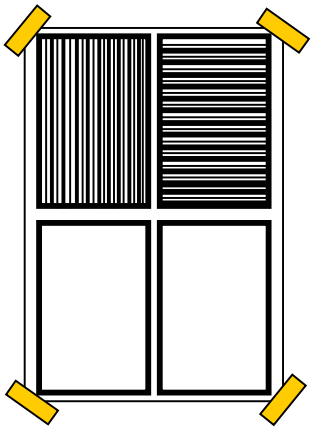


Introducción

Una experiencia personal.

Después de 11 años de haber impartido la materia de Dibujo Técnico en 1° de Secundaria, mi hija, de 12 años de edad, ingresa a secundaria y una de las materias que cursa, es Dibujo Técnico.

Hace un par de días, le dejaron de tarea terminar una lámina:



Las dos primeras partes de la lámina ya estaban terminadas. En ellas trazó líneas horizontales y verticales. La tarea consistía en terminar las dos últimas cuartas partes con líneas "inclinadas" (así lo mencionó ella). Sin embargo, me explicó que debía utilizar una de las escuadras.

Me preguntó si teníamos escuadras en la casa, pues olvidó en el Colegio las suyas. Le pregunté cuál escuadra necesitaba y me contestó: "La chica".

Le mostré un juego de escuadras grande. Le pregunté:

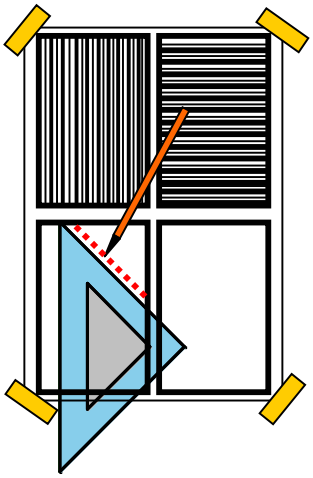
- ¿Cuál de estas dos necesitas?, y ella contestó:
- La chica (tomando la de 45°)

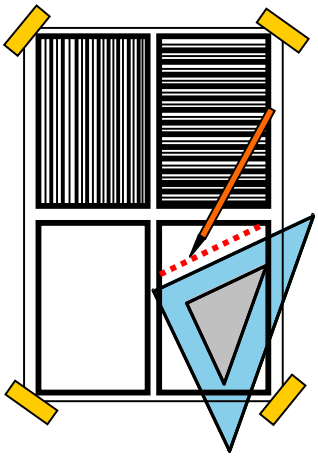
Le mostré una escuadra de 30° de un juego pequeño, de bolsillo. Y le dije:

- Esta es más chica, ¿no te sirve esta?

Ella me contestó que no, incluso se molestó. Me explicó que, de un juego de escuadras, ella necesitaba la "chica", la que forma un cuadrado perfecto. Y volteando la escuadra sobre uno de sus lados, en este caso la hipotenusa, me mostró cómo se formaría el cuadrado perfecto:

Posteriormente me explicó lo que debía hacer con esa escuadra. Tenía que trazar líneas "inclinadas". Y me mostró diciendo: - "algo así"

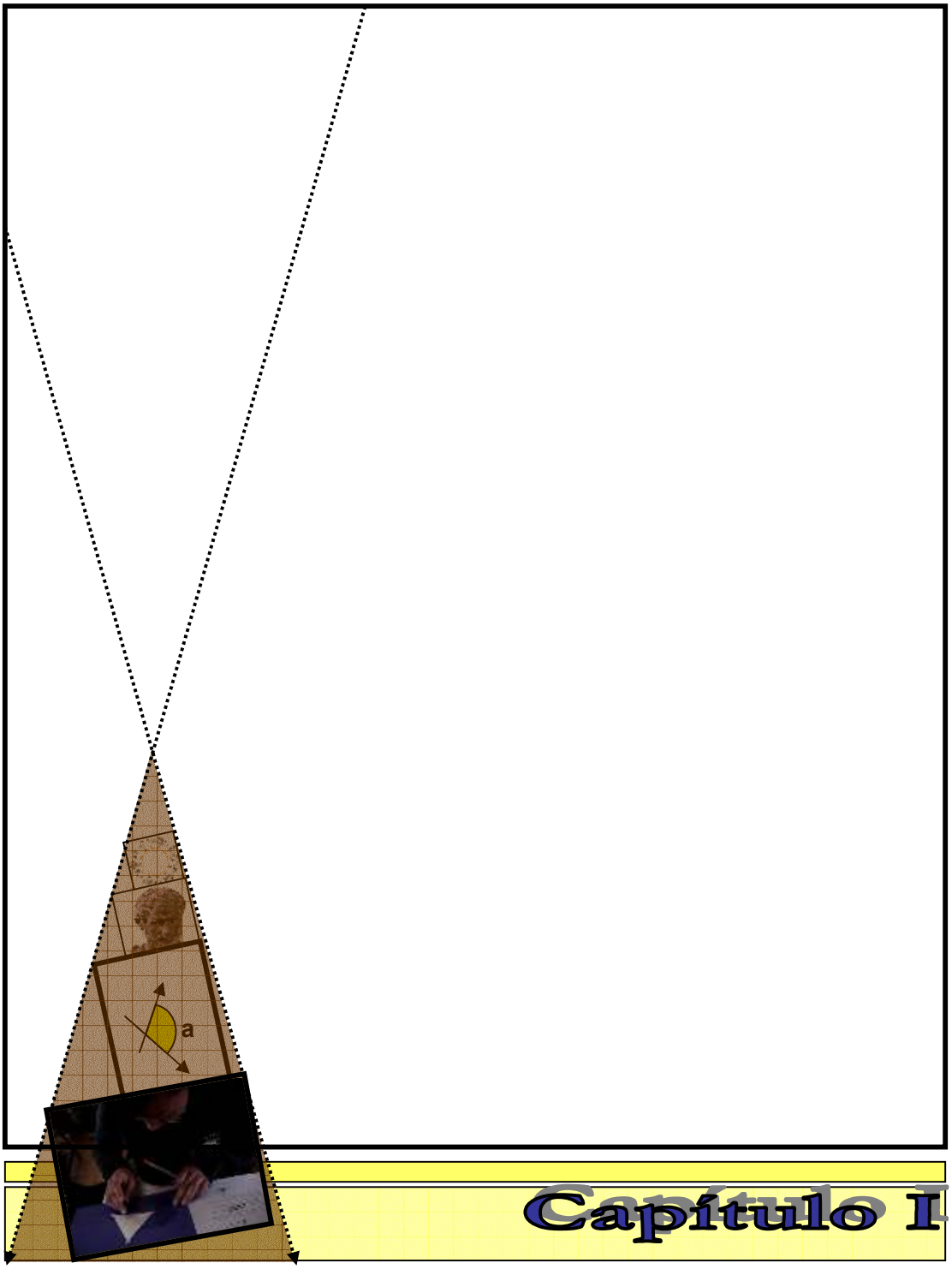




Le expliqué que entonces necesitaría la regla "T". Y me preguntó que para qué.

En conclusión, creo que los problemas en la aplicación de ángulos en esta materia persiste ya que el alumno desconoce la presencia de ellos en estos instrumentos de geometría.

El presente trabajo de investigación, tiene como objetivo, el mirar cómo la teoría puede aportarnos elementos muy valiosos, tanto epistemológicos, cognitivos y didácticos, que permitan la elaboración y diseño de una propuesta didáctica con el fin de provocar en los estudiantes la construcción de un nuevo significado en lo que se refiere al concepto de ángulo.



Capítulo I

I. LA NOCIÓN DE ÁNGULO EN EL DISCURSO ESCOLAR

La noción escolar de ángulo ha jugado un papel ambiguo en la escuela, sus definiciones, caracterizaciones y aplicaciones pueden encontrarse en asignaturas como matemáticas, física y dibujo técnico. La tradición escolar asume que cuando se define, se caracteriza, se expone su tipología y se manipula el concepto en la clase de matemáticas, su uso, aplicación o interpretación en otras asignaturas no debiera representar una dificultad para los estudiantes. Contrario a esto, es en las otras asignaturas donde se pueden localizar los conflictos más comunes en el manejo de esta noción.

Como tema, el ángulo se aborda por primera vez en el salón de clases en el 4° Grado de la Educación Primaria. Es un concepto en cuyo aprendizaje se han detectado diversas dificultades por parte del estudiante y éstas han sido de interés en diversas investigaciones.

Bosch, Ferrari, Marván y Rodríguez (2003)[1] señalaron ya que:

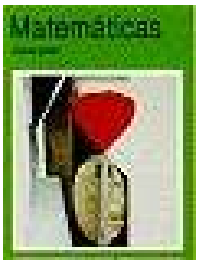
> *El programa de primaria contempla la necesidad de hacer un amplio trabajo de familiarización con conceptos como longitud, distancia, superficie, volumen, capacidad y peso, así como la necesidad de que el aprendizaje de las correspondientes mediciones se lleve a cabo en forma gradual y paulatina. Sin embargo, en el caso de los ángulos, no se sigue esta norma.*

Incluso señala como indicativo que en la educación primaria, del programa de matemáticas que tiene 258 temas o subtemas llamados ´contenidos´, distribuidos a lo largo de los seis años, 83 pertenecen al eje de medición y, de éstos, sólo 2 tratan con ángulos.

Cuando en 4° grado de primaria aparece por primera vez la noción de ángulo se le atiende de forma muy breve y se retoma explícitamente como tema hasta el 1° de secundaria. En los textos de 5° y 6° el ángulo llega a presentarse en la construcción de polígonos regulares e irregulares, pero se le usa como un elemento de los mismos, no como un tema particular.

[1] Bosch, C. et al (2003). Diplomado *La Ciencia en tu escuela* ,Módulo de Matemática – Primaria. Correo del Maestro No. 88

1. Educación Básica Primaria



Libro de Texto Oficial SEP (1994), *Matemáticas 4° de primaria. Educación básica. Primaria,* México.

Este texto, dirigido al 4° de primaria, aborda la noción de ángulo en tres lecciones:

- La vuelta al mundo
- La vuelta al mundo en 360°
- El Cazador

En todas ellas se maneja el concepto de ángulo a través de "partes de vuelta":

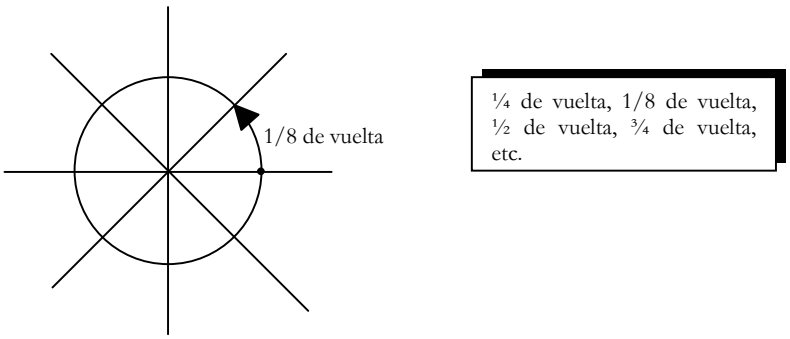


Fig. 1

Posteriormente se relaciona cada parte con la medida correspondiente a cada ángulo utilizando tres tamaños diferentes:

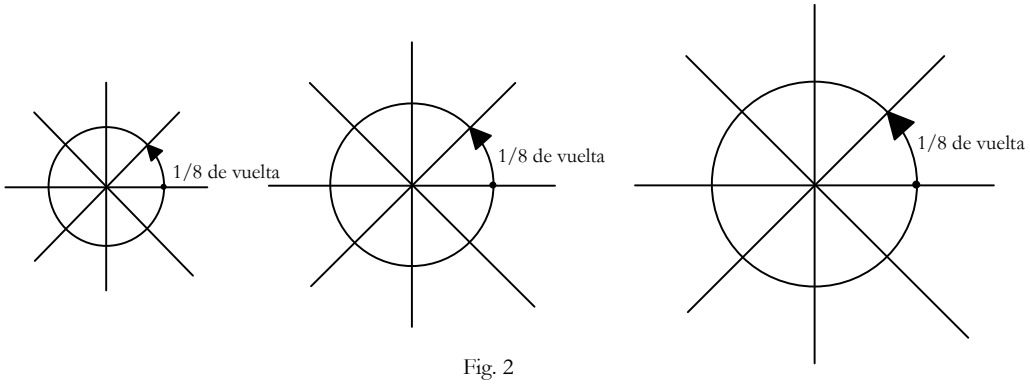


Fig. 2

Medida del ángulo en:

Vueltas	Grados
1/8	45°
1/4	90°
3/8	135°
1/2	180°
5/8	225°
3/4	270°

Fig. 3

Finalmente aumenta el número de vueltas hasta 12, e incluso relaciona los giros con los realizados por las manecillas de un reloj:

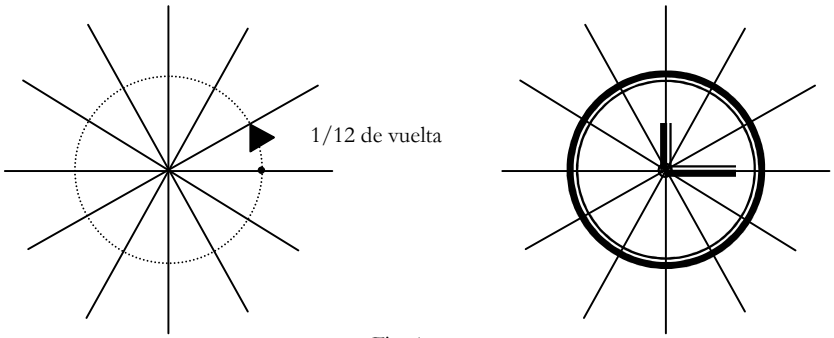


Fig. 4

Con esta actividad se suspende el manejo de ángulos en los textos gratuitos editados por la SEP. Pero en los libros de texto que llegan a escuelas privadas encontramos otras actividades, que amplían el trabajo con ángulos a su tipología y medición usando transportador.

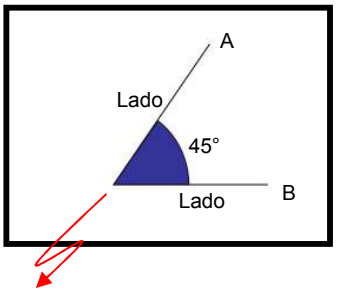
Rojo, V. et al (2001). *Guía Escolar 4°*. Nueva Edición. Santillana primaria, México. pp.152

Este texto inicia con la definición de ángulo como:

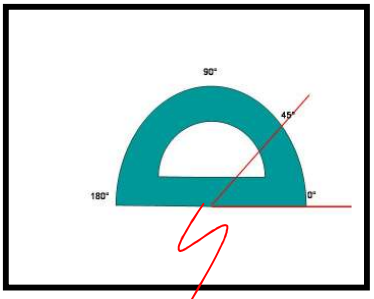
Un ángulo se compone de 2 lados y un vértice. **El grado es la unidad de medida de los ángulos.**

Posteriormente presenta el transportador como instrumento para medirlo y se presenta la clasificación del ángulo en:

- Agudo
- Recto
- Obtuso



Vértice



Centro del transportador

Un ángulo se compone de 2 lados y un vértice.

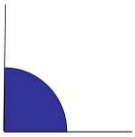
El grado es la unidad de medida de los ángulos.

Se expresa así: °

Por ejemplo: 45°

Los ángulos por su medida se clasifican en:

Agudo: Menor de 90°



Recto : 90°

Obtuso: Más de 90° y menos de 180°

Fig. 5

Gálvez G. (2004). *Matemáticas 6°*. Publicaciones Cultural, México. pp. 55

Este otro texto inicia con la definición de ángulo como:

Ángulo es la abertura que existe entre dos semirrectas que se unen en un mismo punto. El punto se llama vértice y las semirrectas lados.

En este mismo texto podemos encontrar también, referencia al ángulo como giro:

"Para describir un giro con exactitud debemos atender a tres factores:

- *La amplitud del giro, esto es, la medida del ángulo que va a girar.*
- *El centro del giro, esto es, el punto alrededor del que va a girar.*
- *El sentido del giro, que puede ser el mismo que el de las agujas del reloj o el contrario"*

Es común encontrar también actividades que involucran el concepto de ángulo como parte de los diferentes polígonos, buscando que el alumno los identifique de acuerdo a la clasificación estudiada:

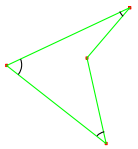
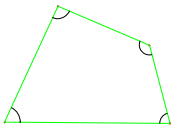
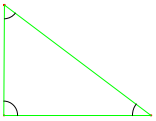
Figuras / **Número De ángulos**			
Rectos			
Agudos			
Obtusos			

Fig. 6

Por ejemplo, en este cuadro, el alumno debe identificar ángulos rectos, agudos y obtusos dentro de las diferentes figuras que se le presentan.

2. Educación Básica Secundaria

Con base a la Reforma Educativa de 1993, en 1° de secundaria, se aborda el tema de "Medición y Cálculo Geométrico". Para este tema El Libro para el Maestro de Educación Secundaria, editado por la SEP (1993), menciona:

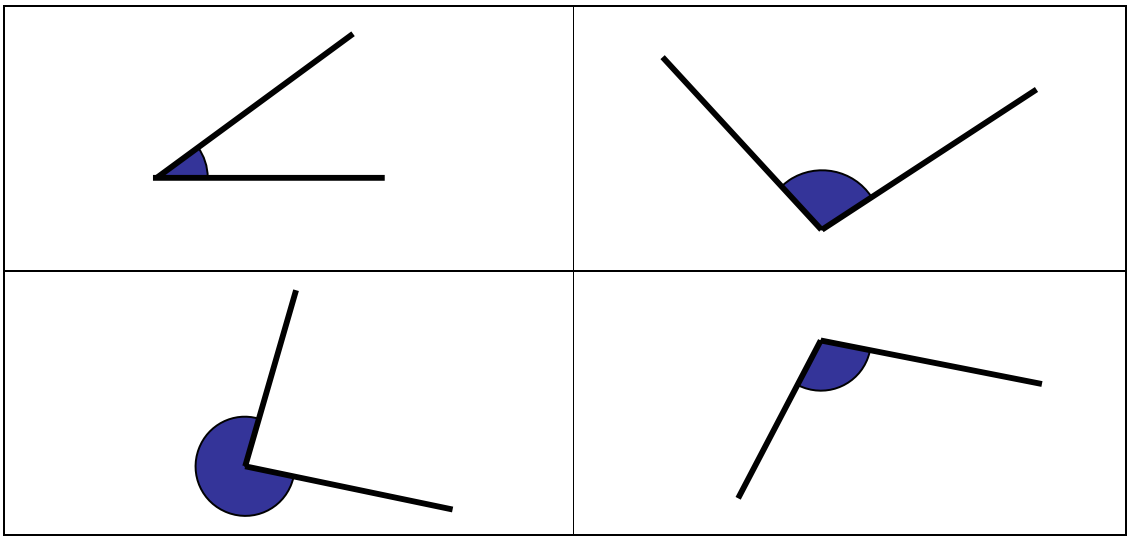
La medición juega un papel central en la enseñanza de la geometría porque ayuda a comprender su utilidad en la vida cotidiana, al mismo tiempo que desarrolla nociones y habilidades necesarias para el aprendizaje de esta disciplina….

….Deberán asimismo diseñarse actividades para que desarrolle y afine la noción de ángulo, se adquiera familiaridad con los distintos tipos de ángulos que puedan presentarse (agudos, rectos, obtusos, etc) y se utilice el transportador para medirlos, así como en la reproducción y trazado de figuras.

…Por ejemplo, una actividad interesante es que al intentar reproducir un polígono o fabricar el plano de un terreno irregular de lados rectos, los alumnos se percaten de que además de los lados, necesitan medirse los ángulos…

Y se proponen ejercicios como los siguientes:

1. Mide con tu transportador los ángulos:



En este nivel, encontramos también algunas definiciones con respecto a la noción de ángulo. Algunas de ellas son:

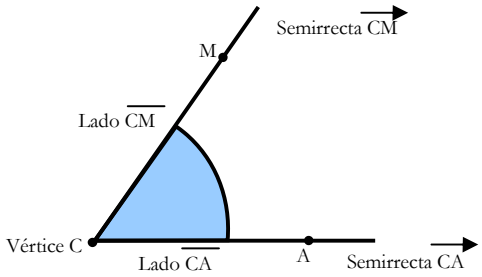


Fig. 7

> "*Un ángulo es la porción del plano comprendido entre dos semirrectas que tienen el mismo origen. Las semirrectas que lo forman se llaman lados del ángulo y el punto común, vértice"*
> *"Para medir ángulos se utiliza como unidad principal el grado. El grado es igual a una de las 360 partes iguales en que se divide la circunferencia.*
> *Los ángulos se pueden medir con más exactitud si se emplean otras unidades más pequeñas que el grado, éstas son el minuto y el segundo".*

En la reciente *Reforma de la Educación Secundaria RES (2006),* uno de los propósitos del estudio de las Matemáticas en el eje que nos compete (*Forma, espacio y medida*), es *el favorecer de modo especial el desarrollo de la competencia de argumentación, tomando como base las propiedades de la figura. Finalmente, la comprensión de los diversos conceptos matemáticos deberá sustentarse en actividades que pongan en juego la intuición, pero a la vez favorezcan el uso de herramientas matemáticas para ampliar, reformular o rechazar ideas previas.*[2]

En este programa, el concepto de ángulo se plantea de forma diferente al plan anterior ya que mientras en el 93 se pretendía que el alumno midiera con el transportador, afinara el concepto y lo aplicara en la reproducción de figuras, ahora la medición y el concepto se manejan de forma implícita involucrando al concepto para trabajar diferentes temas como simetría, mediatrices, bisectrices, construcción de figuras planas, etc.

[2] SEP. (2006). *Programa RES 2006 de Matemáticas*. Propósitos pp. 9. México.

3. Aplicaciones escolares del ángulo en dibujo técnico

Podría decirse que en este nivel de su educación (secundaria), el alumno ya está familiarizado con lo que es un ángulo y sus cualidades. Sin embargo, al impartir la materia de Dibujo Técnico donde el alumno debe manejar el juego de geometría para la construcción y trazo de diferentes figuras, hemos encontrado que enfrenta conflictos en el manejo de las escuadras y el transportador.

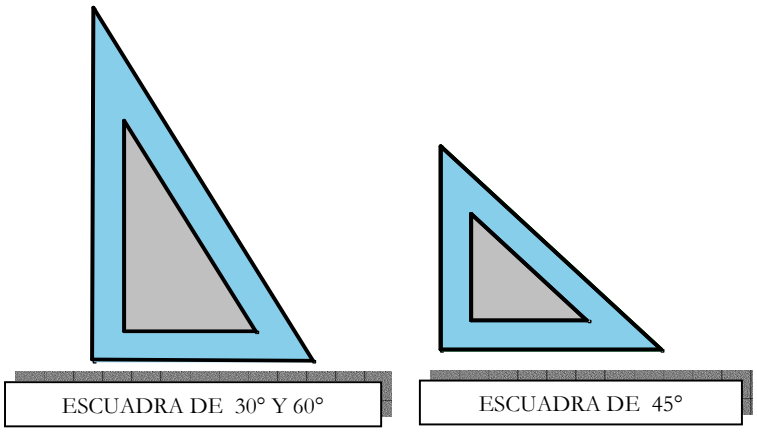


Fig. 8

El juego de escuadras está conformado por la escuadra de 30 y 60 grados, y la escuadra de 45°. Inicialmente el alumno debe identificar en ellas los diferentes ángulos:

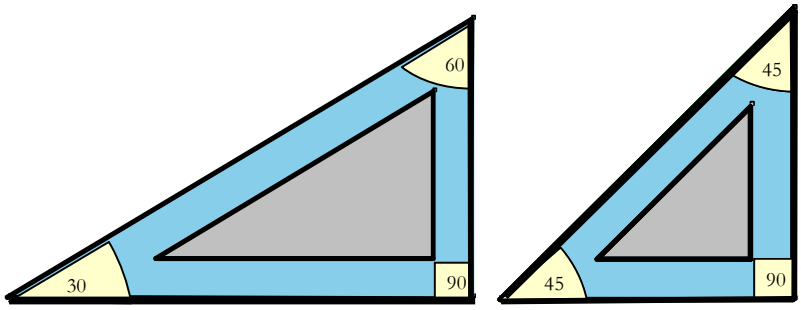


Fig. 9

Posteriormente deberá trabajar el trazo de paralelas con diferente inclinación para después aplicarlo en el dibujo de diferentes proyecciones caballeras e isométricas.

Cuando supuestamente el alumno identificaba los ángulos, se presentaban los siguientes conflictos que evidencian la falta de comprensión y análisis de los ángulos.

Conflicto 1

Actividad: "Trazar paralelas a 45°"

Pregunta del alumno: ¿Con cuál escuadra? , ¿Con la chica o con la grande?

En nuestra opinión esta pregunta del alumno habla de una dificultad para identificar los ángulos o para asociarlos con las características de cada escuadra.

Si este es un juego de escuadras, el alumno observa las longitudes de los lados y determina que "la chica" es la de 45° y "la grande" la de 30 y 60 grados.

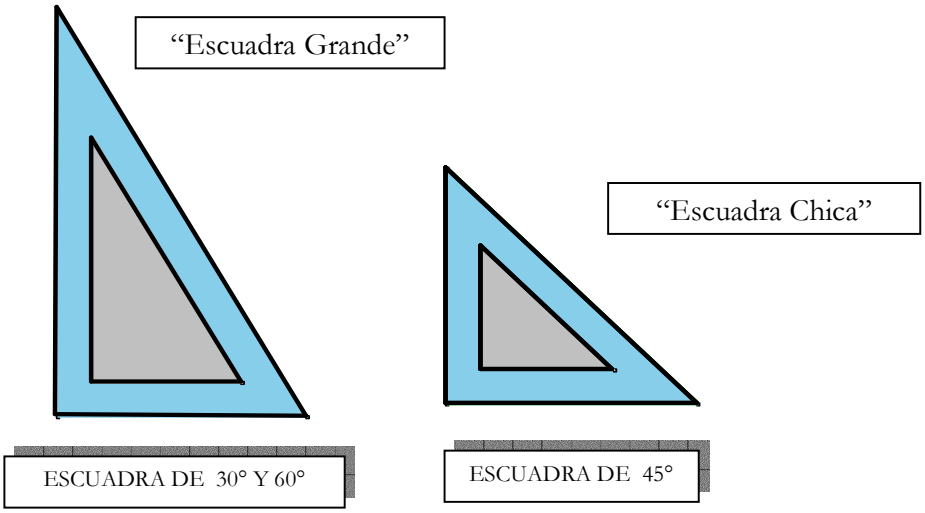


Fig. 10

Esta forma de identificar los ángulos en las escuadras, lleva al estudiante a depender del tamaño de las mismas. Así, no es de sorprender que el estudiante tenga problemas para resolver ciertos ejercicios cuando tiene dos escuadras de diferentes juegos geométricos y la de 30° y 60° es más pequeña que la escuadra de 45°.

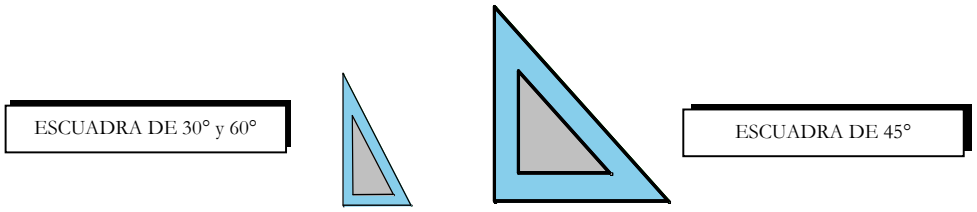


Fig. 11

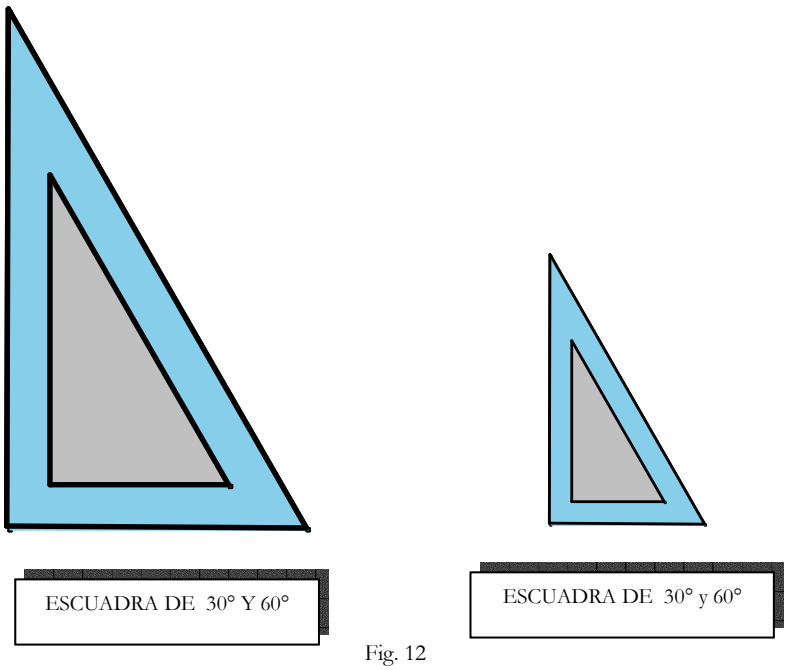


Fig. 12

Por lo tanto, el título de "chica" o "grande" no determina el tipo de escuadra. Debería determinarlo sus ángulos interiores. De manera que el alumno sea capaz de identificarlas independientemente de su tamaño.

Conflicto 2

Actividad: "Trazar paralelas a 45°"

El alumno coloca la hoja en la que va a trabajar sobre su tabla de trabajo, alineándola con la regla "T" como se muestra en la fig. 13.

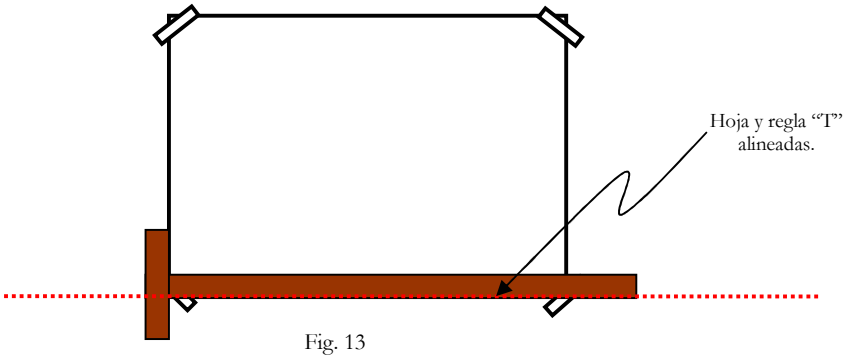


Fig. 13

Se le pide al alumno que trace líneas paralelas a 45°. Si el alumno identifica la escuadra, el conflicto puedes ser otro ahora. El estudiante supone que con sólo utilizar la escuadra de 45° cumplirá con la instrucción, independientemente de cómo la utilice. Identificar el ángulo de 45° en una escuadra, no asegura el trazado de un ángulo de 45°.

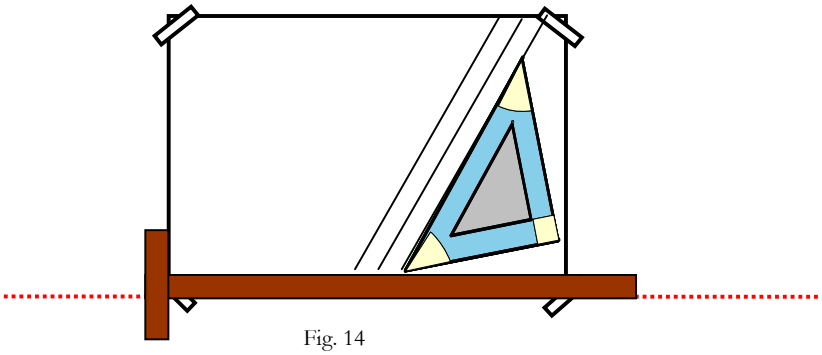


Fig. 14

La imagen anterior nos muestra que el alumno no identifica que el ángulo de 45° es con respecto a la base de la escuadra:

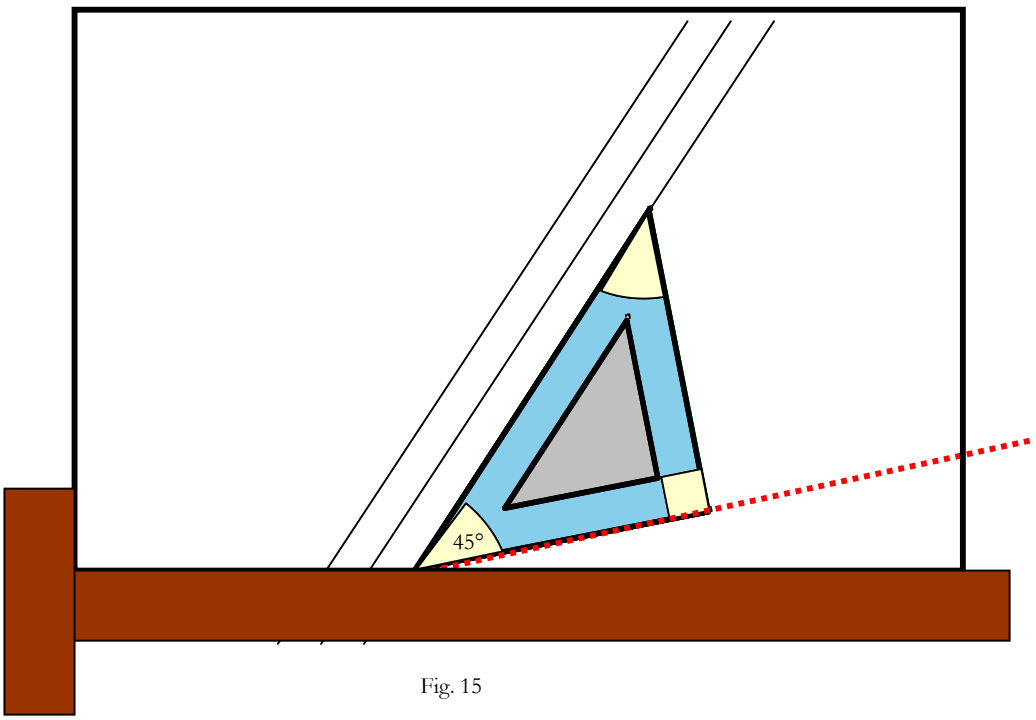


Fig. 15

Y no con respecto a la horizontal, pues él no percibe esa línea "imaginaria":

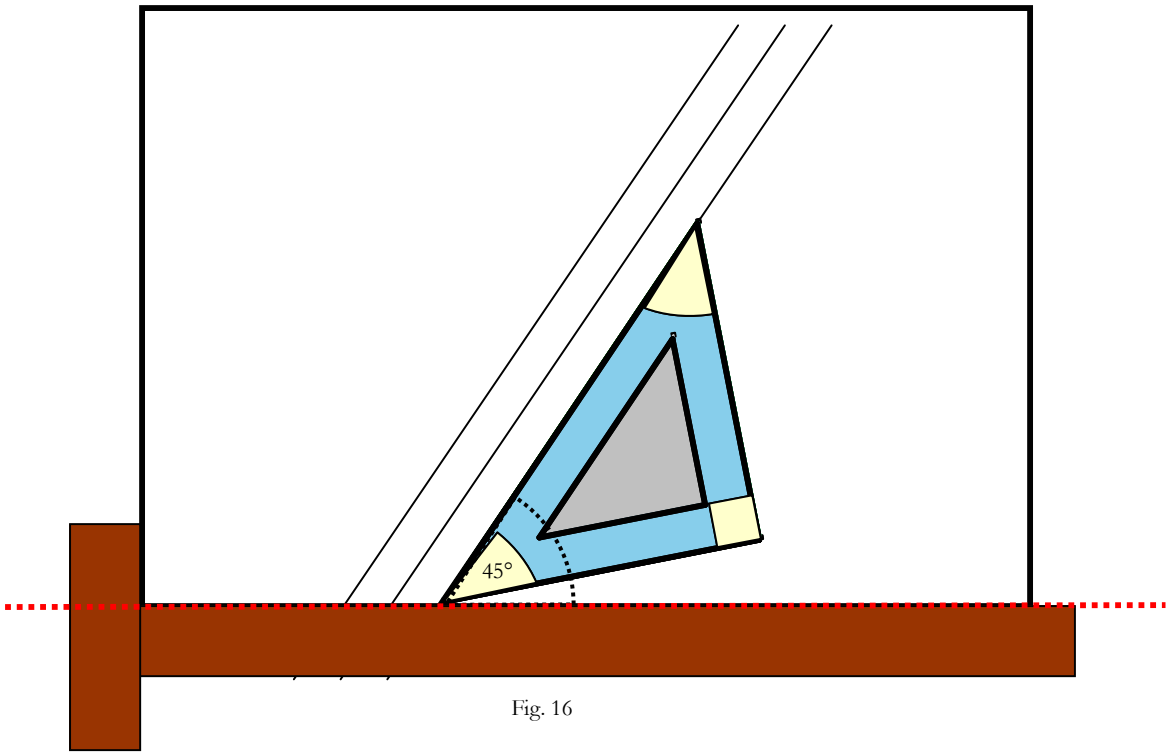


Fig. 16

Esas líneas, por lo tanto, están trazadas a un ángulo mayor de 45°. Esto nos habla de la falta de

referentes para construir la noción de ángulo o de un cierto obstáculo al considerar al ángulo sólo como "esquina de la escuadra".

Conflicto 3

Actividad: "Trazar un pentágono regular inscrito en una circunferencia"
Conflicto en el alumno: ¿Por qué en lugar de obtener un pentágono, obtengo un hexágono?

La mayoría de los alumnos determinan que deben trazar una circunferencia con un ángulo central de 72° (360° / 5 = 72°), para lo cual deberán utilizar el transportador. Sin embargo, el conflicto se presenta a partir del uso que algunos estudiantes le dan al transportador. Primero ubican los 70° y entonces buscan 2° sin hacer distinción del sentido (izquierda o derecha) donde los ubiquen. Así, pueden localizar 72° o 68°.

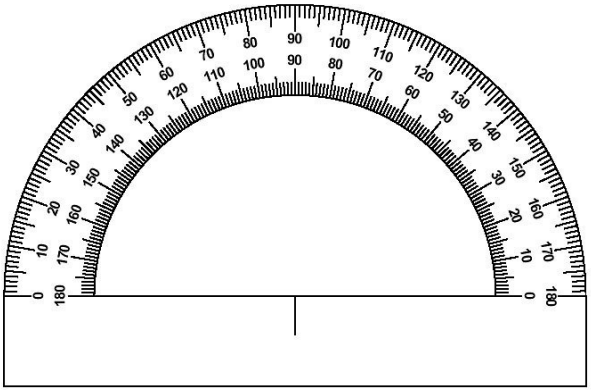


Fig. 17

La graduación del transportador crece y decrece en ambas direcciones. La graduación interna, crece de derecha a izquierda, mientras que la graduación externa crece de izquierda a derecha. Y el alumno no identifica en qué sentido está midiendo el ángulo buscado.

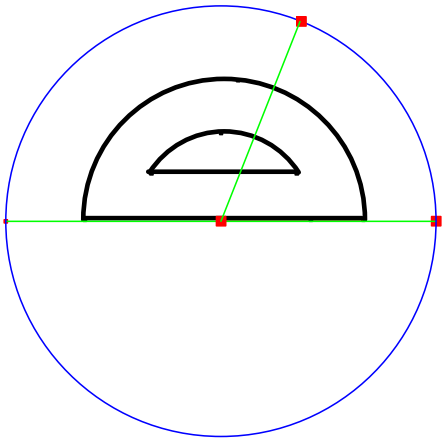


Fig. 18

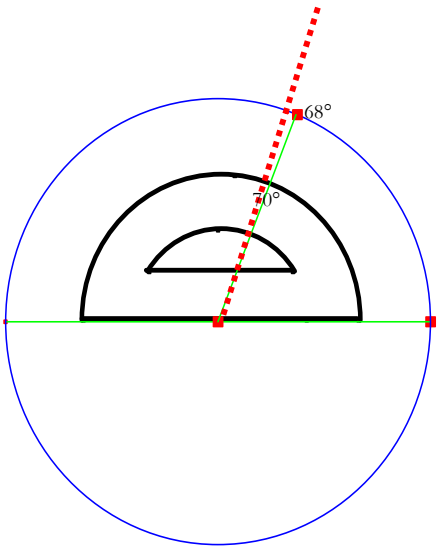


Fig. 19

El error en la medición, origina un polígono irregular y de 6 lados, como el que se presenta en la siguiente figura:

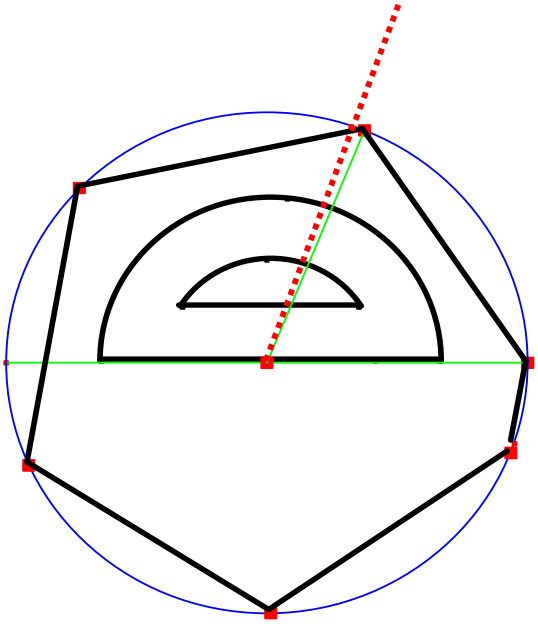


Fig. 20

Esto nos demuestra, que el alumno no identifica de dónde a donde está midiendo los grados. Es decir, en general observamos la ausencia de "sentido o dirección" para localizar un ángulo, usando el transportador.

Conflicto 4

Actividad: "Trazar un pentágono regular inscrito en una circunferencia"

Conflicto en el alumno: Ubica el transportador de tal manera que el borde del mismo coincida con el borde de la circunferencia, es decir, pretende medir el ángulo como si se tratara de un regla graduada.

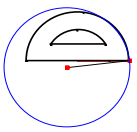
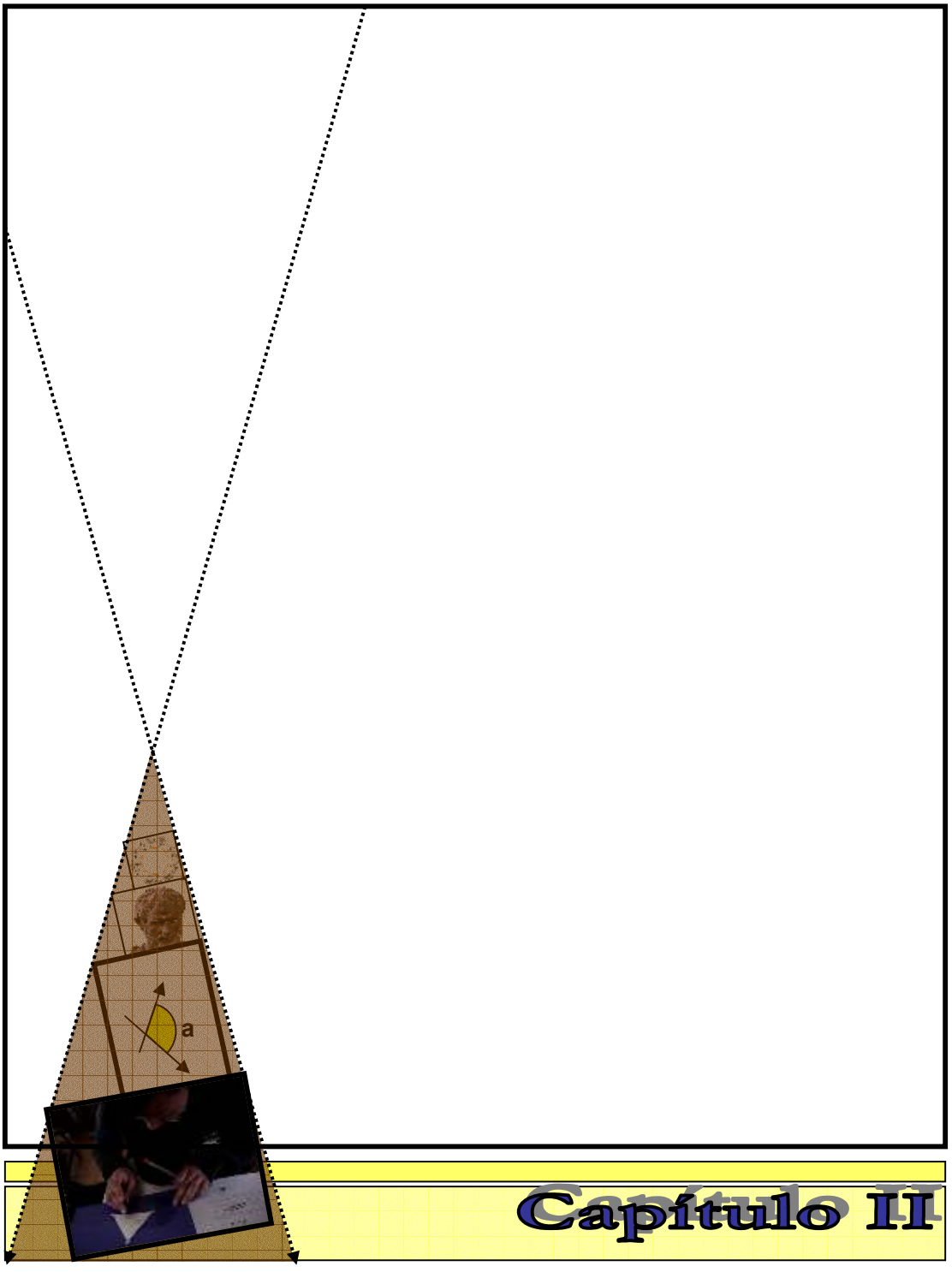


Fig. 21



Capítulo II

II. ANTECEDENTES (INVESTIGACIONES PREVIAS)

La naturaleza del concepto de ángulo ha sido tema de debate por más de 2000 años y la discusión aún no termina (Matos, 1990). Quizá por ello no hay una única definición aceptada por la comunidad matemática y su transposición didáctica de ninguna manera se convierte en un proceso trivial. Michelmore y White (2000) han llamado a esta peculiaridad la *naturaleza multifacética* del concepto de ángulo, donde cada faceta se conforma por el conjunto de contextos relacionados donde se localiza al ángulo en situaciones físicas. Para estos autores, las diversas definiciones que se pueden localizar en los libros de texto obedecen a su ajuste a diferentes estructuras matemáticas formales, pero el hecho de que ninguna definición parezca coincidir con todos los contextos físicos del ángulo enfatiza la dificultad de formar un concepto general estándar.

El trabajo de Michelmore y White, reporta una investigación realizada con alumnos de 4° grado explorando el descubrimiento del concepto de ángulo. Este trabajo expone, que las longitudes y los ángulos son dos conceptos básicos que utilizamos con frecuencia para analizar nuestro ambiente espacial y también son fundamentales en el estudio de la geometría. Sin embargo, el concepto de longitud parece dominarse en primaria mientras que el concepto de ángulo causa severas dificultades en la educación secundaria (Close, 1982; Michelmore, 1983). La dificultad para los docentes es el determinar qué definición de ángulo es conveniente utilizar. En la escuela hay algunas que son más sugeridas en los textos: vueltas, la unión de dos rayos con un punto común o la intersección de dos medios planos (Close, 1982; Krainer, 1989).

En el trabajo realizado, se utilizan seis diferentes contextos:

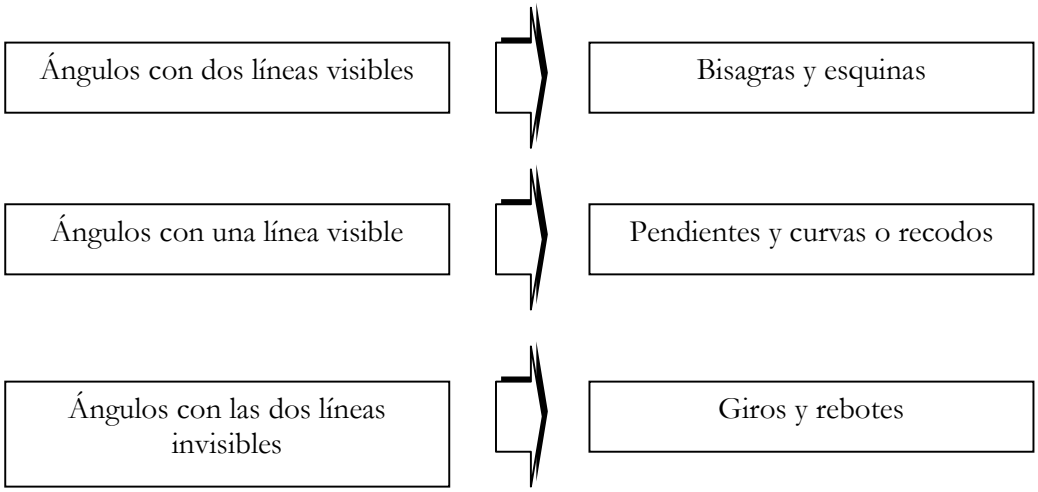
	CONTEXTO	**EJEMPLO**
Ninguna similitud	Giros	Giros del cuerpo
	Rebotes	Como los de un grillo
Algunas similitudes	Bisagras	Tijeras
	Vueltas	Como en los caminos
Muy similares	Pendientes	Colinas
	Esquinas planas	Mosaicos

La primera columna se refiere a las ideas que hacen que posteriormente se agrupen dichos contextos por las características que los relacionan o los hacen diferentes.

36 alumnos de 4° grado (9.6 años de edad en promedio) en dos escuelas de Sydney Australia fueron entrevistados mostrándoles modelos de los seis contextos expuestos anteriormente. Se buscó encontrar definiciones por parte de los estudiantes para cada uno de los contextos, determinar modelos abstractos para cada uno de los contextos, encontrar similitudes entre ellos y, finalmente, definiciones formales del concepto de ángulo.

Los resultados obtenidos demostraron que la mayoría de los alumnos son capaces de reconocer el ángulo en los diferentes contextos a excepción de las vueltas extremas utilizadas en los diferentes caminos pues no resultan ser muy familiares para ellos. Sin embargo ignoran con frecuencia las características y cualidades comunes del ángulo en estos contextos lo que no le permite generar un concepto formal que represente ese concepto. Es decir, le es difícil definirlo.

La mayor dificultad en aprender a identificar físicamente una situación en donde se presente el concepto de ángulo, y específicamente modelarla, tiene que ver con la identificación de las dos líneas que forman el ángulo:



Los resultados de esta investigación, confirman la dificultad existente en los alumnos de identificar al ángulo, especialmente cuando dos de sus líneas no son visibles. Como es el caso de los giros o las curvas o recodos. Sin embargo, es clara la importancia de que el alumno se familiarice en un primer momento, con las diferentes modelizaciones del ángulo, y que las identifique primeramente dentro de un contexto más familiar para él. De tal manera que

paulatinamente pueda abstraerlo hasta llegar a la construcción del concepto. La familiaridad, similitud y rectificación en el aprendizaje de este concepto son fundamentales especialmente tratándose de un concepto multifacético.

Para esta investigación realizada por Miclelmore y White, utilizaron un Marco Teórico que explicaré con mayor detalle en la componente cognitiva del capítulo posterior.

Por su parte, Casas (2000) señala que *el concepto de ángulo está lleno de matices y dificultades; comprender cómo se origina, se interioriza y se relaciona con otros conceptos matemáticos no es tarea fácil.* Y argumenta por qué la comprensión de este concepto es vital para el desarrollo matemático del estudiante:

> *….Creemos que su principal interés radica en que, siendo un concepto aparentemente tan simple, está en la base, primero de la percepción espacial del mundo que nos rodea, y después, de muchos conocimientos en geometría. Como la mayor parte de los conceptos a los que llamamos "simples" resulta ser un concepto difícil de aprender y, por lo tanto, de enseñar.* (pág. 209)

Sin embargo, como ya lo comentamos en el capítulo anterior, también es una pieza clave en el desarrollo del pensamiento geométrico-espacial.

En un estudio realizado sobre la inclinación del sol en términos de ángulo con alumnos de tercero y cuarto de primaria, Douek (1998) reporta dificultades para lograr la conexión entre inclinación y el ángulo existente entre las líneas que representan los rayos del sol y su proyección horizontal con el plano. Pareciera que **el concepto de inclinación fuera totalmente independiente del concepto de ángulo**, lo cual se considera generador de conflictos en el estudio de la trigonometría.

De acuerdo con estas investigaciones, la problemática inicia desde el nivel básico donde el alumno tiene diversos problemas para conceptualizarlo y se agudiza aún más en la secundaria cuando necesita utilizarlo en la construcción de otros conocimientos como por ejemplo en la Trigonometría. Y es que al alumno no se le ha permitido construir su propio conocimiento o su propio concepto de ángulo pues existe una ruptura importante entre las imágenes que el alumno se ha creado del concepto, con las definiciones formales expuestas en los libros de texto y por el docente, *Tall y Vinner (1981, citado por Casas, 2002).*

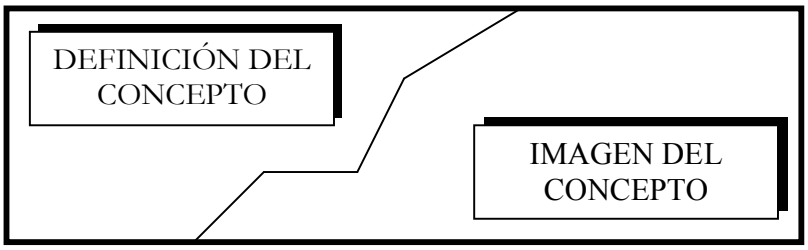


Fig. 22

Como parte de su investigación Casas (2000) clasifica las diferentes definiciones del concepto de ángulo y considera las *imágenes del concepto* que el alumno asocia a ellas. Casas presenta tres categorías:

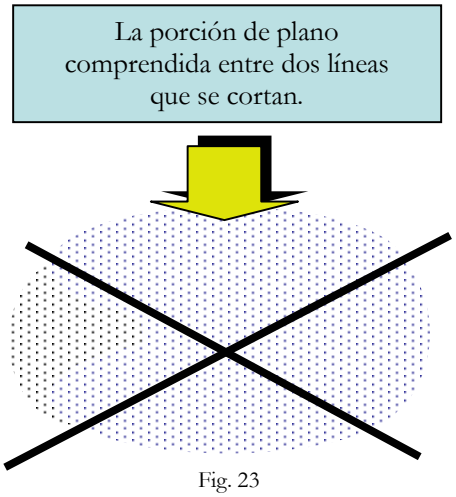


Fig. 23

La unión de dos rayos
o semirrectas.

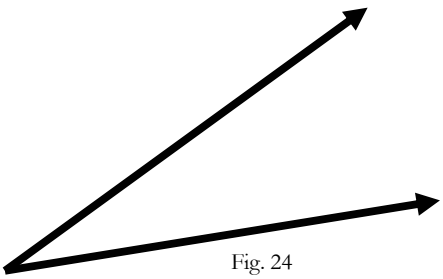


Fig. 24

La cantidad de inclinación o giro
entre dos líneas que se unen
en un punto.

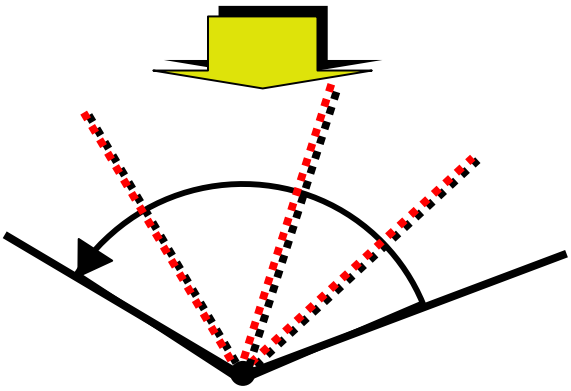
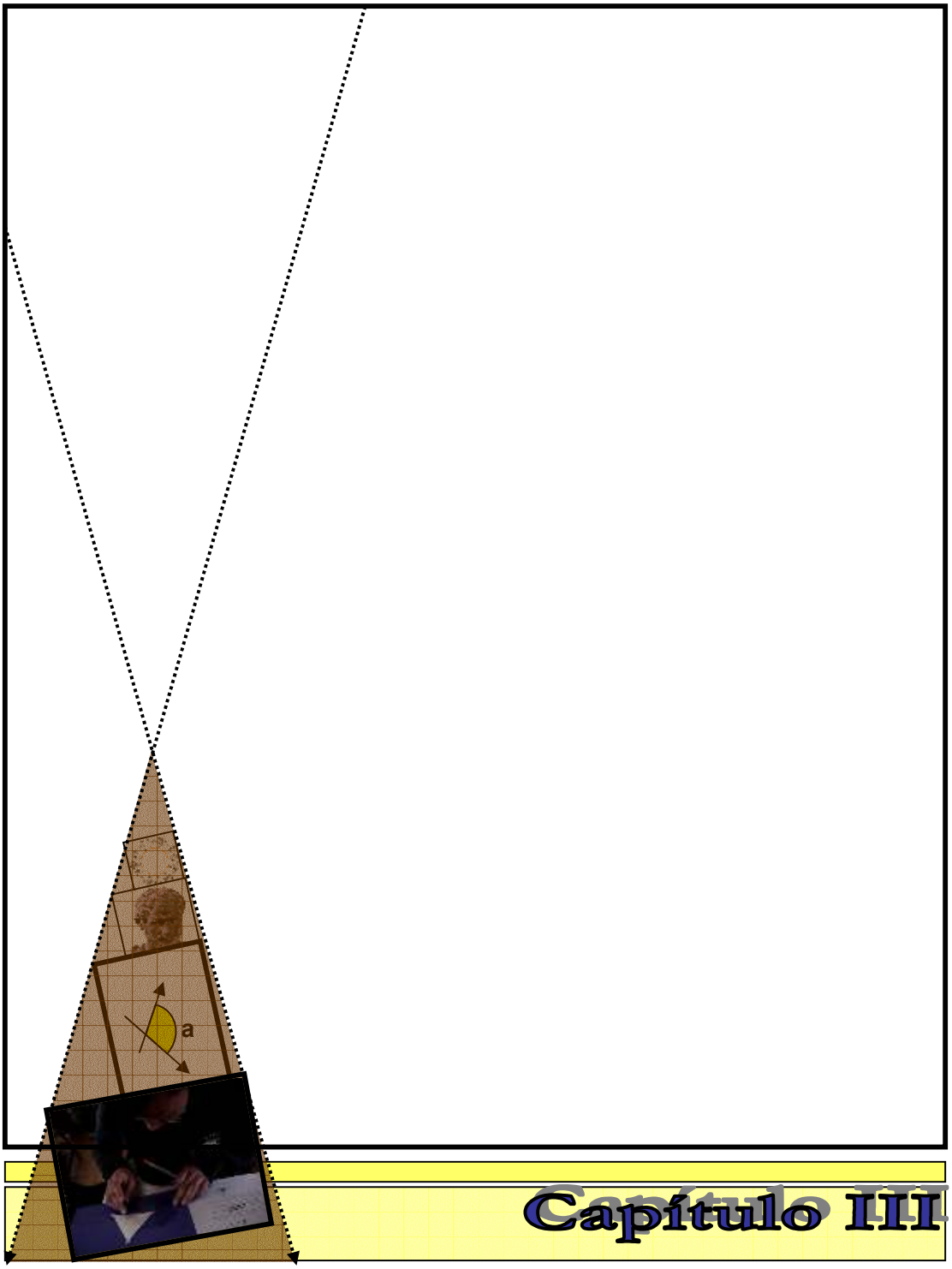


Fig. 25

Y señala que éstas a su vez, pueden encontrarse en dos concepciones aún más amplias como sería el ángulo estático y el ángulo dinámico pero, lo más importante, es que concluye diciendo que:

…la cuestión más importante, no es encontrar una definición de ángulo adecuada, sino tratar de que sea el alumno el que construya su propio concepto de ángulo. Y que lo construya a partir de las situaciones angulares que se le presentan y va manipulando a lo largo de su escolaridad. (pág. 209).



Capítulo III

III. TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

En la enseñanza de las matemáticas encontramos, de acuerdo a la Teoría desarrollada por Guy Brousseau, tres componentes que interactúan cotidianamente:

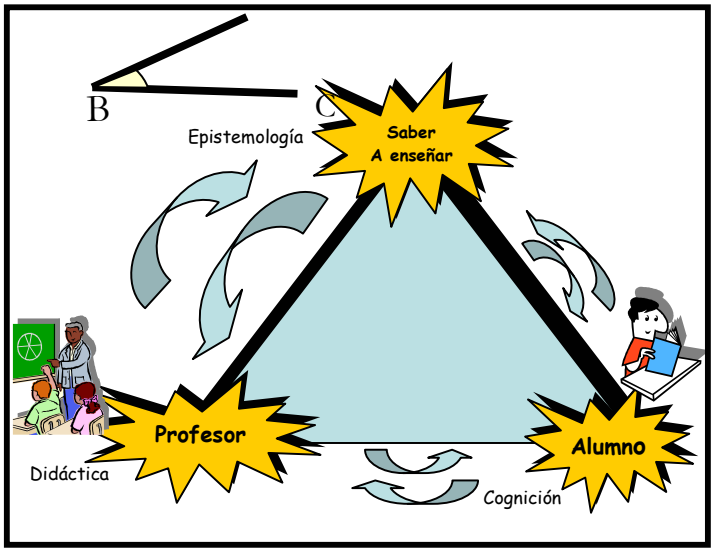


Fig. 26

A) La componente **Cognitiva**, representado por el **alumno** quien se encuentra inmerso dentro de este contexto, y quien requiere construir y hacer suyo el conocimiento en juego.
B) La componente **Epistemológica,** el concepto o **saber a enseñar** que tiene su propia naturaleza y que se ha desarrollado o construido a lo largo de la historia.
C) La componente **Didáctica,** representado por el **profesor** quien actúa como facilitador en la construcción que el alumno hace del conocimiento en juego.

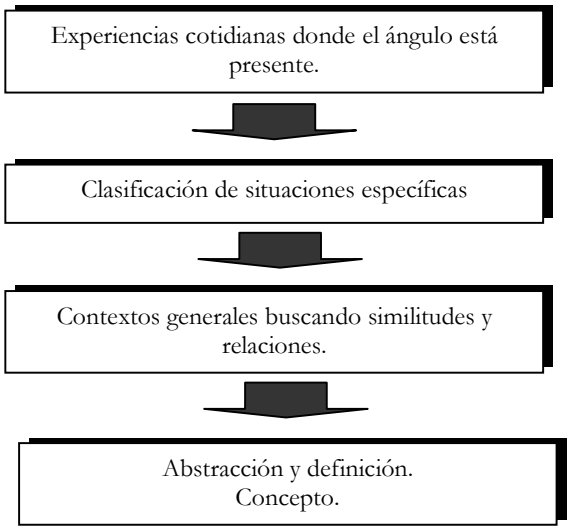
En nuestro estudio, el saber a enseñar lo constituye la noción escolar de ángulo y más adelante explicaremos cómo se desarrolló este concepto a lo largo de la historia desde las primeras culturas hasta nuestros días. Esto no sólo para ilustrar su importancia histórica, sino que nos permitirá entender su naturaleza, sus significados de origen y el por qué se le considera un concepto multifacético.

Por otro lado, el alumno tiene sus propios elementos cognitivos por lo que Mitchelmore y White (2000) explican la necesidad de crear situaciones que le permitan familiarizarse con el concepto en contextos propios de su espacio para que, por abstracciones sucesivas, pueda finalmente construir el concepto de ángulo, pero siempre trabajando sus diversas facetas.
Finalmente, a través de la componente didáctica podemos acercarnos al docente y su discurso en clase, al tratamiento que en programas oficiales y libros de texto se le ha dado al conocimiento, tal y como lo mencionamos en capítulos anteriores.

En la teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, intervienen estos tres elementos donde el profesor facilita el medio en el cual el estudiante debiera construir su conocimiento. De esta manera, una situación didáctica es la organización del medio (por parte del profesor) para que el estudiante aprenda algo y las relaciones entre los actores del sistema (triángulo) didáctico se caracterizan por los contratos didáctico, pedagógico y escolar.

A. UN MODELO COGNITIVO PARA EL DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE ÁNGULO.

Michelmore y White (2000), fundamentaron su investigación en teorías de abstracción muy relacionadas con los estudios de Piaget. Bajo esta teoría se reporta que los niños reconocen progresivamente, con detalle, similitudes entre sus diferentes experiencias donde el ángulo está presente, posteriormente se clasifican en situaciones específicas, después en contextos generales hasta llegar a la abstracción del concepto e incluso definirlo:



Esta Teoría de la abstracción y del Conocimiento Situado sugiere, que el alumno irá perfeccionando su concepto de ángulo, al mismo tiempo que madura en su desarrollo cognitivo. El concepto se va construyendo a medida que se van abstrayendo las propiedades invariantes del objeto. Primero se buscarán y analizarán las semejanzas y diferencias encontradas en diversas situaciones para después abstraer aquello que no cambia y que es constante en todos ellos. Sin embargo, para formar un concepto, se necesita un cierto número de experiencias que tengan algo en común.

Michelmore y White proponen la construcción del concepto de ángulo mediante abstracciones progresivas manejando tres etapas:

ETAPA No.1 *Situaciones del Concepto de ángulo*

En esta etapa se trabajan situaciones cotidianas del alumno en donde el ángulo está comúnmente involucrado:

- Tijeras
- Tejas
- Cruces
- Carrusel
- Resbaladillas
- Colinas
- Techos
- Puntas de lápices
- Palos inclinados.

Y, dentro de esta misma etapa, el alumno va evolucionando en la medida en que poco a poco va generalizando cuando las similitudes iniciales cambian poniendo más atención en las situaciones físicas y en las acciones involucradas.

ETAPA No.2 *Contextos del concepto de ángulo*

En esta etapa, el alumno empieza a clasificar las diferentes situaciones donde se presenta el ángulo, en diferentes contextos. Por ejemplo, de las situaciones mencionadas anteriormente, las colinas y los techos podrían considerarse dentro del contexto de las pendientes:

CONTEXTO	SITUACIONES
Pendientes	• Colinas • Techos
Giros	• Carrusel • Giros del Cuerpo
Bisagras	• Tijeras • Cruces

Para hacer esta clasificación, el estudiante debe encontrar similitudes y diferencias que le permitan ubicar las diversas situaciones en un contexto en particular.

ETAPA No.3 *Abstracción del concepto de ángulo*

En esta última etapa, el alumno busca similitudes entre los diferentes contextos. Y esto es el principio de la construcción inicial y elemental del concepto matemático de ángulo. Este proceso requiere de abstracciones paulatinas.

Las tres etapas estudiadas, podrían resumirse de la siguiente manera:

- *Similitudes entre experiencias son abstraídas para formar situaciones del concepto de ángulo*
- *Similitudes entre situaciones del concepto de ángulo son abstraídas para formar contextos del concepto de ángulo*
- *Similitudes de contextos del concepto de ángulo son abstraídos para formar abstractos conceptos de ángulo.* (pág. 218)

B. NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO EN JUEGO.

En el trabajo desarrollado por Casas (2000) se consideraron algunos elementos históricos de la noción de ángulo como parte de los antecedentes de su investigación, centrado principalmente

en los artículos publicados por Matos (1990 y 1991). Sin embargo, estos elementos no se consideraron como parte del fenómeno didáctico, ni como elemento explicativo de los conflictos del estudiante.

Igualmente podemos encontrar en Michelmore y White (1995 y 2000) una explicación en el plano cognitivo, considerando que la cognición es situada, relacionada con el plano de lo didáctico (el producto de la transposición didáctica), pero deja fuera de su explicación el papel que juega el conocimiento matemático involucrado, es decir, la naturaleza epistemológica de la noción de ángulo.

Estas dos investigaciones manejan **por separado**, dos elementos del **Sistema Didáctico**: La componente Cognitiva (Michelmore y White) y la componente epistemológica (Casas).

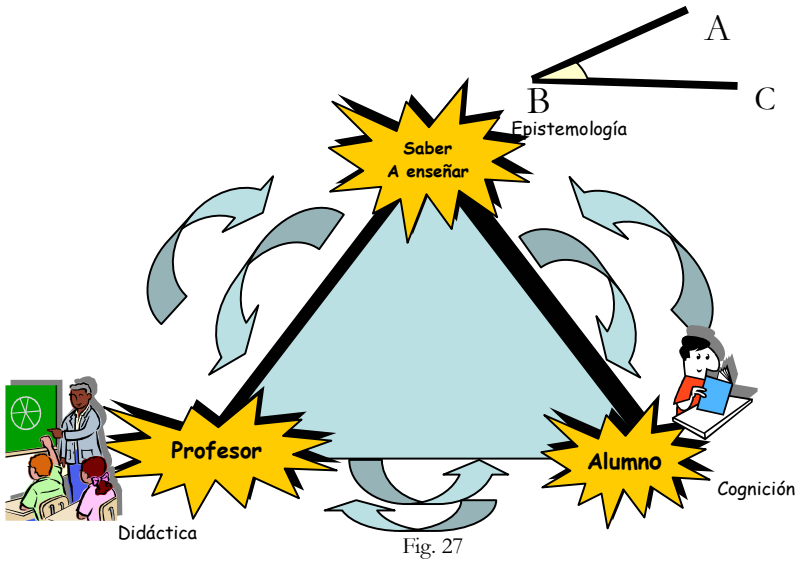


Fig. 27

Consideramos que es factible identificar elementos sobre la naturaleza epistemológica del concepto de ángulo a partir de los aportes de Matos (1990 y 1991), tomando en cuenta no sólo el devenir histórico, sino las etapas de construcción.

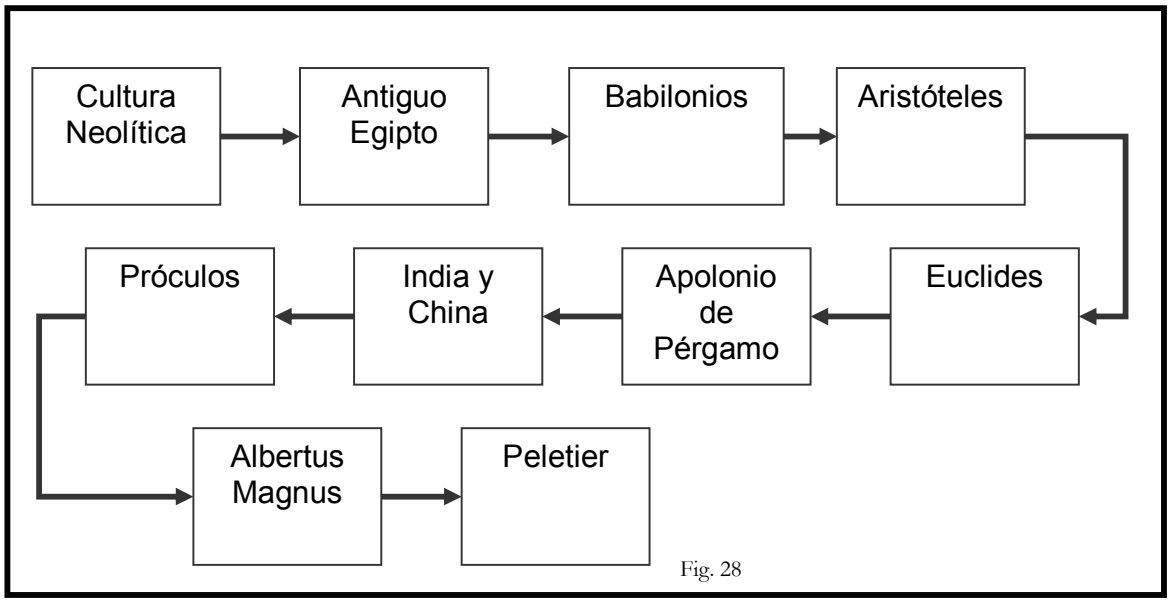
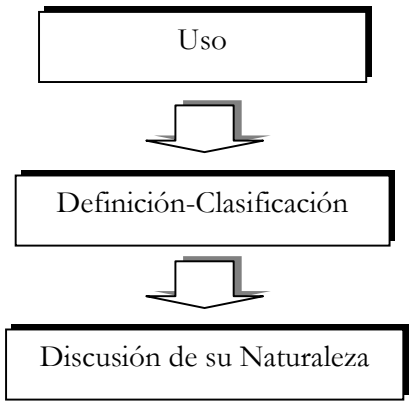


Fig. 28

Matos hizo un recuento histórico del concepto de ángulo con el objetivo de entender cómo se concebía el ángulo, las propiedades que se le atribuían, así como los problemas que se resolvían e incluso los que no, usando el concepto. De su estudio podemos extraer etapas en la construcción del concepto:



Aunque sobre ésta última, la discusión de su naturaleza, Matos no reporta un consenso de la comunidad científica.

1. Uso de la Noción de Ángulo.

Queremos hacer una diferencia entre el término *uso* y el término *aplicación*. Por la primera entenderemos que el ángulo juega un papel importante en ciertas actividades, pero al nivel de noción que aún no se define o no se identifica como concepto, mientras que aplicación se refiere a llevar el concepto formal a la situación que lo requiera.

En las primeras culturas, no existía la Noción de ángulo, pero se manejaba la **Inclinación** y la **dirección** de sus construcciones con base a los astros.

Fig. 29

En ese sentido, el uso de la noción de ángulo adquiere importancia significativa pues, en un escenario escolar, el estudiante podría construir concepciones intuitivas que caractericen al ángulo.

La construcción y la astronomía fueron escenarios apropiados para el uso de la noción de ángulo, aunque subyacente en la *inclinación* de las construcciones y la *dirección* de los cuerpos celestes, aportaron un significado que más tarde se representaría por medio de objetos geométricos.

Fueron los Babilonios quienes manejaron la Noción de tiempo y espacio dividiéndolo en 360°

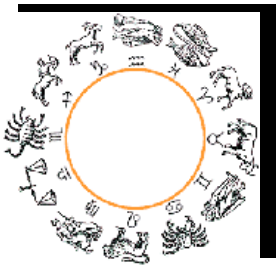


Fig. 30

Los mayas, de la época precolombina, combinaron ambas actividades al construir sus edificaciones con el propósito de escenificar fenómenos celestes de la Tierra, como el castillo de Chichen Itzá, donde se observa el descenso de Kukulkán, serpiente formada por las sombras que se crean en los vértices del edificio durante los solsticios. Las cuatro escaleras del edificio suman 365 peldaños, equivalente a los días del año.

Fig. 31

Dentro de los muchos propósitos que la astronomía tuvo en las diferentes culturas, como la babilónica, la hindú, la china, la maya, entre otras, se dieron importantes avances en la medición del tiempo. De forma natural el primer referente para medir el tiempo fue el cambio noche-día, en consecuencia la atención fue puesta en los movimientos de la luna y el sol. Sin embargo, estos fenómenos fueron insuficientes muy pronto para determinar las épocas apropiadas para las actividades típicas de cada comunidad (agricultura, pesca, navegación, comercio) y comenzó la observación y el registro de los cambios en la posición de las estrellas y los planetas, para lo cual fue necesario construir herramientas y referentes más precisos.

Algunas de las aportaciones más notorias de la práctica astronómica a la geometría-trigonometría son la división del círculo en 360 partes, las tablas de arcos-cuerdas equivalentes a las tablas trigonométricas actuales y los datos sobre la posición de los astros, que más adelante servirían para la validación de los primeros modelos geométricos.

2. Definición y discusión sobre la naturaleza del concepto de ángulo

Los griegos fueron los primeros en tener una palabra para ángulo y antes de Aristóteles (384-322 antes de nuestra era) ya se distinguía entre los ángulos agudo, recto y obtuso. A partir del período clásico griego, el ángulo encuentra definiciones, caracterizaciones y categorizaciones cada vez más precisas y amplias. Lo que importa señalar es que toda la discusión se propicia en un terreno filosófico-matemático, más que en el de los *usos* prácticos.

Matos (1990 y 1992) ha descrito con precisión y detalle el devenir histórico del concepto de ángulo, pero para efectos de este escrito sintetizaremos los momentos más relevantes respecto de su definición y la discusión sobre la naturaleza. Nuestro propósito es dar luz de los significados que actualmente viven y los que se han perdido en el discurso matemático escolar, exclusivamente de los denominados ángulos rectilíneos. De los ángulos curvilíneos o mixtos

mencionaremos que desde los primeros griegos hasta el siglo XVI se mantuvo la discusión para intentar caracterizarlos, al igual que los rectilíneos, como cualidad, cantidad o relación, y que fue Peletier (1517 -1582) quien sostuvo que:

> *Un ángulo de contacto no es un ángulo en lo absoluto;…que el contacto de dos círculos, no es una cantidad;…que el contacto de una línea con un círculo tampoco es una cantidad;…*[Heath, 1926[3]]

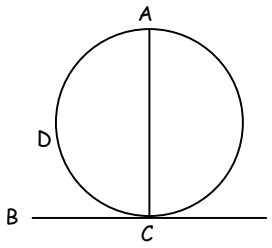


Fig. 32

Un problema central en la discusión de Aristóteles (384 - 322[4]) sobre los objetos geométricos era determinar su naturaleza. La longitud, por ejemplo era una cantidad; el paralelismo, era una relación, y el triángulo una cualidad.

OBJETO	NATURALEZA
Longitud	Cantidad
Paralelismo	Relación
Triángulo	Cualidad

El ángulo llano (dos rectos) y el círculo eran tipos de figuras para él. Se presume que para Aristóteles el ángulo era una cualidad, definido en algunos escritos como *la deflexión o la fractura de una línea* (Matos, 1990).

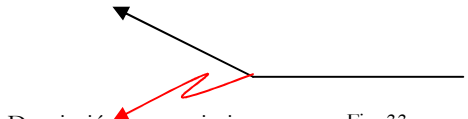
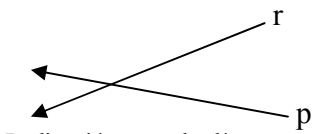


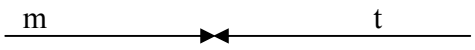
Fig. 33

Por otro lado, las definiciones 8 y 9 del Libro I en los Elementos de Euclides (~300 a. n. e.) establecen que *un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta… Cuando las líneas que comprenden al ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo*[5]

[3] Citado por Matos (1991)
[4] antes de nuestra era (a. n. e.)
[5] Traducción tomada de http://www.euclides.org/menu/elements_esp/01/definicioneslibro1.htm



Inclinación entre las líneas "r" y "p"



Ángulo rectilíneo

Fig. 34

Y de la definición 10 a la 12 hace una categorización de los ángulos de acuerdo a su tamaño. De las dos primeras definiciones se puede deducir que para Euclides el ángulo se define por dos rectas particulares, pero también sugiere al ángulo como una especie de área contenida entre dos rectas.

Área contenida entre dos líneas

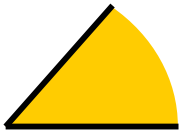
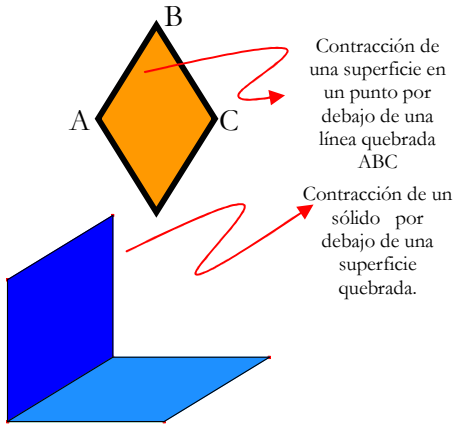


Fig. 35

Se distinguen dos cambios notorios respecto de Aristóteles, el ángulo se define con dos rectas, no sólo con una que se fractura, y puede cuantificarse. Sin embargo, Euclides excluye como ángulos el cero, el llano o aquellos mayores al llano, ni siquiera los considera una composición de otros ángulos. Sólo los comentadores de la Edad Media [Tartaglia (1500-1557), Peletier (1517-1582) y Clavius (1538-1612)] consideraban a los ángulos mayores de 180° como un solo ángulo (Heath, 1926).

Posteriormente a Euclides la discusión se centró en tres problemas: (1) cuál es una buena definición de ángulo, (2) dónde se ajustan los ángulos a las categorías aristotélicas de cualidad, cantidad y relación, y (3) cuál es la naturaleza de los ángulos curvilíneos.

En la siguiente tabla mencionamos algunas de las definiciones que Matos (1990 y 1991) reporta después de Euclides, incluso algunas de ellas son parte de comentarios a los Elementos:

Autor	Periodo[6]	Definición
Apolunio de Perga	(262 – 190) a. n. e.	La contracción de una superficie en un punto bajo una línea fracturada, o de un sólido bajo una superficie fracturada. 
Heron	~10 al 75	"An angle is a quantity wich a simpler related quantity encloses when it comes to a point".
Plutarco de Atenas	~46 al 120	Un ángulo es el primer espacio bajo el punto, porque debe haber un primer espacio bajo la inclinación de las líneas o planos que contiene.
Carpus de Antioch	No se encontró una fecha precisa, pero se le considera Pitagórico.	Un ángulo es una cantidad llamada distancia entre las líneas o superficies.
Próculo	~410 al 485	Un ángulo se forma por dos líneas o dos superficies, que se intersectan. Las superficies no necesitan ser planas, ni las líneas necesitan ser rectas.
Avicena	980 - 1037	Puede usarse el término ángulo para la cantidad en sí misma, o para la cualidad de ser angular.
Alberto Magno	1193 - 1280	Para una superficie un ángulo está encerrado por medio de líneas, dado que es el justo medio entre una cantidad de una dimensión y otra de dos. No obstante, un ángulo sólido termina en superficies, siendo el justo medio entre una superficie, que tiene

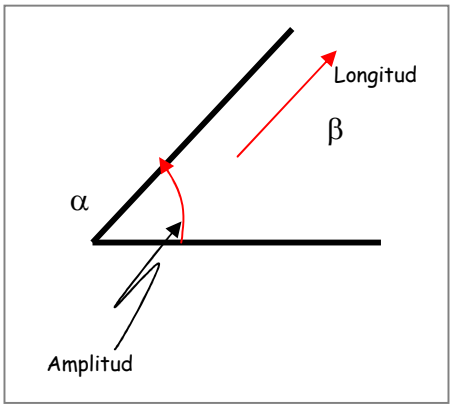
[6] Pueden consultarse en http://www.ou.edu/cas/hsci/isis/website/thesaurus/IsisCB.Personalnames.A-B.html

		dos dimensiones, y un sólido, que tiene tres dimensiones.
Wallis	1616 - 1703	Un punto no es una línea, sino el principio de ella; una línea no es una superficie, sino el inicio de ella; así, el ángulo no es una distancia entre dos líneas, sino la tendencia inicial hacia su separación.

En el caso de Próculo, Matos (1991) resalta la conclusión a la que llega sobre la naturaleza del ángulo[7]:

> *El ángulo es una cantidad provista con la habilidad de dividirse y compararse, es una cualidad por la virtud de su forma, e incorpora una relación porque requiere de la relación de dos líneas o superficies para acotarse.* (tomado de Morrow, 1970)

Alberto Magno consideró dos dimensiones en el ángulo: α indica una dirección del incremento a lo *ancho* y β una dirección del incremento a lo *largo*.



Los ángulos sólidos tendrían además, *profundidad*, que aparentemente constituye una tercera dimensión.

En sus comentarios sobre los Elementos, Alberto Magno concluye que el ángulo nos habla de *una cantidad sobre cierta cualidad:* un ángulo (angulus) es una cantidad, pero ser angular (angulatio) es una cualidad. Sin embargo, en sus comentarios a la Metafísica de Aristóteles asevera que un ángulo es una relación, porque es un "intermedio" entre una línea y una superficie.

Sin embargo, estas consideraciones se basaron en Anaritius (~922), quien propuso que:

a. Como un ángulo tiene extensión, no es una línea. No es un cuerpo porque puede no tener profundidad. Tampoco es una superficie porque no puede dividirse a lo ancho, sólo a lo largo. Un ángulo es el contacto indivisible entre dos líneas.
b. No parece ser una cantidad porque cuando un ángulo en particular, el ángulo recto, se duplica deja de ser el mismo tipo de cantidad continua.

[7] Tomado de Morrow, (1970)

c. Es una propiedad de un cuerpo o una superficie, por lo tanto no es una cantidad.
d. Tiene la habilidad de dividir una figura y esta habilidad es un tipo de cualidad.
e. Los ángulos pueden incrementarse o disminuirse por lo tanto son una cantidad.
f. Ser agudo u obtuso son condiciones de una cantidad.
g. Un ángulo tiene anchura y longitud, por lo tanto es una cantidad

Llegado el siglo XIX el ángulo tuvo nuevos contextos de discusión. Con la geometría no-euclidiana la discusión sobre su naturaleza cambió significativamente, sin embargo, una de las extensiones más importantes que tuvo fue su uso para expresar intervalos de tiempo entre dos eventos periódicos. La idea crucial vino del desarrollo de las funciones en series trigonométricas, por Fourier (Kline, 1972).

Dentro de la geometría euclidiana se continuaron los esfuerzos por clarificar la noción de ángulos rectilíneos. Veronese (1854 – 1917) sostuvo que un ángulo es una entidad en una dimensión con respecto al rayo y una entidad de dos dimensiones respecto a los puntos en el plano. Su idea era definir al ángulo como un agregado de rayos emitidos desde el vértice e incluidos en un sector angular (Heath, 1956[8]). Esto indica que para él el ángulo era el conjunto de todos los rayos dentro de dos rayos dados.

Por otro lado, para Bertrand un ángulo era una porción del plano que es común a los dos semi-planos limitados por dos líneas, o la interferencia de estos dos semiplanos.

Las definiciones más actuales tienen ya un toque mucho más formalista, que usan simbolismos y terminología de conjuntos, grupos, etc., lo cual es muy lógico dados los programas formalistas de la matemática misma. No obstante, libros de naturaleza más histórica o de difusión de la cultura matemática mantienen esa visión explicativa e ilustrativa del concepto de ángulo. Tal es el caso de Maor (1998), que en su libro *Trigonometric delights*, dentro del capítulo dedicado al ángulo señala:

> *Las entidades geométricas son de dos tipos: aquellas de naturaleza estrictamente cualitativa, como el punto, la línea y el plano y aquellas a las que puede asignarse un valor numérico, una* ***medida.*** *A este último grupo pertenecen los segmentos de recta, cuya medida es la longitud; una región plana asociada con un área; y una* ***rotación****, medida por su* ***ángulo****.*

[8] Citado por Matos (1991)

Existe cierta ambigüedad en el concepto de ángulo, porque describe la idea cualitativa de ***separación*** *entre dos líneas que se intersectan y el valor numérico de dicha separación (la medida del ángulo). Afortunadamente no debemos preocuparnos por esta ambigüedad, a la trigonometría le conciernen sólo los aspectos cuantitativos de los segmentos de recta y de los ángulos.*

Suponemos que caracterizar al ángulo como una relación de dos líneas no es una necesidad para Matos dado el contexto que le interesa, el de la Trigonometría. Es decir, dado que para hablar de relaciones trigonométricas el concepto de ángulo está íntimamente ligado al triángulo, no hace falta hacer explícito que un ángulo necesita de dos líneas para definirse o acotarse.

La revisión histórica de Matos (1990 y 1991) provee de elementos importantes a considerar cuando pensamos en los conflictos que el alumno presenta en el aula al abordar el concepto de ángulo. Matos mismo señala que:

…asumiré que una investigación sobre los orígenes de un concepto matemático es fructífera como guía para el desarrollo de una perspectiva pedagógica. (Matos, 1990; pp. 4)

Desde el punto de vista del educador matemático es interesante notar que hay varios desarrollos del concepto de ángulo que tienen sus contrapartes en la escuela contemporánea de matemáticas. De hecho hay diversos tipos de ángulos usados actualmente en la escuela:

(1) Las definiciones de Euclides y Hilbert

(2) Ángulos asociados con rotaciones

(3) Ángulos como medida de eventos periódicos

(Matos, 1991; pp. 24)

La tarea del matemático educativo es problematizar el cómo se aprende, cómo se enseña, pero también el qué se enseña. En este sentido es importante recuperar, del reporte histórico, aquello que nos de la luz sobre los conceptos, su naturaleza, sus significados y los conflictos que llevan a su construcción, esto es, desentrañar su epistemología.

3. Naturaleza epistemológica de la noción de ángulo manejada en la escuela.

Como mencionamos en capítulos anteriores, el concepto de ángulo se maneja por primera vez en 4° de primaria. En ese grado, de acuerdo al programa oficial, se pretende lograr que el alumno construya el concepto a través de tres actividades desarrolladas en su libro de texto. No se manejan definiciones, y se trabaja el concepto de una manera dinámica, sólo como un giro. La medición sólo se contempla en la última actividad, al establecer una relación entre el giro y los grados que éste representa pero sin utilizar el transportador, es decir, estableciendo que ½ de giro es igual a 180°, ¼ de giro es igual a 90° y 1/8 de giro equivale a 45°.

Sin embargo, en textos elaborados por otras editoriales, desde tercero de primaria empezamos a encontrar el concepto de ángulo. En la mayoría de los casos, se inicia con una definición, comúnmente estática. Posteriormente, se busca que el alumno mida, utilizando el transportador para que en grados superiores (5° y 6°) aplique el concepto en el aprendizaje de otros conocimientos matemáticos. Incluso se le clasifica de acuerdo a su abertura (agudo, recto, obtuso, etc.) y de acuerdo a su suma (complementarios y suplementarios).

Al término de la primaria, el alumno parece conocer lo que es el ángulo. Supuestamente puede definirlo, e incluso medirlo. Sin embargo, encontramos problemas al querer definirlo, precisamente por ser un concepto multifacético y también dificultades al intentar medirlo. Las cualidades del concepto son poco analizadas.

Cuando el alumno ingresaba a la secundaria, antes de la reforma (RS), el programa retomaba el manejo del concepto centrando su atención en la medición utilizando el transportador para posteriormente clasificarlo y aplicarlo en otros aprendizajes. Actualmente, con la reforma del 2006, se da por hecho que el alumno lo conoce pues sólo debe aplicarse en diversos temas como: simetría axial, construcción de figuras geométricas, etc.

Históricamente, encontramos que el ángulo se usó y aplicó considerándolo una cualidad, una cantidad y/o una relación. Consideraremos entonces que la naturaleza del concepto estará asociada a los significados que debe construir el estudiante:

- **Cualitativo** por su forma.
- **Cuantitativo** por su medida.
- **Como Relación** por la manera en que se define.

En las situaciones, los contextos y el discurso escolar se tendrán que distinguir estos tres significados.

Sin embargo, resulta importante señalar que al considerar el ángulo como una cantidad enfrentamos un conflicto sobre cómo medirlo, pues en el programa escolar, al ángulo le anteceden mediciones de longitud donde la herramienta (regla) se transpone directamente sobre el objeto a medir y se obtiene la medida. La medición del ángulo requiere, además del transportador, identificar el referente "inicio" y la "dirección" en que se leen los grados.

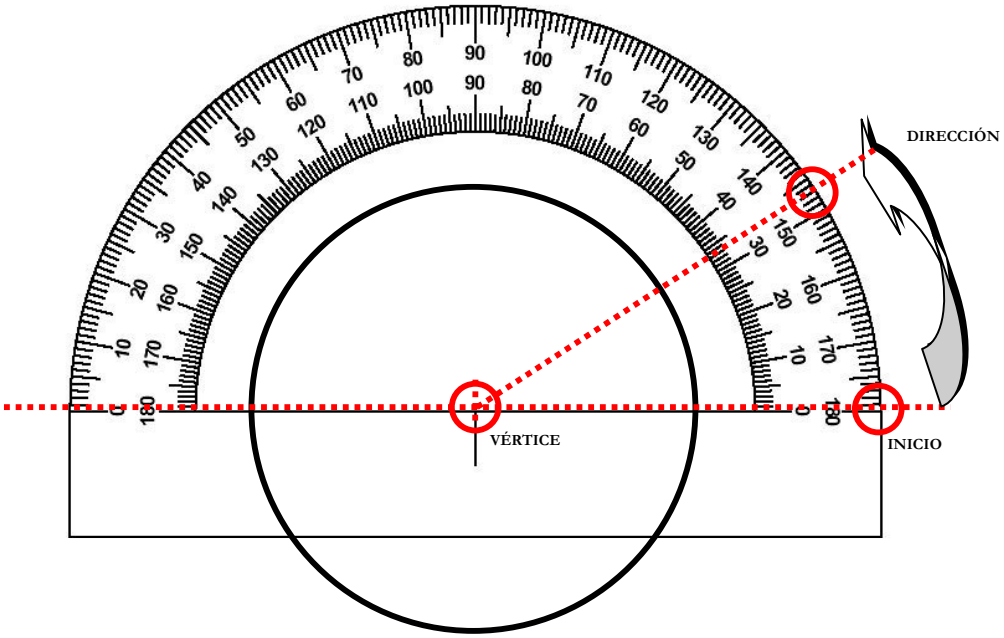


Fig. 36

En ese sentido podemos concluir que "medir" un ángulo es de naturaleza distinta a "medir" una longitud y el uso del vocablo "medir" puede ser el detonante para considerar al ángulo como la *longitud* de un arco.

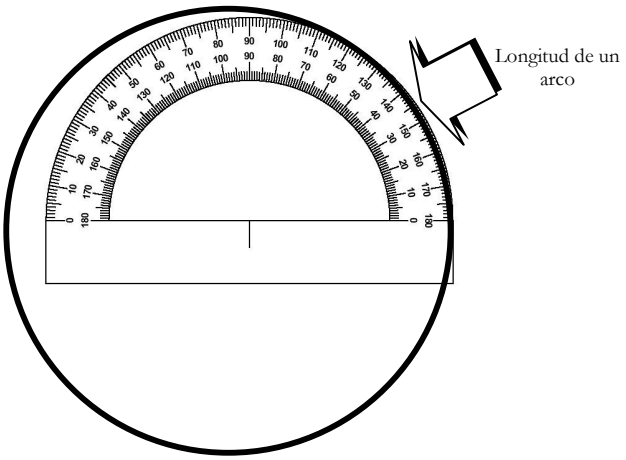


Fig. 37

Finalmente, como lo menciona Casas, el ángulo puede definirse como un concepto estático o como un concepto dinámico. Y el discurso escolar, especialmente en secundaria, maneja más el primero que el segundo.

En la Primaria, bajo el programa oficial, se intenta construir el ángulo a través de sus cualidades, pero de una manera muy simple y sin llegar a la construcción de cómo se mide y con qué se mide. No se permite al alumno conocer sus diferentes facetas. Además no se le define.

Bajo el desarrollo de otras editoriales, sólo se pretende definirlo. Sin permitir la construcción de su significado cualitativo. Y se aborda la medición, sin permitirle al alumno entender lo que es un transportador y la naturaleza del mismo. Sobretodo por ser un instrumento escolar.

En la secundaria, bajo el programa anterior, se buscaba medirlo y en algunos casos definirlo. Sin contemplar sus diferentes facetas como concepto estático y dinámico.

Ahora bajo el nuevo programa, sólo se aplica. Entendiendo o suponiendo que se sabe medirlo y que se maneja perfectamente su significado cualitativo.

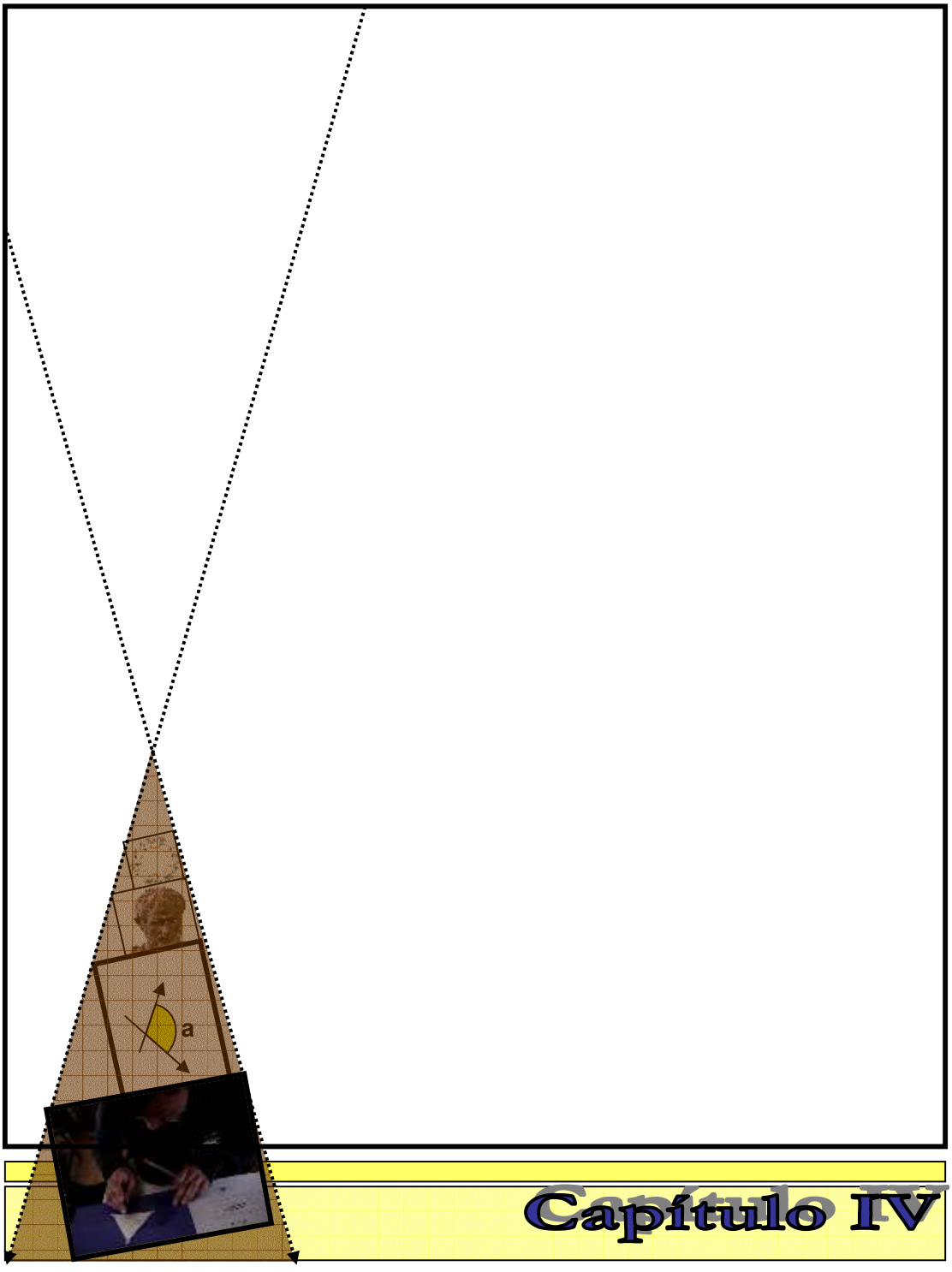
Podemos concluir que el concepto de ángulo se maneja superficialmente considerándolo un tema fácil y sencillo, de aquí que este trabajo muestre su complejidad en los diferentes planos: el cognitivo, el didáctico y el epistemológico.

SEP lo inicia bien, pretende que el alumno lo construya, pero luego lo deja sin terminar la idea. Y en secundaria, pretende que lo aplique, ¿Cómo hará eso el alumno?

Las otras editoriales, con la errónea idea de presumir un mejor nivel, se van directo a la definición cuando históricamente ha sido muy difícil definirlo y mágicamente nos dicen lo que

es un ángulo, pero abordando sólo una pequeña parte de lo que realmente es. Así que cuando el alumno, en física utiliza vectores, difícilmente verá el ángulo porque eso no es lo que le enseñaron.

Asumir que ciertos conceptos son simples o triviales, puede ser la raíz de por qué se convierten en conflictos para el estudiante, pues su presentación es, en efecto, simple y trivial. Sin embargo, resulta que toda noción matemática es resultado de amplios y complejos procesos de construcción y abstracción.



Capítulo IV

IV. DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Con base a lo explicado en capítulos anteriores, entendemos que el concepto de ángulo es importante para el estudio de diferentes temas geométricos. Sin embargo, este conocimiento por sí solo, tiene diferentes dificultades por el simple hecho de ser un concepto multifacético.

Por lo anterior, el alumno ha presentado dificultades en el tratamiento y aplicación del mismo. Sabemos, por diversas investigaciones que esas dificultades se deben al hecho de que el ángulo no se mide de la misma manera que una línea, o una superficie. Por otro lado, los programas de estudio de primaria, trabajan el concepto de una manera muy simple sin permitirle al alumno que, antes de medirlo, descubra sus cualidades y lo identifique dentro de diversos contextos familiares para él.

El estudio de Matos nos permite corroborar lo amplio que es este concepto, desde el momento en que Aristóteles lo identifica como una cualidad, más que una cantidad o una relación.

En los programas de estudio del 93, se hace mayor énfasis en el ángulo como cantidad y como relación, al intentar definirlo. No se discute, y mucho menos se trabaja el estudio o la manipulación del concepto para que el alumno identifique sus cualidades. Ahora, con la reforma del 2006, ni siquiera se busca medirlo. El programa considera que el alumno de primero de secundaria ya ha trabajado el concepto y, por lo tanto, es capaz de aplicarlo en otros temas del curso.

Con todo lo anterior, podríamos decir que en el aula no se concilian las relaciones entre los polos didáctico, cognitivo y epistemológico.

Guy Brousseau (citado en Chavarría, 2006), explica en su Teoría de Situaciones didácticas, la importancia de las situaciones a-didácticas:

> *La situación A-Didáctica es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejen el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido (Chavarria, 2006).*

Y, por otro lado, Casas y Luengo[9] nos dicen con respecto al ángulo que:

> *Todas las definiciones de ángulo pueden agruparse en dos tipos: estáticas y dinámicas. Sin embargo, los conceptos básicos, como el ángulo, no tienen definición verbal precisa, sino que más bien forman una red cognitiva. Esta red está formada por elementos que los alumnos adquieren a partir de las definiciones, los ejemplos y la práctica.*
>
> *Educativamente, quizá la cuestión importante, no sea encontrar una que sea adecuada, sino, como en otros muchos casos, tratar de que sea el alumno el que construya su propio concepto de ángulo. Y que lo construya a partir de situaciones angulares que se le presentan y va manipulando a lo largo de su escolaridad.*

Mitchelmore y White (2000), comentan en su investigación el hecho de que los alumnos que trabajaron en los diferentes experimentos, nunca habían trabajado el concepto de ángulo manejando sus cualidades y ubicándolo en contextos familiares para ellos.

En los libros de texto y programas de estudio de nuestro país, podemos observar también el manejo del ángulo más como una cantidad, luego como una relación y muy poco como una cualidad.

De cada investigación se lograron rescatar algunos elementos importantes del concepto de ángulo. Una teoría que articula estos elementos, para una explicación sistémica y por lo tanto más amplia, es la Teoría de Situaciones Didácticas. En consecuencia, para la elaboración de una primera secuencia de propósito didáctico utilizamos a la Ingeniería Didáctica como metodología de diseño.

[9] Casas, L. y Luengo, R. (2001). El ángulo. Estudio de un concepto geométrico mediante redes asociativas pathfinder.

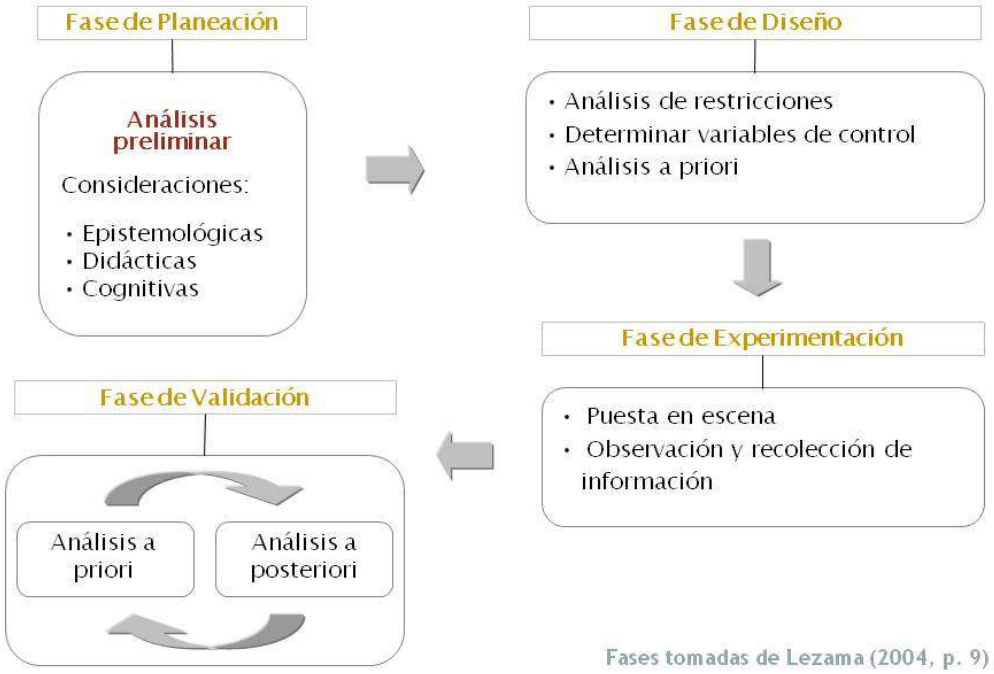


Fig. 38

Sabemos, que la Ingeniería Didáctica, contempla diferentes fases: 1. Fase de planeación, haciendo un análisis preliminar considerando las tres componentes. 2. Fase de diseño, estableciendo un análisis a priori determinando lo que pretendemos alcanzar; 3. Fase de experimentación donde es la puesta en escena y se recopila información y 4. La validación, donde confrontamos el análisis a priori con el posteriori.

1. FASE DE PLANEACIÓN

Un aspecto importante de la fase de planeación, es el concerniente a tres dimensiones indispensables a considerar para el diseño de la situación didáctica y que son: la dimensión epistemológica (asociada a las características del saber en juego), la dimensión cognitiva (asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza) y finalmente la dimensión didáctica (asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza). (*Lezama, 2003)*

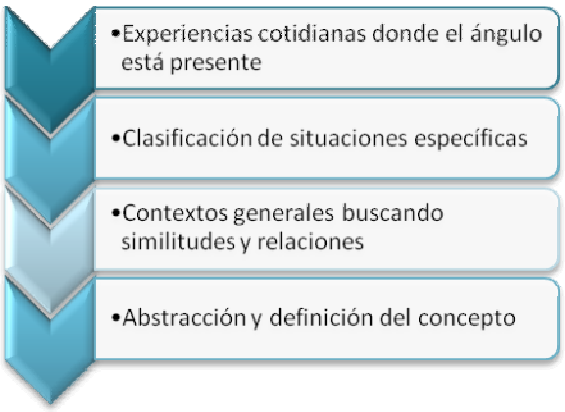
En el caso de esta investigación, consideramos elementos de la investigación de Matos (epistemológica), el Modelo cognitivo de Mitchelmore y White (cognitiva) y los momentos de una actividad didáctica (c. didáctica):

Componente epistemológica: La naturaleza del concepto:

Para la primera componente, la epistemológica, consideraremos aspectos importantes que encontramos en la investigación histórica de Matos. Ahí encontramos que el ángulo primero se usó, se discutió su naturaleza y se definió.

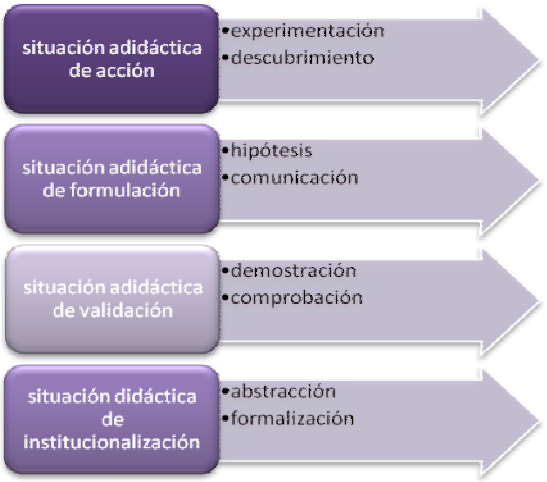
También encontramos aspectos importantes que nos hablan de que el ángulo, por su forma, es cualitativo; por su medida es cuantitativo y cuando se define, hablamos de una relación. Estos, son aspectos importantes a considerar para el diseño de la secuencia didáctica que proponemos.

Componente cognitiva: Modelo Cognitivo de Mitchelmore y White:



Para la componente cognitiva, consideraremos la Teoría Cognitiva de Mitchelmore y White, donde nos hablan de que el alumno construye el conocimiento a partir de abstracciones sucesivas, iniciando con experiencias cotidianas donde el ángulo está presente, clasificando en situaciones específicas, ubica el concepto en contextos específicos estableciendo relaciones y similitudes, hasta llegar a la abstracción final con la definición del concepto.

Componente didáctica: Momentos de la actividad didáctica:



Finalmente tenemos la componente didáctica, que nos permitirá contemplar las diferentes fases que debe tener una situación adidáctica considerando que estamos trabajando dentro del marco de la Teoría de Situaciones didácticas y que por lo tanto, debemos diseñar buscando que el alumno realice acciones, formulaciones, validaciones hasta llegar a la Institucionalización, esta última, con la ayuda del docente.

Contemplando que el diseño se realizó para una situación escolar real, consideramos importante establecer una articulación sistémica con las tres componentes. Esto nos obligó a hacer algunas adaptaciones importantes, realizando algunas modificaciones especialmente en la Teoría Cognitiva de Mitchelmore y White:

EL MODELO COGNITIVO DE MITCHELMORE Y WHITE, EN UN ACERCAMIENTO SISTÉMICO.

Para el diseño de la Secuencia Didáctica, se consideraron los diferentes momentos del Modelo Cognitivo de Mitchelmore y White pero hubo que hacer algunas adaptaciones al considerar la naturaleza epistemológica de la noción de ángulo y el escenario escolar donde se llevará a cabo la experiencia didáctica.

Desde las primeras experiencias docentes en la clase de Dibujo Técnico, se identificaron algunas de las dificultades que tenía el alumno para el manejo del concepto de ángulo y de las herramientas para construirlo o medirlo. Por lo tanto, retomaremos, como ***experiencia cotidiana***, el ambiente escolar-geométrico-dibujo del alumno, el uso de las escuadras y el transportador, de nociones geométricas elementales, o nociones como porción y proporción.

EXPERIENCIA COTIDIANAS DONDE EL ÁNGULO ESTÁ PRESENTE:

Mientras que Mitchelmore y White trabajaron el primer momento con las situaciones de *giros del cuerpo, rebotes como los de un grillo, tijeras, vueltas presentes en los diferentes caminos, pendientes en colinas y esquinas como las de los mosaicos;* nosotros tomamos como experiencia cotidiana el escenario de la escuela. En la secuencia diseñada, se consideraron objetos escolares en los cuales el ángulo está presente y que el alumno trabaja *cotidianamente,* como es el cuadrado, el triángulo equilátero, el triángulo isósceles rectángulo (mitad del cuadrado) y el triángulo escaleno rectángulo (mitad del triángulo equilátero).

También trabajaron el círculo junto con todas las figuras nombradas con anterioridad.

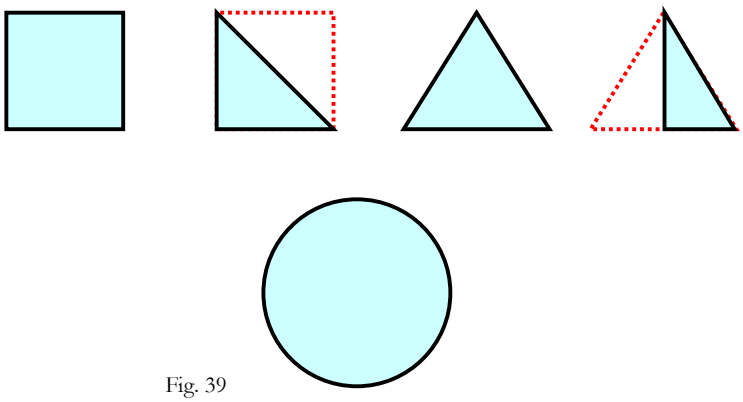


Fig. 39

La fase final de la secuencia busca darle utilidad y sentido a las escuadras del juego geométrico que el alumno usa, la mayoría de las veces indiferentemente, desde el tercer año de primaria. Estas herramientas, las escuadras de 30º y 45º, comúnmente se trabajan en la clase de Dibujo Técnico y en la de Matemáticas, y en ambas el uso del ángulo está presente.

El transportador, es otro instrumento utilizado comúnmente por el alumno y del cual difícilmente comprende su aplicación y utilización para el manejo de diferentes trazos en las materias antes mencionadas.

Por último se trabaja con el reloj; un objeto que el alumno utiliza cotidianamente y donde difícilmente encuentra en él la relación existente con el ángulo.

CLASIFICACIÓN DE SITUACIONES ESPECÍFICAS:

Esta etapa del modelo de Mitchelmore y White consiste en clasificar las experiencias cotidianas en lo que se denomina *contextos*. Algunos de los contextos que trabajan son: giros, rebotes, bisagras, vueltas, pendientes, esquinas planas.

En nuestro diseño se planearon los contextos por figuras geométricas. Esto es, la clasificación que se le pide al estudiante será una vez que haya trabajado con cada figura (cuadrado, triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno) para llegar a la siguiente tabla donde relaciona la figura trabajada, con la fracción de giro obtenida en cada caso:

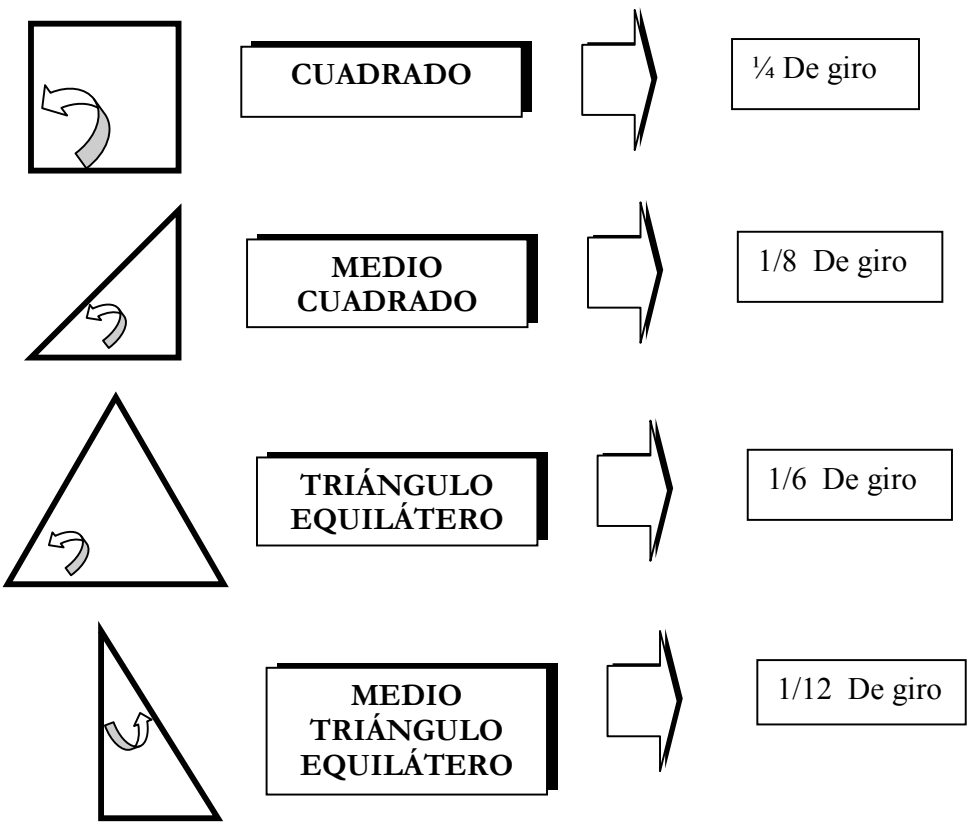
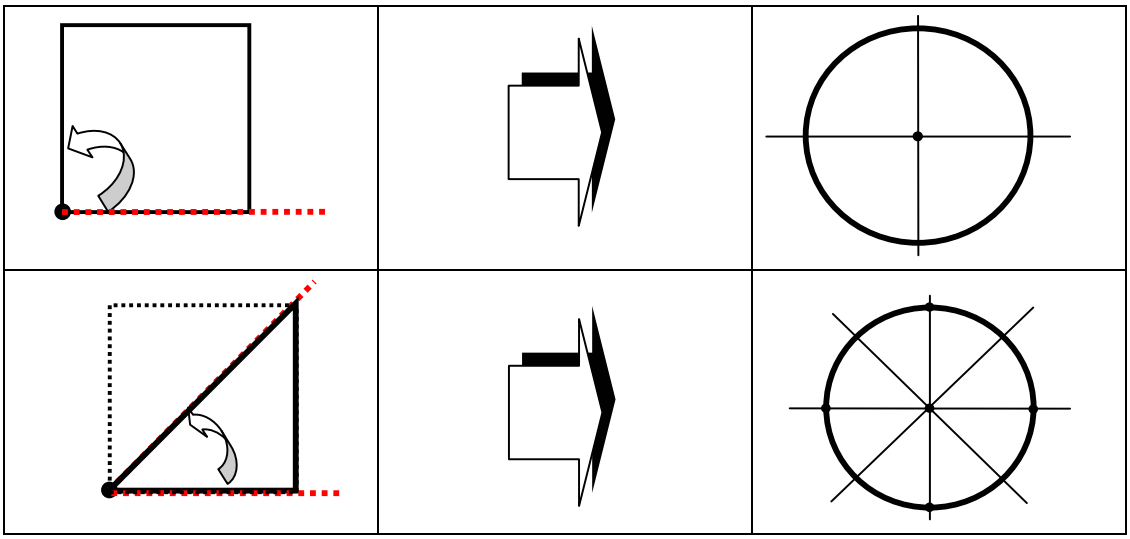
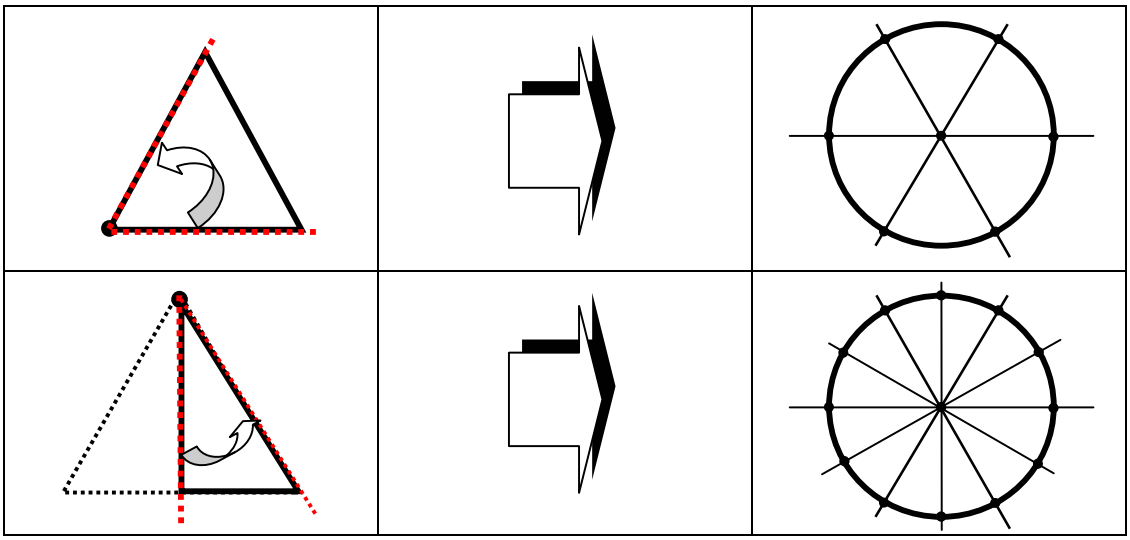


Fig. 40

Y posteriormente, esa figura con las divisiones correspondientes obtenidas en el círculo al girarlo:



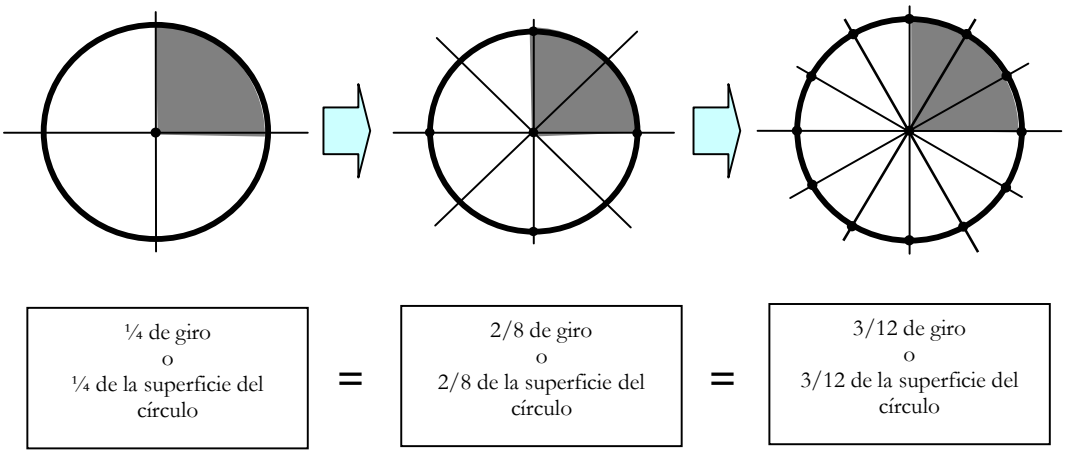


CONTEXTOS GENERALES BUSCANDO SIMILITUDES Y RELACIONES:

En esta etapa de la Teoría cognitiva de Mitchelmore y White, el alumno debe identificar similitudes entre los diferentes contextos como principio de la construcción elemental del concepto:

	CONTEXTO	EJEMPLO
Ninguna similitud	Giros	Giros del cuerpo
	Rebotes	Como los de un grillo
Algunas similitudes	Bisagras	Tijeras
	Vueltas	Como en los caminos
Muy similares	Pendientes	Colinas
	Esquinas planas	Mosaicos

En nuestro diseño, el alumno tendrá que encontrar relaciones entre diferentes partes de giro, relacionadas con las diferentes partes del círculo:



Y si en cada doceavo tenemos 30/360 partes del círculo, entonces en ¼ de giro, o en ¼ de la superficie del círculo tenemos 90/360 partes.

Fig. 41

ABSTRACCIÓN Y DEFINICIÓN DEL CONCEPTO

En la Teoría de Mitchelmore y White, la etapa de abstracción del concepto de ángulo pretende que con encontrar similitudes entre los diferentes contextos se de una construcción inicial del concepto o lo que denominan *construcción elemental del concepto matemático de ángulo*. Sin embargo, dejan claro que este proceso requiere de abstracciones paulatinas.

En nuestro diseño, se busca que el alumno visualice 1/360 parte del círculo o giro y los relacione con el reloj o el transportador. Sin embargo, asociar esta construcción al concepto de grado es labor del profesor, es decir, es la fase de *institucionalización del saber*.

Una vez que el alumno, con la ayuda del profesor, asocie esta construcción al concepto de grado, se finalizará la secuencia enunciando esos giros o partes, en términos de "grado", con características cualitativas y cuantitativas específicas.

La secuencia didáctica diseñada, está conformada por diferentes fases en términos de *acción*, cuando los alumnos experimentan con el material trabajado, girando, sombreando, contando los diferentes giros, probando los diferentes círculos, etc. Para descubrir partes y fracciones con cada una de las figuras trabajadas; *formulación,* cuando, a través de la experiencia, los alumnos elaboran hipótesis o predicciones de lo que puede suceder en diferentes situaciones y, para ello, comunican e intercambian ideas con sus compañeros y

con el docente; *validación,* cuando los alumnos demuestran o comprueban sus hipótesis para validarlas y, dependiendo de lo que obtenga, regresará a la parte de acción para replantear sus ideas o reforzarlas en el camino a la abstracción.

Estas tres fases, estarán presentes durante toda la secuencia. No necesariamente las encontraremos ordenadas, pues los alumnos se moverán en ellas continuamente. Cuando se realiza una validación, los alumnos recurrirán nuevamente a ella, pero ahora como una acción.

Estas tres fases (acción, validación y formulación) permitirán que el alumno trabaje las formas y las medidas (naturaleza del saber), identificando cualidades del concepto y cuantificándolo primero por fracciones o porciones, hasta llegar al grado.

El desarrollo de la secuencia durante estas tres fases y con el trabajo de las formas y medidas, permitirá que el alumno realice paulatinamente abstracciones sucesivas.

2. FASE DE DISEÑO

El propósito del análisis a priori es determinar si las restricciones consideradas sobre el sistema didáctico y la elección de las variables elegidas, permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y los significados construidos. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes, (*Lezama, 2003*).

Dentro de las restricciones a considerar, se tomó en cuenta el hecho de que la secuencia didáctica se trabajaría en una situación real, con un grupo de 1º de secundaria, de una escuela particular, con 34 estudiantes de aproximadamente 13 años.

Considerando que la actividad se llevará a cabo en una situación escolar real, las hipótesis formuladas sobre aquello que harán los estudiantes, no podrán ser tan minuciosas y detalladas, por la extensión de la actividad y las características particulares de la misma.

Algunas de las variables de control a considerar, es el aprovechar diferentes conceptos que el alumno trabaja ya dentro de la currícula como son las figuras geométricas básicas (cuadrado, círculo, triángulo equilátero, isósceles y escaleno), fracciones y porciones (partes de un entero).

La Situación Didáctica, comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento. De lo anterior se deduce que la situación didáctica engloba las situaciones a-didácticas.

Una secuencia adidáctica constaría de diferentes fases:

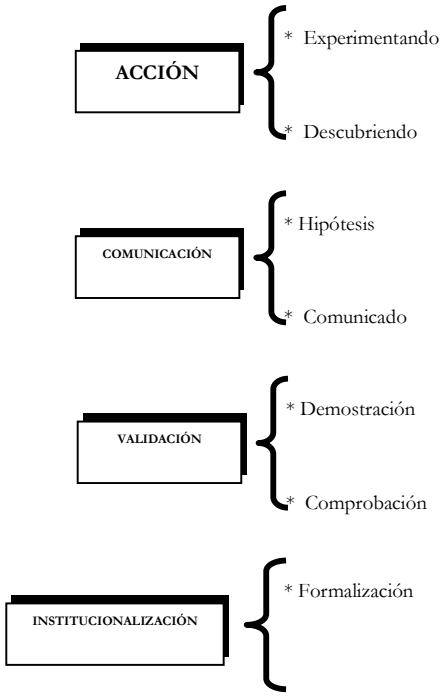


Fig. 42

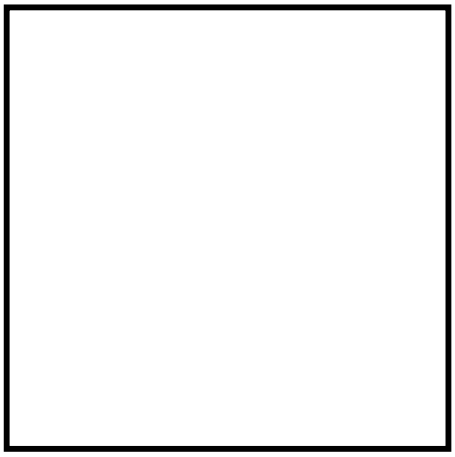
En la primera fase, "**ACCIÓN**", el alumno se enfrenta a una situación especial donde requiere experimentar y descubrir el conocimiento. En este caso, el estudiante trabajará diferentes actividades que le permitan experimentar con ángulos. Incluso, consideraremos el hecho de que el alumno **use** el concepto sin que necesariamente se le mencione la palabra "ángulo".

Iniciaremos la secuencia trabajando diferentes figuras geométricas, básicamente el cuadrado y el triángulo equilátero. Ambas figuras manejan ángulos de 90°, 45°, 30° y 60°. Por supuesto, al alumno no se le mencionará lo anterior. Sólo se le pedirá que trabaje con ellos descubriendo sus características.

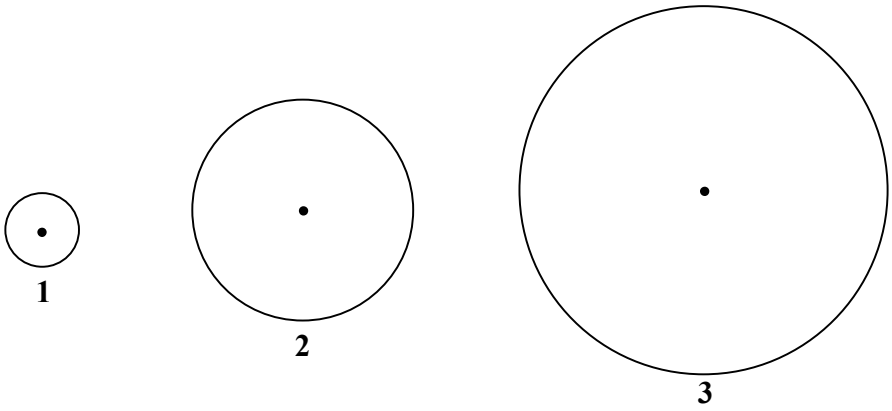
En esta primera parte de la secuencia, se explorará la parte estática y dinámica del ángulo relacionándolo con "cuartas partes de círculo" (90°), "octavas partes de círculo" (45°), "sextas partes de círculo" (60°), " Doceavas partes de círculo" (30°).

EL CUADRADO

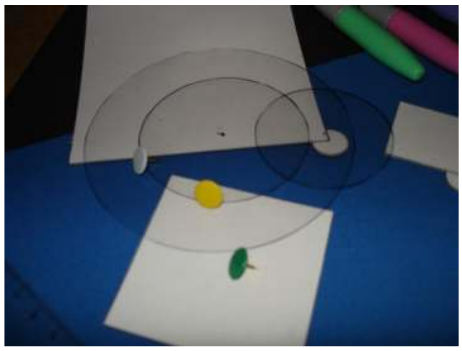
El alumno recibirá un cuadrado como el siguiente:

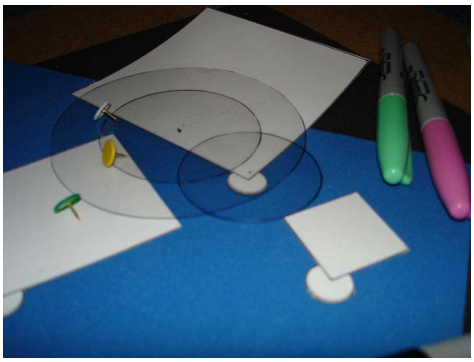


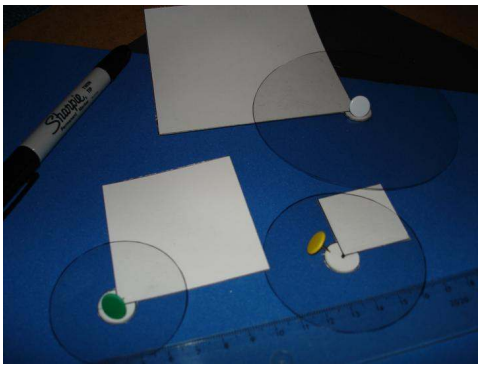
Y tres micas circulares de diferentes tamaños:



Plumones indelebles para sombrear en las micas y chinches.



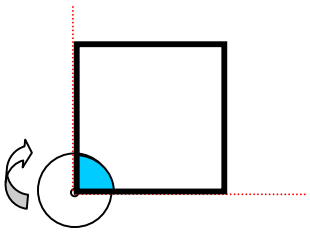




INSTRUCCIONES:

Coloca el centro del círculo 1 sobre uno de los vértices del cuadrado (utiliza una chinche para hacerlo). Con una regla traza una línea que salga del centro del círculo y coincida con uno de los lados del cuadrado. Realiza lo mismo sobre el otro lado del cuadrado que comparte el mismo vértice.

Sombrea en el círculo 1, el espacio que se encima en el cuadrado.

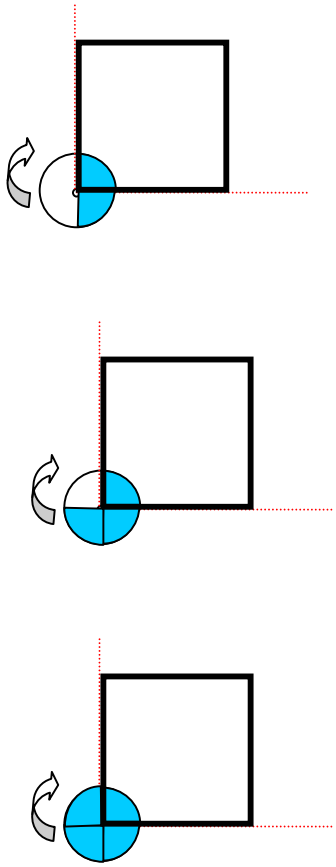


¿Qué parte del círculo es el que sombreaste?, ¿Cómo puedes comprobarlo?

Si no surge la idea de girar el cuadrado, entonces se sugerirá lo siguiente:

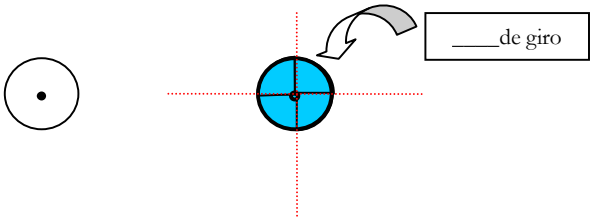
Para determinarlo, gira el círculo sobre el mismo vértice para ver cuántas partes iguales sombrearías en él.

Esperamos que el alumno haga lo siguiente:



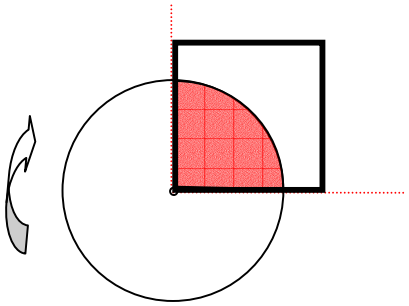
Entonces le pedimos:

Observa el círculo 1 y explica ¿qué parte del círculo sombreaste en cada giro?



Escribe sobre el rectángulo, lo que representa cada parte sombreada en azul:

Ahora, usa el mismo cuadrado y el círculo 2, para hacer la misma actividad: traza las líneas que salen desde el centro de la circunferencia y coinciden con los lados del cuadrado:

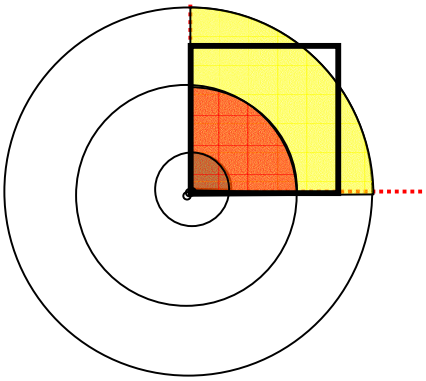


¿Qué parte del círculo sombreaste?, ¿cómo lo compruebas?

¿Qué parte del círculo 2 está encima del cuadrado?
¿Qué parte del círculo 1 está encima del cuadrado?
¿Son iguales las áreas sombreadas?

Ahora, toma los círculos y el cuadrado, de nuevo, haz coincidir los centros con el vértice, traza las líneas que salen desde el centro de la circunferencia y coinciden con los lados del cuadrado:

Realiza lo mismo con el círculo 3, en el mismo cuadrado:

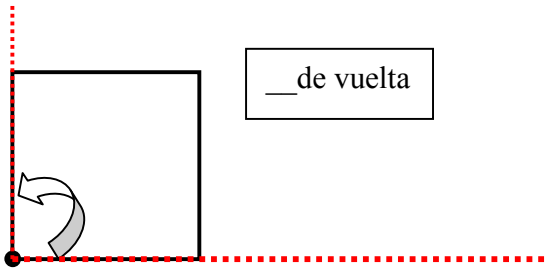


Sombrea la zona que queda delimitada en cada círculo y responde:

¿Qué parte quedó delimitada del círculo 1?
¿Qué parte quedó delimitada del círculo 2?
¿Qué parte quedó delimitada del círculo 3?
¿Son iguales las áreas delimitadas?

¿Cambiaría la parte sombreada si usas un cuadrado más grande o más chico?

Vamos a denominar este giro como ____ de vuelta y nos vamos a guiar por la esquina del cuadrado:



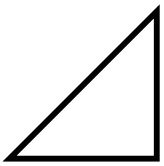
MEDIO CUADRADO

Trazar una diagonal al cuadrado 1 y recortarlo:

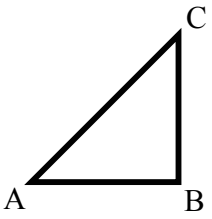
Se asume que el alumno ya debe saber que la diagonal divide el ángulo recto en dos iguales. Sin embargo, no hemos hablado de **ángulo** en ningún momento y se pretende que al continuar con la secuencia el alumno encuentre que el giro ahora será de 1/8, es decir, la mitad de ¼.

Por supuesto, que el alumno no tendrá el dibujo anterior. De tal manera que no se le sugiera la respuesta.

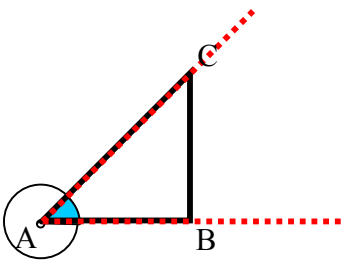
¿Qué figura tienes ahora?



Nombra los vértices con las letras A, B y C (esta instrucción se dará de forma oral, para evitar que el alumno se adelante)



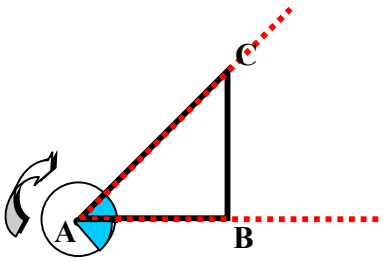
Coloca la mica del círculo 1 de tal manera que el centro coincida con el vértice A del triángulo anterior:

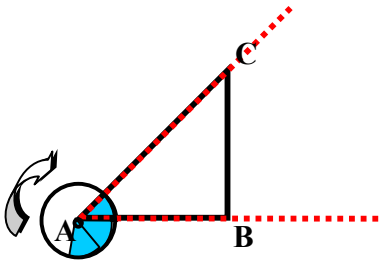


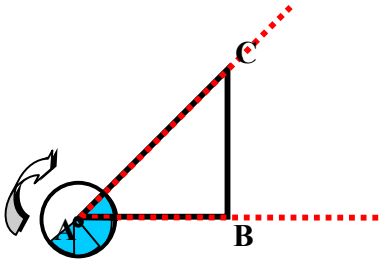
Sombrea la sección del círculo que está encima del triángulo, ¿qué parte del círculo representa el área sombreada?

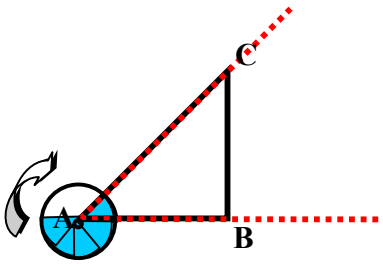
Gira el círculo sobre el vértice A para encontrar cuántos giros iguales puedes hacer:

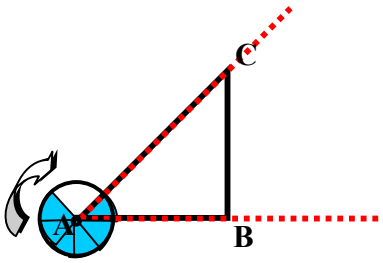
Se pretende que el alumno haga lo siguiente:

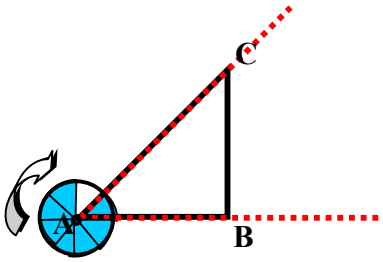


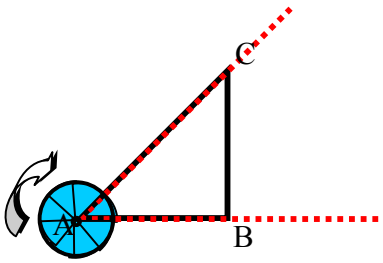




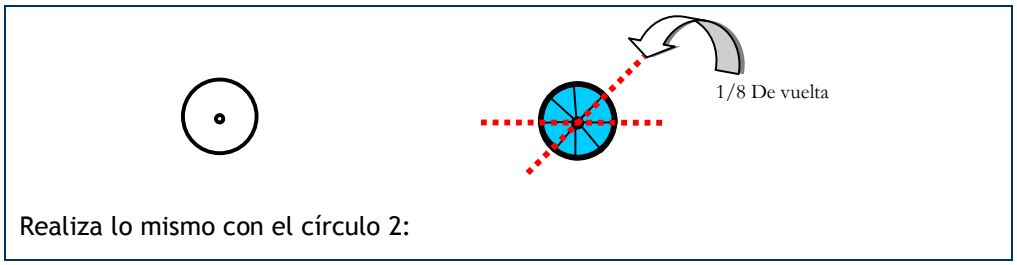




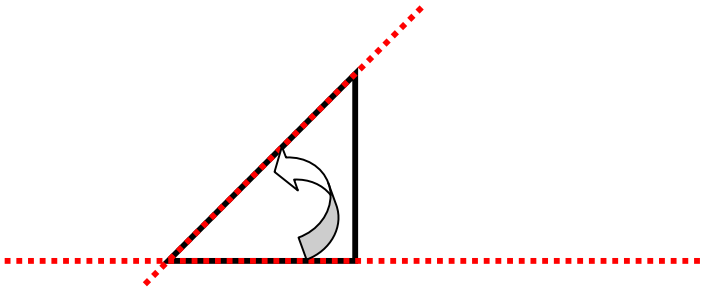




¿Qué parte del círculo sombreaste en cada giro?



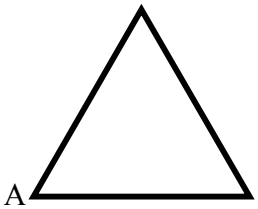
Aquí la idea es que el alumno explore con los tres círculos y el medio cuadrado (triángulo rectángulo), para encontrar en todos los casos que, sin importar el tamaño de los círculos o de los lados del cuadrado, siempre el giro corresponderá a la octava parte del círculo. Es decir, un octavo de giro en todos los casos.



TRIÁNGULO EQUILÁTERO.

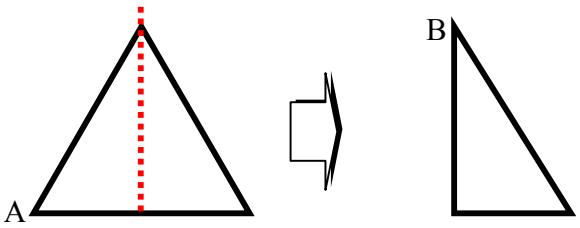
Posteriormente se trabajará con un triángulo equilátero:

Este triángulo equilátero se le entregará al alumno.



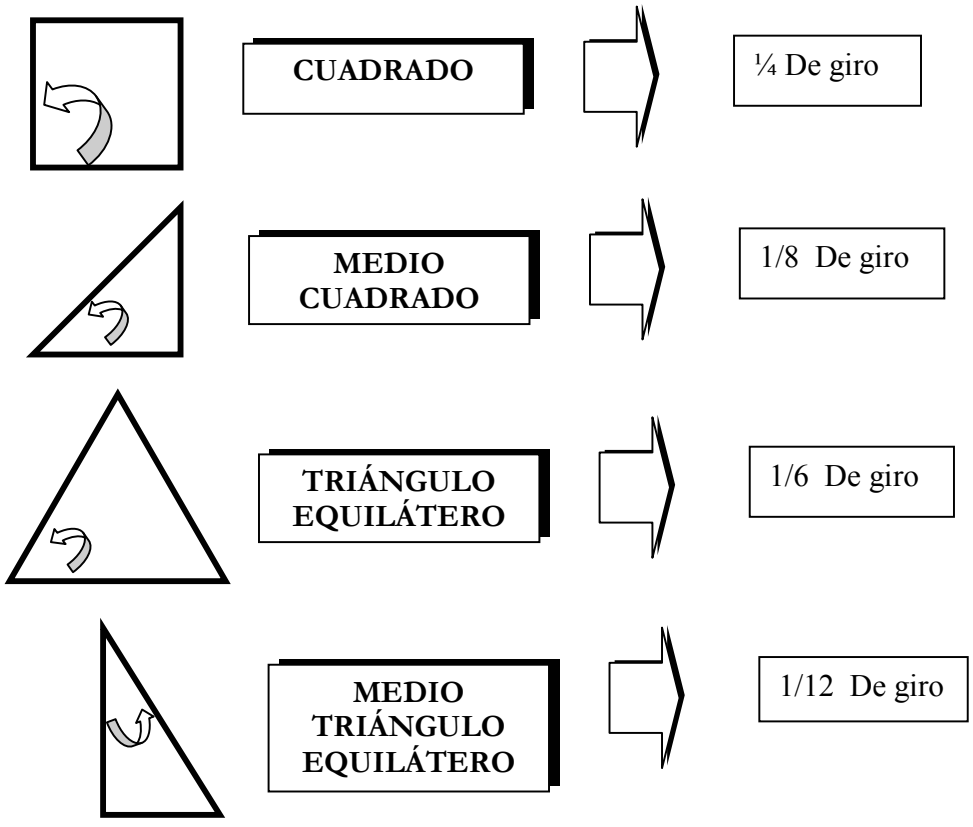
De tal manera que el alumno descubra que el giro sobre el vértice "A" es de 1/6 de giro. La sexta parte de un círculo.

Por último trabajará con la mitad de un equilátero:



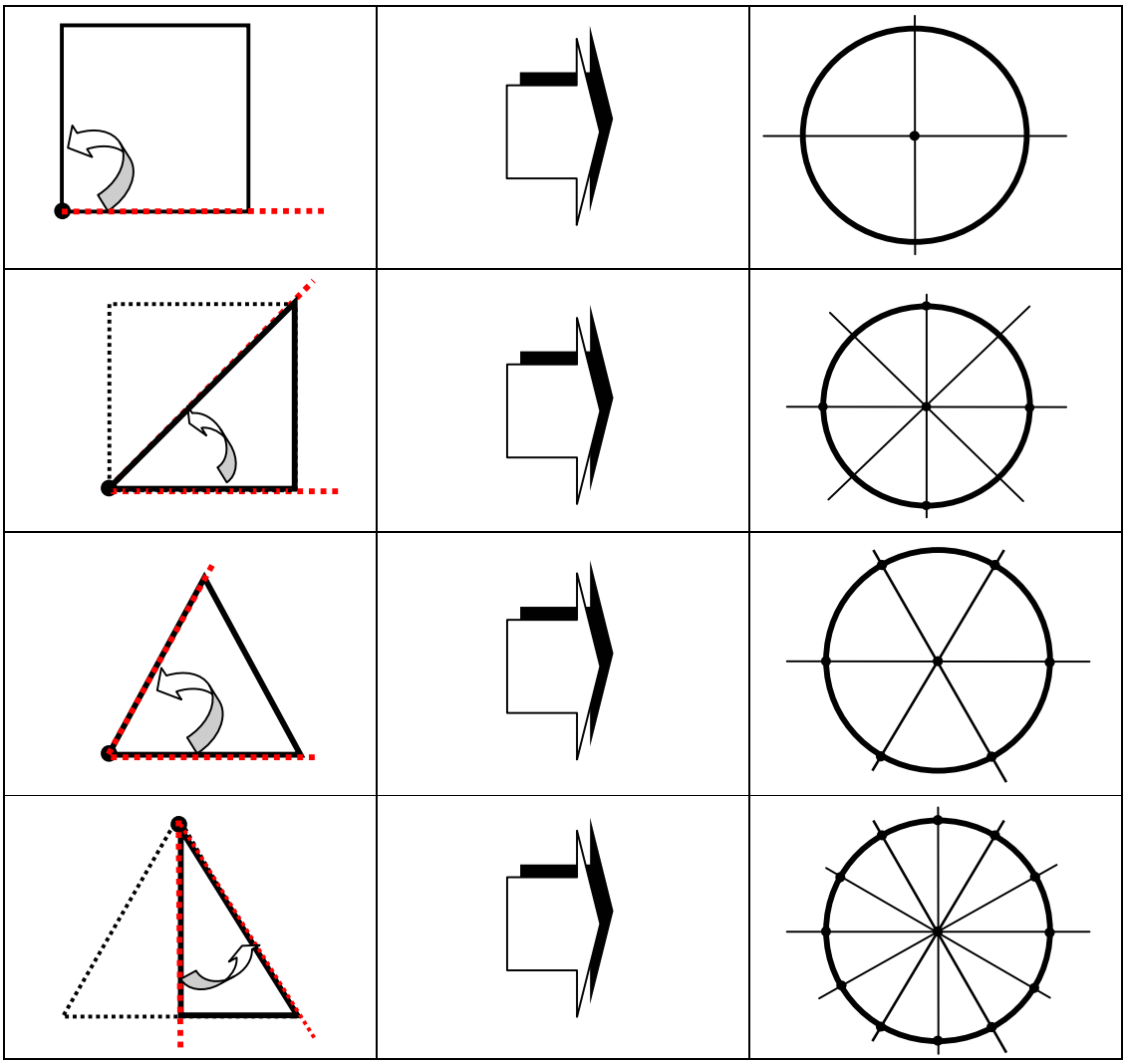
Pero ahora sobre el vértice "B", para descubrir que cada giro equivale a 1/12. Es decir, un giro de la doceava parte de un círculo.

Con esta secuencia, se pretende que el alumno descubra en estas cuatro figuras:

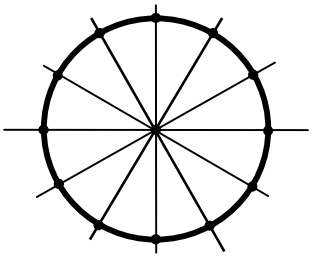


Para llegar a esta conclusión y construir el concepto de ángulo, será necesario que el alumno establezca una relación entre la fracción del círculo sombreada de acuerdo a la figura utilizada y el ángulo generado. Para ello, la secuencia continuará con la división del círculo

en porciones cada vez más pequeñas hasta llegar a la construcción de un transportador y la relación que existe entre estas divisiones en el círculo con ese instrumento escolar y el reloj. Será importante que el alumno inicie con la relación existente entre cada figura utilizada y las divisiones generadas en el círculo sin importar el tamaño de éste:

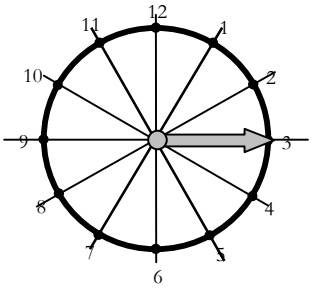


Posteriormente se le pedirá utilizar la división de 12 partes, intentando que el alumno realice giros y relacione estos movimientos con los generados por las manecillas de un reloj (objeto comúnmente utilizado por ellos y del cuál no relacionan frecuentemente la aplicación que el concepto de ángulo tiene en él).



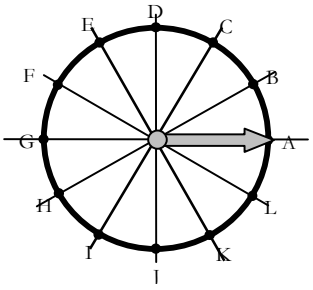
En esta parte de la secuencia, el alumno utilizará una flecha para generar diferentes giros según lo solicitado por el docente. Por ejemplo, se le pedirá al estudiante, nombrar cada punto ubicado en la circunferencia con los números del 1 al 12 y luego realizar algunos giros:

Iniciando en el número 3, gira hasta llegar al número 5, ¿Qué fracción de giro realizaste?



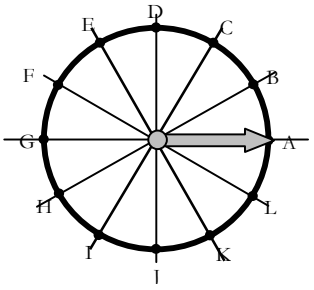
Como no se especifica el sentido del giro, aquí provocaremos un conflicto, de tal manera que algunos girarán en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y otros lo harán en sentido contrario. Por lo tanto, las respuestas pueden ser diferentes:
Algunos determinarán que el giro equivale a 2/12 mientras que otros dirán que el giro equivale a 10/12.
También pueden establecer equivalencias, es decir, 2/12 de giro también corresponde a un sexto de giro y 10/12 de giro también equivale a 5/6 de giro.

Buscaremos también que el alumno llegue a la construcción del transportador. Para ello, utilizaremos el mismo círculo, con las mismas divisiones pero ahora, cada vértice será nombrado con una letra:



Para unificar respuestas, iniciaremos todos en la misma letra y el giro será también en el mismo sentido:

Gira la flecha desde A hasta G. ¿A qué fracción de vuelta equivale si el giro lo realizas en este sentido ↻ ?_____



El punto de inicio es el mismo y el giro se realizará para todos en el mismo sentido, por lo tanto las respuestas deben ser las mismas, aunque puede haber equivalencias:

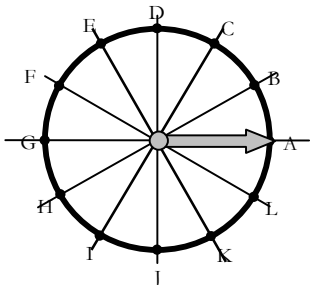
1. 6/12 de vuelta
2. 3/6 de vuelta
3. 2/4 de vuelta
4. ½ de vuelta
5. 4/8 de vuelta

Continuaremos dividiendo el círculo en partes cada vez más pequeñas, sin marcar esas divisiones, de tal manera que el alumno vaya abstrayendo poco a poco sin necesidad del material concreto.

Imagina que seguimos dividiendo en partes más pequeñas.

¿Qué pasaría si cada doceavo ahora lo divides en treinta partes iguales?

¿Cuántas partes habría en 2/12? _____



Aquí se pretende que siga dividiendo hasta concluir en que el círculo estaría dividido en 360 partes:

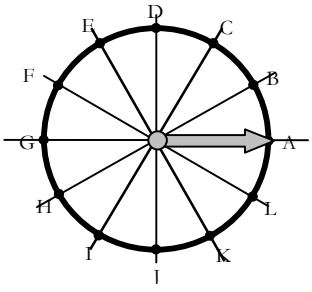
¿Cuántas partes habría en una vuelta concreta?_____

Ahora, el alumno realizará diferentes giros imaginando que cada doceavo está dividido en treinta partes:

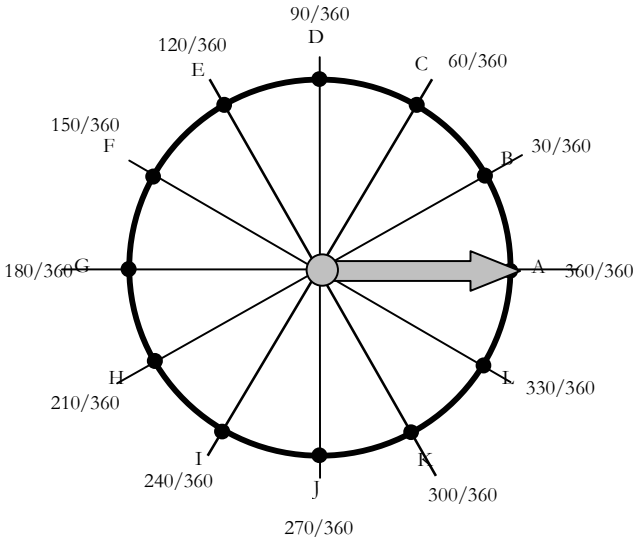
Inicia tus giros en A y en este sentido ↺

Gira la flecha desde A hasta B. Ese giro equivale a_____de vuelta

Recuerda que cada doceavo está dividido en treinta partes iguales:



Con esto se pretende que el alumno anote en cada letra, las siguientes divisiones:

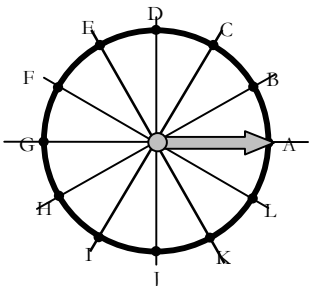


Lo mismo se realizará ahora pero en sentido contrario:

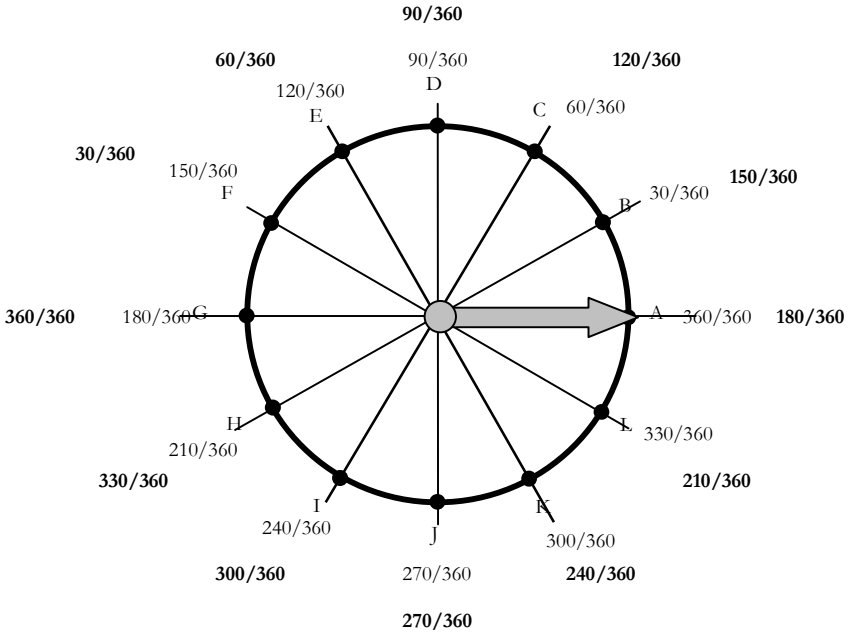
Inicia tus giros en G y en este sentido

Gira la flecha desde G hasta F. Ese giro equivale a_____de vuelta

Recuerda que cada doceavo está dividido en treinta partes iguales:



Para llegar a la siguiente construcción:



¿A qué te recuerda esta figura?_____

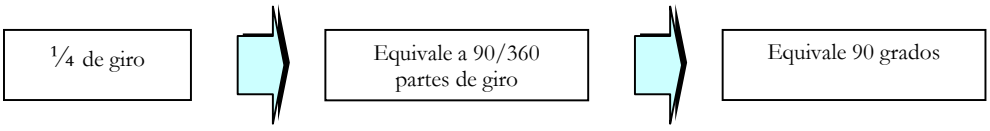
Se pretende que el alumno identifique en esta construcción al "Transportador"

Llamaremos a cada una de estas partes (1/360) **"grado"**

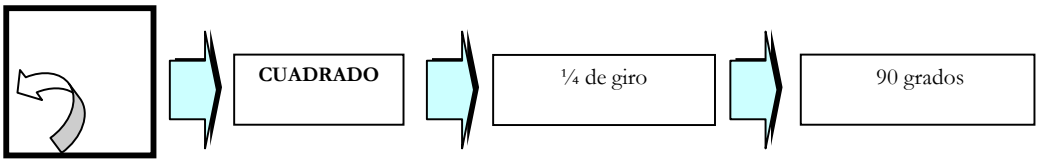
Considerando lo anterior contesta:

FRACCIÓN DE GIRO	**Si cada doceavo de vuelta está dividido en 30 partes iguales:**	**GRADOS**
1/4		
1/8		
1/6		
1/12		

En esta parte se pretende que el alumno relacione cada fracción de giro generada con las figuras iniciales (cuadrado y triángulo equilátero) con la equivalencia en divisiones de 1/360 y finalmente en grados:



Con esto se pretende que el alumno vaya relacionando las figuras iniciales con sus respectivos ángulos, abstrayendo poco a poco:



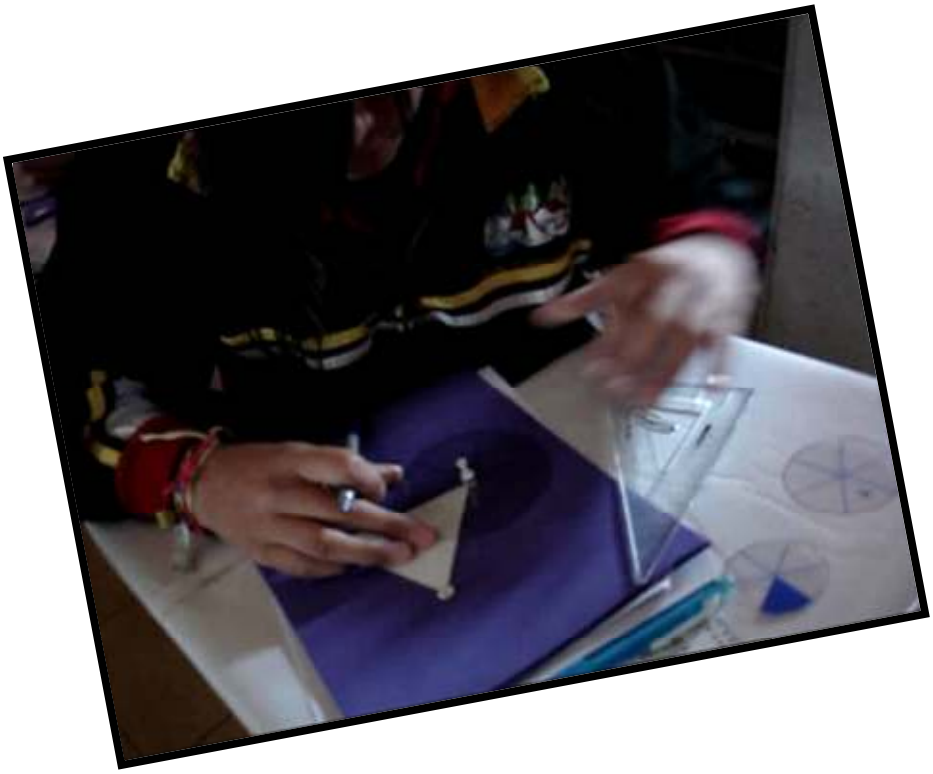
3. FASE DE EXPERIMENTACIÓN.

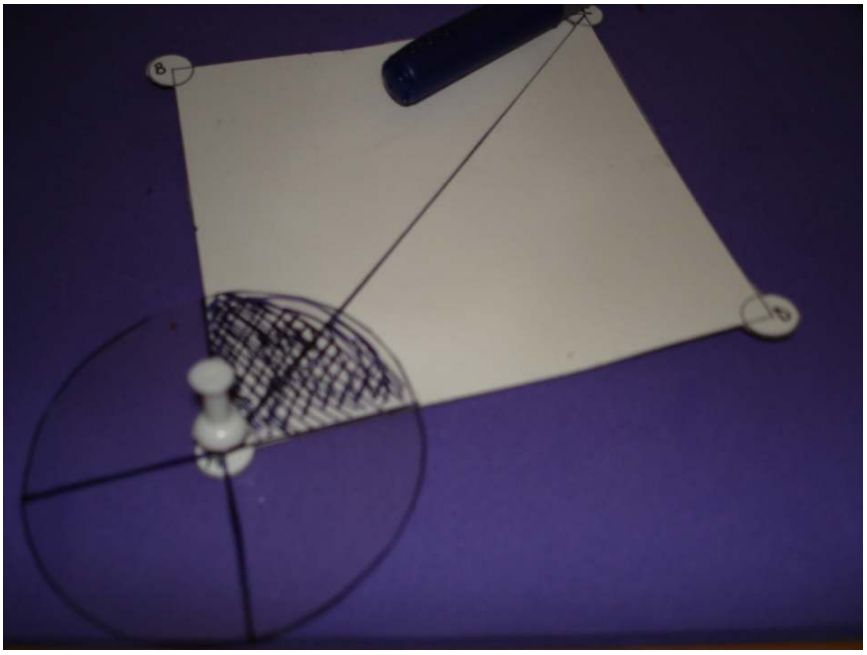
La secuencia didáctica se aplicó a un grupo de 34 alumnos de 1º de Secundaria, que fluctúan alrededor de los 13 años de edad.

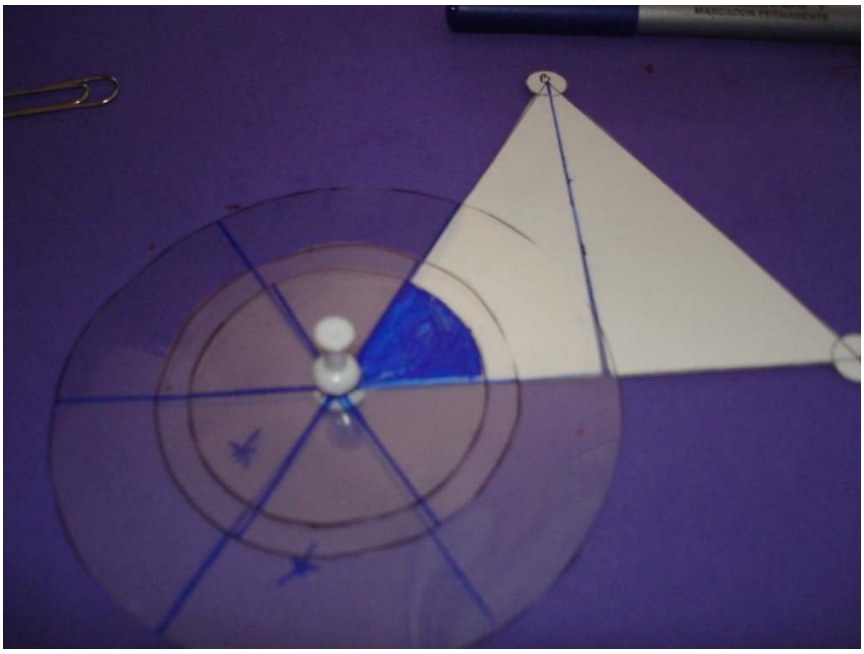
Las seis partes de la secuencia se aplicaron en 4 sesiones de 45 minutos cada una. En todas ellas, se buscó que el alumno iniciara, sin saberlo, con el "uso" del concepto. No se definió el concepto, ni se comunicó el propósito del diseño, es decir, el alumno inició en las dos primeras sesiones sin conocer el tema que se estaba tratando y poco a poco lo fue descubriendo.

Nuestro estudio no incluyó entrevistas clínicas, pues nos interesamos en el funcionamiento de la secuencia en un ambiente escolarizado: un grupo completo, en horarios de clase, dentro del calendario escolar y en presencia de la profesora de matemáticas de dicho grupo.

La profesora del grupo es Maritza Finkenthal P., compañera de maestría, quien no conocía la secuencia diseñada, pero que conocía el tema estudiado en esta investigación y quien es además sensible, entiende las teorías, ideas e intenciones del diseño.







Cada alumno recibió la secuencia impresa aunque, por las condiciones escolares reales, el trabajo de la misma se desarrolló en grupo. Lo anterior implica, que los resultados de cada alumno, pueden verse influenciados por las respuestas de sus compañeros. Cabe mencionar, que en una situación escolar real, es factible que esto se presente.

El registro de la aplicación, no puede basarse en las respuestas particulares que cada estudiante anotó en la secuencia. Consideramos que es más rico analizar la situación real presentada con todo el grupo. Por tal motivo, el video fue el recurso que se utilizó para registrar todos los comentarios, preguntas, actividades y conflictos presentados.

Fueron 6 los videos realizados, cada uno con una duración aproximada de 20 minutos.

4. FASE DE VALIDACIÓN.

La validación de la ingeniería se lleva a cabo al confrontar las hipótesis elaboradas en el análisis a priori y el análisis de resultados de la fase experimental (denominada análisis a posteriori), (*Lezama, 2003).*

Analizaremos cada una de las 4 sesiones realizadas, identificando los momentos de *acción, formulación (comunicación) y validación,* así como la naturaleza del concepto, es decir, si se trabaja con la forma o la medida de la noción de ángulo.

PRIMERA SESIÓN:

En esta primera sesión, los alumnos trabajaron las dos primeras partes de la secuencia diseñada:

- Cuadrado
- Triángulo isósceles (obtenido de la mitad del cuadrado)

Cada alumno recibió el material necesario:

- Base de Fomi
- Círculos de diferentes tamaños en mica
- Cuadrado
- Chinches
- Plumón indeleble

La secuencia inició sin que el alumno tuviera idea del tema a manejar, pero la secuencia le hizo pensar que estaba trabajando con *fracciones*. Para él fue un descubrimiento paulatino del concepto a tratar, ***usó*** el ángulo sin saberlo.

Con base en la Teoría de Situaciones Didácticas, una "acción" es el momento en el que alumno se enfrenta a una situación especial donde requiere experimentar y descubrir el conocimiento. El alumno fue actuando y descubriendo con la guía de la secuencia y de la dirección del docente.

El primer conflicto presentado fue cuando se les pidió que "con la regla graduada, trazaran dos líneas que salieran del centro del círculo y coincidiendo con los lados del cuadrado que comparten el mismo vértice". En este momento es cuando se presenta la necesidad de intercambiar ideas. Basta con que un alumno lo descubra (comunicación de resultados), para que otros adopten la idea y la repitan. En ese momento, se regresa a la acción.

El alumno sombrea la parte del círculo que se encima en el cuadrado:

P: ¿Qué parte del círculo sombreaste?
R: ¼

La respuesta, fue la que se esperaba.

P: ¿Cómo podrías comprobarlo?

Aquí se presentaron diferentes respuestas (formulación):

- Dividiendo en cuartos

- Dividiendo en mitades y luego cada mitad en mitades.
- Girando el círculo.

La última respuesta sólo se le ocurrió a un alumno. En ese momento, todos validaron el comentario de su compañero girando el círculo sobre la chinche fijada. De esta manera comprobaron que efectivamente la parte sombreada representa ¼ del círculo.

En esta primera pregunta los alumnos efectuaron los momentos de acción, comunicación y validación, usando la noción de ángulo como giro, con base en sus cualidades (la parte sombreada) y cuantificándolo (por la porción que ocupa del círculo).

Por otro lado, con base a la Teoría Cognitiva, el alumno está haciendo uso de diferentes objetos y herramientas escolares donde el ángulo está presente. La parte concreta con la manipulación de diferentes materiales es total.

Se le solicita al alumno que coloque el círculo mediano y se le hace la siguiente pregunta:

P: ¿Qué parte del círculo sombreaste?
R: ¼

P: ¿Cómo puedes comprobarlo?
R: Girando

En este momento, lo que antes fue una validación, ahora se vuelve una acción. Ellos ya comprobaron que girando pueden encontrar las diferentes partes, ahora sólo hacen uso de ese descubrimiento, ya no lo verifican.

Al llegar a la pregunta ¿hubo alguna diferencia entre el círculo pequeño y el mediano?, el alumno contesta que *No*. En ambos casos obtuvieron la misma fracción del círculo.

Y cuando se le pregunta ¿Qué crees que va a suceder cuando uses el círculo más grande?, sólo responden: *lo mismo*.

En seguida se les pide que lo comprueben. Aquí, el alumno regresa nuevamente a la validación. Ellos ya saben que el giro permite comprobarlo (acción), pero ahora validarán si su repuesta (1/4) efectivamente se presenta con ese nuevo círculo.

La parte cualitativa del ángulo, se está trabajando en esta parte, al encontrar que no importa la medida del círculo, o del cuadrado, el giro siempre será el mismo. Es decir, la fracción

sombreada de éste también será representada por la misma fracción (ángulo dinámico y estático). Además, se continúa cuantificando al encontrar una fracción que lo mida.

P: ¿Son iguales las áreas delimitadas en los tres círculos?
R: No.
P: ¿Qué es lo que es igual?
R: la parte o fracción sombreada.

La Secuencia continúa pero ahora con la mitad del cuadrado, es decir con un triángulo isósceles rectángulo.

Los alumnos identifican la figura y algunas de sus características.

En el momento en que el docente hace las diferentes preguntas, el alumno responde con base en sus conocimientos, generando así la discusión y la **comunicación** entre los diferentes integrantes del grupo.

Nuevamente el alumno utiliza el círculo más pequeño para encontrar la fracción correspondiente en una de las esquinas divididas. Ahora ya es más rápido en sus movimientos, ya no requiere tanto de la ayuda o dirección del docente. Simplemente continua con la "acción" al colocar el círculo y girarlo para identificar las diferentes partes. Sin embargo, ellos antes suponen que encontrarán 1/8 parte. Esa es su nueva hipótesis. Pero el docente le pide verificarlo o **validarlo.**

P: ¿Qué crees que suceda con el círculo mediano?
R: Lo mismo, obtendremos 1/8 de giro o sombrearemos la octava parte del círculo.

Pero igual, tendrán que validarlo y demostrarlo al efectuar los diferentes giros. Un estudiante duda sobre la obtención de las 8 partes y aún cuando la mayoría del grupo lo asegura., él necesita comprobarlo a su ritmo así que tomó su material y efectuó las divisiones hasta comprobar que efectivamente fueron ocho.

Esto nos hace ver que al aplicar un diseño en un grupo completo y dentro de un escenario real, encontraremos alumnos que no podrán avanzar al mismo ritmo que el resto de sus compañeros. Encontraremos alumnos que necesiten más tiempo, que quizá requieran trabajar más con el material concreto, mientras que el resto del grupo esté haciendo abstracciones a partir de las experiencias previas.

Aquí resulta importante que el diseño le permita realizar acciones en forma individual, sin depender del avance de sus pares. Lo importante es darle su tiempo y permitirle descubrirlo y validarlo.

Con el tercer círculo, fueron muy pocos los alumnos que demostraron obtener también 8 partes iguales. En general concluyeron que no importa el tamaño del círculo o del triángulo trabajado, siempre encontrarán 1/8 de giro, o una octava parte del círculo sombreado.

En síntesis, en esta primera parte de la secuencia se usó el ángulo sin saberlo, hablando de giros, porciones o fracciones, desde ambas perspectivas, la estática y la dinámica. Se trabajó la parte cualitativa y cuantitativa del ángulo al encontrar que no importa qué tan grande o pequeño sea el círculo o la figura, siempre se obtendrá la misma fracción sombreada o la misma fracción de giro. Se trabajó la parte cuantitativa desde el momento en que se utiliza un número para representar ese giro (1/4 y 1/8). Se trabajaron los momentos de acción (en su mayoría), comunicación y validación al ir descubriendo y comprobando sus diferentes hipótesis.

SEGUNDA SESIÓN:

En esta segunda sesión, los alumnos utilizaron el triángulo equilátero primero y la mitad del mismo posteriormente.

La sesión inició preguntando cuál es ahora la figura a trabajar. Ellos contestaron *"triángulo equilátero"* determinando que sus lados son iguales. Se les preguntó si estaban seguros de que ese triángulo era equilátero y ellos contestaron: *sí.*

P: ¿Cómo puedes comprobar que efectivamente es equilátero?
R: Midiendo sus lados.

Entonces con la regla graduada midieron sus lados para demostrar esa hipótesis planteada al inicio.

En esta segunda sesión, los alumnos continuaron trabajando con las fases de acción, comunicación y validación, desde el momento en que manipulaban las figuras, formulaban hipótesis y realizaban demostraciones para comprobarlas.

Sus acciones fueron ahora más rápidas que en la primera sesión, pues ya sabían cómo ubicar los círculos y cómo rotarlos. Ahora lo diferente era la figura trabajada.

Se realizaron preguntas para recordar lo realizado en la sesión anterior:

P: ¿Qué fracción del círculo sombreaste con el cuadrado?
R: ¼.
P: ¿Qué fracción del círculo sombreaste con la mitad de ese cuadrado?
R: 1/8.
P: ¿Qué fracción crees obtener ahora con el triángulo equilátero?
R_1: 1/6.
R_2: 1/3.
P: ¿Cómo lo sabes?

En ese momento, los alumnos ya saben cómo lo pueden encontrar, o cómo pueden validar sus hipótesis. De esta manera empiezan a actuar utilizando el material como lo hicieron en la sesión anterior: fijando el círculo con la tachuela en uno de los vértices del triángulo, marcando los lados que comparten ese punto, sombreando la región que se sobrepone y girando el círculo para determinar cuántas partes más pueden encontrar.

P: ¿Cuántas partes encontraste?

R: 6 partes.

El docente pregunta a varios alumnos para verificar que la mayoría encuentre la misma fracción.

P: ¿Qué fracción del círculo sombreaste?

R: 1/6

P: ¿Todos encontraron lo mismo?

R: sí.

P: ¿Cómo puedes comprobarlo?

R: Girando el círculo

En este momento, los alumnos actúan, experimentan, generan hipótesis, comunican sus hipótesis y resultados y validan sus suposiciones.
Se les pide que ahora utilicen el círculo mediano.

P: ¿Qué crees que suceda con este círculo?

R: Sucederá lo mismo que con el pequeño

Y sin pedírselos, ahora ellos solos lo comprueban.

Cabe mencionar que ahora el ritmo de trabajo es más rápido que en la primera sesión. El ritmo de trabajo en esta parte ya no es igual para todos.
Un alumno termina de trazar y se le pide que ahora trabaje el más grande, aunque él supone que encontrará lo mismo.

P: ¿Qué parte sombreaste del más grande?

R: 1/6 también.

Sin embargo, Esteban dice *1/5*, aunque cuenta y verifica que son 6 partes (validación).

P: ¿Ya tienen todos sus tres círculos divididos?

R: Sí.

Sin embargo se pregunta nuevamente para comprobar que todos van en el mismo punto de la secuencia:

P: ¿Qué parte del círculo 1 está sombreada?
R: 1/6.

El docente, pide a los alumnos que coloquen los tres círculos de tal manera que coincidan:

P: ¿Crees que cambiaría la parte sombreada si usaras un triángulo equilátero más grande o más pequeño?
R: No.

En esta parte, se está trabajando la parte cualitativa del ángulo. El alumno aún está usando el concepto sin definirlo. Está trabajando figuras que comúnmente trabaja en la clase de matemáticas y en la clase de dibujo (triángulo equilátero).
También está cuantificando, desde el momento en que establece que la parte sombreada corresponde a 1/6 de giro, o a una sexta parte del círculo.
Incluso, Samantha establece que en todos los círculos se sombrea 1/6, aunque la superficie sombreada, no es la misma.

P: Ayer el cuadrado lo partimos en dos partes iguales, ¿qué crees que suceda si este equilátero lo dividimos en dos partes iguales?
R: El giro sería ahora de 1/12.

El docente les pide que localicen el punto medio del segmento AC

P: ¿Cómo encontrarías ese punto medio?
R: Midiendo

Ellos miden y localizan el punto medio. El docente les pide que tracen una línea que una este punto medio con el vértice "B".

Un alumno explica cómo encontró el punto medio del segmento: *Medí y encontré que el segmento mide 10 cm, así que el punto medio está en 5 cm.*

P: ¿Esa línea que trazaste, qué representa en el triángulo equilátero?

R_1: La mitad

R_2: La altura

Se les pide que recorten sobre esa línea.

P: ¿Tú crees que al dividir, las figuras serán iguales? ¿o serán diferentes?

R: Las figuras serán iguales.

P: ¿Qué tipo de triángulo obtienes ahora?

R_1: Recto

R_2: Isósceles, escaleno.

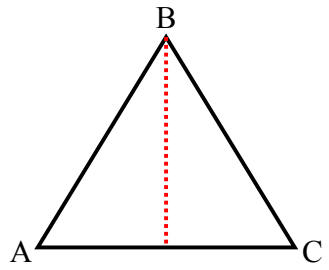
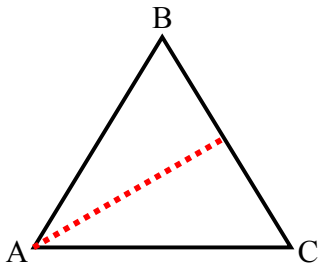
El docente acepta que es recto, pero les pide que definan si es isósceles o escaleno. Hasta que ellos coinciden en que es escaleno porque sus tres lados son diferentes.

P: Como partiste el equilátero en dos partes iguales, ¿cuántas partes crees que vas a sombrear ahora en el círculo?

R: 12.

Vamos a ver si efectivamente se cumple lo que dices. Los alumnos ahora, colocan el círculo pequeño, lo fijan con la tachuela, trazan las líneas que parten del vértice y giran para contar el número de partes iguales.

Un alumno, Allan, colocó el círculo en el vértice "B" y encontró 6 partes iguales. El problema que surgió con este alumno, es que él dividió el equilátero de manera diferente a como lo hizo el resto del grupo. El vértice dividido a la mitad fue el vértice "A".

Grupo	Allan
	

Como Allan dividió su triángulo sobre el vértice "A", el ángulo dividido es "A" mientras que el resto del grupo dividió "B", por esa razón, cuando se les pide que coloquen el círculo pequeño sobre el vértice "B", él encuentra 6 partes mientras que el resto del grupo encuentra 12.

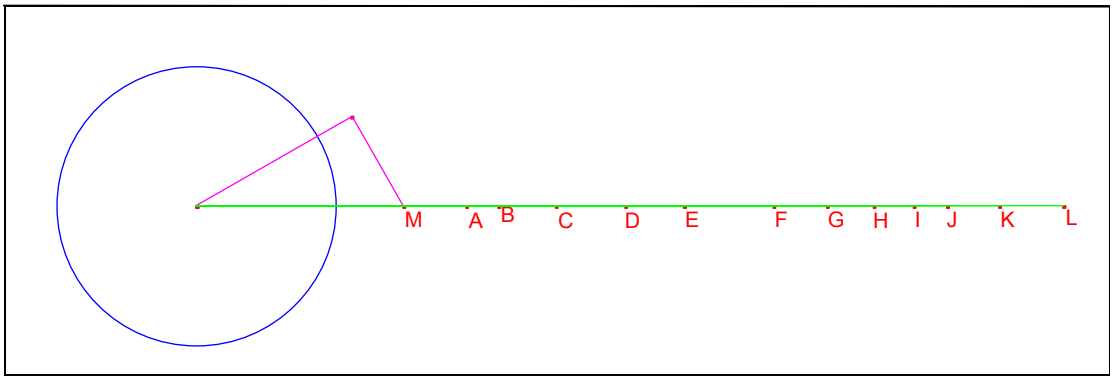
El docente le pregunta a Allan*: ¿cuál esquina es la que dividiste al partir el equilátero*? Él contesta: *"A"*.

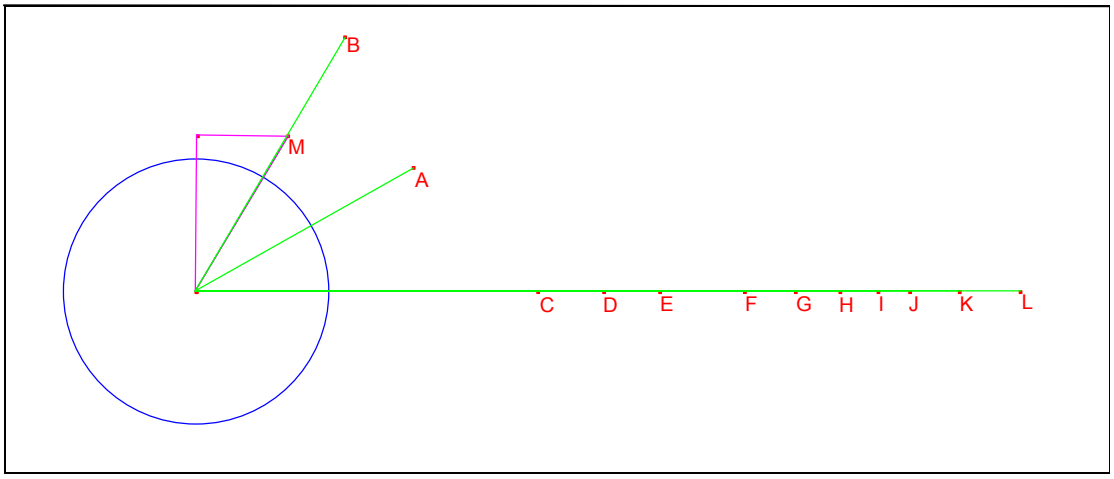
Se le pregunta que cuál esquina tiene mayor amplitud, "A" o "B", y él responde *"B"*. Por esa razón, la fracción que encontró fue 1/6.

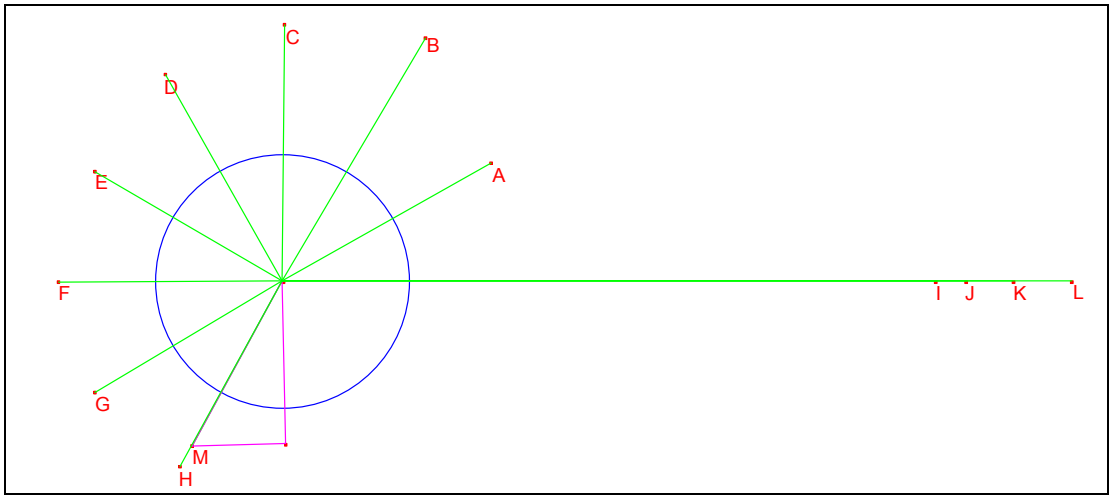
En esta parte, un alumno del grupo tuvo que hacer un análisis para encontrar el error realizado. Para ello, tuvo que comunicar sus resultados, y validar sus respuestas. El docente sólo fue un guía que generó las preguntas adecuadas para que él encontrara su error. El trabajo continuó con el grupo preguntando:

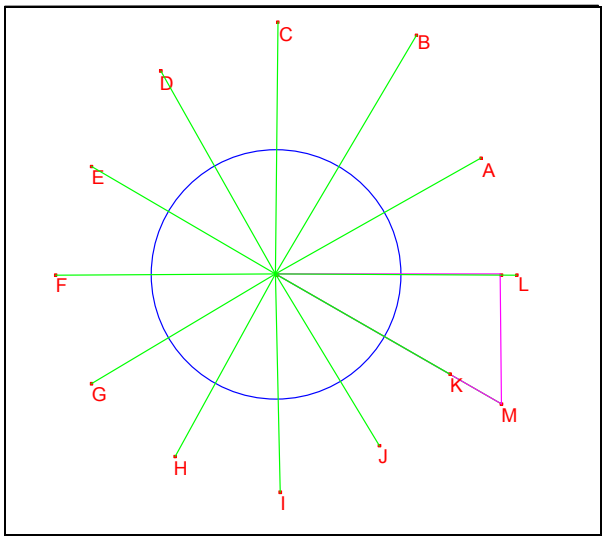
P: ¿Crees que suceda lo mismo con los otros dos círculos?
R: Sí
P: ¿Podrías comprobarlo

El docente presenta en el pizarrón una figura realizada en Cabri para que los alumnos vean lo que sucede con un círculo más grande y un triángulo más grande. Siempre y cuando éste sea la mitad de un equilátero:


M
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L

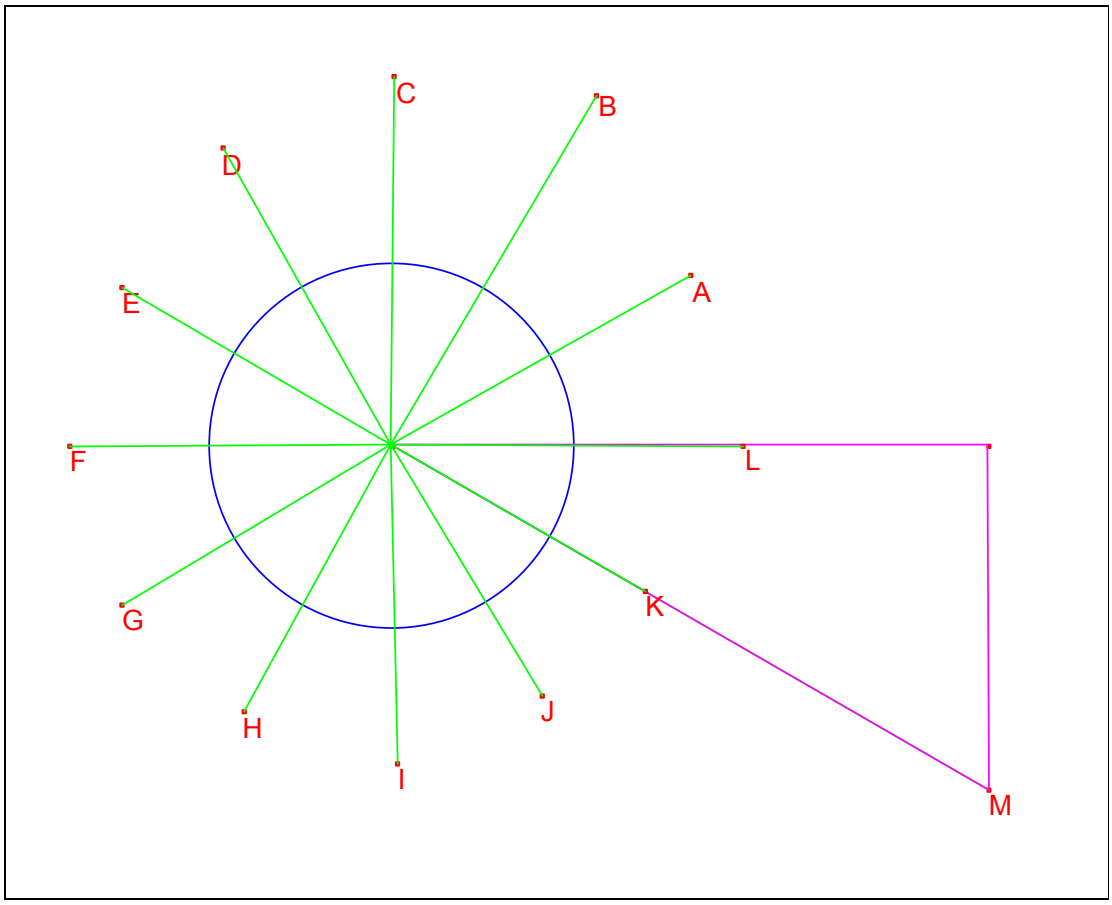

B
M
A
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L


C
B
D
A
E
F
I
J
K
L
G
M
H



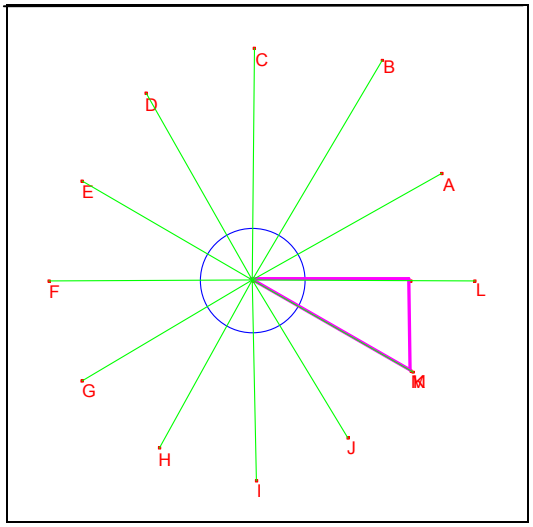
P: Si hago el triángulo más grande o más pequeño, ¿cambiarían las partes?

R: No



P: Y si hago el círculo más grande o más pequeño, ¿cambiarían las partes?

R: No



En conclusión, en esta parte de la secuencia, el alumno usó nuevamente el ángulo sin saberlo, así como en el estudio epistemológico, las primeras culturas usaron el concepto sin definirlo.

El alumno trabajó la parte cualitativa desde el momento en que verifica que no importa el tamaño de la figura trabajada o del círculo utilizado, siempre se encontrarán las mismas partes.

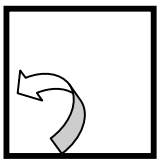
El alumno trabajó la parte cuantitativa, desde el momento en que tuvo que encontrar una cantidad equivalente. En este caso, 1/6 para el equilátero y 1/12 para la mitad del mismo. Trabajó figuras comunes para él, triángulo equilátero, triángulo escaleno, triángulo rectángulo.

Igual que en la primera sesión, trabajó con el material concreto aunque a un ritmo más rápido. Desarrolló acciones, experimentó, descubrió, generó hipótesis, comunicó sus suposiciones, demostró y comprobó sus afirmaciones.

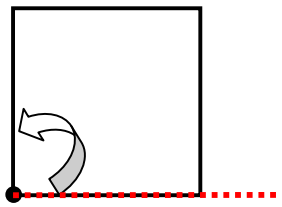
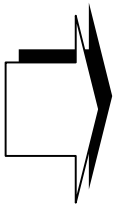
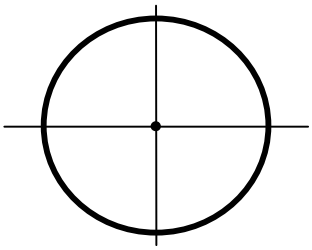
TERCERA SESIÓN:

En esta tercera sesión, los alumnos pasaron a un nivel más de abstracción desde el momento en que ya no necesitaron trabajar con las figuras manejadas en las sesiones anteriores.

En esta sesión, iniciaron con la **clasificación de situaciones específicas,** en el momento en que tuvieron que recordar lo trabajado con el cuadrado y el triángulo equilátero para completar la tabla de clasificación:

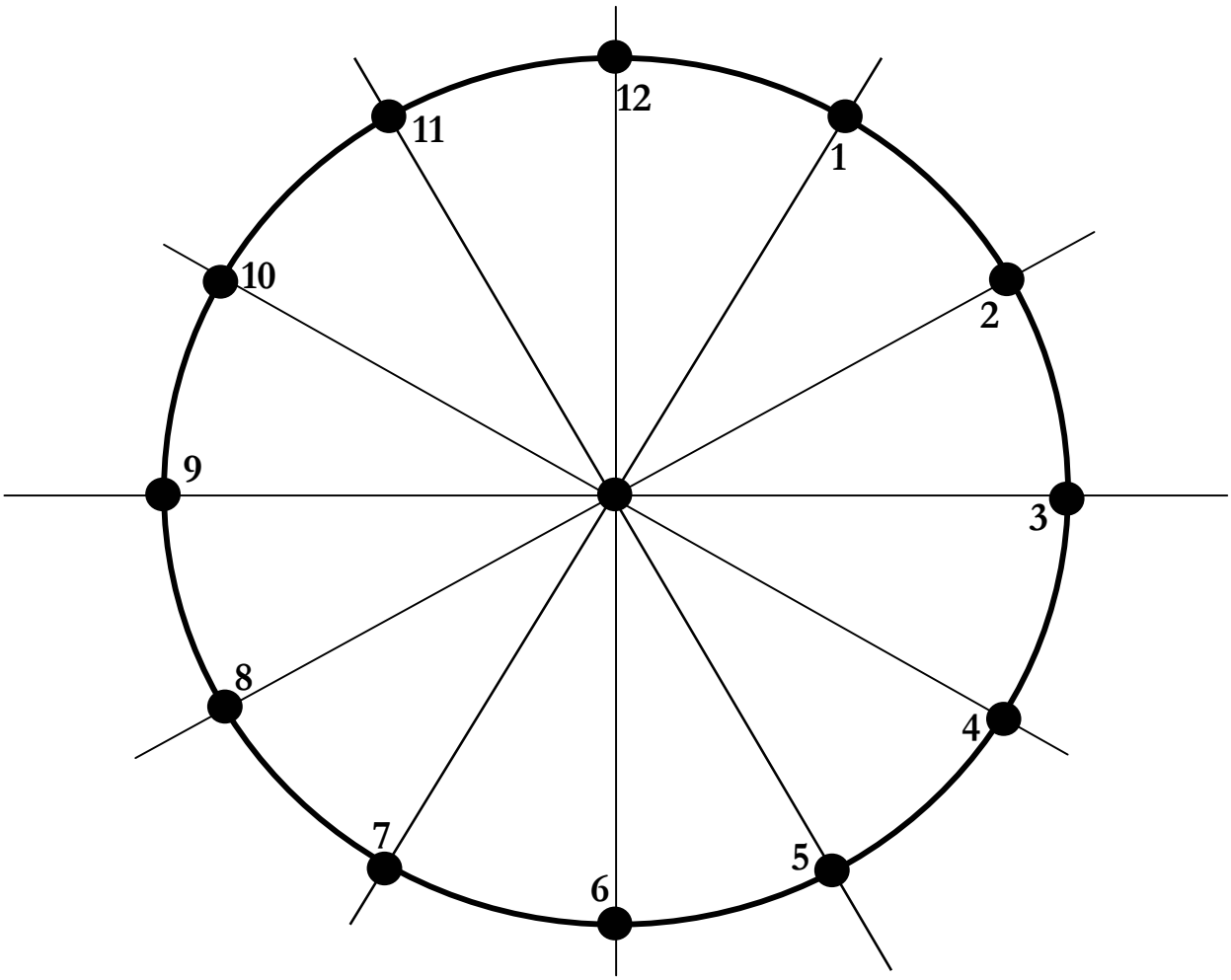
FIGURA	NOMBRE	GIRO
	CUADRADO	¼ DE GIRO

Los alumnos pasaron al pizarrón para completar la tabla, relacionando la figura con el giro correspondiente de acuerdo a lo trabajado en las sesiones anteriores. Incluso, clasificaron la figura con la parte sombreada en cada uno de los círculos:

Determinando que el cuadrado representa ¼ de giro, el equilátero 1/6 de giro, la mitad del cuadrado 1/8 de giro y la mitad del equilátero 1/12 de giro.

Una vez que los alumnos determinaron esa clasificación, trabajaron diferentes giros con una flecha. Para ello, utilizaron el círculo dividido en doceavos:



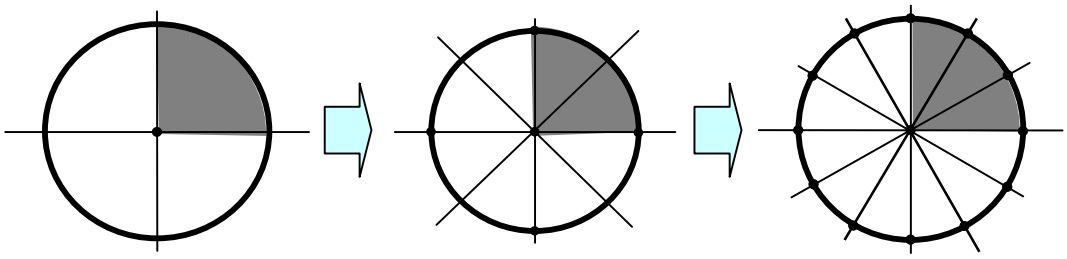
Se estableció que el punto de inicio sería el número **3,** y con base a ello determinaron la medida de cada giro:

P: Gira la flecha hasta el número 12 partiendo del número 3, ¿ese giro equivale a?

Aquí se generaron diferentes respuestas. No todos los alumnos realizaron el giro en el mismo sentido. Algunos giraron hacia la derecha mientras que otros lo hicieron hacia la

izquierda. Por lo tanto las respuestas fueron ¼, ¾, etc. Además, hicieron uso de las equivalencias, al determinar que ¼ de vuelta equivale a 3/12 de vuelta.

En este punto, los alumnos iniciaron a trabajar con **contextos generales buscando similitudes y relaciones:**



¼ de giro o ¼ de la superficie del círculo	=	2/8 de giro o 2/8 de la superficie del círculo	=	3/12 de giro o 3/12 de la superficie del círculo

Y si en cada doceavo tenemos 30/360 partes del círculo, entonces en ¼ de giro, o en ¼ de la superficie del círculo tenemos 90/360 partes.

Por otro lado, se trabajó con otra de las facetas del ángulo, en el momento en que se establecieron giros en ambos sentidos (ángulo estático y ángulo dinámico).

Los alumnos que giraron la flecha en el sentido de las manecillas del reloj, contestaron diferentes medidas: ¾, 9/12, 6/8, etc.

Los alumnos pasaron al pizarrón, a realizar sus giros (**acción**) experimentando y descubriendo, para después **comunicar** sus resultados al resto del grupo.

En el momento en que no se ponían de acuerdo por el sentido en el que giraron su flecha, dos alumnas explicaron sus resultados, **validando** que ambas estaban en lo correcto desde el momento en que no se especificó el sentido del giro en la instrucción.

También llegaron a la conclusión de que ¼ , 2/8 y 3/12 representan el mismo giro desde el momento en que son fracciones equivalentes.

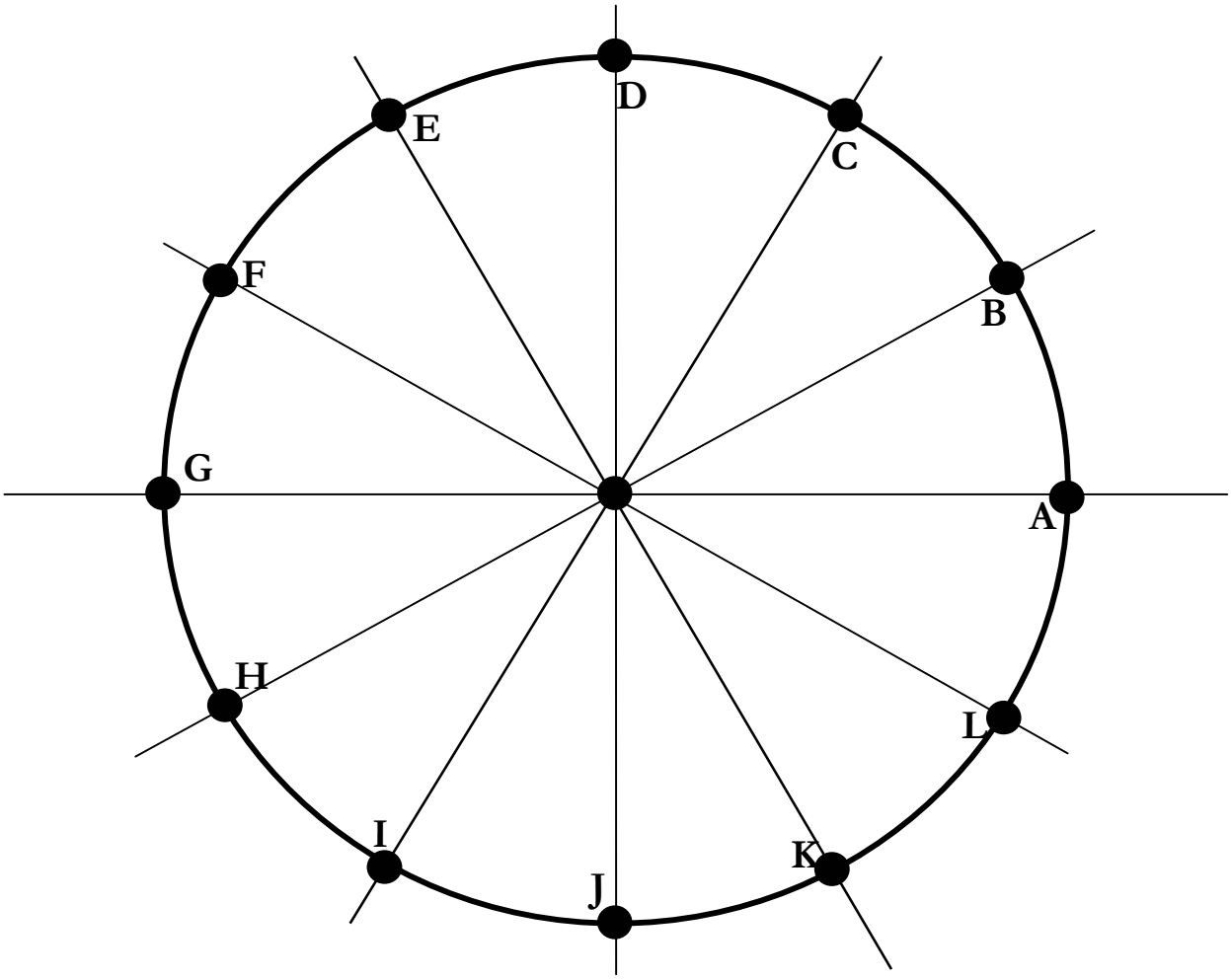
En este momento de la secuencia, los alumnos siguen usando el ángulo, sin saber que lo estaban haciendo.

Los alumnos continuaron realizando giros (acción), comunicando sus respuestas (comunicación) al resto del grupo.

P:¿A qué te recuerda esta figura?

R: Al reloj

P: Vamos a continuar con la misma figura pero ahora cada punto tendrá una letra.



P: ¿Qué pasaría si cada doceavo lo dividimos en 30 partes?, ¿Cuántas habría en 1/12?.

R: 30

En este punto, una alumna contestó *360*. Sin embargo, el docente realizó una serie de preguntas para que la alumna reflexionara sobre lo que estaba contestando:

P: Cada doceavo lo dividimos en 30 partes, ¿Cuántas partes habrá en un doceavo?

R_{alumna}: 30

Y continúa preguntando al resto del grupo:

P: ¿Cuántas partes tendremos en dos doceavos?

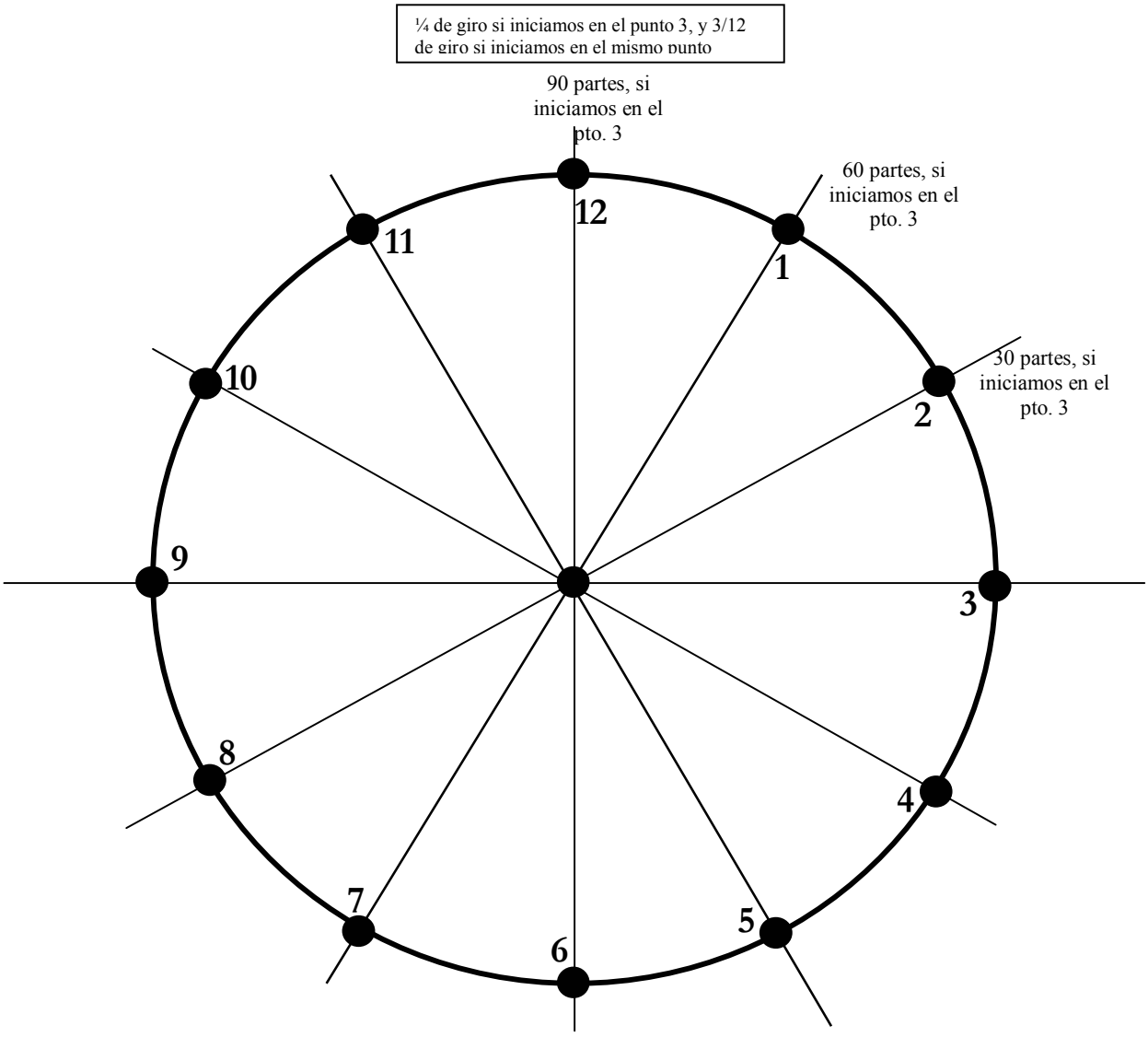
R: 60

P: ¿y en tres doceavos?

R: 90.

En esta parte de la secuencia, los alumnos están trabajando con un grado de abstracción mayor. Físicamente no están dividiendo cada doceavo, es decir, tienen que imaginar lo que sucede con el círculo si este se divide en fracciones más pequeñas y, con base en ello, realizarán sus respuestas.

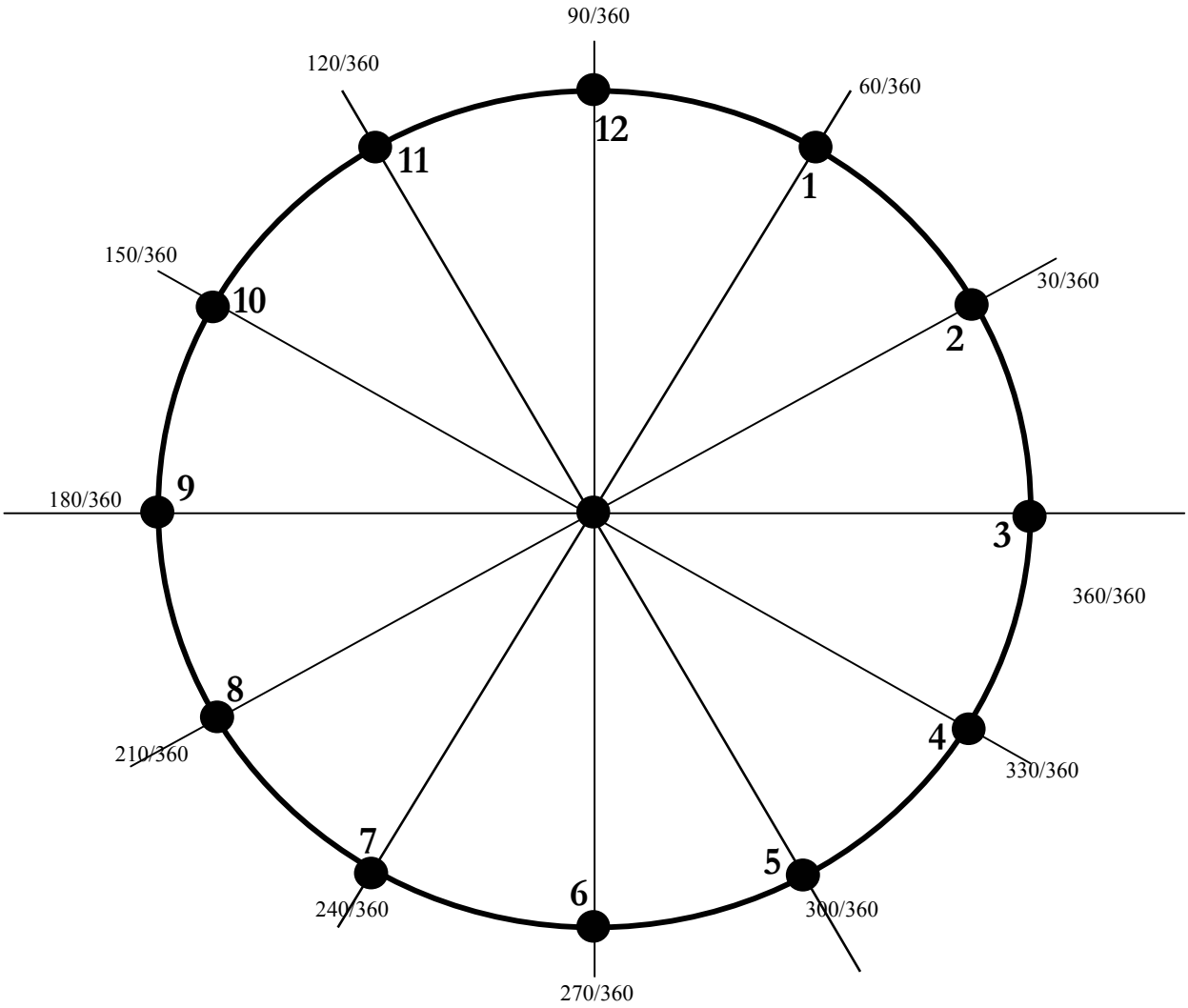
Continúan estableciendo relaciones desde el momento en que determinan que en 3/12 encontrarán 90 partes pequeñitas y que en ¼ también, ¿por qué?, porque son fracciones equivalentes. Además pueden validarlo en el momento en que visualizan esas divisiones:



P: ¿Cuántas partes habría en una vuelta completa?

R: 360 partes en todo el círculo.

Los alumnos pasaron al pizarrón a realizar diferentes giros, iniciando en "A" y en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Cada alumno que pasaba, realizaba su giro y anotaba su respuesta en fracción (acción y comunicación):



En cada movimiento (acción), los alumnos anotaban el número de partes con respecto al entero y lo anotaban en el pizarrón (comunicación)

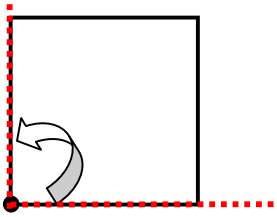
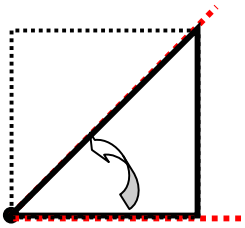
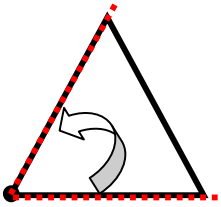
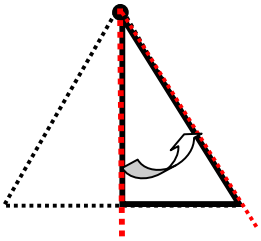
Cuando completaron la vuelta, establecieron que en todo el círculo hay 360 partes de 360 en total, completando el entero.

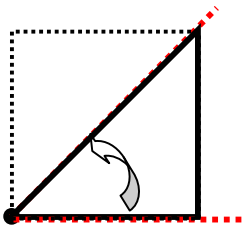
Hasta este momento de la secuencia, los alumnos buscaron y encontraron **similitudes y relaciones** (Mitchelmore and White), **usaron el ángulo** sin llegar a la definición del concepto. Hasta que el docente especificó lo siguiente:

Llamemos a cada una de estas pequeñas partes “grado”:

1/360 = 1 grado

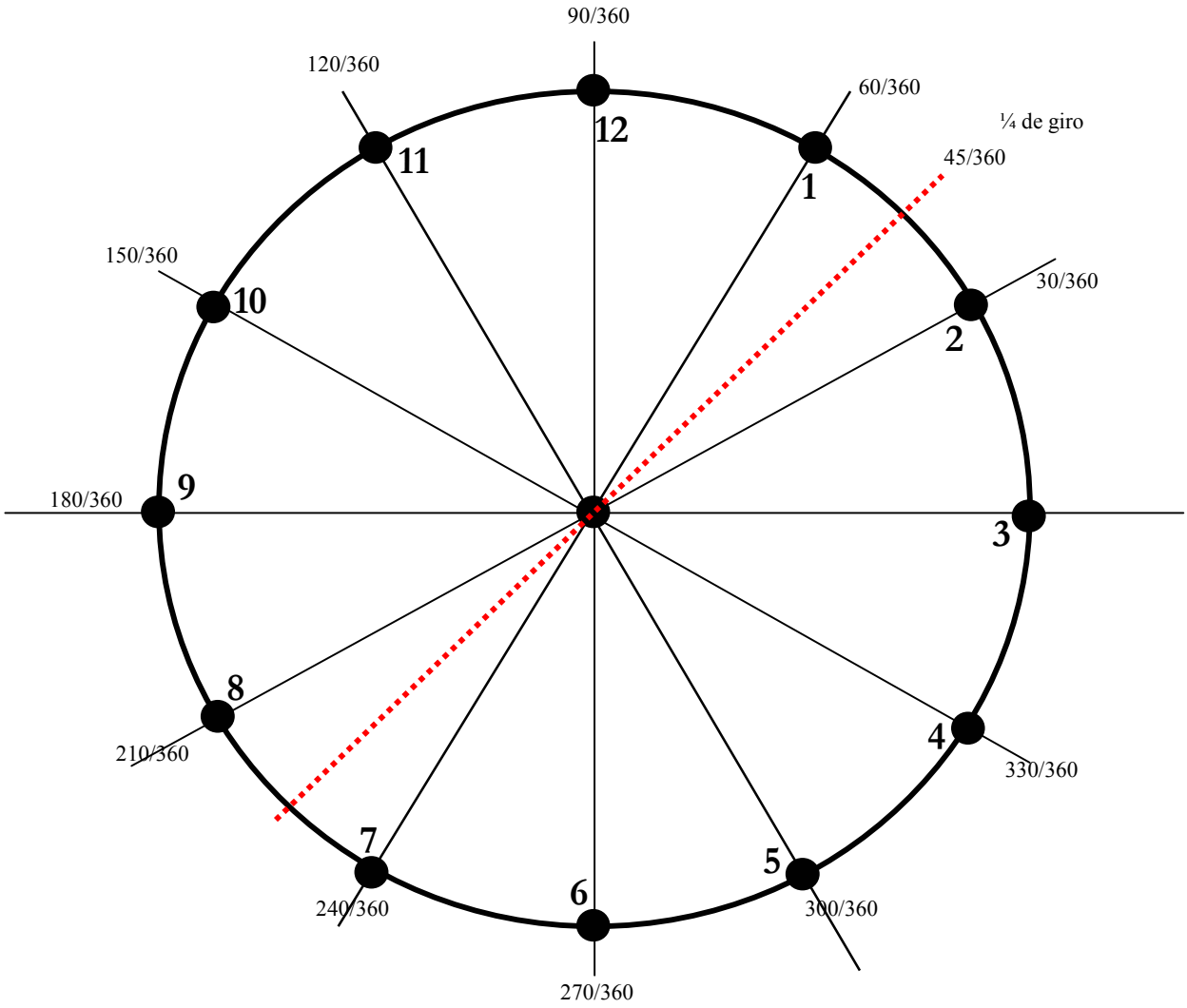
Entonces:

Dibujo	Nombre de la figura	Giro	Grados
	**CUADRADO**	**¼ DE GIRO**	**90 GRADOS**
			
			
			



En esta figura se presentó un problema con Ramón. A él no le fue fácil identificar en el círculo trabajado (el dividido en doce partes), dónde quedaba la octava parte, para determinar cuántas de esas partes pequeñitas encontraría en ese giro.

Naomi, pasó al pizarrón y le ayudó a encontrarlo:



Ella explicó que para la segunda figura, el giro es de 1/8. Trazó esa línea roja para determinar en dónde se ubica ¼ de giro y comentó que en un doceavo, tenemos 30 partes pequeñitas más 15 de la mitad del otro doceavo, por lo tanto hasta ese punto estamos hablando de 45 partes de 360.

En lo sucedido con Ramón, podemos encontrar que, al aplicar la secuencia en un grupo completo, encontraremos siempre alumnos que trabajan a un ritmo más rápido que otros. Mientras que algunos dejarán el material concreto más rápido, otros seguramente necesitarán más tiempo. Sin embargo, la **comunicación de sus resultados** entre ellos permite ayudar en la comprensión de los conceptos.

Con respecto a la Teoría de Situaciones Didácticas, en esta parte de la secuencia los alumnos realizaron diferentes acciones al girar sus flechas para encontrar el valor del giro, y comunicaron sus diferentes resultados al grupo.

Algunos necesitaron validarlo, como en el caso de Ramón. Los alumnos usaron el ángulo sin saberlo hasta que terminó la secuencia, en ese momento encontraron la relación del concepto trabajado.

Se trabajó la parte cuantitativa del ángulo, desde el momento en que establecieron un número para cada giro realizado. Pero también trabajaron la parte cualitativa del mismo, desde el momento en que trabajaron otra faceta del ángulo (ángulo como giro) y desde el momento en que trabajaron la medición del mismo en ambos sentidos.

En relación a la Teoría cognitiva de Mitchelmore & White, los alumnos pasaron a otra faceta en el momento en que no requirieron ahora de tanto material. En las dos primeras sesiones trabajaron con objetos donde el ángulo está presente, en esta última, pasaron a otro momento de abstracción en cuanto realizaron clasificaciones de situaciones específicas y establecieron contextos generales con similitudes y relaciones.

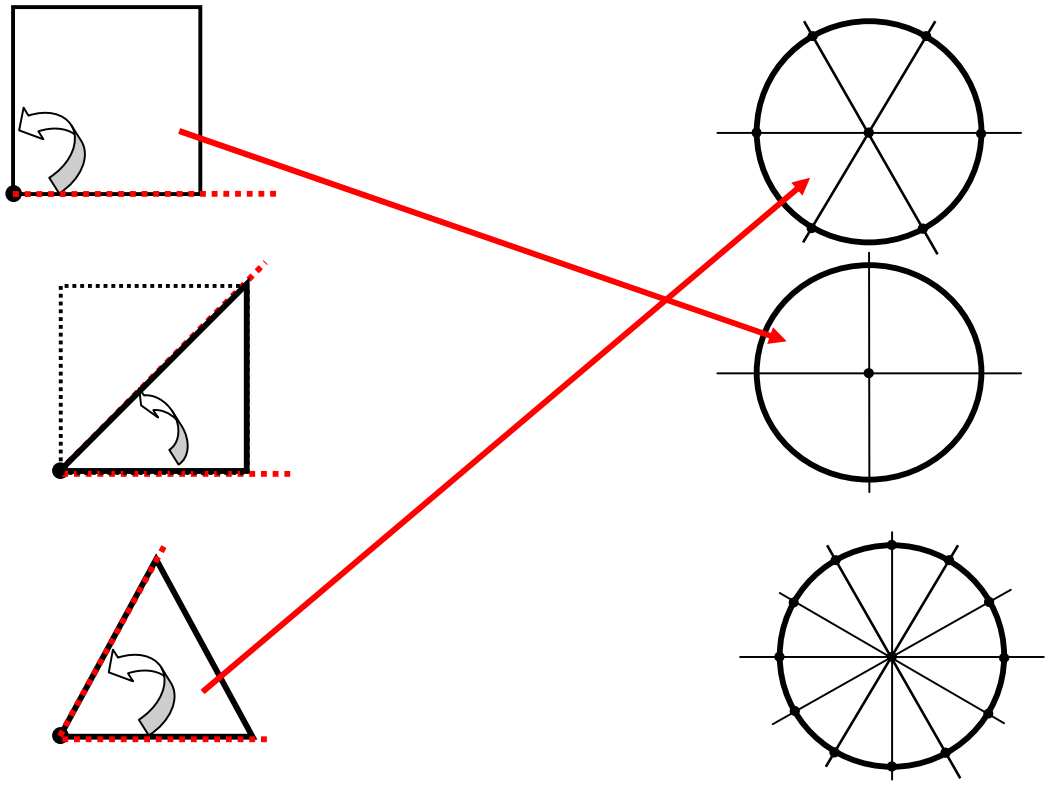
CUARTA SESIÓN:

En esta última sesión, se repitió parte de la quinta y sexta parte de la secuencia, para poder concluirla correctamente.

Iniciamos retomando que en el cuadrado encontramos ¼ de giro o se sombreó ¼ parte de la circunferencia. El docente elaboró una serie de preguntas donde los alumnos contestaron:

P: Cuando trabajaste con el cuadrado, ¿qué parte de la circunferencia sombreaste?
R: ¼
P: Cuando trabajaste con medio cuadrado (triángulo isósceles), ¿Qué parte de la circunferencia sombreaste?
R: 1/8
P: Cuando trabajaste el triángulo equilátero, ¿qué parte de la circunferencia sombreaste?
R: 1/6
P: Cuando trabajaste con medio equilátero (Triángulo escaleno), ¿qué parte de la circunferencia sombreaste?
R: 1/12

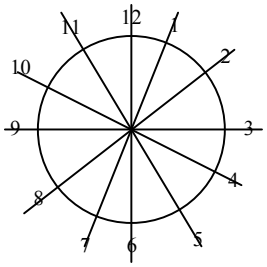
Se revisó también lo trabajado con el inicio de la sexta parte de la secuencia, en donde se relacionó el giro con la porción de círculo:



En esta parte, se está trabajando un nivel de abstracción mayor, en el momento en que los alumnos tuvieron que establecer relaciones y clasificar las figuras con base a las fracciones de giro generadas.

Se revisaron también, los giros efectuados con la flecha. En este punto se retomó el hecho de que los giros pueden darse en ambos sentidos si no se especifica hacia dónde. Esto refuerza el hecho de que los ángulos no sólo se miden en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, sino también en el sentido opuesto.

Para ello, utilizaron el siguiente esquema:



P: ¿A qué figura te recuerda esto?

R: Al reloj

P: ¿En qué sentido giran las manecillas del reloj?

R: Hacia la derecha

P: Si la manecilla está en el tres y se mueve hasta el 7, ¿qué fracción del círculo recorrió?

R: 4/12 ó 2/6

P: Y si está en el uno y se mueve hasta el siete, ¿qué fracción recorrió?

R: ½ o 2/4 , 3/6 o 6/12

P: ¿Tendrá que ver el tamaño de la manecilla?, es decir, si tienes un reloj grande como el proyectado en el pizarrón y uno pequeño (de pulsera) y en ambos, la manecilla se mueve del uno al siete, ¿qué fracción recorrió la manecilla del más grande?

R: ½

P: ¿Y la manecilla del pequeño?

R: También ½

P: ¿Importa si es un reloj más grande o más pequeño?

R: No

P: ¿Por qué crees que no importa?

R: Porque tienen las mismas divisiones.

P: ¿Importa si la flecha es más grande o más pequeña?

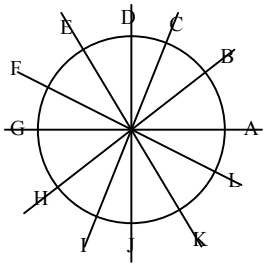
R: No

P: ¿El giro será el mismo? ó ¿diferente?
R: Será el mismo.

En esta parte de la secuencia, el alumno está relacionando las figuras trabajadas, con un objeto real que él manipula constantemente, el reloj. Identificando en él, los giros analizados en los esquemas anteriores, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

Identifica también que no importa el tamaño del reloj o de las manecillas, los giros siempre serán los mismos. Esto nos habla de cualidades presentes en el ángulo donde la longitud de los lados es independiente de la abertura del mismo.

Se revisó también lo visto en la sesión anterior con la parte seis de la secuencia donde el alumno manejó el mismo círculo, con las mismas divisiones, pero ahora nombrando con letras cada punto.



Se solicitó trabajar nuevamente con la flecha y en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, iniciando en el punto "A".

P: Los giros que te pedí en este esquema, ¿en qué sentido deben ser?
R: A la izquierda
P: ¿Cuál fue tu punto de partida?
R: A

La decisión de iniciar en el punto "A", fue decisión del docente, por eso se aclara:

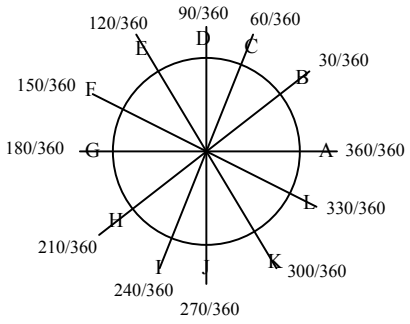
P: ¿Podría ser otro el punto de partida?
R: Sí
P: Si desde A, giro la flecha hasta E, ¿a cuánto equivale el giro?
R: 4/12 , 2/6

Aquí podemos ver la parte cuantitativa del ángulo en el momento en que establecemos una cantidad (fracción) que indique la magnitud del giro. Y se está estableciendo otra cualidad

del ángulo, ya que puede construirse en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y a partir de cualquier punto.

P: Imagínate que cada doceavo lo divides en partes más pequeñas y que cada doceavo lo divides en 30 partes más pequeñas. Considerando lo anterior, si nos movemos de A a B, ¿cuántas de esas partes recorriste?
R: 30
P: ¿De cuántas?
R: De 360
P: ¿Y al llegar a C?
R: 60 de 360
P: ¿Y al llegar a D?
R: 90 de 360
P: ¿Y al llegar a E?
R: 120 de 360
P: ¿Y al llegar a F?
R: 150 de 360

Y así sucesivamente hasta llegar a L. El círculo proyectado en el pizarrón se fue marcando de la siguiente manera mientras los alumnos respondían a las preguntas de docente:



P: ¿Y al llegar a L?
R: 330 de 360
P: ¿Y al llegar nuevamente al punto A?
R: 360 de 360, igual a un entero.
P: ¿A qué te recuerda esto?
R_1: Al reloj
R_2: A los grados
P: ¿A qué más?
R: A un "transformador"

P: Querrás decir transportador? R: sí

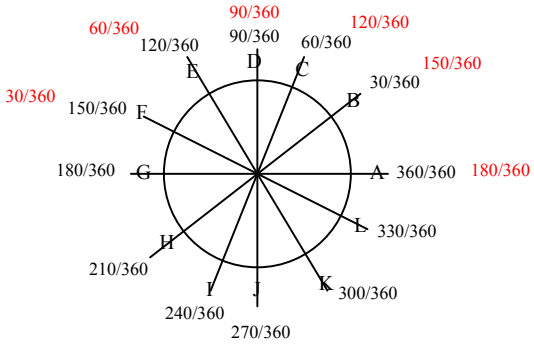
Aquí, el alumno empieza a relacionar las construcciones realizadas, con el concepto de ángulo. Y visualiza el significado de lo que es un transportador.

La parte de acción es ya muy reducida, sin embargo, los alumnos continúan con formulaciones, en el momento en que comunican sus descubrimientos y validando, cuando demuestran sus hipótesis.

P: Qué pasa si ahora el giro inicia en G y el movimiento será en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Cuántas partes recorreré hasta el punto F?

R: 30/360 P: ¿Y al llegar a E? R: 60/360

El docente ahora busca que encuentren el sentido de cuantificar el ángulo pero en el sentido opuesto. Sabemos que un transportador, tiene la graduación en ambos sentidos. Aquí, el alumno descubre esas dos aplicaciones del transportador:



Conforme el docente elabora preguntas, los alumnos las contestan (comunicación) y se anotan en el pizarrón:

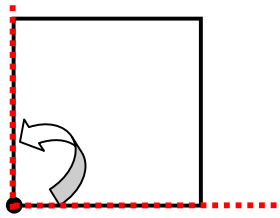
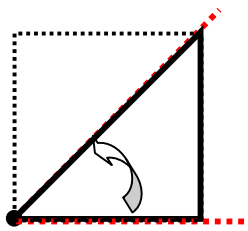
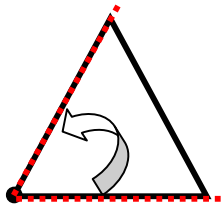
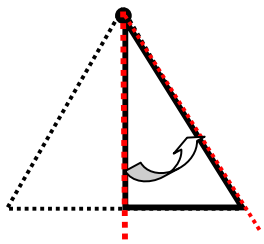
P: ¿Tú crees que si este círculo proyectado fuera más pequeño, se mantendrían las mismas divisiones?, o ¿cambiarían? R: Se mantendrían

El docente, reduce la figura proyectada y los alumnos comentan (comunicación):

R: Se mantienen

A continuación se aplicó la resolución de la última página de la secuencia:

Completa el siguiente cuadro:

Dibujo	Nombre de la figura	Giro	Grados
			
			
			
			

Aclarando lo siguiente:

P: Cuando hicimos los giros encontraste diferentes equivalencias, ¿verdad? R: Sí

P: Por ejemplo, en ¼ de giro, ¿a qué fracción corresponde si cada doceavo está dividido en 30 partes?
R: A 90 de 360
P: Dijimos en la sesión anterior, que a 1/360 le llamaremos 1 grado. Entonces, si en ¼ hay 90 de 360, ¿Cuántos grados hay?
R: 90
P: En 1/8, ¿cuántas de esas partes había?
R: 45
P: ¿Cuántos grados son?
R: 45 grados.
P: ¿En 1/6?
R: 60 de 360 partes
P: ¿Cuántos grados son?
R: 60 grados
P: ¿Y en 1/12?
R: 30 de 360
P: ¿Cuántos grados son?
R: 30 grados

En esta parte, la "institucionalización" se hace presente. El docente es quien necesita ayudar al alumno a establecer esa equivalencia. Ya que el alumno por sí solo será difícil que la establezca.

Pero, en el momento en que el docente establece que 1/360 parte de circunferencia o giro, equivale a 1 grado, los alumnos comunican sus equivalencias.

P: Regresando a las figuras que inicialmente trabajamos, en el cuadrado, ¿qué parte del círculo sombreaste?
R: ¼
P: En grados , ¿a cuántos grados equivale?
R: A 90 grados
P: ¿Por qué 90?
R: Por qué a mi me dijeron que en un cuadrado hay 90 grados.
P: Pero relacionándolo con lo que estuvimos trabajando, ¿cuántos doceavos hay en ¼?
R: 3/12
P: y ¿cuántas divisiones dijimos que hay en 1/12?
R: 30
P: y ¿en 3/12?
R: 90

En esta parte, diferentes alumnos pasaron al pizarrón para llenar el cuadro proyectado, explicando el por qué de sus respuestas. Aquí, los alumnos **comunican** y **demuestran**, pero apoyados en la institucionalización del concepto, ya que tienen ahora que indicar el giro generado en el vértice de cada figura pero ahora en términos de ***grado.***

Los alumnos están trabajando ya un nivel más de abstracción, respecto a la Teoría cognitiva de Mitchelmore y White, en el momento en que trabajaron manipulando objetos escolares, clasificaron los diferentes giros, establecieron relaciones, y ahora expresan esos giros en términos de grado.

Continúan cuantificándolo, en el momento en que aplican una magnitud para medirlo, sólo que ahora no utilizan la fracción de giro o porción del círculo, sino su equivalencia en grados.

Ahora toca el turno de otro alumno que trabajará la mitad del cuadrado (Triángulo rectángulo isósceles):

P: ¿Qué figura es?
R: Un triángulo isósceles
P: Pero, ¿de dónde salió?
R: De la mitad del cuadrado
P: ¿Qué giro hiciste con él? O ¿qué parte del círculo sombreaste?
R: 1/8
P: ¿Y cuántos grados son?
R: 45 grados

Continuamos con la comunicación de resultados. Los alumnos anotan en el pizarrón y el resto lo hace en sus secuencias impresas.

P: ¿Qué figura es?
R: Un triángulo equilátero
P: ¿Qué fracción de giro encontraste en esa figura?
R: 1/6
P: ¿A cuántos grados equivale?
R: 75 grados
P: ¿Estás segura?, ¿Cuántos doceavos hay en 1/6?
R: 2/12
P: ¿y si en cada doceavo hay 30 partes?
R: Entonces son 60

P: ¿Están de acuerdo todos?

R: Sí

El alumno **comunica** sus resultados, pero el docente se percata de un error y comienza a generar preguntas para que el alumno reformule sus respuestas. Entonces tendrá que **demostrar** lo que está diciendo. De esa manera, el alumno se da cuenta de su error y corrige su resultado, comunicando el nuevo: 60 grados.

P:¿Qué figura es?

R: Triángulo escaleno

P: ¿De donde viene esa figura?

R: De la mitad de un triángulo equilátero

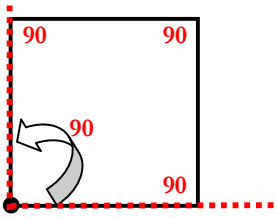
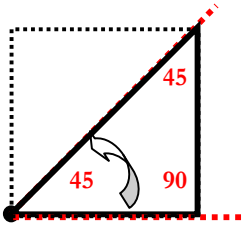
P: ¿Qué fracción de giro generaste en la mitad del vértice original?

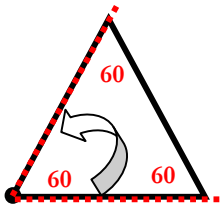
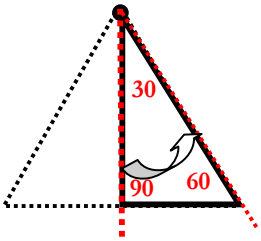
R: 1/12

P: ¿A cuántos grados equivale?

R: A 30 grados.

El docente anota en cada vértice de cada figura, el ángulo según le van diciendo los alumnos:

Dibujo	Nombre de la figura	Giro	Grados
	**CUADRADO**	**1/4**	**90**
	**TRIÁNGULO ISÓSCELES**	**1/8**	**45**

	**TRIÁNGULO EQUILÁTERO**	**1/6**	**60**
	**TRIÁNGULO ESCALENO**	**1/12**	**30**

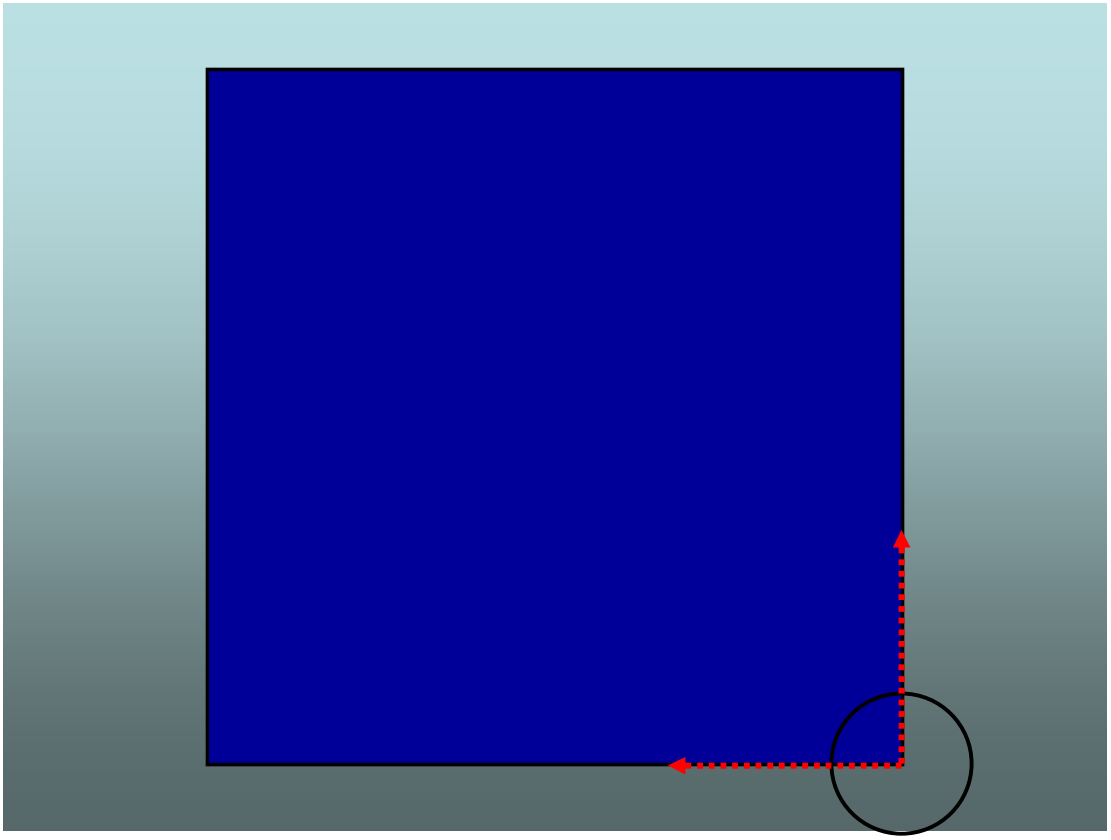
Hasta este momento, el alumno regresó a las figuras iniciales, para expresar el giro o la abertura generada en cada vértice pero ahora en términos de grado.

La secuencia finalizó con las escuadras, buscando identificarlas como mitades del cuadrado y del triángulo equilátero e identificando en ellas los ángulos generados en cada uno de sus vértices, relacionándolas con la secuencia trabajada.

P: Te voy a enseñar una imagen y quiero que me digas , ¿qué figura es?

R: Un cuadrado

La imagen proyectada en el pizarrón fue la siguiente:



P: Esa es la figura con la que iniciamos la actividad, cuándo colocaste aquí tu círculo, ¿qué parte sombreaste?

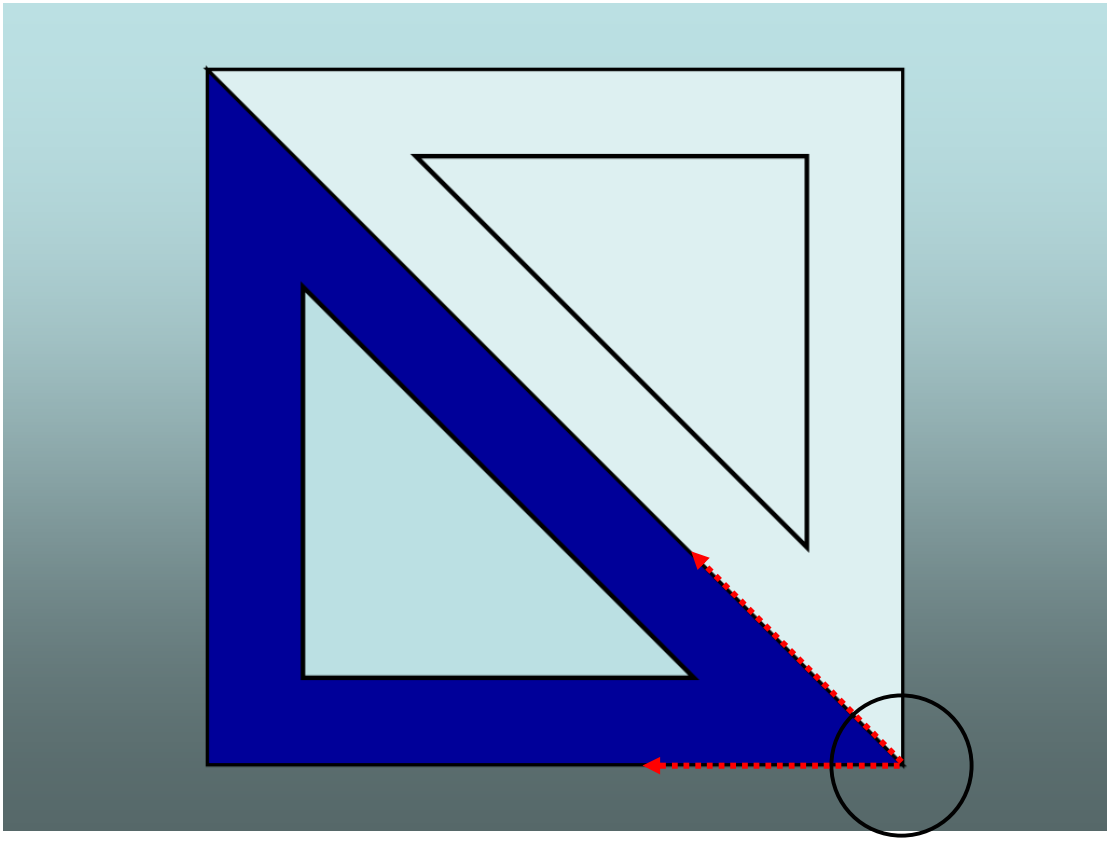
R: ¼

P: ¿A qué te recuerda ahora esta imagen?

R: Son dos escuadras

P: ¿En qué materias utilizas las escuadras?

R: En dibujo, en matemáticas.



P: Utilizando sólo la escuadra azul fuerte, ¿qué fracción encontrarías en este vértice?

R: 1/8

P: Y si es 1/8, ¿Cuántos grados hay en ese vértice?

R: 45 grados.

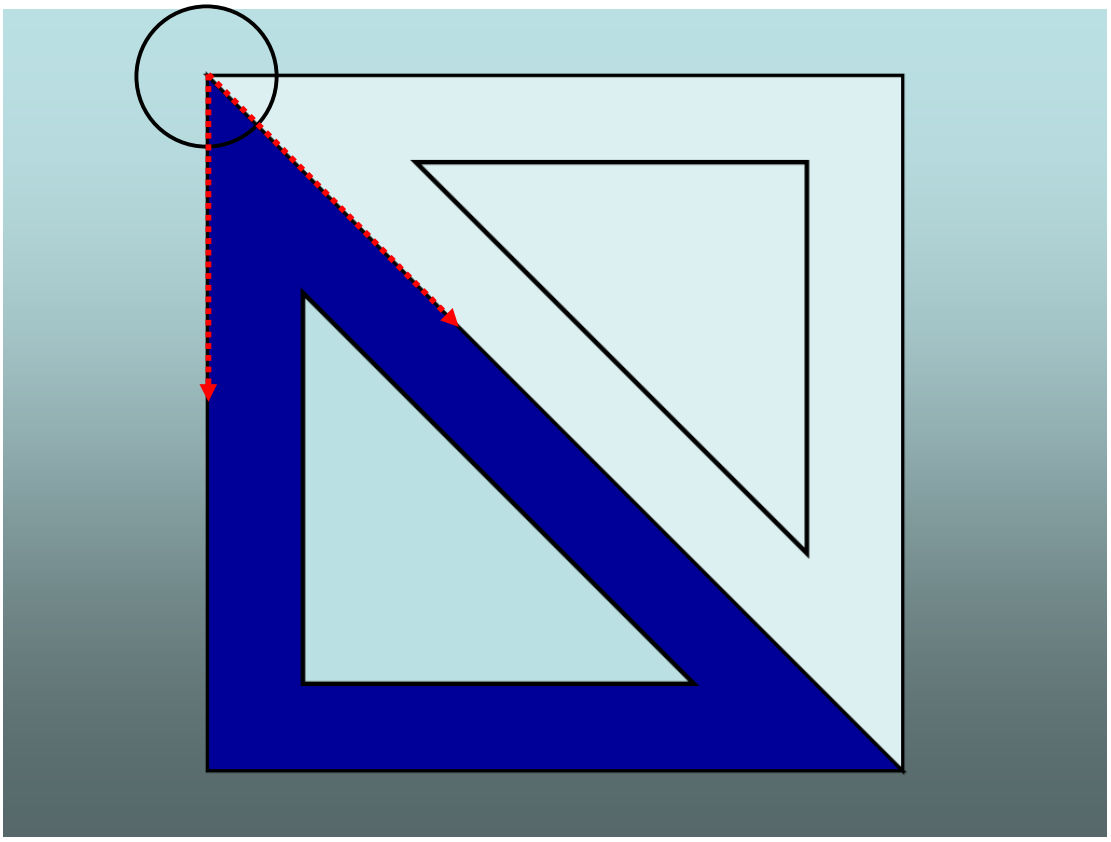
Se buscó analizar los otros dos vértices, de tal manera que el alumno identificara ahora en una sola figura las diferentes fracciones y ángulo:

P: ¿Qué fracción encontrarías aquí?

R: 1/8 también

P: ¿Cuántos grados representa?

R: 45 grados.

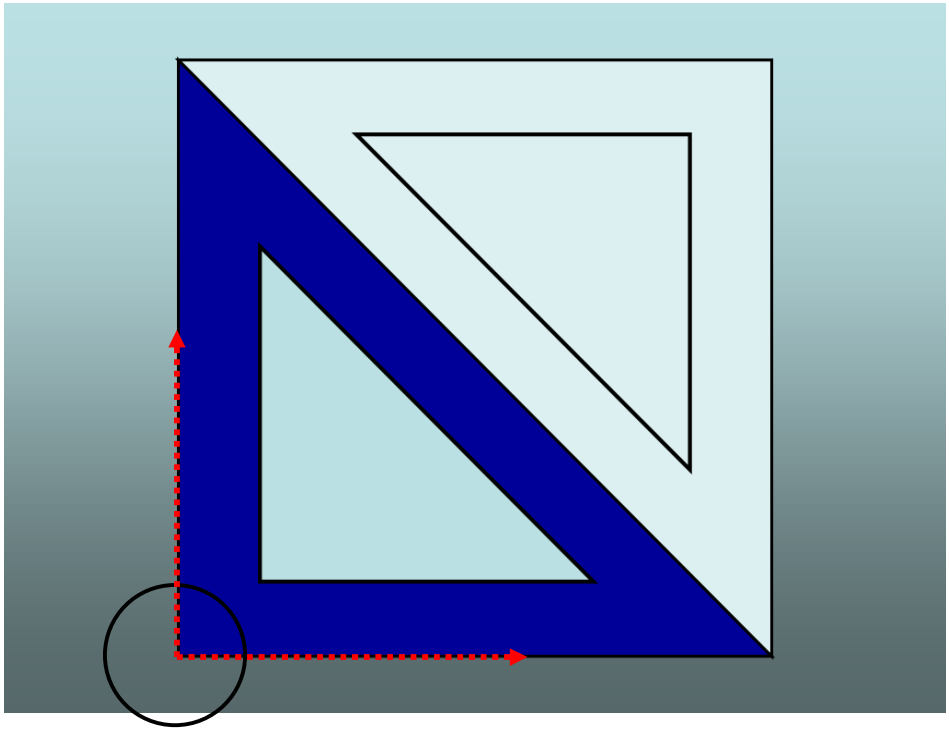


P: Y aquí, ¿qué fracción de giro sería?

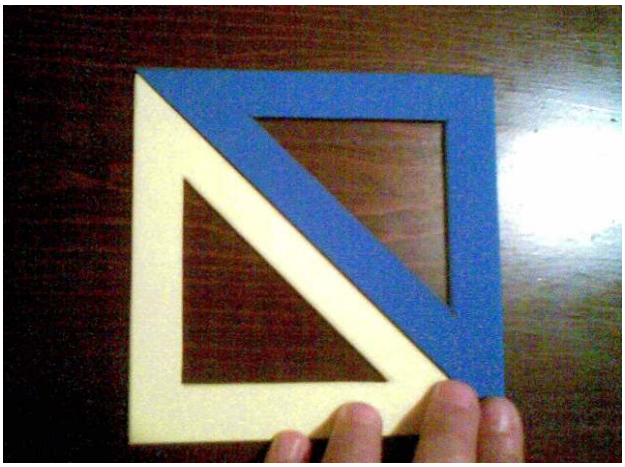
R: ¼

P: ¿A cuántos grados equivale?

R: A 90 grados.



El docente presenta una escuadra similar con material de fomi y mucho más pequeña que la proyectada en el pizarrón:



P: Esta otra escuadra es más pequeña que la proyectada, ¿de qué figura geométrica viene esta escuadra?

R: De un cuadrado

P: ¿Cuánto medirán los ángulos de sus tres vértices?

R: 45, 45 y 90

P: En el pizarrón está proyectada una escuadra enorme y yo aquí tengo una más pequeña, ¿tienen los mismos ángulos?

R: Sí

P: ¿Por qué?

R_1: Porque sigue siendo la misma fracción de giro

R_2: Porque sigue siendo la mitad de un cuadrado.

P: ¿Ambas siguen siendo la mitad de un cuadrado?

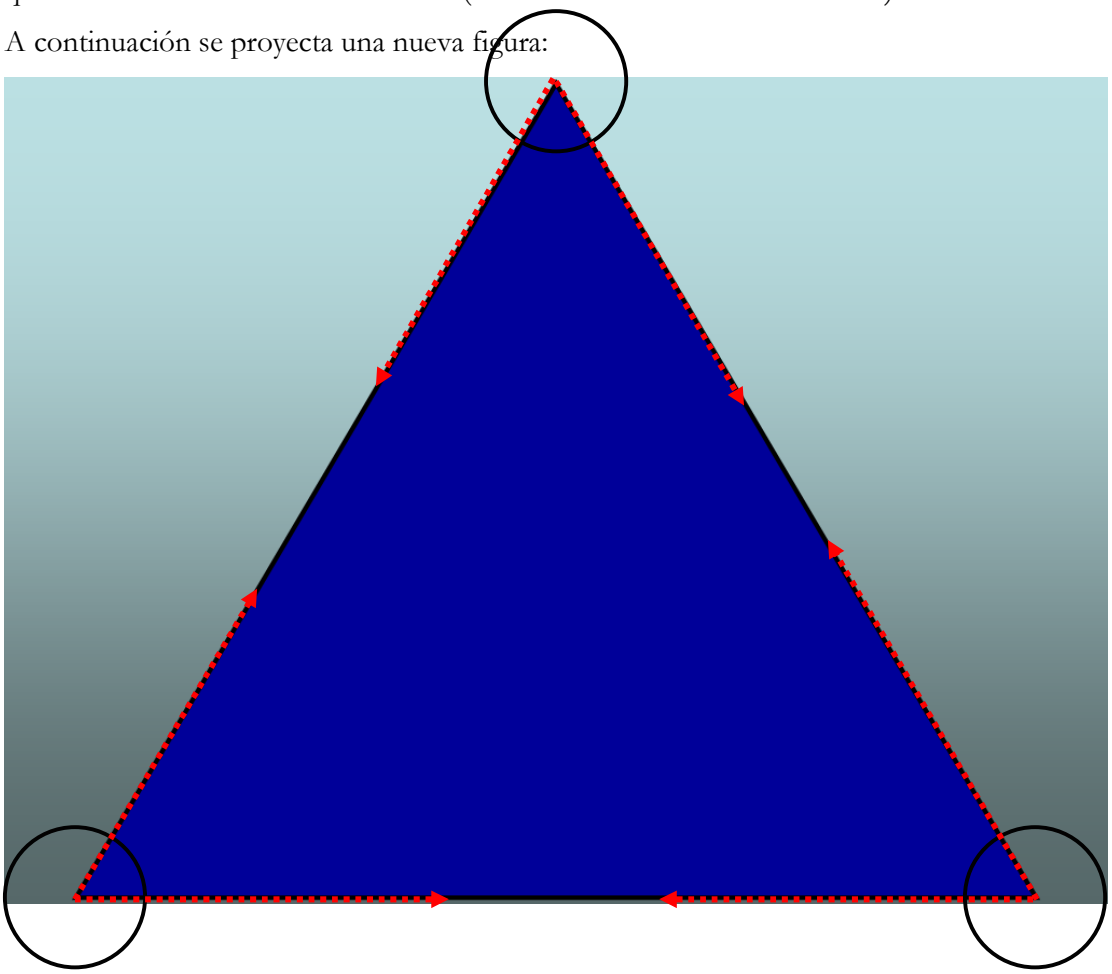
R: Sí

En esta parte, el alumno está comunicando sus conclusiones y demostrando sus respuestas al momento de explicar sus deducciones.

Se está trabajando con cualidades del ángulo en el momento en que se especifica que no importa el tamaño del objeto, el ángulo se mantiene. Se trabaja también la parte cuantitativa del ángulo en el momento en que se establece una magnitud para medirlo, en términos de fracción o de grado.

Se trabaja la institucionalidad del concepto, en el momento en que la medida del ángulo se da en términos de grado, considerando que 1/360 equivale a 1°, para lo cual el alumno tiene que hacer las conversiones necesarias (a través de abstracciones sucesivas).

A continuación se proyecta una nueva figura:



P: Fíjate en esta otra figura, ¿Qué figura es?

R: Un triángulo equilátero

P: Después de trabajar con el cuadrado, trabajaste con el triángulo equilátero, ¿qué fracción encontraste en este vértice?

R: 1/6

P: Y en 1/6 de giro, ¿qué ángulo está presente?

R: 60 grados

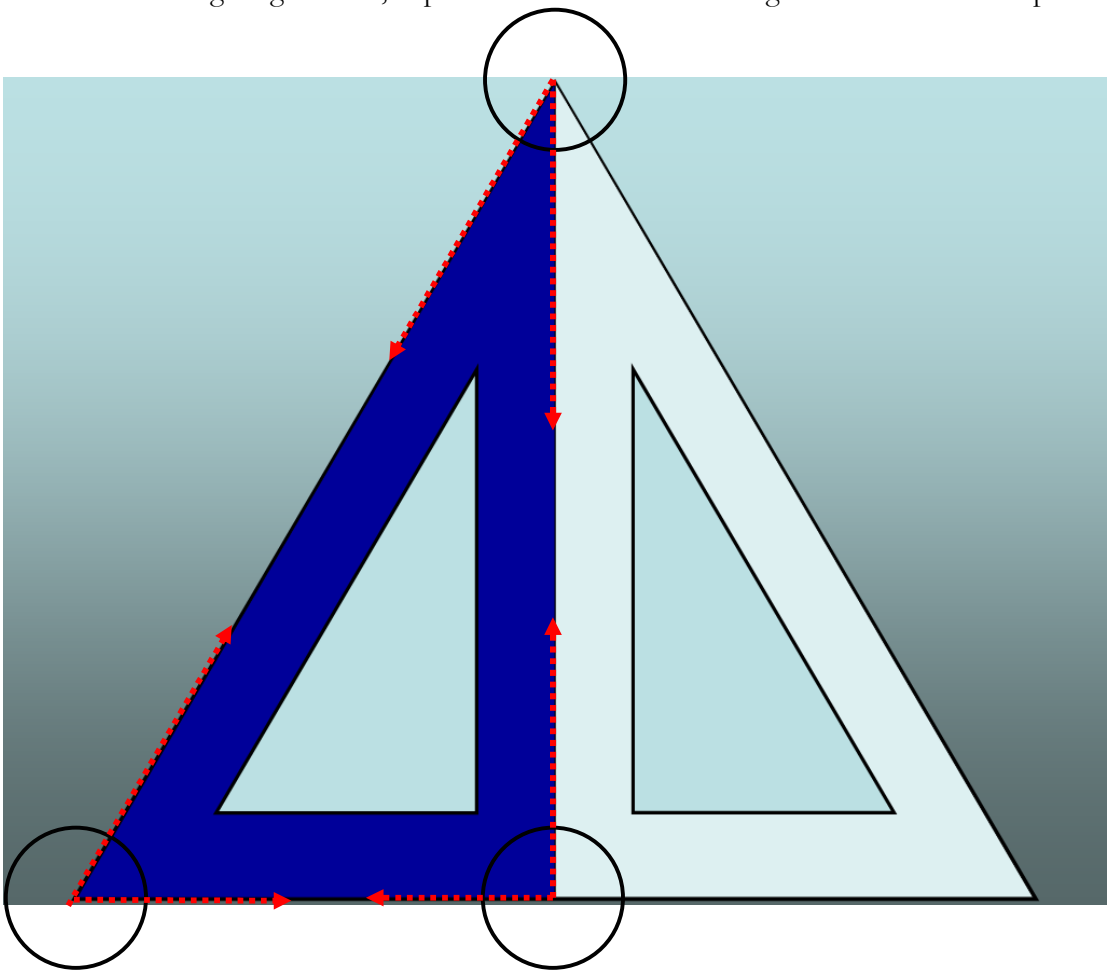
P: y, ¿en este otro vértice?

R: También 60 grados

P: Fíjate en esta otra imagen, ¿a qué te recuerda?

R: A las escuadras

El docente presenta la siguiente imagen y pasa a un alumno al pizarrón para que anote en cada vértice el ángulo generado, dependiendo de la fracción de giro existente en cada punto:

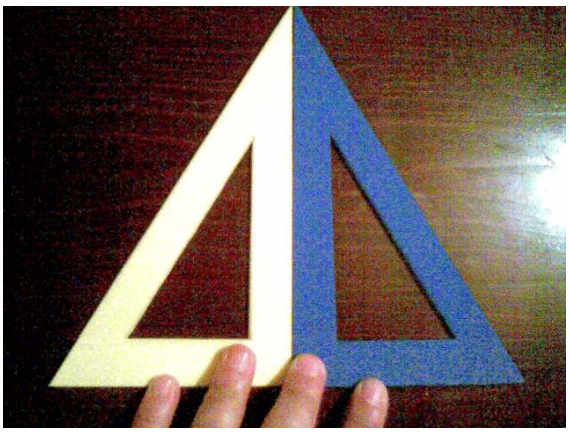


P: En la escuadra azul fuerte, anota los ángulos presentes en cada vértice.

El alumno explica sus anotaciones:

R: En la esquina inferior izquierda tenemos un ángulo de 60 grados. El superior es de 30 porque se divide el de 60 a la mitad. Y el inferior derecho es de 90 grados.
P: ¿Qué fracción de giro hay en el superior?
R: 1/12 de giro

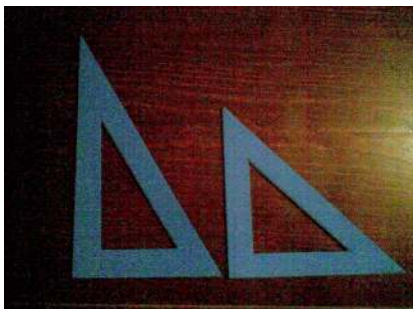
El docente muestra una escuadra similar a la proyectada, pero más pequeña:



P: Si tengo esta escuadra pequeña, los ángulos ¿serán los mismos? O ¿diferentes?
R: Serán los mismos
P: ¿Por qué?
R: Porque sigue siendo la mitad de un triángulo equilátero.

En esta parte reafirmamos la parte cualitativa del ángulo en el momento en que el alumno identifica que no importa el tamaño de la escuadra, los ángulos se mantienen. También trabajamos la parte cuantitativa en el momento en que se da una magnitud para medir cada vértice en términos de fracción y en términos de grado. El alumno tiene que recuperar la información de las actividades realizadas al inicio de la secuencia para establecer conexiones con este nuevo material (abstracciones sucesivas).

El docente ahora muestra dos juegos de escuadras de fomi y pregunta:



P: Con estos dos juegos de escuadras, ¿cómo formarías el cuadrado y el triángulo equilátero?, ¿Quiénes pasan?

Pasan al frente dos alumnos y cada uno toma un juego de escuadras. Ellos preguntan:

$P_{alumnos}$: ¿Con estas debemos formar el cuadrado y el triángulo equilátero?

$R_{docente}$: Sí

$P_{alumnos}$: ¿Pero con estos?

$R_{docente}$: Sí, con esos

$P_{alumnos}$: ¿No podemos cambiarlos?

$R_{docente}$: Sí, si pueden

Intercambiaron escuadras de tal manera que un alumno se quedó con los dos triángulos isósceles (escuadras de 45°) y el otro con los triángulos escalenos (escuadras de 30° y 60°). Con las dos primeras, un alumno formó el cuadrado y con las otras dos, otro alumno formó el triángulo equilátero. Pero tuvieron que intercambiarlas.

Con este último ejercicio, los alumnos encontraron una aplicación de lo aprendido en un material que es de uso común en la escuela. Lograron manipular el cuadrado y el triángulo equilátero para encontrar fracciones de giro o porciones generadas en el círculo, para construir la relación de lo anterior con el reloj y con el transportador y encontrar la equivalencia de esas fracciones de giro con lo que representa un grado identificándolo en el transportador. Para ello tuvieron que realizar una serie de abstracciones, clasificaciones y relaciones hasta llegar al concepto de grado. Realizaron diferentes acciones, comunicaron

sus resultados y validaron sus respuestas para llegar a la Institucionalización del concepto con la ayuda del docente.

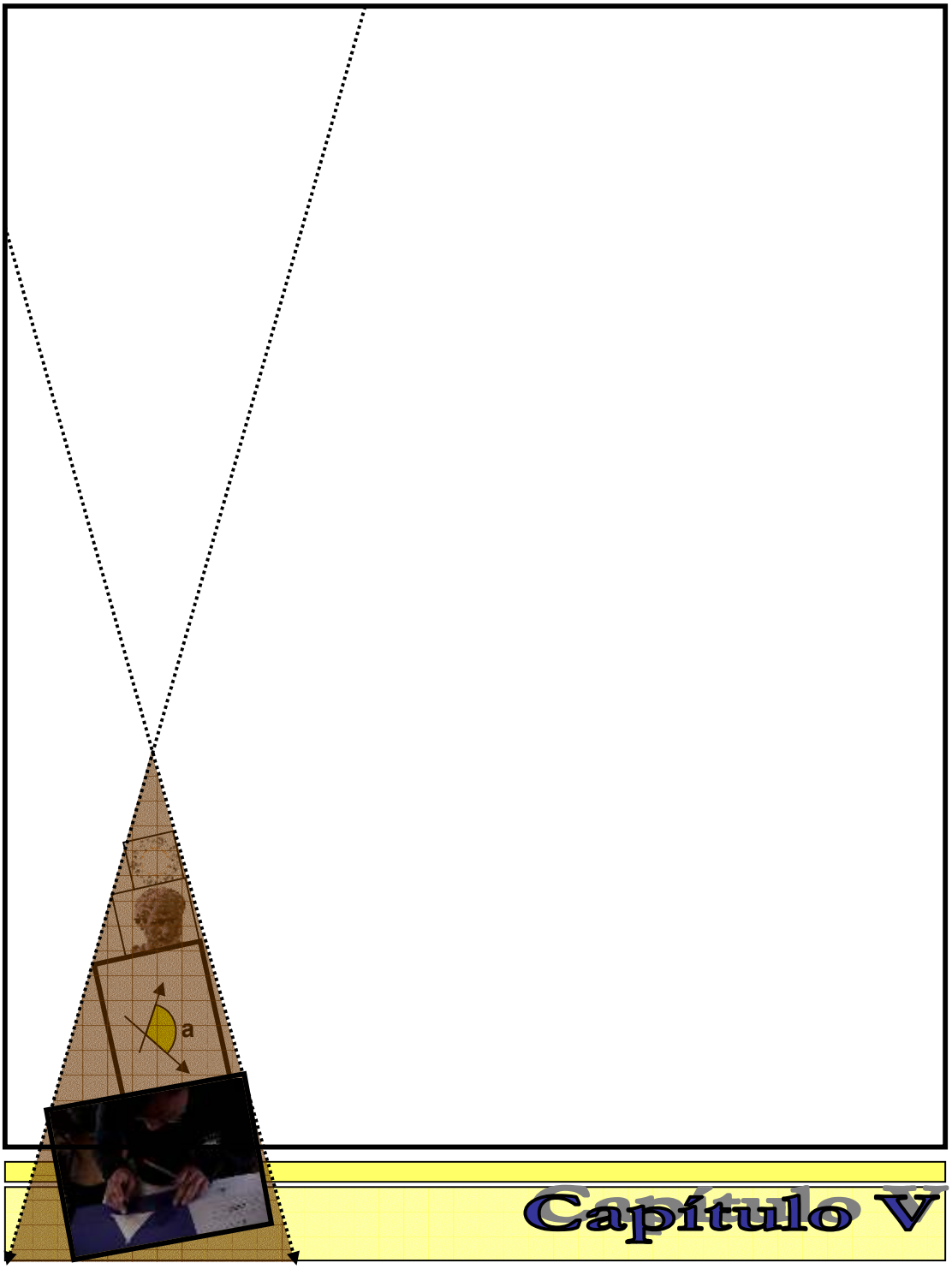
Manejaron la parte cualitativa del ángulo, al manejarlo como giro y como fracción de circunferencia, establecieron que no importa el tamaño de sus lados pues se conserva el giro o la porción y que puede generarse en ambos sentidos (en el sentido del giro de las manecillas del reloj y viceversa).

También se trabajó con la parte cuantitativa desde el momento en que se estableció una magnitud, primero como fracción y finalmente como ángulo.

Finalmente, se les pidió a los alumnos que en la parte de atrás de su secuencia, anotaran una definición para ángulo. En el anexo 2, se podrán consultar todas ellas. Sin embargo, algunas de las definiciones que ellos escribieron fueron las siguientes:

P: ¿Qué es para ti un ángulo?

A_1: Es una fracción pero se representa en grados.
A_2: Los grados que contiene una figura.
A_3: Un ángulo es una medida de un punto de una figura.
A_4: La unión de dos líneas rectas.
A_5: Un ángulo es una unión de líneas que dejan de un vértice un espacio. (y dibuja un triángulo marcando los ángulos de cada vértice)
A_6: La abertura que queda al unir 2 líneas formando una punta. (Y dibuja un ejemplo)
A_7: Es la parte de una figura, una medida.
A_8: Es un tipo de medición para las figuras y es la parte de una figura
A_9: Una abertura que puede medir varios grados
A_{10}: Es la esquina de un triángulo.



Capítulo V

V. RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA.

Con base en la investigación realizada sobre la construcción del concepto de ángulo podemos establecer los siguientes resultados:

1. EN CUANTO A SU USO

Se logró que el alumno usara la noción escolar de ángulo manipulándolo a través de diferentes figuras geométricas, sin saber de qué se trataba. Incluso llegó a pensar que el tema tratado era el concepto de fracción.

2. EN CUANTO A SU NATURALEZA CUALITATIVA

En la secuencia se favoreció que el alumno trabajara el ángulo en su forma estática, cuando sombreaba la fracción encontrada en el círculo, y de forma dinámica, a través de los giros. Esto propiciaba un paso de la forma a la medida.

Se favoreció también, el que el alumno encontrara que no importa el tamaño de la figura, o la longitud de los lados de la misma, el ángulo, el giro, o la fracción se conservan.

Se logró que el alumno identificara que para medir un ángulo, no es necesario iniciar en el punto "A" de su esquema. La referencia, o el punto de inicio no es único, se determina.

3. EN CUANTO A SU NATURALEZA CUANTITATIVA

Se logró que el alumno cuantificara los giros o las porciones del círculo sombreadas. Las expresiones usadas se dieron en términos de fracciones: ¼, 1/8, 1/6, 1/12 Hacia el final de la secuencia, en una fase de institucionalización, se relacionaron estas cantidades con el ángulo en cada vértice: 90º, 45º, 60º, 30º, respectivamente.

En la secuencia, se favoreció el que los alumnos identificaran que un ángulo puede medirse en el sentido de las manecillas del reloj, y en el sentido contrario.

4. EN CUANTO A SU NATURALEZA COMO RELACIÓN

En la secuencia, se logró que el alumno identificara en el transportador, lo que representa 1/360 de parte o giro.

Identificó también que el giro de un ángulo puede realizarse en el sentido de las manecillas del reloj, o en el sentido contrario.

5. EN CUANTO A SU EXPERIENCIAS COTIDIANAS DONDE EL ÁNGULO ESTÁ PRESENTE

Se inició con las figuras geométricas conocidas (cuadrado, triángulo, equilátero, triángulo isósceles, triángulo escaleno), primero identificando en ellos los giros necesarios para cubrir una circunferencia completa.

Se favoreció el que el alumno identificara la presencia del ángulo en el reloj, como giros que pueden darse en ambos sentidos.

Se favoreció el que el alumno trabajara con elementos escolares donde el ángulo está presente.

6. EN CUANTO A LA CLASIFICACIÓN DE SITUACIONES ESPECÍFICAS

Se logró que el alumno relacionara la figura trabajada, con la fracción de giro obtenida en cada caso. Y también se logró que relacionara esa figura con las divisiones correspondientes obtenidas en el círculo al girarlo.

7. EN CUANTO A LOS CONTEXTOS GENERALES BUSCANDO SIMILITUDES Y RELACIONES.

Se logró que el alumno encontrara relaciones entre diferentes partes de giro, relacionadas con las diferentes partes del círculo.

8. EN CUANTO A LA ABSTRACCIÓN Y DEFINICIÓN DEL CONCEPTO.

Conforme se avanzó en la secuencia el alumno abandonaba el uso de material manipulable, lo cual plantea evidencia del proceso de abstracción sucesiva reportado por Mitchelmore y White, para la construcción del concepto.

Se logró que el alumno visualizara 1/360 parte del círculo o giro y los relacionara con el reloj o el transportador. Sin embargo, asociar esta construcción al concepto de grado fue labor del profesor institucionalizando el saber.

Finalmente se logró que el alumno identificara las escuadras como mitades del cuadrado y del equilátero, identificando los ángulos de 90, 30, 60 y 45 en ellas.

9. EN CUANTO A LA SITUACIÓN ADIDÁCTICA DE ACCIÓN.

Se logró que el alumno manipulara objetos como fueron las figuras geométricas básicas.

10. EN CUANTO A LA SITUACIÓN ADIDÁCTICA DE FORMULACIÓN.

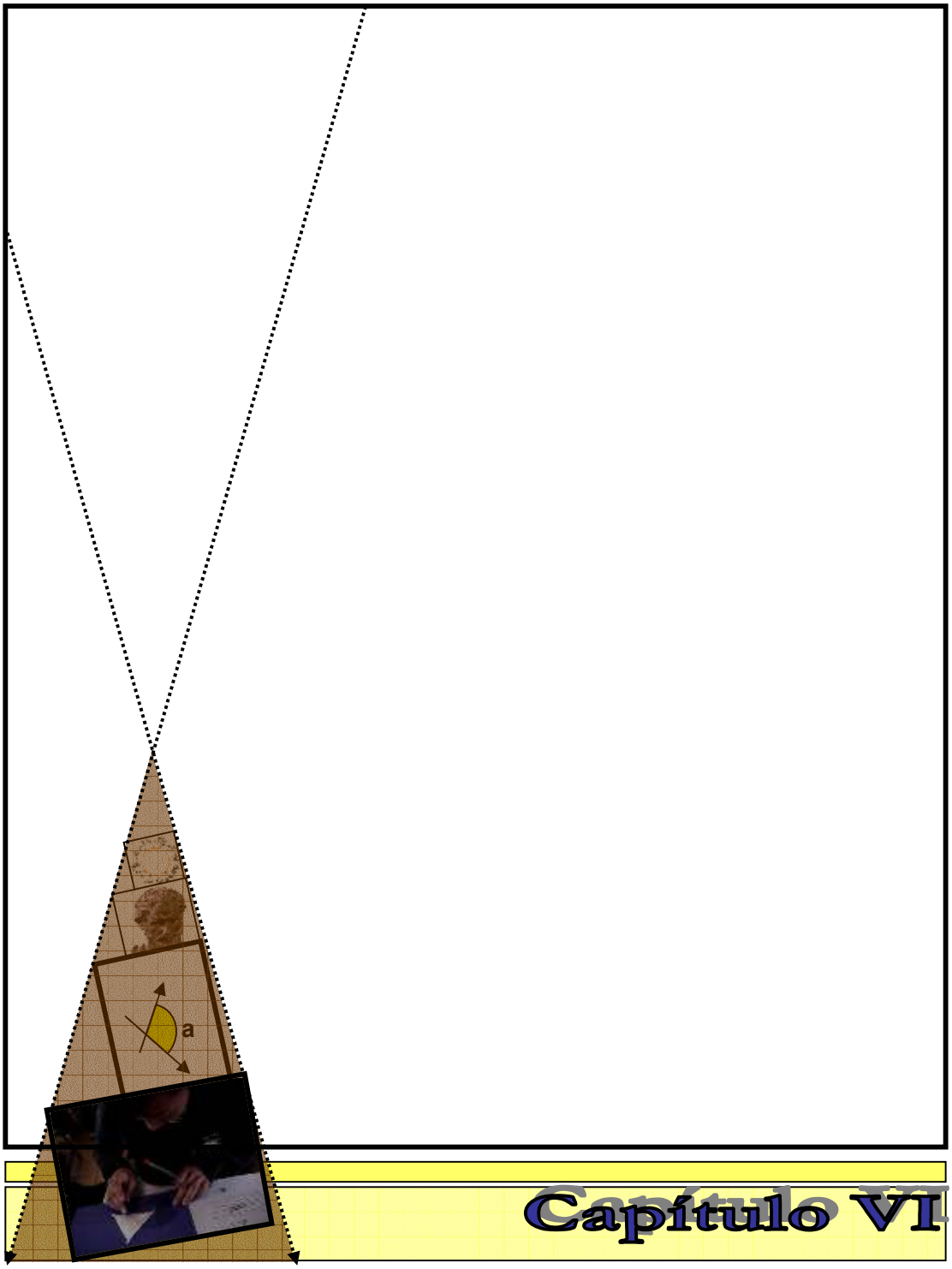
La secuencia favoreció que el alumno generara hipótesis y comunicara sus observaciones y resultados.

11. EN CUANTO A LA SITUACIÓN ADIDÁCTICA DE VALIDACIÓN.

Se favoreció el que el alumno demostrara y comprobara sus hipótesis y cada alumno a su propio ritmo.

12. EN CUANTO A LA SITUACIÓN DIDÁCTICA DE INSTITUCIONALIZACIÓN.

Se alcanzó que el docente finalizara la secuencia institucionalizando el saber, en el momento en que se establece la relación de 1/360 parte de giro con un grado y se favorece el que el alumno idenfique ahora esas fracciones de giro o parte con ángulos.



Capítulo VI

VI. CONCLUSIONES GENERALES.

En el presente trabajo de investigación, hemos desarrollado uno de los temas escolares más complicados dentro de la currícula escolar: "el ángulo". Cabe mencionar que a lo largo de los años escolares de todo estudiante, en nuestro sistema escolar, el concepto de ángulo juega un papel importante para el desarrollo de muchos otros temas escolares en el área de las matemáticas y de otras disciplinas. Sin embargo, el estudio y construcción del concepto, como un inicio, es en la mayoría de los casos incompleto y poco profundo.

En la primaria, el alumno se enfrenta al concepto hasta el 4° año y su construcción es muy simple. Y, posteriormente, se pretende que lo aplique en la construcción de otros temas.

Básicamente, la naturaleza del concepto, no es explotada en todos sus sentidos. Comúnmente trabajamos más la parte cuantitativa y de relación, que las cualidades propias del concepto, que le permitan al estudiante enfrentarse a sus diferentes facetas.

La intención de la presente propuesta es un intento de trabajar con más detalle la construcción de este complicado concepto, intentando abordar no sólo la medición y la definición del concepto, sino trabajar la parte cualitativa del mismo que muchas veces ignoramos o consideramos de naturaleza trivial.

El estudio epistemológico del concepto nos demuestra, que a lo largo de la historia, el ángulo se usó y posteriormente se definió con diferentes discusiones sobre su naturaleza. Y, hasta nuestros días, esa discusión aún no termina. De ahí la complejidad del concepto que muchas veces queremos abordar en el salón de clases desde una perspectiva más simple.

En un primer momento se habló de "uso" dentro de las culturas primitivas en cuanto a inclinación y dirección, ambos presentes en la arquitectura y en el estudio de los movimientos de los astros. Incluso, en la cultura babilonia se habla de la división de la circunferencia en 360 partes que tiene que ver con sus calendarios.

En ambas situaciones, está presente la forma (características del ángulo por la inclinación, por lo estático presente en sus edificios y en lo dinámico presente en el movimiento de los astros) y también en la medida en el momento en que la circunferencia está dividida en 360 partes por sus estudios de astronomía.

Al final, en la secuencia, el alumno maneja la forma y la medida (inclinación de los lados y dirección de los movimientos), usando el ángulo sin tener una definición del mismo y sin ser explícito el conocimiento para el estudiante. Y al mismo tiempo, está trabajando la forma y la medida.

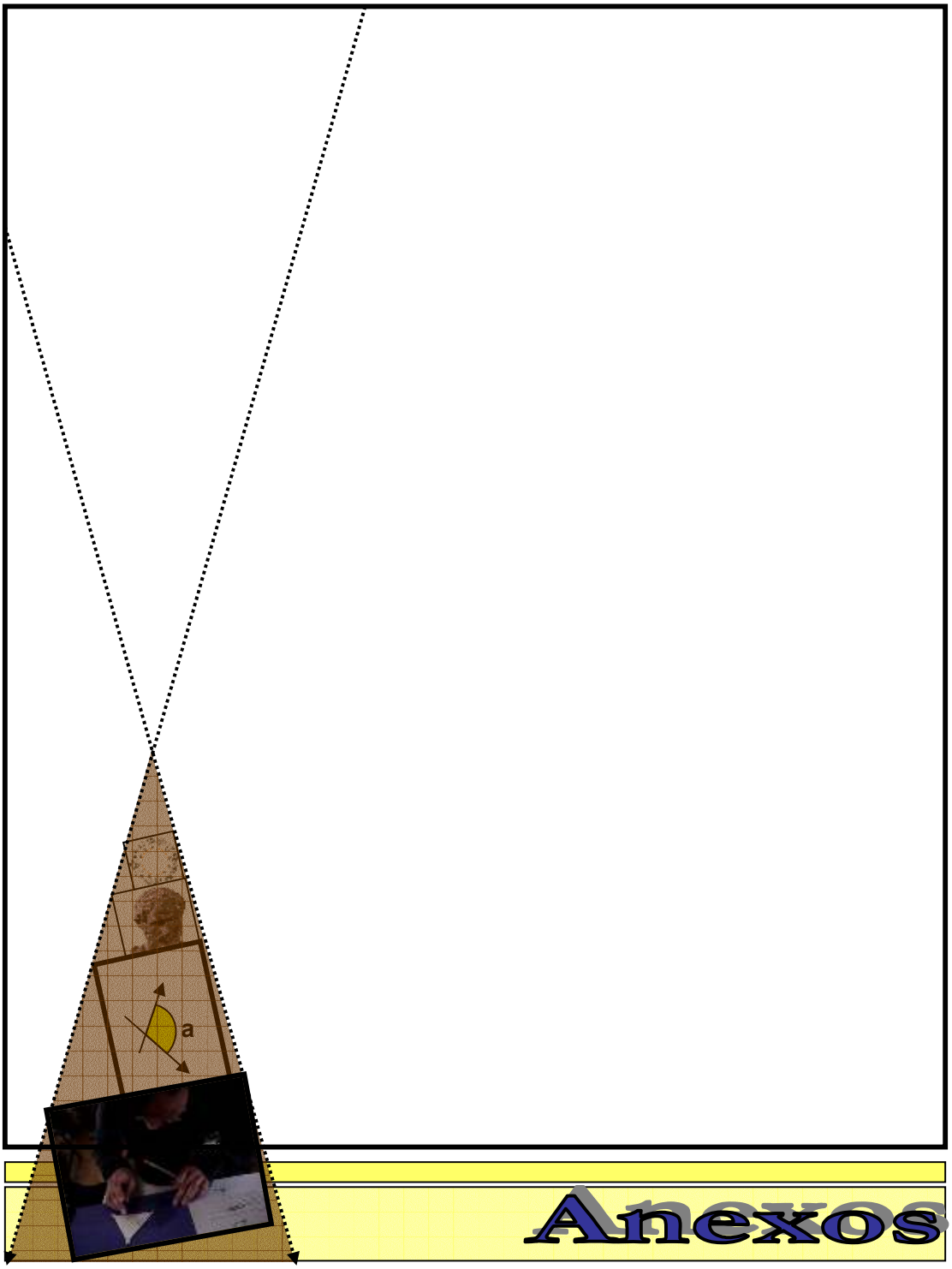
Como investigadores dentro de la Matemática Educativa, queda demostrado que la Teoría puede darnos elementos importantes que permitan explicar cómo es que un concepto muchas veces presenta diferentes complicaciones de tipo cognitivo, didáctico y fundamentalmente epistemológico. Entender que el propio concepto es por sí mismo, un caso importante a estudiar y que, el estudio de su naturaleza, puede aportarnos elementos importantes que podemos considerar a la hora de diseñar nuestras estrategias didácticas.

Por otro lado, el uso de la Ingeniería Didáctica, nos permite trabajar el concepto con mayor profundidad, para lograr un diseño didáctico que integre, de manera sistémica, todas las componentes que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En conclusión, este trabajo pretende aportar las bases para posteriores diseños didácticos que permitan enriquecer el concepto sobre todo desde las primeras construcciones escolares.

Considero que todavía hay mucho por hacer, pues en este primer intento, el alumno construye de manera estática y dinámica el concepto obteniendo, entre otras cosas, un instrumento escolar que ayuda a medir el ángulo: el transportador. Faltaría trabajar más el concepto, en otras figuras geométricas y en otras actividades de diversas disciplinas donde el ángulo esté presente, por ejemplo, en la resolución de problemas.

Creo también, que el uso de la tecnología, podría aportar diferentes oportunidades de explotar aún más las características cualitativas, cuantitativas y de relación presentes en el concepto.



Anexos

ANEXO NO. 1

Secuencia Didáctica para el alumno

PRIMERA PARTE

NOMBRE _____ **GRADO** _____

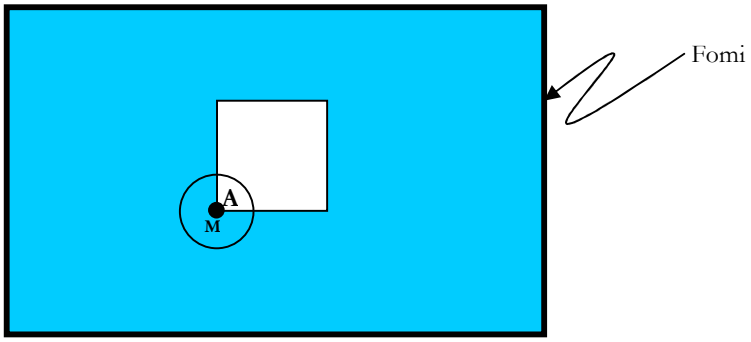
FECHA _____

Recibirás el siguiente material:

1. Base de Fomi
2. Un cuadrado.
3. Tres círculos de Mica de diferentes tamaños.
4. Plumones indelebles
5. Chinches
6. Regla graduada

Sobre la base de Fomi, coloca el cuadrado No. 1.

Coloca el centro "M" del círculo No. 1 sobre el vértice "A" del cuadrado y fíjalos con una chinche:



¿Cuántos lados del cuadrado comparten el vértice "A"?_____

Remarca con el plumón, desde el vértice "A", esos lados sólo sobre la mica circular. Ayúdate de la regla graduada.

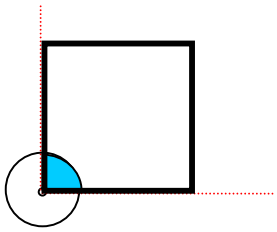
Sombrea en el círculo (con el plumón indeleble), el espacio que se encima en el cuadrado:

¿Qué fracción del círculo sombreaste?_____

¿Cómo puedes comprobarlo?_____

Sombrea, con varios colores en este esquema, las diferentes partes iguales que encontraste en el círculo:

(Una parte ya está sombreada)



Retira el círculo No. 1

Sobre el mismo cuadrado, coloca ahora el círculo No.2 de tal manera que el centro del mismo coincida con el vértice "A" del cuadrado. (Utiliza una chinche para fijarlos)

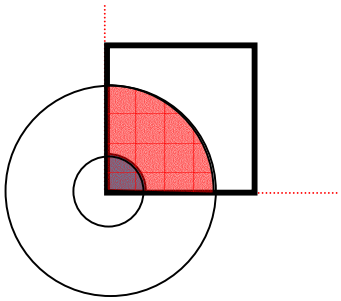
Traza las líneas que salen desde el centro del círculo y coinciden con los lados del cuadrado. Márcalos sólo sobre la mica.

Sombrea en el círculo, la parte que se encuentra sobre el cuadrado.

¿Qué parte del círculo sombreaste?_____

¿Cómo lo compruebas?_____

Sobre el Cuadrado No. 1, coloca ahora el círculo 1 y el círculo 2, haciendo coincidir los centros con el vértice del cuadrado:

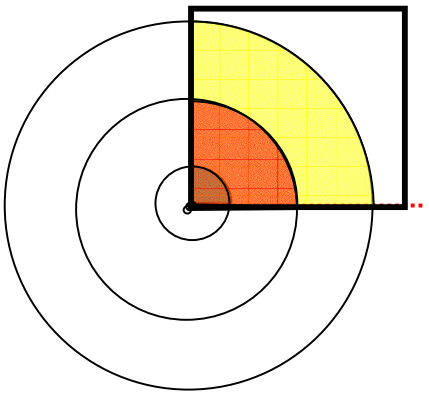


¿Qué parte del círculo 2 está encima del cuadrado?_____

¿Qué parte del círculo 1 está encima del cuadrado?_____

Repite la actividad ahora con el círculo No. 3

Ahora, toma los tres círculos, haz coincidir los centros con el vértice del cuadrado.



Responde:

¿Qué parte o fracción quedó delimitada del círculo 1?_____

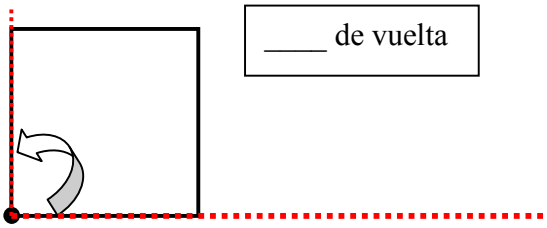
¿Qué parte o fracción quedó delimitada del círculo 2?_____

¿Qué parte o fracción quedó delimitada del círculo 3?_____

¿Son iguales las áreas delimitadas?_____

¿Si utilizaras un cuadrado más grande, cambiaría la fracción sombreada?_____

Vamos a denominar a esta fracción o este giro como _____de vuelta y nos vamos a guiar por la esquina del cuadrado:



SEGUNDA PARTE

NOMBRE _____ **GRADO** _____

FECHA _____

Recibirás el siguiente material:

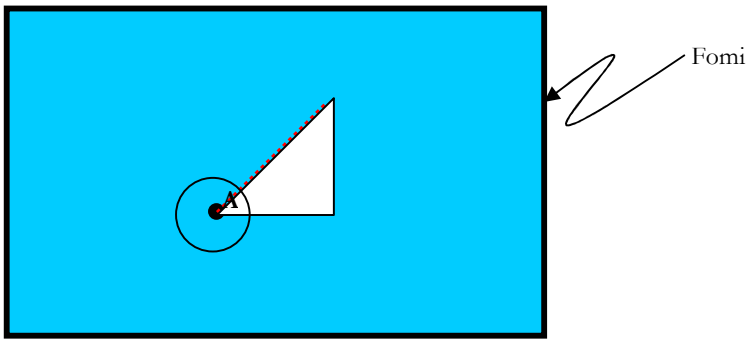
1. Base de Fomi
2. Un cuadrado.
3. Tres círculos de Mica de diferentes tamaños.
4. Plumones indelebles
5. Chinches
6. Regla graduada
7. Tijeras

Trazar la diagonal AC en el cuadrado

Recorta por la diagonal:

¿Qué figura tienes ahora?_____

Coloca la mica del círculo No. 1 sobre la figura, de tal manera que el centro del mismo coincida con el vértice A del nuevo triángulo. Utiliza una chinche para fijarla:



¿Cuántos lados del triángulo comparten el vértice "A"?_____

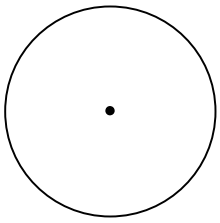
Remarca desde A esos lados con el plumón y la regla. (Sólo sobre la mica)

Sombrea la sección del círculo que está encima del triángulo:

¿Qué parte del círculo representa el área sombreada?_____

Gira el círculo sobre el vértice A para encontrar cuántos giros iguales puedes hacer. ¿Cuántos fueron?_____

Dibuja en el siguiente círculo las diferentes partes que encontraste:



Cada parte representa _____ de vuelta.

Realiza lo mismo con el círculo No. 2 y con el mismo triángulo rectángulo.

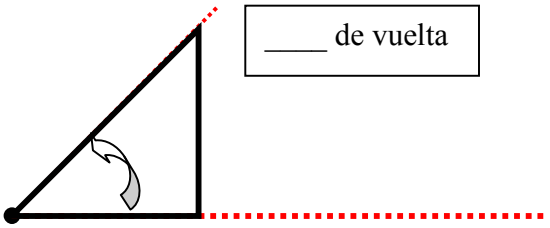
¿Qué parte quedó delimitada del círculo 2?_____

Si realizaras lo mismo con el círculo 3, ¿Qué parte quedaría delimitada del círculo 3? _____

Serán iguales las áreas delimitadas?_____

¿Cambiaría la parte delimitada si usas la mitad de otro cuadrado más grande o más pequeño?_____

Vamos a denominar este giro como _____de vuelta y nos vamos a guiar por la esquina A del medio cuadrado:



TERCERA PARTE

NOMBRE _____ **GRADO** _____

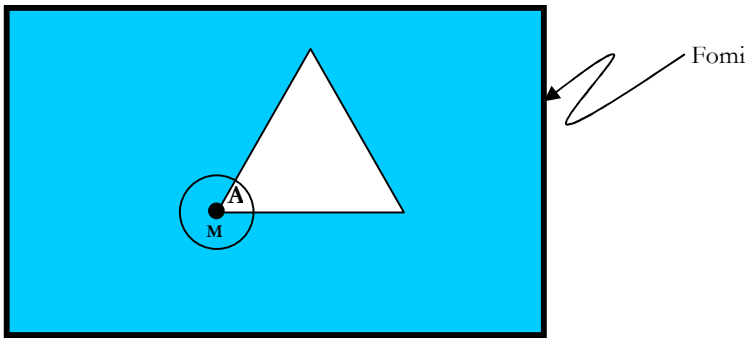
FECHA _____

Recibirás el siguiente material:

1. Base de Fomi
2. Un triángulo equilátero.
3. Tres círculos de Mica de diferentes tamaños.
4. Plumones indelebles
5. Chinches
6. Regla graduada

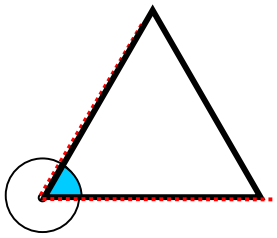
Sobre la base de Fomi, coloca el triángulo equilátero.

Coloca el centro "M" del círculo No. 1 sobre el vértice "A" del triángulo equilátero y fíjalos con una chinche:



Con la regla traza una línea que salga del centro del círculo y coincida con uno de los lados del triángulo. Realiza lo mismo sobre el otro lado del triángulo que comparte el mismo vértice.(sólo traza sobre la mica)

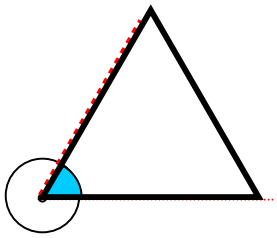
Sombrea en el círculo (con el plumón indeleble), el espacio que se encima en el triángulo equilátero:



¿Qué parte del círculo sombreaste?_____

¿Cómo puedes comprobarlo?_____

Sombrea en este esquema, las diferentes partes iguales que encontraste en el círculo: (Una parte ya está sombreada)



Retira el círculo No. 1

Sobre el mismo triángulo equilátero, coloca ahora el círculo No.2 de tal manera que el centro del mismo coincida con el vértice "A" del triángulo. (Utiliza una chinche para fijarlos)

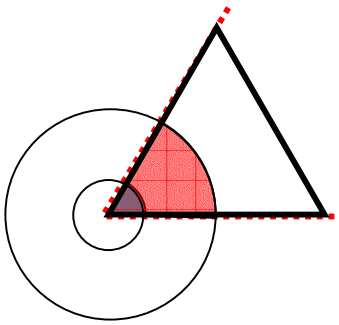
Traza las líneas que salen desde el centro del círculo y coinciden con los lados del triángulo equilátero. (Sólo en la mica)

Sombrea en el círculo, la parte que se encuentra sobre el triángulo equilátero.

¿Qué parte del círculo sombreaste?_____

¿Cómo lo compruebas?_____

Sobre el Triángulo equilátero, coloca ahora el círculo 1 y el círculo 2, haciendo coincidir los centros con el vértice del triángulo:



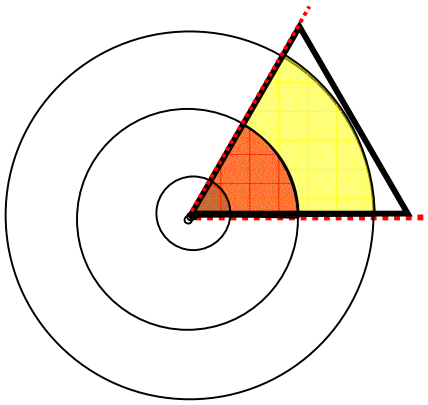
¿Qué parte del círculo 2 está encima del triángulo equilátero?_____

¿Qué parte del círculo 1 está encima del triángulo equilátero?_____

Repite lo mismo con el círculo No. 3

¿Qué parte de él sombreaste?_____

Ahora, toma los tres círculos, haz coincidir los centros con el vértice del triángulo equilátero, traza las líneas que salen desde el centro de la circunferencia y coincidan con los lados del triángulo:



¿Qué parte quedó delimitada del círculo 1?_____

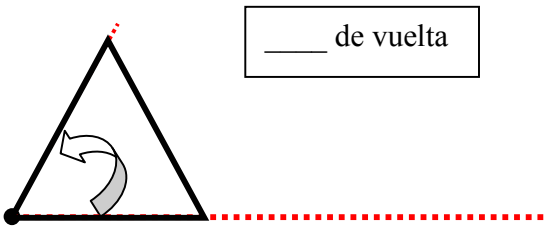
¿Qué parte quedó delimitada del círculo 2?_____

¿Qué parte quedó delimitada del círculo 3?_____

¿Son iguales las áreas delimitadas?_____

¿Cambiaría la parte o fracción sombreada si usas un triángulo equilátero más grande o más chico?_____

Vamos a denominar a esta fracción o giro como _____de vuelta y nos vamos a guiar por la esquina del triángulo equilátero:



CUARTA PARTE

NOMBRE _____ **GRADO** _____

FECHA _____

Recibirás el siguiente material:

1. Base de Fomi
2. Un triángulo equilátero.
3. Tres círculos de Mica de diferentes tamaños.
4. Plumones indelebles
5. Chinches
6. Regla graduada
7. Tijeras

Trazar la altura en el triángulo equilátero que pase por el vértice "B"

Recorta por esa línea:

¿Qué figura tienes ahora?_____

Trabajaremos ahora sobre el vértice "B"

Coloca la mica del círculo No. 1 sobre la figura, de tal manera que el centro del mismo coincida con el vértice B del nuevo triángulo. Utiliza una chinche para fijarla.

Sombrea la sección del círculo que está encima del triángulo:

¿Qué parte del círculo representa el área sombreada?_____

Gira el círculo sobre el vértice B para encontrar cuántos giros iguales puedes hacer.

¿Cuántos fueron?_____

Dibuja en el siguiente círculo las diferentes partes que encontraste:

Cada parte representa _____ de vuelta.

Realiza lo mismo con el círculo No. 2 y con el mismo triángulo rectángulo

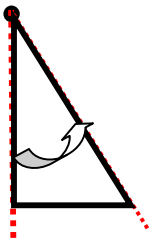
¿Qué parte quedó delimitada del círculo 2?_____

Si realizaras lo mismo con el círculo 3, ¿Qué parte quedaría delimitada del círculo 3? _____

¿Serán iguales las áreas delimitadas?_____

¿Cambiaría la parte o fracción delimitada si usas la mitad de otro triángulo equilátero más grande o más pequeño?_____

Vamos a denominar esta fracción o giro como _____de vuelta y nos vamos a guiar por la esquina B del medio Triángulo equilátero:



____ de vuelta

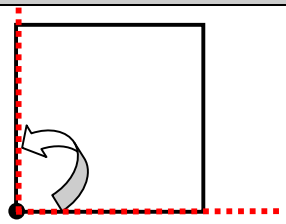
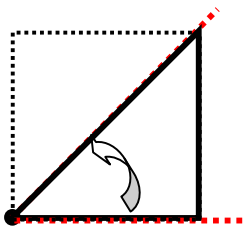
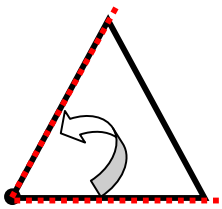
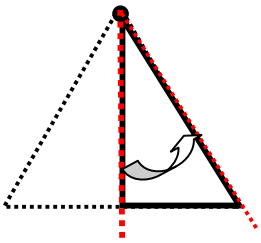
QUINTA PARTE

NOMBRE _____ **GRADO** _____

FECHA _____

Vamos a establecer conclusiones:

¿Cómo llenarías este cuadro?

Dibujo	Nombre de la figura	Giro
		
		
		
		

Sólo hemos trabajado dos figuras:

- Cuadrado
- Triángulo Equilátero

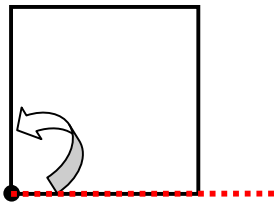
Y la mitad de cada uno

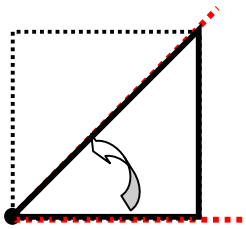
SEXTA PARTE

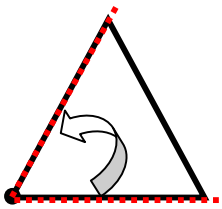
NOMBRE _____ **GRADO** _____

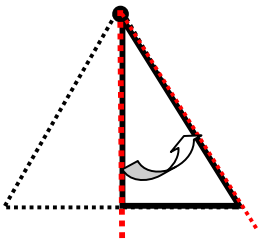
FECHA _____

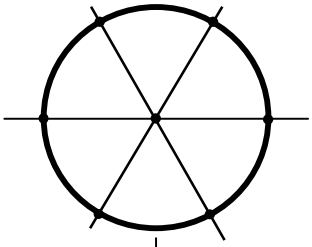
Relaciona ambas columnas con una línea:

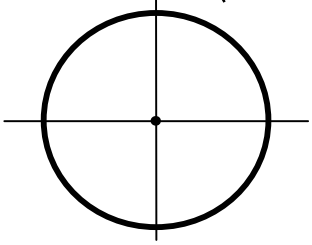


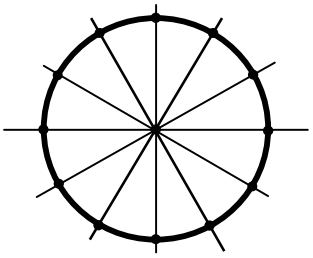


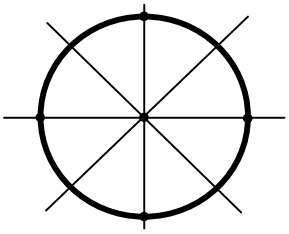




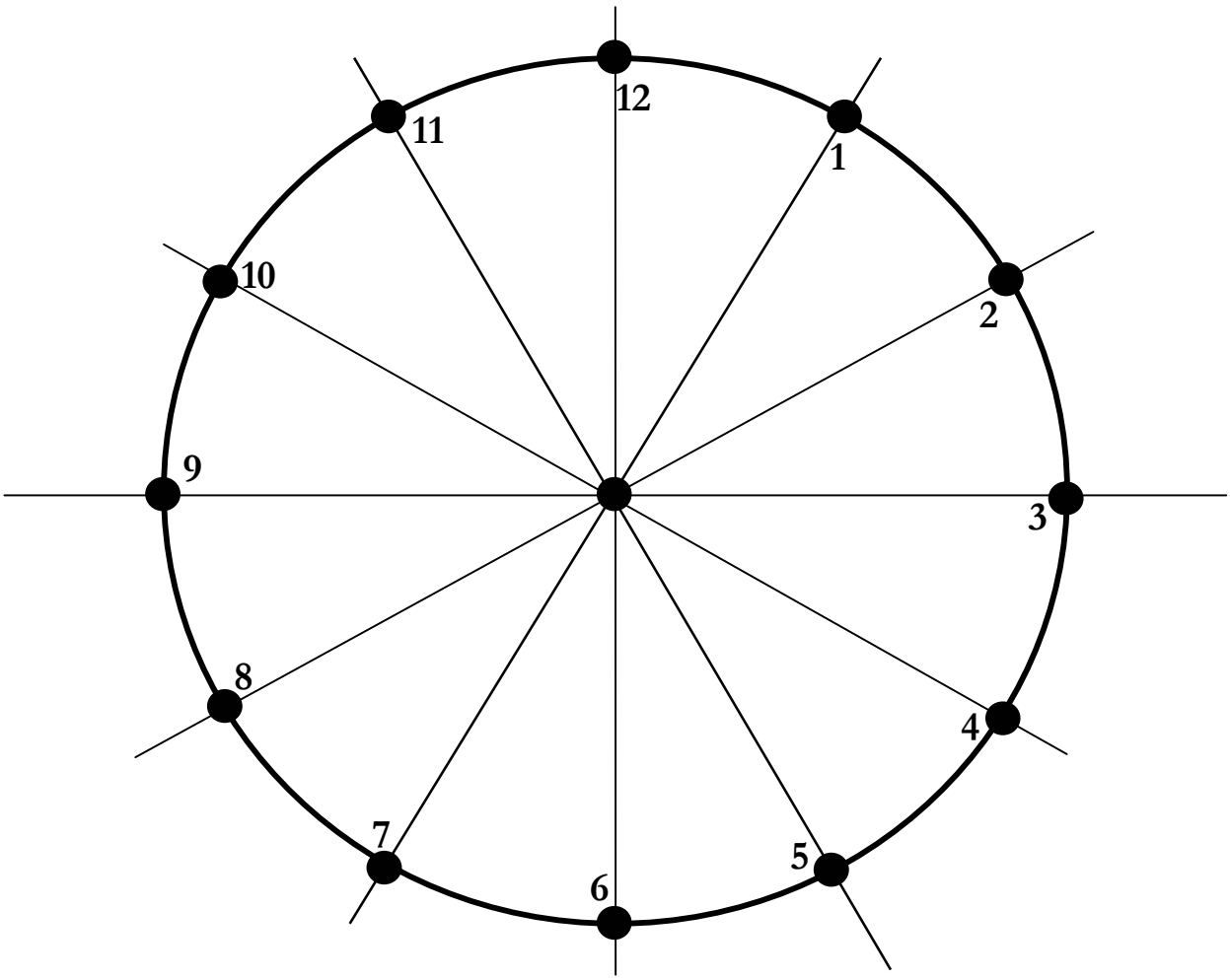








Tomemos el círculo con doce divisiones:



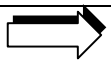
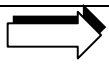
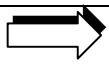
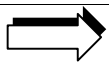
Recibirás el siguiente material:

1. Base de Fomi
2. Flecha
3. Tachuela

Coloca la hoja anterior sobre la base de fomi y fija la flecha con la tachuela al centro del círculo.

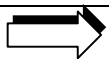
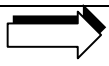
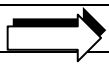
Realiza los siguientes giros y contesta:

Ubica la flecha en el punto 3. Ese será tu punto de inicio en cada caso:

	Gira la flecha hasta llegar al número 12. Ese giro equivale a _____de vuelta ¿En qué sentido giraste la fleca?_____
	Gira la flecha hasta llegar al número 9. Ese giro equivale a _____de vuelta. ¿En qué sentido giraste la flecha?_____
	Gira la flecha hasta llegar al número 1. Ese giro equivale a_____de vuelta ¿En qué sentido giraste la flecha?_____
	Gira la flecha hasta el número 4. Ese giro equivale a_____de vuelta ¿En qué sentido giraste la flecha?

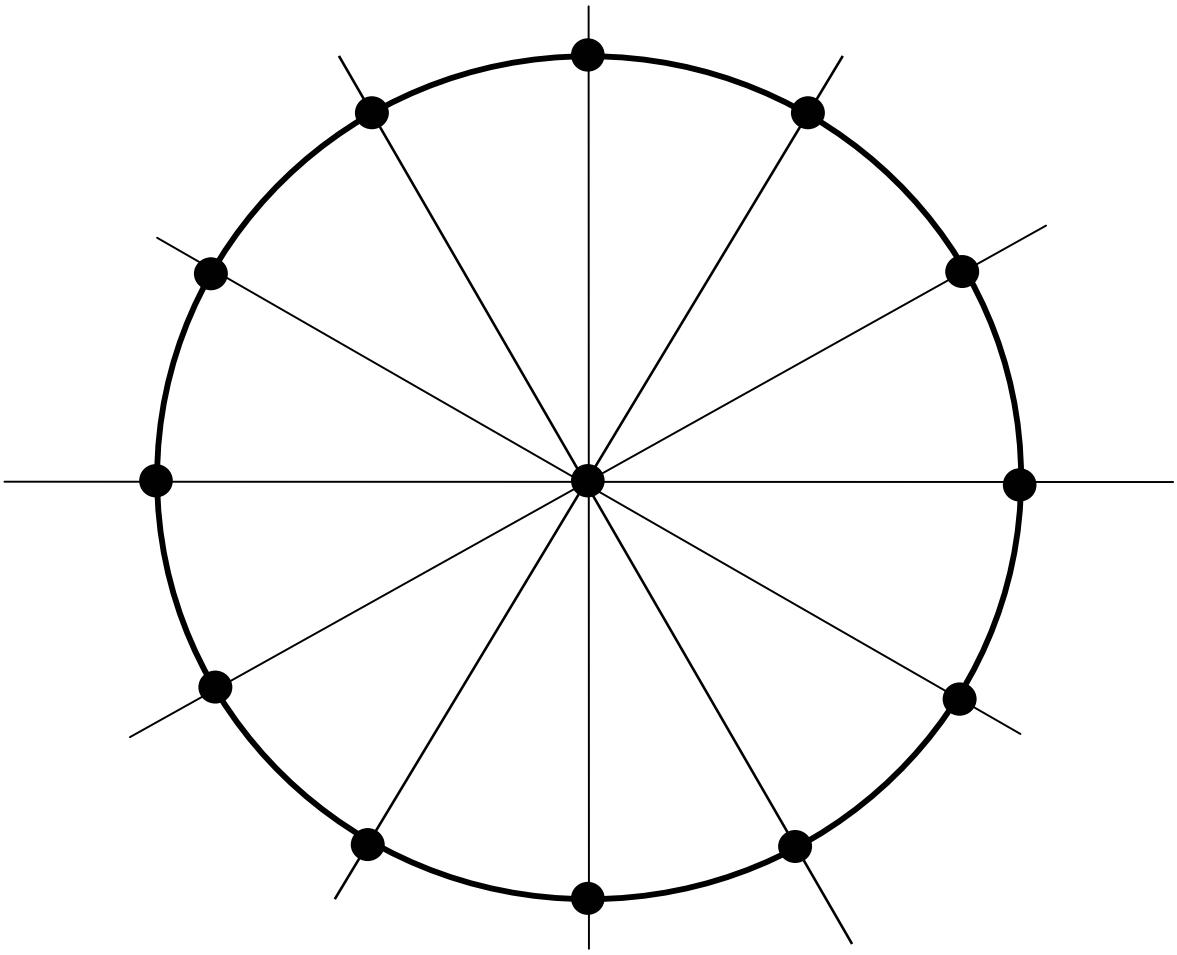
Ahora cambiemos el punto de inicio.

Ubica la flecha en el punto 9. Ese será ahora tu punto de inicio para cada uno de los siguientes movimientos:

	Gira la flecha hasta llegar al número 6. Ese giro equivale a _____de vuelta ¿En qué sentido giraste la fleca?_____
	Gira la flecha hasta llegar al número 3. Ese giro equivale a _____de vuelta. ¿En qué sentido giraste la flecha?_____
	Gira la flecha hasta llegar al número 7. Ese giro equivale a_____de vuelta ¿En qué sentido giraste la flecha?_____
	Gira la flecha hasta el número 2.

	Ese giro equivale a_____de vuelta ¿En qué sentido giraste la flecha?

Vamos a utilizar ahora la misma figura pero cada punto con una letra:



Coloca las letras en el siguiente orden:

Punto 3___ A

Punto 2___ B

Punto 1___ C

Punto 12__ D

Y así sucesivamente hasta llegar a la letra _____.

En las secuencias anteriores, dividiste el círculo en diferentes partes ayudándote de dos figuras: _____ y _____.

Imagina que seguimos dividiendo en partes más pequeñas.

¿Qué pasaría si cada doceavo ahora lo divides en treinta partes iguales?

¿Cuántas partes habría en 2/12? _____

¿Cuántas partes habría en 3/12? _____

¿Cuántas partes habría en ¼ de vuelta? _____

¿Cuántas partes habría en ½ giro? _____

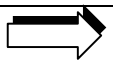
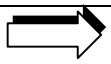
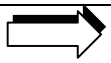
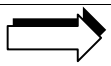
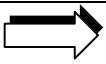
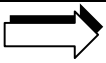
¿Cuántas partes habría en una vuelta completa? _____

Utiliza el círculo anterior con letras.

Fija la flecha con la tachuela.

Iniciemos en la letra A y contesta: (Recuerda que cada doceavo ahora está dividido en 30 partes más pequeñas)

Realiza tus giros en este sentido

	Gira la flecha desde A hasta B. Ese giro equivale a _____de vuelta
	Gira la flecha desde A hasta C. Ese giro equivale a _____de vuelta.
	Gira la flecha desde A hasta D. Ese giro equivale a_____de vuelta
	Gira la flecha desde A hasta G. Ese giro equivale a_____de vuelta
	Gira la flecha desde A hasta J. Ese giro equivale a_____de vuelta
	Gira la flecha desde A hasta A. Ese giro equivale a_____de vuelta

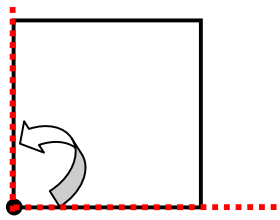
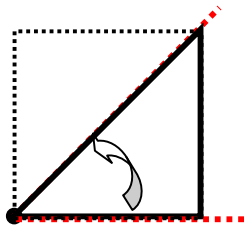
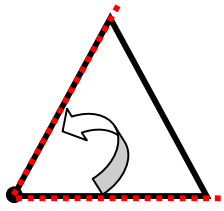
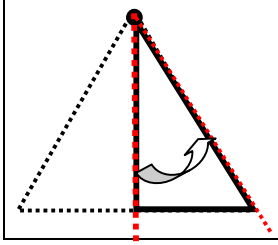
¿Cuántas de esas partes pequeñitas tienes ahora en todo el círculo?_____

Llamemos a cada una de esas partes **"grado"**

Considerando lo anterior contesta:

FRACCIÓN	Si cada doceavo está dividido en 30 partes iguales:	GRADOS
1/4		
1/8		
1/6		
1/12		

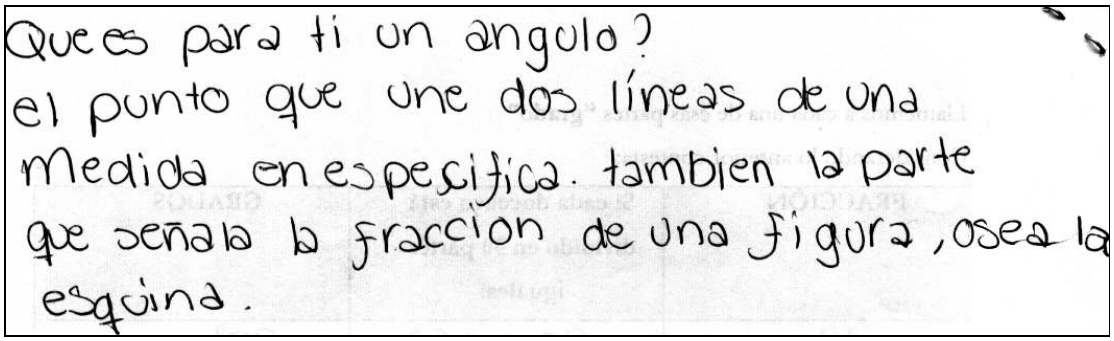
Completa el siguiente cuadro:

Dibujo	Nombre de la figura	Giro	Grados
			
			
			
			

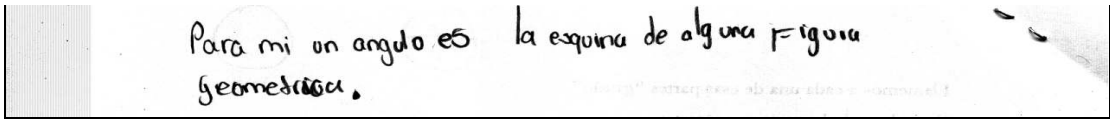
ANEXO NO. 2

Definiciones de ángulo por cada alumno

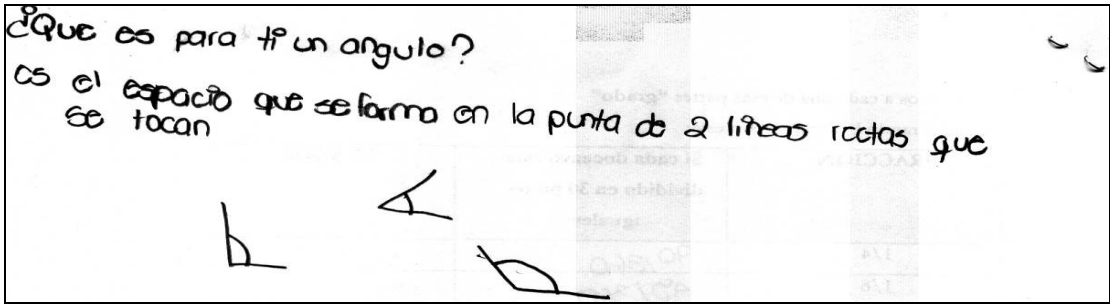
Karla



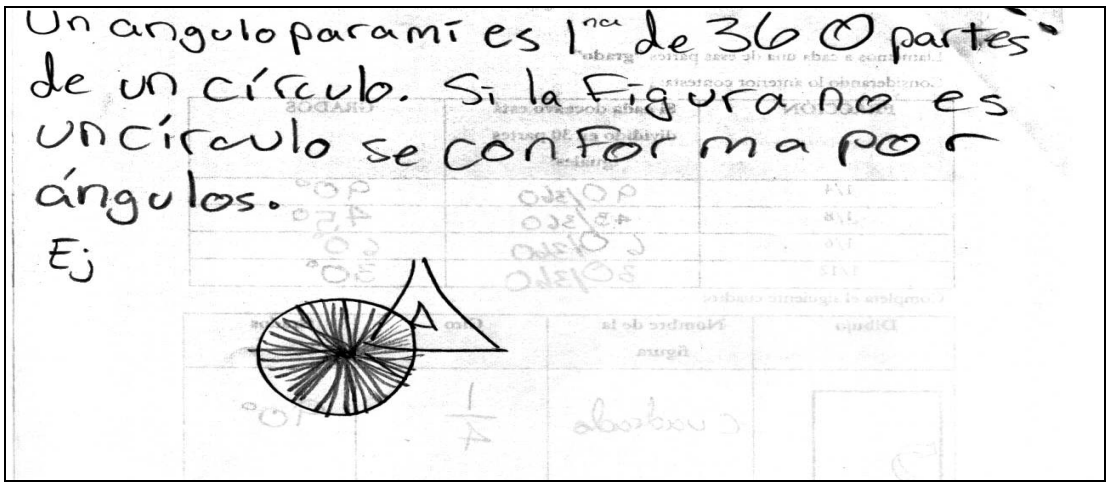
Ramón



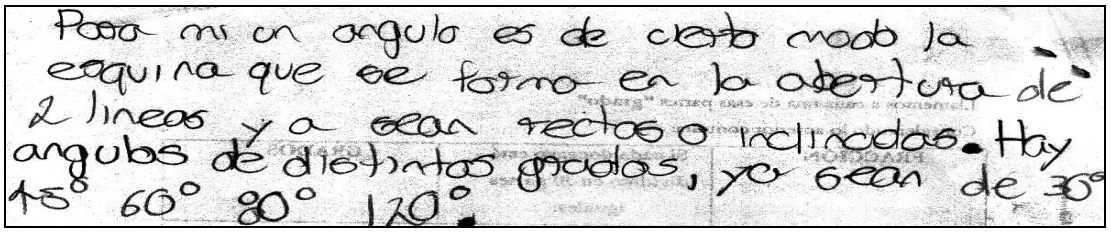
Samantha



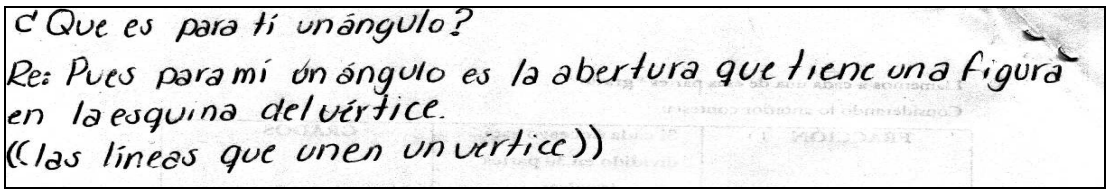
Paulo



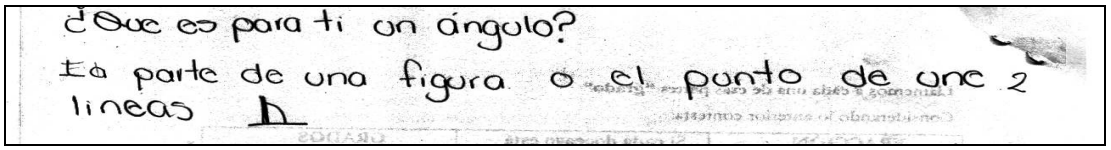
Juan Carlos


Para mi un angulo es de cierto modo la esquina que se forma en la abertura de 2 lineas y a sean rectas o inclinadas. Hay angulos de distintos grados, ya sean de 30° 45° 60° 90° 120°.

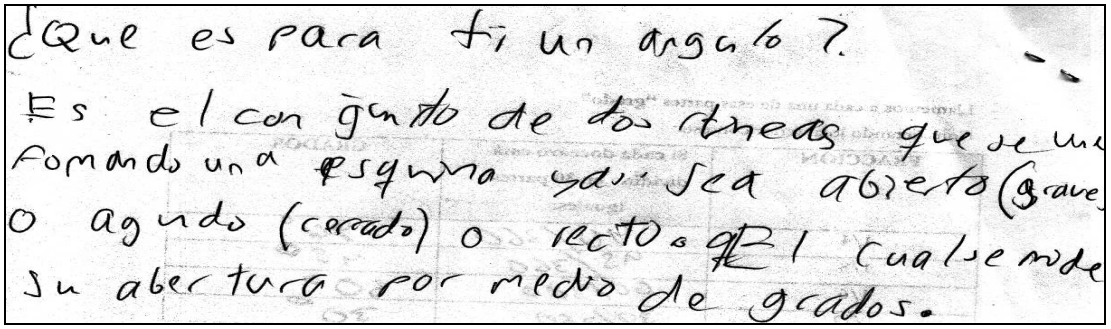
Naomi


¿Que es para ti un ángulo?
Re: Pues para mí un ángulo es la abertura que tiene una figura en la esquina del vértice.
((las lineas que unen un vértice))

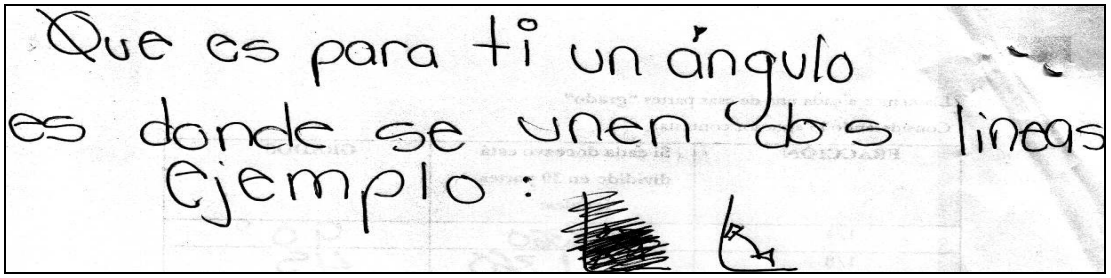
Karen


¿Que es para ti un ángulo?
Es parte de una figura o el punto de unc 2 lineas

Carlos


¿Que es para ti un angulo?
Es el conjunto de dos rtneas que se un formando una esquina ya sea abierto (grave o agudo (cerrado) o recto. el cual se mide su abertura por medio de grados.

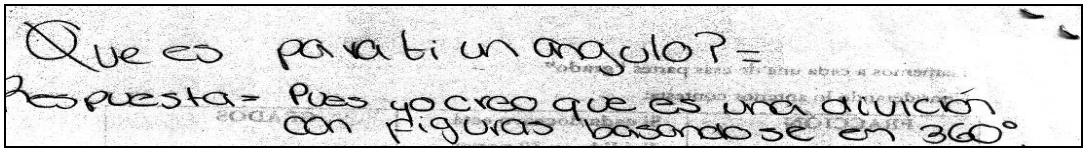
Alam


Que es para ti un ángulo
es donde se unen dos lineas
Ejemplo :

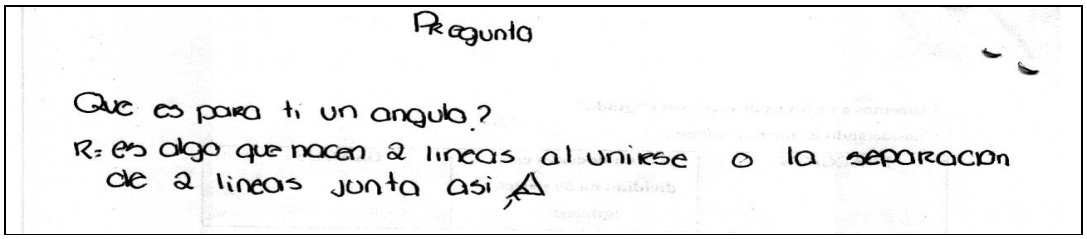
María Fernanda

Ausente

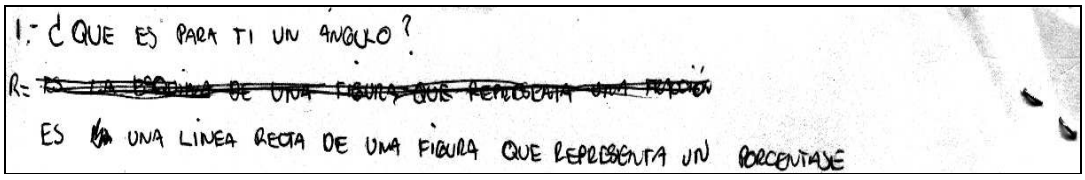
Ana María



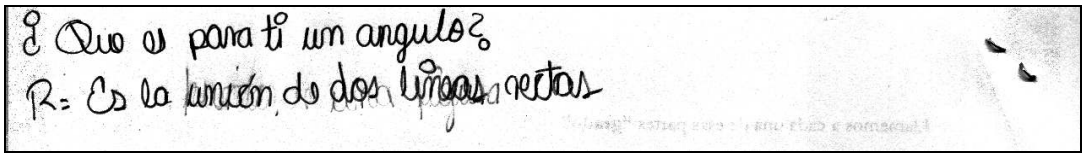
Marifer



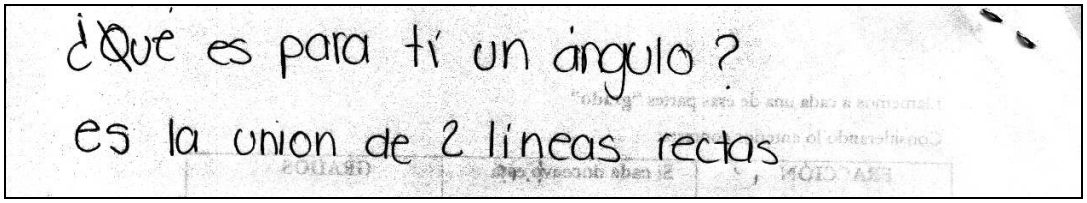
Jorge



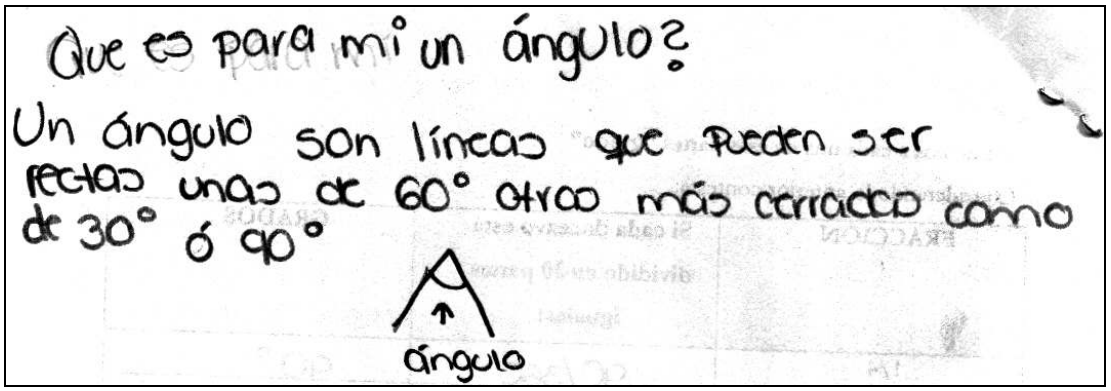
Valeria



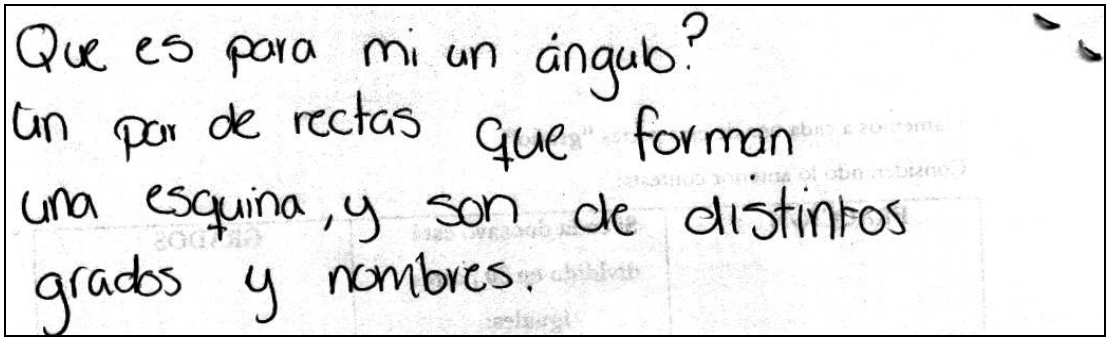
Ericka



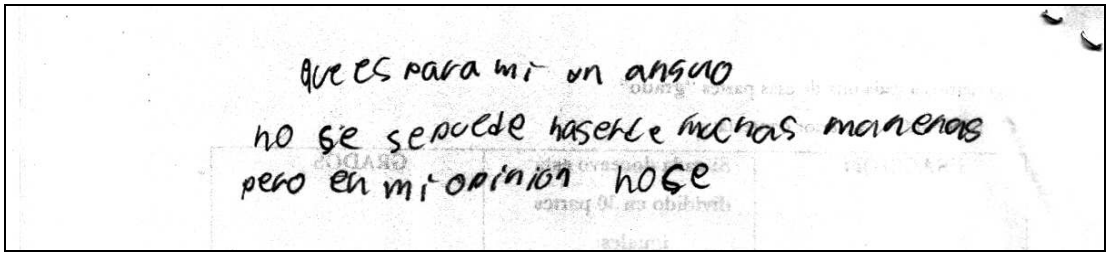
Reyna



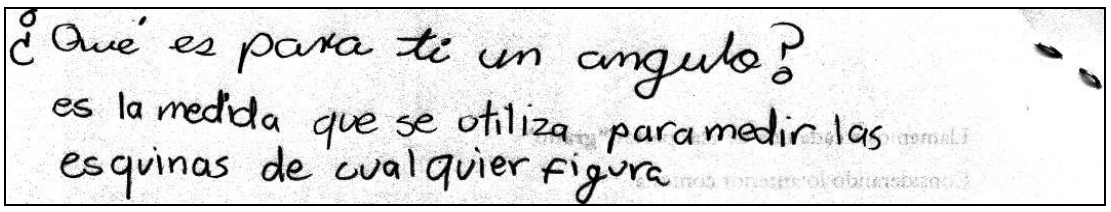
Alejandro



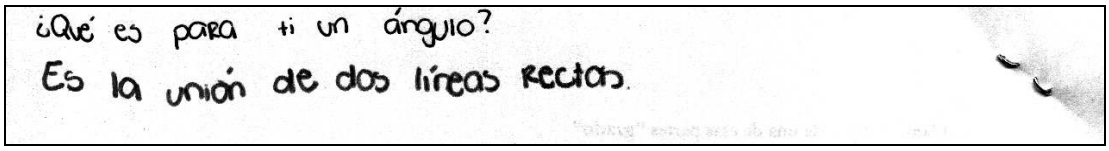
Esteban



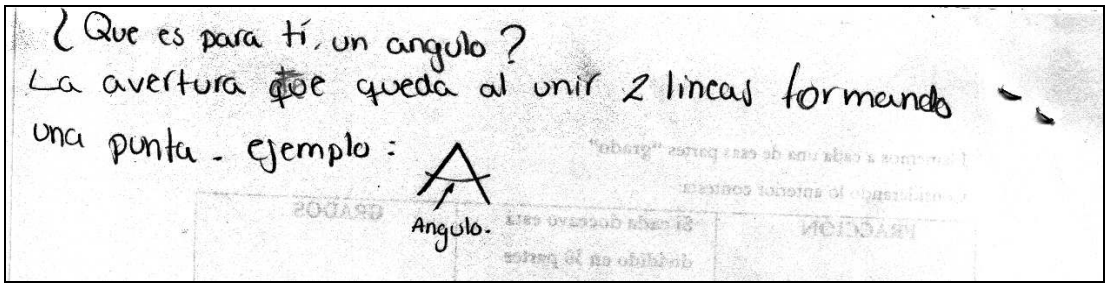
Marlo



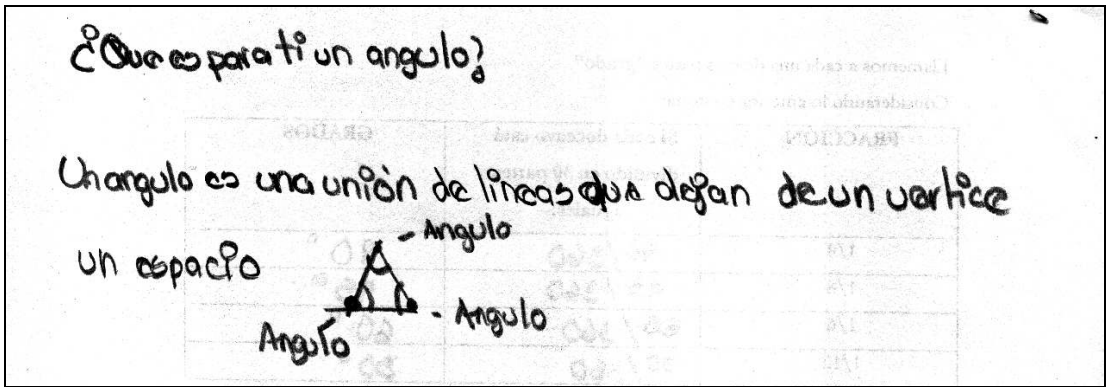
Vanessa



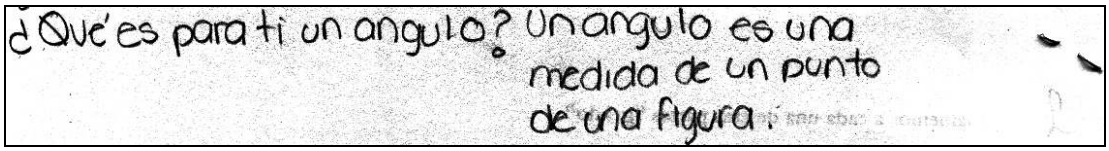
Alicia



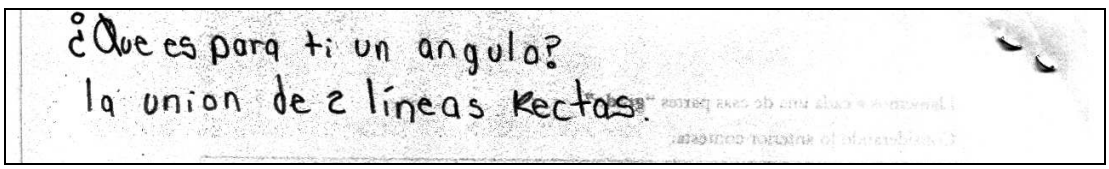
Airam



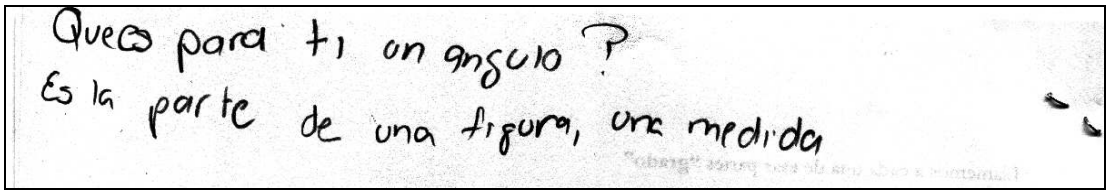
Karla



Alejandra



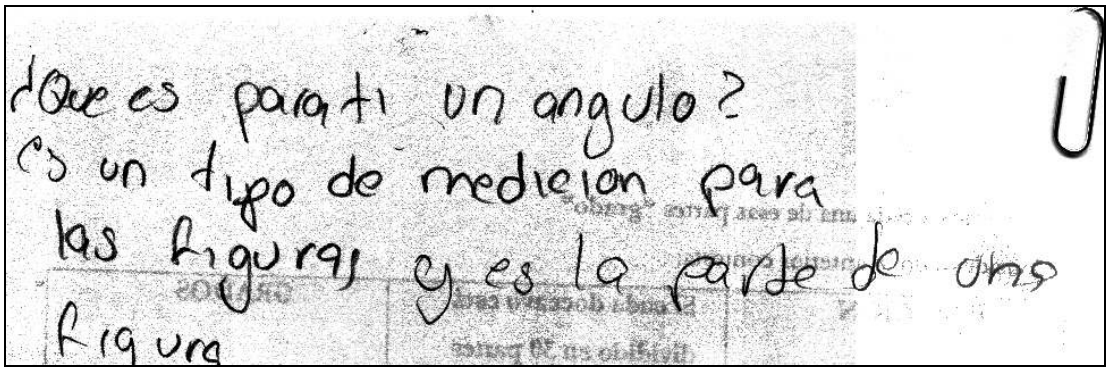
Iyac



José Antonio

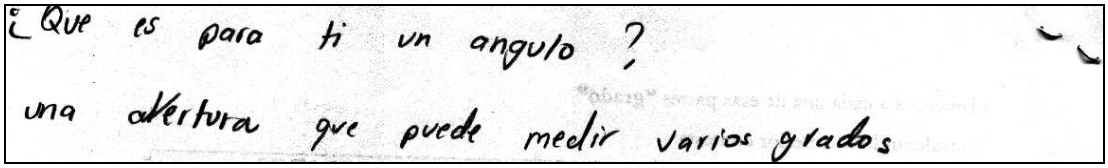
No contestó

Eric

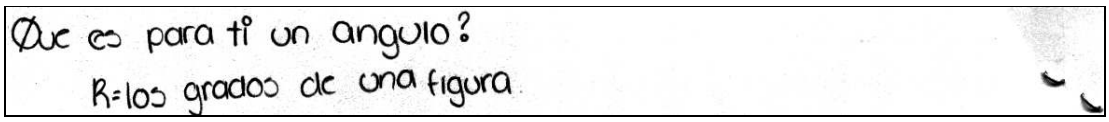


Rodrigo

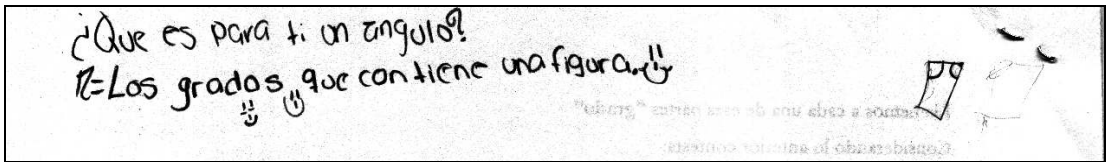
Onnuri



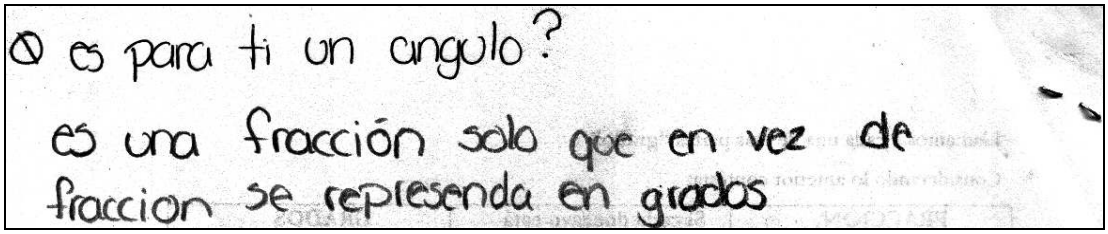
Alondra



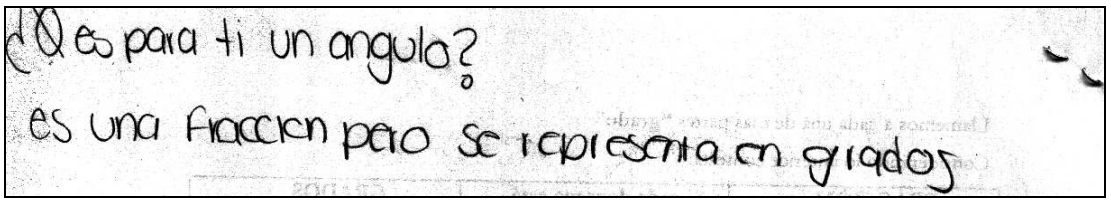
Jessica

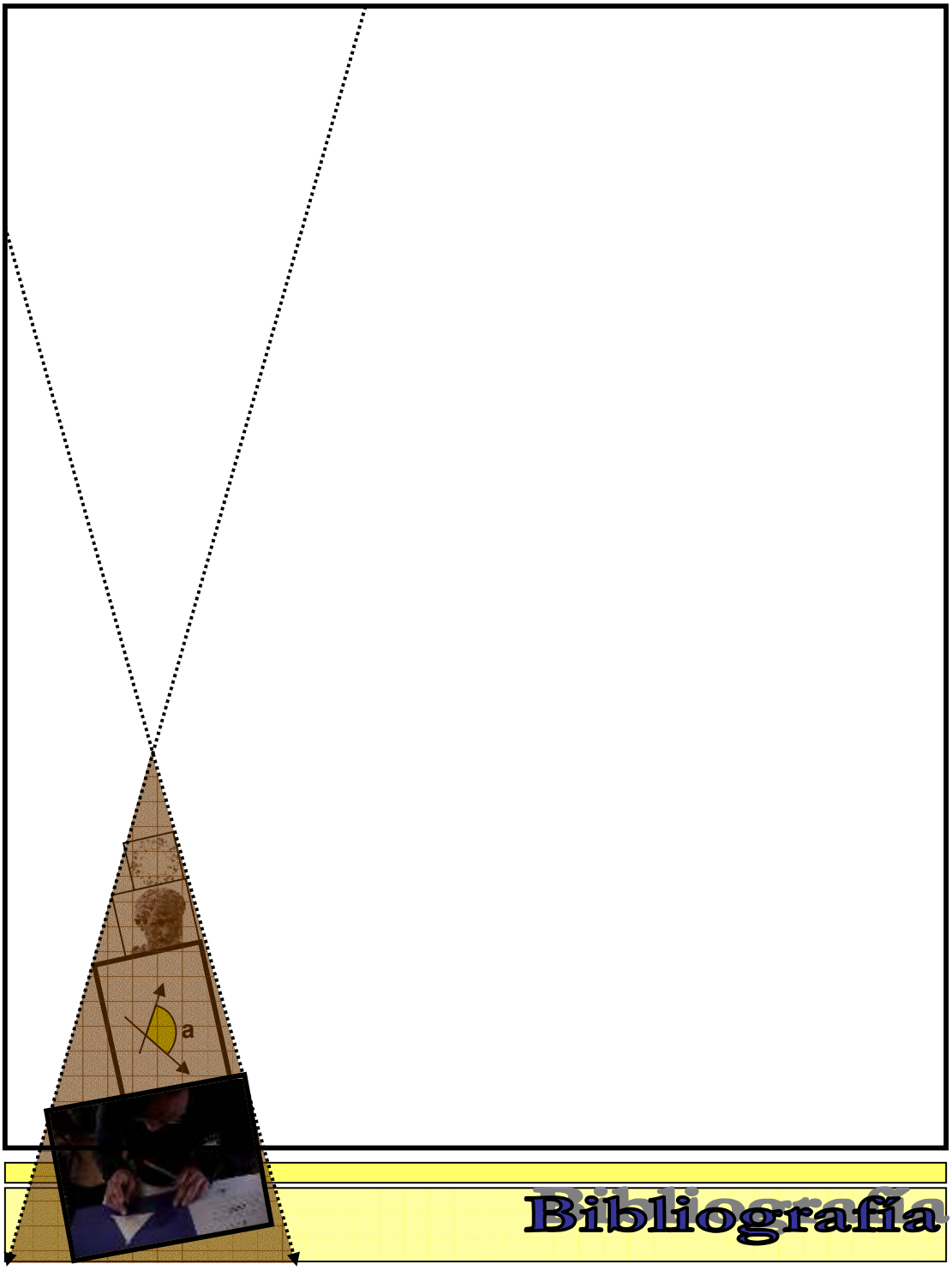


Tirana



Keiry





Bibliografía

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bosch, C., Ferrari, V., Marván, L. y Rodríguez, P. (2003). Diplomado de la Ciencia en tu Escuela. Módulo de Matemática. *Correo del Maestro,* Num. 88.
Versión digital disponible en
http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2003/septiembre/1anteaula88.htm

Casas, L. (2002). *Estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de las redes asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría.* Tesis doctoral no publicada. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Extremadura: Badajoz.
Versión digital disponible en http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Casas02a.pdf

Casas, L. y Luengo, R (2000). Aproximación al concepto de ángulo a través de redes asociativas Pathfinder en alumnos de educación Primaria y Secundaria Obligatoria. *Campo Abierto . Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura,* 17, p. 41-60.

Casas, L. y Luengo, R. (2001). El ángulo: Estudio de un concepto geométrico mediante Redes Asociativas Patheinder. V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 1, Número 2.

Close, G. S. (1982). *Children´s understanding of angle at the primary/secondary transfer stage.* London: Polytechnic of the South Bank.

Deuek, N. (1998).`Análisis of a longterm construction of the angle concept in the field of experience of sunshadows´, in A. Oliver and K. Newstead (eds), *Proceedings of the 20th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Stellenbosch, Vol 2, pp. 264-271.

Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem intergriven Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs.* [Living geometry: Deliberations on a comprehensive undersstanding of geometry teaching a exemplified by the angle concept.] Frankfurt: Lang

Lezama, J. (2003). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Maor, E. (1998). *Trigonometric delights.* Princeton University Press.
Versión digital disponible en http://pup.princeton.edu/books/maor/

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The mathematics Educator 1*(1), pp.4 – 11.
Versión digital disponible en http://math.coe.uga.edu/tme/Issues/v01n1/2matos.pdf

Matos, J. (1991). The historical development of the concept of angle (2). *The mathematics Educator 2*(1), pp. 18 – 24.
Versión disponible en http://math.coe.uga.edu/tme/Issues/v02n1/4matos.pdf

Mitchelmore, M. C. (1983). Children´s learning of geometry: Report of a cooperative research Project. *Caribbean Journal of Education, 10,* 179-228.

Michelmore, M. y White, P. (1995).Development of the angle concept by abstraction from situated knowledge. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association.*

Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics 41*, 209-238.

Mitchelmore M. & White P. (2003) Teaching angles by abstraction from physical activities with concrete materials. *Proceedings of the Conference of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol 4: 403-410. Honolulu: Hawaii.

Morrow, G. (1970). *Proclus: A commentary on the first book of Euclid´s Elements.* New Jersey: Princeton University Press.

SEP. (1993). Secuencia y Organización de Contenidos.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

SITIOS WEB CONSULTADOS

Reforma de Secundaria (RS). Programa de Matemáticas 2006. Extraído el 12 de agosto de 2007 desde http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/index.htm

Libro para el Maestro de Educación Secundaria. Extraído el 12 de agosto de 2007 desde http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/index.htm

Euclides definiciones. Extraído el 20 de agosto de 2007 desde http://www.euclides.org/menu/elements_esp/01/definicioneslibro1.htm

Isis, current bibliography. Extraído el 20 de agosto de 2007 desde http://www.ou.edu/cas/hsci/isis/website/thesaurus/IsisCB.Personalnames.A-B.html