INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Transposición Didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del Discurso Escolar actual en el nivel superior.

Tesis que para obtener el grado de
Doctorado en Matemática Educativa presenta:

Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Director de Tesis:

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de octubre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Transposición Didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del Discurso Escolar actual en el nivel superior"

Presentada por el alumno:

ROSAS	MENDOZA	ALEJANDRO MIGUEL
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: A 0 3 0 2 6 4

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dr. Ricardo Pulido Ríos

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México D. F., el día 20 del mes de noviembre del año 2007, el que suscribe Alejandro Miguel Rosas Mendoza alumno del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A030264, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Francisco Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado *Transposición Didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del Discurso Escolar actual en el nivel superior*, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección alerosas@ipn.mx Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Alejandro Miguel Rosas Mendoza

AGRADECIMIENTOS

A mis Padres:

Por enseñarme a no renunciar nunca
y enfrentar cualquier desafío con
optimismo y seguridad en mí.

A Rocío:

Por el amor, el apoyo y la paciencia que me has tenido
durante diecisiete años.

A mis hermanos:

Por todo el amor y apoyo que nos
hemos tenido.

Al Dr. Javier Lezama:

Por confiar en mí y guiarme durante
este largo trabajo.

Glosario.

Convergencia. Es la propiedad de algunas sucesiones y series de tender progresivamente a un límite.

Divergente. Dícese de las sucesiones o series que no son convergentes.

Serie. Es la suma de los términos de una sucesión. Se representa una serie con términos a_n como $\sum_{i=1}^{N} a_i$ donde N es el índice final de la serie. Las *series infinitas* van desde 1 hasta ∞.

Sucesión. Es una aplicación definida sobre los números naturales. Por convención, se escribe u_n [en vez de u(n)], la imagen de n por la sucesión u, o sea el término número n+1 de la sucesión u (el primer término es habitualmente u_0).

Índice de figuras e imágenes

Gráfica de serie de Taylor 8

Gráfica de serie de Taylor 9

Solución de actividad estadio 15

Modelo educativo del ITESM 20

Cuadrado generador de serie geométrica 26

Esquema de Transposición Didáctica 45

Sistema Didáctico modificado 46

Error de concepto cometido por un alumno 75

Error de concepto cometido por un alumno 76

Error de concepto cometido por un alumno 76

Error de concepto cometido por un alumno 76

Error de concepto cometido por un alumno 77

Error de concepto cometido por un alumno 77

Error de método cometido por un alumno 78

Error de método cometido por un alumno 79

Error de método cometido por un alumno 79

Error de método cometido por un alumno 80

Error de método cometido por un alumno 80

Error de método cometido por un alumno 80

Error de método cometido por un alumno 81

Error de álgebra cometido por un alumno 81

Error de álgebra cometido por un alumno 82

Error de álgebra cometido por un alumno 82

Error de álgebra cometido por un alumno 83

Error de álgebra cometido por un alumno 83

Error de álgebra cometido por un alumno 84
Error de álgebra cometido por un alumno 84
Errores diversos cometido por un alumno 85
Errores diversos cometido por un alumno 85
Errores diversos cometido por un alumno 85
Errores diversos cometido por un alumno 85
Errores diversos cometido por un alumno 86
Errores diversos cometido por un alumno 86
Papiro de Rhind 163
Triángulo de Pascal en la China 164
Expansión de la función seno en sánscrito 164
Libro Philosophia Naturalis Principia Matemática de Newton 168
Lema XI de los Principia 169
Libro Tratado de métodos y fluxiones de Newton 169
Triángulo de Pascal armónico 170
Libro de L'Hôspital 170
Artículo de Euler 176
Carta de Goldbach a Euler 177
Libro de Agnesi 178
Libro de Lacroix 179
Artículo de Euler 182
Artículo de Euler 182
Course de Analyse de Cauchy 186
Course de Analyse de Cauchy 187
Libro de Berger 189
Libro de Berger 190
Libro de Jordan 198

Libro de Jordan 199

Libro de Jordan 200

Libro de Knopp 202

Error de un alumno 226

Error de un alumno 226

Error de un alumno 227

Error de un alumno 227

Error de un alumno 228

Error de un alumno 228

Error de un alumno 228

Series en los libros de texto 238

Series en los libros de texto 239

Sistema didáctico modificado 245

Índice de tablas

Aceleración de convergencia 17

Tipos de pensamiento de acuerdo al período histórico 161

Transposición Didáctica del Período I 216

Transposición Didáctica del Período II 217

Transposición Didáctica del Período III 218

Transposición Didáctica del Período IV 218

Transposición Didáctica del Período V 219

Resumen

En esta tesis se ha buscado encontrar razones sobre el por qué los estudiantes al iniciar el estudio de las sucesiones y series infinitas numéricas y de funciones enfrentan tantos problemas.

El trabajo contempla un estudio histórico desde dos mil años antes de nuestra era hasta nuestros días. De esta forma encontramos que durante cuatro mil años se han estado generando, modificando y seleccionando conceptos tales como sucesión, serie, convergencia, al mismo tiempo que surgían y desaparecían métodos que permiten generar ejemplos de esos conceptos.

Encontramos que, desde nuestra perspectiva, la historia y desarrollo de las series infinitas puede dividirse en cinco períodos diferentes, pero que en muchas ocasiones se traslapan dificultando encontrar dónde termina uno y empieza el siguiente.

A la par de la parte histórica hemos realizado un análisis de la forma en que estos conceptos fueron abordados en el salón de clases, o su equivalente, para poder entender cómo vemos las series infinitas y cómo fueron vistas. Este análisis nos llevó a observar diversos efectos del proceso llamado Transposición Didáctica y cómo ha ido modificando nuestros libros de texto.

Finalmente realizamos una caracterización del Discurso Escolar que encontramos en nuestros salones de clase al momento en que este trabajo se realizó.

Armados con todos estos resultados hemos analizado la forma en que responden y trabajan los estudiantes con las series infinitas, al mismo tiempo que pudimos observar por qué a nuestro juicio algunas investigaciones no han obtenidos los resultados esperados por sus autores.

Abstract

In this thesis one has looked for to find reasons on why the students face so many problems just when they initiate the study of sequences and infinite series, both numerical and of functions. The work contemplates an historical study from two thousand years before Christ to the present time. Of this form we found that for the last four thousand years mathematicians –and non mathematicians- had been generating, modifying and selecting concepts such as sequence, series, convergence, at the same time that arose and disappeared methods that allow generating examples of those concepts.

We found that, from our point of view, the history and development of the infinite series can be divided in five different periods, but that in many occasions they are overlapped making difficult to find where finishes one and the following one begins.

Parallel to the historical part we have made an analysis of the form in which these concepts were boarded in the classrooms, or its equivalent one, to be able to understand how we see the infinite series and how they were seen. This analysis took us to observe diverse effects of the called process Didactic Transposition and how it has been modifying our text books.

Finally we made a characterization of the School Discourse that we found in our classrooms at the moment in which this work was written. Using all these results we have analyzed the form in which the students with the infinite series answer and work, at the same time that we could observe why in our opinion some investigations have not obtained the expected results for by their authors.

Índice

Glosario v

Índice de figuras e imágenes vi

Índice de tablas ix

Resumen x

Abstract xi

Introducción 1

1. Detección del problema. 4
   1.1 Fenómenos detectados en el aula. 4
   1.2 Primeros indicios y aproximaciones. 6
   1.3 Programa escolar en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. 18
   1.4 Enfoque educativo en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. 19

2. Estado actual. 21
   2.1 Estado del arte. 21
   2.2 Transposición didáctica. 44
   2.3 Discurso Matemático Escolar. 46
   2.4 Problema de investigación. 47

3. ¿Qué pasa en el salón? 50
   3.1 Lo que opinan los alumnos. 50
   3.2 Lo que opinan los profesores. 69
   3.3 Clasificación de criterios de convergencia. 72
   3.4 ¿Qué hacen los alumnos? 74

4. Desarrollo histórico de las series infinitas. 88
4.1 Series numéricas infinitas y su desarrollo. 88
4.2 Análisis de los períodos históricos. 161
4.3 Discurso Matemático Escolar de las series infinitas a través de la historia. 212
4.4 Esquema de transposición didáctica de las series numéricas infinitas. 216

5. Análisis. 221
5.1 Análisis de lo que hacen los alumnos. 221
5.2 Análisis de investigaciones y trabajos previos. 229

6. Conclusiones. 237
6.1 Conclusiones generales. 237
6.2 Epílogo. 245

7. Bibliografía. 247

8. Anexos. 256
Anexo A. 257
Anexo B. 264
Anexo C. 276
Anexo D. 285
Anexo E. 295

Introducción.

La presente investigación es el fruto de años de investigación, de incontables noches de meditación y momentos en que la luz al final del túnel no se veía y el túnel parecía no acabar.

Originalmente la problemática estudiada en esta tesis parecía ser simple, ¿por qué los estudiantes reprueban el parcial de series?, ¡Pues porque no estudian!, la respuesta era a su vez simple y tranquilizante.

Como muchas veces sucede esta pregunta y su respuesta empezaron, lentamente, a ser insuficientes para explicar un fenómeno que no parecía corregirse por sí mismo; sin importar que con cada nuevo semestre alumnos que nunca habían estudiado series infinitas y alumnos repetidores, siempre aparecían respuestas incorrectas que tenían una cierta semejanza con las respuestas de alumnos de cursos previos.

Entonces la pregunta cambió y empezó a ser formulada como: ¿por qué los estudiantes no aprenden series infinitas?, ¿acaso la forma en que forman los conceptos en su mente era todo el problema? Este es un pequeño cambio en la pregunta, sin embargo, las implicaciones que empezaron a surgir mostraron que la pregunta había evolucionado, la respuesta ya no podía ser tan simple como antes. Sin darnos cuenta habíamos caído en el terreno de lo cognitivo.

Se pensó que una forma de responder y resolver la pregunta era ejercitar más a los estudiantes con lo que para mejorar la formación del concepto de serie los alumnos deberían trabajar más, se inició entonces la generación de actividades, ejercicios, tareas y muchas cosas más que fueron un primer intento, y un segundo, y un tercero, y…

Sin embargo, los alumnos no mejoraban su desempeño, y sí se estaban generando nuevas problemáticas. Entonces ¿qué estaba pasando? Los alumnos seguían reprobando y lo que es peor seguían sin comprender lo que es una serie, y ni pensar en que pudieran elegir adecuadamente un criterio de convergencia para analizar una serie particular.

Así, nuevamente la pregunta cambió, una nueva evolución, acaso ¿hay algo incorrecto en la forma de enseñar las series infinitas?, ¿si se modificaba la forma de explicar se mejoraría la comprensión de los nuevos conceptos? Y nuevamente habíamos cambiado de territorio, ahora habíamos empezado a introducirnos en el terreno de la didáctica, ¿sería el profesor el "culpable"?

Ahora la respuesta parecía más compleja, ¿se tendría que cambiar el libro de texto?, ¿el enfoque de las clases?, ¿el orden de los temas? Nuevamente se intentaron estrategias que no mejoraron las cosas. Si se cambiaba el orden de los temas, si se intentaban nuevas definiciones, nuevas formas de visualizar las series, si se utilizaba la computadora, si se… Nada parecía funcionar.

Una vez más la evolución actuó y la pregunta se volvió a modificar, ¿hay algo en el concepto de serie infinita que dificulta su comprensión?, ¿por qué un criterio de convergencia era tan difícil de entender? En ese momento la epistemología levantó la mano y se hizo presente.

El problema se parecía más a la mítica hidra de diez mil cabezas, por cada problema que se atacaba aparecían dos más. Sin la ayuda de un Heracles la tarea se volvía imposible por momentos. Sólo el tiempo hablaría.

Así, el trabajo constante y el tiempo permitieron construir una perspectiva basada en la epistemología de las series infinitas, la transposición didáctica y el discurso matemático escolar. Cobijados bajo esta perspectiva se atacaron las diferentes facetas de la problemática.

Los resultados que se han obtenido hasta el momento nos permiten decir que los conceptos de serie infinita, convergencia y criterio de convergencia tienen orígenes distintos y que se ha tardado muchos años, milenios enteros, en ser construidos. Diversas áreas de la matemática se han visto involucradas en el surgimiento, desarrollo y aplicación de las series infinitas.

Muchas de las preguntas que uno se hace con respecto a las series infinitas son de tipo aritmético, otras más son de tipo geométrico o físico; lamentablemente las respuestas son de tipo analítico basadas en la topología del campo de los números reales.

De esta forma, la pregunta de porqué los estudiantes no comprenden las series infinitas no se responde culpando al profesor, ni regañando al estudiante. La respuesta es más compleja y tiene que ver con la forma en que se generó el concepto a lo largo de siglos. En el capítulo de conclusiones se pueden encontrar algunas afirmaciones que nos hacen emular a Cantor

Je le vois, mais je ne le crois pas! [1]

Una de nuestras conclusiones es que el álgebra aparece como una herramienta importante en la manipulación de las series y de los criterios de convergencia, pero no es vital para comprender el concepto de serie infinita. Y aparentemente cuando se necesita estudiar la convergencia o divergencia de la serie, tampoco es necesario el uso o conocimiento del álgebra para elegir el criterio de convergencia a utilizar en cada caso específico.

Las notaciones que aparecen en la sección correspondiente al desarrollo histórico de las series infinitas fueron copiadas tal y como aparecen en los libros, artículos y cartas originales, así como también de las obras de historiadores que fueron consultadas. Las citas de los diversos textos y los anexos aparecen lo más claro posible, según nosotros, para permitir que los amables lectores puedan seguir este largo camino evitando todos los obstáculos que surgieron y que tuvieron que ser resueltos antes de poder escribir este trabajo.

M. C. Alejandro Miguel Rosas Mendoza.

[1] **Lo veo, ¡pero no lo creo!**, The MacTutor History of Mathematics Archive

1. Detección del Problema

En este capítulo haremos un recuento de lo que poco a poco fue evidenciándose en las aulas de clase. Hablamos de problemas que presentan los estudiantes cuando durante la materia de Matemáticas II para Ingeniería se arriba al tema de series numéricas infinitas.

En segundo lugar haremos un breve recuento de las acciones que se realizaron intentando resolver lo que se observó en clase, actividades que no fueron desarrolladas bajo ningún esquema metodológico sino sólo con la intención de remediar situaciones específicas.

Posteriormente hablaremos de cómo se abordan las clases en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) y sus programas educativos.

Finalmente abordaremos las técnicas didácticas que se utilizan en la impartición de las clases en el campus Estado de México del ITESM.

1.1 Fenómenos detectados en el aula

En el Campus Estado de México (CEM) del ITESM se imparten 13 carreras de la División de Ingeniería y Arquitectura, por otra parte el sistema TEC permite que los estudiantes elijan las materias que desean cursar en cada semestre por lo que existe un número fluctuante de alumnos que inscriben la materia de Matemáticas para Ingeniería II (**Ma00816**); sin embargo se puede pensar en un promedio aproximado de ocho grupos de Ma00816 que se abren cada semestre. Además, la cantidad de alumnos con que cuenta cada grupo varía desde 20 hasta 40 por lo que puede considerarse una media de treinta alumnos por grupo. Por lo anterior podemos decir que cada semestre se tiene un aproximado de 240 alumnos que cursan Ma00816, esto sin contar los grupos que se abren en el período de verano en el que los cursos son de tipo intensivo y que por esta razón no son considerados en esta investigación.

Algunos grupos reciben tres clases de una hora de duración a la semana y algunos grupos reciben dos clases de una hora y media a la semana.

El tema de series se divide en dos partes, la primera se refiere a series numéricas infinitas y la segunda se refiere a las series de potencias y series de Taylor. En un total de seis horas de clase.

Durante estas tres semanas de clase a los alumnos se les debe enseñar aproximadamente diez criterios de convergencia de series numéricas infinitas, el método de la serie de Taylor y la

metodología necesaria para calcular el intervalo de convergencia de series de potencias, incluyendo los extremos del intervalo.

Para ayudar a la comprensión de estos temas se resuelven ejemplos en el pizarrón y además se proporcionan ejercicios a ser resueltos como tareas, que posteriormente se revisan. Algunos profesores realizan ejercicios de aplicación de las series mediante alguna práctica en la plataforma tecnológica utilizada. Sin embargo, debido a que uno de los principios del TEC es cubrir todo el programa de la materia se presentan diversas situaciones que provocan que los profesores modifiquen sensiblemente su forma de abordar el tema de series infinitas. En muchas ocasiones sucede que los tiempos escolares no permiten más que una semana para "enseñar" series infinitas. Es entonces que a los estudiantes sólo se les proporcionan definiciones y ejemplos sin indicar el por qué se estudian estos temas.

En el momento de iniciar esta investigación, trabajando en forma empírica y basados en la experiencia docente, se encontraron los siguientes fenómenos en los grupos de Ma00816:

- Alumnos con conceptos incompletos o incorrectos acerca de sucesión y serie.
- Confusión en el manejo del concepto de sucesión y serie
- Uso de métodos para analizar la convergencia de sucesiones al momento de estudiar la convergencia de una serie numérica.
- Confusión en el manejo de los diversos criterios de convergencia aplicables a las series numéricas.
- Uso de los criterios de convergencia mediante ensayo y error.
- Uso de criterios de convergencia de series para estudiar la convergencia de sucesiones infinitas.
- Problemas (en materias posteriores) para resolver algún tipo de actividad que involucre el manejo de series numéricas y de potencias.
- Comentarios de otros departamentos indicando las dificultades de los alumnos al abordar las aplicaciones que requieren el manejo de sucesiones y series.
- Alto número de alumnos con calificaciones no satisfactorias en los exámenes que incluyen estos temas.

Estos fenómenos se han detectado tanto en ejercicios que se resuelven en clase como en tareas escritas y, escolarmente, lo más grave es que también en los exámenes parciales correspondientes a estos temas.

Una cosa más que debe comentarse es que hay una total independencia entre los diversos profesores que imparten la materia y los fenómenos reportados anteriormente.

Explicando con mayor detalle, decimos que los fenómenos anteriores han sido detectados en todos los salones de clases, sin importar si

- La clase se imparte en tres sesiones por semana de una hora cada una,
- La clase se imparte en dos sesiones por semana de una hora y media cada una,
- La clase se imparte en español o inglés,
- La clase se imparte por uno u otro profesor,

- Se utiliza un libro de texto teórico o práctico,
- Los alumnos cursan alguna carrera de ingeniería o de licenciatura, (de hecho los fenómenos se acentúan en los alumnos de licenciatura),
- Se realizan aplicaciones o no de las series numéricas,

Es decir, aún después de considerar todas las diversas diferencias anteriores que podemos simplificar como: duración de las clases, frecuencia de las clases, libro de texto utilizado, idioma, los fenómenos antes mencionados han sido detectados y han permanecido durante mucho tiempo en el ámbito escolar.

1.2 Primeros intentos

En el apartado anterior se habló de la existencia de varios fenómenos que aparecen en los alumnos al estar estudiando las series numéricas infinitas.

Presentamos ahora los intentos que se realizaron desde una perspectiva escolar con la intención de lograr que los alumnos ya no obtuvieran bajas calificaciones en las tareas y los exámenes parciales, las actividades que se describen a continuación fueron elaboradas teniendo como guía única y exclusivamente la experiencia docente. Así, estas actividades no fueron diseñadas de acuerdo a una teoría sino sólo de acuerdo a la experiencia docente y las necesidades de la institución.

1.2.1 Acercamiento práctico

La primera idea que se aplicó para resolver, en el ámbito escolar, todos o algunos de estos fenómenos se realizó intentando que los alumnos tuvieran más material para practicar, es decir, se recurrió a listas de ejercicios extra para resolver en su casa.

Algunas veces estas listas consistían de ejercicios agrupados por cada uno de los criterios de convergencia. En otros casos, las listas incluían ejercicios de todos los criterios de convergencia pero sin estar agrupados.

En una ocasión las listas proporcionadas incluían soluciones completas de los ejercicios, en las demás ocasiones las listas sólo incluían la respuesta final marcada como **C** por converge y **D** por diverge.

En ocasiones las listas fueron proporcionadas en papel y en algunas ocasiones fueron colocadas en la plataforma tecnológica utilizada en ese momento (Lotus Learning Space, Blackboard).

Sin embargo, todas estas acciones solo generaron

- Molestias en los alumnos debido a que consideraban que era mucho trabajo adicional.
- Presiones en el modo de evaluar ya que los alumnos solicitaban puntos extra por el trabajo extra que recibían.

- Ejercicios resueltos sin sentido debido a que los alumnos intentaban resolver todos los ejercicios sin meditar las respuestas que obtenían.
- Acentuación de los errores cometidos por no tomar el tiempo suficiente para meditar en la solución de los ejercicios.
- Solución mecánica de los ejercicios contenidos en las listas estructuradas por criterio.
- Solución mediante ensayo y error de los ejercicios contenidos en las listas no estructuradas.

No pasó mucho tiempo para concluir que las listas de ejercicios adicionales no resolvían ni clarificaban los fenómenos observados y que en algunos alumnos los acentuaban, por lo que se buscó otro acercamiento.

1.2.2 Acercamiento gráfico

Al no obtener resultados positivos en la implementación de las acciones consideradas en el parágrafo anterior se intentó utilizar las gráficas para apoyar el aprendizaje.

Se planearon actividades que permitieran a los alumnos visualizar el comportamiento de las sucesiones y las series numéricas, al igual se planearon actividades para observar a las series de potencias y de Taylor.

Debemos mencionar que la aproximación gráfica permitió que los alumnos pudieran observar el comportamiento de sucesiones y series sencillas, las series más complejas generaban gráficas en las que difícilmente se observaba en las gráficas un posible límite de convergencia. Este fenómeno se presentó principalmente con las series alternantes.

En el caso de las series de potencias y de Taylor se obtuvieron resultados diversos, es decir, en algunos grupos los alumnos al ver la sucesión de gráficas generadas mediante polinomios de Taylor de grado creciente lograban conjeturar la mayor semejanza entre la gráfica de los polinomios y la función que se estaba aproximando. Lamentablemente en muchos casos, más de los deseados, era necesario **conducir** a los alumnos para que observaran la creciente semejanza entre las gráficas. Hablamos de conducción porque a los estudiantes se les tenía que indicar que observaran si las curvas se parecían o no, si se aproximaban entre ellas o no, etc.

Se intentó dibujar todas las gráficas en una misma imagen, se intentó dibujar la gráfica de la función original y la gráfica de un polinomio de Taylor a la vez, y pese a estas variaciones no se pudo lograr que la mayoría de los alumnos modificaran sus conjeturas acerca de la convergencia.

Otro punto importante es que en clase y en actividades puede trabajarse de diversas formas, sin embargo en el examen parcial es necesario resolver ejercicios de tipo formal, y la solución de ellos no se considera como solución correcta a la gráfica.

A continuación se presenta un ejemplo de respuesta que proporciona un alumno a esta actividad, el estudiante observa que las gráficas se "desplazan" a la izquierda o que se "abren"

pero no menciona el hecho de que las gráficas se van pareciendo más; en el anexo A puede verse algunas otras respuestas a estas actividades.

Dibuja las gráficas de las siguientes funciones en los mismos ejes para que puedas comparar sus comportamientos, **dibújalas en el orden en que se te dan**.

$f(x) = e^x$

$f(x) = 1 + x$

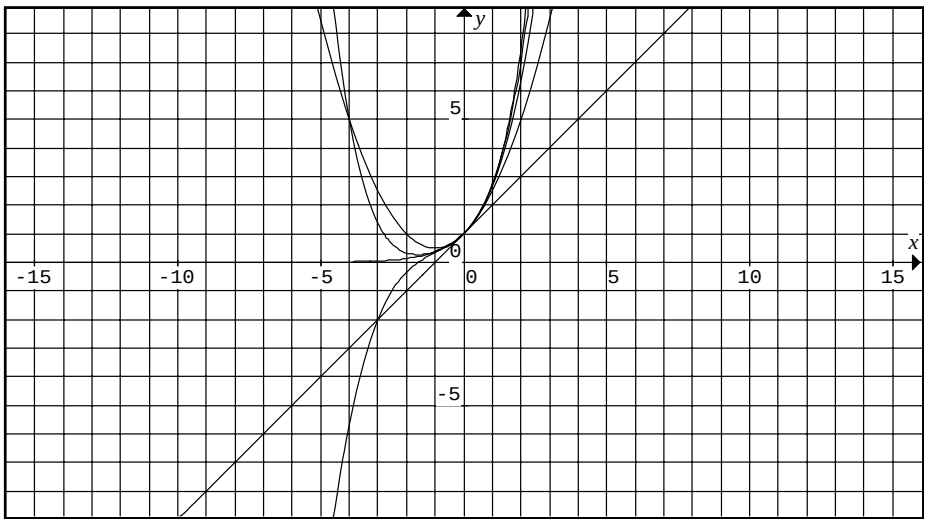
$f(x) = \mathbf{1 + x + x2/2}$

$f(x) = \mathbf{1} + x + x2/2 + x3/6$

$f(x) = \mathbf{1} + x + x2/2 + x3/6 + x4/24$

$f(x) = 1 + x + x2/2 + x3/6 + x4/24 + x5/120$

Reporta tus gráficas y todas las observaciones que hayas hecho con las gráficas en la sección indicada, ¿qué puedes decir conforme aumenta el grado de los polinomios?



En esta grafica mientras se aumenta el grado de los polinomios las gráficas se hacen un poco más hacia la izquierda.

Por separado dibuja ahora las gráficas de:

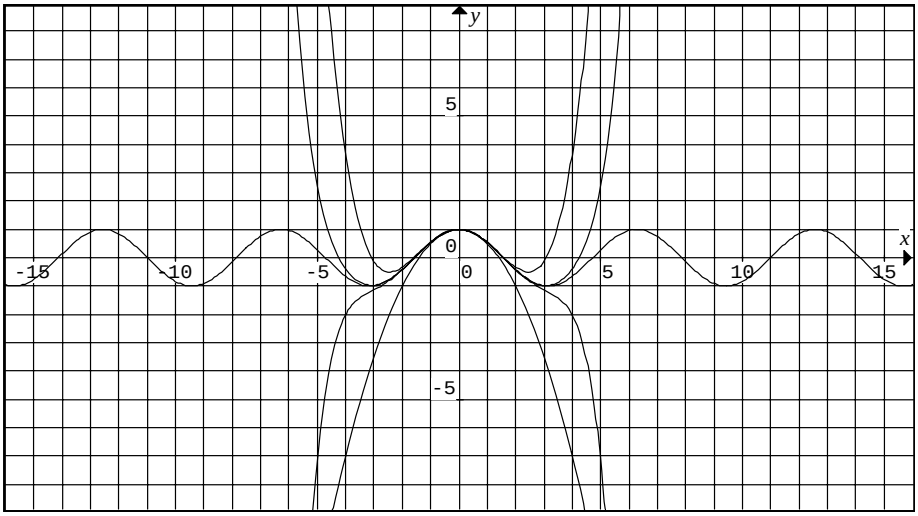
$f(x) = \cos(x)$

$f(x) = 1 - x2/2$

$f(x) = 1 - x2/2 + x4/24$

$f(x) = 1 - x2/2 + x4/24 - x6/720$

$f(x) = 1 - x2/2 + x4/24 - x6/720 + x8/40320$



Conforme aumenta el grado de los polinomios las gráficas se van abriendo mas cada vez, se hacen más anchas cada que el grado del polinomio sube.

1.2.3 Acercamiento numérico

Asumiendo que los alumnos estaban más familiarizados a evaluar funciones y construir tablas de valores para generar la gráfica de una función se consideró realizar un acercamiento numérico.

Entonces se diseñaron actividades que permitieran a los alumnos practicar este enfoque, para esto se trabajó exclusivamente con series numéricas infinitas. Se trabajaron series convergentes y divergentes por igual.

Una de las actividades consistía en construir una tabla de las sumas parciales de la serie armónica para constatar su divergencia. Se obtuvieron resultados dispares

- Algunos alumnos concluyeron que la serie divergía,
- Algunos alumnos concluyeron que la serie convergía,
- Algunos alumnos concluyeron que la computadora no les ayudaba mucho y entonces conjeturaban una respuesta.

Otra de las actividades consistía en calcular el valor de π, mediante la serie de los recíprocos de los cuadrados de los enteros. Esta actividad fue desarrollada en dos partes, al concluir cada una de estas partes se les hicieron preguntas a los estudiantes de modo que se tuviera un registro de lo que pensaban en cada paso que realizaban. Estas preguntas se diseñaron de modo que no se indujera una respuesta condicionada y también se evitó utilizar terminología correspondiente a las series numéricas.

Una de estas preguntas consistía en conjeturar si los valores que iban obteniendo se aproximarían a algún valor específico.

Al igual que en la actividad de la serie armónica se obtuvieron los resultados siguientes

- Algunos alumnos concluyeron que la serie divergía,
- Algunos alumnos concluyeron que la serie convergía,
- Algunos alumnos concluyeron que la computadora no les ayudaba mucho y entonces conjeturaban una respuesta.

El análisis de estas respuestas condujo a la observación de varios aspectos relacionados con la tecnología y que no se habían considerado.

- Algunos alumnos utilizaron un lenguaje de programación robusto y cuyo manejo de algoritmos numéricos era muy eficiente, estos alumnos obtuvieron resultados que sobrepasaban a los obtenidos por sus compañeros. Por ejemplo, un alumno utilizó C++ y logró calcular sumas parciales de 10^{10} términos y con sumandos de valor 10^{-100} lo que le permitió aproximar suficientemente el valor de π para asegurar que ese era el valor al que convergía la serie. Aunque esto le tomó utilizar su computadora todo un día.
- La mayoría de los alumnos utilizaron software de hojas de cálculo, en particular EXCEL, lo que generó dos comportamientos diferentes que dependían de la versión y configuración de EXCEL.
    - Algunas configuraciones de EXCEL tenían prefijado el mínimo valor representable en 10^{-6}, lo que provocó que en el momento en que se utilizaban sumandos por debajo de ese valor EXCEL los considerara como cero, así que a partir de un cierto valor la suma se mantenía inalterable debido a que todo lo que se estaba sumando era cero. En este caso los alumnos concluyeron que la serie convergía, lamentablemente esto sucedió para la serie armónica (que es divergente) y para la serie que aproximaba el valor de π, provocando que el valor obtenido fuera diferente al de π.
    - Otras configuraciones de EXCEL (debido a las representaciones de números en la computadora) mantenían un valor constante distinto de cero para el último sumando que se consideraba, de modo que a partir de un cierto sumando EXCEL empezaba a sumar una constante lo que provocaba que las sumas parciales empezaran a crecer indefinidamente. En este caso los alumnos concluyeron que la serie divergía, esta conclusión era correcta para el caso de la serie armónica (conclusión correcta pero obtenida de modo incorrecto) pero lamentablemente llegaban a la misma conclusión para el caso de la serie de π.
- Algunos alumnos utilizaron diversos programas que por no permitirles un buen manejo numérico generaban oscilaciones en los valores que iban obteniendo, esto provocó que no pudieran concluir de ninguna de las formas antes explicadas.

De esta forma, la aproximación numérica no pareció influir de forma determinante para que los estudiantes mejoraran los resultados obtenidos en tareas y exámenes sobre las series numéricas infinitas. No afirmamos que esta aproximación no sea adecuada, lo que podemos decir es que deben cuidarse más detalles de lo que se pensó que fuese necesario. El desempeño de algunos alumnos en este enfoque es prometedor y debe seguirse estudiando.

A continuación presentamos un ejemplo de solución proporcionada por un alumno a la actividad de calcular las sumas parciales de los recíprocos de los cuadrados, en el anexo B pueden verse algunas otras de las respuestas obtenidas.

En esta actividad los alumnos van a aproximar el valor de π utilizando una hoja de Excel, la actividad se desarrolla generando columnas que van proporcionando diferentes valores numéricos que finalmente conducen al valor buscado. Está dividida en tres partes.
En la primera parte de la actividad los alumnos deben calcular el valor de las fracciones formadas por los recíprocos de los cuadrados de los enteros, por lo que puede verse que para n=1 se tiene 1, para n=2 se tiene ¼ =0.25,… es decir, en esta parte los estudiantes trabajan con una sucesión cuyo límite es cero.

n	Valor
1	1
2	0,25
…	…
99	0.00010203
100	0.0001

¿Qué puedes decir de los números que calculaste en la última columna (VALOR)?
Que van disminuyendo
¿Crees que todos estos números continúen el comportamiento que observaste en (1)?
Si por que se está utilizando la misma fórmula.
¿Qué explicación le das a ese comportamiento?
Cuando un número mayor es dividido por un número menor este tiende a ser más pequeño.
Si continuaras con los términos 101, 102, 103,... sin detenerte, ¿qué pasaría con los números de la última columna?
Se harían más pequeños.
¿Qué obtendrías en la pregunta (d)?

100	0.0001
101	9.80296E-05
102	9.61169E-05
103	9.42596E-05
104	9.24556E-05

SEGUNDA PARTE

En la segunda parte los estudiantes siguen produciendo columnas que proporcionan sucesiones convergentes a cero, además en la última columna generada en esta etapa, los alumnos manejan la sucesión de sumas parciales que en el límite proporcionarían el valor de π.

n	Valor	**Producto**
1	1	6
2	0.25	1.5
3	0.11111111	0.66666667

Ahora vas a hacer productos y sumas.

Agrega otra columna. En esta columna vas a hacer la suma de algunas filas de la columna PRODUCTO y vas a colocar esa suma en la nueva columna SUMAS. Por ejemplo, las primeras sumas serían como se ve:
fila 2: 6 + 1.5 = 7.5
fila 3: 6 + 1.5 + 0.666666666 = 8.166666666
fila 4: 6 + 1.5 + 0.666666666 + 0.375 = 8.541666666
fila 5: 6 + 1.5 + 0.666666666 + 0.375 + 0.24 = 8.781666666
fila 6: 6 + 1.5 + 0.666666666 + 0.375 + 0.24 + 0.166666666 = 8.948333333

n	Valor	**Producto**	**Sumas**
1	1	6	6
2	0.25	1.5	7.5
3	0.11111111	0.66666667	8.16666667
4	0.0625	0.375	8.54166667
…	…	…	…
97	0.00010628	0.00063769	9.80806648
98	0.00010412	0.00062474	9.80869122
99	0.00010203	0.00061218	9.8093034
100	0.0001	0.0006	9.8099034

¿Qué puedes decir de las operaciones de la última columna?
Van en aumento.
¿Hasta cuándo puedes hacer estas sumas?
Hasta cuando el valor de la columna se hace cero.
¿Puedes continuar haciendo estas sumas o tienes que detenerte en algún valor?
Que el valor puede ser continuo hasta llegar a 0 siempre y cuando la función sea continua de lo contrario la función se indetermina.
Si dices que debes detenerte en algún valor, ¿cuál valor? y ¿porqué debes detenerte?
Hasta que se haga negativo
En estos tiempos de computadoras, ¿es posible que suceda lo de la pregunta 4? ¿Por qué?
No por que todo lo que sea cantidad no hay nada negativo.

TERCERA PARTE

En esta tercera parte los estudiantes terminarán la aproximación a π.

n	Valor	**Producto**	**Sumas**	**Raíz cuadrada**
1	1	6	6	2.449489743
2	0.25	1.5	7.5	2.738612788
3	0.11111111	0.66666667	8.16666667	2.857738033
…	…	…	…	
98	0.00010412	0.00062474	9.80869122	3.131883015
99	0.00010203	0.00061218	9.8093034	3.131980747
100	0.0001	0.0006	9.8099034	3.132076532

¿Qué puedes decir de los números de la última columna al ir aumentando las filas?
Que no varían mucho y que su valor es parecido al de π.
¿Obtienes un número? ¿El número que obtuviste te parece familiar? ¿Cuál?
Los números que se obtienen son parecidos al de π.
Si no obtienes un número, ¿qué obtienes?
π
Si continúas con los términos 101, 102, 103,... ¿qué crees que pasaría con los números de la columna RAÍZ CUADRADA?
Aumenta su valor.
¿Habría un valor final? Si ¿cuál es ese valor? No ¿por qué no hay valor final?

9.8105034	3.132172313
9.81109158	3.132266205
9.81166828	3.132358262
9.81223384	3.132448537

Esta actividad tuvo como base el que los estudiantes trabajaran con sucesiones numéricas y con el manejo de las sumas parciales para "ver" la convergencia de la serie. Además de aprovechar la tecnología.

El ejemplo anterior se escogió porque en él se puede apreciar que el alumno va logrando obtener la aproximación correcta a π, además de que se observan afirmaciones interesantes como la "continuidad de la función" y la "no negatividad de los sumandos"

La respuesta de los alumnos en general fue buena, a muchos les pareció atrayente el trabajar con "tantos numeritos", algunos se aproximaron mucho al valor de π.

1.2.4 Acercamiento conceptual

Otra aproximación que se intentó estuvo enfocada a los conceptos involucrados en las series numéricas.

Se elaboró una actividad que constaba de tres etapas, el tema central se basaba en considerar las filas de asientos de un estadio en la sección de la cabecera. La configuración de la cabecera del estadio provoca que cada fila tenga un número diferente de asientos, de modo que entre más arriba se encuentra la fila más asientos tiene.

La primera etapa consistía en calcular el número de asientos que contiene una fila determinada, y posteriormente calcular el total de asientos que contiene la cabecera una vez establecido el número de filas de la cabecera.

La segunda etapa consistía en comparar los resultados obtenidos mediante una suma y una aproximación generada mediante integración.

La tercera etapa consistía en explicar las diferencias obtenidas entre los resultados de la segunda etapa.

Al analizar los resultados obtenidos con esta actividad se encontró que los alumnos podían establecer diferencias entre fenómenos de naturaleza discreta o continua, en particular las sumas de Riemann y las sumas infinitas fueron tratadas cono discretas en comparación con los procesos continuos considerados por la integración. Al final los estudiantes pudieron proporcionar ejemplos de tipo discreto o continuo.

Sin embargo, no se logró que los alumnos mejoraran su manejo de los criterios de convergencia pese a que se aplicaban a las series infinitas, que son discretas.

A continuación se muestra un ejemplo de respuesta a estas actividades, en el anexo C pueden verse otras respuestas de los estudiantes.

(En este ejemplo el estudiante resuelve la actividad ESTADIO, para lo cual suma el número de asientos que exceden a la primera fila y sólo suma la cantidad de asientos de la primera fila, posteriormente utiliza un programa de computadora para realizar la suma)

La primera fila tiene 50 asientos, la segunda tiene 52, la tercera tiene 54, etc.
¿Cuántos asientos hay en la fila 45?
44*2=88 + 50= 138 asientos

Ahora, debido a que se necesita conocer el número total de asientos de la cabecera, ¿cuántos asientos hay en total si la cabecera tiene 50 filas?
(50*50)=2500 + 2450 = 4950

Encuentra una fórmula que te permita calcular el número de asientos de cualquier fila.
{[(numero de filas)-1]* (2) } + 50

Encuentra una fórmula que te permita calcular el número total de asientos en la cabecera.
(filas * filas) + (
int n;
int m;
int t;
n=0;
t=0;
m=49;

for (int i=0; i<m; i++)
{
t=t+2;
n=n+t;
})
creado en C++

(En el siguiente ejemplo el estudiante resuelve la actividad ESTADIO DOS, en esta actividad deben comparar los resultados de sumar los asientos de las filas del estadio mediante una integral y una suma de Riemann. El estudiante explica mayormente en forma correcta.)

Reproduce los cálculos anteriores para la expresión
N(n) = 50+2(n-1)

$\rightarrow N(n) = 50+2(n-1)$

$= 50 + 2n - 2$

$= 2n + 48$

$= \sum_{n=1}^{50}(48+2n) = \sum_{n=1}^{50} 48 + 2\sum_{n=1}^{50} n$

$= 48(50) + \frac{2(50)(51)}{2}$

$= 2400 + 2550 = 4950$

integrando: de 1 a 50

$\rightarrow \int_1^{50} (50+2(n-1))\,dn = \int_1^{50} (50+2n-2)\,dn$

$= 50n + \frac{2n^2}{2} - 2n \Big|_1^{50}$

$= 4900 - 49$

$= 4851$

$\rightarrow \int_0^{50} (50+2(n-1))\,dn = \int_0^{50} (50+2n-2)\,dn$

$= 50n + \frac{2n^2}{2} - 2n \Big|_0^{50}$

$= 4900 - 0$

$= 4900$

Ahora responde las siguientes preguntas:

1) ¿Por qué la suma de Riemann sí proporciona el número correcto de asientos?

Porque con la suma de Riemann es un caso discreto, utiliza sumas con enteros, es como sumar 50 + 52 + 54 + 56 + 58 etc., hasta que llegue cuando sea la fila 50, por ello obtiene el numero correcto de asientos.

2) ¿Por qué la primera y la segunda integral no proporcionan el número correcto de asientos? (Se supone que la integral es una "suma")

Porque con las integrales se ocasiona un caso continuo, que utiliza inclusive aquellas sumas con diferenciales muy pequeños, que hace que el resultado sea diferente del valor real por cantidades no muy exageradas.

3) ¿Qué pasa con la integral de 0 a 51? ¿Sería válido usarla?

No sería válido porque básicamente estarías contando desde la fila cero, cosa que se debe de contar desde la fila 1.

4) ¿Por qué la segunda integral se acerca más al valor correcto?

Porque a grandes rasgos no se le resta ya que el valor sería 0.

5) ¿Puede hacerse algo para obtener el valor exacto con una integral?
No creo que sea posiblemente fácil realizarlo, porque utiliza valores muy pequeños, se obtiene entonces, un valor exacto y fácilmente, con la suma de Riemann.

(Ejemplo de solución de ESTADIO TRES)

¿Por qué en ocasiones, muchas ocasiones, diversos problemas discretos se resuelven utilizando funciones continuas?

Porque en ocasiones lo que se nos solicita es realizar una aproximación, esto mediante una función continua en un cierto intervalo de tiempo, esto se enfoca principalmente a los problemas de calculo de velocidad, densidad, las poblaciones entre muchas más; como el crecimiento exponencial se ve afectado en el tiempo

Además de que la mayoría de los fenómenos físicos por ejemplo el calculo de la velocidad, cálculo de una población de bacterias, densidad, etc., los consideramos continuos, esto se debe porque ocurren paulatinamente en un tiempo determinado, además de que este proceso es más sencillo y confiable y el margen de error es mínimo

Después de observar que en las actividades de la aproximación numérica varios estudiantes hacían referencia a la "continuidad" del término general de una sucesión o una serie, se decidió que era necesaria una actividad que permitiera observar esas diferencias.

El ejemplo anterior permite observar una de las respuestas esperadas, es decir que hay comportamientos continuos y discretos, y que el manejo de funciones que representan lo discreto o lo continuo afecta en los resultados obtenidos. Sin embargo entre las respuestas se alcanza a apreciar una pequeña duda acerca del por qué se afecta el resultado.

En general, los alumnos tuvieron una buena actitud ante esta actividad.

1.2.5 Aceleración de convergencia

En combinación con la aproximación numérica, y como una modificación y mejora a ella, se diseñaron actividades que permitieran a los alumnos utilizar algunos métodos numéricos cuya aplicación a una sucesión numérica permite ver en menos pasos el límite de la sucesión, razón por la que son conocidos como Métodos de Aceleración de Convergencia.

Basados en estos métodos se diseñaron dos actividades cuya finalidad era que los alumnos construyeran una sucesión que convergiera más rápido que la sucesión que originalmente se les proporcionó. Y aplicando iteradamente el método de aceleración se les pedía a los alumnos que construyeran varias sucesiones que cada vez convergieran más rápido.

Pese a que en estas actividades se cuidó utilizar una sucesión que no convergiera lentamente también se obtuvieron resultados semejantes a los obtenidos en la sección 1.2.3, después de analizar las respuestas de los estudiantes se encontró que las razones eran básicamente las ya consideradas en dicha sección.

A continuación mostramos un ejemplo de solución de esta actividad, en el anexo D puede verse otras respuestas de los estudiantes.

(En esta actividad se proporcionan 30 elementos de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a los estudiantes y el problema consiste en construir sucesiones que converjan más rápido para encontrar el límite, la respuesta del alumno consiste en una tabla que sintetiza seis sucesiones que convergen cada vez más rápido)

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n
1	3.34147	2.71671804	2.55221007	2.55423127	2.54744809	2.56286674
2	2.97943	2.65952638	2.55796876	2.53813062	2.56816319	2.57033114
3	2.82719	2.62221756	2.54732013	2.56024672	2.56104736	2.53061595
4	2.7474	2.59861473	2.54238742	2.56607644	2.53057528	2.53061112
5	2.69867	2.58244999	2.53557243	2.52945789	2.53061601	2.53061601
6	2.6659	2.57093244	2.52679685	2.53061045	2.53061045	2.84053945
7	2.64237	2.56224468	2.53061598	2.53061598	3.14727258	2.5200515
8	2.62467	2.55526704	2.53061044	3.77251647	2.53696925	2.61622865
9	2.61088	2.54982875	5.01402061	2.5133218	2.52050782	2.51109999
10	2.59983	2.54558993	2.53141409	2.53742185	2.50062749	2.50327767
11	2.59078	2.54134383	2.5134527	2.48069655	2.52275762	2.44157934
12	2.58324	2.53836956	2.44179209	2.51142379	2.36009141	2.51972792
13	2.57685	2.53571247	2.52690334	2.51970359	2.52337812	2.52451842

14	2.57137	2.53312847	2.50798259	2.5284364	2.51964445	2.51279065
15	2.56662	2.53130245	2.53878506	2.516415	2.50368567	2.51901813
16	2.56246	2.52960902	2.52320047	2.52083069	2.5248862	2.52001017
17	2.55879	2.52753235	2.51847323	2.52677813	2.5167723	2.52213632
18	2.55553	2.52612862	2.52317589	2.52400359	2.52216023	2.52215109
19	2.55261	2.5249424	2.52521566	2.5219984	2.52213621	2.52213682
20	2.54998	2.52423273	2.52222863	2.52217444	2.52217531	2.51940385
21	2.5476	2.52168	2.52201488	2.52212561	2.51970311	2.5198333
22	2.54544	2.52237882	2.52264425	2.51932686	2.51943616	2.51845188
23	2.54346	2.52161933	2.51969642	2.51976154	2.51862189	2.5186404
24	2.54165	2.51868667	2.51936803	2.51846758	2.51848125	
25	2.53999	2.52022667	2.51738355	2.51864279	2.51727204	
26	2.53845	2.518286	2.51977261	2.51657227		
27	2.53703	2.51767	2.51762909	2.51762929		
28	2.53571	2.51679875	2.51692125			
29	2.53448	2.53448052	0			
30	2.53333	0				

Esta sucesión converge a 2.52.

Estos fueron los primeros intentos de resolver lo observado en el aula basados en la experiencia docente y la reflexión con otros profesores, sin embargo los resultados obtenidos en las calificaciones de los estudiantes generaron la necesidad de tomar en consideración más factores.

1.3 Programa de estudios en el ITESM-CEM

En el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey existen diversas carreras del área de Ingeniería que cursan dos o tres semestres de cálculo diferencial e integral, en una y varias variables en las materias llamadas Matemáticas para Ingeniería I, Matemáticas II para Ingeniería y Matemáticas III para Ingeniería.

A continuación se presenta un resumen del temario de Ma00816.

Temario:
El proceso de integración.
Métodos de integración e integrales impropias.
Aplicaciones de la integral definida.
Series. Sucesiones. Series convergentes y criterios de convergencia. Series alternantes. Convergencia absoluta y condicional. Series de potencias. Series de Taylor.
Matrices.

También algunas de las carreras del área de las licenciaturas estudian series, aunque sólo el tipo de serie geométrica. Este tema aparece en la materia de Matemáticas II

En ambas áreas se puede encontrar una gran diversidad de materias que tienen como requisito el haber aprobado la materia de Matemáticas II, tanto para Ingeniería como de Licenciatura. En el plan de estudios de diversas carreras aparecen materias cuyo temario incluye el manejo de algún tipo de sucesión o serie, en total podemos hablar de 22 materias que incluyen el tema de sucesiones o series. Podemos asegurar que los temas de sucesiones y series tienen un impacto muy grande en la continuidad de los estudios de los alumnos; ya sea porque son parte de los requisitos que deben cumplir dentro de su plan de estudios, o porque son temas importantes para la realización de alguna actividad de sus carreras como podría ser el diseño de un sintetizador de audio, un filtro para eliminar el ruido en señales de diverso tipo, etc.

Podemos afirmar que cualquier retraso en la aprobación de la materia de Matemáticas para Ingeniería II será determinante en el cumplimiento del currículum correspondiente a cada carrera, por esto se considera que esta materia es, en muchas ocasiones, un fuerte obstáculo para los alumnos.

1.4 Enfoque educativo en el ITESM-CEM

El siguiente diagrama establece el esquema general del modelo educativo del Sistema Tecnológico de Monterrey.

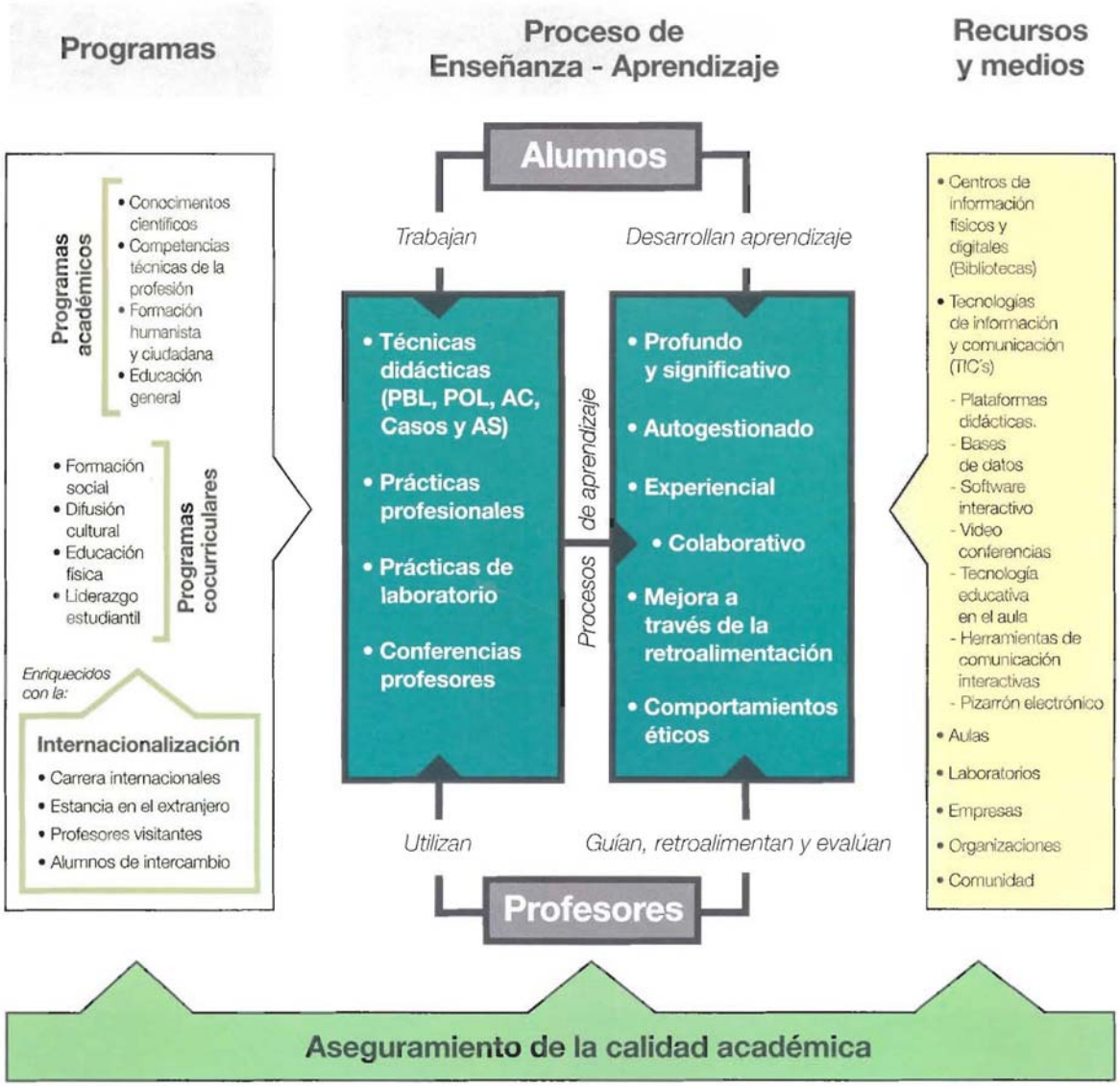
En la imagen puede observarse cómo los programas están divididos en académicos y curriculares; que además se encuentran enriquecidos con un proceso de internacionalización por parte de los estudiantes.

Además se utilizan diversas técnicas didácticas, por parte de los profesores, para lograr que durante el proceso de enseñanza – aprendizaje los alumnos obtengan aprendizajes profundos, significativos, autogestionados, etc.

Los recursos que se utilizan van desde las aulas de clase y pasando por laboratorios especializados hasta las bibliotecas (físicas y digitales) y visitas a empresas, organizaciones y comunidades.

Modelo educativo del Tecnológico de Monterrey

El siguiente esquema integra y relaciona todos los elementos del modelo educativo.



(ITESM, 2006, p. 19)

2. Estado Actual

En el capítulo anterior se describió la situación escolar antes y en el momento de iniciar esta investigación. Lo que se ha comentado hasta ahora es el punto hasta el que la experiencia docente y la intuición permitió llegar, sin embargo los fenómenos reportados no han podido ser eliminados (desde el punto de vista de la escuela) pues los estudiantes siguen presentando respuestas y siguen resolviendo ejercicios en formas que para el marco escolar no son adecuadas. Toca ahora realizar un análisis desde una nueva perspectiva, la de investigador.

En este capítulo damos una visión del llamado "estado del arte" de las investigaciones en las series numéricas infinitas. Para esto se revisarán algunas tesis de grado y algunos artículos de investigación que nos digan lo que ya ha sido investigado con anterioridad.

También revisaremos las teorías que utilizaremos para realizar la aproximación teórica de nuestra investigación a los fenómenos planteados en el capítulo 1.

Finalmente establecemos las preguntas de investigación que guían este trabajo.

2.1 Estado del Arte

Veamos ahora algunas de las investigaciones que se han realizado acerca de las series infinitas, algunos de estos trabajos han sido realizados en nuestro ámbito educativo mexicano, sin embargo algunos más han sido desarrollados en otros países.

Este análisis demuestra que la preocupación en el aprendizaje y comprensión de las series infinitas se presenta en diversas latitudes.

A continuación hacemos unas breves descripciones y análisis de estas investigaciones.

L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur (Robert, A. ; 1982)

Este trabajo fue realizado en la universidad París VII. El marco teórico que utilizó la autora está formado por una aproximación constructivista y la transposición didáctica, aunado a esto utiliza un análisis estadístico para establecer sus conclusiones.

La autora realizó su estudio mediante un análisis sobre 1389 estudiantes de diversos niveles educativos, estratos sociales y distribuciones geográficas.

La autora realiza primero una breve reseña histórica de las series, y posteriormente analiza la transposición didáctica que encuentra en el nivel superior del sistema escolar francés.

En la página 59 establece un cuestionario a aplicar a los alumnos, este cuestionario consta de 12 preguntas que versan sobre convergencia de sucesiones manejando conceptos abstractos para casos particulares.

Posteriormente analiza los diversos tipos de representaciones que utilizan los estudiantes para representar una sucesión, y obtiene una caracterización de la frecuencia de esas expresiones utilizadas por los alumnos. La caracterización está basada en un análisis estadístico de toda la población que estudió. También realiza una clasificación de las sucesiones y habla de modelos estáticos, modelos dinámicos y modelos mixtos utilizados en la presentación de las sucesiones. Termina esta primera parte de su trabajo estudiando esas categorías de representaciones que los estudiantes hacen sobre las sucesiones.

Posteriormente la autora investiga la forma en que los estudiantes proporcionan ejemplos de sucesiones convergentes y divergentes, los análisis los realiza catalogando el tipo de funciones empleadas en los ejemplos. Por separado analiza los ejemplos que contienen $\frac{1}{n}$ y n.

En los siguientes capítulos realiza el estudio de la forma en que los estudiantes responden a preguntas del tipo "Indique si es cierto o falso: Toda sucesión de términos positivos es

decreciente". El análisis de las respuestas obtenidas lo realiza sobre aquellas que considera correctas y por separado hace un análisis para las respuestas incorrectas.

La autora también realiza una clasificación de los errores cometidos como:

- No tomar en cuenta que la variable *n* del límite tiende a infinito.
- Transformaciones o modificaciones de teoremas.
- Errores de lógica.
- Distracciones, errores de cálculo y de uso de los índices.
- Errores debidos a lagunas previas.
- Errores debidos a una representación errónea.
- Respuestas sin demostración.

La autora presenta diversas conclusiones:

- El aislamiento del concepto de convergencia de sucesiones numéricas con relación a las funciones, en la medida en que en los cursos no se puede demostrar que el fundamento de la convergencia en proximidad del infinito de una función de $\mathbb{N}$ en $\mathfrak{R}$ es el mismo que el de la convergencia de una función de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}$.
- La dificultad intrínseca de estos últimos conceptos más generales y la imposibilidad de introducirlos antes de tener suficientes ejemplos para justificar estos nuevos objetos
- El estado de los conocimientos permite al profesor tener una visión unificada y global del concepto que presenta en forma particular; por otra parte el estudiante debe comenzar por hacer funcionar los objetos o conceptos, y eso requiere de trabajar con casos particulares.
- El trabajo permitió comprobar la existencia de modelos de representación, estático mixto y primitivo, y su estrecha relación entre representaciones mentales correctas o incorrectas acerca de la convergencia; evidenciando la estrecha relación entre la expresión escrita de los estudiantes y los procedimientos que eligen aplicar.
- Se logró identificar dificultades específicas, si no del concepto, sí del campo conceptual al que pertenece, sugiriendo el vínculo de algunas de estas dificultades y la transposición didáctica puesta en relieve en este trabajo.

Con respecto a esta investigación podemos hacer las siguientes acotaciones:

1. La aproximación constructivista fue utilizada por la investigadora para explicar la forma en que los estudiantes van construyendo el concepto de convergencia.
2. Mediante la transposición didáctica la investigadora exploró la forma en que los conceptos han llegado al sistema escolar francés. Esta aproximación es importante para nosotros debido a que en capítulos posteriores abordaremos la forma en que las sucesiones y series infinitas han entrado a la escuela.
3. Muchos de los errores que la autora encontró y clasificó también fueron detectados en nuestros salones de clase.
4. El tratamiento estadístico que se utilizó en esta investigación no será utilizado por nosotros, haremos un pequeño análisis de las respuestas que obtuvimos de nuestros estudiantes pero no será tan extenso ni tan detallado debido a que no es de nuestro interés abordar directamente las construcciones que logran los estudiantes.

Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios (Flores, 1992)

Esta tesis fue presentada en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional en México.

En el cuerpo del trabajo se detalla la forma en que se realizó el estudio:

- Examen del origen de los criterios de convergencia en los trabajos de Cauchy.
- Diseño y análisis de actividades didácticas con estudiantes.
- Establecimiento de nociones heurísticas que emplean los estudiantes.
- Trabajo con entrevistas clínicas.
- Análisis de resultados.

Como primer paso el autor utiliza los textos de Cauchy (1821) y Grattan-Guinness (1970) para establecer la forma en que Cauchy ideó sus criterios de convergencia, para de esta forma intentar descubrir los razonamientos heurísticos que pudiera haber aplicado en la obtención y

demostración de los criterios de convergencia. Esto, según el autor, le permitirá observar si los estudiantes pueden utilizar esos mismos razonamientos heurísticos.

El estudio se efectúa con estudiantes del nivel universitario de la carrera de Licenciado en Matemáticas Aplicadas del ITAM, sus conocimientos matemáticos se establecen en graficación, álgebra, geometría analítica y cálculo diferencial.

A los estudiantes se les pidió calcular la suma de algunas series geométricas y después se les pide una generalización, el autor dice

> *De ser necesario, después de los problemas* ***se debe urgir a las estudiantes a buscar "propiedades" de los elementos de las series****, con el fin de introducirlos a que enlacen las operaciones con los términos con el hecho de que las series sean sumables o no. Si se considera adecuado,* ***dar un ejemplo*** *de esta clase de "propiedades".* ***Esto es válido, pues demuestra*** *el nivel de naturalidad del proceso bajo investigación.*[2] (Flores, 1992, p. 62)

También se lee

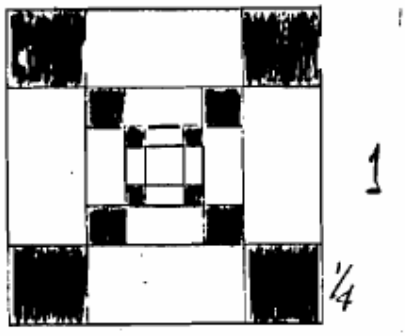
> *…no se permitirá el uso de método alguno que conduzca al cálculo de la suma con el deseo de alentar la búsqueda de estrategias para determinar la convergencia; ahora bien, esta debe justificarse no importando la estrategia utilizada, por lo que* ***si hay que intervenir***[3] *en este punto úsese el Lema de Comparación,… obsérvese si a continuación las estudiantes hacen uso del método y cómo lo hacen…* (Flores, 1992, p. 63)

En la entrevista clínica se utilizan diagramas geométricos

[2] Las negritas son nuestras.
[3] Las negritas son nuestras.

PROBLEMA:

DADO UN CUADRADO DE LADO 1, HALLAR LA PORCIÓN SOMBREADA DE SU ÁREA SI SE CONTINUA SOMBREANDO SEGÚN INDICA LA FIGURA. (NÓTESE QUE CADA LADO DE UN CUADRADO SOMBREADO ES ¼ DEL LADO DEL CUADRADO EN EL QUE ESTÁ SITUADO COMO ESQUINA.)



(Flores, 1992, p. 65)

para posteriormente empezar a utilizar la notación y terminología clásica de las series numéricas infinitas y también se realiza la manipulación de esos símbolos para verificar la convergencia o divergencia de las series elegidas en la actividad, **cuando originalmente se eligieron a estos estudiantes sin conocimientos acerca de las series**.

El autor finalmente concluye

> *No es natural operar con los términos de una serie para determinar si esta converge o diverge.* (Flores, 1992, p. 215)

Después de lo anterior se puede establecer que el autor empleó un marco teórico basado en un análisis histórico acerca del origen de los criterios de convergencia y un análisis cualitativo de los razonamientos empleados por los estudiantes. Dentro de este marco intenta explicar la forma en que *Cauchy* "ideó" los criterios de convergencia que publicó en su libro.

En este trabajo el investigador intenta generar en los estudiantes un contexto que les permita reconstruir el proceso seguido por Cauchy para establecer los criterios de convergencia, para ello realiza una entrevista clínica que usa para ver los métodos que los estudiantes utilizan al analizar la convergencia de una serie.

Este trabajo no ahonda acerca de si los estudiantes ya conocen el concepto de convergencia ni en la forma de cómo los estudiantes logran el concepto de convergencia, tampoco estudia el hecho de que los estudiantes comprendan lo que es un criterio de convergencia, tan sólo se enfoca en la formalidad de la elección y uso de los criterios de convergencia.

El autor menciona que el discurso matemático teórico no es la mejor base para comunicar ideas, sin embargo no hace comentarios acerca de que los criterios de convergencia son conceptos teóricos en su totalidad o que la forma de demostrarlos y su validez también es teórica.

Sobre este trabajo podemos hacer las siguientes acotaciones:

1. El enfoque histórico le permite al autor establecer el origen de algunos de los criterios de convergencia que se estudian en la escuela, este tipo de estudio también será utilizado por nosotros debido a que nos permitirá establecer la epistemología de las series infinitas y no sólo de los criterios de convergencia.
2. La aproximación metodológica utilizada por el autor nos parece muy interesante y prometedora, sin embargo la aplicación de la entrevista clínica contiene varios puntos que a nuestro juicio disminuyen su aplicabilidad a nuestra investigación:
    a. En forma inicial los estudiantes fueron elegidos sin conocimientos sobre series y se les pide resolver un problema geométrico que origina una serie geométrica cuya convergencia está garantizada.
    b. Sin embargo a los estudiantes se les induce una forma de razonamiento (sumar) mediante el problema geométrico planteado, pero no se les permite usar ninguna técnica de suma creándoles un conflicto.
    c. Inmediatamente después se inicia el uso de la simbología específica de las series. No se establece la metodología utilizada para introducir esta simbología

ni tampoco se comenta si los estudiantes presentaron alguna dificultad en su manejo.

3. Otro punto que no compartimos con esta investigación es el hecho de que los estudiantes son "conducidos" hacia una forma específica de razonamiento. Cuando el autor dice "*se debe urgir a las estudiantes a buscar "propiedades" de los elementos de las series, con el fin de introducirlos*", (Flores, 1992, p. 62), pero entonces el discurso de la "heurística" que se está buscando desarrollar ya no es un pensamiento natural en los alumnos.
4. Su afirmación "*Esto es válido, pues demuestra el nivel de naturalidad del proceso bajo investigación*", (Flores, 1992, p. 62), no parece estar sustentada en su marco teórico y además es contradictorio con lo que apuntamos en (3).
5. Además otro comentario en este sentido es "…*no se permitirá el uso de método alguno que conduzca al cálculo de la suma con el deseo de alentar la búsqueda de estrategias para determinar la convergencia; ahora bien, esta debe justificarse no importando la estrategia utilizada, por lo que si hay que intervenir en este punto úsese el Lema de Comparación,… obsérvese si a continuación las estudiantes hacen uso del método y cómo lo hacen*…", (Flores, 1992, p. 63). Nuevamente la naturalidad de la heurística queda en entredicho. Esto puede ser la razón por la que el autor obtiene su conclusión final acerca de la no naturalidad de trabajar con los elementos de la serie.

Sobre la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato. Análisis de las estrategias que posibilitan la construcción del concepto. Estudio de Casos (Pérez, 1991)

En esta investigación la autora presenta un caso en el que mediante un ambiente gráfico y un ambiente numérico intenta averiguar las condiciones o estrategias que les permitan a alumnos de bachillerato construir el concepto de convergencia de una serie para el caso específico de la serie de Taylor.

La autora proporcionó a los estudiantes un ambiente gráfico mediante el cual pueden hacer pruebas entre la función exponencial y los polinomios de grado finito que proporciona la expansión en serie de Taylor de la función exponencial.

En este ambiente los alumnos pueden experimentar con diversas gráficas, si bien al principio no detectan más características comunes de las gráficas que su intersección en $x = 0$, posteriormente y con una intervención de la autora, empiezan a observar el parecido que guardan las gráficas entre más grande es el grado del polinomio. Pese a las objeciones iniciales de uno de ellos (sobre considerar que las gráficas en pantalla y las gráficas reales sean parecidas) la posibilidad de graficar muchas funciones y observar rápidamente el efecto de más términos de la expansión lentamente proporciona la posibilidad de que los alumnos observen la "convergencia" de las gráficas.

En la segunda etapa de la investigación, la autora expone a los estudiantes a cálculos numéricos para que ahora experimenten la "convergencia" en forma numérica. Pero no indica qué ambiente utilizó a modo de realizar tantos cálculos.

El trabajo a desarrollar consiste en calcular las funciones e^x, ln(1-x) y $\frac{1}{1-x}$ en los puntos $x = 0.05$, 0.75 y 3, y les pide que comparen esos valores con los resultados que obtienen al evaluar los polinomios que surgen de la expansión en serie de Taylor de cada una de estas funciones.

En esta etapa los estudiantes trabajan en forma individual y luego se reúnen para intercambiar opiniones comparando sus cálculos con gráficas que realizaron ex profeso.

En el análisis de los resultados obtenidos individualmente por los estudiantes, la autora muestra los cálculos realizados por ellos, y en esas evidencias escritas se observa que los alumnos logran decir que las funciones polinomiales aproximan a la función exponencial, al igual que aceptan la aproximación de los polinomios a la función ln(1+x) indicando la

condición de que esté aproximadamente entre $x = 0$ y cerca de $x = 1.70$; y finalmente logran encontrar que en $\frac{1}{1-x}$ es válido sustituir valores desde -0.9 hasta 0.9.

Más adelante se pueden leer los diálogos de los estudiantes al reunirse e intercambiar opiniones, lo que les permite lograr detallar más los intervalos donde las funciones y los polinomios toman valores semejantes.

Este trabajo está ubicado dentro de un análisis del Discurso Matemático Escolar (DME) vigente, desde donde la autora realiza un breve análisis de la situación que en aquel momento guardaba el DME y lo utiliza para diseñar lo que ella llama una *experiencia*.

Como conclusiones la autora establece:

- La aproximación gráfica permitió a los alumnos predecir los términos que continúan en la serie e incluso establecer una fórmula al parecer sin dificultad.
- El trabajo numérico fue lo que les permitió (*a los alumnos*) aceptar la igualdad de la función con su desarrollo en los polinomios de Taylor, llegando incluso a establecer intervalos de convergencia en las otras funciones dadas (*la autora se refiere a los polinomios de Taylor*)

La autora establece como conclusión general:

> *La visualización gráfica previa, favorece el estudio numérico y el análisis de la noción de convergencia* (Pérez, 1991, p. 74)

Nuestro análisis de (Pérez, 1991) nos permite formular los siguientes comentarios:

1. La aproximación del DME nos parece importante ya que nos permite "ver" lo que la escuela está diciendo acerca de las series de Taylor (en este caso). Esta misma aproximación será empleada por nosotros para estudiar el caso de las series numéricas infinitas, tema de nuestra investigación.
2. La etapa gráfica que reporta la autora no especifica el software que utiliza, este punto nos parece importante porque de acuerdo a las aproximaciones gráficas que nosotros

hicimos en 1.2.2 pudimos ver que el software influye en las observaciones y las conclusiones que los alumnos logran.

3. No compartimos el hecho de que los alumnos sean "conducidos" a observar semejanzas como cuando la autora dice "*se les pidió observar las gráficas con las cuatro curvas y buscar alguna relación*…" (Pérez, 1991, p.15)
4. Tampoco se consigna cuál fue el medio utilizado para realizar los cálculos que se efectuaron en la etapa numérica, nuevamente este es un dato que de acuerdo a nuestras observaciones en 1.2.3 es de gran importancia pues los instrumentos de cálculo que hayan utilizado afectarán los valores obtenidos y pueden generar diversos comportamientos numéricos.
5. Cuando uno de los estudiantes expresa sus dudas acerca de si lo que grafica la computadora y lo que se obtendría haciendo la gráfica manualmente, de nueva cuenta la autora "conduce" a los alumnos diciendo "*Chava no cree que lo que pasa graficando por medio de la computadora, sea igual a lo que graficaría a mano y con mucha precisión, entonces,* ***les hago*** *la aclaración que lo que observan en la pantalla de la computadora, es justo lo que obtendrían graficando a mano*", (Pérez, 1991, pp. 12-13), lo que hace a la autora suponer que ha eliminado el escepticismo del estudiante pero posteriormente ella misma acota que el alumno continúa dudando de los resultados de la computadora. En este punto se nota claramente la necesidad de indicar el software utilizado para la graficación.

Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación (Moreno, 1999)

En esta investigación el autor establece como problema principal

> *Analizar en situación escolar, en qué medida la utilización a través de secuencias didácticas de un escenario físico-geométrico simulado por computadora, que da un contexto al estudio de la convergencia de series trigonométricas, permite superar algunos obstáculos epistemológicos, tales como el principio de permanencia de Leibniz.* (Moreno, 1999, p. 2)

El marco teórico desde el cual el autor desarrolla su trabajo es el de la Teoría de Situaciones Didácticas y lo concluye mediante la construcción de una ingeniería didáctica. Así, en este trabajo de investigación el autor analizará algunos obstáculos epistemológicos.

Como primer paso el autor analiza las dificultades asociadas a los conceptos necesarios en el cálculo y las series, para posteriormente analizar los trabajos realizados con la serie de Taylor y la convergencia de series.

Posteriormente el autor realiza un análisis de varios libros de texto para obtener información como extensión del tema, forma teórica de abordar el tema, tipos de ejercicios, tipos de problemas, etc.

También realiza un análisis sobre las concepciones que presentan los profesores acerca de estos temas.

La investigación se inicia con una actividad exploratoria dividida en dos problemas; primero se enuncia un problema en el que se genera una serie geométrica y en el segundo problema se pide a los estudiantes que consideren una serie trigonométrica.

Como análisis el autor dice que los alumnos presentan el obstáculo epistemológico infinito potencial y que algunos estudiantes utilizan *argumentos físicos para esclarecer la convergencia de la serie*, además reporta el obstáculo *principio de permanencia de Leibniz*.

El escenario que diseña el autor consiste en representar los términos de la serie trigonométrica mediante un programa graficador en computadora; los términos de la serie serán representados mediante círculos cuyo radio depende del "índice del término" de la serie que se está considerando, de esta manera, conforme se toman más términos de la serie, el radio del círculo que lo representa decrece.

Otra observación es que cada término de la serie tiene un ángulo que es múltiplo del ángulo del primer término, lo que se representa en la gráfica como un punto que se mueve sobre el

círculo y que a medida que aumenta el "número de término" considerado ocasiona que el punto gire más rápidamente sobre el círculo.

La ingeniería didáctica consiste ahora en que una vez proporcionada una serie trigonométrica, los estudiantes deben encontrar más términos de la serie y graficar sumas parciales de esta serie.

Una vez aplicada la ingeniería didáctica, el autor realiza un análisis de los resultados obteniendo entre otros puntos

- *Sí hay una gráfica final* (de acuerdo a un equipo)
- *No hay gráfica final* (de acuerdo a otro equipo)
- El instructor **realiza una intervención** y logra que el grupo concluya que *"…sí hay gráfica final y tiene forma de onda triangular".*
- *"Dado que la variación es mínima entre las sucesivas gráficas de sumas parciales,…, podría tomarse la correspondiente suma parcial de alguna de ellas como la expresión analítica apropiada…"*
- *"Observando la gráfica completa* ***resulta difícil*** *para los estudiantes,* ***determinar*** *una expresión analítica"*
- *"****Con la participación*** *del instructor,* ***dirigiendo*** *a que se observe no a toda la gráfica, sino una parte de ella,* ***se llega*** *a la expresión analítica…"*

(Moreno, 1999, p. 81)

Como conclusiones el autor expresa

A. *…la problemática que encierra la noción de convergencia de series trigonométricas,* ***es muy compleja****.* (Moreno, 1999, p. 97)
B. *Las* ***dificultades y obstáculos epistemológicos****, que generan los procesos infinitos propios de la convergencia,* ***son difíciles de superar*** *en su totalidad…*(Moreno, 1999, p. 97)
C. *…los estudiantes* ***transfieren a la función límite*** *de las sumas parciales de una serie trigonométrica, propiedades de los términos de las sumas como la continuidad y la naturaleza oscilatoria…*(Moreno, 1999, p. 97)

D. *…en el primer problema abordado por los estudiantes, el de la onda triangular,* ***el escenario influyó en un mínimo porcentaje*** *para la superación de las* ***dificultades y obstáculos*** *que surgieron…*(Moreno, 1999, p. 98)

E. *Efectivamente,* ***el escenario permitió la interacción de los contextos gráfico****, el propio de la simulación y el algebraico involucrados y dio un contexto a las series trigonométricas.* (Moreno, 1999, p. 98)

F. *Las representaciones dinámicas de las sumas parciales de las series trigonométricas y la observación de patrones de comportamiento tanto en el contexto gráfico como el de la simulación, permitieron a los estudiantes asociar nociones matemáticas tales como convergencia, derivabilidad y discontinuidad con el escenario.* (Moreno, 1999, p. 98)

G. *El hecho de que los estudiantes para validar sus conclusiones hayan analizado sumas parciales con más términos que los solicitados en los problemas, nos muestra que el recurso de simulación por computadora, les proporciona un espacio más amplio de posibilidades en el que pueden explorar sus conjeturas.* (Moreno, 1999, p. 98)

H. *Los elementos que el escenario provee, tales como los radios, velocidades del punto generador, permitieron a los estudiantes desarrollar argumentos como: los radios se hacen cada vez más pequeños, llegan a ser tan pequeños los círculos que el punto prácticamente gira sobre si mismo,… Estos fueron de gran utilidad* ***para el desarrollo de la intuición****…*(Moreno, 1999, p. 98)

I. *"… para la mayoría de los estudiantes* ***persistieron las dificultades****, identificadas también en la secuencia exploratoria,* ***para expresar analíticamente*** *a las funciones periódicas tratadas…"*

(Moreno, 1999, p. 97)

Después de nuestro análisis tenemos las siguientes acotaciones:

1. Compartimos el uso de la teoría de situaciones didácticas y los obstáculos epistemológicos puesto que son conceptos importantes que también juegan un papel importante en nuestra investigación, aunque el autor los utiliza para funciones trigonométricas muchos de estos aparecen en nuestras indagaciones sobre las series numéricas.
2. El enfoque gráfico utilizado por el autor no será utilizado por nosotros, sin embargo consideramos que las conclusiones arrojan puntos importantes que son coincidentes con algunas de las cosas que reportamos en nuestra aproximación gráfica en 1.2.2,

como por ejemplo cuando el autor dice que la visión brinda un ambiente que los estudiantes aceptan bien.

3. Aunque los análisis a priori y a posteriori, y la validación interna son correctos, estamos seguros que los resultados obtenidos con la ingeniería didáctica no son aplicables a nuestra investigación porque desde nuestro punto de vista las nociones de convergencia que los estudiantes generaron -"*la velocidad es tanta que ya no se ven* (círculos)…", (Moreno, 1999, p.91)- no son más adecuadas, en un contexto escolar, que las nociones detectadas por nosotros -"*converge porque se hace más pequeño* (el término de la serie)".

Un estudio acerca del discurso matemático escolar: La serie de Taylor (Douglas, 1992)

En esta investigación se utiliza un marco teórico que centra su atención en el Discurso Matemático Escolar y un estudio de tipo histórico sobre los orígenes de la serie de Taylor.
Acerca del estado actual del discurso matemático el autor comenta:

> *La influencia que el discurso matemático vigente ejerce sobre el discurso matemático escolar y sobre la escritura de los libros de texto –y cómo se modifican mutuamente- y cómo este proceso puede hacer que ideas "naturales" o "intuitivamente claras" queden oscurecidas ó en desuso, solo por verse desde una determinada perspectiva*
> (Douglas, 1992, p. 1)

En esta investigación el autor establece como problema principal

> "…*Es por ello que abordaremos tan sólo una etapa, centrándonos en la serie de Taylor: en sus antecedentes, motivaciones y posibilidades de uso en los textos actuales. Se revisa una concepción de la serie que no está presente en la didáctica actual, en la cual se pueden ver como naturales algunos resultados que hoy en día no lo son*…" (Douglas, 1992, p. 9)

A partir de esta idea realiza su análisis histórico y concluye que:

En el trabajo se establece un contraste entre dos paradigmas asociados a la serie de Taylor: uno estrechamente vinculado a la idea de predicción en los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza y otro asociado a la idea de convergencia en el análisis matemático.

Cantoral señala que el segundo de estos modelos es absolutamente predominante en el discurso matemático escolar contemporáneo en tanto que el modelo asociado a la idea de predicción, es escasamente tratado en los textos de física, está ausente en las aproximaciones didácticas actuales.

(Douglas, 1992, p. 58)

En los capítulos III y IV, Douglas realiza una comparación y análisis de varios libros de texto que abordan el tema de la serie de Taylor al igual que el enfoque utilizado. En el mismo capítulo IV inicia un análisis de las propuestas producidas por otros investigadores acerca de la serie de Taylor.

En el capítulo final el autor realiza algunas reflexiones, dice

Los estudiantes argumentan que la matemática en general y el cálculo en particular – es muy difícil, demasiado abstracto y alejado de la problemática cotidiana.

Podemos decir que, muchos de los obstáculos que los profesores enfrentan para comprender los elementos del cálculo están asociados con el discurso matemático escolar utilizado.

Basado este en el discurso matemático vigente, cuya influencia se deja sentir en el aula y a través de los textos de cálculo

(Douglas, 1992, p. 71)

…pero recordemos aquí que las formas del saber científico han sido diferentes a través de la historia que trae como resultado que nociones simples en algunas de estas formas de transmisión aparecen complejas ó incluso inaccesibles

…

Podemos aseverar que los libros de texto de cálculo, fueron altamente influenciados por los resultados del desarrollo de las investigaciones matemáticas relacionadas con la elaboración de los fundamentos lógicos de esta ciencia (discurso matemático vigente).

(Douglas, 1992, p. 72)

> *En la enseñanza de nuestros días, el estudio de la serie de Taylor aparece tan tarde que muchos de los resultados para los que pudiera ser útil se obtuvieron ya previamente…*
> (Douglas, 1992, p. 74)

Más adelante realiza una propuesta didáctica

> *…creemos que la serie de Taylor es el concepto que vertebra al cálculo, por lo cual creemos que se deben modificar los contenidos del curso de cálculo, desarrollándolo, tomando como concepto esencial, a la SERIE DE TAYLOR.*
> (Douglas, 1992, p. 73)

Después de analizar esta tesis podemos comentar lo siguiente:

1. El análisis del autor sobre el Discurso Matemático Escolar nos parece importante ya que permite ver la forma en que se trata a la serie de Taylor en la escuela. Esta misma aproximación será utilizada por nosotros para la consideración que haremos de las sucesiones y series numéricas infinitas.
2. Algunas de las afirmaciones que el autor realiza con respecto a la forma en que el discurso matemático escolar está influenciado por el rigor matemático también coinciden con algunos de los fenómenos que hemos observado y que en el capítulo 3 detallaremos.

Sequences and series-sequences and functions: students' confusions (Mamona, 1990)

La autora aplica un marco teórico basado en la cognición y la psicología que le permita ver cómo es que los estudiantes forman los conceptos básicos del análisis real, tales como la recta real, límites, sucesiones, series y funciones reales. Además de estudiar la forma en que los estudiantes relacionan las sucesiones y series, y si ellos consideran a las sucesiones como funciones.

Este trabajo está basado en la tesis de doctorado de la autora (Mamona, 1990). Comenta haber encontrado clara evidencia de la confusión en los estudiantes en relación a los conceptos de sucesiones y series.

La investigación inicia mediante varios cuestionarios diseñados para obtener las formaciones cognoscitivas (cognitive formations) de los estudiantes acerca de los conceptos de sucesiones y series. Posteriormente se realizaron discusiones grupales para complementar los cuestionarios. Una vez analizada toda la información la autora aborda un caso específico.

El estudiante elegido ya conoce las propiedades axiomáticas de los números reales y ya también ha sido introducido a la teoría de sucesiones y series.

La investigación inicia considerando dos preguntas:

1. Si una sucesión U_n tiene como límite el número positivo ½, ¿puede tener un número infinito de términos negativos? Justifica tu respuesta.
2. Muestre cómo usar una representación gráfica de las siguientes sucesiones, para decidir cuál converge monótonamente, oscila, etc., donde $U_n = a\,U_{n-1}^2 - bU_{n-1}$ para diferentes a y b.

Analizando las respuestas, la autora expresa:

- *The answer to question 1 suggests that this student has no discriminated between sequences and series, and ilustrates a common problem with undergraduates, i.e. series are predominant; perhaps this is because they have been studied at A-level.* (Mamona, 1990, p. 335)
- *Even from the linguistic point of view, "series" is a word more commonly used than "sequence" to describe a succession of events, so students are more predisposed to it*…(Mamona, 1990, p. 335)
- *The student said: "I just take them as being the same, a sequence to me is a sequence of numbers, but series seems to be constants or parameters x … I don't really know what the difference is…",* (Mamona, 1990, p. 335)
- *From the above we see that the student* ***confined*** *the limit concept* ***to the sum of a serie****s as this was the predominant notion of the course*…(Mamona, 1990, p. 335)
- ***It was the graph*** *at the end which made him* ***understand*** *that his answer was wrong*…(Mamona, 1990, p. 336)
- *This suggests that the limit concept* ***is strongly identified*** *with an* ***additive*** *behavior in the terms considered; the temptation is, to add the terms.* (Mamona, 1990, p. 336)

- …*students, feel they must "do" something to the numbers; and in this case addition seems the most natural operation. This phenomenon I feel can be put in broader terms:* ***it is the difficulty of transition from the stage where arithmetic is used to solve more or less physical problems, to the one where mathematics is used to explore the structure and behavior of number systems themselves***.
  (Mamona, 1990, p. 336)

Sobre esta investigación podemos comentar:

1. Algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes que participaron en la investigación son semejantes a las que nosotros detectamos en el aula y en las tareas, como aquella de la confusión entre sucesión y serie, o la de dominancia de la sucesión sobre la serie. Por lo que en este punto encontramos concordancia con nuestra investigación.
2. Una de sus conclusiones indica "…*we see that the student confined the limit concept to the sum of a series*…"[4] (Mamona, 1990, p. 335) lo que también coincide con lo que nosotros detectamos.
3. La aproximación cognitiva parece proporcionar diversas guías para nuestra investigación, sin embargo, aunque la tomaremos en cuenta no será nuestro único referente. El análisis histórico que más adelante hacemos permitirá observar que existen otros factores (como el desarrollo mismo de la matemática y el rigor matemático) que influyen en la problemática que estamos abordando pero que no son considerados en una aproximación cognitiva.

Frame-based knowledge of mathematics: Infinite Series (Davis, 1982)

La investigación reportada en este trabajo se realizó en la Universidad de Illinois y utiliza como marco teórico la Teoría de Marcos de Minsky (Minsky's Frame Theory) mediante la cual se espera ver cómo un sujeto modifica sus marcos mentales iniciales para poder aceptar nuevos conceptos.

[4] …vemos que el estudiante confina el concepto de límite a la suma de una serie…

La investigación está centrada en el análisis de asesorías proporcionadas a un alumno de nivel superior, alumno con el que había mantenido contacto durante ocho años, desde la escuela elemental. El trabajo reporta tres sesiones de asesorías.

El autor enumera algunas características especiales del alumno:

- Utilizaba sus propios algoritmos y sus propias formas de entender matemáticas.
- Mediante su método personal podía realizar cálculos aritméticos más rápido que sus compañeros.
- Utilizaba una hora diaria para su tarea de cálculo.

En la primera sesión el alumno intentaba resolver el problema "*prove* $\lim_{k\to+\infty}\frac{k!}{k^k}=0$" de su libro de texto. Después de aplicar el criterio del cociente y de cancelar los factoriales el alumno aplica incorrectamente algunas reglas de límites. Posteriormente recibe una sugerencia y logra finalizar el ejercicio.
La segunda sesión inicia pidiéndosele al alumno que reproduzca el ejercicio de la sesión previa.

Acerca de la tercera sesión el autor comenta:

> "*…Peter had repeatedly confused the kth term of a series with the sum of the series, or with the nth partial sum, had confused the ratio test with the root test,…*"[5]

El autor comenta que Peter se equivocaba por utilizar notación no convencional, por ejemplo confundía la notación para el elemento k-ésimo de una serie con la k-ésima suma parcial de la serie. Además agrega que tenía una genuina confusión con las expresiones $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ y $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ al grado de llegar a utilizar la primera en lugar de la segunda.

[5] Peter ha confundido repetidamente el k-ésimo término de una serie con la suma de la serie, o con la n-ésima suma parcial, ha confundido el criterio de la razón con el criterio de la raíz…

Posteriormente el autor define lo que es un marco para abordar después el "conocimiento basado en un marco" (Frame-Based Knowledge):

> …*A frame is one kind of knowledge representation structure which you have built up (stored) in your memory*… [6]
> (Davis, 1982, p. 111)

presenta ejemplos de marcos y el que supone que Peter maneja, y basa su análisis de los errores de Peter en este razonamiento para explicar dichos errores.

Como conclusión el autor afirma

> *But the main conclusion we draw from all this is that Peter had not previously constructed, in his own mind, an adequate frame to represent the concept of "infinite series"*
> …*We would say that Peter does not build up extensive, careful frames to represent concepts such as the limit of an infinite sequence*…[7]

Sobre esta investigación podemos comentar:

1. El fenómeno que los investigadores reportan sobre el uso de notación no adecuada coincide con lo que nosotros hemos detectado en el aula y en las tareas y exámenes.
2. Esta metodología tiene un enfoque de tipo cognitivo y a lo largo de la investigación los comentarios y las evidencias presentadas la hacen explícito. Esto también coincide con algunas observaciones que realizamos en el siguiente capítulo.
3. Como mencionamos en (1) y (2), hemos encontrado coincidencias entre esta investigación y la nuestra, sin embargo este marco teórico no toma en cuenta muchos aspectos que nosotros consideramos importantes para nuestra investigación, pero que no son de tipo cognitivo y por lo tanto no son abordables mediante este marco teórico.

[6] Un marco es una clase de estructura de representación del conocimiento que uno ha construido (almacenado) en la memoria

[7] Pero la principal conclusión que obtenemosde todo esto es que Peter no ha construido previamente, en su mente, un marco adecuado para representar el concepto de serie.
Diríamos que Peter no construye amplios y detallados marcos para representar conceptos tales como el límite de una sucesión infinita.

Convergence of Sequences and Series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role (Alcock y Simpson, 2005)

La investigación presentada por Alcock y Simpson (2005) se realizó en una universidad británica. El marco teórico que utilizan está basado en factores afectivos, modelos mentales y pensamiento matemático avanzado. Mediante el cual los autores intentan explicar cómo la concepción del trabajo propio influye en el desempeño logrado por los estudiantes al enfrentarse a conceptos y ejercicios relacionados a las sucesiones y series numéricas infinitas.

Los autores realizaron entrevistas a 18 estudiantes voluntarios de bachillerato (A-Level en Inglaterra) que cursaron análisis real. Los alumnos habían sido expuestos a pruebas verbales/algebraicas y a representaciones gráficas estáticas de conceptos clave. Otra característica es que habían obtenido calificaciones de A (máxima calificación en el sistema escolar inglés) en matemáticas y otras materias.

Es importante comentar que los alumnos no utilizan representaciones visuales para responder las preguntas (salvo un caso en la tercera banda).

Las preguntas planteadas en las entrevistas tienen que ver con sucesiones de funciones (¿es $a_n = \frac{1+\cos n}{nx}$ convergente?), implicaciones como "convergente implica acotado", series de potencias (¿ $\sum \frac{(-x)^n}{n}$ converge?)

Posteriormente los investigadores establecen una clasificación que designa como "bandas de comportamiento" que son

- Full definition band: que designa a los alumnos que introducen y usan definiciones completas en forma correcta, y cuyo trabajo es consistente con la teoría. Los estudiantes parecen ser capaces de tratar tales definiciones como objetos unificados y muestran una comprensión del estatus de una definición en la teoría matemática. Estos alumnos muestran un "sentido de autoridad interno" que les permite juzgar su propio progreso basados en un sentido interno de si entienden o no entienden el material.

- Partial-definition band: que designa estudiantes que introducen definiciones y notación parciales, y que manipulan correctamente; pero cuyo trabajo muestra inconsistencias con la teoría formal. Los alumnos de esta banda usan notación que tiende a ser fragmentaria, con caracteres correctos pero usando definiciones incompletas. Suelen esperar que al estar operando los símbolos, las matemáticas tomen una forma casi correcta y que sea el profesor o un compañero quien mida el éxito obtenido. Estos alumnos tienen un "sentido externo de autoridad" pues esperan que alguien externo a ellos califique los resultados.
- No-definiton band: que designa a los alumnos que no introducen definiciones ni utilizan notación correcta, y que aparentemente se concentran en los caracteres individuales más que en lo que representan. Suelen intentar trabajar con definiciones cuando se les dice que utilicen alguna o cuando simplemente se les proporciona. Su principal creencia es que las matemáticas son un conjunto de procedimientos que enseña el profesor y que pueden ser almacenados en las notas de clase. Aparentemente esto los conduce a pensar que el trabajo de un alumno al momento de resolver un ejercicio se restringe a "identificar" qué procedimiento pudiera aplicarse utilizando los símbolos presentes como "pistas".

Acerca de esta investigación podemos comentar:

1. Los diferentes niveles que aparecen reportados en esta investigación también han sido detectados en nuestros salones de clase.
2. Las diferencias de habilidad para manejar la simbología correspondiente a las sucesiones y series entre alumnos del mismo grupo también coincide con la que presentan nuestros alumnos.
3. Pese a las coincidencias de (1) y (2) el marco teórico utilizado por Alcock y Simpson no será utilizado en nuestra investigación debido a que estamos interesados en ver cómo los conceptos de sucesión y serie se fueron formando y cómo ingresaron a la escuela, y esto es algo no cubierto por la investigación que acabamos de analizar.

Después del análisis que acabamos de realizar podemos sintetizar los siguientes puntos:

- ✓ En el estudio de las sucesiones y series numéricas infinitas se han usado aproximaciones como la sistémica y la cognitiva.

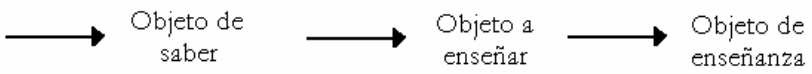
- ✓ Los enfoques utilizados han cubierto historia, epistemología, heurística, modelos mentales, etc.
- ✓ El nivel educativo que se ha estudiado ha sido el superior.
- ✓ Se han utilizado cuestionarios, entrevistas clínicas, situaciones didácticas, ingenierías didácticas, ambientes gráficos y numéricos.
- ✓ En el punto anterior el enfoque utilizado ha sido de dos tipos básicos: preguntas de tipo formal y preguntas de tipo informal basados en gráficas o esquemas geométricos.
- ✓ Encontramos coincidencias entre los fenómenos detectados por nosotros y los que han sido reportados y estudiados en diferentes lugares del mundo, lo que nos conduce a conjeturar que en el fondo de los conceptos de sucesión infinita, serie infinita, convergencia, criterio de convergencia, etc., debe yacer algo que crea las dificultades por todos reportadas. De hecho, los trabajos analizados coinciden en que **mantienen las definiciones matemáticas actuales** y después intentan ver qué dificultades surgen y por qué surgen. A nuestro parecer deben tomarse en cuenta otros factores como la estructura de los números reales, la aproximación aritmética de los límites, etc., que generan las definiciones utilizadas actualmente.
- ✓ Por lo anterior hemos elegido un análisis histórico que nos permita encontrar la forma en que nació, creció y se modificó cada uno de los conceptos citados en el punto anterior (epistemología de las series infinitas). A la par de esto veremos la forma en que estos conceptos ingresaron a la escuela (transposición didáctica) y la forma en que fueron (y son) enseñados en la escuela (discurso matemático escolar).

2.2 Transposición Didáctica

> "*…todo proyecto social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenidos de saberes como contenidos a enseñar*"
> (Chevallard, 1991, p. 45)

La transposición didáctica fue presentada por Yves Chevallard en 1980 durante la Primera Escuela de Verano de didáctica de las matemáticas en Chamrousse, Francia.

Durante ese curso Chevallard definió

> *La transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica stricto sensu". Pero el estudio científico del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la didáctica de las matemáticas) supone tener en cuenta la transposición didáctica sensu lato, representada por el esquema*
>
> 
>
>
> *en el que el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido.*
> (Chevallard, 1991, p. 46)

En donde se considera al objeto sabio como aquél con el que trabaja el científico, o en nuestro caso el "matemático puro", en algún momento este saber será designado como un saber que será incluido en los programas escolares; es en ese momento que inicia el proceso de la transposición didáctica, proceso durante el cual ese saber sufrirá transformaciones hasta convertirse en un objeto de enseñanza.

De esta manera, muchos de los conocimientos serán transformados hasta culminar en su forma final en que son vistos en el aula. Algunos sufrirán pocas transformaciones y otros necesitarán de creaciones didácticas para poder llegar al aula. Como lo dice Chevallard:

> *…en el paso de la teoría de conjuntos de los matemáticos a la teoría de conjuntos de la escuela primaria, surgieron diversos objetos por las exigencias de la transposición didáctica: los "diagramas de Venn" constituyen en este sentido un ejemplo sorprendente…*
> (Chevallard, 1991, p. 49)

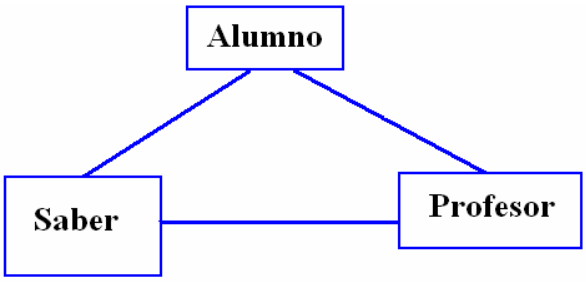
Aunado a esto tenemos otros puntos a tomar en cuenta como la descontextualización de los saberes elegidos a ser enseñados, provocando un conocimiento atemporal y perfecto,

> *…El saber que produce la transposición didáctica será por lo tanto un saber exiliado de sus orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, legitimándose, en tanto saber enseñado, como algo que no es de ningún tiempo ni de ningún lugar…*
> (Chevallard, 1991, p. 18)

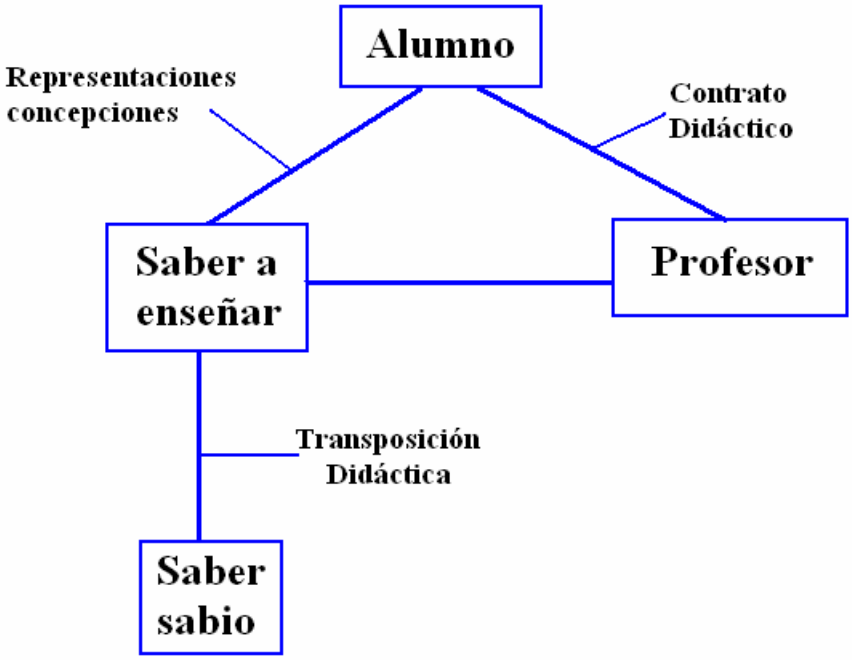
Ahora bien, la misma transposición didáctica nos permite realizar el análisis epistemológico que planeamos realizar con las series infinitas:

> *…cuando se le asigna al saber sabio su justo lugar en el proceso de transposición y, sin que el análisis de la transposición didáctica sustituya indebidamente al análisis epistemológico "stricto sensu", se hace evidente que es precisamente el concepto de transposición didáctica lo que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, y se convierte entonces en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica.*
> (Chevallard, 1991, p. 23)

Así, el sistema didáctico definido por Chevallard como



se ve modificado pues el SABER será el que ahora conocemos como saber a enseñar, por lo que de acuerdo a Ruiz si consideramos el contrato didáctico y las representaciones y concepciones que hacen los estudiantes el sistema didáctico se verá modificado a



(Ruiz, 2001, p. 133)

Es con este esquema que trabajaremos tomando en cuenta la epistemología de las series infinitas y la transposición didáctica que ha habido a lo largo de los siglos.

2.3 Discurso Matemático Escolar

Nuestro trabajo involucra el análisis y caracterización de lo que es el Discurso Matemático Escolar para tratar de entender el por qué los alumnos responden lo que en el ámbito escolar es considerado como un error y que desde la perspectiva del investigador es un indicador de lo que el estudiante ha entendido hasta el momento de responder un ejercicio.

De acuerdo a Castañeda (2006) el discurso matemático escolar puede definirse como:

> *…el discurso matemático escolar es aquél que atiende a la formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento y características, incluyendo aspectos de organización temática y profundidad expositiva…*
> (Castañeda, 2006, p. 255)

además agrega los elementos que lo definen:

> *…por una parte, los libros de texto en los que se apoya la enseñanza; por otra, el tipo de explicaciones que usa el docente en clase, las cuales se suelen basar en experiencias cercanas del individuo para referirse a un fenómeno.*
> (Castañeda, 2006, p. 255)

De esta manera para realizar un estudio del estado actual del DME predominante es necesario realizar una exploración de las perspectivas que tienen los profesores de matemáticas con respecto a las series infinitas, ya que son determinantes en el desempeño de los estudiantes. Sin embargo, también se considerará la formación académica de los profesores puesto que forma parte indiscutible de sus concepciones.

> *La formulación del discurso escolar del cálculo no sólo proviene de la transposición didáctica del saber erudito, sino que involucra otros factores ajenos a la noosfera para la selección y conformación de un saber a enseñar…*
> (Castañeda, 2006, p. 257)

El efecto de la epistemología sobre el DME debe ser tomado en cuenta, al igual que el enfoque o técnica didáctica utilizada por el profesor y la academia escolar de matemáticas (o el órgano que cada escuela considera pertinente). Los dos puntos finales están influenciados por el libro de texto utilizado en los cursos.

2.4 Problema de investigación

De la forma en que se describió en la introducción, el problema de investigación fue cambiando lentamente, desde preguntas simples que surgieron al ver las soluciones de los alumnos, así nuestras primeras preguntas fueron del estilo

1. ¿Qué conceptos matemáticos están involucrados en la construcción del concepto de sucesión infinita y serie infinita (numéricas) desarrollado por el grueso de la población estudiantil?
2. ¿Cómo influye el concepto de sucesiones infinitas en la construcción del concepto de series infinitas?

3. ¿Cómo influye el concepto de serie numérica desarrollado por los alumnos para decidir qué criterio de convergencia utilizar?

Como se puede observar estas preguntas están centradas sobre lo que los estudiantes piensan, creen, visualizan acerca de las series infinitas; en este estado inicial de la investigación parecía que los estudiantes eran los principales responsables de los resultados obtenidos en el ámbito escolar.

Sin embargo las preguntas fueron extendiéndose y detallándose, de modo que nuestra investigación estuvo ahora guiada por las preguntas

1. ¿Cuál es el concepto de sucesión infinita y serie infinita desarrollado por el grueso de la población estudiantil?
2. ¿Cuáles son los pasos que los alumnos siguen para conformar los conceptos de sucesiones infinitas y series infinitas?
3. Dada una serie numérica, ¿Cómo deciden qué criterio utilizar?
4. Con base en los puntos anteriores, ¿cómo se puede establecer una metodología que ayude a la comprensión de los diferentes criterios de convergencia de series infinitas?
5. ¿Cómo se puede generar, apoyado en los intereses de los alumnos, ejemplos reales concernientes a cada área de estudio para motivar el aprendizaje de las series?

Estas preguntan reflejaban entonces que la investigación ya no estaba centrada sólo en los estudiantes, sino que además se consideraba a los conceptos matemáticos involucrados como parte importante de la investigación.

Así, las preguntas que finalmente guían la investigación son

1_ ¿El DME actual permite a los estudiantes la construcción del concepto de sucesión y serie infinita que plantea el mismo DME?

2_ ¿Cómo seleccionan, los alumnos, el criterio de convergencia que aplicarán?

3_ ¿Es necesario el conocimiento del álgebra para construir (y trabajar con) el concepto de serie infinita?

Para responder a la primera pregunta nos planteamos como pasos intermedios la respuesta de las siguientes interrogantes:

1.a ¿Qué dice el DME vigente acerca de las sucesiones y series?

1.b Para los alumnos, ¿qué es una sucesión infinita?

1.c Para los alumnos, ¿qué es una serie infinita?

1.d ¿Pueden, los alumnos, distinguir las diferencias existentes entre ambos conceptos?

1.e ¿Cómo van formando los alumnos los conceptos de sucesión y serie infinitas?

Para responder a la segunda pregunta consideramos necesario responder

2.a ¿Cómo son las definiciones utilizadas actualmente en la escuela?

2.b ¿Qué opinan los estudiantes sobre los criterios de convergencia?

2.c ¿Qué significado tiene un criterio de convergencia para los estudiantes?

2.d ¿Qué procedimiento sigue un estudiante al resolver ejercicios convergencia?

Para responder a la tercera pregunta buscamos

3.a ¿En qué culturas han aparecido las sucesiones y series?

3.b ¿Cuáles son los problemas o actividades que dan origen a las sucesiones y series?

3.c Aquellas culturas que utilizan sucesiones y series, ¿cómo las obtienen? ¿Qué áreas de la matemática utilizan en su obtención?

3.d ¿Qué áreas de la matemática actual están involucradas en el concepto y manejo de las sucesiones y series?

3.e ¿Qué áreas están involucradas en el DME vigente?

3. ¿Qué pasa en el salón?

En este capítulo vamos a analizar las diversas opiniones que presentan los diferentes actores del salón de clase, es decir vamos a analizar lo que piensan y opinan los estudiantes, los profesores encargados de impartir estos temas, los libros de texto, el programa escolar; y posteriormente analizamos lo que sucede dentro del salón mediante ejemplos de lo que los estudiantes realizan al intentar resolver ejercicios de sucesiones y series infinitas.
Terminamos este capítulo realizando una clasificación de los criterios de convergencia, esta clasificación estará basada en la forma de demostrar el criterio o la forma de visualizarlo.

3.1 Lo que opinan los alumnos

Como primer punto analizamos lo que los alumnos piensan acerca de las series infinitas y lo que conceptualizan como convergencia. Debido a que en los cursos previos, desde la primaria hasta el bachillerato, los estudiantes no han cursado materia alguna que les proporcione definiciones ni ejemplos de sucesiones o series infinitas las concepciones que encontramos son producto del discurso matemático escolar actual en el ITESM-CEM. Por lo tanto suponemos que las respuestas que obtenemos son un reflejo del DME y nos permiten caracterizarlo.

Para obtener toda la información posible se diseñaron y aplicaron diversos sondeos, tanto escritos como orales; en algunas ocasiones se aplicaron en forma grupal y en otras ocasiones en forma individual a alumnos que cursaban Matemáticas para ingeniería II. Una variante más a considerar es que en ocasiones lo anterior fue realizado por nosotros y en algunas ocasiones fue realizado por profesores que impartían esta misma materia pero que eran ajenos a la investigación.

Un primer sondeo se efectuó mediante un cuestionario escrito que se aplicó a 184 estudiantes en el que se les preguntaba acerca de los conceptos que tradicionalmente se definen y ejemplifican de las series infinitas:

- *Para ti sin las definiciones de clase, ¿qué es una serie?*
- *¿cómo explicas que se pueda sumar un número infinito de números reales?*
- *En tus propias palabras, ¿qué significa que una serie sea convergente?*
- *¿cómo explicas que una sucesión sea convergente y la serie de sus términos no?*
- *Indica qué concepto se te dificulta más de las series y por qué.*
- *¿qué importancia tiene el saber que una serie converge o diverge?*
- *Cuando ocupas el criterio del cociente,* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *, ¿qué significa este límite?*
- *¿cómo explicas que una integral impropia indique si una serie converge o no?*
- *Imagina que necesitas calcular la cantidad de glóbulos rojos en tu cuerpo, ¿usarías series o integrales? ¿por qué?*
- *¿cuántas veces habías visto el tema de series antes de este curso?*
- *En general, ¿qué opinas acerca de las series?*

Las respuestas que se obtuvieron de este cuestionario fueron diversas, sin embargo, en su mayoría, mostraron una gran confusión en los conceptos mencionados. A continuación mostramos algunas de las cosas que respondieron los alumnos, se intentó que las respuestas mostradas permitan ver la mayor cantidad de las diversas opiniones, sin embargo algunas se presentaron con mayor frecuencia.

Por ejemplo a la pregunta de lo que consideran que es una serie se obtuvieron las siguientes respuestas:

- Es una función consecutiva que se acerca a una función original de acuerdo a la suma de sus polinomios.
- Suma de una función en forma discreta.
- Suma de muchas secciones de área cuyo resultado es un área total.
- Una sumatoria que se realiza de manera sucesiva que puede tender a infinito o no.
- Una sumatoria de valores que van cambiando con respecto a una función.
- Es la suma de objetos que es muy difícil de calcular el valor pero si se divide o se separa en sumas más pequeñas se puede resolver fácilmente.

- Es una herramienta matemática que de una función te ayuda a saber su valor en cierto rango. Dependiendo de la función se determina si ésta es convergente o divergente.
- Es una sumatoria infinita.
- Es una suma infinita que a veces es tan grande que no se puede calcular.
- Es una suma muy grande, que utiliza pequeños intervalos no como la integral que es mucho más limpia, sin intervalos. Por lo tanto, sirven para sumar cosas diferentes.
- Es una suma de elementos desde un número inicial hasta "n" números que se desean.
- Es una suma lógica que sirve para encontrar un número que se necesita en la serie.
- Es una sucesión de números o datos que tienen un cierto número de veces de repetición.
- Es una sumatoria de una integral.
- Una función que se suma sucesivamente, es decir, que va de un valor "a" a un valor "b" y el valor "a" se va a ir aumentando en 1 hasta lograr el valor de "b".
- Es una sumatoria de puntos a lo largo de una función.
- Es una sucesión infinita de números que cumplen ciertas condiciones en común.
- Es una suma secuencial de un intervalo de números enteros.
- Es una sucesión de algo, algo que tiene continuidad.
- Una suma de términos infinitos, en las que la suma puede llegar a un límite o no.
- Sumatoria dentro de intervalos definidos conforme una función crece.
- Una sucesión de sumas.
- Es una suma a la cual se le pueden aplicar diferentes criterios para resolverla.
- Son los límites con los diferentes tipos de ecuaciones.
- Suma de todos los valores que toma una función en un intervalo.
- Es una sumatoria que se utiliza para sacar un número que deriva de un procedimiento.
- Es la suma de algo infinito.
- Es la suma de funciones discretas donde podemos conocer los valores en cada punto.
- Una suma que va aumentando.
- Es una suma que incrementa, por lo que se integra.
- Es una sucesión numérica que viene del cálculo infinitesimal.

De todas estas opiniones podemos observar que existen confusiones en lo que es una serie infinita, existen respuestas que pueden ser englobadas en diferentes clases.

1. Hay opiniones de que una serie numérica es una función, en la cual se presenta la diferencia en si es una función continua o discreta, aparentemente la mayoría de los alumnos que comparten esta idea considera una función discreta.
2. Algunos alumnos consideran que la serie es una suma, en donde debemos tomar en cuenta dos casos; los alumnos que consideran que es una suma finita y aquellos que consideran que es una suma infinita, (sin que quede claro si consideran infinito el valor de la serie o infinito el número de elementos a sumar).
3. Otra opinión tiene que ver con una aparente mezcla de conceptos entre la serie infinita y la integral. Una posible razón es que sea una "contaminación" del concepto de serie infinita después de haber visto el criterio de la integral.
4. Una opinión más que se observa es la de aquellos alumnos que sólo consideran que es algún tipo de método, técnica o fórmula matemática.
5. Una última idea es aquella donde los alumnos consideran a la serie infinita como la suma de los valores que toma una función en un intervalo.

Del total de las 184 respuestas obtenidas podemos agruparlas de la siguiente manera:

- ✓ 96 hacen referencia a serie como una suma 52%,
- ✓ 44 se refieren a serie como una sucesión, 24%,
- ✓ 21 consideran a la serie como un conjunto de números, 11%,
- ✓ 16 piensan que la serie es una "herramienta matemática", 9%
- ✓ 5 consideran que la serie es una integral, 3%,
- ✓ 2 que contestaron cualquier cosa, 1%.

Por lo que podemos decir que la idea predominante en los estudiantes es la que corresponde a considerar una serie como una suma y del bloque siguiente en porcentaje suponemos que la respuesta se debe a la definición de serie como límite de la sucesión de sumas parciales.

Si ahora vemos algunas de las respuestas a la pregunta de lo que significa que una serie sea convergente tendremos:

- Que al sumar cierta función, aún cuando sean infinitos sumandos, los sumandos se irán haciendo más y más insignificantes, de tal forma que la serie tendería a un número.

- Que tenga numerito y eso me indica que en algún valor la serie deja de tender a infinito.
- Que el resultado de las sumatorias de una serie se acerque a un número o tiende al mismo.
- Que la serie si llega a tener una forma que se puede identificar ya que no tiende a infinito por lo cual es fácil calcular el valor.
- Significa que la serie se acerca a un número.
- Que la sumatoria tiene un número, que no se indetermina.
- Que al final de la suma, el resultado es un número.
- Que da un número y tiene área.
- Que se puede realizar o que no crece tan rápidamente y se puede calcular.
- Que se va acercando a cero.
- Que se puede realizar, son valores que se pueden conocer.
- Que se va haciendo más chico el resultado.
- Que la sumatoria tiene como resultado un número entero.
- Que la función que genera la serie llega a tocar cierto punto como un límite.
- Que la sucesión de elementos llegue a un punto dado.
- Que existe un punto en el cual no importa que sigan habiendo valores, su magnitud es tan pequeña que puede despreciarse y la serie tiende a un valor infinito.
- Que toca algún punto.
- Que hay algún punto en el que la serie no se hace infinita.
- Significa que por alguna razón la serie llega hasta cierto número.
- Que la suma de la serie llegue a un límite, es decir, si gráficamente los puntos discretos tomados de la serie llegan a formar, en un momento dado una línea horizontal se dice que ha llegado a un límite. Eh ahí por qué las series se evalúan con límites.
- Que tiene un límite directo y que está en un número entero.
- Que existe un área, debajo de la curva, no infinita.
- Que la operación se puede hacer.

En este conjunto de respuestas podemos observar diversas ideas y opiniones de lo que significa que una serie infinita sea convergente:

1. La idea que predomina es que la serie es una suma y que da un número.
2. La forma en que se puede calcular "ese número" no está clara para la mayoría de los estudiantes, algunos consideran que se puede hacer la suma y otros sólo dicen que existe ese número pero no indican cómo se obtendría.
3. Algunos consideran que la serie converge debido al área que representa la función contenida en la serie, este parece ser un resultado después de haber visto el criterio de la integral. Al parecer la explicación geométrica del criterio de la integral causó una huella más permanente que los demás criterios de convergencia.
4. Otros alumnos consideran que la serie es el valor que da un límite, algunos confunden el límite alcanzado por el criterio de convergencia como el valor de la serie y unos pocos piensan en el límite de la sucesión de sumas parciales.
5. Ciertos estudiantes consideran que la serie converge porque los elementos son pequeños y se pueden omitir, otros más piensan que los elementos se "detienen" de alguna manera y por eso ya no suman más.

Del total de las 184 respuestas obtenidas sobre lo que significa que una serie sea convergente podemos agruparlas de la siguiente manera:

- ✓ 97 dicen que la serie llega a un número o un punto, 53%
- ✓ 28 dicen que es por un límite o que tiene límite, 15%
- ✓ 22 dicen que puede resolverse o que tiene resultado, 12%
- ✓ 15 dicen que se acerca a cero, 8%
- ✓ 10 dicen que es por su gráfica, 6%
- ✓ 6 dicen que la serie existe, 3%
- ✓ 6 no saben, 3%

En la pregunta de cómo explicarían que una sucesión sea convergente pero la serie formada con sus elementos no sea convergente, encontramos respuestas como:

- La sucesión llega a cierto punto y la serie de términos son aleatorios y divergen.
- La sucesión va hasta infinito.
- Porque una serie es infinita y las sucesiones presentan un límite que nos permite evaluarlas de una mejor manera.

- Porque son dos cosas distintas a pesar que están juntas.
- Una sucesión es una continuidad y la serie es la suma, por lo que esta propiedad puede alterar a los elementos y así hacer que no converja.
- Porque la sucesión tiende a un número y la serie se puede quedar en otro número.
- Porque se eliminan los infinitos acercándonos a un número real.
- Porque por eso lo estamos definiendo.
- Las sucesiones convergen cuando son números reales y las series dependen del tipo que sean.
- Que la serie existe sólo en algunos puntos de esta, es decir, deja de ser una serie.
- Las series son infinitas y las sucesiones tienen un límite para evaluarlas más fácilmente.

En estas respuestas podemos observar que los alumnos en general no pueden responder lo que se les preguntó, en las entrevistas personales se observa que la mayoría de los alumnos están situados en dos extremos,

1. Uno es el de aquellos alumnos que nunca habían pensado siquiera en la posibilidad de que a partir de la sucesión se pudiera decir algo sobre la serie.
2. El otro es el de los alumnos que creen que el comportamiento de la sucesión implica el comportamiento de la serie.

Cuando a los alumnos se les pregunta sobre la importancia de saber si una serie converge o diverge se obtienen respuestas como:

- Saber si se llega a un límite o no.
- Saber su límite y si tiene solución.
- Para saber si va a tender al infinito o no.
- Saber hasta qué punto llega.
- Si tiene un final o no.
- Para un correcto uso de las series en aplicaciones reales.
- Para evaluar intervalos.
- No sé.
- Los tipos de series que pueden ser utilizadas, porque son muchos criterios.

- Para saber si se llegará a un resultado.
- Para ver cómo está la gráfica.
- La importancia sería saber si tiende a un número o no.
- Saber el cuánto se aproxima a un valor.
- Para saber hasta cuánto se puede prolongar un movimiento.
- Pues yo creo que es para saber si se va a infinito o no.
- Ni idea.
- Para saber si se puede resolver o es imaginaria. En la práctica se usa para acercarnos a un valor.
- Para saber que tanto se acerca o se aleja al término.
- Encontrar un punto en una suma de número indefinido.
- Si encontramos algún fenómeno de la vida real que se parezca a una serie, podemos saber cómo evolucionará.
- Para tener un valor fijo o infinito y así tener cálculos exactos. Para saber si hay un resultado en un valor.
- La importancia es que si la serie converge se puede llegar a calcular el valor de la serie y si diverge la serie no se puede calcular. Al hablar de calcular me refiero al valor.
- Para saber su comportamiento dentro de la gráfica.

En esta pregunta la dispersión de las respuestas fue mayor por lo que tenemos:

- ✓ 75 dicen que para ver que llegan a un valor, 41%
- ✓ 38 no saben por qué, 21%
- ✓ 21 dicen que por las aplicaciones, 11%
- ✓ 15 opinan que para ver si tiene solución, 8%
- ✓ 10 dicen que por ver su límite, 5%
- ✓ 7 opinan que para ver su gráfica, 4%
- ✓ 6 dicen que para ver el comportamiento de la función, 3%
- ✓ 3 dicen que para aplicar los criterios, 2%
- ✓ 2 opinan que para pasar la materia, 1%
- ✓ 7 respondieron cualquier cosa, 4%

En estas respuestas llama grandemente la atención que un alto porcentaje diga que no sabe para qué se busca la convergencia de una serie. Esto puede ser importante de estudiar posteriormente.

En estas respuestas podemos observar varias tendencias, la principal es que según los alumnos la importancia de la serie radica en saber si da un valor o da infinito, es decir, si converge o diverge.

Otra tendencia que se observa es aquella en la que los alumnos consideran que la serie es importante porque da un valor o se acerca a un valor.

Finalmente podemos decir que algunos alumnos consideran que la importancia de la convergencia radica en saber si la serie se puede resolver, aunque no queda claro lo que significa resolver una serie.

En entrevista personal los alumnos comentan que las series dan números y eso es todo lo que se obtiene de ellas.

Sólo unos pocos alumnos argumentan que la importancia de la convergencia de las series radica en las aplicaciones que se resuelven con ellas.

En general podemos decir que los alumnos no presentan ideas claras acerca de la necesidad de saber si una serie dada converge o diverge, es decir, los alumnos sólo utilizan criterios para saber si la serie converge o diverge sin saber:

1. Si la serie sirve para algo.
2. Si la serie representa algo.
3. Si la respuesta obtenida con el criterio significa algo.

El alumno sólo aplica los criterios porque eso es lo que se le pide.

La pregunta relacionada con el criterio de la razón arrojó respuestas como:

- Conforme va aumentando el dominio de la función, su imagen debe ir decrementando para que converja porque a_n debe ser mayor que a_{n+1}.
- Que aunque tiende a infinito, siempre va a dar por lo menos 1 así que converge en 1.
- No sé, sólo sé responder el número.
- Para saber la relación que hay en la serie y si son concurrentes.
- Ver la relación que hay en la serie como sucesión, ver si son concurrentes.

- Es comparar dos funciones al mismo límite.
- Que el número que le sucede a la serie va a ser mayor que el anterior, por lo tanto va a ir creciendo es creciente.
- Que si añadiendo un valor más se puede resolver, entonces la original también.
- No lo sé.
- No sé qué significa pero ayuda a eliminar los exponentes y así simplifica determinar su convergencia.
- El a_{n+1} es más grande que a_n y el resultado se va a ir haciendo más grande por lo tanto el límite se va a infinito.
- Saber si en el intervalo deseado esa serie (función) llega a un resultado.
- Que a todas las n las sustituyes por n+1 y lo divides entre la serie normal y luego lo simplificas.
- El límite significa el número en que converge o diverge.
- Que es una sumatoria de objetos infinitos.
- Que el numerador y denominador tienden a infinito para que de esta forma pueda converger.
- Creo que se refiere a que si existe el límite para el "siguiente" (a_{n+1}) es probable hallar el límite para a_n.

Analizando las respuestas podemos clasificarlas en:

- ✓ 61 dicen no saber lo que significa, 33%
- ✓ 38 repiten la pregunta diciendo que es un límite, 21%
- ✓ 33 describen la forma del cociente, 18%
- ✓ 19 describen la forma de aplicar el criterio, 10%
- ✓ 10 escriben el tipo de serie al que se aplica el criterio, 5%
- ✓ 6 lo relacionan con las series de potencias, 3%
- ✓ 5 dicen que es para ver la convergencia, 3%
- ✓ 3 dicen que es para ver la gráfica, 2%
- ✓ 9 responden cualquier cosa,5%

Esta pregunta permitió ver que los alumnos no pueden argumentar una razón por la que un cociente y un límite permiten ver la convergencia de la serie. Lo que vemos es que la mayoría

responde que no sabe, los demás alumnos explican la forma de resolver el límite y/o de aplicar el criterio de la razón, pero no logran explicar el significado del límite.

Podemos suponer, por los sondeos escritos y por la entrevista personal, que para los alumnos el criterio es una técnica que casi mágicamente dice si hay convergencia o divergencia; pero la razón por la que el criterio "funciona" está fuera de su alcance, ya sea porque nunca se hacen esta pregunta o porque simplemente no pueden imaginar la razón matemática por la que algo que en apariencia no tiene conexión con la serie (el límite y el cociente) les permite saber si la serie converge o no.

De hecho, los conceptos de límite, cociente y término siguiente (a_{n+1}) parecen ser sólo conceptos superfluos sin significado alguno para los alumnos.

Con respecto a la pregunta de por qué la integral impropia garantiza la convergencia o divergencia de la serie numérica se tienen las respuestas

- Converge a un número y diverge a infinito, esto nos indica la continuidad de la curva de cierto punto a infinito.
- Porque la integral se comporta igual que la serie.
- Porque se evalúa la función de 1 a infinito igual que la serie así que si una converge la otra, también.
- Porque señala límites a donde se acerca una serie, así podemos saber si los toca o no.
- Porque primero se debe saber que la función sea positiva continua y decreciente y con esto se aplica la integral impropia para saber si converge o no a un punto.
- No lo sé.
- No tengo idea.
- Si porque la integral saca el área bajo la curva y al usarla para una serie y nos salga un número quiere decir que la misma serie converge.
- Pues así va la regla.
- Dependiendo de que sustituyas el límite que te da, si se determina podemos decir que converge, sino, no es posible hacerla.
- Por la aplicación de los límites de los valores de los elementos de esa serie.

- Porque uno de sus límites tiende a ser infinito y esto nos da la pauta para saber si un límite o una sumatoria de números nos den como resultados números reales.
- Una integral impropia en algún punto tiene una discontinuidad y por lo tanto el área por debajo sería infinita a la hora de resolver da otros valores si no la consideras como tal.
- Por la aplicación de los límites de los valores de los elementos de esa serie.
- Porque aproximamos una incógnita para discontinuidad y saber si converge o no.
- Porque las integrales impropias no están acotadas por números exactos sino sus límites van al infinito.
- Porque se llega a un resultado que al evaluarlo nos lo van a decir y hay un criterio.
- Por el área que existe debajo de la curva.

Esta pregunta por razones de tiempo no fue aplicada a los 184 alumnos, sino sólo a 127. Las respuestas pueden ubicarse en los siguientes bloques:

- ✓ 37 dicen no saber, 29%
- ✓ 22 explican el criterio de la integral, 17%
- ✓ 20 dicen que es por el área bajo la curva, 16%
- ✓ 14 lo atribuyen a un "límite", 11%
- ✓ 11 dicen que porque la integral da un número, 9%
- ✓ 5 opinan que es porque la función existe, 4%
- ✓ 18 respondieron cualquier cosa, 14%

Al igual que con la pregunta relacionada al criterio de la razón, la mayoría responde que no lo sabe; otros alumnos describen la forma de aplicar este criterio, o describen cuándo se tiene la convergencia o divergencia de acuerdo al criterio. Sólo algunos alumnos intentan explicar la implicación argumentando que el área bajo la curva implicará la convergencia.

Unos cuantos más relacionan la convergencia al hecho de que la serie inicie en 1 y termine en ∞, y la integral impropia se considere en el intervalo $[1,\infty)$.

Para conocer la forma en que tratan el concepto de suma infinita se realizó otro sondeo a los estudiantes, pero en esta ocasión sólo fueron 81 los encuestados.

El sondeo estuvo compuesto de dos partes.

En la primera parte se le pidió a los estudiantes que realizaran sumas de fracciones, de hecho, lo que se les pidió fue calcular sumas parciales de la serie armónica.

Así, las preguntas fueron:

- *Realiza las siguientes sumas:*
  - $1+\frac{1}{2}=$
  - $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$
  - $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$
  - $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$
- *¿hasta qué número puedes sumar sin ayuda de calculadora? ¿por qué?*
- *Si tuvieras que sumar* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10,000}$ *, ¿crees que se pudiera hacer la suma?*
- *¿cómo la harías? (Recuerda que sin ayuda de calculadoras)*
- *Si dices que puede hacerse la suma, ¿cuánto crees que sería el resultado de esa suma?*
- *¿qué significado crees que tenga ese resultado?*

A este sondeo los alumnos respondieron efectuando las sumas de las fracciones utilizando el algoritmo tradicional de suma de fracciones; algunos realizaron las sumas completas en cada ocasión, es decir, sumaron $1+\frac{1}{2}$ y en el siguiente paso sumaron $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, y así cada una de las expresiones.

Otros alumnos sumaron $1+\frac{1}{2}$ en el primer paso y para el segundo sólo agregaron $\frac{1}{3}$ al resultado de la suma anterior, y así continuaron.

A la pregunta de ¿hasta qué número puedes sumar sin ayuda de calculadora? ¿Por qué? se obtuvieron respuestas como:

- Más o menos a los miles porque después mi cerebro se atrofia.
- Hasta el que no me de flojera anotar porque es muy tardado.
- Hasta el 3°, el último me salió sólo la parte de $\frac{\#}{60}$.
- Como hasta por el $\frac{1}{20}$.

- $\frac{1}{19}$ porque es muy tardado encontrar el común denominador.
- Sin calculadora se puede sumar cualquier número.
- Hasta infinito porque nunca se acaban los números.
- Hasta que sea lo suficientemente grande.
- Hasta donde quieras pero te tardarías mucho.
- No sé, podía seguir sumando manualmente pero me tardaría mucho tiempo.

Después de leer cada respuesta pudimos formar los siguientes bloques:

- ✓ 37 dijeron que pueden sumar todos o hasta infinito, 46%
- ✓ 26 respondieron que pueden sumar hasta un determinado número (<100), 32%
- ✓ 13 dijeron que podían sumar números muy grandes, 16%
- ✓ 5 respondieron que no sabían hasta dónde pueden sumar, 6%

En estas respuestas podemos observar que los alumnos no suponen que se presente una mayor dificultad en calcular la suma de muchos términos, las únicas objeciones que establecen son el tiempo utilizado para efectuar la suma de fracciones y la complejidad que va surgiendo en los denominadores.

En forma verbal los alumnos expresan que realizar las sumas es "*fácil pero da flojera*", esto aparentemente se debe al hecho de que involucra una operación aritmética conocida (y dominada) por ellos.

Cuando se les pide decidir si se pudiera hacer la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10,000}$ expresan cosas como

- Yo creo que sí, el problema sería llegar a los más complejos. (*Aquí el alumno se refiere a la complejidad de los denominadores y no a números complejos*).
- Sí pero es un procedimiento exageradamente largo.
- Sí se puede aunque se requeriría mucho tiempo.
- Sí, aunque sería muy lento.

A esta pregunta sólo hay dos respuestas un sí o un no, aunque los que respondieron sí pueden separarse en dos grupos, con lo que tenemos:

- ✓ 52 dicen que si pueden hacer las sumas sin poner condiciones, 64%

- ✓ 21 dicen que si pueden hacer la suma pero se tardarían mucho, 26%
- ✓ 8 responden que no pueden hacer la suma, 10%

En general las respuestas de los estudiantes expresan su confianza de que la suma se puede realizar (90%), aunque también hacen patente su preocupación por el tiempo empleado.

Al momento de responder la pregunta de cómo harían la suma anterior surgen respuestas diversas

- Con sumas de Riemann.
- No lo sé, por el factorial.
- Manualmente pero sería muy tardado o con series de potencias.
- Sacando el máximo común divisor de todos los divisores.
- Tomando el resultado de la última suma más el siguiente número racional para sumar.
- Con series. (*se nombran series de Taylor y series de potencias*)
- Pues vería cómo se comporta la serie e inventaría una fórmula.

En este caso las respuestas reflejan que la mayoría de los alumnos considera que la suma debe hacerse elemento a elemento, varios alumnos nombran algunos tipos de series (*algunos de ellos ya cursaron Matemáticas Discretas o están recursando Matemáticas II, materias donde se estudian estos temas*). Finalmente, sólo un alumno argumenta que intentaría encontrar una fórmula que le permitiera calcular el valor de la serie.

Las respuestas a la pregunta *Si dices que puede hacerse la suma, ¿Cuánto crees que sería el resultado?* Nos muestra expresiones como:

- No sé
- Muy poco
- Tiende a cero
- Menos de 2
- Un valor pequeño
- No creo que pueda hacerse

A las que podemos agrupar en seis bloques:

- ✓ 30 dijeron que sumaba una cantidad pequeña (desde cero hasta menos de diez), 37%
- ✓ 22 indicaron *no sé* como respuesta, 27%
- ✓ 13 opinaron que daría un número grande (100, 1000, 2000, etc.), 16%
- ✓ 6 dijeron que el valor final sería infinito, 8%
- ✓ 2 opinaron que no se puede calcular, 2%
- ✓ 8 respondieron cualquier cosa, 10%

Estas respuestas nos permiten ver un fenómeno importante, aunque los estudiantes hicieron sumas que llegaban a $\frac{137}{60} \approx 2.2833$ varios de ellos respondieron que el resultado sería cero, menor a uno o menor a dos, y también varios alumnos dijeron que el resultado "*tiende a cero*" o "*se hace muy pequeño*" indicando una confusión entre el valor del elemento n-ésimo de la serie y el valor de la n-ésima suma parcial, esto es algo que no investigaremos pero que sería interesante cubrir en otra investigación.

La segunda parte del sondeo establece la posibilidad de utilizar calculadoras o incluso hacer la suposición de poder usar la computadora más potente del mundo. Y entonces se les realizan las siguientes preguntas:

- *Si por alguna razón se tuviera que sumar todos los términos posibles, ¿hasta qué número se podría sumar? ¿por qué dices ese número?*
- *¿crees que se pueda considerar un número infinito de sumandos?*
- *¿cómo los sumas entonces?*
- *Si es un número infinito de términos, ¿cuándo terminas de hacer la suma?*
- *¿cuál sería la suma?*
- *¿qué es el ε (épsilon) y la δ (delta) de una computadora?*
- *¿cuál es el número más grande que puede escribir o manejar una computadora?*
- *¿cuál es el más pequeño?*

En esta parte del sondeo se observa que los alumnos consideran que las computadoras les permitirán realizar cualquier cantidad de cálculos. Así, en la primera pregunta *Si por alguna razón se tuviera que sumar todos los términos posibles, ¿hasta qué número se podría sumar? ¿Por qué dices ese*

número? Obtenemos respuestas en este sentido, aunque hay unas cuantas que expresan dudas al respecto:

- Infinito.
- No hay límite para esa suma.
- No habría límite para esa suma.
- Infinito, porque no hay límite para esa suma.
- Un número muy grande que podría ser infinito, depende de la capacidad de la computadora.
- En una computadora no se podrían sumar números infinitos porque tiene una memoria limitada, pero no sé hasta qué número.
- Dependiendo de la memoria de la computadora.

De las respuestas obtenidas tenemos que:

- ✓ 46 creen que puede llegar a un número infinito de sumandos, 57%
- ✓ 24 opinaron que se pueden sumar hasta donde lo permita la capacidad de la computadora, 29%
- ✓ 7 consideraron que se puede sumar hasta una fracción determinada, 9%
- ✓ 4 no supieron, 5%

Aparentemente los estudiantes suponen que la computadora podrá realizar todas las operaciones que sean necesarias porque sólo son sumas, en ningún momento hacen referencia al tiempo empleado en realizar la suma, por otra parte se presentan unos cuantos comentarios acerca de la capacidad de la memoria de la computadora.

Para la pregunta expresa acerca de la forma en que se podría realizar la suma de un número infinito de términos los estudiantes argumentan cosas como

- Con un programa.
- Con software.
- Nunca terminas de sumar, necesitas límites y la mejor manera sería programar una serie por medio de ciclos en C++ o Java.
- Tendría que definir el límite de la suma.
- Con una fórmula hasta que se trabe la máquina.
- Por series.

De estas preguntas podemos reforzar nuestra suposición de que la computadora es pensada como un instrumento capaz de cualquier cálculo.

En la siguiente pregunta se le cuestiona a los estudiantes acerca del tiempo de cómputo, es decir, se les pregunta cuándo se acabaría de hacer la suma, y ellos responden:

- Nunca.
- Nunca a menos que se ponga un límite.
- No termina, hasta que la máquina se trabe.
- Nunca porque el infinito nunca termina.
- Hasta que la computadora llegue a su máxima capacidad.

Y finalmente, al cuestionarlos acerca del valor de la suma las respuestas que se presentan son:

- Una constante
- Un número que tal vez no pueda ser exacta
- Un número infinito
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\infty}$
- No se podría

Así las podemos clasificar en cinco grupos,

- ✓ 57 alumnos consideran que la suma será infinita, 70%
- ✓ 13 estudiantes no supieron qué opinar, 17%
- ✓ 4 alumnos creen que será un número pero no proporcionan un valor específico, 5%
- ✓ 2 alumnos consideraron que no se puede hacer la suma, 3%
- ✓ 4 alumnos respondieron cualquier cosa, 5%

Lamentablemente no fue posible interrogar los estudiantes acerca de cómo habían llegado al valor conjeturado, pero aquí se observa un fenómeno interesante: los alumnos que al hacer las operaciones manualmente (primera etapa) en su mayoría decían que la suma sería un número, 53%, ahora que se les permite usar una computadora (suposición) en su mayoría opinan que sería un valor infinito, 70% (contra un 8% en la primera etapa). Este fenómeno no está considerado en esta investigación, pero sería interesante considerarlo para un futuro trabajo de investigación.

Las preguntas restantes de este sondeo hacen referencia a cuestiones técnicas acerca de la computadora y no influyen sobre las respuestas a las preguntas anteriores.

A partir de estos sondeos se puede decir que los alumnos consideran que:

1. Una serie es una suma.
2. Una serie es una función discreta o la suma de una función discreta.
3. La serie está determinada por la sucesión de la cual se formó.
4. Los criterios son reglas que se aplican pero no se sabe por qué funcionan.
5. Los criterios son muchos y no se entiende cómo escogerlos.
6. La integral y la serie son semejantes y por esa razón el criterio de la integral se puede aplicar.
7. La serie se calcula o se resuelve.
8. La serie converge cuando da un número.
9. La serie converge porque sus elementos se "detienen".
10. La serie diverge porque da infinito.
11. El valor que proporcionan los límites aplicados en algún criterio de convergencia representan el valor de la serie.
12. La serie puede sumarse si se tiene suficiente tiempo, memoria y nada de flojera.
13. Ningún alumno utilizó o mencionó la necesidad de utilizar álgebra.
14. Las computadoras pueden calcular la suma de una serie, aunque nunca acaben.

Esto nos permite ver que **el Discurso Matemático Escolar actual se basa en el concepto de suma para definir serie infinita y que posteriormente se hace un cambio abrupto con respecto a la forma de tratar las series**. Esto lo vemos cuando leemos que la mayoría de los estudiantes considera que una serie es una suma y que al converger da un número.

Al mismo tiempo observamos que los estudiantes pierden de vista el cómo poder calcular esa "suma" que da la serie y esto lo asociamos al hecho de que el DME ya no involucra el cálculo del valor al que converge la serie, sino que sólo le pide al estudiante aplicar el criterio de convergencia y concluir si la serie converge o no, con lo que termina el ejercicio.

Por otra parte, en el DME se pide aplicar un criterio de convergencia sin decir cómo surgió el criterio ni por qué es válido aplicarlo, tan sólo se hace énfasis en el cálculo correcto de los límites involucrados en el criterio de convergencia, esto provoca que los estudiantes piensen que **los elementos de la serie se detienen** o **desaparecen para permitir** la convergencia de la serie.

Aquí podemos ver que hay un predominio de aplicación de criterios de convergencia sobre las técnicas para calcular el valor al que converge la serie, esto es el resultado de que el largo proceso de transposición didáctica ha eliminado las técnicas y métodos de cálculo basados en la aritmética, el álgebra y la geometría; dejando en cambio las definiciones, la metodología y los criterios que aparecen en los libros de texto actuales. Esta metodología y criterios (como se detallará después) están basados en áreas más abstractas de la matemática, y esta abstracción es (al parecer) un factor importante ya que pese a formar parte del DME actual paradójicamente es evitada en las aulas, provocando que se centre la atención en el uso y aplicación mecánica de criterios de convergencia.

Ante la gran cantidad de respuestas obtenidas y la brevedad del espacio, en el anexo E se pueden observar algunas de las hojas de respuesta de estos cuestionarios.

3.2 Lo que opinan los profesores

Los profesores juegan un papel importante dentro del salón de clases debido a que (para los alumnos) ellos son quienes representan al sistema escolar y son quienes utilizarán el DME para desarrollar los temas que deberán cubrirse en el salón de clase y fuera de él, por lo anterior consideramos que se debía tomar en cuenta sus posturas al respecto.

En pláticas informales, sin cuestionarios o algún otro instrumento de por medio, con diversos profesores se encontraron varias posturas, sin embargo podemos clasificarlas en las siguientes tres:

- Las series deben enseñarse tal y como aparecen en el libro de texto.
    - Porque la formalidad con que están las series en los libros de texto es importante.
    - Porque los criterios deben aprenderse y aplicarse siempre.
    - Porque es un buen libro de texto.
    - Porque lo que aparece en el libro es suficiente para entender.
    - Porque lo único que necesitan los alumnos es leer y repasar el libro.
- Las series deben enseñarse mediante algunos ejemplos "sencillos" y después realizar algunos ejercicios de "mayor nivel" y encargar de tarea más ejercicios.
    - Porque las series son difíciles y es mejor empezar con lo simple para que los estudiantes entiendan primero.
    - Porque así los alumnos van avanzando hasta llegar a lo difícil.
    - Porque si se empieza con series más complicadas los alumnos no entienden nada.
    - Porque les cuesta trabajo.
- Las series deben enseñarse lo más rápido y simple posible.
    - Porque las series son difíciles y los alumnos no las van a entender.
    - Porque les cuesta trabajo a los muchachos.
    - Porque los alumnos nunca las van a utilizar.
    - Porque ya no las van a volver a ver en la escuela.
    - Porque en México no se hace investigación y no las van a aplicar.

Estas posturas muestran que aún los profesores tienen presente la dificultad que representa este tema y eso genera diferentes efectos en las técnicas didácticas utilizadas por ellos.

Algunos profesores imparten su clase siguiendo casi al pie de la letra el temario y los ejemplos que marca el libro de texto, estos profesores intentan aplicar el mayor rigor y formalidad posible. Los ejercicios sólo se escriben en el pizarrón y se resuelven con el criterio "correcto" sin mayor explicación.

Otros profesores intentan generar en el alumno el concepto de serie utilizando ejemplos "de la vida real" que aparecen en los libros de texto, pero esos ejemplos no corresponden a la "vida

real"; verbigracia utilizan un problema en el que debe calcularse la distancia que recorre una pelota que se deja caer y empieza a rebotar contra el suelo, sin embargo la experiencia le indica a los alumnos que la pelota hace unos cuantos rebotes y luego se detiene por lo que el ejemplo obliga a los estudiantes a hacer suposiciones contrarias a su experiencia.

Ejemplos semejantes aparecen en la mayoría de los libros de texto, entre los más famosos está el de la paradoja de Zenón de la liebre y Aquiles cuyo resultado contradice la experiencia de los estudiantes. Este ejemplo en particular genera respuestas como "*en la vida real Aquiles sí rebasa a la tortuga pero en la teoría no*" lo que muestra el escaso valor que tiene esta situación para los estudiantes. Otro ejemplo común es el de la piscina a la que se le agrega cloro.

Finalmente, algunos profesores se dedican a resolver ejemplos bajo el patrón criterio-ejemplo y los ejercicios que deben resolver los estudiantes son sólo aplicaciones directas de los criterios, evitando ejemplos de series que ya no tengan una "forma canónica" o específica de un criterio. Con esto se evita el problema de que los estudiantes no puedan "identificar" el criterio a aplicar.

Opiniones semejantes fueron encontradas por Albert (1996), quien al estudiar las concepciones que tienen los profesores de nivel superior al enseñar series de funciones y su convergencia, encontró, en la mayoría de los profesores que participaron en su estudio, comentarios que lo condujeron a obtener como conclusiones de las entrevistas que:

- *La creencia de los profesores entrevistados es que se puede enseñar mejor matemáticas a través del método deductivo;*
- *Aunque reconocen que es necesaria la demostración para un mejor aprendizaje de las matemáticas, los profesores opinan que ésta lo dificulta por la complejidad de la matemática que se usa, principalmente en semestres avanzados.*
  (Albert, 1996, p. 117)

Observamos que el DME utilizado por la mayoría de los profesores no sólo corresponde con el utilizado en los libros de texto que se utilizan en cada semestre, sino que por este uso los mismos profesores lo perpetúan y refuerzan. Así que la transposición didáctica al determinar

los conceptos, definiciones, criterios y técnicas a utilizar en las series infinitas, juega un papel importante sobre la forma en que el profesor imparte su cátedra.

También se puede observar que estas formas de trabajar de los profesores responden a sus creencias y a los tiempos escolares, que son breves e introducen presiones de diferentes tipos y magnitudes. Es decir, el profesor debe cumplir con la totalidad del programa escolar atendiendo a las técnicas didácticas en que ha sido diseñada la materia y a otras variables de tipo administrativo, todo esto obliga a que los docentes "ajusten" los tiempos recortando el número de ejemplos o su profundidad. De esta manera podemos observar factores de tipo extra-matemático que influyen en la enseñanza de las series infinitas y que obligan a los docentes a abandonar el intento de lograr la comprensión, y el significado, de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes.

3.3 Clasificación de criterios de convergencia

En los libros de texto los criterios de convergencia, en general, se presentan en un orden como el siguiente

- Criterio de la divergencia.
- Criterio de la serie armónica.
- Criterio de la serie-p.
- Criterio de la serie geométrica.
- Criterio de las series telescópicas.
- Criterios de series de términos positivos.
    - Criterio de la razón.
    - Criterio de la raíz.
    - Criterio de comparación.
    - Criterio de comparación en el límite.
- Criterio de la serie alternante.
    - Convergencia absoluta.
    - Convergencia condicional.

Este orden ha sido provocado por la transposición didáctica que selecciona lo que debe aparecer en los libros de texto y generalmente no atiende a la forma de la demostración y mucho menos al origen del criterio (basta observar que en los libros de texto rara vez se dice quién descubrió un criterio de convergencia y mucho menos se comenta cómo lo descubrió), así que esto es lo que podemos considerar como el origen del DME predominante en los cursos de matemáticas en las carreras de ingeniería.

Sin embargo, debido a la forma en que fueron encontrados o demostrados, algunos de estos criterios podrían clasificarse de diferente manera. Una que tomara en cuenta el origen geométrico, aritmético, algebraico o físico del problema que da origen a la serie infinita.

Entonces, la motivación de esta clasificación radica en agrupar aquellas series con origen común de modo tal que los estudiantes puedan asociar nociones geométricas, físicas, etc., a los criterios de convergencia y de esta manera puedan ver la pertinencia y validez de los criterios aplicados a cada uno de estos grupos de series.

Para realizar la siguiente clasificación se tomó en consideración todo lo que los estudiantes conocen de acuerdo al DME que acabamos de explicar. Es decir, que para esta clasificación sólo consideramos geometría, aritmética, álgebra y algunas técnicas básicas de límites e integrales.

Así, nuestra clasificación selecciona a los criterios con tipo:

- Aritmético: Como el de la serie armónica ya que la demostración de la convergencia se hace analizando las sumas y considerando desigualdades.
- Algebraico: En esta clase colocamos a los criterios que utilizan mayormente álgebra en su demostración, como son
    - Serie geométrica, que utiliza factorizaciones de "resta de potencias".
    - Criterio de la raíz, que utiliza una modificación de la serie geométrica para demostrar su validez.
    - Criterio de la razón, que también utiliza una modificación de la serie geométrica para demostrar su validez.
    - Criterio de la serie telescópica.

- Geométrico: En esta clase colocamos a los criterios cuya representación geométrica es fácil de realizar,
    - Criterio de la integral, debido a que al considerar una serie como una integral impropia se utiliza la interpretación de área bajo la curva.
    - Criterio de la serie-p, puesto que la demostración de este criterio está basada en el criterio de la integral.
- Comparación: En esta clasificación colocamos a las series que necesitan de una segunda serie con la cual ser comparadas,
    - Criterio de comparación.
    - Criterio de comparación del límite.
    - Criterio M de Weierstrass.
    - Criterio de la serie alternante.

Una vez hecha esta clasificación se pudo generar diferentes estrategias de selección de los criterios de convergencia. Al paso del tiempo dichas estrategias se fueron refinando hasta lograr encontrar unas reglas generales de selección basadas en la forma del término general de la serie numérica.

Como un resultado de esta investigación ha surgido la posibilidad de generar una propuesta didáctica con respecto a la elección de los criterios de convergencia que se puedan aplicar por los alumnos. Sin embargo este propuesta, aunque ya cuenta con algunos avances, no se incluye en este trabajo y será completada y presentada en un trabajo posterior.

Pasemos ahora a analizar los errores que más comúnmente cometen los alumnos en este tema.

3.4 ¿Qué hacen los alumnos?

A lo largo de muchos períodos escolares se ha encontrado una gran diversidad de errores cometidos por los alumnos. Estos se presentan tanto en el aula de clase como durante la resolución de tareas, y visto desde la escuela lo que es más grave, durante la resolución de los ejercicios que aparecen en los exámenes parciales o finales que incluyen estos temas.

Ahora bien, lo que desde la perspectiva escolar son errores, para la matemática educativa son indicadores importantes; como podemos leer

> *Un obstáculo se manifiesta, por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar. Son fugaces, erráticos, reproducibles, persistentes. Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente sino correcta, un conocimiento antiguo y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones. Esos errores no son necesariamente explicables.* (Brousseau, 1983, p. 171)

Así, lo que parece un error es sólo un conocimiento que ha sido aplicado fuera de su dominio de validez, diríamos entonces que **el error es un estado de conocimiento**[8]. Además se presenta el hecho de que el error, al igual que el conocimiento, es provocado por la interacción del alumno con su medio. Esa interacción le conduce a concepciones que son verdaderas localmente pero no en lo general, es decir que se "equivoca" y aplica una propiedad algebraica válida para sumas finitas pero que es incorrecta en el caso de un número infinito de sumandos.

El mismo Brousseau (1983) reporta como ejemplo el caso del error persistente del Criterio de Divergencia cuya aplicación por los alumnos suele ser en la recíproca, que es falsa.

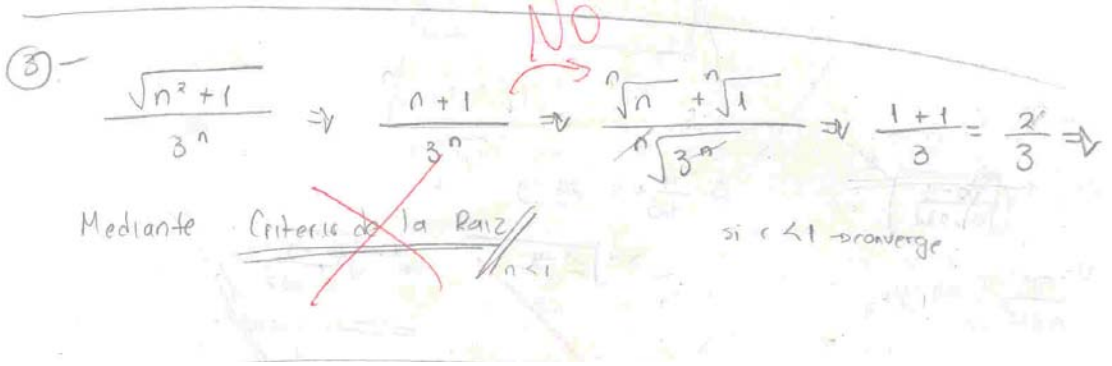
Todos los errores que a continuación se presentan aparecen en forma reiterada y las imágenes han sido tomadas directamente de exámenes.

La siguiente lista de errores la hemos clasificado de cuerdo a cuatro rubros

Error de concepto:

Este tipo de errores está relacionado con la comprensión de los conceptos de límite, sucesión y serie. Así que en este apartado englobamos todos los errores que a nuestro juicio indican confusión entre los conceptos antes citados.

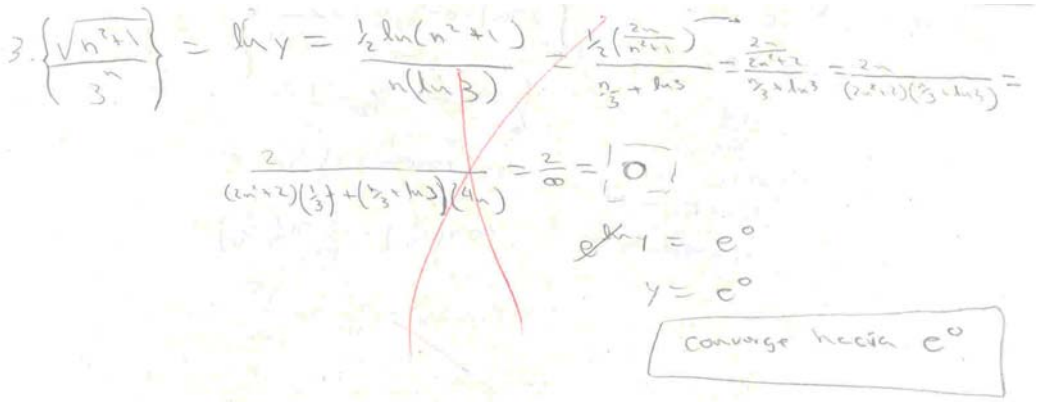
Por ejemplo, en la siguiente imagen aparece la resolución de un ejercicio donde el alumno debe establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\left\{\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n}\right\}$



Como podemos observar, el alumno utiliza un criterio de convergencia de series para resolver la convergencia de una sucesión. Este error nos indica que el alumno no establece diferencia alguna entre lo que significa una sucesión y una serie.

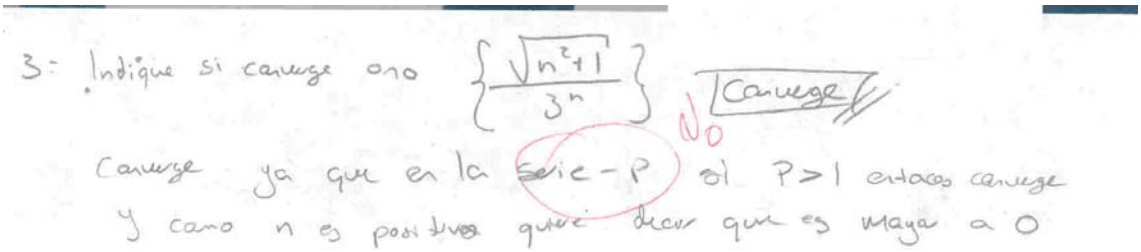
[8] Frase original del Dr. César Delgado

En la imagen que aparece a continuación se observa cómo el alumno intenta establecer la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n}\right\}$



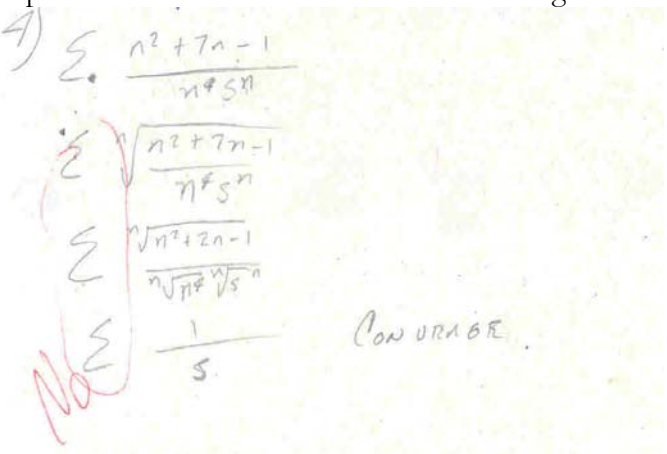
Aquí puede observarse que el alumno aplica el método de derivación logarítmica para calcular la convergencia de una sucesión. Nosotros interpretamos este error como la falta de comprensión entre lo que significa un conjunto discreto (sucesión) y una función continua.

En la imagen que aparece a continuación se observa cómo el alumno intenta establecer la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n}\right\}$



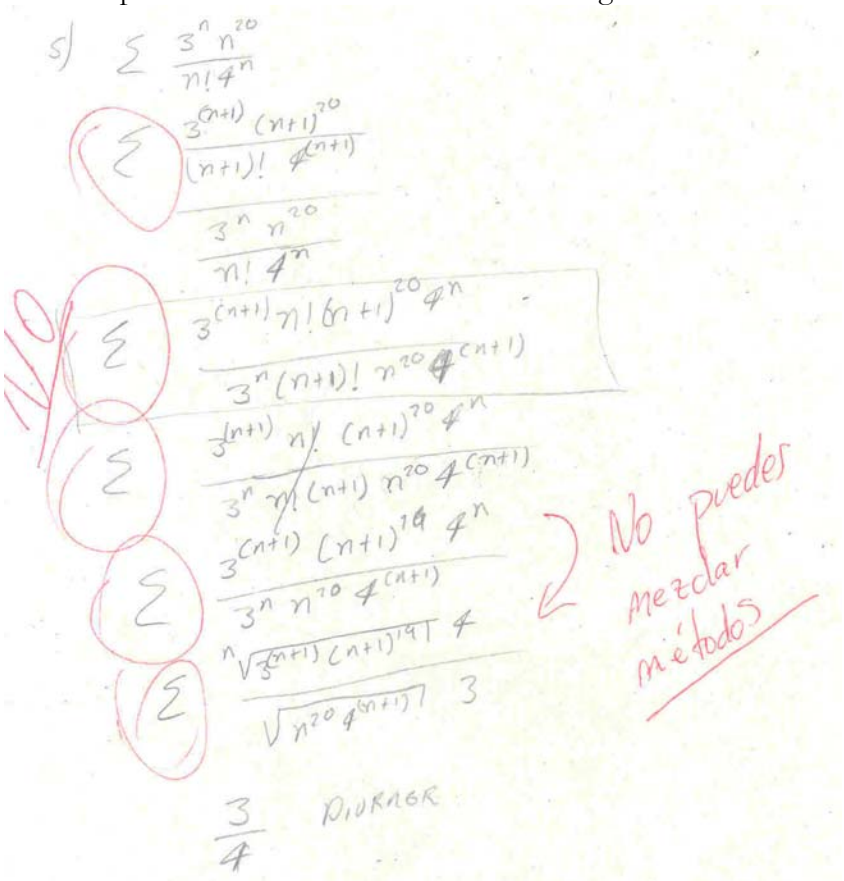
En esta imagen volvemos a observar cómo el alumno utiliza un criterio de convergencia de series para resolver la convergencia de una sucesión.

En el siguiente caso se pide indicar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7n-1}{n^4 5^n}$ converge o no.



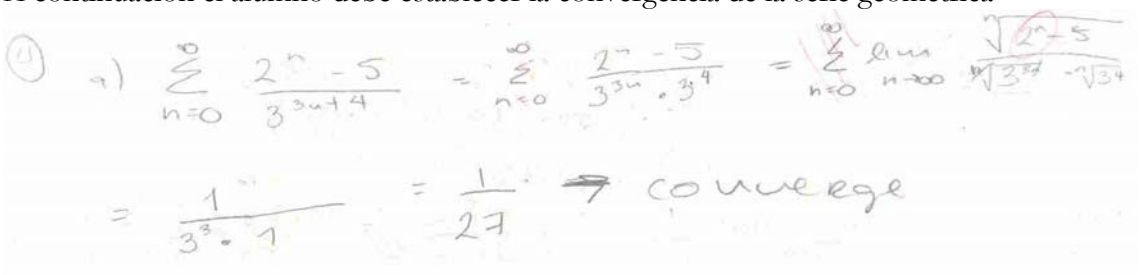
El alumno utiliza un criterio de convergencia de series para determinar la convergencia de la serie, sin embargo no hace diferencia entre el símbolo de serie (Sigma mayúscula) y el símbolo de límite que debería utilizar.

En el siguiente caso se pide indicar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{20}}{n!4^n}$ converge o no.



El alumno utiliza un criterio de convergencia de series para determinar la convergencia de la serie, sin embargo no hace diferencia entre el símbolo de serie (Sigma mayúscula) y el símbolo de límite que debería utilizar. Además, el alumno mezcla métodos dentro de la resolución del ejercicio.

A continuación el alumno debe establecer la convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 5}{3^{3n+4}}$

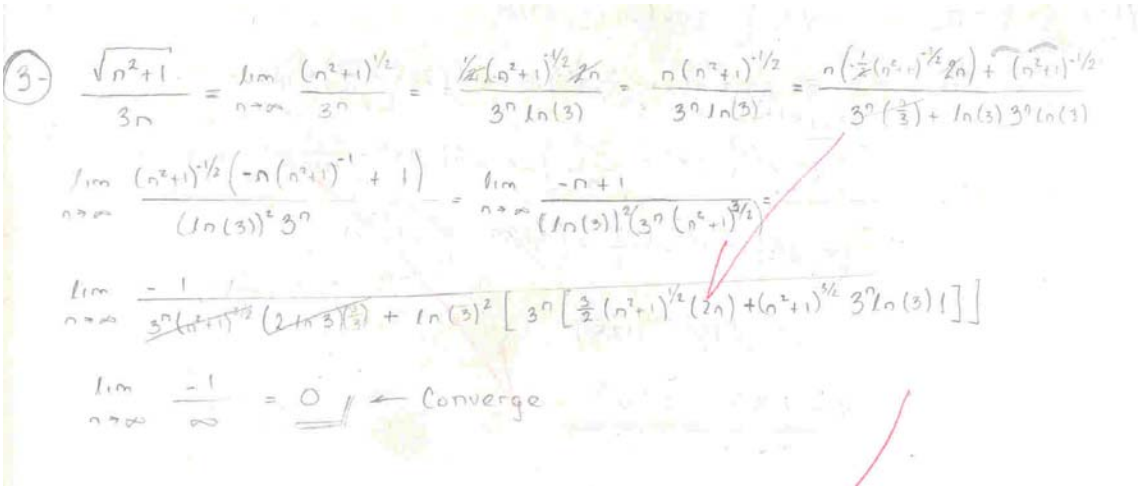


El alumno inicia el ejercicio con un criterio de convergencia adecuado, sin embargo, posteriormente lo mezcla con otro criterio, al mismo tiempo que no logra diferenciar el momento en que cambia de usar una serie a un límite, por lo que mezcla los símbolos de serie y límite.

Error de método:

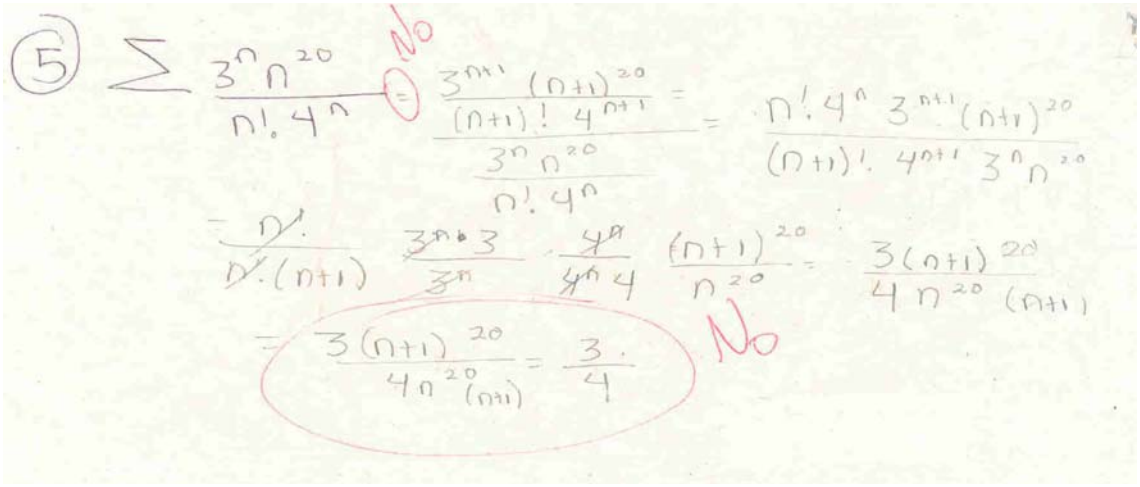
En este bloque hemos catalogado todos los errores en que el alumno identifica adecuadamente si el ejercicio trata de una serie o una sucesión y por lo tanto determina adecuadamente qué utilizar para analizar la convergencia. Sin embargo, en el desarrollo del procedimiento no utiliza la simbología aceptada ni aplica secuencias lógicas en los pasos realizados.

Como primer ejemplo de este bloque analizamos el ejercicio de determinar la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n}\right\}$



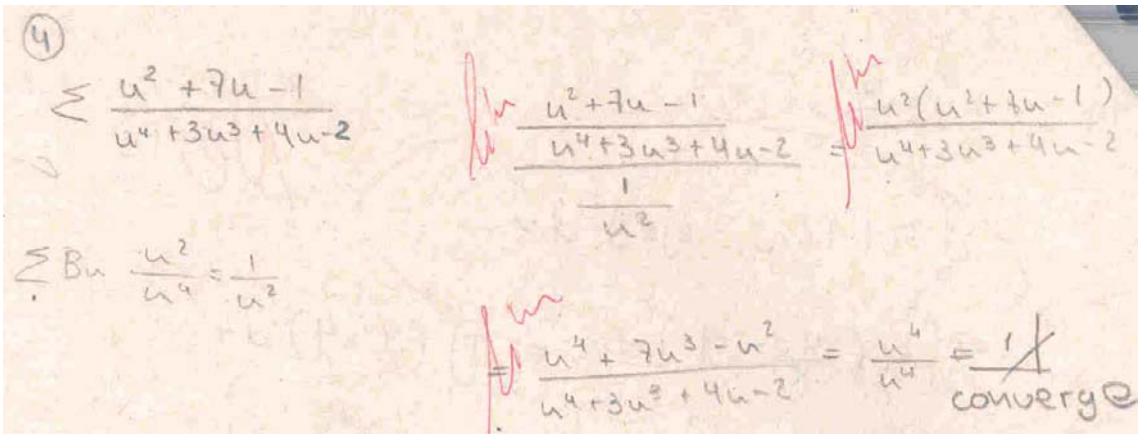
El alumno aplica el criterio adecuado para la convergencia de la sucesión, y que consiste en calcular el límite del término general de la sucesión; sin embargo realiza operaciones no adecuadas en el desarrollo del ejercicio (como igualar una sucesión a un límite y olvidar el símbolo lim)

Ahora veamos un ejercicio donde el alumno debe establecer la convergencia de la serie $\sum \frac{3^n n^{20}}{n!\,4^n}$



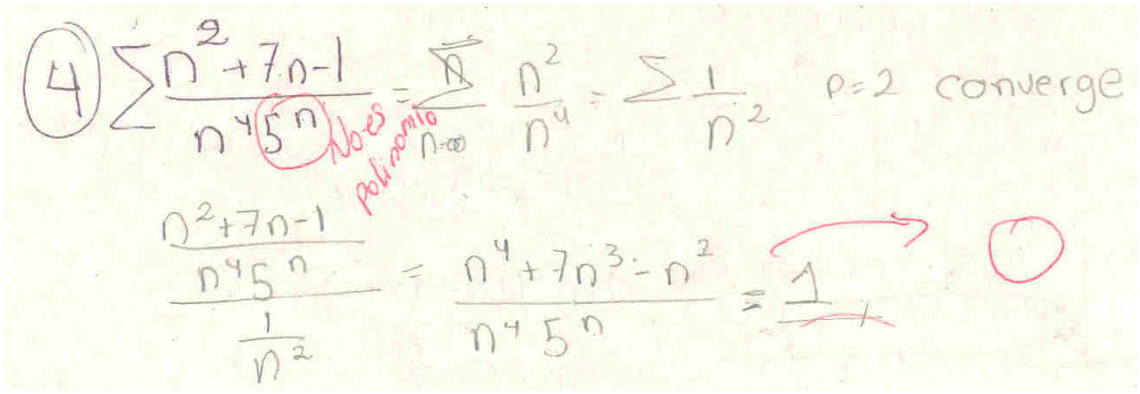
El alumno elige el criterio de la razón que es adecuado, lo aplica y desarrolla sin mayor problema, sin embargo al no utilizar la simbología de límite no puede encontrar adecuadamente dicho límite y no concluye satisfactoriamente el ejercicio.

Para determinar la convergencia de la serie $\sum \frac{n^2+7n-1}{n^4+3n^3+4n-2}$ tenemos la siguiente imagen



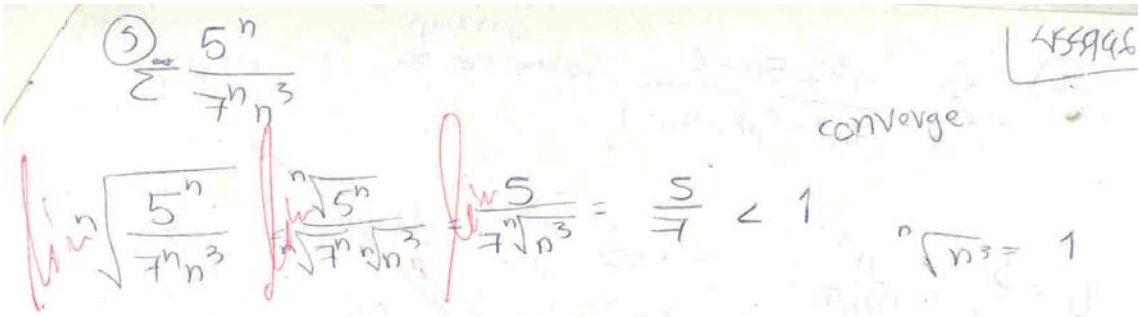
El alumno elige el criterio adecuado para determinar la convergencia de la serie (criterio de comparación del límite) pero no aplica el proceso de límite en el desarrollo del ejercicio, ya que sólo realiza reducciones algebraicas. Sólo en la igualdad final parece tomar límite.

En el siguiente caso tenemos un error cometido al analizar el ejercicio $\sum \frac{n^2+7n-1}{n^4 5^n}$

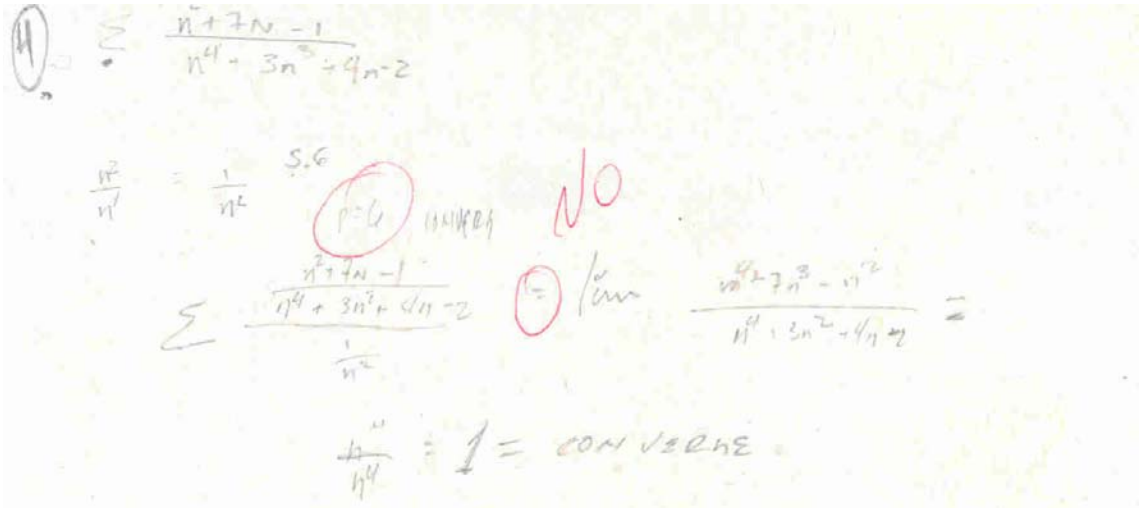


El alumno determina aplicar el criterio de comparación del límite, pero lo desarrolla en forma incompleta e incorrecta, ya que no a todos los términos los sustituye.

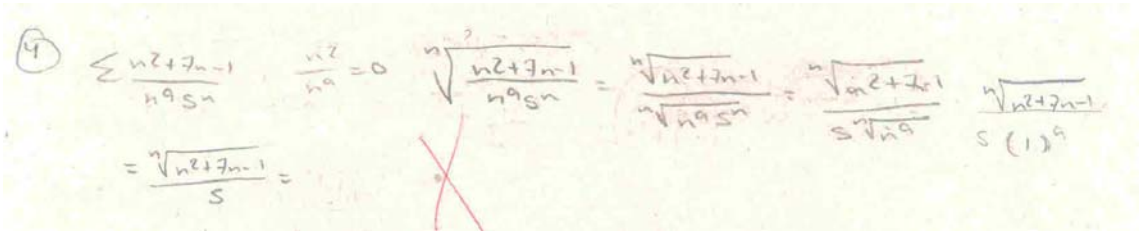
En los siguientes ejemplos se tienen errores en que el alumno no aplica el método correctamente por omitir algún símbolo o algún paso intermedio.



El alumno determina correctamente el criterio a utilizar (criterio de la raíz), pero no utiliza adecuadamente el proceso de límite.



El alumno determina aplicar el criterio de comparación del límite, pero lo desarrolla en forma incompleta e incorrecta.

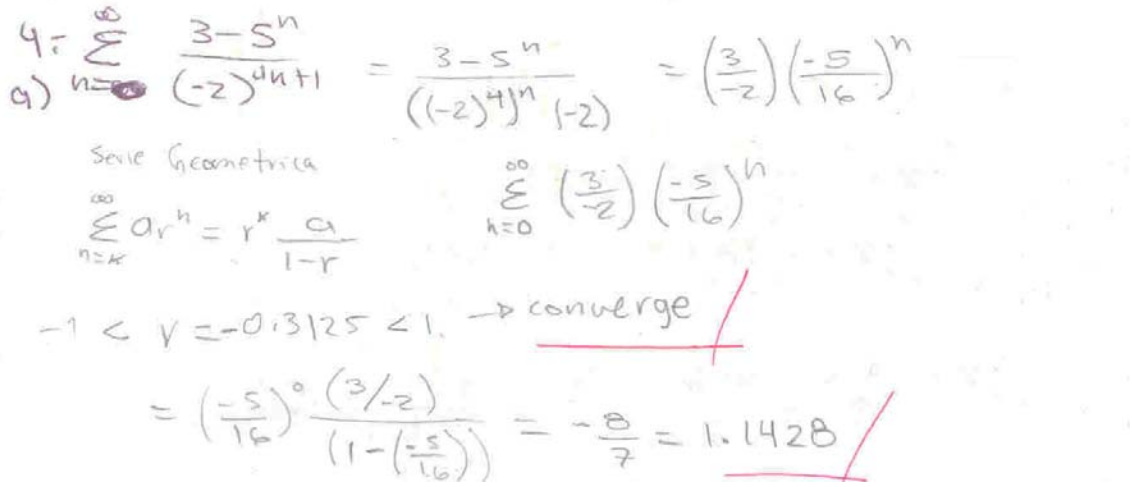


El alumno aplica incorrectamente el criterio de la raíz.

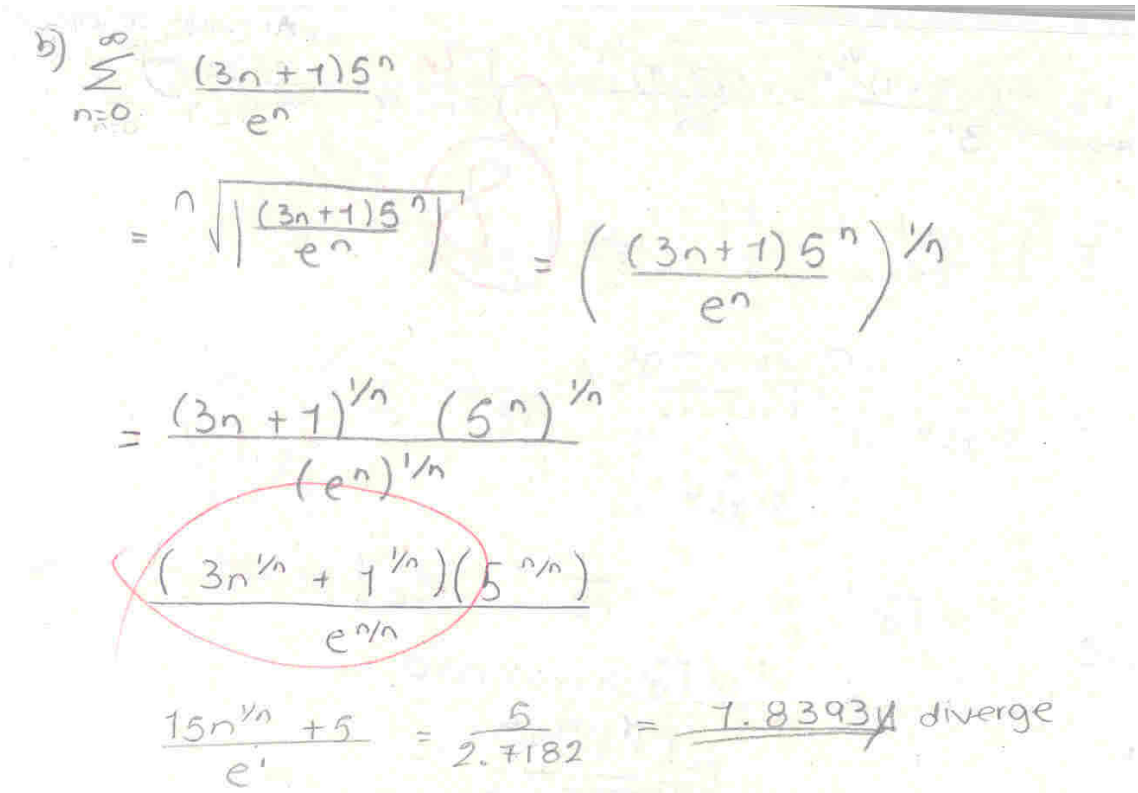
Esta clase coincide con el mal uso de notación reportado por (Davis, 1982) y (Robert, 1982)

Error de álgebra:

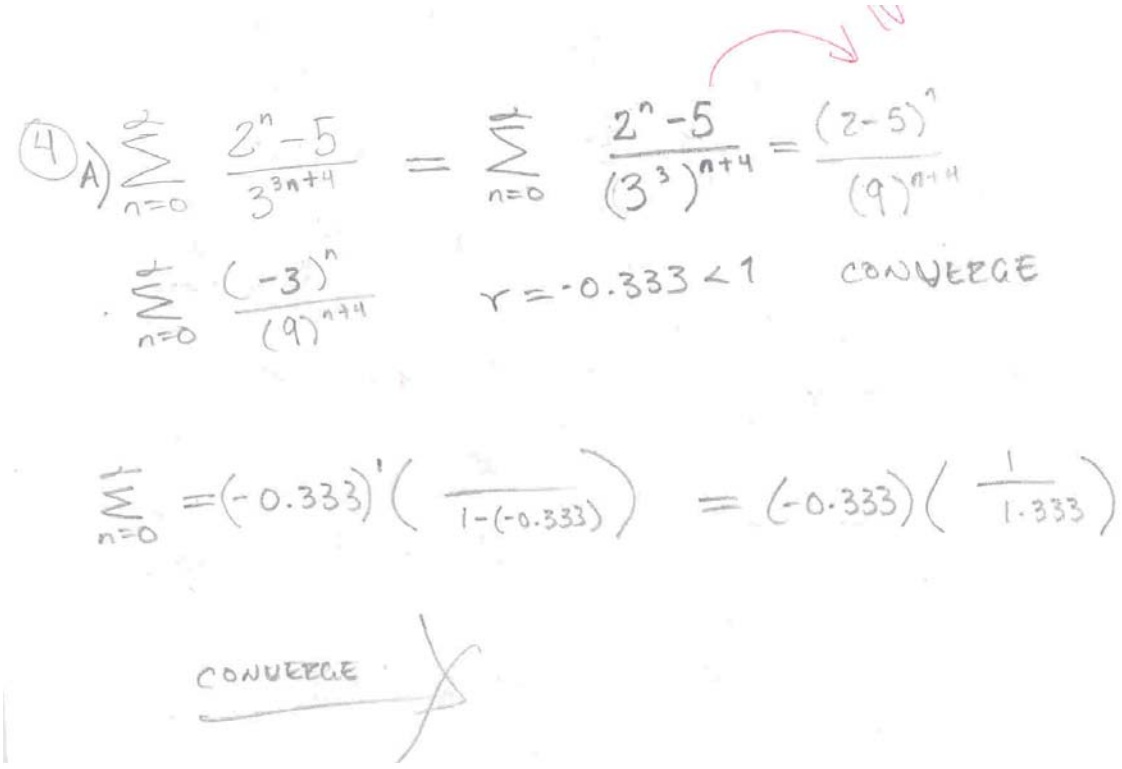
En este bloque hemos colocado todos los ejercicios que a nuestro juicio muestra que el estudiante discierne correctamente entre lo que es una sucesión y una serie, y además determina adecuadamente el procedimiento para analizar la convergencia, pero que en la solución aparece un error de tipo algebraico, como en el desarrollo de un binomio, la cancelación de términos semejantes, la eliminación de potencias y raíces, la separación de los radicandos, etc.



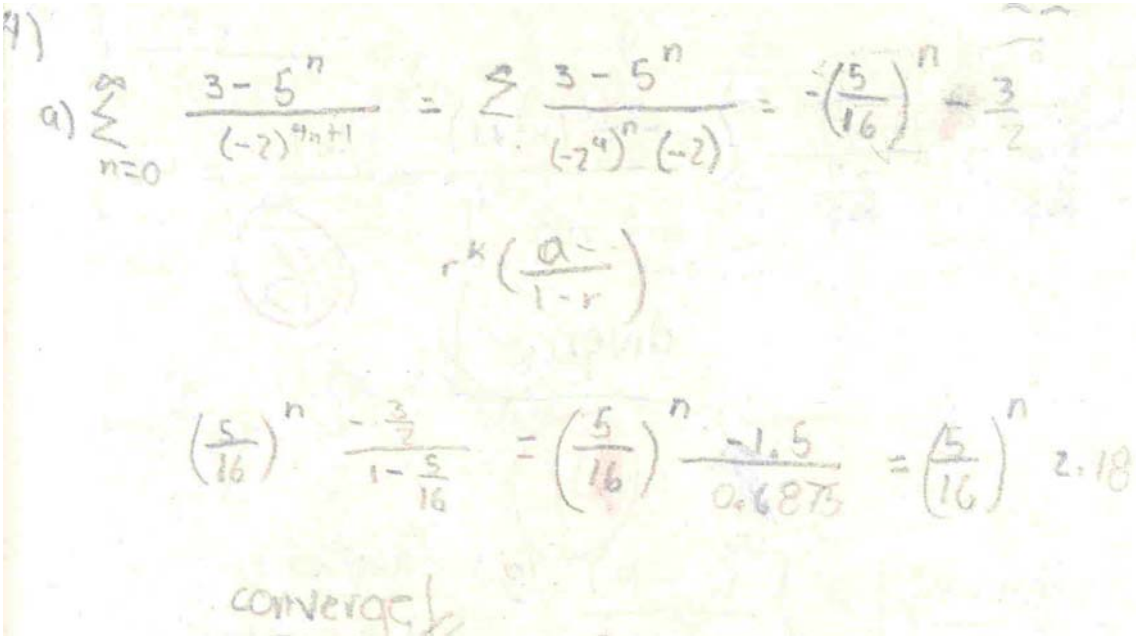
En esta imagen se observa cómo el alumno determina el criterio adecuado para la serie (serie geométrica), pero realiza manipulaciones algebraicas no adecuadas al separar los términos de la fracción.



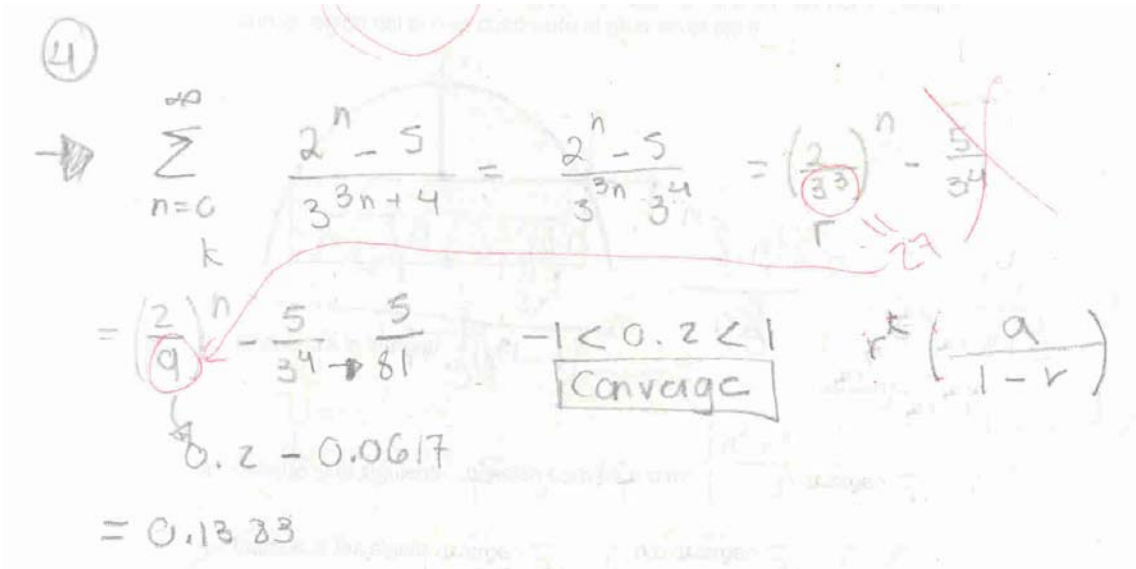
Ahora observamos cómo el alumno aplica un criterio adecuado, pero al desarrollar la raíz hace una separación de términos del radicando que no es adecuada.



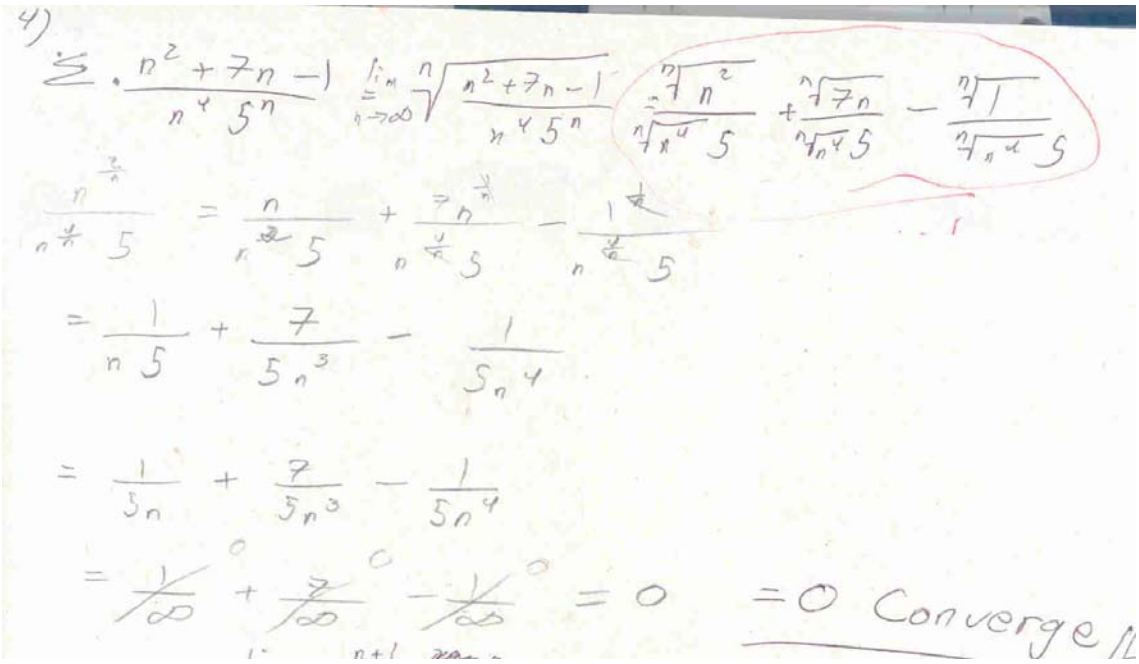
En esta ocasión el alumno realiza una factorización incorrecta de términos al aplicar el criterio de la serie geométrica.



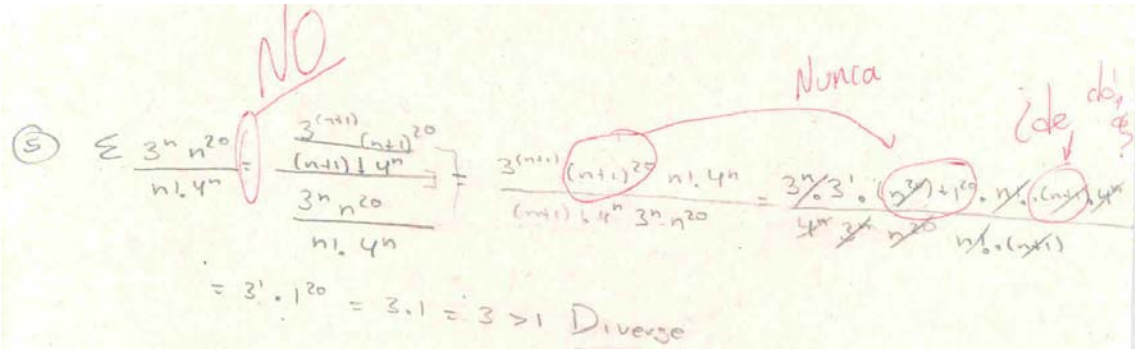
El alumno determina el criterio adecuado para la serie (serie geométrica), pero realiza manipulaciones no adecuadas al separar los elementos de la fracción.



Ahora observamos un error al realizar el cálculo de la potencia 3^3. Además de separar mal la fracción.



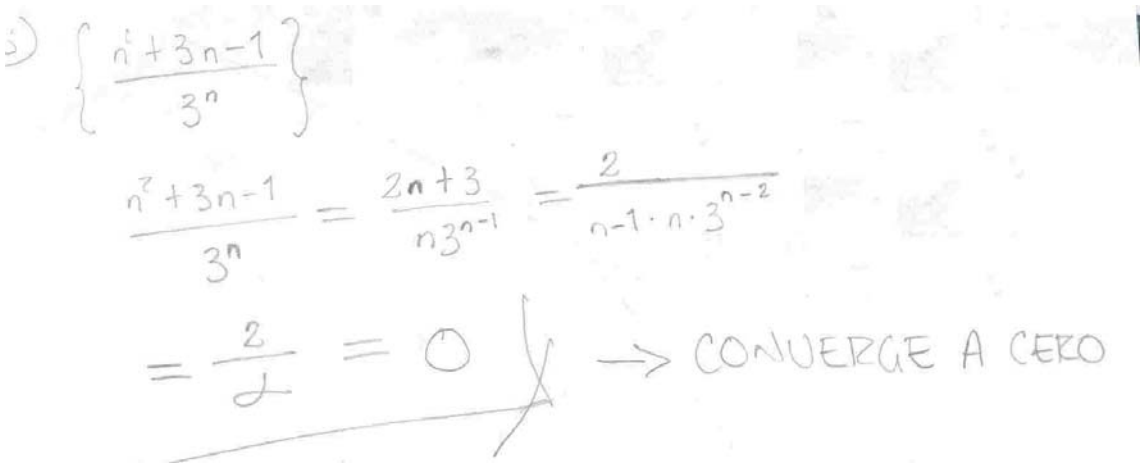
El alumno determina adecuadamente aplicar el criterio de la razón, pero realiza una separación del radicando que no es adecuada.



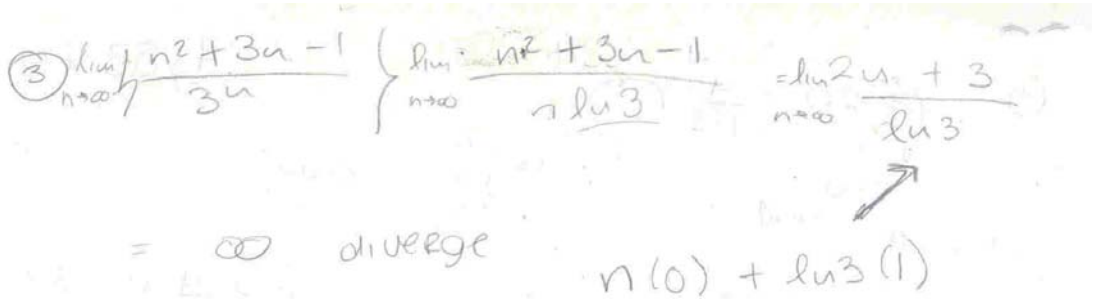
En este caso podemos observar cómo el alumno desarrolla mal el binomio $(n+1)^{20}$. Además presenta errores clasificados en el apartado de ERROR DE CONCEPTO.

Errores Diversos:

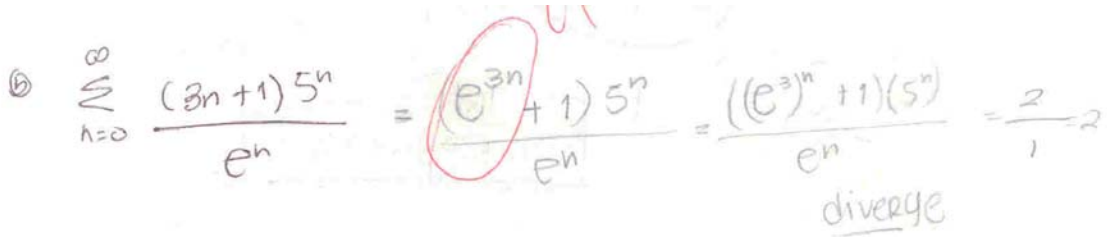
En este bloque hemos colocado los errores que aparecen en la solución de ejercicios y que involucran la incorrecta aplicación de conceptos de diferentes áreas, por ejemplo derivadas mal calculadas, sustituciones de valores que no corresponden, cambios en las expresiones y aquellos que involucran la mezcla de errores de otros bloques.



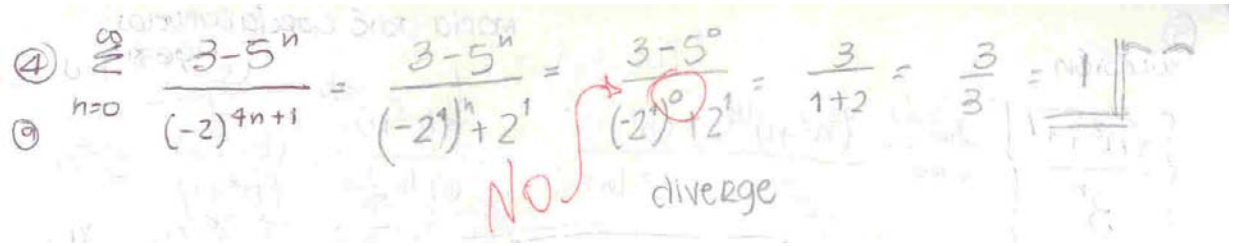
En este caso el alumno aparentemente utilizó la regla de L'hôpital para calcular un límite, pero no deriva adecuadamente y tiene errores de método.



Aparentemente aquí también se aplicó la regla de L'hôpital para calcular un límite, pero no deriva adecuadamente y tiene errores de método al aplicar el límite a la sucesión.



En este ejemplo de error no se ha logrado encontrar la explicación de por qué cambió la expresión.



Ahora observamos un error diferente a los anteriores en el que al parecer el alumno sustituyó el valor inicial (n = 0) de la serie. Además de cometer otros errores ya enunciados.

A continuación se presenta un error semejante al anterior, sin embargo no se cuenta con la imagen debido a que observado en el pizarrón de una clase. En esta ocasión los alumnos evalúan los dos primeros elementos de la serie con lo cual obtienen dos valores, posteriormente consideran los componentes de una serie geométrica $\sum_n a r^n$ y toman a los valores recién calculados como si fueran la "**a**" y la "**r**" de la serie geométrica.

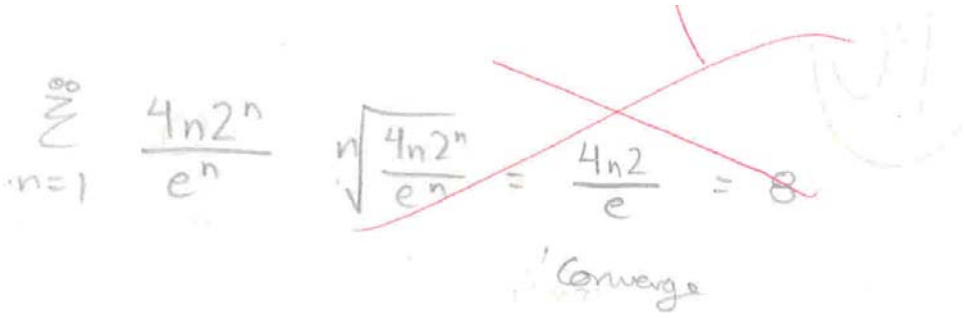
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n-1} =$$

para n = 1 se tiene $\frac{1+1}{1+3-1} = \frac{2}{3}$ entonces a = $\frac{2}{3}$

para n = 2 se tiene $\frac{2+1}{2^2+3(2)-1} = \frac{3}{9}$ entonces r = $\frac{1}{3}$

de esta manera se logra convertir una serie cualquiera en una serie geométrica, de esta manera se hace la conclusión de que la serie converge pues $r = \frac{1}{3}$

En la siguiente imagen tenemos la solución dada por un estudiante a un ejercicio de convergencia de una serie.



El alumno resuelve utilizando (aparentemente) el criterio de la raíz, pero tiene errores de concepto, de método y de álgebra.

Los errores presentados arriba no son todos los que se han encontrado, pero sí son los que más frecuentemente se observan en los ejercicios de clase, en las tareas y en los exámenes. Estos errores se presentan tan frecuentemente que más que "errores" parecen ser una respuesta esperada de los estudiantes, así que probablemente son el efecto visible del sistema

escolar que establece lo que se estudia y cómo se estudia; y que sin embargo también genera contradicciones en el discurso matemático escolar vigente que, oficialmente, se enfoca en la formalidad pero al mismo tiempo hace a un lado esa formalidad dejando sin bases ni sustento los conceptos y métodos que deben aprender los estudiantes.

En palabras de Brousseau

> *Si las condiciones lo exigen, el alumno puede resumir en automatismo actividades complejas, restando sentido y posibilidades de elección a su actividad*
> (Brousseau, 1983, p.169)

que es parte de lo que puede estar pasando con nuestros alumnos cada vez que responden a los ejercicios que se les plantean.

Debido a esto último, los citados errores, son muy importantes para nuestro análisis ya que son una muestra del estado de conocimientos que manejan los estudiantes con respecto a las series infinitas.

Por el momento los llamamos errores debido a que los vemos desde las perspectivas escolar y formal de la matemática, en el siguiente capítulo construiremos una perspectiva diferente que nos permita ver estos mismos "errores" con otra visión, una que nos permita decir por qué son tan comunes y qué se puede intentar hacer para evitarlos.

4. Desarrollo de las series numéricas infinitas

En este capítulo vamos a mostrar algunas evidencias de formas en que a lo largo de cuatro mil años se han desarrollado las series numéricas infinitas hasta nuestra época, este desarrollo lo hemos dividido en cinco períodos.

Posteriormente iniciaremos un análisis de estos períodos históricos para establecer la forma en que la transposición didáctica ha afectado a todos los conceptos involucrados.

También haremos un estudio de la forma en que el discurso matemático escolar ha variado a lo largo de estos períodos históricos.

4.1 Series numéricas infinitas y su desarrollo

Existen clasificaciones de tipo histórico sobre el desarrollo de las series infinitas como la que aparece en Reiff (1992) y que es citada como una fuente importante en la página 30 de Smith (2005), en el que se establecen tres períodos de desarrollo:

1) El período de la INTRODUCCIÓN, encabezado por Newton y Leibniz.
2) El período FORMAL, encabezado por Euler, y
3) El período Moderno, en el que se da la investigación científica y que inicia con Gauss en 1812.

Sin embargo, esta y otras clasificaciones no consideran los avances logrados en otras regiones geográficas diferentes a la europea, y por ello las consideramos incompletas.

A continuación desarrollamos una clasificación del desarrollo de las series infinitas en cinco períodos diferentes:

I. Período Antiguo.
II. Período del nacimiento del Cálculo.
III. Período del Desarrollo.
IV. Período de la Sistematización.
V. Período de la Fundamentación.

Cabe mencionar que al inicio de esta investigación, se pensó establecer una línea de tiempo del desarrollo de las series infinitas; sin embargo, lentamente fueron surgiendo indicios de que no sólo la fecha era un dato importante.
Pronto pudo observarse que la región geográfica y la cultura imperante en ella imponían diferentes razones para el desarrollo y la concepción de las series infinitas, para algunas culturas era importante la posición geográfica exacta debido a su filosofía de la vida y para otras era importante para realizar cálculos referentes a circunferencias o para aproximar posiciones.

Los cinco períodos antes mencionados engloban ideas y pensamientos correspondientes a una visión particular de las series, desde lo que significan hasta el para qué son.

El primer período recoge las concepciones correspondientes a las culturas que no parecen haber conocido el cálculo, al menos en una forma semejante a la nuestra. En este período podrá observarse cómo las civilizaciones no europeas resolvieron problemas importantes en diferentes períodos de su historia mediante la geometría, la mecánica o la aritmética. Esta es la razón principal por la que el período recibe el nombre de Período Antiguo.

En el segundo período contemplaremos el surgimiento del pensamiento europeo en torno al cálculo, muchos matemáticos europeos ya habían hecho contribuciones a las series siguiendo métodos semejantes a los del período anterior; sin embargo, la cantidad y fuerza de las nuevas aplicaciones que proporciona el cálculo generarán un gran aumento en el uso de las series.
Los trabajos de Newton, Leibniz y contemporáneos darán forma a este período llamado Período del nacimiento del cálculo, en el que veremos la aplicación de series en todo y por todos, esto será el reflejo de un nuevo tipo de pensamiento.

Nuestro tercer período recibe el nombre de Período del Desarrollo debido a que ahora podremos constatar que las series han cobrado una importancia tal que voces importantes las colocarán en el centro del análisis. Euler será el gran calculador de este período, su influencia llevará a las series al primer plano y durante algún tiempo las series serán indispensables en la mayoría de las áreas del conocimiento. El pensamiento dominante será aquél en el que lo más importante será calcular las "sumas" de las series.

El período denominado Período de la Sistematización, marcará un nuevo cambio en el pensamiento. Nuevas ideas conducirán a un refinamiento en el uso de las series y en la validez de su uso.

Hombres como Cauchy, Abel y otros más cambiarán la faz de las matemáticas al iniciar un movimiento de rigor matemático. El pensamiento predominante será ahora conocer el comportamiento de la serie antes de intentar calcular su suma, si es que algo así existe.

Durante este período veremos trabajos y contribuciones, algunas menores y algunas trascendentales que se dirigen a buscar criterios de convergencia.

El período final corresponderá a la máxima axiomatización y nuevos niveles de rigor matemático. El estudio de los números reales ahora estará dominado por nuevos enfoques proporcionados por la topología y el análisis, conceptos como conjunto borel-medible, completitud, números transfinitos, cortaduras, aparecerán para quedarse como el fundamento del análisis.

A lo largo de este período se verán trabajos cuya finalidad será el establecimiento de la estructura de los números reales, estos trabajos tendrán consecuencias sobre la forma de medir y de calcular derivadas e integrales.

Estos períodos no inician y terminan en una fecha específica, es decir, en general las ideas que generan un nuevo período empiezan a gestarse desde antes, durante algún tiempo pasan desapercibidas hasta que un día aparecen y muestran su fuerza y utilidad. Así por ejemplo, aunque hay sucesos dentro del Período IV que dan origen al período V, hemos intentado mantener una línea de tiempo lo más apegada a la cronología convencional aunque algunos de estos sucesos aparecerán mencionados nuevamente en el período V.

I. Período Antiguo

Existen muchos avances en progresiones aritméticas y geométricas, y en la suma de ellas, en diversos pueblos. Sin embargo, la exposición siguiente está hecha en forma cronológica más que por cultura o región geográfica.

El desarrollo de las matemáticas en la India es muy antiguo como puede verse en De Mora y Ludwika (2003) donde se cita el pasaje

> *Indra, ven hacia aquí con dos corceles castaños,*
> *Ven con cuatro, con seis cuando se te invoca.*
> *Ven tú con ocho, con diez, para beber el Soma.*
> *He aquí el jugo, valiente guerrero, no lo desdeñes*
> *¡OH Indra!, ven tú aquí habiendo enganchado a tu carro*
> *veinte, treinta, cuarenta caballos.*
> *Ven tú con cincuenta corceles bien adiestrados, Indra,*
> *sesenta o setenta, para beber el Soma.* (De Mora y Ludwika, 2003, p. 28)

Versos en los que se tiene la representación de dos progresiones aritméticas, la primera de diferencia 2 y la segunda de diferencia 10. Estos versos aparecen en el *Mandala II* del *Ṛg Veda* en el himno 18 y cuyo origen está calculado entre los años 2000 a. C. al 1750 a. C. Pero no se mencionan evidencias de que se haya realizado la suma de las progresiones como para sugerir un uso inicial de series infinitas; aunque, sí existe el concepto de infinito como se lee en De Mora y Ludwika (2003) cuando se cita el pasaje del *Dhavalā*:

> ***Ananta*** *es aquello que mediante la sustracción de números* $sa\dot{m}khy\bar{a}ta$ *(numerables) y* $asa\dot{m}khy\bar{a}ta$ *(innumerables) por siempre, por un tiempo sin fin, no se agota.*
>
> (De Mora y Ludwika, 2003, p. 51)

Podemos mencionar el uso de progresiones en el antiguo Egipto, Newman (1976), en una época casi simultánea a la hindú, en Rhind (2006) se encuentran traducciones de los problemas

que aparecen en el Papiro de Rhind fechado aproximadamente en el año 1650 a. C. en el que se utilizan las progresiones aritméticas para resolver los problemas 63 y 64:

> **Problema 63.** Repartir 700 hogazas de pan entre cuatro hombres en partes proporcionales a 2/3, 1/2, 1/3 y 1/4.
>
> **Problema 64.** Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea 1/8 de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre?

Sin embargo, tampoco se tienen evidencias de haber trabajado con series infinitas; aunque nombramos en este punto a las progresiones aritméticas y geométricas porque son una forma de encontrar series numéricas infinitas y esta semilla ya existía en esas civilizaciones en tiempos tan remotos.

Zenón de Elea vivió entre el 490 a.C. y el 425 a.C. se dice que escribió una obra en la que aparecían 40 paradojas acerca del movimiento y el análisis del continuo, y *Aristóteles* (384 a.C. – 322 a.C.) hace mención de cuatro de ellas Dicotomía, Aquiles, La flecha y el Estadio. Estos son de los primeros ejemplos de sucesiones infinitas que aparecen en los griegos. (The MacTutor History of Mathematics Archive)

La primera mención que se tiene de una serie infinita aparece alrededor del 230 a.C. en los trabajos de *Arquímedes* al querer calcular la cuadratura de una curva, en Knopp (1921) se puede leer que *Arquímedes* encontró la expresión[9]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

[9] La notación utilizada es la que actualmente usamos y no corresponde con la utilizada por Arquímedes.

pero se dice que lo que hizo *Arquímedes* fue mostrar que esta suma[10] siempre es menor que $\frac{4}{3}$ para cualquier valor de n que se utilice, en Kline (1972) puede verse la forma en que *Arquímedes* lo hizo en su obra "Cuadratura de la parábola". Existen datos de que *Arquímedes* no calculó este valor de la serie en forma directa sino mediante medios mecánicos, Collette (1986) y Kline (1972). Esta es la primera referencia europea de una serie infinita y la última durante muchos siglos ya que la matemática griega evitará el infinito y con ello las series infinitas, a pesar de que han surgido sucesiones infinitas para intentar resolver los "*tres problemas griegos*" serán desechadas.

Las progresiones aritméticas y geométricas vuelven a aparecer (The MacTutor History of Mathematics Archive, la página de History of Mathematics de la Simon Fraser University y Joyce (1995) en un libro chino llamado 九章算術 o *Jiuzhang suanshu* (Chu *Chang Suan Shu)* o Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático, escrito aproximadamente alrededor del 200 a.C[11]. y al cual a lo largo del tiempo se le van agregando comentarios de diversos matemáticos.

En el capítulo 3, *Cui fen* o Distribución por Proporción, se encuentran problemas cuya resolución involucra el uso de progresiones aritméticas y geométricas.

Zhang Qiujian (también conocido como *Chang Ch'iu-Chin* o *Chang Ch'iu-chien*) escribió una obra llamada *Zhang Qiujian suanjing* (Manual Matemático de Zhang Qiujian) entre los años 468 [12] d. C. y 486 d. C. que consta de 98 problemas divididos en tres capítulos. En esta obra resuelve y calcula la suma de progresiones aritméticas

Hasta estas fechas consignadas no se encuentran evidencias que hablen del uso de series numéricas infinitas por alguna de estas civilizaciones, sin embargo, en un breve lapso de tiempo aparecerán en la India con una gran anticipación a lo que *Newton*, *Leibniz*, y todos los

[10] Existen desde hace siglos diversas discusiones acerca de si esta expresión puede considerarse una "suma" en el sentido acostumbrado de sumar dos números. Puede leerse la página 102 de Knopp (1921) y las páginas 81 y 82 de Gardiner (2002).
[11] Algunos historiadores asignan una fecha entre el 100 a.C. y el 50 a. C., véase History of Mathematics de la Universidad Simon Fraser.
[12] Algunos historiadores fechan a *Zhang Qiujian* 100 años antes.

matemáticos europeos lograrán después mediante la comunicación constante y activa de todos los resultados que van encontrando.

Las series numéricas aparecen, después de *Arquímedes* y sin evidencia de la influencia griega, en los trabajos de *Aryabhata* un matemático hindú cuya obra *Aryabhatiya* fechada aproximadamente en el año 499 d. C. cubre temas como:

- Métodos de inversión
- Operadores aritméticos
- Fórmulas para encontrar la suma de diferentes tipos de series
- Reglas para encontrar el número de términos de una progresión aritmética
- Tablas de valores del seno.

En Hayashi (1997) puede verse una discusión completa de la forma en que *Aryabhata* realiza sus cálculos y presenta la traducción del sánscrito al inglés de algunos pasajes de *Aryabhatiya*, así como una comparación entre traducciones anteriores.

Pueden verse más detalles en la página II del capítulo 8 de Pearce (2002), en The MacTutor History of Mathematics Archive y en la página 44 de Mankiewickz (2000), debe mencionarse que no se proporcionan demostraciones de estas reglas, sin embargo la importancia de su aparición y uso es suficiente motivo para ser admirada.

El trabajo de *Aryabhata* fue continuado por *Brahmagupta* (598 d. C. – 670 d. C.) quien escribió la obra *Brahmasphutasiddhanta* (La comprensión del Universo) en la cual, de acuerdo a The MacTutor History of Mathematics Archive, aparecen reglas para sumar series (aunque no indica si estas series son finitas o infinitas), también aparecen reglas para sumar los cuadrados de los n primeros enteros y la suma de los cubos de los primeros n enteros.

También existen referencias, The MacTutor History of Mathematics Archive, la página III del capítulo 8 de Pearce (2002) y Mankiewickz (2000), acerca de que en

Brahmasphutasiddhanta se utilizaron fórmulas tan avanzadas como las que casi 1000 años después descubrirían los matemáticos europeos y serían nombradas **fórmulas de interpolación de Newton-Stirling** y **fórmulas iterativas de Newton-Raphson**; Además *Brahmagupta* fue el primero en intentar asignar valores a fracciones como $\frac{n}{0}$ y en particular a la expresión $\frac{0}{0}$.

Alrededor del año 850, *Mahavira* (o *Mahaviracharya ~Mahavira el maestro*) escribió la obra *Ganitasar Sangraha* considerada como brillante. *Mahavira* proporcionó muchas fórmulas para trabajar con progresiones geométricas, Pearce (2002).

Los trabajos de *Sridhara* se consideran realizados alrededor del año 900 (compare The MacTutor History of Mathematics Archive y el capítulo IV de Pearce (2002)), en particular en su obra *Patiganita* aparecen secciones del libro dedicadas al cálculo de progresiones aritméticas y progresiones geométricas, además de fórmulas para calcular la suma de algunas series finitas que se vuelven una referencia estándar para obras posteriores.

Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji nació en 953 en Bagdad, The MacTutor History of Mathematics Archive y Joyce (1995), y obtuvo el siguiente resultado (en prosa)

> *La suma de los cuadrados de los números que se siguen uno al otro en orden natural desde el uno es igual a la suma de esos números y el producto de cada uno de ellos por su predecesor.*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \qquad \text{(en notación actual)}$$

También proporcionó las siguientes fórmulas

$$1+2+3+4+\ldots+n = n(\tfrac{1}{2}+\tfrac{n}{2})$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Hacia el año 1100 d. C. el desarrollo de la matemática hindú recae en *Bhaskaracharya* o *Bhaskara II*, considerado el más grande matemático hindú de la antigüedad (The MacTutor

History of Mathematics Archive; Pearce, 2002, cap. 8-IV; Mankiewickz, 2000). En su obra *Lilavati* (La hermosa) que versa sobre matemáticas se encuentra en el capítulo 5 la resolución de problemas sobre progresiones aritméticas y progresiones geométricas.

Ibn Yahya al-Maghribi Al-Samawal nace en Bagdad, The MacTutor History of Mathematics Archive y Joyce (1995). Su obra más importante es *al-Bahir fi'l-jabr (*The brilliant in algebra) dividida en cinco libros. En el libro 2 aparece el resultado

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

que no aparece en ningún texto árabe anterior a *Al-samawal.*

Al-Marrakushi Ibn Al-Banna hacia el 1256 nació en Marruecos, The MacTutor History of Mathematics Archive y Joyce (1995), aunque hay discusiones sobre el lugar exacto, hay datos de que escribió 82 obras. Pero unas de sus obras más famosas son *Talkhis amal al-hisab* (Resumen de operaciones aritméticas) y *Raf al-Hijab* que es un comentario que hizo a la primera.

En *Raf al-Hijab, Al-Banna* hace uso de fracciones continuas y da la suma de las siguientes series finitas

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$$

Zhu Shijie también conocido como *Chu Shih-Chieh* nació alrededor del año 1260 cerca de Pekín, China, The MacTutor History of Mathematics Archive y Joyce (1995). Se sabe que escribió dos obras consideradas como sorprendentes. La primera de nombre *Suan xue qi meng* (Introducción a los Estudios Matemáticos) publicada en 1299 y que llegó a usarse como libro de texto de matemáticas en Japón (impreso en 1658) y Corea (impreso en 1660) trata sobre álgebra polinomial y ecuaciones polinomiales, áreas volúmenes, regla de tres y un método equivalente al de Eliminación Gaussiana.

El segundo libro publicado en 1303 es *Siyuan yujian* (Reflexiones Verdaderas de las Cuatro Incógnitas) en el que aparece el Triángulo de Pascal[13] hasta las octavas potencias. Resuelve polinomios en 1, 2, 3 y 4 incógnitas.

También presenta 288 problemas divididos en tres volúmenes de veinticuatro capítulos. Entre las fórmulas que presenta se encuentran

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$1+4+10+20+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

entre otras, y también dio la suma de series como:

$$1+4+9+16+25+36+\ldots$$

$$1+5+14+30+55+91+\ldots$$

$$1+6+18+40+75+126+\ldots$$

$$1+8+30+80+175+336+\ldots$$

En el año 1350 d.C. el matemático *Narayana Pandit*, escribió la obra *Ganita Kaumudi* de 14 capítulos, The MacTutor History of Mathematics Archive y el tema II del capítulo 9 de Pearce (2002). El capítulo 13 de esta obra (llamado *Red de números*) está dedicado a las sucesiones de números y algunos problemas relacionados con las progresiones aritméticas. En el capítulo 14, discute cuadrados mágicos, y utiliza fórmulas y reglas para trabajar las relaciones entre los cuadrados mágicos y las series aritméticas.

Hacia el año 1350 d.C. nace el matemático *Madhava* de Sangamagramma, The MacTutor History of Mathematics Archive y el tema III del capítulo 9 de Pearce (2002). En los trabajos de *Madhava* aparecen expresiones que siglos después serán redescubiertas por los matemáticos europeos.

Puede verse la cita de la forma en que *Madhava* calcula la expansión en serie infinita de la función arctang:[14]

[13] *Pascal* redescubrió este mismo arreglo hasta cerca del 1650, más de 300 años después.

El primer término es el producto del seno dado y el radio del arco deseado dividido por el coseno del arco. Los siguientes términos son obtenidos por un proceso de iteración cuando el primer término es repetidamente multiplicado por el cuadrado del seno y dividido por el cuadrado del coseno. Todos los términos son entonces divididos por los números impares 1,3,5,… El arco es obtenido al sumar y restar respectivamente los términos de rango impar y aquellos de rango par. Se toma como condición que el seno del arco o el de su complemento cualquiera de ellos sea el más pequeño sea tomado aquí como el seno dado. De otra manera los términos obtenidos por la iteración anterior no tenderán a la magnitud que se desvanece.

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

En la misma fuente se observa que para los matemáticos hindúes **seno de q** se escribiría en notación actual como **r senq** donde r es el radio, de la misma forma el **coseno de q** se escribiría **r cosq**, con lo que si se sustituyen estas expresiones en el texto anterior se obtendría la expresión:

$$r\,q = \frac{r \cdot r\sin q}{1 \cdot r\cos q} - \frac{r \cdot (r\sin q)^3}{3 \cdot (r\cos q)^3} + \frac{r \cdot (r\sin q)^5}{5 \cdot (r\cos q)^5} - \frac{r \cdot (r\sin q)^7}{7 \cdot (r\cos q)^7} + \cdots$$

y haciendo $\tan q = \frac{\sin q}{\cos q}$ y cancelando el radio **r** tenemos:

$$q = \frac{\tan q}{1} - \frac{\tan^3 q}{3} + \frac{\tan^5 q}{5} - \frac{\tan^7 q}{7} + \cdots$$

que se considera equivalente a la serie:

$$\arctan q = q - \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^7}{7} + \cdots$$

descubierta por *Gregory*, y llamada Serie de Gregory, alrededor del año 1668 (The MacTutor History of Mathematics Archive; Pearce, 2002, cap.9-IV), casi 300 años después de *Madhava*.

Esta serie también se expresa con la condición $\frac{y}{x} \leq 1$ obteniéndose:

$$r \arctan \frac{y}{x} = \frac{r\,y}{x} - \frac{r\,y^3}{3x^3} + \frac{r\,y^5}{5x^5} - \cdots$$

[14] La presente es una traducción libre hecha por nosotros, originalmente los textos hindúes antiguos están escritos en forma de verso y en The Mac Tutor History of Mathematics Archive, escrita en inglés, ya no aparece en verso.

Madhava también conoció la expresión:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

que redescubrió *Newton* y por lo cual en el tema IV del capítulo 9 de Pearce (2002) y The MacTutor History of Mathematics Archive es llamada **Serie de potencias de Madhava-Newton**.

De la misma manera conoció:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

nuevamente una **Serie de potencias de Madhava-Newton**. Esta serie también se conoce como **Serie de MacLaurin**.

Pero *Madhava* también sustituyó el valor $q = \frac{\pi}{4}$ en $q = \frac{\tan q}{1} - \frac{\tan^3 q}{3} + \frac{\tan^5 q}{5} - \frac{\tan^7 q}{7} + \cdots$

y obtuvo la serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

la cual es redescubierta por *Leibniz* (casi 300 años después). Pero es sorprendente que *Madhava* además proporcionó un término de corrección para esta serie que queda expresada como:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n} \pm R_n$$

donde R_n tiene alguna de las tres formas siguientes:

$$R_n = \frac{1}{4n}$$

$$R_n = \frac{n}{4n^2 + 1}$$

$$R_n = \frac{n^2 + 1}{4n^3 + 5n}$$

Además al sustituir $q = \frac{\pi}{6}$ se obtiene la serie:

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 3^2} - \frac{1}{7\times 3^3} + \cdots\right)$$

y utilizó esta expresión para proporcionar el valor $\pi = 3.14159265359$ que consta de 11 lugares decimales correctos. Esta expresión precede a los trabajos de *Wallis* (~1645) sobre productos continuos.

Otra expresión atribuida a *Madhava* es:

$$\pi d \approx 2d + \frac{4d}{2^2 - 1} - \frac{4d}{4^2 - 1} + \cdots \pm \frac{4d}{n^2 - 1}$$

la cual le permitió calcular 13 lugares decimales exactos de π.

También le son atribuidas a *Madhava* las siguientes expresiones que se consideran casos especiales de la Serie de Taylor:

$$\sin(x+h) \cong \sin x + \frac{h}{r}\cos x - \frac{h^2}{2r^2}\sin x$$

$$\cos(x+h) \cong \cos x - \frac{h}{r}\sin x + \frac{h^2}{2r^2}\cos x$$

donde **h** y **r** son cantidades pequeñas. Además se tiene la expresión:

$$\sin(x+h) \cong \sin x + \frac{h}{r}\cos x - \frac{h^2}{2r^2}\sin x + \frac{h^3}{6r^3}\cos x$$

considerada como una aproximación de tercer orden de la serie de Taylor para la función seno, atribuida a *Gregory*.

Parameśvara nació en 1360 y fue alumno de *Madhava* en *Kerala* y escribió varias obras en las que realiza comentarios sobre los trabajos de sus predecesores. En Gupta (1974) y en Plofker (2001) se trata a profundidad el hecho de que la aproximación de segundo orden aparece en la obra *Siddhāntadīpikā* escrita por *Parameśvara* como un súper comentario sobre el comentario, del siglo IX, hecho por *Govindasvāmin* sobre la obra *Mahabhaskariya* de *Bhaskara* I. En Gupta (1974) se ven las citas de las estrofas en sánscrito de la forma de encontrar estas expresiones lo que interpretamos como:[15]

> *El semi-diámetro dividido por el arco residual se vuelve el divisor. Coloque abajo el seno y otra vez el coseno al final del arco opuesto.*

[15] Traducción libre del inglés en Gupta (1974).

Del coseno, sustraiga un medio del cociente obtenido del seno divisor-dividido que es incrementado en un medio del cociente obtenido del coseno por el divisor. Otra vez,

[el cociente] obtenido de esta [la diferencia anterior] al dividir por el divisor se transforma en la verdadera diferencia del seno. En seno al final del arco opuesto incrementado por esta [la verdadera diferencia del seno] se transforma en el seno deseado para el arco dado. (Gupta, 1974)

Lo que equivale a:

$$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{R\cos\alpha - \dfrac{R\sin\alpha + \dfrac{R\cos\alpha}{2D}}{2d}}{D}$$

y sustituyendo $D = \dfrac{R}{\theta}$ se obtiene:

$$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{\theta}{R}R\cos\alpha - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2 \frac{R\sin\alpha}{2} - \left(\frac{\theta}{R}\right)^3 \frac{R\cos\alpha}{4}$$

Nilakantha Somayaji nació en 1444 d.C. y escribió varias obras, entre ellas *Tantrasamgraha* que se considera una fuente importante de las matemáticas que utilizó. En The MacTutor History of Mathematics Archive se menciona que *Nilakantha* no sólo utilizó los descubrimientos de *Madhava* sino que además hizo extensiones y mejoras de los resultados de *Madhava*.

Se dice que *Nilakantha* obtuvo la serie:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

al obtener una expresión aproximada para un arco de circunferencia de un círculo y entonces tomó el límite. Además proporcionó diversas series para $\frac{\pi}{4}$ que convergen más rápidamente que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Jyesthadeva nació en 1500 d.C. en *Kerala* y perteneció a esta importante escuela. Escribió la famosa obra *Yuktibhasa* que es un compendio de las matemáticas de Kerala y es un texto especial porque presenta teoremas con sus demostraciones y contiene también la deducción de las reglas tratadas en la obra.

Yuktibhasa está basada en *Tantrasamgraha* de *Nilakantha* y además contiene la prueba de muchos de los resultados de *Madhava* y *Nilakantha*. Entre esas pruebas se encuentra la explicación de cómo *Madhava* pudo obtener sus expansiones en series (The MacTutor History of Mathematics Archive).

Los resultados producidos por los matemáticos hindúes en expansiones y tratamientos de series infinitas están claramente adelantados en varios siglos a los que más tarde lograrán los matemáticos europeos. Existen datos de que algunos de esos conocimientos llegaron a Europa como el sistema numérico decimal, el álgebra y tablas trigonométricas por citar algunos ejemplos, sin embargo es lamentable ver que muchos de los adelantos en series no tuvieron mayor influencia en el desarrollo de la matemática fuera de la India y algunas regiones.

Pertenecientes al periodo Antiguo, empiezan a aparecer aportaciones de matemáticos europeos, los cuales mostramos por separado de la línea de tiempo que hemos establecido hasta ahora.

Leonardo Pisano Fibonacci realizó diversos viajes y al término de ellos escribió varias obras, una de ellas es *Liber abaci* que apareció en 1202. En la tercera sección aparece la sucesión conocida hoy como sucesión de Fibonacci. En esa misma sección aparecen problemas que involucran sumar series aritméticas y geométricas (The MacTutor History of Mathematics Archive).

Nicole de Oresme en 1360 (Kline, 1972) muestra que la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ diverge al sustituir elementos de la serie por valores menores, es decir:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots>\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

y observa que la serie de la derecha contiene un número infinito de valores ½ y su suma será infinita.[16]

Sin embargo, no puede concluirse que los matemáticos europeos ya distinguían entre series convergentes y divergentes.

[16] Esta es la forma en que en los libros de texto actuales se sigue demostrando la divergencia de la serie armónica.

Las progresiones aritméticas y geométricas son tratadas en esta época con diversas expresiones verbales, sin embargo el alemán *Michael Stifel*, (1487-1567), alrededor del 1543 y 1544 utiliza por primera vez expresiones como, consulte Millar (2006), The MacTutor History of Mathematics Archive y Cajori (1993),

> *"Divisio in Arethmeticis progressionibus respondet extractionibus radicum in progressionibus Geometricis"* (Miller, 2006)

considerada la primera vez que se utilizan los término progresión aritmética y progresión geométrica. También se encuentra la expresión:

> *"Es mag aber die Cossische Progres auch also verzychnet verden*
>
> $\overset{0}{1} \quad \overset{1}{1A} \quad \overset{2}{1AA} \quad \overset{3}{1AAA}$" (Cajori, 1993, p. 144)

expresando las potencias de la **cantidad** o **cosa** (*cossishe*) A con los términos 1AAA en lugar de nuestro A^3 actual.

En 1593, *François Viète* publicó un libro (Kline, (1972); The MacTutor History of Mathematics Archive) en el que aparecen problemas como duplicación del cubo, trisección del triángulo, la construcción de la tangente a la espiral arquimediana, calcula π con 10 decimales exactos y representa π de la forma:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\tfrac{90°}{2}\cos\tfrac{90°}{4}\cos\tfrac{90°}{8}\cdots$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}\cdots$$

que en la literatura europea es la primera vez que aparece π expresado en forma de producto infinito.

II. El nacimiento del Cálculo

Este periodo es eminentemente europeo, sin embargo existen investigaciones que indican que algunos conceptos del cálculo ya eran conocidos y manejados por los matemáticos hindúes[17] como puede verse en The MacTutor History of Mathematics Archive, Pearce (2002) y Joyce (1995).

Pietro Mengoli nació en Bologna, Italia. En 1650 publicó en esa ciudad la obra *Novae quadraturae arithmeticae, seu de aditione fractionum* en la que estudia las series geométricas y establece la divergencia de la serie armónica (The MacTutor History of Mathematics Archive). También investigó la serie armónica alternante y probó que converge a log2. (Esta serie también fue estudiada por *Mercator*, más adelante se verá la cita completa.)

En esa misma obra aparecen otras expresiones, como la suma de recíprocos de los números triangulares:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n}{n+2}$$

calculando un residuo de forma $1-\frac{n}{n+2}$ dijo que podía ser tan pequeño como se deseara por lo que para n muy grande se tendría el valor de la suma como 1.

Probando la igualdad $\frac{1}{1+r}+\frac{1}{2(2+r)}+\frac{1}{3(3+r)}+\cdots=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r}}{r}$ pudo establecer la suma de la serie para los valores de r=1, 2, 3,…, 10.

También mostró que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$ pero no pudo calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

En la obra *Circolo* de 1672 expresó $\frac{\pi}{2}$ como un producto infinito.

Algunos de sus trabajos son considerados como precursores del cálculo integral.

[17] En la página 44 de Mankiewickz (2000) se compara el uso que *Newton* hace de las series infinitas con la forma en que los hindúes usan el "*truti*" que es una unidad infinitesimal usada en la predicción de eclipses.

John Wallis en 1655 publicó su obra más importante *Arithmetica Infinitorum* en la cual aparecen las expresiones, Cajori (1993), Kline (1972) y The MacTutor History of Mathematics Archive,

"1, 6, 12, 18, 24, &c" y " $1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times,\&c$ " (Cajori, 1993, p. 58)

para representar sucesiones y productos infinitos con la expresión: $\&c$

En esa misma obra enuncia[18] la expresión $\frac{\pi}{4}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7,\&c}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8,\&c}$

Algunos historiadores opinan que en 1654, otros en 1655, Lord *William Brouncker* descubrió la expresión $\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{2+}\,\frac{9}{2+}\,\frac{25}{2+}\,\frac{49}{2+}\,\&c$ equivalente a la expresión actual:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}$$

que es el equivalente en fracciones continuas de la expresión encontrada por *Wallis* y publicada en su *Arithmetica Infinitorum*, página 1 de Newton (2002), página 66 de Newman (1976), Kline (1972) y The MacTutor History of Mathematics Archive.

Nicolaus Mercator publicó su obra *Logarithmotechnia* en 1668, de acuerdo a Cajori (1993) y The MacTutor History of Mathematics Archive, en ella describió la forma en que encuentra la serie para el logaritmo natural utilizando la notación:

$$ps=1-a+aa-a^3+a^4,\&c.$$

equivalente a nuestra expresión:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

En ese mismo año de 1668, Lord *Brouncker* calcula la cuadratura de una hipérbola (Newton, 2002), utilizando la expresión:[19]

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{7\times8},\&c\quad in\quad infinitum.$$

[18] En las páginas 11 a 13 de Reiff (1992) puede verse la deducción completa de esta expresión.
[19] Ver la página 58 de Cajori (1993).

En las páginas 14 y 15 de Reiff (1992) puede verse la deducción de esta expresión.

También en ese año[20], *James Gregory* publica *Exercitationes Geometricae* (como puede verse en The MacTutor History of Mathematics Archive y Kline (1972)), en la cual no discute sus métodos pero muestra la serie:

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \cdots$$

en la página 65 de Newman (1976) se encuentra la forma en que *Gregory* encuentra:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

y aparentemente para esa fecha, *Gregory* ya conocía las expansiones para seno, coseno y las series

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots$$

En esta etapa del nacimiento del cálculo se encuentran las aportaciones de *Newton*, sin embargo, debido a su costumbre de no publicar sus resultados, nuestra línea del tiempo se ve alterada ya que a continuación mencionamos algunas de las aportaciones de *Newton* sin que su fecha de publicación sea considerada relevante, pero consideramos estas aportaciones con su debida importancia debido a que años antes de ser publicadas ya eran conocidas por el círculo de matemáticos ingleses.

En 1671 escribió la obra *De methodis serierum et fluxionum* (pero fue publicada hasta 1736) en la cual proporciona una gran cantidad de métodos para calcular y desarrollar series infinitas de diferentes funciones.

En Newton (2001) pueden verse ejemplos de desarrollos en serie infinita utilizando:

- División,

[20] El año anterior, 1667, *Gregory* publicó la obra *Vera circuli et hyperbolae cuadratura* en la que usa por primera vez la expresión "**series convergens**", pero el término "**serie convergente**" lo usó *Gregory* en 1668 y "**serie divergente**" lo usó *N. Bernoulli* en 1713, confrontar lo escrito en la página 65 de Knopp (1921) con lo que aparece en Millar (2006).

- página 58 $\frac{a^2}{b+x}=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}\cdots$
- página 59 $\frac{a^2}{x+b}=\frac{a^2}{x}-\frac{a^2b}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^3}-\frac{a^2b^3}{x^4}\cdots$

- Extracción de raíz,
  - página 61, $\sqrt{a^2+x^2}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}\cdots$
  - página 62, $\sqrt{x^2+a^2}=a+\frac{a^2}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}+\frac{a^6}{16x^5}\cdots$
  - Y otras expresiones más.
- Solución de ecuaciones afectadas.
- Cálculo de fluxiones.
  - página 94, se propone $\dot{y}^3+ax\dot{x}^2\dot{y}+a^2\dot{x}^2\dot{y}-\dot{x}^3x^3-2\dot{x}^3a^3=0$ produce $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\cdots$,
  - página 115, de $\dot{y}=1-3x+y+x^2+xy$ obtiene $y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$,
- Determinación de áreas,
- Integración de expresiones.

En esta obra *Newton* hace mención de la convergencia de estas series que desarrolla, así puede leerse:

> *Finalmente, aunque las variables hasta ahora hemos supuesto indefinidamente pequeñas, sean ahora tomadas tan grandes como se desee, los cocientes serán verdaderos, por reducida que sea su convergencia a la raíz exacta. Esta…pues este tipo de propiedades son comunes tanto para las ecuaciones finitas como infinitas.*
> (Newton, 2001, p. 79)

Pero *Newton* no muestra más que con argumentos que sus series convergen, sin dar demostraciones.

En 1687 *Newton* publica los *Philosophiae naturalis principia mathematica.* En Newton (1687 y 1711) utiliza las expansiones en series infinitas para resolver problemas, como en el Escolio del lema XI de la página 32, en donde resuelve sin hablar de la convergencia de la serie que utiliza.

Newton establece en la proposición XLV, problema XXXL

Orbium qui Sunt Circuli maxime finitimi requiruntur motus ApSidum. (Newton, 1687, p. 137)

Y en el ejemplo 2 de la página 139 muestra su uso mediante una serie infinita convergente, pero no establece ni demuestra por qué converge.

En Newton (1687) vemos que utiliza series infinitas en la página 263 para desarrollar una cuerda al resolver el ejemplo 1 de la Proposición X y Problema III. Este ejemplo trata del movimiento de un proyectil sobre una recta tangente a una semicircunferencia, expresando:

$$DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} \,\&\, c$$

pero aunque vuelve a hacer mención de la convergencia de ellas, no presenta la prueba de la convergencia.

En 1669, *Newton* escribió la obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* como una respuesta a la *Logarithmotechnia* de Mercator. Esta obra circuló ampliamente y se volvió un referente para el tratado de las series. En Babson (1711) aparece la compilación de cuatro obras de *Newton*, *Tractatus de quadrata curvarum*, *Enumeratione linearum tertii ordinis*, *De methodis differentialis* y *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (considerada la joya de la publicación).

En Babson (1711) inicia *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, en ella se tiene:

- página 1, enuncia un método general para calcular la curvatura mediante una serie infinita, no hace mención de la convergencia.
- pagina 5, enuncia un método para encontrar la expansión en serie de una función mediante la división algebraica.
- página 6, muestra un ejemplo para obtener la expansión en serie de una función mediante la extracción de la raíz cuadrada.

- página 7, calcula la serie de $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$ cuya cuadratura permite calcular la longitud de una curva elíptica.
- Calcula series para las longitudes de curvas que usa para la predicción de curvas mecánicas.
- página 23, enuncia y demuestra un teorema para desarrollar en serie la función $\left|P+PQ\right|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c$
- página 31, establece fórmulas para el área de una hipérbola con series infinitas.
- página 39 utiliza series para desarrollar, sumar, operar y sustituir expresiones de cuadraturas.

En algunas de estas aplicaciones de series infinitas, *Newton* habla de series convergentes, pero no da indicación de porqué son convergentes.

Puede verse que *Newton* utilizó ampliamente las series infinitas de funciones como una herramienta valiosa para calcular cuadraturas y poder aplicar los métodos ya conocidos

> *Newton valued power-series expansions very highly, because they provide a means to reduce the analytical formulae of curves to the form in which all terms simply consist of a constant times a power of the variable.*
> (Grattan-Guinness, 1980, p. 54)

pero la convergencia de ellas sólo era argumentada, y eso en las pocas ocasiones en las que se menciona la convergencia de una serie infinita.
Cuando *Leibniz* inició el desarrollo del cálculo, independiente de *Newton*, estableció correspondencia con *Newton* acerca del tratamiento de series infinitas en 1676.

> *Aunque el cálculo de Leibniz se desarrolló a partir del análisis de series, adquirió después una forma diferente: le fascinaron las sumas de series infinitas.*
> (Mankiewickz, 2000, p. 107)

De hecho, *Leibniz* estuvo calculando series al grado de ser considerado por *Newton*:

> *Y a su vez Newton en una carta a Leibniz en 1776 dijo que "el método de Leibniz para obtener series convergentes es muy elegante, y sería suficiente como para revelar el genio de su autor, incluso si no hubiera escrito nada más".*
> (Mankiewickz, 2000, p. 110)

Al parecer *Newton* y *Leibniz* fueron los primeros matemáticos europeos en utilizar sistemáticamente las series infinitas, aunque de alguna manera lograron sortear el uso de series divergentes.[21]

En 1673 *Leibniz* había calculado las series infinitas de seno, coseno y arcotangente.

Con el triángulo de Pascal hace un arreglo de fracciones y obtiene diversas series, los números de las orillas son $\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \cdots$ y los números interiores se forma a partir de estos mediante diferencias consecutivas $\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \cdots$

En las páginas 46 y 47 de Reiff (1992) se encuentra la forma en que *Leibniz* encuentra la serie $rt - \frac{t^3}{3r} + \frac{t^5}{5r^3} - \frac{t^7}{7r^5} + \cdots$ buscando el área de un sector de un círculo, y para el caso especial de r = 1 y t = 1 se obtiene la serie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ aunque con diferente notación para ese año de 1673. *Leibniz* enfatiza que t no puede ser mayor que r.

También puede verse en la página 48 de Reiff (1992) la forma en que obtiene la serie $1 + x = 1 + \frac{1}{1} y + \frac{1}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \cdots$ a partir de diferenciar la ecuación $\int \frac{a \, dx}{a + x} = y$ y en la misma página se encuentra el primer criterio de convergencia para el caso de la serie alternante citado de una carta a *Johan Bernoulli*.

[21] En (Hardy, 1949, p. 1) se afirma que *Leibniz* llego a "jugar" con algunas series divergentes en forma ocasional.

Leibniz trató de explicar algunas paradojas que empezaron a surgir con el uso de series, por ejemplo, explicó que $1-1+1-1+1-1+\cdots$ tenía como límite ½ utilizando argumentos probabilísticos.

También utilizó la expresión $1+x+x^2+x^3+x^4\cdots=\frac{1}{1-x}$ (Gardiner, 2002, p. 82) para dar otro argumento a favor del valor de $1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$ y de la serie

$$1+2+4+8+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1$$

La primera de estas series ya había sido discutida con los hermanos *Bernoulli*, *Jacobo* y *Johan*.

Luigi Guido Grandi fue un matemático italiano cuya importancia radica en un trabajo introductorio del cálculo de *Leibniz* a Italia en 1703. Por otra parte, formuló una desafortunada afirmación en la que decía haber demostrado la creación del mundo a partir de la nada al operar la serie:

$$1-1+1-1+1-1\quad+\cdots=\frac{1}{2}$$

$$0\quad+\quad 0\quad+\quad 0\quad+\cdots=\frac{1}{2}$$

y establecer la igualdad **0 = 1**. Esta afirmación le causó varias discusiones con *Leibniz*, *Wolff* y *Varignon*.[22]

Para 1689, *Jacob Bernoulli* ya había hecho contribuciones en series infinitas pero entre 1689 y 1704 publica cinco tratados sobre series (The MacTutor History of Mathematics Archive; Reiff, 1992)

- *Proposiciones Arithmeticae de Seriebus infinitis earumque summa finita.* (1689)
- *Propositionum arithmeticarum de Seriebus infinitis earumque summa finita pars altera.*(1692)
- *Propositionum de Seriebus infinitis pars tertia, tractans de earum usu in quadraturis Spatiorum et rectificationibus Curvarum.* (1696)

[22] *Christian Wolff* (1679-1754) filósofo, matemático y científico conocido por ser parte del movimiento filosófico del Racionalismo. *Pierre Varignon* (1654-1722) sacerdote y profesor de matemáticas. Trabajó desarrollando la dinámica analítica aplicando el cálculo de *Leibniz* a la mecánica inercial de *Newton*.

- *Proposit. de Ser. inf. earumque usu in quadraturis Spatiorum et rectificationibus Curvarum Pars Quarta.* (1698)
- *Parsquinta.* (1704)

que forman el primer compendio sobre series infinitas que apareció publicado, aún antes que los compendios de *Newton* o *Leibniz*.

En los dos primeros tratados muestra varios resultados importantes, como la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ y cree ser el primero en mostrarlo[23], pero *Oresme* ya lo había hecho casi 300 años antes.

También proporciona la suma de otras series[24] pero falla al intentar calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ alrededor de 1700, y escribe:

> *If somebody should succeed in finding what till now withstood our efforts and communicate it to us, we shall be much obliged to him.*[25]
> (Gardiner, 2002, p. 248)

En ese mismo lapso de tiempo, *Johan Bernoulli* había estado trabajando con series[26]. Para 1694, había utilizado la integración por partes para investigar las series infinitas. *Johan* también realizó la suma de varias series y obtuvo teoremas para la suma de funciones trigonométricas y funciones hiperbólicas mediante el uso de las ecuaciones diferenciales que satisfacían esas funciones.

En la página 59 de Reiff (1992) se puede ver un ejemplo donde toma a n como función de z y escribe:

[23] En las páginas 53 a 55 de Reiff (1992) se encuentra la deducción de esta divergencia, que es más general que la proporcionada por *Oresme*.
[24] Ver la página 55 de Reiff (1992)
[25] Si alguien tuviera éxito en encontrar lo que hasta ahora se ha resistido a nuestros esfuerzos y nos lo comunicara, estaremos en gran deuda con él.
[26] The MacTutor History of Mathematics Archive.

$$ndz = ndz + zdn - zdn - \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2\, dz} + \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2\, dz} + \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dz^2} - \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dz^2} + \cdots$$

de donde obtiene por integración:

$$\int_0^s ndz = nz - \frac{z^2}{1 \cdot 2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^2 n}{dz^2} - \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{d^3 n}{dz^3} + - + \cdots$$

Esta expresión mantiene reminiscencias de la serie de Taylor.

De hecho si tomamos $n = \frac{a}{a+z}$ y sustituimos en la serie anterior obtenemos:

$$a \ln(a+z) = \frac{az}{a+z} + \frac{a z^2}{2(a+z)^2} + \frac{a z^3}{3(a+z)^3} + \frac{a z^4}{4(a+z)^4} + \cdots$$

Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital publicó en 1694 su libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* que se considera el primer libro de texto de cálculo diferencial, en la introducción establece su gratitud a *Leibniz*, *Jacob* y *Johan Bernoulli*. En este libro *L'Hôpital* utiliza series infinitas, lo que puede verse en la página 42 (L'Hôpital, 1696).

James Stirling y *Abraham de Moivre* trabajaron en series infinitas, consulte la página 70 de Reiff (1992), para 1698 *de Moivre* ya había publicado un artículo sobre el binomio de Newton para el caso en que se requiere calcular un multinomio infinito elevado a una potencia cualquiera:

$$\begin{aligned}\left(az + bz^2 + cz^3 + \cdots\right)^m = a^m z^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b\, z^{m+1} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2\, z^{m+2}, \\ + \quad \frac{m-1}{1} a\, c^{m-1}\, z^{m+2}, \\ + \cdots\end{aligned}$$

y en ese mismo año publicó también un método para extraer la raíz de una ecuación infinita.[27]

En 1706 *William Jones* publicó su obra titulada *Synopsis palmariorum mathesios*, un libro basado en sus notas de clase que incluía cálculo diferencial y series infinitas. Entre estas series presenta la de fórmula de *John Machin*:

[27] Ver método en la página 72 de Reiff (1992)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{239}\right) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 239^{2n+1}}$$

aunque no dijo cómo es que Machin la había encontrado y ni cómo probarla.

Con esta fórmula *Machin* logró calcular 100 lugares decimales correctos de π. Esta fórmula tuvo tal impacto que *de Moivre* le escribió a *Johan Bernoulli* pidiéndole que *Jakob Herman*[28] la analizara. *Herman* pudo dar una demostración de que esta serie proporciona el valor de π.

III. Periodo del Desarrollo

En este período consideramos los avances y aplicaciones que logran *Euler*, sus contemporáneos y sus sucesores. Este es un período de una febril actividad en el ataque y resolución de problemas mecánicos y físicos.

Durante mucho tiempo se trabaja sin reparar mucho en la convergencia y divergencia de las series, sin embargo ya existen inquietudes acerca de la pertinencia o no de utilizar ciertos tipos de series.

Este período de la historia de las series infinitas está fuertemente influenciado por los trabajos de *Euler*, con este matemático se alcanza el punto culminante de la aplicación y suma de series numéricas infinitas. Cabe mencionar que en general no se hace distinción alguna entre series infinitas de funciones y series infinitas numéricas.

[28] Jakob Herman (1678,1733) matemático nacido en Basilea, Suiza.

Nicolaus (I) Bernoulli fue sobrino de *Jacob* y *Johann Bernoulli* y estudió matemáticas con ellos. Mantuvo correspondencia con *Leibniz* de 1712 a 1716.

En sus cartas a *Leibniz* discute preguntas sobre convergencia y muestra que $(1+x)^n$ diverge para x >0.

Brook Taylor y *John Machin* se conocieron en el café *Child's Coffee House* que era el lugar de reunión de los matemáticos de esa época (The MacTutor History of Mathematics Archive). Se sabe que *Machin* fue tutor privado de *Taylor* en matemáticas alrededor de 1701 y mantuvo correspondencia con él durante muchos años. En ese café, *Machin* le explicó a Taylor cómo utilizar las series de *Newton* para resolver los problemas de *Kepler* y también cómo utilizar el método de *Halley* [29] para encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales. El 26 de julio de 1712, *Taylor* escribió una carta dirigida a *Machin* comunicándole la fórmula que ahora se conoce como Serie de Taylor.

En 1715 *Taylor* publicó su obra *Methodus incrementorum directa et inversa* en la que presenta dos versiones de la expansión en serie infinita para una función. Una versión es resultado de la plática con *Machin*, la segunda versión es un método para expandir las soluciones de ecuaciones de fluxiones en series infinitas.

La forma en que Reiff (1992) describe esta deducción aparece en la página 81, sean **z** y **x** son dos variables, si Δz es el incremento de **z**, y además $n\Delta z = v,\quad v - \Delta z = v',\quad v' - \Delta z = z'',\quad v'' - \Delta z = z'''$ entonces cuando **z** crece **x** también crece de acuerdo a $x + \Delta x \cdot \frac{v}{1\cdot \Delta z} + \Delta^2 x \cdot \frac{v\cdot v'}{1\cdot 2\cdot \Delta z^2} + \Delta^3 x \cdot \frac{v\cdot v'\cdot v''}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \Delta z^3} + \cdots$.

En donde se considera que **z** crece con Δz, por lo que también crecen **x** con Δx, Δx con $\Delta^2 x$, $\Delta^2 x$ con $\Delta^3 x$, etc.

De donde se tiene también x, $x + \Delta x$, de Δx, $\Delta x + \Delta^2 x$, etc.

Además tenemos para x, cuando z crece con $2\Delta z$, $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$,

Cuando z crece con $3\Delta z$, $x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$,

[29] *Edmond Halley* (1656-1742) astrónomo y matemático, fue el primero en dar el período del cometa conocido ahora como Cometa Halley.

Y en general para $n\Delta z$, tenemos que x crece $x+n\Delta x+\frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}\Delta^2 x+\frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 x+\cdots$

Sin embargo, ahora tenemos $n=\frac{n\Delta z}{\Delta z}=\frac{v}{\Delta z}$, $\frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}=\frac{v\cdot v'}{1\cdot 2\Delta z^2}$, $\frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{v\cdot v'\cdot v''}{1\cdot 2\cdot 3\Delta z^3}$,

etc. Lo cual sustituyendo da:

$$x(z+v)=x+\Delta x\cdot\frac{v}{1\cdot\Delta z}+\Delta^2 x\cdot\frac{v\cdot v'}{1\cdot 2\cdot\Delta z^2}+\Delta^3 x\cdot\frac{v\cdot v'\cdot v''}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\Delta z^3}+\cdots$$

si ahora hacemos que Δz se haga infinitamente pequeño tendremos que n se hará infinitamente grande, con lo que $v=v'=v''=\ldots$ con lo que las diferencias se transforman en diferenciales (fluxiones) y se tiene:

$$x(z+v)=x+v\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dz^3}+\cdots$$

que se conoce como *Serie de Taylor*.

Pero recordemos que esta serie ya era conocida en diferentes formas por otros matemáticos como *Gregory, Newton, Leibniz, Johan Bernoulli, de Moivre* y algunos matemáticos hindúes ya mencionados.

Para 1730 *Stirling* publica *Methodus Differentialis* el cual es un tratado sobre series infinitas, en el que además contiene fórmulas de suma, de interpolación y de cuadraturas.

Una de las mayores contribuciones de *Stirling* es el haber trabajado en métodos que permitían acelerar la velocidad de convergencia de las series numéricas infinitas (The MacTutor History of Mathematics Archive). En su obra *Methodus Differentialis* proporciona el ejemplo de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$ para la cual dice que es necesario sumar *mil millones de términos* para lograr nueve lugares decimales exactos.

Presenta también el ejemplo de la serie de *Leibniz* $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$.

Adicionalmente proporciona varios ejemplos más de aceleración de convergencia, además proporciona un teorema para la convergencia de un producto infinito.

Establece la serie recursiva $T_{n+1} = nT_n, \quad con \quad T_1 = 1$ y calcula $T_{3/2}$, que en notación actual es $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, y calcula diez lugares decimales exactos. Esta obra contiene además otros trabajos sobre la función Gama y la función Hipergeométrica.

En esta misma obra trata algunos de los métodos que *de Moivre* proporciona en su obra *Miscellanea Analytica*, también publicada en 1730. En ese tiempo existe un gran intercambio de correspondencia entre *Strling* y *de Moivre*.

Es el primero en proporcionar un ejemplo de serie divergente asintótica y que es:

$$\log x! = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\log\left(x+\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{\ln 10}\left(x+\tfrac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{\ln 10}}{2\cdot 12\left(x+\frac{1}{2}\right)} + \frac{7\frac{1}{\ln 10}}{8\cdot 360\left(x+\frac{1}{2}\right)^3} - \cdots$$

(Ferraro, 2007)

En 1742 *Collin MacLaurin* publicó su obra *Treatise of Fluxions* que fue la primera exposición sistemática de los métodos que *Newton* había desarrollado pero que no había publicado (The MacTutor History of Mathematics Archive).

En esta obra *MacLaurin* presenta el desarrollo de la serie que lleva su nombre y que es un caso especial de la *Serie de Taylor*.

Para encontrar su serie, consulte la página 83 de Reiff (1992), *MacLaurin* considera una función y la expresa en términos de una serie infinita de potencias de z, con lo que obtiene $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$ con lo que lo único que le falta es encontrar el valor de A, B, C, D,… pero haciendo:

$$E = y, \quad (z=0)\,;\; E' = \frac{dy}{dx}, \quad (z=0)\,;\; E'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (z=0)\,;\ \text{etc.}$$

se tiene:

$$A = E, \quad B = E', \quad C = \frac{E''}{1\cdot 2}, \quad D = \frac{E'''}{1\cdot 2\cdot 3}, \ \text{etc.}$$

con lo que obtiene la serie:

$$y = E + \frac{E' \cdot z}{1} + \frac{E'' \cdot z^2}{1 \cdot 2} + \frac{E''' \cdot z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

que rápidamente utilizó para calcular la expansión en serie infinita de e^x, $\cos x$, $\sin x$ y otras funciones más.

Christian Goldbach fue un matemático que trabajó principalmente en teoría de números y es famosa la *Conjetura de Goldbach* por él establecida. Desde 1729 y hasta 1764 mantuvo un constante intercambio de cartas con *Euler*. En total fueron 196 cartas, de las que 102 fueron escritas por *Euler*.

Fue en 83 cartas en las que *Goldbach* y *Euler* intercambiaron comentarios acerca de las series infinitas. Estos comentarios incluyen métodos para sumar y analizar series. Por ejemplo, el 1 de diciembre de 1729 *Goldbach* escribe comentando sobre el término general de una serie con términos que son productos y calcula el producto infinito con valor 6.

El 18 de noviembre de 1731, *Goldbach* escribe sobre $\int dx \frac{(a-x)(b-x)etc}{(a+x)(\beta+x)etc}$

El 11 de octubre de 1738 escribe sobre la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{30} - 0 + \frac{1}{42} + 0 \ etc.$

El 7 de noviembre de 1739 escribe sobre la serie:

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} -$$
$$\frac{1}{12^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{14^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{16^n} - \frac{1}{17^n} - \frac{1}{18^n} - \frac{1}{19^n} - \frac{1}{20^n} + \frac{1}{21^n} + etc$$

El 24 de noviembre de 1739 escribe sobre las series:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + etc. = \alpha \pi^n$$
$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + etc. = \beta \pi^{2n}$$
$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{11^n} + etc. = M$$

El 9 de diciembre de 1739 escribe los resultados:

$$\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+\frac{5}{1...6}+\frac{6}{1...7}+\frac{7}{1...8}+\frac{8}{1...9}+etc.=\frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{1.2}-\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{1.2.3.4}-\frac{6}{1...5}+\frac{7}{1...6}-\frac{8}{1...7}+\frac{9}{1...8}-\frac{10}{1...9}+etc.=1$$

El 7 de junio de 1742 escribe sobre la serie $\frac{x}{1.2^2}+\frac{x^2}{2.2^4}+\frac{x^3}{3.2^6}+\frac{x^4}{4.2^8}+etc.$

El 30 de julio de 1742 escribe sobre las series:

$$\frac{1}{a+\alpha x}+\frac{1}{b+\beta x}+\frac{1}{c+\gamma x}+etc.$$
$$\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+etc.$$

El 6 de diciembre de 1742 trata sobre las series:

$$s=1+\frac{a}{n+1}+\frac{a^2}{2n+1}+\frac{a^3}{3n+1}+etc.$$
$$\frac{ss}{2}=\frac{1}{2}+\frac{a}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{a^2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)+etc.$$

El 5 de febrero de 1743 continúa trabajando con las series de la carta anterior y sustituye valores para obtener:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+etc.=\frac{\pi^2}{6} \qquad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+etc.=\frac{\pi^4}{90}$$

y otras más.

El 12 de febrero de 1743 continúa con cálculos para $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+etc.$

En las restantes cartas de fechas 23 de marzo, 4 de mayo, 22 de junio, 30 de julio, 28 de septiembre y 1° de diciembre de 1743; 1° de octubre de 1744, 25 de septiembre y 9 de noviembre de 1745; 3 de mayo, 12 de mayo, 5 de julio, 27 de agosto y 25 de octubre de 1746; 15 de abril de 1747; 27 de enero de 1748, 16 de octubre de 1751, julio de 1752, 7 de octubre y 18 de noviembre de 1752; 25 de junio de 1753 y 9 de diciembre de 1755; comunica y comenta resultados sobre series infinitas de funciones y series numéricas infinitas.

En todas estas cartas discuten la forma de obtener series infinitas además de cómo realizar la suma de varias de ellas. En algunas de esas cartas se discuten trabajos de otros matemáticos.

Johan (I) Bernoulli mantuvo correspondencia con *Euler* de 1727 a 1746, en total 38 cartas. De ésas, cinco incluyen comentarios sobre series infinitas.

El 2 de abril de 1737 escribe sobre las series:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+etc.=\frac{c^2}{6}$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+etc.=\frac{c^4}{90}$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+etc.=\frac{c^6}{940}$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+etc.$$

y trata de las ecuaciones:

$$e-x+\frac{x^3}{2.3}-\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^7}{2.3...7.}-etc=0$$
$$a-t+\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{5}t^5+\tfrac{1}{7}t^7-etc=0$$

El 9 de diciembre de 1739 escribe sobre las series:

$$\frac{1}{4-1}+\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{25-1}+etc.=\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{16-9}+\frac{1}{25-9}+\frac{1}{36-9}+\frac{1}{49-9}+etc.=\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+etc=\frac{49}{120}$$

y analiza la ecuación:

$$y+\frac{ady}{dx}+\frac{b\,ddy}{dx^2}+\frac{c\,d^3y}{dx^3}+\frac{d\,d^4y}{dx^4}+etc=0$$

El 16 de abril de 1740 hace cálculos con las series que genera mediante $\frac{1}{1\pm n}+\frac{1}{4\pm n}+\frac{1}{9\pm n}+etc$ y hace sumas parciales para el caso de la serie armónica:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{x}erit = x-\frac{x.x-1}{2.2}+\frac{x.x-1.x-2}{2.3.3}-\frac{x.x-1.x-2.x-3}{2.3.4.4}+\frac{x.x-1.x-2.x-3.x-4}{2.3.4.5.5}\cdots\pm\frac{1}{x}$$

El 31 de agosto de 1740 estudia la serie $1\cdot\alpha\pi^2-n\beta\pi^4+n^2\gamma\pi^6-n^3\delta\pi^8+n^4\varepsilon\pi^{10}-etc.$ y calcula la serie $x^x=1+xlx+\frac{x^2lx^2}{2}+\frac{x^3lx^3}{2.3}+\frac{x^4lx^4}{2.3.4}+etc.$ y hace cálculos con ella.

El 28 de octubre de 1741 continúa comentando sobre la serie:

$$y+\frac{ady}{dx}+\frac{b\,ddy}{dx^2}+\frac{c\,d^3y}{dx^3}+\frac{d\,d^4y}{dx^4}+etc=0$$

Daniel Bernoulli mantuvo correspondencia con *Euler* de 1726 a 1768, en total fueron 100 cartas, de las cuales 16 contienen comentarios sobre series.

El 18 de diciembre de 1734 escribe sobre el problema de encontrar el valor de "x" para la expresión $\frac{a+bx+cx^2+\cdots}{d}$ donde a, b, c, d,… son números enteros.

El 12 de septiembre de 1736 escribe a *Euler* pidiéndole la prueba de las series:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}etc.=\frac{pp}{6}\qquad y\qquad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}etc.=\frac{p^4}{90}.$$

El 18 de mayo de 1737 le escribe a *Euler* indicándole que mantiene dudas sobre un teorema relativo a series infinitas dobles.

El 29 de marzo de 1738 le comenta a *Euler* lo brillante de su solución a la suma de los cuadrados de los recíprocos de los naturales.

En las cartas de fechas 9 de agosto de 1738; 28 de enero y 20 de septiembre de 1741; 7 de marzo, 14 de abril, 28 de julio y 12 de diciembre de 1742; 9 de febrero y 23 de abril de 1743, 29 de agosto de 1744, una carta sin fecha de 1745 y una carta sin fecha de entre 1754 a 1766 contienen diversos comentarios a resultados de *Euler* y otros obtenidos por *Daniel*.

Por ejemplo, en la última carta aborda las curvas que satisfacen la ecuación:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + etc$$

y hace observaciones acerca de la ecuación indefinida $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 etc.$

En 1753 presenta una solución para la ecuación diferencial parcial $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (ecuación de la cuerda vibrante en dos dimensiones) que consiste en una serie infinita de senos y cosenos, Gardiner (2002).

Nicoulas (I) Bernoulli mantuvo correspondencia con Euler de 1742 a 1745. Sólo fueron 11 cartas de las cuales hay asuntos relativos a series infinitas en 4 de ellas. Algunos comentarios de estas cartas son de crítica acerca del uso indiscriminado de series divergentes que hace Euler en sus trabajos (The MacTutor History of Mathematics Archive).

El 13 de julio de 1742 escribe acerca de la serie de los recíprocos de los cuadrados, productos infinitos, y utiliza expresiones como:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{3-z} - etc$$

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + etc$$

$$\frac{\pi\pi}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{zz} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{1}{(2-z)^2} + \frac{1}{(2+z)^2} + \frac{1}{(3-z)^2} + etc\,.$$

El 24 de octubre de 1742 escribe sobre:

$$s - \frac{s^2}{6} + \frac{s^5}{120} - etc. = s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right)etc.$$

$$(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)etc$$

$$1 + 1n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^6 + 11n^6 + 15n^7 + 22n^8 + 30n^9 + 42n^{10} + 56n^{11} + etc.$$

El 6 de abril de 1743 trabaja con la expresión $\frac{1}{1-x}$ que expande y obtiene la serie $1+x+xx+x^3+\ldots+x^\infty$ que expresa como $1+x+xx+x^3+\ldots+x^\infty+\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$.

El 29 de noviembre de 1743 escribe acerca de las series $1-3+5-7+etc.$ y $1-2+3-4+etc.$ y conjetura sobre el valor de sumas como $=-\infty.-1^\infty$ o como = 0.

Aparte considera $1+2+4+8+16+etc$ para la que obtiene $\frac{1}{1-2}=-1$ y otras series más para las que encuentra su suma y discute la pertinencia de estos resultados.

Finalmente trata las ecuaciones de la forma $x^{2^n}+px^{2^n-1}+qx^{2^n-2}+etc.=0$.

Leonhard Euler nació en Basilea, Suiza, y es el matemático más prolífico que ha existido. Entre 1726 y 1783 escribió casi mil cartas y recibió casi dos mil más, de matemáticos, físicos, filósofos y hasta reyes (en total 272 personas). Tan sólo entre 1729 y 1749 publicó 69 artículos y libros que incluían la aplicación de las series infinitas; esto sin considerar los trabajos publicados en el período de 1750 a 1789, ni las cartas enviadas a diversos matemáticos como *Goldbach,* los *Bernoulli, Lagrange, Claiaut*, etc.

Su primer artículo publicado sobre series data de 1729 (presentado en 1730) *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequente* (*Sobre progresiones trascendentales, es decir, aquellas cuyos términos generales no pueden ser dados en forma algebraica*). En este trabajo inicia analizando la serie $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+etc$ y la progresión $\frac{1.2^n}{1+n}\frac{2.^{1-n}3^n}{2+n}\frac{3.^{1-n}4^n}{3+n}\frac{4.^{1-n}5^n}{4+n}etc.$ y hace cálculos con integrales como en $\int x^e dx(1-x)^n=\frac{x^{e+1}}{e+1}-\frac{n.x^{e+2}}{1.(e+2)}+\frac{n.n-1..x^{e+1}}{1.2.(e+3)}-\frac{n.n-1.n-2.x^{e+4}}{1.2.3.(e+4)}etc.$

En 1731 escribió su segundo artículo sobre series titulado *De summatione innumerabilium progresionum* (*La suma de una progresión innumerable*) en el que hace uso de $\int\frac{1-x^n}{1-x}dx$ para

encontrar sumas como $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+etc.$ y también usa $\int -y^{\alpha-2}dy\,l(1-y)=\frac{y^{\alpha}}{\alpha}+\frac{y^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}+\frac{y^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)}etc.$[30] para calcular expresiones como $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}etc.$ y define la constante γ [31] como el límite de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-ln$ también escribe igualdades como:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}=\frac{y+z}{1}+\frac{y^2+z^2}{4}+\frac{y^3+z^3}{9}+\frac{y^4+z4}{16}+etc.+ly\,lz$$

En 1732 escribe el artículo *Methodus generalis summandi progressiones* (*Método general para sumar series*) utiliza sustituciones como:

$$s=\frac{(a+b)x}{(\alpha+\beta)}+\frac{(a+b)(2a+b)}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}x^2+---+\frac{(a+b)----(na+b)}{(\alpha+\beta)----(n\alpha+\beta)}x^n$$

para calcular integrales como $\int\frac{x^{\frac{b-a}{a}}\,s\,dx}{a}=\frac{x^{\frac{b+a}{a}}}{\alpha+\beta}+----+\frac{(a+b)----(a(n-1)+b)}{(\alpha+\beta)----(\alpha\,n+\beta)}x^{\frac{b}{a}+n}$

en las que luego hace sustituciones de valores para encontrar sumas de series infinitas. Este trabajo conduce a los *Números de Bernoulli*.

En 1734 escribió el artículo *De progressionibus harminicis observationes* (*Sobre progresiones aritméticas*) trabaja con expresiones como $\frac{c}{a},\frac{c}{a+b},\frac{c}{a+2b},\frac{c}{a+3b},etc.$ y realiza sumas de diversos logaritmos, por ejemplo:

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}etc$$

$$l3=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{2}{12}etc$$

$$l4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}etc$$

y otras más. Además calcula el valor de γ con 6 decimales γ=0.577218.

[30] *Euler* utiliza *l* para indicar *ln* (logaritmo natural).
[31] *Euler* utiliza la letra C y Mascheroni es el primero en usar γ en 1790.

En 1735 escribe uno de los artículos más celebrados, *De summis serierum reciprocarum* (*Sobre las sumas de series de recíprocos*) en el que establece las sumas:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}etc=\frac{p^2}{6}$$ [32]

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+etc=\frac{p^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+etc=\frac{p^6}{945}$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+etc=\frac{p^8}{9450}$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+etc=\frac{p^{10}}{93555}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+etc=\frac{691p^{12}}{638512875}$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-etc=\frac{p^3}{32}$$

y otras sumas más. Además establece igualdades como:

$$1-\frac{s^2}{1.2.3}+\frac{s^4}{1.2.3.4.5}-\frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7}+etc=\left(1-\frac{s^2}{p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{14p^2}\right)etc.$$

y finalmente establece varias igualdades para p (es decir π):

$$p=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc\right)$$

$$p=2\left(\frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc}\right)$$

$$p=4\left(\frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+etc}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc}\right)$$

y otras 4 sumas más.

[32] En este artículo *Euler* utiliza la letra **p** en lugar de π, que más tarde él sería el primero en utilizar.

En 1736 *Euler* le escribió a *Stirling* diciéndole de sus resultados sobre sumas de recíprocos de potencias, la serie armónica y la constante C (es decir γ) y otros resultados como el ahora conocido como Fórmula de suma de *Euler-MacLaurin*.

En 1741 vuelve a escribir el resultado $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}etc=\frac{p^2}{6}$ en el artículo *Demonstration de la somme de cette suite 1+1/4+1/9+1/16+etc.* (*Demostración de la suma de la serie 1+1/4+1/9+1/16+etc.*) pero ahora utiliza una integral de arcsen x y considera la ecuación diferencial $\left(1-x^2\right)y''-x\,y'-1=0$.

En 1742 publica *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dessertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime divreso derivantur* (*Sobre la suma de series de recíprocos de potencias de números naturales de otro trabajo, en el cual las sumas son obtenidas principalmente de otra fuente*) en el que expresa un producto infinito para $\frac{\sin x}{x}$ y fórmulas para $\sin x=\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}$ y $\cos x=\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2}$ [33]. Presenta también series infinitas para $\frac{\pi}{\sin \pi s}$ y $\pi\cot\pi s$ y calcula $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+etc.=\frac{\pi^2}{8}$ y también $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+etc.=\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$

En una carta del 30 de junio de 1742 a *Goldbach* escribe:

$$\frac{\pi\cos\frac{m}{n}\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+etc.$$

y sustituye $\frac{m}{n}=x$ con lo que obtiene la serie:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3-x}+etc.$$

y haciendo $x=\frac{1}{4}$ tiene $\pi x=45°,\quad \cos\pi x=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad y\quad \sin\pi x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ para obtener:

$\pi=\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-etc.$ y hace muchos cálculos más.

[33] Las cuales le comenta a *Goldbach* en dos cartas el 9 de diciembre de 1741 y el 8 de mayo de 1742.

En 1746 *Euler* escribió *De seriebus divergentibus* (*Sobre series divergentes*) en el cual clasifica las series divergentes en cuatro clases (él las llama especies) de acuerdo a su forma:

I. $1+1+1+1+1+1+etc.$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+etc.$$

II. $1-1+1-1+1-1+etc.$

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+etc.$$

III. $1+2+3+4+5+6+etc.$

$1+2+4+8+16+32+etc.$

IV. $1-2+3-4+5-6+etc.$

$1-2+4-8+16-32+etc.$

En este artículo *Euler* dice que las series convergentes están definidas, tienen términos que decrecen continuamente y se desvanecen. Pero sobre las series divergentes dice:

> *De summis huiusmodi serierum divergentium magnus est dissensus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmant, eas in una summa comprehendi posse.*

que podemos interpretar como "*La suma de una serie divergente crea disenso entre los matemáticos, mientras unos la niegan, otros la afirman que la posee (suma final*[34]*)*"

Además hace comentarios acerca de la postura de *Leibniz* acerca de la serie $1-1+1-1+1-1+1-1+etc.$ a la que *Leibniz* le asignó ½ como suma final, y en general de los tipos de series divergentes que definió.

[34] "suma final" es inclusión nuestra. Traducción libre.

En 1747 *Euler* ataca el problema de los tres cuerpos, como se ve en la página 140 de Mankiewickz (2000), consiguiendo un nuevo método que le permite calcular la distancia entre planetas en un instante cualquiera mediante la utilización de series trigonométricas.

En un artículo de 1749 *De serierum determinatione seu nova methodus invendi terminos generales serierum* (*Sobre la determinación de series, o un nuevo método para encontrar los términos generales de series*) intenta determinar la forma de f(x) dados f(1), f(2), f(3), etc. También obtiene expresiones en serie de Taylor como:

$$y = a + \alpha \sin .2\pi x + \beta \sin .4\pi x + \gamma \sin .6\pi x + \delta \sin .8\pi x \\ + \mathrm{A} \cos .2\pi x + \mathrm{B} \cos .4\pi x + C \cos .6\pi x + D \cos .8\pi x \quad etc.$$

En *Subsidium calculi sinuum* de 1754 y 1760 comunica el resultado[35]

$\left(\sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi\right)^m = \sin m\varphi + \sqrt{-1} \cos m\varphi$ que para **m** negativo genera las series

$$\frac{1}{2 \sin \varphi} = \sin \varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + ...$$

$$\frac{1}{4 \sin^2 \varphi} = -\cos 2\varphi - 2 \cos 4\varphi - 3 \cos 6\varphi - ...$$

de las cuales después de transformaciones obtiene

$$\frac{\cos \varphi - a}{1 + a^2 - 2a \cos \varphi} = \sin \varphi + a \sin 2\varphi + \cdots a^{n-1} \sin n\varphi$$

$$\frac{\sin \varphi}{1 + a^2 - 2a \cos \varphi} = \cos \varphi + a \cos 2\varphi + \cdots a^{n-1} \cos n\varphi$$

de donde obtiene para $n = \infty$ la fórmula $\cos n\varphi + i \sin \varphi = e^{in\varphi}$

Realizar un resumen de todas las contribuciones que hizo *Euler* a las series infinitas es difícil de lograr, como muestra tenemos que aún hasta 1775 continúa publicando artículos en los que su principal propósito es proporcionar la suma de una serie específica.

[35] Aparece en la página 127 de Reiff (1992).

En *De summa seriei ex numeris primis formatae 1/3-1/5+1/7+1/11-1/13-1/17+1/19+1/23-1/29+1/31+etc. Ubi numeri primi formae 4n-1 habent signum positivum, formae autem 4n+1 signum negativum*. (*Sobre la suma de series de números de la forma 1/3-1/5+1/7+1/11-1/13-1/17+1/19+1/23-1/29+1/31+etc. donde los números primos de la forma 4n-1 tienen signo positivo, los de forma 4n+1 signo negativo*) establece los resultados siguientes

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+etc.=0{,}3349812$$

$$\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{11^3}-\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}+\frac{1}{19^3}+etc.=0{,}032252$$

$$\frac{1}{3^5}-\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{11^5}-\frac{1}{13^5}-\frac{1}{17^5}+\frac{1}{19^5}+etc.=0{,}0038602$$

$$\frac{1}{3^7}-\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{11^7}-\frac{1}{13^7}-\frac{1}{17^7}+\frac{1}{19^7}+etc.=0{,}0004455$$

$$\frac{1}{3^9}-\frac{1}{5^9}+\frac{1}{7^9}+\frac{1}{11^9}-\frac{1}{13^9}-\frac{1}{17^9}+\frac{1}{19^9}+etc.=0{,}0000501$$

$$\frac{1}{3^{11}}-\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{7^{11}}+\frac{1}{11^{11}}-\frac{1}{13^{11}}-\frac{1}{17^{11}}+\frac{1}{19^{11}}+etc.=0{,}0000056$$

$$\frac{1}{3^{13}}-\frac{1}{5^{13}}+\frac{1}{7^{13}}+\frac{1}{11^{13}}-\frac{1}{13^{13}}-\frac{1}{17^{13}}+\frac{1}{19^{13}}+etc.=0{,}0000005$$

Maria Gaëtana Agnesi publicó en 1748 el libro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* que es considerado el mejor y más completo tratado de cálculo diferencial de su época ya que uniformiza métodos y presenta ejemplos que clarifican las ideas (Agnesi, 1748;The MacTutor History of Mathematics Archive).

Joseph-Louis Lagrange (*Giuseppe Lodovico Lagrangia*) nació en Turín, Italia (The MacTutor History of Mathematics Archive). Mantuvo correspondencia con *Euler* desde 1754 hasta 1775, de las 37 cartas intercambiadas 9 versan sobre temas de series infinitas.

En julio de 1754 escribe a *Euler* comentándole sobre el binomio de *Newton* para suma y la forma en que se desarrolla la derivada de un producto:

$$(a+b)^m = a^m b^0 + ma^{m-1}b^1 + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3 + \cdots$$

$$(x\,y)^m = x^m y^0 + mx^{m-1}y^1 + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3 + \cdots$$

manipulando la última expresión con m = - 1 obtiene la ecuación:

$$dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + dx^{-5}y^4 - dx^{-6}y^5 + \cdots$$

que resuelve con $\int y dx = \frac{x^2 dy}{2dx} - \frac{2x^3 d^2 y}{2.3dx^2} + \frac{3x^4 d^3 y}{2.3.4dx^3} - \frac{4x^5 d^4 y}{2.3.4.5dx^4} + \cdots$

En las cartas de fechas 12 de agosto, 6 de septiembre y 20 de noviembre de 1755; 26 de diciembre de 1759, 1 de marzo de 1760, 9 de noviembre de 1762, 28 de mayo de 1771 y 24 de septiembre de 1773, *Lagrange* y *Euler* mutuamente se comunican y comentan resultados.

Lagrange trabajó en el problema de la cuerda vibrante considerando un modelo de n cuerpos iguales espaciados a la misma distancia en una cuerda sin peso y luego consideró que el número de cuerpos tiende a infinito. Para resolver el problema considera la sucesión de ecuaciones diferenciales $\frac{d^2 y_i}{dt^2} = c^2\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ las cuales resuelve obteniendo una expresión para *y* en términos de las posiciones iniciales. Haciendo $n \to \infty$ obtiene:

$$y = \frac{2}{l}\int_0^1 \sum_{r=1}^{\infty} \sin\frac{r\pi X}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\cos\frac{r\pi ct}{l}Y(X)dX + \frac{2}{\pi c}\int_0^1 \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi X}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\sin\frac{r\pi ct}{l}V(X)dX$$

donde Y(X) y V(X) son las funciones de posición y velocidad iniciales. Aunque hay diferencias con el trabajo de *Fourier* se considera como un precedente importante a las *Series de Fourier*.

Lagrange afirmó en *Sur une nouvelle espèce de calcul* de 1772 que toda función puede ser expandida en una *Serie de Taylor* y que para estudiar una función era suficiente analizarla en términos de su *Serie de Taylor*, de acuerdo a Grattan-Guinness (1980) y Gardiner (2002). Además, sobre la forma de obtener los coeficientes de la expansión agrega que:

> *pueden ser obtenidos a partir de todas las consideraciones de los infinitamente pequeños, de (cantidades) desvanecientes, de límites y de fluxiones, y ser reducidas al análisis de cantidades finitas* [36].

[36] Traducción libre.

Sylvestre François Lacroix calculaba tablas de movimientos planetarios a la edad de 14 años, área en la que trabajó ampliamente. En los años 1797-1798 publicó una de sus obras más famosas *Traité de calcul differéntiel et du calcul intégral* en dos tomos.

En la segunda edición, de 1810, se puede leer en la introducción:

> *Mais il existe des fonctions qu'on ne saurait, dans aucun cas, exprimer par un nombre limité de termes, de l'espèce de ceux qui constituent les quantités algébriques : tels sont, par exemple, les logarithmes qu'on ne peut obtenir que par approximation, et qui dépendent de l'extraction d'un nombre infini de racines ; les sinus et cosinus qu'on ne saurait évaluer au moyen de leurs arcs, sans concevoir un nombre infini d'opérations algébriques : on a donné à ces fonctions le nom de transcendantes. Celles que nous venons d'indiquer ne sont pas les seules de ce genre ; les progrès que l'analyse a faits en on introduit beaucoup d'autres, et peuvent en fournir indéfiniment. Telle est l'origine des séries. Quoiqu'elles ne donnent la valeur exacte des fonctions auxquelles elles appartiennent, que lorsqu'elles s'arrêtent, ou qu'on sait obtenir la somme de tous leurs termes, comme cela arrive dans les progressions par quotiens (ou géométriques) décroissantes; cependant elles peuvent toutes, à l'instar de celles qu'on déduit des fonctions algébriques, être regardées comme le développement des fonctions inconnues dont elles dérivent.* (Lacroix, 1810, p. 4)

Lo que podemos interpretar como:[37]

> *Pero existen funciones que no se podrían, en ningún caso, expresar por un número limitado de términos, de la especie de las que constituyen las cantidades algebraicas: tales son, por ejemplo, los logaritmos que no se pueden obtener más que por aproximación, y que dependen de la extracción de un número infinito de raíces; los senos y cosenos que no se podrían evaluar por medio de sus arcos sin concebir un número infinito de operaciones algebraicas: se dio a estas funciones el nombre de* ***trascendentes****. Las que acabamos de indicar no son las únicas de este tipo; los progresos que en el análisis se han hecho se han introducido, y pueden proporcionar valores indefinidamente.* ***Tal es el origen de las series****.*[38] *Aunque no dan el valor exacto de las funciones a las cuales pertenecen,*

[37] Traducción libre.
[38] Negritas nuestras.

como cuando se detiene su evaluación, o cuando se sabe obtener la suma de todos sus términos, como aquellas que se obtienen de las progresiones por cocientes (o geométricos) decrecientes; sin embargo todas las series, tal como ocurre con aquéllas que se deducen de las funciones algebraicas, pueden observarse como el desarrollo de las funciones desconocidas de las que derivan.

Jean Baptiste Joseph Fourier presentó el manuscrito *Sur la propagation de la chaleur* en el Instituto de París el 21 de diciembre de 1807, este trabajo fue expuesto a una comisión formada por *Lagrange, Laplace, Monge* y *Lacroix*.

El trabajo versaba sobre la ecuación de difusión del calor y *Fourier* aplicó la misma aproximación de *Lagrange* del modelo de los n cuerpos y obtuvo la solución:

$$f(x) = \frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\int_{0}^{1} f(X)\sin\frac{r\pi X}{l}\,dX\,\sin\frac{r\pi x}{l}, \qquad 0 \le x \le l$$

$$f(x) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(X)dX + \frac{2}{l}\int_{0}^{l}\sum_{r=1}^{\infty} f(X)\cos\frac{r\pi X}{l}\,dX\,\cos\frac{r\pi x}{l}, \qquad 0 \le x \le l$$

y

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(X)dX + \frac{1}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{+l} f(X)\sin\frac{r\pi X}{l}\,dX\,\sin\frac{r\pi x}{l} + \int_{-l}^{+l} f(X)\cos\frac{r\pi X}{l}\,dX\,\cos\frac{r\pi x}{l}\right], \quad -l \le x \le +l$$

pero *Lagrange* y *Laplace* tuvieron objeciones a la forma en que *Fourier* obtuvo sus series trigonométricas, y *Biot, Laplace* y *Poisson* tuvieron objeciones acerca de la forma de obtener la ecuación del calor y el manuscrito no fue autorizado para ser publicado (The MacTutor History of Mathematics Archive).

En 1808 *Fourier* presenta *Note sur la convergence de la série* $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$, pero no logra librar las objeciones de *Lagrange* y *Laplace* (Grattan-Guinness, 1970).

El Instituto de París establece como tema del Premio de Matemáticas de 1811 a la propagación del calor en los cuerpos sólidos y *Fourier* presentó su trabajo de 1807 con algunos temas adicionales como el enfriamiento de sólidos infinitos, y el calor terrestre y radiante. Esta vez su trabajo fue premiado pero aún mantuvo objeciones por parte del jurado compuesto por

Lagrange, Laplace, Malus, Haüy y *Legendre*. Y nuevamente el trabajo no fue publicado y Fourier tuvo que escribirlo en forma de libro para publicarlo en 1822 bajo el título de *La théorie analytique de la chaleur*.

IV. Periodo de la sistematización

En este período aparecen los nombres de matemáticos de la talla de *Gauss, Cauchy* y *Abel*, quienes son los que conducirán al estudio sistemático de las series infinitas, buscando dar un poco de orden en este campo en pleno desarrollo pero sin formalidad en el sentido actual.

Johann Carl Friedrich Gauss inicia este período escribiendo el artículo *Disquisiciones generales circa seriem infinitam:* $1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$. (*Disquisiciones generales acerca de la serie infinita:* $1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$) el cual es el primer artículo donde se trata en forma rigurosa a las series infinitas y se hace la introducción de la función hipergeométrica.

Las series hipergeométricas le surgen a Gauss al estudiar algunos problemas teóricos de la astronomía, cuando considera los coeficientes de la expansión de $\frac{1}{\left(a^2+b^2-2ab\cos\phi\right)^n}$ en serie trigonométrica.

En este trabajo, *Gauss* analiza rigurosamente los casos en que la serie converge y diverge, la prueba o criterio que desarrolla utiliza una serie de forma $u_m x^m$ y escribe cocientes de la forma $\frac{u_m}{u_{m+1}}=\frac{1+\frac{\gamma+1}{m}+\frac{\gamma}{m^2}}{1+\frac{\alpha+\beta}{m}+\frac{\beta}{m^2}}$ y da condiciones sobre "x" para la convergencia y divergencia.

Es lamentable que este trabajo haya pasado desapercibido por casi 20 años, como se lee:

> *Gauss was indeed the master; and by so much was he the master that twenty years had elapsed since the publication of this paper before anybody was able to catch up with him.*
> *In 1813 hardly anyone else understood what the convergence problem was…*[39] (Grattan-Guinnes, 1970, p. 145)

Fourier logró mostrar la convergencia de algunas series de Fourier particulares pero no pudo mostrar la convergencia del caso general.

En 1820 *Siméon Denis Poisson*, exalumno de *Laplace* y *Lagrange*, fue el primer matemático en dar dicha prueba (Grattan-Guinness, 1980), pero esta prueba no incluye restricciones sobre la función a ser expandida, lo que presenta complicaciones posteriores.

Augustin Louis Cauchy es considerado como el iniciador de la época del rigor en las matemáticas siendo el primero en insistir en pruebas estrictas de convergencia y divergencia como puede verse en la página 30 de Smith (2005), en 1821 publicó una de sus obras más reconocidas y celebradas, *Cours d'analyse.*
En la introducción de su libro podemos leer:

> *En cuanto a los métodos, he intentado darles todo el rigor que pedimos en geometría, para así nunca apelar a argumentos tomados de la generalidad del álgebra. Argumentos de esta clase, aunque son comúnmente admitidos, especialmente en el pasaje de las series convergentes a las series divergentes y de las cantidades reales a las expresiones imaginarias, son, a mi parecer, sólo considerables como inducciones adecuadas para escucharse algunas veces como la verdad pero que tiene poco acuerdo con la tan admirada exactitud en las ciencias matemáticas.* [40]
> (Grattan-Guinnes, 1980, p. 96)

En Cauchy (1821) aparece por primera vez la definición de una serie infinita en los términos que seguimos utilizando. En el *Chapitre VI Des séries convergentes et divergentes. Règles sur la convergence des Séries. Sommation de quelques Séries convergentes*, podemos ver la definición:

---

[39] *Gauss* era el maestro, y era por mucho el maestro que veinte años habían pasado desde la publicación de este artículo antes de que nadie pudiera seguirlo. En 1813 difícilmente alguien más entendía lo que era el problema de la convergencia (traducción libre).
[40] Traducción nuestra.

On appelle série une suite indéfinie de quantités $u_0, u_1, u_2, u_3, \&c....$ *qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens termes de la série que l'on considère.*

Es decir,

se llama serie a una sucesión indefinida de cantidades $u_0, u_1, u_2, u_3, \&c....$ *que derivan las unas de las otras según una ley determinada. Estas cantidades son ellas mismas los diferentes términos de la serie que se considera.*

Inmediatamente define la convergencia y divergencia de una serie en los términos que seguimos utilizando:

Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ *la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs do n toujours croissantes, la somme* s_n *s'approche indéfiniment d'une certaine limite s ; la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si tandis que n croit indéfiniment, la somme* s_n *ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente, et n'aura plus de some.*

Es decir,

Sea $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ *la suma de los n primeros términos, n designando un número entero cualquiera. Si, para valores de n siempre crecientes, la suma* s_n *se acerca indefinidamente a un determinado límite* s*; la serie se dirá convergente, y el límite en cuestión se llamará la suma de la serie. Por el contrario, si mientras que n cree indefinidamente, la suma no se acerca a ningún límite fijo, la serie será divergente, y no tendrá una suma.*

En esta misma obra *Cauchy* muestra por primera vez en forma ordenada y concreta diversos criterios de convergencia. Se encuentra entonces el criterio de la raíz, el criterio de la razón, el criterio de la integral, un criterio de serie alternante, un criterio de condensación, un criterio logarítmico, un criterio para convergencia de una serie cuyos elementos son producto de los elementos de otras dos series (Grattan-Guinness,1980).

En Cauchy (1821) se encuentra por primera vez la prueba de la convergencia de la serie geométrica, el criterio de la divergencia enunciado en forma implícita, y también escribe la demostración de la divergencia de la serie armónica tal como lo hizo *Oresme* en 1360.

Nuevamente en Cauchy (1821) se encuentra la definición y las condiciones para la convergencia de una serie de potencias de una variable x.

Cauchy realiza una crítica a *Lagrange* por creer que las Series de Taylor convergen siempre y que deben ser utilizadas como fundamento del análisis, y en 1822 publica "*Sur l'e développement des fonctions en série*" incluyendo el ejemplo $e^{-\frac{1}{x^2}}$ que carece de Serie de Taylor en x=0 (Grattan-Guinness, 1980).

Niels Henrik Abel (1802-1829) tuvo una aparición vertiginosa en el panorama de las matemáticas y en muy pocos años contribuyó fuertemente al rigor matemático. Primero, reconociendo que *Cauchy* había indicado el camino, como lo expresa a *Holmboe*:

> *"Cauchy está loco y es imposible acercarse a él, aunque por el momento él es el único que sabe cómo deben ser tratadas las matemáticas. […]Cauchy es actualmente el único que trabaja en matemáticas puras".*
> (Mankiewickz, 2000, p. 121)[41]

y considera que todos deben atender al nuevo rigor:

> *"El excelente trabajo de Mr. Cauchy Cours d'analyse de l'école polytechnique, el cual debería ser leído por cualquier analista que clama rigor en las investigaciones matemáticas, nos servirá como guía".*
> (Kragh, 2000, p. 3)

Abel rápidamente mostró criterios sobre convergencia, en enero 16 de 1826 escribe a *Holmboe* sobre el teorema del binomio $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2}x^2 + \cdots$ estableciendo la

[41] También aparece en la página 4 de Kragh (2000).

convergencia para diferentes valores de x y de m complejos, aparece en la página 30 de Smith (2005) y la página 5 de Kragh (2000).

De la misma manera escribe teoremas para establecer convergencias de series de funciones como los teoremas III, IV (*Teorema del límite de Abel*):

> *Si la serie* $f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \ldots + v_m\alpha^m + \ldots$ *es convergente para un cierto valor* δ *de* α*, también será convergente para cada valor menor que* δ*, y para valores siempre decrecientes de* β*, la función* $f(\alpha - \beta)$ *se aproxima indefinidamente al límite* $f(\alpha)$*, suponiendo que* α *es igual o menor que* δ*.*

y V de ese mismo año donde establece condiciones para la convergencia y continuidad de series, consulte las páginas 5 y 6 de Kragh (2000) y Grattan-Guinness (1980).

En ese mismo año, 1826, publica la serie trigonométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}$ que es un contraejemplo para mostrar que un teorema de Cauchy, en la página 131 del *Course d'analyse*, es incorrecto. (*Cauchy* intentaría reparar la demostración en 1853), según un comentario de la página 7 de Kragh (2000).

En 1826 *Cauchy* publica una prueba de la convergencia del caso general de la serie de Fourier utilizando cálculo de variable compleja, pero utiliza integración término a término y hace re-arreglos de los términos de la serie, lo que supone parte de lo que quiere demostrar. En 1827 publica otra prueba con más restricciones.

En 1827 *Louis Olivier* publica el criterio de convergencia

> *Una serie infinita (de términos positivos),* $\sum a_n$ *es convergente si y sólo si* $na_n \to 0$ *conforme* $n \to \infty$

El cual resulta ser falso mediante el contraejemplo $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ que proporciona *Abel* en 1828, quien además proporciona un teorema de que un criterio semejante no puede existir.

Lema: Si la serie $\sum a_n$ *es divergente entonces la serie* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\sum_{m=1}^{n-1}a_m}$ *también diverge.*

Teorema 5: No existe una función ϕ *que distingue series convergentes de divergentes, esto es,* $\phi(n)\,a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_n$ *es convergente.* (Kragh, 2000, p. 12)

Demostración: Suponga que ϕ *es tal función. Considere la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi(n)}$ *observe entonces que* $\phi(n)a_n=1$ *y por lo tanto la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi(n)}$ *es divergente de acuerdo al teorema, pero entonces por el lema anterior* $\sum_{n=2}^{\infty}a'_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\phi(n)\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{\phi(m)}}$ *también diverge.*

Por otra parte, $\phi(n)a'_n=\phi(n)\frac{1}{\phi(n)\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{\phi(m)}}=\frac{1}{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{\phi(m)}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ *puesto que* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi(n)}$ *diverge y por hipótesis se tiene que* $\sum_{n=2}^{\infty}a'_n$ *converge. Lo que establece una contradicción y termina la demostración.* (Kragh, 2000, p. 12)

Este teorema es importante porque en su demostración por primera vez se **construye** una serie específica con un propósito definido (mostrar una contradicción).
También estableció el criterio:

Sea $\sum u_n$ *una serie infinita, sea m un entero positivo y suponga el límite* $U=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\frac{d}{dn}\log^m n\right)}{\log^{m+1}n}$ *existe. Entonces se tiene* $\begin{cases}U>1, \text{la serie converge}\\ U<1, \text{ la serie diverge}\\ U=1, \quad \text{no se sabe}\end{cases}$

(Kragh, 2000, p. 13)

que no fue publicado.

Publicó un criterio para ver la convergencia de una serie cuyos elementos son un producto de los elementos de una serie convergente multiplicados por los elementos de una serie acotada (Grattan-Guinness, 1980). También estableció otros criterios que no fueron publicados.

Abel mostró la necesidad de establecer la continuidad en términos de convergencia (Smith, 2005, p. 30).

En el mismo artículo de 1827, *Olivier* publicó un teorema sobre la estimación de la suma de una serie; sin embargo, por estar basado en su falso criterio, no se le valora pero podría ser tomado como un criterio de la integral sin necesidad de mencionar el criterio fallido.

> *Si* $u_1, u_2, \ldots$ *es una sucesión de términos positivos que decrece monótonamente a cero para n que tiende a infinito cuando n>m, entonces por el criterio anterior* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *es convergente. Si llamamos* s *a la suma de la serie y* $u(x)$ *una función monótonamente decreciente tal que* $u(n) = u_n$ *entonces*
>
> $$0 < \sum_{r=m+1}^{\infty} u_r < \int_m^{\infty} u(x)dx < \sum_{r=m}^{\infty} u_r \quad y \quad \int_m^{\infty} u(x)dx < s < \int_m^{\infty} u(x)dx + u_m$$

Más tarde en ese mismo año *Cauchy* publica en *Sur la convergence des séries* su criterio de la integral:

> *Sea* $u_n > 0$ *y decreciente monótonamente a cero con n que tiende a infinito, cuando n>m. Entonces*
>
> $\sum_{r=m}^{\infty} u_r \quad y \quad \int_m^{\infty} u(x)dx$ *convergen o divergen simultáneamente.* (Grattan-Guinnes, 1970, p. 143)

El matemático alemán *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet* publicó en 1829 el trabajo *Sur la convergence des séries trigonométriques* en el cual retoma ideas de *Fourier*, pero hace avances importantes al establecer condiciones suficientes sobre la función a ser desarrollada en serie de Fourier, para así poder garantizar la convergencia de su serie.

Así como *Cauchy* había probado que *Posisson* había hecho una prueba no rigurosa de la convergencia de la serie de Fourier, *Dirichlet* probó que la prueba proporcionada por *Cauchy* contenía errores. Al comentar sobre la demostración de *Cauchy*, *Dirichlet* escribió:

> *The author of this work himself admits that his proof is defective for which the convergence is, however, incontestable.*[42]

Al final de ese trabajo realiza un comentario sobre una función que no satisface las condiciones que acaba de demostrar como necesarias para la existencia de la serie Fourier.[43]

> ***f(x)*** *es igual a una constante* ***c*** *cuando la variable toma un valor racional, y es igual a otra constante* ***d*** *cuando esta variable es irracional. La función así definida tiene valores finitos y definidos para cada valor de x, pero al mismo tiempo no puede ser sustituida dentro de la serie [de Fourier], ya que las diferentes integrales que aparecen en la serie pierden todo significado en este caso.*

Debido a estos trabajos a *Dirichlet* se le considera como el fundador de la *Teoría de las Series de Fourier* (The MacTutor History of Mathematics Archive).

En 1831 *Cauchy* proporciona expansiones en series de potencias de funciones analíticas de una variable compleja.

En 1832 *Joseph Ludwig Raabe* publicó el artículo *Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Reihen* que contiene el criterio de convergencia conocido como Criterio de Raabe (Raabe ratio Test) que es una extensión del criterio de la razón proporcionado por *Jean Le Rond d'Alembert*.

> *Teorema: Si* $u_r > 0$ *y* $l = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)\right]$ *existe entonces* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *converge para l>1,* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *diverge para l<1, y para l=1 la prueba no es concluyente.* (Reiff, 1992, p. 197)

[42] El mismo autor de este trabajo admite que su prueba es defectuosa por lo que la convergencia es incontestable.
[43] Traducción libre de la definición en la página 126 de Grattan-Guinnes (1980).

Casi simultáneamente *Farkas Wolfgang Bolyai* publica un criterio semejante al de *Raabe*, aunque descubierto independientemente (The MacTutor History of Mathematics Archive).

En los trabajos de *Raabe* se encontró otra prueba para un criterio semejante, que es una contribución de *Jean Marie Constan Duhamel* y que sólo por la referencia de *Raabe* fue conocido ya que no fue publicado.

El siguiente criterio de divergencia fue proporcionado por *Raabe*, pero no funciona bien:

Die Reihe u_n *divergiert, venn* $n\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}=a$

$$n\left\{\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^n-c\right\}=a$$

wo a eine endliche Zahl ist. (Reiff, 1992, p. 201)

Sin embargo, este criterio posteriormente es refinado por *Kummer*.

Jean Victor Poncelet publicó un trabajo titulado *Application de la mèthode des moyennes à la transformation au calcul numérique et à la determination des limites du reste des séries* en 1833. En éste, *Poncelet* trata sobre la suma de series y la determinación de los restos de las series.

En 1834 *Raabe* publica *Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen* contiene un criterio que ahora se llama Criterio de Gauss:

Si $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ *puede ser expresado en la forma* $\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+\frac{K_n}{n^{1+p}}$ *donde* $|K_n|$ *está acotada y p>0,*

entonces si $\mu>1$ *la serie* $\sum_{r=0}^{\infty}u_r$ *converge y si* $\mu\le 1$ *la serie* $\sum_{r=0}^{\infty}u_r$ *diverge.*

En 1835 aparece en *Crelle's Journal* un artículo titulado *Über die Konvergenz und Divergenz der undendlichen Reihen* escrito por *Ernst Eduard Kummer*, y que contiene el criterio:

Si $u_n > 0$ *cuando* $n>N$ *y* $m_1, m_2, \ldots$ *es una sucesión de enteros tal que* $\lim_{n\to\infty}[m_n u_n] = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{m_n u_n}{u_{n+1}} - m_{n+1}\right]$ *existe y es mayor que cero, entonces* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *es convergente. Si este último límite es cero y* $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{m_n u_n}{\frac{m_n u_n}{u_{n+1}} - m_{n+1}}\right] \neq 0$ *entonces* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *es divergente.*

Este criterio es muy general y de gran utilidad.

Un año después, 1836, *Kummer* publica *Über die hypergeometrische Reihe* $1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$ en la que extendió el trabajo realizado por *Gauss* en series hipergeométricas al estudiar las propiedades de dicha serie, de modo tal que proporcionó desarrollos que son útiles en la teoría de ecuaciones diferenciales. Fue el primero en calcular los grupos de monodromía[44] de esas series (The MacTutor History of Mathematics Archive). También estudió la mutua convergencia y divergencia de la serie $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$ y el producto infinito $\prod_{r=0}^{\infty}(1+a_r)$, Grattan-Guinness (1970).

Después de este trabajo, *Jacobi* y *Dirichlet* consideran que *Kummer* posee el más alto nivel en matemáticas, comentario que puede leerse en la página 201 de Reiff (1992).

En 1837 *Dirichlet* llama la atención sobre el hecho de que una serie convergente (condicionalmente) puede cambiar el valor de su suma al reordenar sus elementos.

Jean Marie Constant Duhamel publicó en 1839 el artículo *Nouvelle règle pour la convergence des séries* en el que comunica los criterios de Raabe y de la integral como suyos. Esto genera diversos incidentes.

[44] En matemáticas, **monodromía** es el estudio de cómo los objetos del análisis matemático, topología algebraica y geometría diferencial se comportan conforme se aproximan alrededor de una singularidad. Un grupo de monodromía es un grupo de transformaciones que actúan sobre los datos que codifican lo que sucede conforme nos acercamos alrededor de la singularidad.

Augustus de Morgan significó un avance revolucionario en la teoría de los criterios de convergencia. En 1839 en su tratado de cálculo establece un criterio de convergencia que involucra por primera vez la **iteración** en casos de indecisión,

Sea $u_n > 0$ *y* $u_1, u_2, \ldots$ *una sucesión decreciente monótonamente a cero, y sean* $p_0 = -\frac{nu'_n}{u_n}$, $u'_n \equiv \frac{du_n}{dn}$. *Si* $L = \lim_{n\to\infty} p_0$ *existe entonces, si L>1 la serie* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *converge, si L<1 la serie* $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ *diverge. Si L=1 entonces la prueba no es concluyente, y entonces repetimos sucesivamente la prueba para* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *donde*

$$p_1 = \log[n(p_0 - 1)]$$

$$p_2 = \log\log[n(p_1 - 1)]$$

$$p_3 = \log\log\log[n(p_2 - 1)]$$

… (Grattan-Guinnes, 1970, p. 148)

Joseph Louis François Bertrand retomó las ideas de *de Morgan* y publica *Règles sur la convergence des séries* en 1842 en la que desarrolla la iteración en los casos del criterio logarítmico de Cauchy, el criterio de Raabe y expresiones del tipo de *de Morgan*, obteniendo las expresiones

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}\right],\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\ \frac{1}{nu_n\ \log}}{\log\ \log\ \log\ n}\right],\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\frac{1}{nu_n \log n}}{\log\log\log n}\right], \ldots \text{ (}Cauchy\text{)}$$

$$\frac{1}{1+\alpha'},\ \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\alpha'},\ \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\log n}+\alpha''}, \ldots \quad \text{(}Raabe\text{)}$$

$$\lim_{n\to\infty}[n\alpha],\ \lim_{n\to\infty}[n\alpha' \log n],\ \lim_{n\to\infty}[n\alpha'' \log n \log\log n],\ \ldots \quad \text{(}de\ Morgan\text{)}$$

(Grattan-Guinnes, 1970, p. 149)

Además, *Bertrand* mostró la equivalencia lógica de los criterios que utilizó y su método iterado, posteriormente trabajó sobre la serie hipergeométrica.

Pierre Alphonse Laurent presentó el trabajo *Mémoire sur le calcul des variations* para participar en el *Grand Prize of the Academy of Sciences* de 1842, aunque lo envió el 20 de mayo de 1843 y no fue tomado en cuenta por el jurado pese a la recomendación de *Cauchy*. En esa memoria *Laurent* incluye los desarrollos que son conocidos como Serie de Laurent para funciones complejas.

Pierre Ossian Bonet también trabajó en la iteración de criterios. En 1843 publicó *Note sur la convergence et la divergence des séries* que contiene algunos resultados parecidos a los de *Bertrand*, pero que además presenta algunas iteraciones nuevas como es el caso del criterio de la raíz, y que aparece con las expresiones:

$$\lim_{n\to\infty}\left[|u_n|^{1/n}\right],\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\left(1-|u_n|^{1/n}\right)}{\log n}\right],\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\log n-|u_n|^{1/n}\right)}{\log\log n}\right],\ \ldots$$

(Grattan-Guinnes, 1970, p. 150)

Philipp Ludwig von Seidel trabajó sobre astronomía pero también sobre cuestiones de análisis, introdujo la noción de convergencia no uniforme. Publicó *Note über eine Eigenschaft der Reihen* (nota sobre una característica de las series) en 1848, en ese trabajo introduce la idea de "convergencia arbitrariamente lenta" y "convergencia no arbitrariamente lenta". Un año después *George Gabriel Stokes* publica "*On the critical values of the sums of periodic series*" (sobre los valores críticos de las sumas de series periódicas) donde introduce ideas semejantes a las de *Seidel* (Grattan-Guinness, 1980).

Henry Wilbraham publicó en 1848 el artículo "*On a certain periodic function*" (sobre una cierta función periódica) en el cual estudia la convergencia de la serie $\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\cdots$ logrando explicar teóricamente las oscilaciones de la serie de Fourier en puntos específicos, lo que casi 50 años después será llamado "fenómeno de Gibbs", de acuerdo a Grattan-Guinness (1980).

Bonnet continuó trabajando en series y en 1851 publicó *Sur la théorie générale des series* trabajo con el que ganó un premio de la Academia de Bruselas.

Magnus Georg von Paucker proporcionó otro criterio con iteración en su artículo *Note relative à quelques règles sur la convergence des séries* de 1851. En ese artículo utiliza el criterio de la raíz de Cauchy y le aplica logaritmo en forma iterada obteniendo las expresiones:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\frac{1}{u_n}}{n}\right],\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\frac{1}{nu_n}}{\log n}\right],\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\frac{1}{nu_n\log n}}{\log\log n}\right],\ \ldots$$

También sugirió un criterio mixto en el que combina el criterio de la razón con el criterio de Raabe:

$q_0 = \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1$ (criterio de la razón)

$q_1 = q_0 n - 1$ (criterio de Raabe)

$q_2 = q_1 \log n - 1$

$q_3 = q_2 \log\log n - 1$

…

(Grattan-Guinnes, 1970, p. 150)

y finalmente mostró la equivalencia lógica de las iteraciones.

En 1853 *Cauchy* publicó "*Note sur les séries convergentes*…" donde incluye la convergencia uniforme en un intervalo.

En 1854 *Georg Friedrich Bernhard Riemann* presenta la tesis de su *Habilitation*, es decir su *Habilitationsschrift*, sobre series trigonométricas titulada *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.*

El trabajo de *Riemann* se dividió en tres partes, la primera contenía el estado del arte de las series trigonométricas hasta su tiempo, en la segunda parte incluía un análisis sobre la integral y las condiciones para que una función sea integrable, y en la tercera parte desarrolló diversos comentarios sobre las funciones y su representabilidad mediante series infinitas (Grattan-Guinness, 1980).

Sobre la representabilidad de funciones, *Riemann* dijo:

> *While preceding papers have shown that if a function possesses such and such a property, then it can be represented by a Fourier series, we pose the reverse question: if a function can be represented by a trigonometric series, what can one say about its behavior.* [45] (The MacTutor History of Mathematics Archive)

También estudió el caso de representabilidad de funciones con un número infinito de discontinuidades u oscilaciones mediante series de Fourier, para lo cual construyó funciones con estas características.

Para analizar las condiciones necesarias para convergencia utilizó la función:

$$F(x) = C + C'x + \tfrac{1}{2}a_0x^2 - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{a_r\cos rx + b_r\sin rx}{r^2}$$

y luego mostró algunos teoremas sobre el comportamiento de la expresión

$$\lim_{\alpha\to 0,\beta\to 0}\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

para el caso de series trigonométricas convergentes.

En el art.9 establece que la convergencia de una serie en un punto sólo depende del comportamiento de la función en la vecindad de ese punto.

Un comentario sobresaliente tiene que ver con la posibilidad de que dos funciones que son diferentes en un número infinito de puntos puedan tener la misma serie que las represente.

Otro comentario trata sobre la posibilidad de que la convergencia a cero del el n-ésimo término de una serie conforme n tiende a infinito implique la convergencia de los términos a_n y b_n a cero.

[45] Mientras que los trabajos anteriores han mostrado que si una función posee tal o cual propiedad, entonces puede ser representada por una serie de Fourier, nosotros proponemos la pregunta inversa: si una función puede ser representada por una series trigonométrica, ¿qué puede uno decir de su comportamiento?

Un comentario más trata sobre la posibilidad de que toda serie trigonométrica sea una serie de Fourier; es decir, si para toda serie trigonométrica convergente existe una función integrable que sirva como suma límite de la serie.

En ese mismo trabajo, en el Art. 5, *Riemann* retoma el comentario de *Dirichlet* sobre el efecto de cambiar el orden de los elementos de una serie convergente (condicionalmente) y muestra que puede hacerse que la serie converja **a cualquier valor** que se desee (Grattan-Guinness, 1980).

Pero *Riemann* también trabajó sobre las condiciones de integrabilidad de una función, para lo cual construyó una función con un número infinito de discontinuidades y dada en la forma de una serie infinita

$$f(x)=\frac{\phi_1(x)}{1^2}+\frac{\phi_2(x)}{2^2}+\frac{\phi_3(x)}{3^2}+\cdots+\frac{\phi_n(x)}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)}{n^2}$$

donde cada $\frac{\phi_n(x)}{n^2}$ tiene discontinuidades en $x=\pm\frac{1}{2n},\pm\frac{3}{2n},\pm\frac{5}{2n},\ldots$ por lo que $f(x)$ tiene discontinuidades en todos los puntos racionales de la forma $\frac{p}{2q}$ para *p* impar y *p* y *q* enteros primos relativos.

Utilizando convergencia uniforme (sin saberlo) obtiene $f(x\pm 0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x\pm 0)}{n^2}$ que utiliza para mostrar que:

$$f(x\pm 0)-f(x)=\pm\frac{1}{2q^2}\left(1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{25}+\cdots\right)=\pm\frac{\pi^2}{16q^2}$$

que establece la discontinuidad de $f(x)$ en todo punto $x=\frac{p}{2q}$, de los cuales existe un número infinito en cada intervalo $[a,b]$. Sin embargo, *Riemann* muestra que esta función es Riemann-integrable (Grattan-Guinnes, 1980).

Para muchos esta función representa el más grande logro de la matemática generada por *Riemann* ya que establece la integrabilidad de funciones altamente discontinuas, y por algún tiempo se considera a la *Integral de Riemann* como la forma más general posible de integral.

Los trabajos de *Riemann* cierran esta etapa debido a que las investigaciones posteriores apuntarán a un mayor rigor y a nuevos conceptos que involucran la medida de conjuntos que ya no son los intervalos utilizados por *Riemann* sino conjuntos nunca antes considerados en el análisis. Algunos discípulos de *Riemann*, pero principalmente Weierstrass y sus discípulos harán el trabajo.

V. Periodo de la fundamentación

En este periodo colocamos todos los avances logrados por los analistas que siguen depurando la matemática, cada vez más se utilizan conceptos que salvo en circunstancias especiales llegaron a ser nombradas por matemáticos de otros períodos pero sin dar muestras de usos sistemáticos.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass inició su trabajo mediante la publicación del artículo *Zür Theorie der Potenzreihen* en 1841 en el que hace referencia al concepto que ahora conocemos como *convergencia uniforme (gleichmässig Convergenz)*. Sin embargo, después se sumerge en el ambiente escolar y no volverá a haber trabajos publicados de él hasta 1880.

1864 es el año en que *Rudolf Otto Sigismund Lipschitz* se doctora con *De explicatione per series trigonometricas* en donde extiende las condiciones de *Dirichlet* para la convergencia de las series de Fourier, en la que discute ideas relacionadas con la teoría de la medida. Y utiliza la que ahora es conocida como condición de Lipschitz de orden α, $|f(x+h)-f(x)|<Bh^{\alpha}$, $h,B,\alpha>0$, condición que una función debe cumplir para que su serie de Fourier converja.

Para 1870, *Hermann Hankel* publica *Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Funktionen* en el cual considera funciones discontinuas y con una infinidad de oscilaciones en un intervalo finito. Clasificó estas funciones considerando funciones $\phi(y)$ con serie de Taylor convergente en [- 1, +1] excepto en y=0. A las que llamó singularidades utilizando

$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\phi(\sin(r\pi x))}{s^3}$, $s>3$. Su clasificación de funciones recayó en las singularidades de las funciones.

En ese mismo trabajo *Hanke*l presenta la expresión $\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^s}}{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^s\phi^2(\sin r\pi x)}}$ donde $\phi(y)$ es la serie de Fourier en senos de y = 1 en $[0,\pi]$ que es una función analítica y que equivale a la función característica de los racionales de *Dirichlet*.

En 1870 *Heinrich Edward Heine* publica *Über trigonometrische Reihe* en la que prueba que si una función es representable con una serie trigonométrica entonces la serie es única si la función es continua casi donde quiera y que la serie trigonométrica sea uniformemente convergente casi dondequiera (Grattan-Guinness, 1980).

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor continuó el trabajo de *Heine* sobre series trigonométricas y muestra que el teorema de *Heine* de 1870 es cierto aún sin que la serie sea convergente o la serie que representa a la función no sea válida en algún punto x, siempre y cuando el número de puntos sea finito.

En *Bulletin des Sciences Methématiques* de 1871 aparece el criterio de *Ermakoff*

> *La serie* $\sum f(n)$*, en la que f(n) es positiva y decreciente, es:*
>
> 1. *convergente si* $\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}<1$
> 2. *divergente si* $\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}>1$
>
> (Bromwich, 1955, p. 43)

En 1872 *Cantor* logra avanzar más allá de sus resultados anteriores y en *Über die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reihen* muestra que el total de puntos donde la serie de la

función o su representación no sean válidas puede ser infinito, bajo la condición de que los puntos tengan una distribución específica (Grattan-Guinness,1980).

Después de estos avances, *Cantor* se dedica a establecer una fundamentación del sistema de los números reales. Inicia con los racionales (A), define sucesiones de racionales bajo condiciones especiales (*sucesiones fundamentales*) y observa que el conjunto de los límites de estas sucesiones (B) contiene a los racionales, es decir $A \subset B$, pero no al revés. Con razonamientos semejantes construye los números reales en el conjunto B, pero establece el axioma "*Para cada número real corresponde un punto definido de la línea recta, cuya coordenada es igual a ese punto*" para identificar a su conjunto B de reales con la recta real.

El trabajo con conjuntos le permite a *Cantor* demostrar su teorema de unicidad de representación de una función mediante una serie trigonométrica:

> *Si una ecuación es de la forma* $0 = \frac{1}{2} d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx + d_n \cos nx$ *para todos los valores de x con la excepción de aquellos que correspondan a los puntos en un intervalo (cerrado) (0…2π) de un conjunto dado de puntos P la v-ésima especie, donde v es un número entero entonces* $d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0$.

Heine escribió *Die Elemente der Funktionenlehre* en 1872 obra en la que define la continuidad uniforme de una función:

> *Una función f(x) es llamada uniformemente continua de x = a hasta x = b, si para una cantidad ε, no importa que pequeña sea, existe una cantidad positiva* η_0 *tal que para todos los valores positivos de* η *que sean menores o iguales que* η_0, $f(x \pm \eta) - f(x)$ *se mantiene menor que ε. Sin importar cualquier valor que uno le dé a x, suponiendo solo que* $x \quad y \quad x \pm \eta$ *pertenecen a la región de a hasta b, la misma* η_0 *debe efectuar la propiedad requerida.*

En ese mismo 1872, un ejemplo importante de una función continua que no tiene derivada en ningún punto circuló como manuscrito (pero no fue impreso hasta 1880) y se debe a *Weierstrass*, $\sum_{r=0}^{\infty} b^r \cos\left(a^r \pi x\right)$, $2ab > 2 + 3\pi$ con a entero y $0 < b < 1$

También ese año, aparece *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* escrito por *Julius Wilhelm Richard Dedekind*. En este trabajo aparece la definición de los números irracionales como cortaduras

> *Now, in each case when there is a cut (A_1,A_2) which is not produce by any rational number, then we create a new, irrational number* ***a****, which regard as completely defined by this cut; we will say that this number* ***a*** *corresponds to this cut, or that it produces this cut.* (The MacTutor History of Mathematics Archive)

En 1874 aparece *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* donde *Cantor* muestra el teorema:

> *El conjunto de todos los números reales* $\Re$ *, no puede ser puesto en correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los números naturales. Es decir* $\Re$ *es denumerable.*

Aunado al resultado de *Liouville* [46] concluye

> *This theorem shows why sets of real numbers, for example [0,1], cannot be uniquely corresponded with the set of all natural numbers N, Thus I have found the clear difference between a so-called continuum and a set of the entirety of all algebraic numbers.*

Un año después, en 1875, *Jean Gastón Darboux* continuó el trabajo de *Hankel*. En *Sur les fonctions discontinues*, mostró que si se toma $\phi(y) = y^2 \sin\frac{1}{y}$ y si $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ converge absolutamente entonces la función $f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \pi a \phi'\left(\sin(r\pi x)\right)\cos(r\pi x)$ es uniformemente convergente aunque sus

[46] Joseph Liouville, 1851, *Sur des classes très-étendues de quantités*…, Hay un número infinito de números trascendentes en cualquier intervalo [a,b] de números reales.

términos son funciones discontinuas, y tiene a $F(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a_r\phi(\sin(r\pi x))}{r}$ por integral indefinida.

Esto último proporciona una función continua con derivada discontinua para todos los valores conmensurables (racionales) de x y que existe para todo valor de x.

Paul David Gustav du Bois Reymond escribió *Versuch einer Classification der willkürlichen Funktionen* en 1875 en donde aparece el ejemplo de *Weierstrass* de la función continua sin derivada.

En 1876, en otro trabajo, *Üntersuchungen über die Konvergenz und Divergence der Fourierschen Darstellungsformeln*, *Reymond* escribe sobre la serie de Fourier y en un apéndice refuta la conjetura que compartían *Riemann* y *Dirichlet* acerca de que toda función continua tiene una serie de Fourier convergente.

En una carta de *Cantor* a *Dedekind* de 1877 se encuentra la forma en que *Cantor* logró establecer una relación de equivalencia entre una región del plano y un segmento de recta, en otras cartas se observan comentarios de *Dedekind* indicando dificultades que son resueltas y el artículo *Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre* se publica en 1878. Esto da origen a discusiones pues muestra que *Riemann* y *Helmholtz* estaban errados al suponer que la dimensión de un espacio estaba unívocamente determinada por el número de coordenadas que se necesitaban para representar un punto en el espacio.

1878 es el año en que aparecen ideas nuevas con respecto a la derivada. *Ulisse Dini* publicó *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* en donde establece las derivadas laterales, inferior y superior. Estas ideas están basadas en lo que conocemos como límite inferior y límite superior que forman parte de la estructura del campo de los números reales.

Cantor continuó su trabajo de fundamentación y en 1879 publicó un artículo donde desarrolla la teoría de conjuntos de puntos en la recta, conjuntos derivados y sus propiedades que considera importantes para revelar las propiedades del continuo.

También en 1879 aparece *Über die theorie der ganzen algebraischen Zahlen* en donde *Dedekind* desarrolla una teoría lógica de los números, presenta sus bases de la aritmética y aborda el papel de la **completitud del sistema de los números reales en la geometría y la continuidad del espacio**. También aborda la finitud e infinitud de conjuntos.

Para 1880 publica *Über undendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* en donde continúa el trabajo sobre conjuntos de puntos en la recta y además introduce por primera vez los números trasnfinitos[47].

En 1880 aparece *Zür Funktionenlehre*, en esta obra *Weierstrass* escribe sobre como definir funciones en términos de una serie de potencias. Para ello define y demuestra algunas relaciones entre los diversos modos de convergencia.

Convergencia Uniforme en una región: *Una serie infinita* $\sum_{v=0}^{\infty} f_v$ *cuyos miembros son funciones de varias variables converge uniformemente en una parte dada,* $\boldsymbol{B}$*, de su región de convergencia si después de la suposición de una cantidad positiva y arbitrariamente pequeña* δ *puede encontrarse un número entero* $\boldsymbol{m}$ *tal que el valor absoluto de la suma* $\sum_{v=0}^{\infty} f_v$ *es más pequeño que* δ *para cada valor de* $\boldsymbol{n}$ *que es mayor o igual a* $\boldsymbol{m}$*, y para cada colección de valores de las variables que pertenezcan a la región* $\boldsymbol{B}$*.*

Convergencia Uniforme en una vecindad de un punto: *Más aún, sea* ρ *una cantidad positiva considerada para un punto* $\boldsymbol{a}$ *de esa región, por lo que la serie converge uniformemente para los valores de* x *que satisfacen a la condición* $|x-a| \leq \rho$*, entonces diremos que la serie converge uniformemente en la vecindad del punto* $\boldsymbol{a}$*.*

Para *Weierstrass* era obvio que la primera forma de convergencia implica la segunda, pero no a la inversa, por lo que demuestra que casi se tiene pero no puede garantizar que las vecindades de puntos vayan a formar una región, indicando que posiblemente queden aisladas.

[47] De los cuales al parecer los matemáticos hindúes ya tenían algunas ideas desarrolladas.

También parece utilizar implícitamente la *Convergencia Uniforme en Intervalos*, utiliza también la idea de que un conjunto cerrado y acotado que puede ser cubierto con una colección infinita de conjuntos abiertos entonces puede ser cubierto con una subcolección finita de esos conjuntos abiertos (Teorema de *Heine - Borel*).

Hacia 1883 aparece *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* de *Cantor* en donde presenta a los números transfinitos como una extensión sistemática y autónoma del conjunto de los números reales. Aquí se encuentra su celebrado ejemplo de conjunto ternario de Cantor.

Cantor continuó trabajando en la teoría de conjuntos, números transfinitos, el continuo, conjuntos ordenados y conjuntos bien ordenados. De hecho, trabajó para demostrar que la base del análisis era la teoría de conjuntos y no los infinitesimales, acerca de los infinitesimales decía que eran *fantasmas y quimeras*, además agregaba que eran *infinitesimal cholera bacillus of mathematics* y que se habían esparcido desde Alemania para contaminar a los matemáticos italianos. **Para 1886 ideó una prueba de que los infinitesimales no podían existir utilizando su teoría de los tranfinitos**[48].

Jules Henri Poincaré fue uno de los pocos matemáticos franceses en empezar a utilizar las ideas de *Cantor*, en 1883 publicó *Sur les fonctions à espaces lacunaires* donde define $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{z-a_n}$ para $A_n, z \ y \ a_n$ números complejos y además $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|<\infty$. Entonces encontró que si C es una curva simple cerrada y convexa en el plano y si $\{a_n\}$ es un subconjunto denso de C, entonces la función *f(z)* define dos funciones analíticas distintas, una dentro de C y otra fuera de C. Esto debido a que la expansión en serie de potencias de *f(z)* en cualquier punto z_0 interior de C converge en un disco circular que "toca" a C, pero que no puede prolongarse analíticamente a través de C en el sentido de *Weierstrass* (Grattan-Guinness, 1980).

Para el año de 1885 aparece *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannte willkürlicher Funktionen einen reellen Veränderlichen* en donde *Weierstrass* muestra que cualquier función continua puede ser

[48] Las negritan indican la importancia de este resultado, posteriormente el cálculo infinitesimal será abandonado y se utilizará un cálculo basado en los conceptos $\varepsilon-\delta$.

aproximada uniformemente mediante una sucesión de polinomios sobre un intervalo finito, y que podría ser aproximado así mediante una suma finita de senos y cosenos. Este es el llamado Teorema de Aproximación de Weierstrass.

De hecho, *Weierstrass* definió a los números irracionales como límite de sucesiones de números racionales, pero su teoría era muy complicada y no logró tener muchos seguidores.

En el volumen 35 de 1889 de Matematische Annalen aparece el artículo *Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern* de *Alfred Israel Pringsheim* donde establece diversos criterios, pero lo más importante es que, al estilo de *Abel*, demuestra que

- *No puede existir una función* $\phi(n)$ *que tienda a infinito y tal que la condición* $\lim \phi(n) \cdot a_n \leq G$ *para* $G \geq 0$ *sea necesaria para la convergencia de* $\sum a_n$. *De hecho, para cualquier función* $\phi(n)$ *y para cualquier serie convergente, los términos de la serie pueden ser reordenados de modo que* $\overline{\lim} \phi(n) \cdot a_n = \infty$ (Pringsheim, 1889, p. 344)
- *No puede existir una función positiva* $\phi(n)$ *tal que la condición* $\lim \phi(n) \cdot a_n > 0$ *sea necesaria para la divergencia de* $\sum a_n$. *De hecho, para cualquier función* $\phi(n)$ *y para cualquier serie divergente, los términos de la serie pueden ser reordenados de modo que* $\underline{\lim} \phi(n) \cdot a_n = 0$ *suponiendo que los términos de la serie tienden a cero.* (Pringsheim, 1889, p. 358)
- *Sin importar qué tan rápido pueda converger la serie* $\sum \frac{1}{c_n}$ *siempre existen series divergentes* $\sum a_n$ *tales que* $\underline{\lim} c_n \cdot a_n = 0$. *Sin importar qué tan lentamente puede* $\phi(n)$ *aumentar hasta* ∞ *con n, siempre hay series convergentes* $\sum a_n$ *tales que* $\overline{\lim}\, n \cdot \phi(n) \cdot a_n = \infty$. (Pringsheim, 1889, p. 347)

En 1890 *Félix Edouard Justin Émile Borel* escribe un resultado que establece que para que el valor de la suma de una serie condicionalmente convergente pueda mantenerse inalterado pese a la reordenación de sus elementos es suficiente que el producto del desplazamiento del n-ésimo término por el término subsecuente más grande tienda a cero conforme n tiende a infinito, como puede verse en Bromwich (1955).

Marie Ennemond Camille Jordan fue el primero en dar definiciones de la integral de *Riemann* en términos de conjuntos y medida, en 1892 publicó *Remarques sur les intégrales définies* en donde reformula la condición de ser Riemann integrable

> *Sea* $[a,b]=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ *una partición P de [a,b] de conjuntos medibles disjuntos. Las sumas (generalizadas) inferior y superior de Riemann de una función acotada f correspondientes a P están definidas por* $L(P)=\sum_{k=1}^{n} m_k\, c(E_k)$ *y* $U(P)=\sum_{k=1}^{n} M_k\, c(E_k)$ *donde* m_k *y* M_k *denotan, respectivamente el* ***inf*** *y el* ***sup*** *de los números f(x) para* $x \in E_k$. *Las integrales inferior y superior de Riemann son entonces* $\underline{\int}_a^b f = \sup_P L(P)$ *y* $\overline{\int}_a^b f = \inf_P U(P)$ *y entonces f es Riemann integrable sí y sólo si* $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$

La importancia de esta expresión es que inicia el uso de las ideas de conjuntos medibles y medida que a la postre conducirán a *Lebesgue* a su teoría de la medida (Grattan-Guinnes, 1980).

En 1897 *Alfred Tauber*, en *Ein Satz aus der Theorie der undendlichen Reihen*, establece un resultado que es un inverso parcial del teorema del límite de Abel. (*Hardy* y *Littlewood* llamaron teoremas tauberianos a este tipo de teoremas inversos).

Ese mismo año aparece *Münchener Sitzungsberichte* en donde *Pringsheim* establece una definición para series dobles

> *Si* $s_{m,n}$ *se aproxima a un límite* ***s*** *definido conforme* ***m*** *y* ***n*** *tienden a infinito al mismo tiempo, pero de forma independiente, entonces* ***s*** *es llamada la suma de la serie doble representada por el arreglo.*

que más tarde será considerada como base para trabajos posteriores, de acuerdo a Bromwich (1955). Estudió las series repetidas y probó que (pensando en dos dimensiones)

Si las filas y columnas convergen, y si la serie doble es convergente entonces la ecuación $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right)$ *es cierta.*

También proporcionó un criterio de convergencia para series repetidas[49].

En 1898 Borel publicó *Leçons sur la théorie des fonctions* que son las notas de unas lecturas impartidas en la *Ecole Normale Supérieure* y en las cuales aborda las series complejas utilizando sus ideas de teoría de conjuntos y teoría de la medida, dando definiciones como

Cuando un conjunto está formado de todos los puntos en una infinidad denumerable de intervalos que no se sobreponen y que tienen longitud total s, decimos que el conjunto tiene ***medida*** *s. Cuando dos conjuntos no tienen puntos en común y sus medidas son s y s' entonces su unión tienen medida s+s'*

…

Los conjuntos para los cuales la medida puede ser definida por medio del procedimiento anterior serán denominados ***conjuntos medibles*** *por nosotros.*

En 1900 *Pringsheim* muestra la forma de obtener los límites extremos de una serie doble oscilante, Bromwich (1955).

En 1902 *Henri Léon Lebesgue* obtuvo su grado de doctorado mediante la tesis *Intégrale, longueur, aire* en donde define los conjuntos lebesgue-medibles. Para ello utiliza las definiciones dadas por Borel y Jordan, logrando de esta manera obtener una generalización de la medida de Jordan. Además la definición de Lebesgue permite que sus conjuntos medibles tengan propiedades importantes como

[49] Hay referencias de que *Lord Kelvin* utilizó una serie repetida para expresar la fuerza entre dos esferas electrificadas $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mn}{(m+n)^2}$

Si $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ *y los* E_n *son conjuntos lebesgue medibles y satisfacen* $E_i \cap E_j = \phi$ *para toda* $i \neq j$, *entonces* E *es medible y* $m(E)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)$ (Grattan-Guinnes, 1980, p. 178).

Godfrey Harold Hardy publicó en *Proccedings of the London Mathematical Society* de 1904 un artículo en el que establece que $f(x)=\sum\frac{x^{n^2}}{n^2!}$ puede ser representada asintóticamente por $\frac{Ae^x}{\sqrt{2\pi x}}$ donde $A=1+2\left(q+q^4+q^9+\ldots\right)$ y $q=\frac{1}{e^2}$

En 1908 *Weyl* publica *Singuläre Integralgleichungen* que contiene la prueba dada por David Hilbert sobre la proposición

> *Si* a_n *es positivo y tal que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ *es convergente, entonces la serie doble* $\sum\sum\frac{a_m a_n}{m+n}$ *es convergente*[50].

Existen desarrollos posteriores de las series de funciones y muchos de estos desarrollos generaron la "actualización" de los criterios de convergencia de series numéricas; sin embargo, estos desarrollos se realizan utilizando el rigor y formalidad matemáticos que caracterizan a este período por lo que esta investigación deja fuera todos estos avances, con las excepciones que a continuación se presentan y que representan avances que no contienen la formalidad de este período y que a nuestro juicio muestran que una forma natural de ver las series infinitas no involucra la formalidad .

Srinivasa Aiyangar Ramanujan tuvo una gran influencia en el trato y uso de series infinitas para calcular y aproximar valores numéricos.

Aún siendo desconocido descubrió los números de Bernoulli y proporcionó identidades que permiten calcularlos en forma más simple que ninguna conocida con anterioridad.

[50] Esto puede verse en Bromwich (1955).

También estudia la serie $\sum \frac{1}{n}$ y descubre la constante de Euler, que calcula con 15 decimales exactos, esto alrededor de 1904.

En 1911 publica en *The Journal of the Indian Mathematical Society* sus estudios sobre los números de Bernoulli y esto le gana reconocimiento.

Proporcionó identidades desconocidas como

$$\frac{1}{\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{\cosh(n\pi)}\right]^2}+\frac{1}{\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh(n\theta)}{\cosh(n\pi)}\right]^2}=\frac{2\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi}$$

para todo θ y donde $\Gamma(z)$ es la función gama.

Además proporcionó series con una gran velocidad de convergencia para calcular π, como la de 1914

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

que proporciona 8 dígitos exactos de π por cada término calculado.

Ernesto Cesàro trabajó sobre series divergentes. Definió lo que se conoce como Suma de Cesàro y que asigna una "suma" a las series infinitas. Si la serie converge entonces la Suma de Cesàro coincide con el valor al que converge la sucesión de sumas parciales de la serie. Si la serie diverge entonces es posible que todavía tenga una suma de Cesàro bien definida.

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión y sea* $s_k = a_1 + \ldots a_k$ *la k-ésima suma parcial de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *La sucesión* $\{a_n\}$ *es llamada Cesàro sumable, con suma* α*, si* $\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=\alpha$

Norbert Wiener hizo contribuciones importantes al estudio de los teoremas tauberianos en 1932, escribió una memoria de nombre *Tauberian theorems*, el principal resultado de estas contribuciones se puede demostrar utilizando técnicas de *Álgebras de Banach*. Por este trabajo recibió el premio *Bôcher* de la American Mathematical Society.

La suma de Borel es una generalización de la noción de suma de una serie. En general, la suma de borel proporciona una cantidad que opera como si fuera la suma de la serie, aún en casos en los que la serie diverge. La suma de borel es la transformada de Laplace de la suma de la transformada inversa aplicada término a término a la serie original.

La aproximación de Padé es la mejor aproximación de una función mediante una función racional de orden dado. A menudo proporciona una mejor aproximación que la serie de Taylor truncada y es posible que funcione correctamente aún donde la serie de Taylor no converge.

Gregory Volfovich Chudnovsky y *David Volfovich Chudnovsky*, conocidos como los hermanos *Chudnovsky*, siguiendo los pasos de *Ramanujan*, obtuvieron una serie hipergeométrica para π expresada como

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum (-1)^n \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3} \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{\frac{3n+3}{2}}}$$

la cual les proporciona 14 decimales exactos por cada término calculado. Mediante esta serie y una supercomputadora que construyeron en su departamento lograron calcular, en 1994, la gigantesca cantidad de 4,044'000,000 de decimales exactos de π.

4.2 Análisis de los períodos

Después de la investigación histórica que acabamos de presentar podemos hacer una primera síntesis de lo que se observa en cada período y lo que sucede con la visión o filosofía que produce el cambio de un período a otro período.

Cambio de períodos	Tipo de Pensamiento
	Tratamiento de las series infinitas
I al II	Geométrico/aritmético → Físico/geométrico/analítico Informal → Informal
II al III	Físico/geométrico/analítico → Analítico/físico/aritmético Informal → Formal sin rigor
III al IV	Analítico/físico/aritmético → Analítico/algebraico Formal sin rigor → Formal con rigor
IV al V	Analítico/algebraico → Analítico/topológico Formal con rigor → Formal con rigor

Es decir, la visión predominante de las series en el primer período es una mezcla de lo geométrico y lo aritmético, se hacen diagramas y se suman los primeros elementos de la serie infinita. Al producirse el cambio hacia el segundo período se tienen ahora una visión que es mezcla de lo físico, lo geométrico y lo analítico, se resuelven problemas surgidos de la física, la geometría y se inicia el uso del enfoque analítico. En ambos períodos el manejo o manipulación de las series es informal. En forma semejante se interpreta el resto de la tabla.

Pasamos ahora a analizar detalladamente cada período.

Período I (Antiguo)

En esta etapa aparecen las primeras progresiones aritméticas y geométricas, tanto en Egipto como en la India, sin embargo su uso parece estar restringido solamente a la resolución de

problemas aritméticos. Como es el caso del papiro del Rhind en donde se busca calcular las proporciones en que se van a repartir panes o medidas de cebada u otro grano.

El siguiente paso que se da es cuando se empieza a calcular elementos específicos de una sucesión aritmética o geométrica, y además el cálculo de la suma de un número determinado de elementos de la sucesión; esto marca el inicio del cálculo de sumas finitas (o series finitas como algunos les llaman), para las cuales los hindúes y árabes encontraron muchas fórmulas.

Las primeras series infinitas aparecen como un medio específico para resolver un problema particular, como el caso de Arquímedes o de las tablas de senos de los hindúes. Sin embargo no puede hablarse de una teoría general de series infinitas.

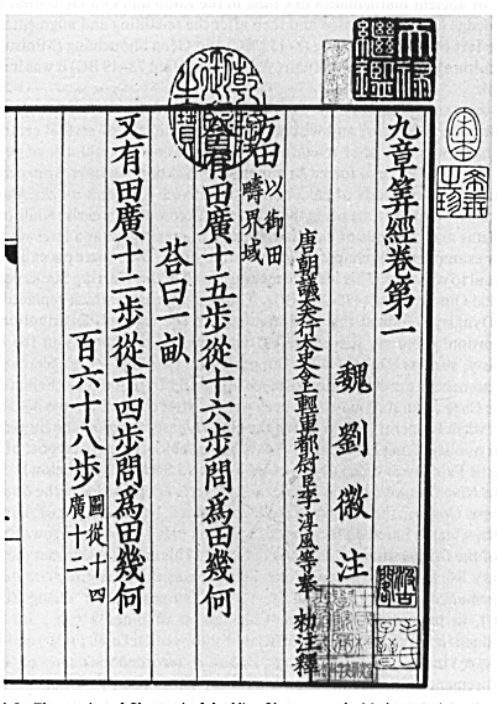
En esta etapa de desarrollo las series se encuentran mediante

- Problemas aritméticos
    - Como en el Papiro de Rhind.
    - Como *Zhang Qiujian* y *Al-Karaji* que realizan el cálculo de la suma de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Problemas geométricos
    - Como *Aryabhata*, *Brahmagupta* y *Madhava* que utilizan círculos y cuerdas para calcular valores de la función seno.
    - Como *François Viète* que utiliza funciones trigonométricas y figuras geométricas.

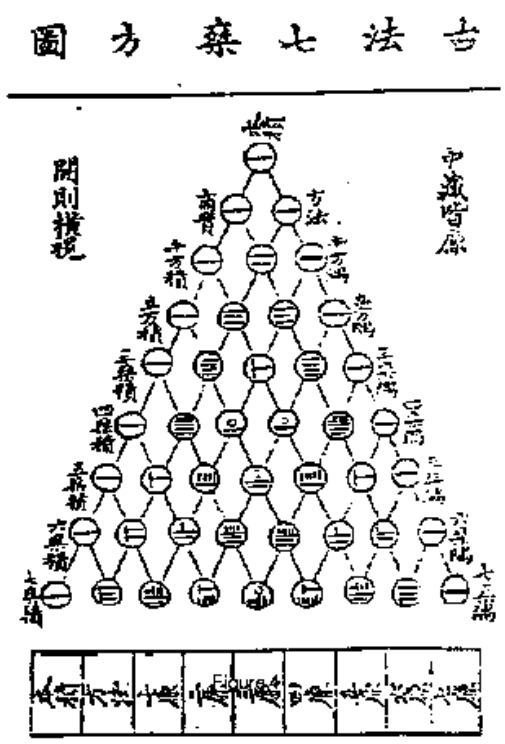
En general el conocimiento de los métodos y técnicas está restringido a grupos o clases privilegiadas.

Las imágenes siguientes nos permiten ver algunas de las formas en que eran presentados los resultados, esto nos permite conjeturar cómo era el DME de la época. En algunos casos sólo se presentan los resultados a modo de tablas de cálculo, como el caso de las tablillas de arcilla de los babilonios, o ejemplos completos de solución de problemas como en los egipcios, hindúes y chinos.
Papiro de Rhind: En donde alcanza a distinguirse las figuras correspondientes a problemas geométricos que involucran triángulos.

El libro **九章算術** o Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático: donde se presenta la solución de problemas de sucesiones aritméticas y geométricas.



El libro *Siyuan yujian* o Reflexiones Verdaderas de las Cuatro Incógnitas: Donde se utiliza el "triángulo de Pascal" y se desarrollan series de números enteros.



El libro *Siddhāntadīpikā*: Donde aparece la forma de calcular expansiones de la función seno.

लेख में इष्टचाप की ज्या निकालने की उस भारतीय विधि का वर्णन किया गया है जो कि इष्ट ज्या के टेलर श्रेणी के चार पदों तक के विस्तार से मिलती-जुलती है, केवल चतुर्थ पद के हर में ६ के स्थान पर ४ है। तत्सम्बन्धी गणितीय नियम संस्कृत के उन तीन श्लोकों में निहित है जो कि ईसवी की लगभग १५ वीं शताब्दी में लिखे एक ग्रन्थ में उद्धृत हैं।

equivalente a la construcción geométrica de

$$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{R\cos\alpha - \dfrac{R\sin\alpha + \dfrac{R\cos\alpha}{2D}}{2d}}{D}$$

equivalente a nuestro

$$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{\theta}{R}R\cos\alpha - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2 \frac{R\sin\alpha}{2} - \left(\frac{\theta}{R}\right)^3 \frac{R\cos\alpha}{4}$$

Las visiones sobre lo que es el trabajo matemático en esta etapa están marcadas por expresiones como la de *Brahmagupta*:

> *A person who can, within a year, solve $x^2 - 92y^2 = 1$ is a mathematician.*[51]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

O como lo que dice *Galileo Galilei*

> *Mechanics is the paradise of the mathematical sciences, because by means of it one comes to the fruits of mathematics.*[52,53]

Los matemáticos deben poder resolver problemas cuya importancia o valor social es clara para sus contemporáneos[54] sin importar la forma en que resuelvan esos problemas, llegar a la solución es suficiente demostración de que el método es correcto.
Los medios utilizados en esta época para escribir son el papiro, la piel de animales, la piedra y el papel.

En esta etapa existen centros de enseñanza, como las escuelas hindúes, a donde acuden aquellos que desean aprender las artes del cálculo. No tenemos información acerca de cómo era la enseñanza en cada uno de esos centros, sin embargo, analizando los textos que se producían y la forma en que se difundían los conocimientos podemos aventurarnos a dar una explicación.

Como puede verse en la imagen del Papiro de Rhind y en los textos chinos, la transmisión de los conocimientos acerca de las series se realiza mediante ejemplos concretos, es decir, el método se explica desarrollando un ejemplo de su aplicación sin dar demostraciones de los pasos seguidos. Sólo se dan indicaciones de la forma en que deben hacerse las construcciones

---

[51] Una persona que puede, en el lapso de un año, resolver $x^2 - 92y^2 = 1$ es un matemático.
[52] La mecánica es el paraíso de las ciencias matemáticas, porque por medio de ella uno llega a los frutos de la matemática.
[53] *Notebooks*, v. 1, ch. 20.
[54] Como el pago de impuestos, la ubicación de la Meca, etc.

geométricas o las expansiones para obtener cada elemento de la sucesión o la serie. Los hindúes, por ejemplo utilizaban elaboradas reglas métricas para escribir poemas que detallaban los algoritmos a seguir.

Podemos decir que el conocimiento de las series ingresa en forma transparente a las aulas, los alumnos/asistentes reciben los métodos tal y como son descubiertos por los sabios, y de esa misma forma pueden ser leídos en sus textos. Suponemos que esos textos debían ser disponibles para mucha gente, aunque no podemos afirmar que para todos. En el caso de Grecia se sabe que las escuelas eran herméticas y no cualquiera podía ingresar, sin embargo no tenemos datos semejantes acerca de los babilonios, egipcios, hindúes, etc.

Al analizar la línea de tiempo correspondiente a esta primera etapa se observa que la idea conductora o motivadora de los desarrollos está centrada en un **uso específico**, sin importar cómo se hizo o si puede ser generalizado a otras situaciones. En detalle, para esta etapa del desarrollo de las series infinitas la motivación parece estar basada en la aplicación concreta de las series, por ello decimos que esta etapa podría estar representada mediante la pregunta **¿Para qué?**

¿**Para qué** es la serie?

- Para calcular un área,
- para calcular la posición de una persona que debe rezar hacia la Meca.
- para encontrar el valor de una semicuerda (seno).
- para calcular posiciones y predecir eclipses.
- para calcular la repartición de panes, semillas, etc.
- para calcular el valor de π.

Esto nos conduce a otra caracterización de esta etapa, la cual está relacionada con el concepto de serie infinita, es decir, en este periodo **la serie infinita es vista como una suma**. Tal vez no se tiene una idea completa de cómo extender las sumas de dos, tres o más sumandos, sin embargo, esto no detiene la necesidad de calcular valores específicos de la serie mediante la suma de sus primeros elementos.

Período II (El nacimiento del Cálculo)

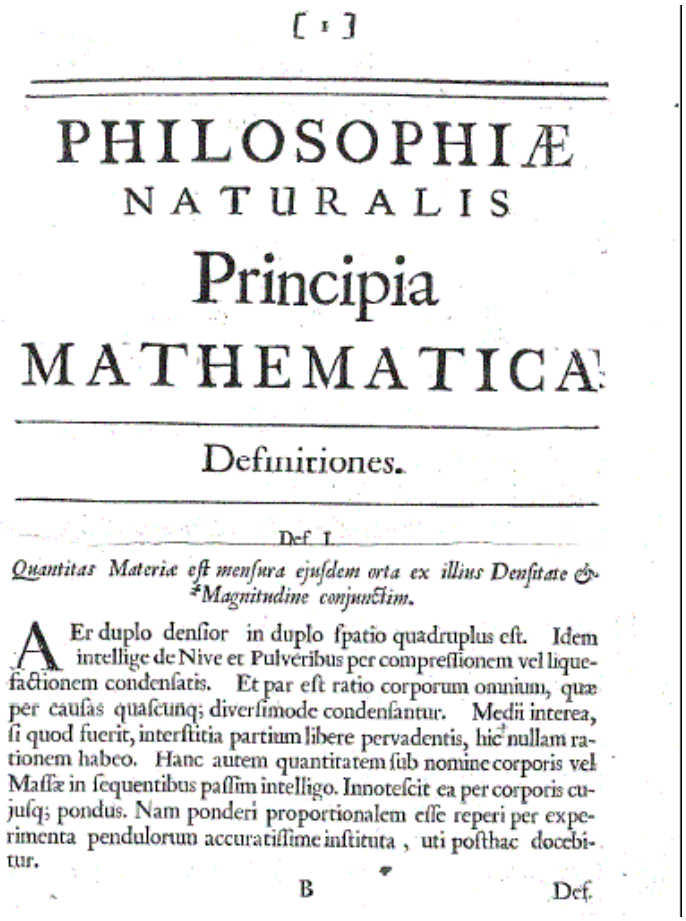
En esta etapa se presentan los inicios del cálculo, empezamos a ver la aparición de series infinitas por todos lados y por todas las razones imaginables, pero al final de un día de trabajo, las series surgen por tres razones fundamentales:

- Por manipulaciones algebraicas
    - Cuando *Newton* extrae la raíz cuadrada de una función
    - Cuando *Newton* divide dos expresiones algebraicas
    - Cuando *Newton* expande un binomio elevado a una potencia fraccionaria
    - Cuando *Leibniz* utiliza el triángulo de pascal para obtener series de tipo armónico.
- Por construcciones geométricas
    - Cuando *Mengoli* suma números triangulares.
    - Cuando *Brouncker, Newton, Leibniz* y otros calculan cuadraturas, es decir áreas.
- Por el uso del cálculo
    - Cuando *Newton* resuelve ecuaciones de trayectorias y movimiento de proyectiles.
    - Cuando *Leibniz* utiliza una ecuación integral y derivándola obtiene una serie.
    - Cuando *Johan Bernoulli* resuelve ecuaciones diferenciales.
    - Cuando *Johan Bernoulli* calcula series mediante integración.

Estas son las fuentes más importantes de expansiones de series y, comparando con la etapa anterior podemos encontrar una fuerte tendencia hacia la aplicación en más áreas del conocimiento. Además, debe recordarse que en esa época las funciones eran objetos diferentes a los que nosotros entendemos actualmente por función; también distinguían las curvas por su origen y las llamadas curvas mecánicas no tenían una expresión algebraica o "fórmula" que les facilitara su estudio. En este sentido las series eran una gran ayuda.

Obsérvese las imágenes siguientes en donde queda patente el uso de las series y hasta cierto punto una incipiente transposición didáctica y el DME de la época. Para este momento aún no se escriben libros pensando en el estudiante por lo que consideramos que no hay diferencia entre los "textos eruditos" y los "textos escolares".

Libro *Philosophiae naturalis principia mathematica* donde Newton utiliza series para resolver problemas



[1]

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
Principia
MATHEMATICA

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AEr duplo denſior in duplo ſpatio quadruplus eſt. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunq; diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſq; pondus. Nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

B Def.

En el escolio del lema XI podemos ver que Newton usa una serie para el ángulo.

habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat D B ſucceſſive ut A D^2, A $D^{\frac{1}{2}}$, A $D^{\frac{1}{3}}$, A D^{1}, A $D^{\frac{1}{7}}$, A $D^{\frac{1}{7}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinite major, & quilibet poſterior infinite major priore. Sed & inter duos quoſvis

Libro *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones* de *Newton*.

$$b+x)\,a^2+0\left(\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\frac{a^4x^4}{b^5}\cdots\right.$$

$$\underline{a^2+\frac{a^2x}{b}}$$

$$\underline{-\frac{a^2x}{b}+0}$$

$$\underline{-\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{b^2}}$$

$$\underline{+\frac{a^2x^2}{b^2}+0}$$

$$\underline{+\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3}}$$

$$\underline{-\frac{a^2x^3}{b^3}+0}$$

$$\underline{-\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4}}$$

$$+\frac{a^2x^4}{b^4}\cdots$$

Resultará

$$\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}\cdots,$$

una serie que al ser continuada al infinito es equivalente a

$$\frac{a^2}{b+x}.$$

O si se pone x como el primer término del divisor:

$$x+b)\,a^2$$

producirá

Trabajo de *Leibniz* donde utiliza el triángulo de Pascal armónico

„Beiden Dreiecken ist gemeinsam, dass die schiefen Reihen sowohl die Summen als auch die Differenzen geben. Im arithmetischen Dreieck gibt eine schiefe Reihe die Summe der vorhergehenden schiefen Reihe und die Differenzen der nachfolgenden; im harmonischen Dreieck dagegen ist eine schiefe Reihe die Summe der nachfolgenden und die Differenz der vorhergehenden. Daraus folgt

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{0} = \infty$$
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots = \frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \ldots = \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots = \frac{4}{3}$$

u. s. f.“ Der Wert der ersten Reihe wird hier offenbar aus

Libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de *L'Hôpital*

& partant que MC doit etre prise double de MG ou de BE.

LEMME.

96. S'IL *y a un nombre quelconque de quantités* a, b, c, d, e, *&c. ſoit que ce nombre ſoit fini ou infini, ſoit que ces quantités ſoient des lignes, ou des ſurfaces, ou des ſolides; la ſomme* a — b + b — c + c — d + d — e, *&c. de toutes leurs différences eſt égale à la plus grande* a, *moins la plus*

petite e, *ou ſimplement à la plus grande lorſque la plus petite eſt zero.* Ce qui eſt viſible.

COROLLAIRE I.

97. LES ſecteurs *CMm. CGH* étant ſemblables, il eſt

Para esta etapa el material utilizado en su mayoría es el papel, lo que permite que los conocimientos sean transmitidos por medio de tratados y libros, además de que las discusiones de conceptos y métodos se realizan mediante cartas entre los científicos de la época.

Los tratados suelen ser obras escritas por un matemático que muestra sus métodos particulares que ha desarrollado durante sus investigaciones personales, como el *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones* de Newton, o el compendio de cinco obras de J. Bernoulli. En estas obras aparecen métodos presentados mediante ejemplos donde se aplica el método en forma específica a un caso particular durante la resolución de un problema (como hace *Newton* en los *Principia*), o para calcular desarrollos mediante álgebra (como *Newton* en *Tratado de Métodos*…), o en construcciones y arreglos geométricos (como *Leibniz*), o para resolver ecuaciones diferenciales (como los *Bernoulli*).

Esos métodos en ocasiones aparecen con generalizaciones que suelen ser demostradas mediante argumentos y construcciones geométricas, mediante argumentos filosóficos o mostrando el proceso completo de deducción sin establecer rigurosamente muchas de las operaciones que realizan. Aún las definiciones sufren de esta falta de rigor, como *Newton* dice en los *Principia*

> *I will not define time, space, place and motion, as being well known to all…*[55]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Por lo anterior podemos decir que *Newton* intenta dar un poco de orden a la ciencia estableciendo elementos básicos de todos conocidos y por lo tanto el ingreso de estos conocimientos a la escuela se presenta nuevamente en forma transparente, es decir, el estudiante al leer algunas obras sólo debe seguir el ejemplo en que se aplica un método para desarrollar una función, ya que no existen razones o pasos ocultos. El rigor matemático de la época aún no exige una axiomatización mayor, quizás porque los problemas aún permiten ver que la solución es correcta pues "funciona" en la realidad.

[55] No definiré tiempo, espacio y movimiento, pues son de todos conocidos.

Además, es a finales de este período cuando el uso del cálculo se extiende y su manejo libre y sin restricciones, sin comprender exactamente por qué funciona, empieza a provocar la aparición de algunos resultados que son imposibles debido a que contradicen valores o comportamientos conocidos. Comentarios de matemáticos de gran talla nos conducen en este sentido, como cuando *Johann Bernoulli* dice

> *A quantity which is increased or decreased by an infinitely small quantity is neither increased nor decreased.* [56]
>
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Aunado a esto, la falta de una teoría de series infinitas provoca el surgimiento de razonamientos filosóficos más que matemáticos, como dice *Wallis*

> *Whereas Nature does not admit of more than three dimensions ... it may justly seem very improper to talk of a solid ... drawn into a fourth, fifth, sixth, or further dimension.*[57]

En la misma línea de argumentación *Leibniz* intenta explicar por qué

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}.$$

y *Jacob Bernoulli* dice sobre las series infinitas

> *The sum of an infinite series whose final term vanishes perhaps is infinite, perhaps finite.* [58]
>
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

sin poder proporcionar una razón matemática específica de este comportamiento.

Analizando los desarrollos logrados en este período de acuerdo a la línea de tiempo construida se puede observar que la idea conductora en esta etapa está regida por la pregunta **¿dónde?**

---

[56] Una cantidad que es incrementada o decrementada por una cantidad infinitamente pequeña no aumenta ni disminuye.
[57] Como la naturaleza no admite más de tres dimensiones… parece justo considerar como impropio el hablar de un sólido… dibujado en una cuarta, quinta, sexta o más dimensiones.
[58] La suma de una serie infinita cuyo término final se anula quizás es infinita, quizás finita.

¿**Dónde** se pueden aplicar series?

- En mecánica al abordar problemas de trayectorias, movimientos, etc.
- En geometría al hacer construcciones geométricas y analizar gráficas.
- En álgebra al expandir funciones aplicando operaciones de división y extracción de raíces.
- En análisis al expandir funciones para sustituir las funciones por su serie de potencias que es más fácil utilizar.
- En cálculo al utilizar series para resolver ecuaciones diferenciales.

El enfoque de las aproximaciones al uso de las series es preponderantemente aritmético y geométrico, como el mismo *Leibniz* dice

> *Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi.* [59]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

sin embargo rápidamente se está desarrollando un nuevo enfoque nunca antes utilizado y que es el analítico. En poco tiempo aparecen las series de potencias utilizadas en lugar de una función, en muchas ocasiones esto se debe a que las curvas mecánicas[60] no tienen una función simple que las represente y su manejo es muy complicado. En este sentido podemos citar nuevamente

> *Newton valued power-series expansions very highly, because they provide a means to reduce the analytical formulae of curves to the form in which all terms simply consist of a constant times a power of the variable.* [61]
> (Grattan-Guinnes, 1980, p. 54)

Esto nos conduce a caracterizar este período bajo la concepción de la serie infinita como una herramienta, la manipulación de las series infinitas está basada en su uso y aplicación, y

[59] la música es un ejercicio aritmético inconciente
[60] Curva mecánica: Es la curva generada por un punto o un cuerpo en movimiento, etc.
[61] Newton valoraba grandemente a las expansiones en series de potencias, debido a que proporcionaban medios para reducir las fórmulas analíticas de las curvas a una forma en la que todos los términos consistían de un múltiplo constante de una potencia de la variable.

nuevamente no importa la forma en que se obtiene ya que la solución del problema establece la convergencia de la serie utilizada. La visión práctica de la serie evita la preocupación sobre su convergencia, lo que importa es donde aplicar las series. Nuevamente *Newton* comenta en este sentido

> *The latest authors, like the most ancient, strove to subordinate the phenomena of nature to the laws of mathematics.*[62]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

El mismo *Newton* utiliza series a lo largo de su vida y aunque hace comentarios sobre series convergentes, nunca demuestra o da razonamientos explicando cómo es que llegó a concluir la convergencia de dichas series.

Sobre la convergencia de series *Leibniz* dice

> *Unde fit, ut in continuis extremum exclusivum tractari possit ut inclusivum*[63]

Es decir "*lo que es cierto hasta el límite, es cierto para el límite*" mostrando su confianza en que los procesos infinitos mantienen el comportamiento de los procesos finitos, lo cual lamentablemente no es cierto. Esta parece ser una forma, quizás, natural de pensar o de generalizar ya que aún en nuestros tiempos es común que los estudiantes presenten este tipo de pensamiento y realicen conjeturas sobre el comportamiento de procesos infinitos basados en unos cuántos pasos (proceso finito).

Al igual que en la etapa anterior, **la serie infinita es vista como una suma**, de una cantidad infinita de sumandos, pero a fin de cuentas sigue siendo considerada una suma. La importancia de la serie, debido a su aplicación continúa haciendo obligatorio el pensar en calcular el valor final de la serie (numérica o de funciones en un valor específico de la variable), es decir, sigue siendo imprescindible saber cuánto suma la serie infinita aunque ahora sí se piensa en todos los términos.

---

[62] Los autores recientes, al igual que los antiguos, se esforzaron en subordinar los fenómenos de la naturaleza a las leyes de la matemática.
[63] Carta a Golbach del 7 de agosto de 1745.

Período III (Desarrollo)

Durante la etapa del Desarrollo surgen grandes calculadores. Es la época dorada de mentes prodigiosas para realizar sumas de series infinitas.

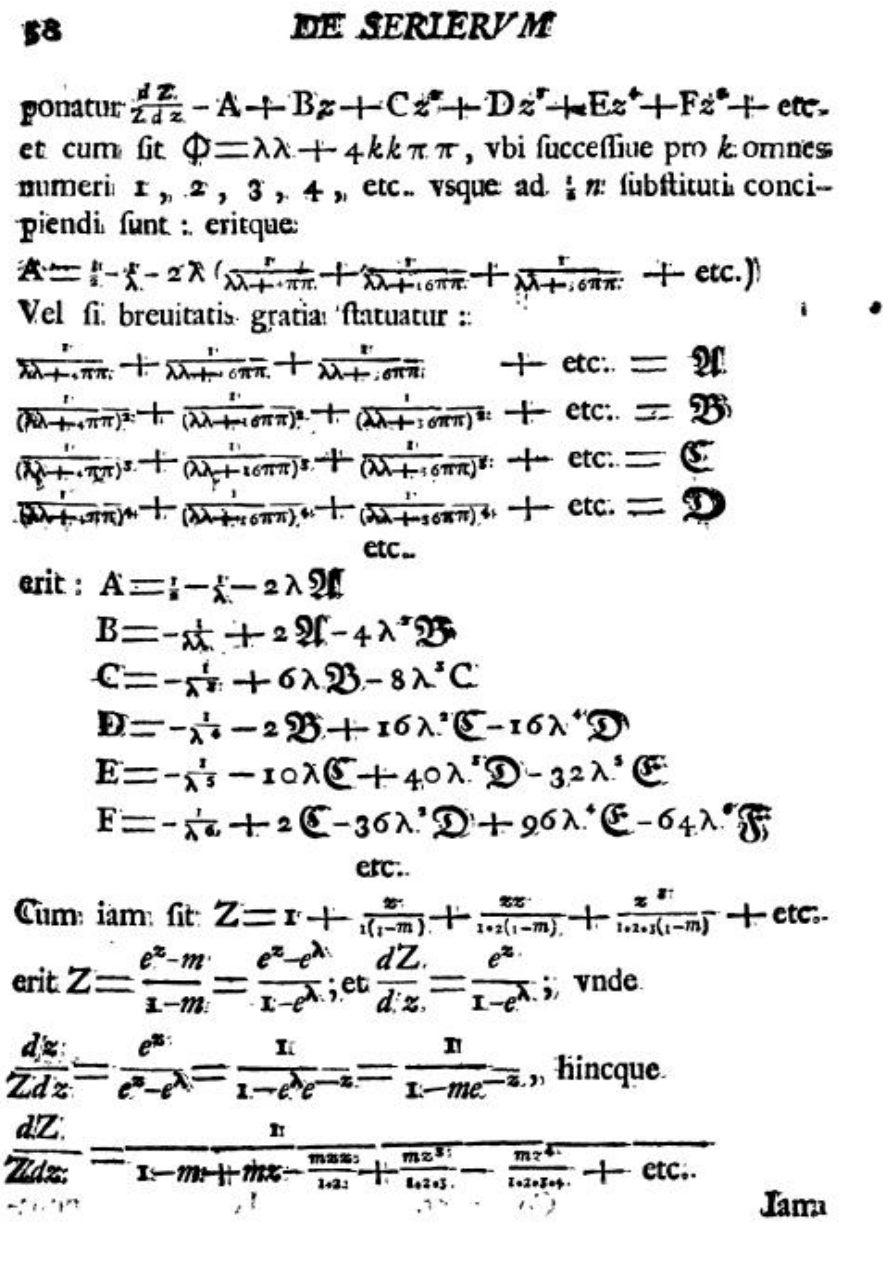
En este período las principales fuentes de series infinitas son

- Problemas físicos como las ecuaciones de onda y de calor.
- Problemas mecánicos como en el cálculo de trayectorias de planetas.
- Problemas de análisis como en la representación de funciones mediante series de potencias o series de funciones trigonométricas.
- Problemas geométricos como en el cálculo del valor de π.
- Problemas algebraicos como en la suma de recíprocos de primos, de naturales y sus potencias.

Para este período el papel es la forma dominante (si no es que la única) de medio impreso que es ampliamente explotada en la creación de libros, tratados, manuales, cartas, etc.

Las imágenes siguientes permiten observar las formas más comunes de presentar los resultados de las investigaciones realizadas. Analizamos a continuación la forma en que los principales científicos escribían sus resultados para tener evidencias del cómo las series infinitas son concebidas y enseñadas.

Euler proporcionaba resultados mediante múltiples manipulaciones algebraicas y hacía uso de fórmulas ya conocidas, se considera que sus métodos son poco rigurosos. Generalmente proporciona un método mediante el desarrollo de un ejemplo como puede verse en *De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum* de *Euler*, escrito en 1749 y publicado en 1753.



58 DE SERIERVM

ponatur $\frac{dZ}{Zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$
et cum sit $\Phi = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi$, vbi successiue pro k omnes numeri $1, 2, 3, 4,$ etc. vsque ad $\frac{1}{2}n$ substituti concipiendi sunt: eritque

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\left(\frac{1}{\lambda\lambda+1\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.}\right)$$

Vel si breuitatis gratia statuatur:

$$\frac{1}{\lambda\lambda+1\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.} = \mathfrak{A}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+1\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^2} + \text{etc.} = \mathfrak{B}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+1\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^3} + \text{etc.} = \mathfrak{C}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+1\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^4} + \text{etc.} = \mathfrak{D}$$
etc.

erit: $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$
$B = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda^2\mathfrak{B}$
$C = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3\mathfrak{C}$
$D = -\frac{1}{\lambda^4} - 2\mathfrak{B} + 16\lambda^2\mathfrak{C} - 16\lambda^4\mathfrak{D}$
$E = -\frac{1}{\lambda^5} - 10\lambda\mathfrak{C} + 40\lambda^3\mathfrak{D} - 32\lambda^5\mathfrak{E}$
$F = -\frac{1}{\lambda^6} + 2\mathfrak{C} - 36\lambda^2\mathfrak{D} + 96\lambda^4\mathfrak{E} - 64\lambda^6\mathfrak{F}$
etc.

Cum iam sit $Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1\cdot2(1-m)} + \frac{z^3}{1\cdot2\cdot3(1-m)} + \text{etc.}$
erit $Z = \frac{e^z - m}{1-m} = \frac{e^z - e^\lambda}{1-e^\lambda}$; et $\frac{dZ}{dz} = \frac{e^z}{1-e^\lambda}$; vnde

$$\frac{dz}{Zdz} = \frac{e^z}{e^z - e^\lambda} = \frac{1}{1 - e^\lambda e^{-z}} = \frac{1}{1 - me^{-z}},$$ hincque

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{1}{1 - m + mz - \frac{mmz^2}{1\cdot2} + \frac{mz^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{mz^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{etc.}}$$

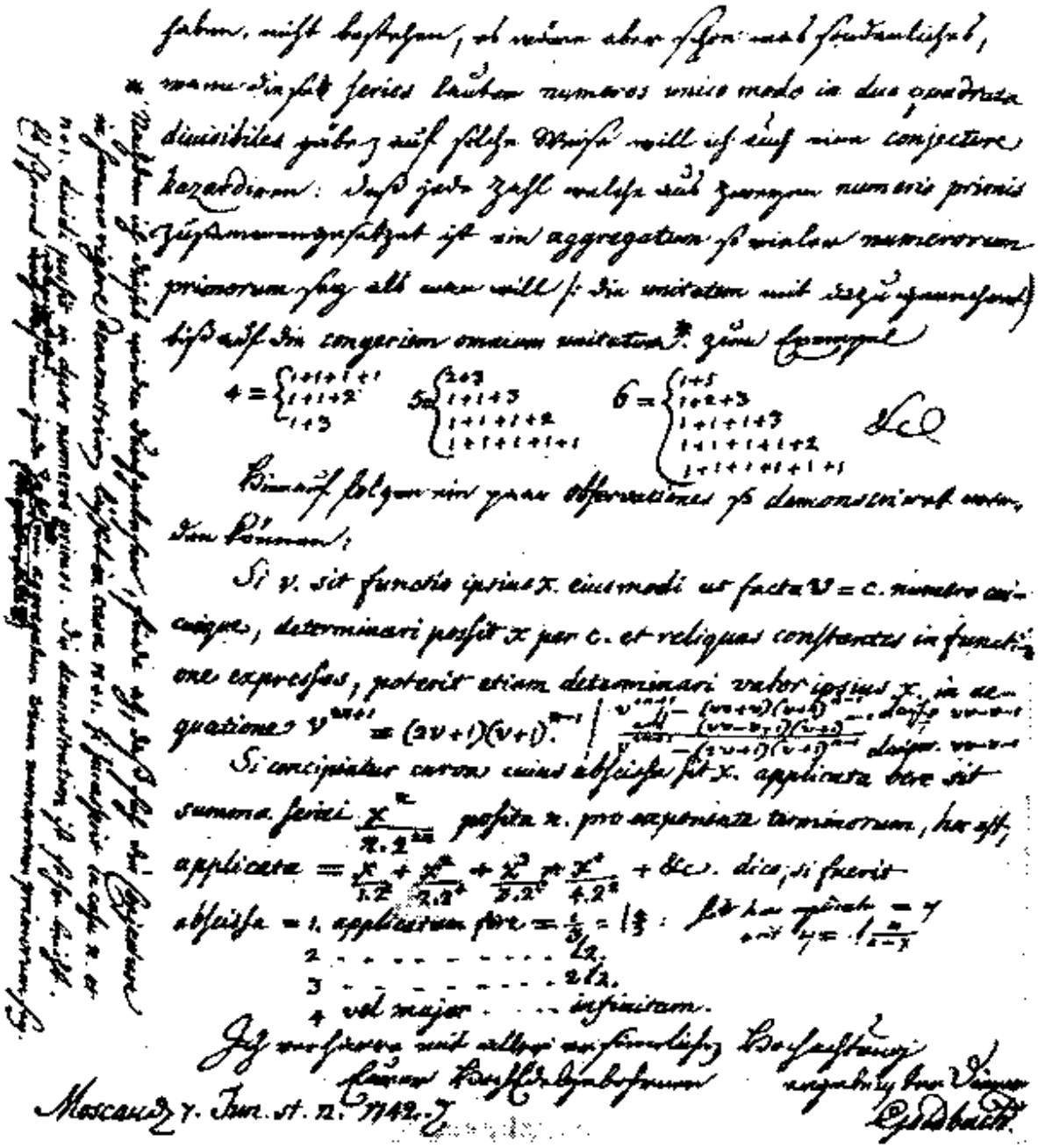
Iam

N. Bernoulli escribió varias objeciones acerca de las series, por ejemplo en el caso de que una serie pudiera ser la representación de dos funciones diferentes, Euler sólo acierta a responder

> *Darüber hat er zwar kein Exemple gegeben, ich glaube aber gewiss zu sein, dass nimmer eben dieselbe series aus der evolution zweier wirklich vershieden expressionum finitorum*[64].
>
> (Hardy, 1949, p. 14)

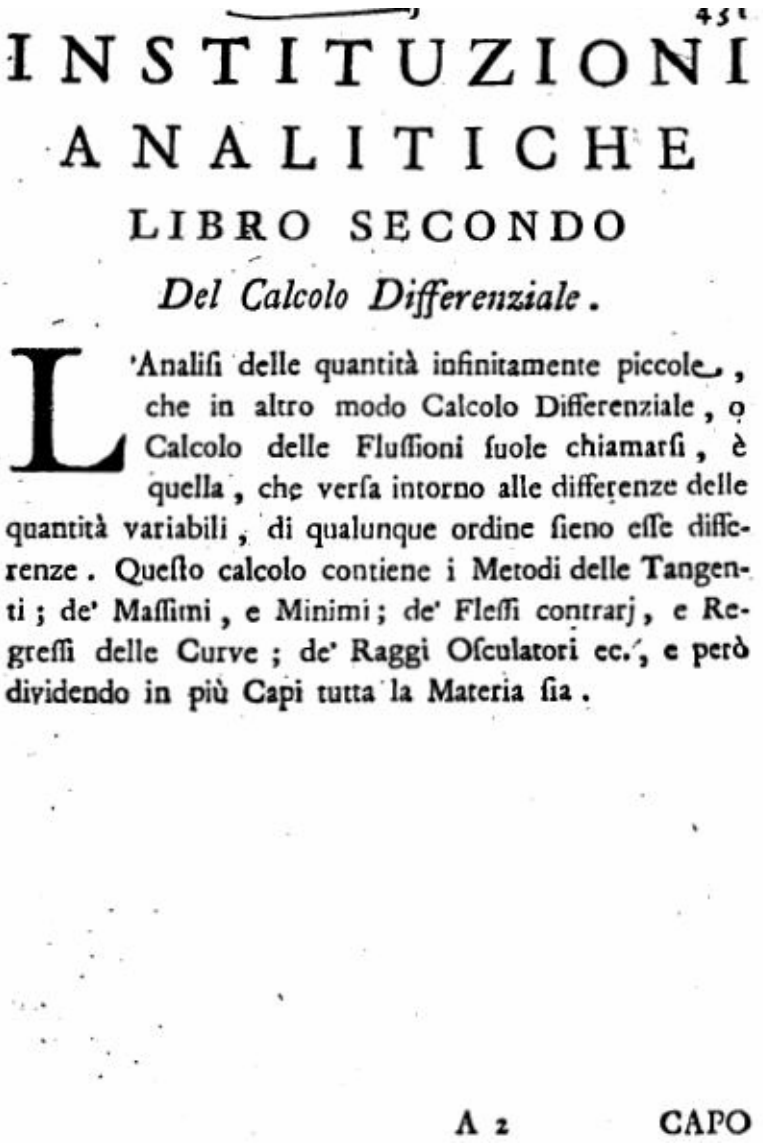
[64] Aunque no he dado con un ejemplo, confío en que nunca se encuentre la misma serie desarrollada para dos expresiones finitas diferentes.

Las cartas siguen siendo uno de los principales métodos de comunicación entre los científicos, como puede observarse en la carta de *Goldbach* a *Euler* fechada el 12 de enero de 1742 en donde comunica a *Euler* de resultados sobre las sumas de series.



El libro de *Agnesi* (1748) es considerado un parte aguas en la forma de escribir libros de texto, ya que por la forma de presentar los resultados, su sintetización de métodos y explicaciones

utilizando ejemplos seleccionados marca el inicio de la escritura de libros de texto dirigidos al estudiante más que a los eruditos.



451

INSTITUZIONI ANALITICHE

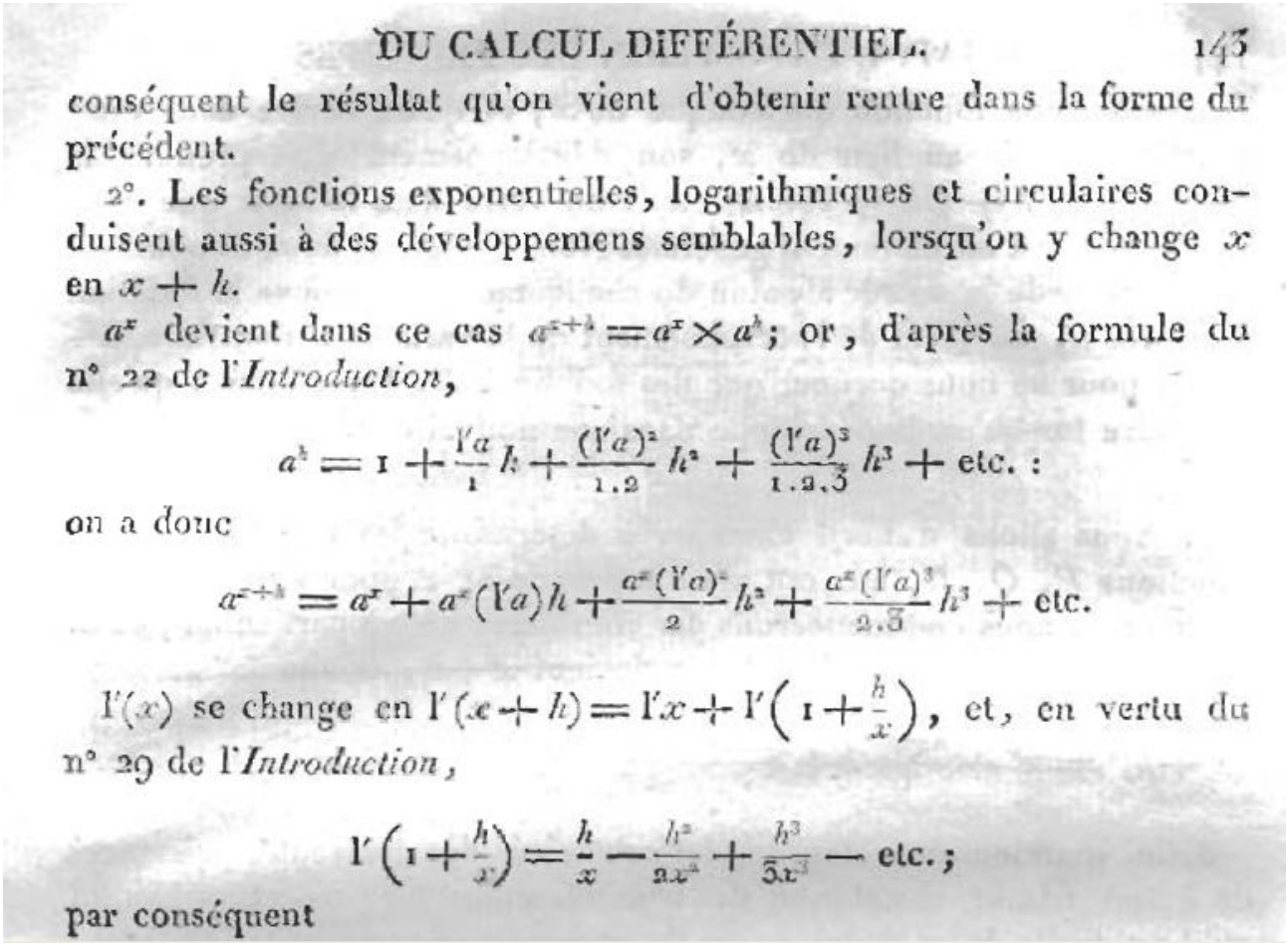
LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.

L'Analiſi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Fluſſioni ſuole chiamarſi, è quella, che verſa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine ſieno eſſe differenze. Queſto calcolo contiene i Metodi delle Tangenti; de' Maſſimi, e Minimi; de' Fleſſi contrarj, e Regreſſi delle Curve; de' Raggi Oſculatori ec., e però dividendo in più Capi tutta la Materia ſia.

A 2 CAPO

El libro más renombrado de la época es el de *Sylvestre Lacroix* (1800), en donde se define de manera sencilla lo que es una serie infinita. También aparece el uso de la serie infinita para definir lo que se entenderá por una función analítica. Se enuncia el método para desarrollar una función en serie de potencias y se presenta un ejemplo



DU CALCUL DIFFÉRENTIEL. 143

conséquent le résultat qu'on vient d'obtenir rentre dans la forme du précédent.

2°. Les fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires conduisent aussi à des développemens semblables, lorsqu'on y change x en $x+h$.

a^x devient dans ce cas $a^{x+h}=a^x\times a^h$; or, d'après la formule du n° 22 de l'*Introduction*,

$$a^h=1+\frac{\mathrm{l}'a}{1}h+\frac{(\mathrm{l}'a)^2}{1.2}h^2+\frac{(\mathrm{l}'a)^3}{1.2.3}h^3+\text{etc.}:$$

on a donc

$$a^{x+h}=a^x+a^x(\mathrm{l}'a)h+\frac{a^x(\mathrm{l}'a)^2}{2}h^2+\frac{a^x(\mathrm{l}'a)^3}{2.3}h^3+\text{etc.}$$

$\mathrm{l}'(x)$ se change en $\mathrm{l}'(x+h)=\mathrm{l}'x+\mathrm{l}'\left(1+\frac{h}{x}\right)$, et, en vertu du n° 29 de l'*Introduction*,

$$\mathrm{l}'\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\text{etc.};$$

par conséquent

Lacroix justifica este uso de las series diciendo en la introducción que

> *Pero existen funciones que no se podrían, en ningún caso, expresar por un número limitado de términos,… tales son, por ejemplo, los logaritmos …; los senos y cosenos … los progresos que en el análisis se han hecho se han introducido, y pueden proporcionar valores indefinidamente.* ***Tal es el origen de las series*** *Aunque no dan el valor exacto de las funciones a las cuales pertenecen,… todas las series… pueden observarse como el desarrollo de las funciones desconocidas de las que derivan.*[65]
>
> (Lacroix, 1810, p. 4)

Puede observarse de la línea del tiempo que los conocimientos generados sobre las series infinitas son comunicados de forma directa y mediante ejemplos de su aplicación. Las tutorías

[65] Cita completa en la referencia de *Lacroix* en el final de la etapa III.

personales son comunes en la época y normalmente el maestro comunica a su discípulo sus descubrimientos recientes, en las universidades que inician sus actividades se utilizan textos como el de *Agnessi* y *Lacroix* que utilizan explicaciones directas basadas en ejemplos adecuados y seleccionados.

Las series infinitas empiezan a tener mayor relevancia pero aún así su introducción a las aulas puede considerarse transparente, es decir, la transposición didáctica no parece provocar complicaciones con la naciente teoría de las series.

Tampoco parece haber mayor complicación con el DME de la época puesto que la terminología utilizada en los textos era justo la que se estaba inventando y que surgía de las aplicaciones, sin notaciones ni abstracciones artificiales.

Después de observar la línea de tiempo establecida en esta tercer etapa podemos afirmar que la pregunta conductora de este período es ¿**cuánto**?

¿**Cuánto** suma la serie?

- *Euler* calcula la suma de muchas series.
- *Euler* proporciona métodos para calcular la suma de series infinitas de forma específica.
- *Stirling* proporciona fórmulas para hacer sumas.
- *Stirling* proporciona métodos que permiten acelerar la convergencia para ver la suma de una serie infinita.
- *de Moivre* proporciona métodos de series.
- *Goldbach* en correspondencia con Euler proporciona el valor de muchas series.
- *Johan* (*I*) *Bernoulli* proporciona métodos para sumar series.

En esta etapa se alcanza el máximo interés en el cálculo de la suma "final" de una serie infinita, ya sea numérica o de funciones, se buscan métodos que permitan calcular la suma de un modo rápido. Y en esta actividad se ven involucrados científicos de todas las áreas del conocimiento, además recordemos que en aquella época no se hacía distinción entre matemáticos, físicos, ingenieros, etc.

Este es el último período en que una serie infinita será considerada como una **suma**; es decir, al terminar este período la importancia del valor de la serie será relegada. Así, los métodos y aproximaciones que se inventan siguen mostrando una aproximación pragmática a las series ya que **la aplicación de la serie sigue siendo más importante que la serie en sí misma**. No importa tanto la serie como objeto matemático sino como herramienta, y su estudio tiene importancia más por los problemas que son resueltos que por los problemas que ocasiona el manejo libre de las series. Cuando no aparecen razones teóricas que respalden las afirmaciones surgen las justificaciones metafísicas, aún *Euler* lo hace:

> *Per relationes metaphysicas … quibus in analysi acquiescerer queamus* [66]
> (Hardy, 1949, p.14)

Estos problemas son ocasionados más por la fe puesta en dichos métodos que por los métodos mismos. El cambio en el orden de los elementos de una serie (condicionalmente convergente) provoca que la serie presente comportamientos "extraños", en algún momento la serie suma un valor y después suma otro valor distinto. La falta de una teoría axiomática de las series permite todas estas paradojas. La creencia de *Euler* y sus contemporáneos sobre la regularidad de los métodos crea muchos de estos problemas. *Euler* pensaba que la convergencia y la suma de la serie eran sinónimas y que para el caso de una serie divergente no tenía sentido la palabra suma

> *Notable enough, however, are the controversies over the series 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... whose sum was given by Leibniz as 1/2, although others disagree. ... Understanding of this question is to be sought in the word "sum"; this idea, if thus conceived -- namely, the sum of a series is said to be that quantity to which it is brought closer as more terms of the series are taken -- has relevance only for convergent series, and we should in general give up the idea of sum for divergent series.*[67]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

[66] Por relaciones metafísicas… uno puede descansar en el análisis.
[67] Son muy notables, sin embargo, las controversias acerca de la serie 1-1+1-1+1-… cuya suma fue dada por Leibniz como ½, aunque otros discrepan. … La comprensión de esta pregunta debe ser buscada en la palabra suma; esta idea, si es así concebida – digamos, la suma de la serie será la cantidad a la cual se acercará conforme se tomen más términos de la serie- tiene relevancia sólo para las series convergentes, y en general debiéramos abandonar la idea de suma para series divergentes.

La ingenuidad generalizada de la época acerca del comportamiento de las series infinitas está basada en el uso exclusivo de series que surgen en forma natural de los problemas físicos, geométricos, algebraicos o mecánicos que se estudian. En este período no se estudian series que surgen o se construyen de la nada, y por lo tanto su convergencia sigue estando garantizada por el marco del cuál surgió. Esta es una causa de la fe mostrada por *Euler* en los métodos regulares[68].

Al respecto, la siguiente frase de Laplace indica por qué los contemporáneos de Euler comparten la misma fe en los métodos regulares

> *Read Euler: he is our master in everything.*[69]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Y es este seguimiento a las palabras de *Euler* el que en parte provoca que todos se enfoquen en los resultados y no en el rigor de las demostraciones. El mismo *Euler* dijo que no tenía una demostración general pero que analizaba varios casos:

> Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonſtrationem firmam adhuc eruere non potuiſſe; interim tamen eius veritas pro omnibus ſolidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoſcetur, ita vt ſequens inductio vicem demonſtrationis gerere queat.

(Euler, 1758, p. 119)

Pero más adelante afirma que le es suficiente con haber analizado casos particulares y de ahí cree en la verdad de la proposición general:

> Cum igitur veritas propoſitionis in his omnibus caſibus ſibi conſtet, dubium eſt nullum, quin ea in omnibus omnino ſolidis locum habeat, ſicque propoſitio ſufficienter videtur demonſtrata.

(Euler, 1758, p. 124)

es decir

[68] Aunque Euler no supo que NO todos los métodos son regulares, esta teoría se desarrolló posteriormente.
[69] Leed a Euler: él es nuestro maestro en todo.

> *…he de admitir que aún no he sido capaz de idear una prueba estricta del teorema… Sin embargo puesto que su verdad ha sido establecida en tantos casos, no puede haber duda de que vale para cualquier sólido. Así la proposición parece estar satisfactoriamente demostrada…*[70]
> (Lakatos, 1978, p. 23)

Estos comentarios muestran una línea de pensamiento pragmático, si el teorema o método da soluciones correctas en casos específicos entonces debe ser correcto en el caso general. Esto es un pensamiento que parece ser semejante al de Leibniz, cuando aplica propiedades de los términos de una serie a la suma de la serie.

Comentando al respecto, *Hardy* escribió acerca de los primeros analistas y su ortodoxia

> *…their work had the arithmetical spirit of that of Greeks. What is lacking in the work of Cavallieri, Wallis, Brounker, Gregory and Mercator is not rigour but technique.*[71]
> (Hardy, 1949, p. 13)

En el enfoque analítico, las series infinitas de funciones toman también su máxima importancia durante este período. Este enfoque iniciado por *Newton* y *Leibniz* sobre el uso de las series infinitas como una función que puede sustituir a otra función (de la que no se conoce su fórmula o que tiene una expresión analítica muy complicada), es desarrollado y explotado grandemente durante este tercer período. *Euler* y los *Bernoulli* hacen mucho trabajo en este sentido, sin embargo el gran respaldo que le da *Lagrange* a la serie de Taylor como base del análisis de funciones permite que dicha serie sea colocada en una posición importante dentro de la incipiente teoría de series infinitas.

Lagrange afirmó que era suficiente estudiar la serie de Taylor de una función dada para poder analizar por completo a la función original, y lamentablemente estaba en un error tal y como *Cauchy* lo mostraría después. *Lagrange* anteponía la aplicación a la teoría de series como puede leerse en su comentario

[70] Comentario acerca de la demostración de su famosa fórmula $V-A+C=2$
[71] Su trabajo tenía el espíritu aritmético de los griegos. Lo que falta en el trabajo de Cavallieri, Wallis, Brounker, Gregory y Mercator no es el rigor sino la técnica.

> *I regard as quite useless the reading of large treatises of pure analysis: too large a number of methods pass at once before the eyes. It is in the works of applications that one must study them; one judges their ability there and one appraises the manner of making use of them.*[72]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Fourier a su vez, pensó que en vez de las series de potencias, las series trigonométricas eran suficientes para expresar y estudiar a las demás funciones:

> *The differential equations of the propagation of heat express the most general conditions, and reduce the physical questions to problems of pure analysis, and this is the proper object of theory.*[73]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

pero desde un inicio matemáticos contemporáneos a él opusieron muchas objeciones; matemáticos posteriores mostraron que en general la suposición de *Fourier* también era errónea.

Esta época termina cuando la serie nace como objeto matemático.

Período IV (Sistematización)

Este período marca el nacimiento de las series como un nuevo objeto matemático, aunque en períodos anteriores existen inquietudes sobre el comportamiento de las series infinitas, el pragmatismo domina las aproximaciones y enfoques en el uso de las series. Este pragmatismo inicia un rápido declive con la muerte de *Lagrange* y la aparición de *Cauchy*.

Las principales fuentes de donde surgen las series infinitas continúan siendo

[72] Considero muy inútil la lectura de grandes tratados de análisis puro: una gran cantidad de métodos pasan ante los ojos, es en los trabajos de aplicaciones donde uno debe estudiarlos, uno juzga ahí la capacidad (de los métodos) y valora la manera de hacer uso de ellos.
[73] Las ecuaciones diferenciales de la propagación del calor expresan las condiciones en forma general, y reducen las cuestiones físicas a problemas de análisis puro y este es el objeto central de la teoría.

- Problemas físicos como las ecuaciones de onda y de calor.
- Problemas mecánicos como en el cálculo de trayectorias de planetas.
- Problemas de análisis como en la representación de funciones mediante series de potencias o series de funciones trigonométricas.
- Problemas algebraicos como en la suma de recíprocos de primos, de naturales y sus potencias.

Aunada a éstas, aparece una nueva forma de encontrar series infinitas y que es **la construcción de series** con condiciones o características específicas. Esta nueva generación de series será utilizada para demostrar la veracidad o falsedad de los criterios de convergencia y la incipiente teoría de las series de Fourier que generará grandes avances a la par de múltiples discusiones por todas las afirmaciones que se han hecho y que resultan falsas o, en el mejor de los casos, ciertas bajo condiciones estrictas sobre la forma y comportamiento de las funciones que se están considerando.

En el ambiente de la enseñanza, surgen libros que siguen o copian el estilo riguroso de *Cauchy* tanto en las definiciones como en la forma de escribir teoremas y demostrarlos. Aunque se sigue utilizando la argumentación con palabras, se inicia un lento pero seguro uso de notaciones que ahorrarán palabras y aclararán relaciones entre las variables, funciones y operaciones a realizarse.

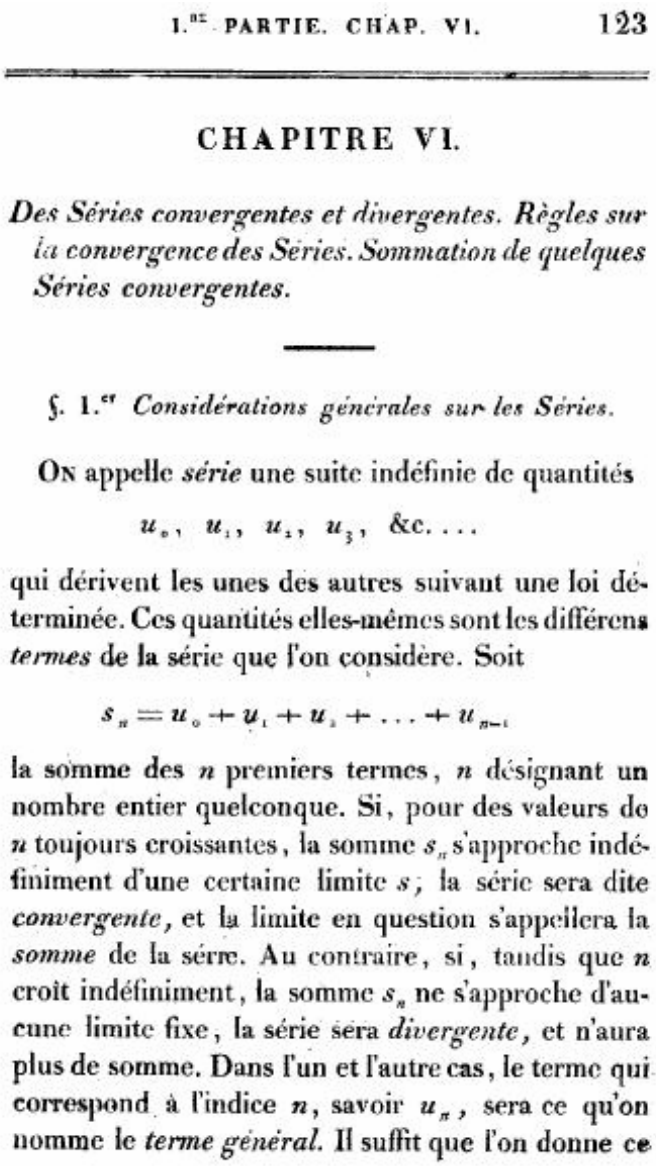
De acuerdo a la línea de tiempo trazada, *Cauchy* publicó su *Cours d'Analyse* en 1821 marcando una nueva forma de hacer matemáticas basándose en un rigor matemático no utilizado antes.[74]

Al mismo tiempo inicia la tradición de que los profesores de la École Polytechnique escriban sus notas de clase en los llamados Cours o Traité.

Veamos ahora diferentes imágenes de obras correspondientes a este período de modo que podamos extraer las características más importantes.

[74] Salvo *Gauss* que tenía su propio nivel de rigor que en la mayoría de los casos rebasaba a sus contemporáneos, y que lamentablemente por esta razón no era seguido.

La definición de serie infinita dada por *Cauchy* aparece en la siguiente imagen, (Cauchy, 1821, p. 123)



CHAPITRE VI.

Des Séries convergentes et divergentes. Règles sur la convergence des Séries. Sommation de quelques Séries convergentes.

§. 1.er *Considérations générales sur les Séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c. \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens *termes* de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s; la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce

Más adelante comienza a enunciar teoremas sobre la convergencia de series y los demuestra; por ejemplo, en la siguiente imagen (Cauchy, 1821, p. 132) podemos ver el enunciado del criterio de convergencia de la raíz,

continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x=-1$, $x=1$; ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

---

§. 2.e *Des Séries dont tous les termes sont positifs.*

Lorsque la série

(1) $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$, &c. ...

a tous ses termes positifs, on peut ordinairement décider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du théorème suivant.

1.er THÉORÈME. *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croit indéfiniment, l'expression* $(u_n)^{\frac{1}{n}}$; *et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série* (1) *sera convergente, si l'on a* $k<1$, *et divergente, si l'on a* $k>1$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $k<1$, et choisissons à volonté entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

En este tenor, *Abel* publica artículos y pequeños tratados que superan a *Cauchy* en rigor, llegando a corregir algunas demostraciones dadas por *Cauchy*; de hecho, se dice que *Abel* era más "*cauchiano*" que *Cauchy*.

Otro libro considerado importante para este período es *Théorie Élémentaire des Séries* de *Berger*, en donde se puede apreciar cómo la forma y estilo de rigor cauchiano ha permeado en los escritores de libros.

De hecho, *Berger* aclara que se basará en las principales obras de la época y que proporcionará los principales resultados relativos a las series

> *Nous avons fait paraitre á Montpellier, en décembre 1858, une Leçon sur les séries ; nous la reproduisons aujourd'hui avec de nouveaux développements.*
> *Nous avons essayé de classer méthodiquement les principaux théorèmes relatifs aux séries, et de les exposer avec assez de simplicité pour qu'ils pussent être introduits dans le cours de mathématiques spéciales des Lycées. Ces théorèmes sont disséminés dans divers ouvrages ou recueils scientifiques qu'il n'est pas toujours facile de se procurer. Nous citerons en particulier : le Cours d'analyse algébrique de Cauchy, le Journal de mathématiques pures et appliqées, publié par M. Liouville, les Leçons faites par M. Liouville à l'École polytechnique, les Leçons faites par M. Duhamel à l'École normale en 1844, celles que M. Vieille a données dans le même Établissement, un Mémoire de M. Bertrand, inséré dans le tome VII du Journal de M. Liouville, un Mémoire de M. Ossian Bonnet, inséré dans le tome VIII du même journal, un Mémoire d'Abel qui fait partie du tome 1er de ses Œuvres, enfin un Mémoire de MM. Briot et Bonquet, inséré dans le trente-sixième cahier du Journal de l'École polytechnique.*[75]

Por lo anterior las definiciones de *Berger* son semejantes a las hechas por *Cauchy*

[75] Hicimos en Montpellier, en diciembre de 1858, una Lección sobre las series; la reproducimos hoy con nuevos desarrollos.
Intentamos clasificar metódicamente los principales teoremas relativos a las series, y exponerlos con bastante simplicidad para que pudieran introducirse en el curso de matemáticas especiales de los Colegios. Estos teoremas aparecen en distintas obras o recopilaciones científicas que no siempre son fáciles de obtener. Citaremos en particular: el Curso de análisis algebraico de Cauchy, el Journal de mathématiques pures et appliqées, publicado por el Sr. Liouville, las Lecciones hechas por el Sr. Liouville a la Escuela Politécnica, las Lecciones hechas por el Sr. Duhamel a la Escuela normal en 1844, las que M. Vieille diera en el mismo lugar, una Memoria del Sr. Bertrand, insertado en el volumen VII del Journal del Sr. Liouville, una Memoria del Sr. Ossian Bonnet, insertado en el volumen VIII del mismo Journal, una Memoria de Abel que forma parte del primer volumen sus obras, finalmente una Memoria de los Sres. Briot y Bonquet, insertada en el trigesimosexto tomo del Journal de la Escuela politécnica.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES SÉRIES

§ I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES SÉRIES.

Une série est une suite indéfinie de quantités qui dérivent les unes des autres, suivant une loi déterminée.

Ces quantités constituent les termes de la série. Elles peuvent avoir une valeur numérique déterminée, ou dépendre d'une ou de plusieurs variables susceptibles de diverses valeurs numériques. Nous les représenterons par

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \ldots\ldots$$

et nous appellerons s_n la somme algébrique des n premiers termes.

Les séries doivent leur origine au développement de certaines fonctions qu'il peut être utile de transformer, soit qu'on veuille calculer leur valeur numérique, soit qu'on veuille étudier les propriétés dont elles jouissent; mais on considère aussi les séries en elles-mêmes, sans qu'on sache d'avance si elles proviennent du développement de fonctions connues.

Siguiendo a Cauchy, Berger define serie infinita mediante la sucesión de sumas parciales, para luego definir la convergencia de la serie basándose en el límite de la sucesión de sumas parciales de la serie considerada.

Más adelante, Berger establece condiciones necesarias para la convergencia de series aún cambiando el orden de los términos de ésta

— 8 —

quantité donnée, pour n assez grand ; cela ne veut pas dire que u_{n+1} soit plus petit que u_n, u_{n+2} plus petit que u_{n+1}, etc. Un terme à une distance finie de u_n peut être plus grand que lui. En voici un exemple :

La série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots\ldots$$

est convergente et reste encore convergente quand on intervertit l'ordre des termes. Or, on conçoit qu'on puisse mettre après un terme quelconque plusieurs termes plus grands que lui.

La condition énoncée plus haut est nécessaire pour qu'une série soit convergente, mais elle ne suffit pas.

On conçoit, en effet, qu'un nombre infini de termes infiniment petits puisse donner une somme infiniment grande. En voici un exemple. Si dans la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots$$

on groupe les termes de la manière suivante, à partir de $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \ldots\ldots$$

on remarque que chaque groupe est plus grand que $\frac{1}{2}$. La somme croît donc sans limite et la série est divergente.

La série suivante

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \ldots\ldots$$

qui peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots\right)$$

est aussi divergente.

Basados en lo anteriormente expuesto, podemos decir que en las escuelas por primera vez hay cambios importantes tanto en la forma como en el enfoque de las series infinitas. Es decir, de las imágenes y comentarios de *Berger* se observa cómo el DME predominante empieza a estar basado en el rigor, a partir de ahora la forma de expresarse y trabajar, con matemáticas en lo general y con las series en particular, estará determinado por el discurso matemático vigente.

Ahora los estudiantes, siguiendo a *Cauchy*, *Abel* y los matemáticos contemporáneos, deben estudiar en abstracto la definición de serie y después los criterios de convergencia que se

desarrollarán ampliamente durante este período. Finalmente, el enfoque riguroso vence al pragmático. **A partir de ahora es más importante saber si la serie converge que buscar la suma de la serie**.

Esto refleja cambios en la transposición didáctica de las series infinitas, los autores de libros que escriben textos específicamente para la enseñanza empiezan a seleccionar el material que de acuerdo a su criterio es necesario conocer, todos los Cours y Traité de los franceses dejan conocimientos "fuera de su alcance" y privilegian aquellos conocimientos que son acordes a su visión particular de las matemáticas. En este momento la transposición didáctica ha dejado de ser transparente para empezar a eliminar, modificar, privilegiar y oscurecer conocimientos. , Ahora empiezan a aparecer definiciones abstractas que no permiten ver el porqué definir sucesión o serie de una forma determinada y no de otra manera diferente, además ya no aparecen los problemas que dieron origen a esos conceptos recién definidos. El objeto "serie infinita" de Newton, Leibniz, Euler y los Bernoulli no será el mismo que estudiarán Cauchy, Abel y sus contemporáneos. Este es un proceso de transposición que no se ha detenido durante dos siglos.

Analicemos ahora el por qué se presentan tantos cambios.

Aunque *Gauss* inicia este período mediante su trabajo sobre series hipergeométricas, originalmente sus estudios siguen partiendo de una aplicación que en este caso es de astronomía. Sin embargo, su estudio detallado y riguroso de varios casos de convergencia de esta serie particular inicia un nuevo enfoque sobre las series infinitas, a saber, la demostración rigurosa de todas las afirmaciones sobre la serie estudiada.

En su *Cours de Analyse*, *Cauchy* inicia con una frase que marcará el estudio de las series infinitas desde entonces,

> *…Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quells cas les séries peuvent être sommées, on, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence ; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui'me paraissent mériter quelque attention.*[76]
> (Cauchy, 1821, p. V)

Además realiza comentarios atacando a sus contemporáneos

> *…an algebraic formula remains true only under certain conditions, and for values of the quantities to which it refers…[he rejects the] grave error of thinking that one finds certitude only on geometrical proofs* [77]
> (Gardiner, 2002, p. 18)

es decir, *Cauchy* rechaza el uso de "leyes algebraicas universales" que permiten la manipulación de infinitos y series infinitas.

En este mismo sentido, *Abel* pronunció múltiples críticas a sus contemporáneos por la falta de rigor en la matemática en general y en las series infinitas en particular, como se lee en *Binomial Paper* de 1826 donde habla del camino marcado por *Cauchy* hacia el rigor matemático

> *The excellent work of Mr. Cauchy Cours d'analyse de l'ecole polytechnique, which should be read by any analist who aims at rigor in mathematical investigations, will serve us as a guide* [78]
> (Kragh, 2000, p. 3)

Además, *Abel* comenta con *Holmboe* sobre las series infinitas en carta del 16 de enero de 1826

[76] Así, antes de efectuar la suma de una serie, debo examinar en que casos la serie puede ser sumada, o en otras palabras, cuáles son las condiciones de su convergencia; en este tópico, yo he establecido las reglas generales que me parecieron que merecen atención.
[77] Una fórmula matemática permanece cierta sólo bajo ciertas condiciones, y para valores de las cantidades a las que hace referencia… [él rechaza el] grave error de pensar que uno sólo encuentra certidumbre en las pruebas geométricas.
[78] El excelente trabajo de Mr. Cauchy Cours de analyse de la Escuela Politécnica, el cual debería ser leído por cualquier analista que se dirija hacia el rigor matemático, nos servirá como guía.

In general, the theory of infinite series is at present very ill founded. One applies to infinite series all the operations as if they were finite; but is that permitted? I believe not. Where is it demonstrated that one obtains the differential of an infinite series by taking the differential of each term? [79]

(Kragh, 2000, p. 4)

En esa misma carta habla sobre la fórmula binomial

The binomial formula, itself, has not been rigorously demonstrated. I have found that $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \cdots$ *for all values of m when x is less than 1. Whenever x is equal to +1, the same formula is true, but only if m is greater than -1, and when x is equal to -1, the formula is only true for positive values of m. For all other values of x and m, the series is divergent. The theorem of Taylor – the base of infinitesimal calculus – is not better founded. I have found one rigorous demonstration and that is the one given by Mr. Cauchy in his Résume des leçons sur le calcul infinitesimal.* [80]

(Kragh, 2000, p. 5)

Abel también comenta que sólo la serie geométrica ha sido demostrada

With the exception of the geometric series, there does not exist in all of mathematics a single infinite series whose sum has been determined rigorously… [81]

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

[79] En general, actualmente la teoría de las series infinitas está mal fundamentada. Se aplica a las series infinitas todas las operaciones como si fueran finitas, pero ¿eso está permitido? Yo creo que no. ¿Dónde está demostrado que uno obtiene la diferencial de una serie infinita al tomar la diferencial de cada término?

[80] La misma fórmula binomial no ha sido demostrada rigurosamente. Yo he encontrado que $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots$ para todos los valores de m cuando x es menor que 1. Doquiera que x es igual a +1, la misma fórmula es cierta pero sólo si m es mayor que -1, y cuando x es mayor a +1 la fórmula es cierta para valores positivos de m. Para todos los otros valores de x y m la serie es divergente. El teorema de Taylor –la base del cálculo infinitesimal- no está mejor fundamentada. He encontrado una demostración rigurosa y que es la de Mr. Cauchy en su Résume des leçons sur de cálculo infinitesimal.

[81] Con la excepción de la serie geométrica, no existe en todas las matemáticas una sola serie infinita cuya suma haya sido determinada rigurosamente.

En otra carta a *Hansteen* del 29 de marzo de 1826 podemos leer otro comentario en el mismo sentido de los anteriores, pero proporciona una razón desde su punto de vista (en negritas), del por qué falta rigor en las series infinitas

> *In the higher analysis, there are but few propositions which have been demonstrated with convincing rigor. Everywhere, one finds the unfortunate way of concluding from the special to the general, and it is remarkable that so few of the so-called paradoxes have been found. It is certainly interesting to investigate the reason for this. This reason is, I think, that most of the functions with which analysis has this far dealt can be expressed by power series. When other enter, which surely seldom happens, it often goes wrong and from false conclusions a set of vicious propositions flows* [82]
>
> (Kragh, 2000, p. 9)

En este período se puede encontrar en muchas ramas de la matemática este movimiento hacia el rigor; por ejemplo, *Evariste Galois* comenta en la introducción de su escrito final

> *Since the beginning of the century, computational procedures have become so complicated that any progress by those means has become impossible, without the elegance which modern mathematicians have brought to bear on their research, and by means of which the spirit comprehends quickly and in one step a great computations.*
>
> *It is clear that elegance, so vaunted and so aptly named, can have no other purpose…Go to the roots, of these calculations! Group the operations. Classify them according to their complexities rather than their appearances! This, I believe, is the mission of future mathematicians. This is the road on which I am embarking in this work.*[83]
>
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

---

[82] En el análisis superior, hay unas cuantas proposiciones que han sido demostradas con rigor convincente. Por doquiera, uno encuentra la desafortunada forma de concluir del caso especial al general, y es sorprendente que se hayan encontrado tan pocas de las llamadas paradojas. Es realmente interesante investigar la razón de esto. Esta razón es, creo yo, que la mayoría de las funciones con las que el análisis ha tratado hasta ahora pueden ser expresadas en series de potencias. Cuando otra (serie) aparece, lo cual seguramente sucederá en ocasiones, a menudo las cosas van mal y a partir de conclusiones falsas surge un conjunto de proposiciones defectuosas.

[83] Desde los principios del siglo, los procedimientos para calcular se han vuelto tan complicados que cualquier progreso por esos medios es casi imposible, sin la elegancia que los modernos matemáticos han aplicado a su investigación, y por medio del cuál el espíritu comprende rápidamente y en un paso los grandes cómputos.
Es claro que la elegancia, tan valorada y tan convenientemente nombrada, no puede tener otro propósito… ¡Vé a las raíces de esos cálculos! Agrupa las operaciones. ¡Clasifícalas de acuerdo a sus complejidades más que por sus apariencias! Esta es, creo yo, la misión de los futuros matemáticos. Este es el camino en el que me he enbarcado conn este trabajo.

A todo lo ya expuesto podemos agregar que las series que se conocían como divergentes son hechas a un lado, nadie quiere trabajar con ellas. Abel es más duro y dice,

> *Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.* [84]
> (Hardy, 1949, prefecio)

De acuerdo a lo anterior podemos concluir que este período está caracterizado por la pregunta ¿**por qué**?

¿**Por qué** converge la serie?

- Porque la serie satisface ciertas condiciones,
- Porque el criterio dice que converge,
- Porque si el criterio aplicado no permite decidir la convergencia de la serie, se construye un nuevo criterio específico para la serie.

¿**Por qué** no converge la serie?

- Porque la serie no cumple las condiciones del criterio
- Porque la serie fue construida expresamente de esa forma para probar la falsedad de un criterio.

Esta pregunta marca el nacimiento de la serie infinita como un objeto matemático per se, **ahora ya no importa si la serie se puede aplicar o no, ahora lo que importa es lo que se puede decir acerca de la serie**. Lo que ahora es importante es si la serie converge o diverge, si la serie es alternante o no, si la serie es condicionalmente o absolutamente convergente. Su aplicación es ahora un hecho incidental. Así, la visión anterior de la serie infinita como una suma ya no volverá a aparecer.[85]

[84] Las series divergentes son la invención del diablo, y es vergonzoso basar en ellas cualquier demostración.
[85] Hasta la ilustre excepción de *Ramanujan*, pero dada su autoformación matemática libre de los formalismos de la época nos permite decir que no forma parte de esta visión. De hecho muchos trabajos de *Ramanujan* se centraron en el cálculo de las sumas de series infinitas constantes, de funciones y de otros tipos. Además de generar fórmulas e identidades nuevas y sorprendentes.

A partir de este período desde los textos escolares hasta los artículos científicos, el tratamiento de las series infinitas será el mismo que recibe la geometría, la teoría de números y el álgebra; es decir, su estudio estará basado en las propiedades del **objeto matemático serie infinita** y ya no será necesario que se le considere como una herramienta. Las series que antes sólo eran estudiadas si surgían de un problema físico, geométrico o de otro tipo, ahora son sólo parte del nuevo mundo de las series infinitas donde existen series con características nunca antes consideradas o sospechadas en el mejor de los casos.

Estas nuevas series generan nuevos retos que la teoría desarrollada no permite manejar en toda su extensión y empieza a ser necesario un nuevo conjunto de estructuras que lo permitan, ese es el inicio de nuestro último período de estudio.

Período V (Fundamentación)

Este período inicia cuando Francia empieza a declinar como el centro mundial de las matemáticas, y es Alemania quien tomará su lugar. Muchos matemáticos alemanes iniciarán una refundación de las matemáticas y del análisis, con *Weierstrass* y sus discípulos a la cabeza se abre una página importante en este sentido.

Veamos primero la forma en que las series numéricas son enseñadas en las escuelas, de hecho lo que podemos hacer es analizar nuevamente los libros de texto para ver la forma en que se presentan estos temas.

Este período está marcado por el uso de revistas científicas y libros como la forma casi exclusiva de comunicación de las ideas y descubrimientos. Para este momento la comunicación de descubrimientos por medio de cartas ya ha iniciado un inexorable declive.

Un libro importante en este período es el de *Camille Jordan* (Jordan, 1909). Lo primero que llama la atención es que este libro va más allá de lo que hacen *Lacroix*, *Cauchy* y *Berger*.

Jordan inicia definiendo y demostrando la construcción de los números irracionales, con ello establece lo que es el conjunto de los números reales. Utiliza definiciones ϵ-δ para trabajar en todo.

El orden es diferente al utilizado en el período III, ahora las definiciones, teoremas y demostraciones van en primer lugar y al final las aplicaciones, como puede verse en el capítulo III de ese libro.

Nuevamente la transposición didáctica desplaza conocimientos y reordena las estructuras de los libros, al mismo tiempo que el DME se vuelve más rígido en consonancia con el discurso matemático vigente basado en el mayor rigor posible.

Vamos a analizar el índice.

Capítulo I: Límites
En este capítulo estudia los números irracionales, los límites, condiciones para la existencia de un límite, conjuntos (derivado, complementario, perfecto, etc.), funciones integrables, continuas de variación acotada, derivada e integral de funciones de una variable, derivadas parciales-diferencial total, líneas continuas y rectificables, funciones elementales, derivadas y diferenciales de orden superior, cambio de variable, cambio de variable en la integral definida, formación de ecuaciones diferenciales.

Capítulo II: Variables complejas.
Funciones sinécticas, funciones implícitas, integral definida, integral definida de funciones sinécticas, integral de línea, derivada de una integral definida, integración por partes, cambio de variable, expresión de una función cualquiera mediante una integral definida, funciones racionales, polinomios, raíces, funciones racionales con descomposición en fracciones simples, funciones algebraicas, trascendentes elementales.

El capítulo III puede verse en las imágenes siguientes (Jordan, 1909)

Primero observamos que inicia la sección de series definiendo lo que es una serie de Taylor, tanto para variable real como variable compleja y proporciona ejemplos de aplicación del método, posteriormente muestra el procedimiento para obtener la serie de Taylor.

246. Arc tangente..... 243
247-250. Arc sinus. Arc cosinus..... 244

CHAPITRE III.

SÉRIES.

I. — *Formule de Taylor.*

251-254. Formules de Taylor et de Maclaurin. Expressions du reste. 249
255. Extension aux fonctions de plusieurs variables..... 252
256-257. Cas où la variable est complexe..... 254
258. Autre démonstration..... 255
259. Fonctions de plusieurs variables..... 256
260. Application à e^x, $\sin z$, $\cos z$..... 257
261. Application à $(1+z)^m$..... 257
262. Application à $\log(1+z)$. Calcul des Tables..... 258
263. Application à arc tang z. Calcul de π..... 260
264. Application à arc sin z..... 261

II. — *Procédés pour effectuer les développements en série.*

265-268. Développement d'une somme, d'un produit, d'un quotient.. 262
269-270. Application aux nombres de Bernoulli..... 265
271-272. Développement d'un radical..... 267
273-275. Application aux fonctions X_n..... 268
276. Limite de $x^n e^x$ pour $x=\infty$..... 271
277. Limite de $x^{-n}\operatorname{Log} x$ pour $x=\infty$; de $x^n \operatorname{Log} x$ pour $x=0$.. 271
278. Développement d'un logarithme..... 272
279. Nécessité de la discussion du reste dans la formule de Maclaurin..... 272
280-281. Vraie valeur des expressions indéterminées..... 273

en ese mismo capítulo tres podemos ver cómo aborda el estudio de las series de Taylor y de Maclaurin, y las extiende al caso de varias variables y hace la demostración para el caso complejo, proporciona ejemplos de desarrollos de funciones como e^x, $\sin z$, $\cos z$, etc.

En la tercera sección del capítulo III define convergencia, trata las progresiones geométricas y realiza operaciones con series como sumar, cambiar el orden de los elementos, multiplicar series, y después inicia el análisis de criterios de convergencia.

En esa misma sección trata sobre las series dobles y múltiples, y varios tipos de productos.

En la sección IV trata sobre el modo de convergencia uniforme, la integración y derivación de series, y ejemplos varios.

En la sección V analiza las series de potencias y funciones analíticas.

Posteriormente realiza aplicaciones para seno, coseno, etc. Y termina considerando fracciones contínuas y máximos y mínimos.

X TABLE DES MATIÈRES.

Numéros — Pages

282. Vraie valeur de $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$, de $m\left(\sqrt[m]{z}-1\right)$, de z^z, de $z\log z$. 274
283. Cas des fonctions de plusieurs variables. 276

III. — *Séries et produits infinis à termes numériques.*

284-285. Définition de la convergence. 276
286. Progressions géométriques. 277
287. Somme de la série $\sum \frac{1}{(z+n-1)(z+n)\dots(z+n+k)}$ 278
288-290. Séries absolument convergentes. On peut y changer l'ordre des termes. 278
291-292. Cette opération altère la somme des séries semi-convergentes. 281
293-296. Multiplication des séries. 283
297. En multipliant les termes d'une série absolument convergente par des facteurs bornés on obtient une série de même nature. 288
298-300. Règles de convergence de Dirichlet et d'Abel. 289
301-302. Séries à termes positifs. Comparaison avec une progression géométrique. 293
303-305. Théorèmes de M. Pringsheim. 293
306-308. Les séries $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n\operatorname{Log} n}$, ... sont divergentes, et les séries $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $\sum \frac{1}{n\operatorname{Log}^{1+\varepsilon} n}$, ... convergentes. 297
309-313. Nouvelles règles de convergence, déduites de l'étude du rapport de deux termes consécutifs. 300
314. Règle de M. Kummer. 304
315. Séries à double sens. 305
316. Séries multiples. 306
317-319. Séries d'Eisenstein. 307
320-324. Produits infinis. Règles de convergence. 310
325. Application au produit $\Gamma(z)$. 314
326. Produits à double sens. Produits multiples. 314

IV. — *Séries de fonctions.*

327. Convergence uniforme. 314
328. Une série uniformément convergente, dont les termes sont continus, est continue. 315
329. Intégration des séries. 316
330. Dérivation des séries. 317
331. Une série uniformément convergente, à termes synectiques, est synectique. 318
332. Exemples de séries discontinues, ou non intégrables terme à terme. 318
333-334. Exemple de série continue sans dérivée. 320

TABLE DES MATIÈRES. XI

Numéros — Pages

335. Exemple de séries égales dans une région seulement du plan. 324

V. — *Séries de puissances.*

336-337. Cercle de convergence. Élément de fonction analytique. 324
338-340. Les zéros d'une fonction synectique sont isolés. 327
341-343. Éléments contigus. Détermination de proche en proche d'une fonction analytique. 329
344. Points critiques. 330
345-348. Influence de la ligne suivie. Si la variable se meut dans une région dépourvue de point critique, la valeur finale ne varie pas. 333
349. Un élément de fonction analytique a toujours un point critique sur son cercle de convergence. 336
350-352. Fonctions monodromes. Leurs points critiques sont fixes. Fonctions uniformes. 337
353-358. Fonctions analytiques de plusieurs variables. 338
359-360. Substitution de séries de puissances dans une série de puissances. 341
361. Développement des racines infiniment petites de l'équation $S(u,z)=0$. 346
362-364. Valeur principale des racines. 347
365-366. Calcul des termes suivants. 350
367. Convergence des développements. 353
368. Décomposition de $S(u,z)$ en facteurs. 354
369-370. Application aux équations algébriques. 356
371. Élimination. Calcul de la résultante. 357

VI. — *Applications.*

372-374. Expression de $\sin \pi z$ en produit. Formule de Wallis. 359
375. Expression de $\cos \pi z$. 362
376. Développement de $\pi \cot \pi z$. Sommation des séries $\sum \frac{1}{n^{2m}}$. 363
377-378. Périodicité des fonctions trigonométriques. 364
379-380. Série hypergéométrique. Son équation différentielle. 365
381-382. Relations entre les fonctions contiguës. Valeur de $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ 367
383-385. Propriétés de la fonction Γ. 370

VII. — *Fractions continues.*

386-389. Développement d'un nombre en fraction continue. Propriétés des réduites. 372
390-393. Développement d'une fonction. Calcul direct des réduites. 375

VIII. — *Maxima et minima.*

394. Maxima et minima des fonctions d'une variable. 379
395-398. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables. 381

el complemento de este capítulo aparece en

XII TABLE DES MATIÈRES.

Numéros Pages
399–400. Discussion du cas douteux pour les fonctions de deux variables 385
401. Maxima et minima relatifs 388
402. Valeurs extrêmes d'une fonction dans un champ donné 390
403–406. Distance d'un point à une droite, de deux droites, d'un point à un plan 390
407. Maxima et minima du rapport de deux formes quadratiques. 396
408. Point dont la somme des distances à trois points fixes est minimum 400

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

I. — *Points ordinaires et points singuliers.*

409. Ordre de multiplicité d'un point d'une courbe plane. Tangentes 403
410. Cycles. Forme d'un cycle réel 404
411–412. Courbes définies au moyen d'un paramètre 407
413–414. Surfaces. Points simples ; plan tangent. Points multiples ; cône tangent. Lignes singulières 410
415. Surfaces définies au moyen de deux paramètres 412
416–417. Courbes gauches. Points simples et points multiples. Tangente 413
418. Courbes gauches définies comme intersection de deux surfaces 416

II. — *Théorie du contact.*

419–420. Définition 417
421–423. Contact de deux courbes planes 418
423–425. Id. d'une surface et d'une courbe 421
426–428. Id. de deux courbes gauches 423
429–434. Id. de deux surfaces 425
435–437. Osculation 429

III. — *Enveloppes.*

438–440. Enveloppe d'une famille de courbes 431
441–444. Enveloppe d'une famille de surfaces dépendant d'un ou de deux paramètres 435

IV. — *Courbes planes.*

445. Différentielle de l'arc 440
446–447. Tangente et normale 440

TABLE DES MATIÈRES. XIII

Numéros Pages
448–449. Cercle osculateur. Développée 442
450–453. Courbure. Points d'inflexion 443
454. Équation intrinsèque d'une courbe 445
455–457. Applications. Parabole. Ellipse. Cycloïde 447

V. — *Géométrie infinitésimale.*

458. Considérations générales 451
459. Variation de longueur et de direction d'un segment de droite dont les extrémités décrivent deux courbes données 452
460. Tangente et différentielle de l'arc en coordonnées polaires. 454
461. Courbes parallèles 454
462. Arc de la développée 455
463. Théorème de Graves 455
464. Tangente à une courbe en coordonnées multipolaires 456
465. Rayon de courbure de l'ellipse 457
466. Tangente au lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à deux courbes 458
467. Circonscrire à une courbe un triangle d'aire minimum 459

VI. — *Courbes gauches et surfaces développables.*

468. Différentielle de l'arc 460
469. Tangente et plan normal 460
470–471. Plan osculateur. Surfaces développables 461
472. Enveloppe des plans normaux 463
473. Cercle osculateur 464
474. Sphère osculatrice 466
475–482. Valeur principale de divers infiniment petits. Courbure. Torsion. Plans stationnaires 469
483. Différence entre l'arc et sa corde 474
484–486. Formules de M. Frenet 476
487. Application des formules à l'hélice 479

VII. — *Systèmes de droites.*

488–489. Éléments qui déterminent la position relative de deux génératrices voisines 480
490–492. Surfaces réglées. Loi de variation du plan tangent 483
493–494. Caractère des surfaces développables 486
495–499. Congruences. Génératrices ordinaires et singulières. Points principaux. Foyers. Double système de développables 488
500–502. Lois de M. Kummer sur la répartition des génératrices voisines d'une génératrice ordinaire 490
503. Id. d'une génératrice singulière 496
504–505. Complexes 498

Como se puede ver, dedica el capítulo IV al estudio de las series de Taylor.

En general, *Jordan* utiliza las definiciones de *Cauchy* sólo que expresadas en la notación que se utiliza en esa época. Hace un compendio de criterios hasta la fecha publicados.

En este índice puede verse algo que casi podría haber pasado desapercibido, este algo es el orden en que se presentan las series. Notemos que ahora hay una clara distinción entre los diferentes tipos de series, primero se estudian series de Taylor (que son series de funciones), luego se estudian por separado las series numéricas y finalmente se estudian las series de potencias (que vuelven a ser series de funciones).

Recordemos que en los períodos pasados, siempre se enunciaban teoremas, criterios, reglas, etc., para series infinitas pero nunca se decía si las series eran de términos constantes o funciones. Esta es parte de la gran herencia de *Weierstrass*, a partir de este período existen criterios y métodos específicos para las series numéricas y otros para las series de funciones.

Algunos criterios enunciados originalmente por *Cauchy*, *Abel* y contemporáneos son generalizados con la, ahora poderosa, teoría de series de funciones y luego son reducidos al caso de las series numéricas, dando lugar a criterios de convergencia más generales.

La estructura que *Jordan* impuso sobre su libro es la que siguen los autores de otros libros por algún tiempo, pero en 1921 es publicado el libro *Theory and application of infinite series* escrito por el Dr. *Konrad Knopp* quien dice en el prefacio

> …*To set all this forth in as interesting and intelligible a way as possible, but of course without in the least abandoning exactness, with the object of providing the student with a convenient introduction to the subject and living him an idea of its rich and fascinating variety – such was my vision* [86]
> (Knopp, 1921, p. V)

Este comentario es en el sentido de justificar la estructura que utiliza en su libro, como se puede leer más adelante[87]

[86] Poner todo esto en la forma más interesante e inteligible posible, pero por supuesto sin abandonar la exactitud, fue el objeto de proporcionar al estudiante una introducción adecuada a la materia dejándole una idea de su riqueza y fascinante variedad- esa fue mi visión.

[87] Consideré que una introducción a la teoría de los números reales era indispensable como inicio, de modo que los primeros hechos relativos a la convergencia pudieran tener un fundamento firme. Para esta introducción he agregado una revisión bastante extensa de la teoría de sucesiones, y finalmente la teoría actual de series infinitas. Ésta última es construida en dos partes, es decir: una base, en la cual la parte clásica de la teoría (aproximadamente al nivel de desarrollo del curso de Análisis Algebraico de Cauchy) es expuesta, aunque con la

important matter, I hope to win the gratitude of the student.

I considered that an introduction to the theory of real numbers was indispensable as a beginning, in order that the first facts relating to convergence might have a firm foundation. To this introduction I have added a fairly extensive account of the theory of sequences, and, finally, the actual theory of infinite series. The latter is then constructed in two storeys, so to speak: a ground-floor, in which the classical part of the theory (up to about the stage of *Cauchy*'s Analyse algébrique) is expounded, though with the help of very limited resources, and a superstructure, in which I have attempted to give an account of the later developments of the 19th century.

For the reasons mentioned above, I have had to omit many parts of the subject to which I would gladly have given a place for their own sake. Semi-convergent series, *Euler*'s summation formula, a detailed treatment of the Gamma-function, problems arising from the hypergeometric series, the theory of double series, the newer work on power

Este libro presenta la estructura básica que la gran mayoría de los libros de cálculo copiaron y mantienen hasta nuestros días, salvo mínimas modificaciones:

1. Capítulo/sección dedicado a los números reales.
2. Sucesiones de números reales.
3. Estudio de funciones y sus propiedades.
4. Límites.
5. Cálculo diferencial
6. Cálculo integral
7. Sucesiones numéricas infinitas
8. Serie infinita definida mediante sumas parciales
9. Criterios de divergencia
10. Series de potencias
11. Serie de Taylor

---

ayuda de recursos muy limitados, y una superestructura (segunda parte) en la cual he intentado hacer un recuento de los últimos desarrollos del siglo XIX.
Por las razones mencionadas anteriormente, tuve que omitir muchas partes de la materia a las que yo gustosamente hubiera dado un lugar por su propio valor. Las series semiconvergentes, la Fórmula de Suma de Euler, un tratamiento de la Función Gama, problemas que surgen de las series hipergeométricas, la teoría de las series dobles, los trabajos recientes en series de potencias…

12. Series de funciones trigonométricas

Los procesos de transposición didáctica han vuelto a aparecer generando una nueva estructura de libros, *Knopp* explícitamente dice creer que debe estudiarse primero el campo de los números reales. Esto puede verse, entre otros, en los libros de Baule (1949), Thomas, Finney y Weir (1998), Purcell, Varberg y Rigdon (2001) y en Larson, Hostetler y Edwards (2006), que continúan utilizando esta estructura.

Durante este período la máxima abstracción de las series numéricas es introducida en las escuelas, ahora ya no se utilizan aplicaciones de calor, de ondas u otra cosa, ahora sólo se define y se demuestra. Ahora aquellas instituciones escolares que utilizan los nuevos libros de texto modifican su DME para ajustarlo a las nuevas estructuras de Knopp.

Aquel período histórico en que hay una febril creación de criterios de convergencia ha quedado atrás y ahora los criterios sólo sirven como un conjunto de reglas cuyo origen es oscuro y desconocido. Ahora los criterios deben ser aplicados sin saber cómo, por qué o para qué (en el peor de los casos) deben ser aplicados. Como dice *Grattan-Guinness*,

> … *The results on the equivalence of certain test, however, were effective in eliminating superfluous theorems… But along with redundant test has gone the logical intensity of development which characterized the discovery of all the results: from the first appearance of books on convergence and treatises on analysis with substantial convergence sections, test were presented as a largely unconnected list.* ***We do not always take only the best from our predecessors' work.***[88,89]
> (Grattan-Guinnes, 1970, p. 151)

10 años más tarde vuelve a comentar,

[88] …Los resultados sobre la equivalencia de ciertas pruebas, sin embargo, fueron efectivos para eliminar teoremas superfluos… Pero junto con las pruebas redundantes también se fue la intensidad lógica del desarrollo que caracterizó el descubrimiento de todos los resultados: Desde la aparición de los primeros libros sobre convergencia y los tratados sobre análisis con secciones grandes sobre convergencia, las pruebas fueron presentadas como una lista disconexa. **No siempre tomamos sólo lo mejor del trabajo de nuestros predecesores**.
[89] Negritas nuestras.

> *…Nowadays these tests are often presented as an unconnected list of useful if boring results; but in the 1820's the logical relationship between tests was one of the stimuli to their development…*[90]
> (Grattan-Guinness, 1980, p. 119)

Así, el proceso de transposición didáctica de las series numéricas infinitas ha provocado como efecto secundario que las series pierdan todo su origen e ideas intuitivas, los criterios también pierden su lógica y su razón de ser creados, la estructura topológica del campo de los números reales será usada pero no explicada y mucho menos comprendida. Tan sólo se invocará una obscura propiedad de convergencia uniforme que permite asegurar que una serie converge pero aclarando que los alcances del texto no permiten detallar esa "invocación".

Las series ahora han logrado ser elevadas a la categoría de objetos matemáticos con plenos derechos y propiedades dentro del mundo abstracto de las matemáticas, pero el llegar a ese estatus les ha costado olvidar su origen y su aplicabilidad, las series nunca más serán vistas como herramienta y motor de desarrollo de nuevas ideas sino como un objeto al que muchas veces se le aplican reglas sin sentido; para muchos estudiantes de ingeniería es algo molesto y necesario (por no decir obligatorio) aprender; en el mejor de los casos, para los estudiantes de "matemáticas puras", son reglas con las cuales se juega aún sin saber el por qué es válido jugar y toda pregunta o duda acerca de las series descansa en la aceptación ciega de la validez de los teoremas. Las series ahora sólo serán manipuladas, aunque esta manipulación oculte los grandes avances matemáticos involucrados en las técnicas matemáticas empleadas para ver la convergencia de series (transposición didáctica).

Como en el período anterior (IV), ahora la serie se estudia como un objeto disconexo de todos los contextos anteriores, de hecho las series crean su propio contexto que resulta ser un poco artificial pero válido en el sentido de axiomatizar la ciencia. Es este contexto artificial el que al ser transpuesto a la escuela genera un discurso matemático escolar que carece de sentido para los estudiantes. De esta forma, las series ya no son herramientas y ya no importa su suma. De hecho, se multiplican las voces que están en contra del uso de la palabra **suma** para el valor de la serie.

[90] Hoy en día estas pruebas son presentadas como una lista disconexa de útilies pero aburridos resultados; pero en los 1820's la relación lógica entre las pruebas era uno de los estímulos para su desarrollo.

Por ejemplo, en Gardiner (2002) leemos

> *…thus we optimistically tried to generalize the alternative interpretation* $\frac{1}{8}=1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{10^2}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{10^3}\right)$, *and so produce the endless sum* $\frac{1}{13}=0\cdot\frac{1}{10}+7\cdot\frac{1}{10^2}+6\cdot\frac{1}{10^3}+9\cdot\frac{1}{10^4}+2\cdot\frac{1}{10^5}+3\cdot\frac{1}{10^6}+0\cdot\frac{1}{10^7}+7\cdot\frac{1}{10^8}+\cdots$ *whose precise meaning remains obscure, since ordinary addition only allows us to add together finitely many terms.*[91]
> (Gardiner, 2002, p.81)

Algo semejante leemos en

> *We emphasize above all the new symbols have significance in themselves. Addition, it is true, is a well-defined operation, always possible, with regard to two or any particular number of values, in one and only one way. The partial sums* s_n *therefore, however the terms* a_n *may be given, have under all circumstances definite values. But the symbol has* ***in itself*** *no meaning whatever…for the addition of an* ***infinite number*** *of terms is something quite undefined, something perfectly meaningless.*[92,93]
> (Knopp, 1921, p. 100)

Más adelante leemos

> *2. As regards the term* ***sum*** *the reader must be expressly cautioned about a possible misunderstanding: The number s* ***is not*** *a sum in any sense previously in use, but only* ***the limit of an infinite sequence of sums****; the equation* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ *or* $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s$ *is therefore neither more nor less than another way of writing* $\lim s_n = s$ *or* $s_n \to s$. *It would*

---

[91] Así, en forma optimista tratamos de generalizar la interpretación alterna $\frac{1}{8}=1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{10^2}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{10^3}\right)$ y así producir la suma infinita $\frac{1}{13}=0\cdot\frac{1}{10}+7\cdot\frac{1}{10^2}+6\cdot\frac{1}{10^3}+9\cdot\frac{1}{10^4}+2\cdot\frac{1}{10^5}+3\cdot\frac{1}{10^6}+0\cdot\frac{1}{10^7}+7\cdot\frac{1}{10^8}+\cdots$ cuyo significado preciso permanece oscuro, puesto que la suma ordinaria sólo nos permite sumar un número finito de términos.

[92] Negritas nuestras.

[93] Enfatizamos que los nuevos símbolos tienen significado por sí mismos. La suma es una operación bien definida, siempre posible, con respecto a dos o cualquier cantidad (finita) de valores, en un único sentido. Las sumas parciales s_n por lo tanto, sin importar el número de términos a_n considerados, tiene valores definidos bajo cualquier circunstancia. Pero el símbolo no tiene significado por sí mismo… porque la suma de un número infinito de términos es algo indefinido, algo sin el menor significado.

therefore seem more appropriate to speak not of the ***sum*** *but of the* ***limit*** *or* ***value*** *of the series. However the term sum has remained in use from the time when infinite series first appeared in mathematical science and when no one had a clear notion of the underlying limiting processes or, generally, of the "infinite" at all.*

3. The number s is therefore ***no sum****, but is only so named, for the sake of brevity…* [94]

(Knopp, 1921, p. 102)

Esta discusión dice que las series no son sumas y que no se pueden definir así porque no se ha extendido la definición de suma binaria a suma de un número infinito de términos, la serie es y debe ser tratada como objeto matemático. Que originalmente se haya empleado sumas para aproximarse a una serie no nos permite considerar la equivalencia serie=suma.

Realicemos ahora un análisis de la forma en que este pensamiento de abstracción se fue presentando.

Consideramos que existen diversas visiones acerca de la formalidad; la visión de aquellos que la defienden y la promueven, la visión de aquellos que la aceptan como un mal necesario y la usan, la visión de aquellos que la soportan como moda o como obligación debido a que toda la comunidad la aplaude, y finalmente la visión de aquellos que ni la entienden ni ven su necesidad y oponen toda la resistencia posible a adoptarla. Veamos cada una de estas visiones.

Dentro del primer grupo encontramos nuevamente a *Weierstrass* que nos proporciona el primer indicio al comentar,

Intuition could not be relied upon when establishing the fundamental principles of mathematical analysis. [95]

(Grattan-Guinnes, 1980, p. 162)

---

[94] 2. En referencia al término suma el lector debe estar muy atento acerca de un posible error de comprensión: El número s no es una suma en ningún sentido previamente utilizado, sino que sólo es el límite de una sucesión infinita de sumas parciales, la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ o $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s$ no es más ni menos que otra forma de escribir $\lim s_n = s$ or $s_n \to s$. Sería entonces más apropiado hablar no de la suma sino del límite o valor de la serie. Sin embargo el término suma ha continuado en uso desde el tiempo en que aparecieron las series por primera vez en la ciencia matemática cuando nadie tenía clara la noción de los procesos subyacentes de límites o en general, del infinito en sí.

3. El número s por lo tanto no es una suma, pero se le llama así por brevedad.

[95] No puede confiarse en la intuición cuando se establecen los principios fundamentales del análisis matemático.

De acuerdo a esta visión, ahora las argumentaciones deben estar bien fundamentadas y las antiguas invocaciones a la intuición o a los dibujos ya no es suficiente, todo debe ser definido y demostrado.

Por ejemplo *Hilbert* dice:

> *I have tried to avoid long numerical computations, thereby following Riemann's postulate that proofs should be given through ideas and not voluminous computations.* [96]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Lo que rechaza por completo la forma en que *Euler* y sus contemporáneos razonaban y argumentaban al escribir sus descubrimientos.

Herman Weyl comentó acerca del uso de la abstracción y la topología

> *In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of every individual discipline of mathematics.* [97]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Un nuevo comentario nos indica lo que *Hilbert* piensa acerca del estado que en ese momento guarda la matemática y el análisis en particular:

> *Every mathematical discipline goes through three periods of development: the naive, the formal, and the critical.* [98]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Esta necesidad de establecer una base firme y sólida para la matemática hizo que *Dedekind* escribiera en su trabajo *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* el comentario

---

[96] He intentado evitar los largos cálculos numéricos, siguiendo el postulado de Riemann de que las pruebas deben ser dadas mediante ideas y no mediante cálculos voluminosos.
[97] En estos días el ángel de la topología y el demonio del álgebra abstracta luchan por el alma de cada disciplina de las matemáticas.
[98] Cada disciplina matemática va a través de tres períodos de desarrollo: el ingenuo, el formal y el crítico.

> *As professor in the Polytechnic School in Zürich I found myself for the first time obliged to lecture upon the elements of the differential calculus and felt more keenly than ever before the lack of a really scientific foundation for arithmetic...* [99]
>
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Esta es una parte de la introducción a la presentación de su definición de números irracionales pensados como cortaduras sobre la recta real, de esta forma logra ver la densidad de los racionales y la completitud de los números reales, es decir, que toda sucesión convergente de números reales converge a un número real. Este es un resultado importante que no depende más que de la estructura topológica del campo de los números reales, estructura que ahora empieza a ser utilizada como base para las argumentaciones de demostraciones.

En apoyo a la idea de la generalización y abstracción, *Gödel* comenta

> *The development of mathematics towards greater precision has led, as is well known, to the formalization of large tracts of it, so that one can prove any theorem using nothing but a few mechanical rules.* [100]
>
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Para este momento la visión pragmática de períodos previos ha sido completamente borrada, ahora el trabajo de axiomatización es más importante.

Hilbert vuelve a comentar con respecto a la formalización que:

> *On mathematics ... we find two tendencies present. On the one hand, the tendency towards abstraction seeks to crystallize the logical relations inherent in the maze of materials ... being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency towards*

[99] Como profesor en la escuela Politécnica de Zurich me vi obligado por primera vez a enseñar sobre los elementos del cálculo diferencial y sentí más que nunca la falta de un verdadero fundamento científico para la aritmética.

[100] El desarrollo de las matemáticas hacia una mayor precisión ha dejado, como es sabido, la formalización de grandes áreas de ella, de modo que uno puede probar cualquier teorema usando nada más que unas cuantas reglas mecánicas.

intuitive understanding fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live rapport with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations.[101]

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

En el caso de *Cantor*, uno de los pilares en las investigaciones matemáticas de la época, dijo a *Dedekind* en una carta, sorprendido al comprender el alcance de los resultados que estaba obteniendo:

Je le vois, mais je ne le crois pas! [102]

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

Refiriéndose al rigor y a la abstracción alcanzada por Cantor un último comentario de Hilbert nos muestra su postura:

No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us. [103]

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

En cuanto al segundo grupo, menos numeroso, podemos citar a *John von Newman* que dice:

In mathematics you don't understand things. You just get used to them.[104]

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

Y en ese mismo sentido podemos ver que *Hermann Weyl* dice:

A modern mathematical proof is not very different from a modern machine, or a modern test setup: the simple fundamental principles are hidden and almost invisible under a mass of technical details. [105]

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

---

[101] En matemáticas… encontramos dos tendencias en el presente. Por una parte, la tendencia hacia la abstracción busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes al laberinto de materias… siendo estudiadas, y para correlacionar el material en una forma sistemática y ordenada. Por otra parte, la tendencia hacia el entendimiento intuitivo fomenta una mayor retención de los objetos que uno estudia, una relación viva con ellos, es decir que refuerza el significado concreto de sus relaciones.

[102] ¡lo veo, pero no lo creo!

[103] Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.

[104] En matemáticas no entiendes las cosas. Sólo te acostumbras a ellas.

[105] Una moderna prueba matemática no es muy diferente de una máquina moderna, o un moderno probador; los principios fundamentales están escondidos y casi nvisibles bajo una masa de detalles técnicos.

El mismo *Weyl* dice (citado por Alcock y Simpson):

> *"We now come to the decisive step of mathematical abstraction: we forget about what the symbols stand for. The mathematician is concerned with the catalog alone; he is like the man in the catalogue room who does not care what books or pieces of an intuitively given manifold the symbols of this catalogue denote. He need not be idle; there are many operations which he may carry out with these symbols, without ever having to look at the things they stand for" (Weyl, 1940)*[106]
> (Alcock y Simpson, 2005, p. 77)

Heaviside expresó también:

> *Why should I refuse a good dinner simply because I don't understand the digestive processes involved? [reply when criticized for his daring use of operators before they could be justified formally.]* [107]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Aunque muchas voces aclamaban el nacimiento de este nuevo rigor y algunos lo aceptaban, *Poincaré* se quejaba de las técnicas que dominaban las matemáticas de la época, como se puede leer

> *In the old days when people invented a new function they had something useful in mind. Now, they invent them deliberately just to invalidate our ancestors' reasoning, and that is all they are ever going to get out of them.*[108]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Así, vemos que Poincaré criticaba la forma de hacer matemáticas inventando objetos matemáticos para refutar el estilo de razonamiento de la época de *Euler* y sus contemporáneos.

---

[106] Llegamos ahora a un paso decisivo de la abstracción matemática: olvidamos para qué están los símbolos. El matemático se preocupa sólo por el catálogo, es como el hombre que está en el cuarto de catálogo quien no se preocupa por cuales libros o piezas denotan los símbolos del catálogo. No necesita estar ocioso, hay muchas operaciones que puede efectuar con los símbolos sin tener que ver alguna vez las cosas que representan.
[107] ¿Por qué debería yo de rechazar una buena cena cena simplemente porque no entiendo el proceso digestivo involucrado? [respuesta cuando lo criticaron por su atrevimiento de usar operadores antes de que fueran justificados formalmente]
[108] En los tiempos antiguos cuando la gente inventaba una nueva función tenían algo útil en mente. Ahora, ellos las inventan (las funciones) deliberadamente para invalidar el razonamiento de nuestros ancestros y eso es todo lo que ellos obtendrán.

Y con respecto a la topología que era la base de la nueva aritmética *Poincaré* comenta

> *Point set topology is a disease from which the human race will soon recover.* [109]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

De acuerdo a lo último podemos decir que *Poincaré* tenía sus recelos hacia el uso de tanta abstracción para temas como la aritmética, sin embargo, esta visión formalizadora ganó terreno y se mantiene vigente hasta nuestros días.

Por otra parte, *Poincaré* fue uno de los matemáticos que trabajaron formalmente con series infinitas divergentes, en este sentido *Heaviside* dice sobre las series divergentes

> *This series is divergent, therefore we may be able to do something with it.* [110]
> (The MacTutor History of Mathematics Archive)

Si bien las series infinitas ya existen como objeto matemático, ahora las olvidadas series divergentes empiezan a ser tomadas en cuenta, *Hardy* dice,

> *…and it was soon found that they were useful, and that operations performed on them uncritically often led to important results which could be verified independently.*[111]
> (Hardy, 1949, p. I)

Este quinto período puede ser clasificado con una sola pregunta, ¿**cómo**?

¿**Cómo** converge la serie?

- Converge absolutamente
- Converge uniformemente
- Converge cuasi-uniformemente
- Etc.

[109] La topología general es una enfermedad de la cual la raza humana pronto se recuperará.
[110] Esta serie es divergente, por lo cual algo podemos hacer con ella.
[111] Y pronto se descubrió que eran muy útiles (las series divergentes), y que las operaciones realizadas con ellas informalmente a menudo conducían a resultados importantes que podían ser verificados independientemente.

¿**Cómo** se tiene esta convergencia? La construcción, la estructura topológica y la completitud del campo de los números reales son las razones por las que esta convergencia se puede asegurar, pero la mayor parte de este **cómo** permanecerá oculto para la mayoría de los estudiantes y profesores.

4.3 Discurso Matemático Escolar de las series infinitas a través de la historia

Abordamos ahora la forma en que las series infinitas han sido vistas en la escuela.

Período I.

- El método para encontrar series se explica en un poema, y en ocasiones en prosa.
- Generalmente se presenta un ejemplo ilustrando el método.
- Se presentan tablas de valores calculados mediante series.
- No se hacen demostraciones de los métodos.

Aunque la transmisión de los métodos se realice mediante un poema, cada paso está descrito con exactitud sin ocultar detalles, las construcciones geométricas que los hindúes realizan son detalladas también. Por lo anterior podemos considerar que el Discurso Matemático Escolar no involucra conceptos o técnicas desconocidos, o pasos ocultos, por lo cual decimos que es claro para el estudiante y no produce mayores complicaciones para quien inicia el estudio de las series infinitas.

Para registrar y transmitir la información se utilizan papiros, piedra (para grabar), arcillas, pieles de animales, madera y telas. Un mínimo uso de papel.

Período II.

- El método para encontrar series se presenta en artículos, en cartas, en tratados o libros.
- Se proporcionan definiciones simples.

- Se resuelven ejemplos específicos.
- Se obtiene la expansión de una función en serie infinita para trabajar con la expansión en lugar de la función original.

Para este momento no hay distinción entre series numéricas y series de funciones, el tratamiento es básicamente el mismo. Leibniz ya presentó el primer criterio de convergencia pero casi nadie mas utiliza o desarrolla criterios de convergencia. Por lo que nuevamente consideramos que el DME es claro y no oculta detalles.

Período III.

- El método para encontrar series se presenta en artículos, en cartas, en tratados o libros.
- Se proporcionan definiciones simples.
- Se resuelven ejemplos específicos.
- Se busca la "suma" de la serie.
- Se presentan diversos casos de manipulaciones algebraicas para calcular la "suma" de la serie, tanto numérica como de funciones.
- Se presentan algunos métodos para acelerar la convergencia de la serie.
- Se obtiene la expansión de una función en serie infinita para trabajar con la expansión en lugar de la función original.

Durante este período aún no hay distinción entre las series numéricas y las series de funciones. Se ha iniciado una discusión acerca de la conveniencia de utilizar series sin conocer su comportamiento, sin embargo la visión pragmática sigue dominando.
Lo anterior nos hace considerar que el DME no tiene diferencias importantes con respecto a lo que los investigadores van descubriendo, pese a que la creación de libros de texto empieza a seleccionar conceptos. Así el DME continua claro.

Período IV.

- Se define sucesión infinita.
- Se define la convergencia de una sucesión mediante límites.
- Se define serie infinita.

- Se define suma parcial y sucesión de sumas parciales.
- Se define la convergencia de una serie infinita en términos de la convergencia de la sucesión de sus sumas parciales.
- Se definen y demuestran criterios de convergencia.
- Se hacen ejemplos donde se aplican criterios de convergencia.

Durante este período aún no hay distinción entre las series numéricas y las series de funciones. En los libros el tema de series infinitas en ocasiones aparece antes del cálculo y en otras aparece después del cálculo. Ya no se hace énfasis en el cálculo de la "suma" de la serie, de hecho, en la mayoría de los libros ya no se presentan métodos para calcular dicha "suma". Ahora todo se presenta de manera formal, aunque todavía no se maneja la simbología $\varepsilon - \delta$.
La introducción de las definiciones formales y una notación más específica a las series infinitas ya ha empezado a crear diferencias grandes entre lo que investigan los matemáticos y lo que se enseña en la escuela. Ahora el DME ya no es claro y ya empieza a ocultar detalles importantes.

Período V.

- Se define sucesión numérica infinita.
- Se define la convergencia de una sucesión numérica con límites.
- Se define serie numérica infinita.
- Se definen suma parcial y sucesión de sumas parciales (numéricas).
- Se define la convergencia de una serie infinita en términos de la convergencia de la sucesión de sus sumas parciales.
- Se definen y demuestran criterios de convergencia para series numéricas.
- Se hacen ejemplos donde se aplican los criterios de convergencia.
- En ocasiones se resuelven ejemplos de aplicación de series numéricas.
- Se define serie infinita de potencias de una variable.
- Se proporcionan ejemplos de desarrollos de series de potencias.
- Se define intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- Se resuelven ejemplos de cálculo de intervalos de convergencia.

- Se presenta y demuestra el método para calcular la expansión de una función en serie de Taylor.
- Se resuelven ejemplos específicos.

Para este período encontramos que la formalidad en el DME ha aumentado significativamente, ya no se presentan ejemplos de cómo calcular la suma de una serie y ya ni siquiera se nombra la necesidad de calcular dicha suma. El uso de notación y simbología específica para series infinitas se vuelve algo común.

Como se puede observar, ya existe una distinción entre series numéricas y series de funciones, ahora el tratamiento es diferente para cada tipo de serie infinita.

Este es el Discurso Matemático Escolar que surge en este período del desarrollo de las series infinitas, sin embargo, al igual que todos los actores que participan en el ámbito escolar este discurso ya ha cambiando. A continuación presentamos una caracterización del Discurso Matemático Escolar que actualmente predomina en los libros de texto y por ende el que predomina en las escuelas de ingeniería:

- Se define expansión infinita de los números reales.
- Se demuestran equivalencias del tipo $1 = 0.9999...$
- Se definen y demuestran conceptos de completitud del campo de los números reales utilizando la notación $\varepsilon - \delta$.
- Se define sucesión numérica infinita.
- Se define la convergencia de una sucesión numérica con notación $\varepsilon - \delta$.
- Se define serie numérica infinita.
- Se definen suma parcial y sucesión de sumas parciales (numéricas).
- Se define la convergencia de una serie infinita en términos de la convergencia de la sucesión de sus sumas parciales utilizando notación $\varepsilon - \delta$.
- Se definen y demuestran criterios de convergencia para series numéricas.
- Se hacen ejemplos donde se aplican los criterios de convergencia.
- En ocasiones se resuelven ejemplos de aplicación de series numéricas.
- Se define serie infinita de potencias de una variable.

- Se define intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- Se proporcionan ejemplos de desarrollos de series de potencias.
- Se resuelven ejemplos de cálculo de intervalos de convergencia.
- Se presenta y demuestra el método para calcular la expansión de una función en serie de Taylor.
- Se resuelven ejemplos específicos.

Notemos que ahora los textos se basan en el paradigma de la demostración, es decir, se definen términos y se demuestran propiedades aún antes de proporcionar ejemplos.
La mayoría de los libros de texto presentan esta estructura, sin embargo pueden observarse algunas variantes en la forma de las definiciones ya que algunos libros no utilizan la notación $\varepsilon - \delta$ y en su lugar presentan un manejo semiformal del límite.
Salvo algunos libros que resuelven ejemplos de series telescópicas, sin considerar el caso de la serie geométrica, la mayoría nunca hace ejemplos en los que calcule la suma de una serie convergente.
Ahora ya no se encontrarán aplicaciones que motiven las definiciones y los criterios ya han pasado a ser simples mecanismos oscuros que "funcionan" por alguna razón desconocida. En algunos casos se intenta motivar las definiciones pero al final se termina aplicando el rigor matemático para poder terminar el temario.

4.4 Esquema de transposición didáctica de las series numéricas infinitas

De acuerdo a nuestra investigación y a la perspectiva que hemos construido, las series numéricas han experimentado los siguientes procesos de transposición didáctica.

Período I.

Objeto Sabio	Objeto a Enseñar	Objeto Enseñado
El semi-diámetro dividido por el arco residual se vuelve el divisor. Coloque abajo el seno y otra vez el	*El semi-diámetro dividido por el arco residual se vuelve el divisor. Coloque abajo el seno y otra vez el*	*El semi-diámetro dividido por el arco residual se vuelve el divisor. Coloque abajo el seno y otra vez el*

coseno al final del arco opuesto. Del coseno, sustraiga un medio del cociente obtenido del seno divisor-dividido que es incrementado en un medio del cociente obtenido del coseno por el divisor. Otra vez, obtenido de ésta al dividir por el divisor se transforma en la verdadera diferencia del seno. El seno al final del arco opuesto incrementado por esta se transforma en el seno deseado para el arco dado.	*coseno al final del arco opuesto. Del coseno, sustraiga un medio del cociente obtenido del seno divisor-dividido que es incrementado en un medio del cociente obtenido del coseno por el divisor. Otra vez, obtenido de ésta al dividir por el divisor se transforma en la verdadera diferencia del seno. El seno al final del arco opuesto incrementado por esta se transforma en el seno deseado para el arco dado.*	*coseno al final del arco opuesto. Del coseno, sustraiga un medio del cociente obtenido del seno divisor-dividido que es incrementado en un medio del cociente obtenido del coseno por el divisor. Otra vez, obtenido de ésta al dividir por el divisor se transforma en la verdadera diferencia del seno. El seno al final del arco opuesto incrementado por esta se transforma en el seno deseado para el arco dado.*
$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{\theta}{R}R\cos\alpha - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2\frac{R\sin\alpha}{2} - \left(\frac{\theta}{R}\right)^3\frac{R\cos\alpha}{4}$	$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{\theta}{R}R\cos\alpha - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2\frac{R\sin\alpha}{2} - \left(\frac{\theta}{R}\right)^3\frac{R\cos\alpha}{4}$	$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{\theta}{R}R\cos\alpha - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2\frac{R\sin\alpha}{2} - \left(\frac{\theta}{R}\right)^3\frac{R\cos\alpha}{4}$

Es decir, en este período la transposición didáctica es transparente.

Período II.

Objeto Sabio	Objeto a Enseñar	Objeto Enseñado
$\frac{a^2}{x+b} = \frac{a^2}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3} - \frac{a^2b^3}{x^4}\cdots$	$\frac{a^2}{x+b} = \frac{a^2}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3} - \frac{a^2b^3}{x^4}\cdots$	$\frac{a^2}{x+b} = \frac{a^2}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3} - \frac{a^2b^3}{x^4}\cdots$
$\left\|P+PQ\right\|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c$	$\left\|P+PQ\right\|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c$	$\left\|P+PQ\right\|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c$

Al igual que en el período anterior, la transposición didáctica es transparente.

Período III.

Objeto Sabio	Objeto a Enseñar	Objeto Enseñado
$x(z+v)=x+v\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dz^3}+\cdots$	$x(z+v)=x+v\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dz^3}+\cdots$	$x(z+v)=x+v\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dz^3}+\cdots$

Aunque los objetos enseñados no tienen gran variación con los objetos sabios, debemos comentar que los procesos involucrados sí presentan una mayor complejidad, ahora ya no es suficiente un esquema geométrico para obtener una serie, ahora deben aplicarse muchas propiedades y leyes algebraicas y de análisis. Lentamente ha ido apareciendo un mayor uso del álgebra en el tratamiento de las series infinitas, sin embargo aún es posible explicar las series sin necesidad de demasiadas manipulaciones algebraicas.

Periodo IV.

Objeto Sabio	Objeto a Enseñar	Objeto Enseñado
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s, $s\in\Re$, si para $S_k=\sum_{n=1}^{k} a_n$ se tiene $\lim_{k\to\infty} S_k = s$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s, $s\in\Re$, si para $S_k=\sum_{n=1}^{k} a_n$ se tiene $\lim_{k\to\infty} S_k = s$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$ converge a $\frac{1}{3}$ porque $S_1=\frac{3}{10}=0.3$ $S_2=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}=0.33$ $S_3=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}=0.333$ …

En este período las series son estudiadas en libros escritos especialmente sobre series infinitas y ya aparecen los criterios de convergencia y sus demostraciones en secuencia, criterio tras criterio y de vez en cuando un ejemplo ad hoc. Así, la transposición didáctica en este período empieza a ocultar el origen de las series porque

- ✓ Los autores de libros omiten la forma en que un investigador encontró y reportó en un artículo el origen de una serie debido a un problema específico.

- ✓ Los autores de libros condensan y simplifican resultados para darles mayor coherencia en el texto.
- ✓ Los autores de libros omiten las muy variadas y diferentes técnicas de demostrar la convergencia de una serie, y utilizan unas cuántas de esas técnicas para utilizarlas a lo largo de sus libros.

Es decir, los artículos empiezan a ser consultados sólo por investigadores y esto provoca que mucha de la diversidad de aproximaciones y enfoques de cómo abordar la convergencia de series se empiece a perder y sólo prevalezcan aquellos enfoques y aquellas técnicas que un autor eligió para su libro en particular. Cuando estos libros son consultados por estudiantes y profesores no muy versados en el tema, la transposición didáctica ya ha arrebatado una buena parte del contexto original de las series infinitas. Al mismo tiempo el DME cambia debido a la influencia que recibe de la transposición didáctica.

Periodo V.

Objeto Sabio	Objeto a Enseñar	Objeto Enseñado
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s, $s \in \Re$, si para $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ y $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathrm{N} \quad \cdot \ni \cdot \left\|S_k - s\right\| < \varepsilon$ $\forall \quad k > \mathrm{N}$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a s, $s \in \Re$, si para $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ se tiene $\lim_{k \to \infty} S_k = s$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ converge a $\frac{1}{3}$ porque $S_1 = \frac{3}{10} = 0.3$ $S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0.33$ $S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0.333$ …

En este periodo se maneja casi exclusivamente un acercamiento formal en los libros de texto y en las clases impartidas en las aulas.

En la mayoría de las ocasiones suceden dos cosas:

1. Los estudiantes reciben ejemplos con marcada manipulación aritmética, como el que se ve en la columna de objeto enseñado, sin embargo todas las preguntas posteriores tendrán que ver con análisis y topología.
2. Lo primero que reciben los estudiantes son definiciones de objetos que nunca han conocido, y quizás tampoco han imaginado, para posteriormente recibir preguntas de tipo abstracto.

Aunado a esto algo que sucede en común con los dos escenarios anteriores es que los autores de los libros de texto determinan un primer capítulo para explicar la estructura de los números reales, pero los programas de estudio no contemplan estudiar este tema. De este modo, muchas de las justificaciones que el autor utilizará en capítulos posteriores serán omitidas al momento de definir, explicar y operar con las series.

En este período V la selección de conceptos, teoremas, métodos, etc., realizada por los autores de libros provoca

- ✓ Omisión del estudio de la estructura de los números reales.
- ✓ Omisión de propiedades topológicas del campo de los números reales.
- ✓ Omisión de explicaciones sobre el por qué es necesario utilizar notación $\varepsilon - \delta$.
- ✓ Omisión de explicaciones del por qué los límites son necesarios al operar con series.
- ✓ Omisión de un contexto histórico que fundamente el surgimiento y aplicación de las series infinitas.
- ✓ Omisión de la razón por la que en forma casi exclusiva se estudian serie de potencias y series de Taylor, pese a haber muchos tipos de series infinitas.
- ✓ Omisión de ejemplos "reales"

A esto debe agregarse que muchos centros escolares enfatizan la utilización informal de los conceptos matemáticos, pero en contrasentido la utilización de criterios de convergencia involucra un mayor uso de formalidad.

Es decir, el proceso de transposición didáctica no ha podido incluir todos los temas que serían necesarios para que sea adquirida una mayor formalidad por parte de los alumnos, no ha podido lograr que aspectos y detalles finos sean enseñados y practicados por los estudiantes pero al mismo tiempo exige un nivel de formalidad que requiere de esos detalles finos. Así, la imposibilidad de manejar criterios de convergencia es un resultado lógico y esperado.

5. Análisis

En este capítulo vamos a realizar un análisis de todo lo que se ha comentado hasta ahora, tanto lo que hacen los alumnos como lo que han hecho otros investigadores. Este análisis lo realizaremos basados en el capítulo cuatro, utilizando el desarrollo histórico de las series numéricas infinitas y el enfoque de la transposición didáctica que se ha experimentado a lo largo de dicho desarrollo. También haremos referencias al discurso matemático escolar vigente.

5.1 Análisis de lo que hacen los alumnos

En esta sección vamos a analizar la visión que los alumnos tienen acerca de las series infinitas de acuerdo a nuestra perspectiva.

También en este apartado regresamos a lo que hacen los alumnos por escrito cuando analizan la convergencia de series numéricas, ahora intentamos explicar, bajo nuestra perspectiva, aquellos errores que clasificamos en cuatro tipos diferentes.

Aclaramos que existen alumnos que al resolver ejercicios y problemas acerca de series efectúan los procedimientos que se consideran, formal o escolarmente, correctos pero no tenemos evidencia de que esto signifique que comprenden completamente los conceptos involucrados. Además estos alumnos son los menos y por otra parte los alumnos que presentan soluciones incorrectas son los más.

Los análisis siguientes hacen referencia a los alumnos con respuestas incorrectas.

5.1.1 Análisis de lo que opinan los alumnos

En la sección 3.1 se presentaron diferentes respuestas de alumnos a la pregunta de qué es una serie infinita, posteriormente se hizo una interpretación de estas respuestas y se les clasificó en varias clases. Ahora procedemos a analizar esa clasificación.

Primero recordemos la clasificación

1. *Hay concepciones de que una serie numérica es una función, en la cual se presenta la diferencia en si es una función continua o discreta, aparentemente la mayoría de los alumnos que comparten esta concepción considera una función discreta.*
2. *Algunos alumnos consideran que la serie es una suma, en donde debemos tomar en cuenta dos casos; los alumnos que consideran que es una suma finita y aquellos que consideran que es una suma infinita, (sin que quede claro si consideran infinito el valor de la serie o infinito el número de elementos a sumar).*
3. *Otra concepción tiene que ver con una aparente mezcla de conceptos entre la serie infinita y la integral. Una posible razón es que sea una "contaminación" del concepto de serie infinita después de haber visto el criterio de la integral.*
4. *Otra concepción que se observa es la de aquellos alumnos que sólo consideran que es algún tipo de método, técnica o fórmula matemática.*
5. *Una última concepción es aquella donde los alumnos consideran a la serie infinita como la suma de los valores que toma una función en un intervalo.*

Basándonos en la perspectiva que hemos desarrollado y considerando la transposición didáctica y el discurso matemático escolar tenemos que la forma general de definir serie infinita está basada en el uso de sumas parciales, siguiendo al libro de texto algunos profesores realizan ejemplos de series infinitas y desarrollan algunas cuantas sumas parciales para mostrar la convergencia de la serie.

En esta primera aproximación vemos que

- Los estudiantes inician el estudio de las series con un razonamiento de tipo geométrico o aritmético, es decir, con un razonamiento correspondiente a los períodos I y II.
- Al calcular sumas parciales se les genera una perspectiva dominada por la concepción de serie=suma, correspondiente a los períodos II y III.
- Consideran sumar valores de una función en un intervalo para analizar la convergencia o divergencia de una serie de funciones, lo que corresponde al período I cuando se toman unos cuantos términos de la serie.
- Intenten observar el área bajo la curva para ver la convergencia, lo que puede ser un recuerdo del criterio de la integral.

- Consideren que calcular los primeros elementos de la serie numérica sea suficiente para hacer afirmaciones acerca de toda la serie, lo que corresponde al período I cuando se toman unos cuantos términos de la serie.

En la sección 3.1 también se hizo una clasificación de las respuestas que los alumnos dieron a la pregunta acerca de la convergencia de una serie, repetimos esa clasificación

1. *La concepción que predomina es que la serie es una suma y que da un número.*
2. *La forma en que se puede calcular "ese número" no está clara para la mayoría de los estudiantes, algunos consideran que se puede hacer la suma y otros sólo dicen que existe ese número pero no indican cómo se obtendría.*
3. *Algunos consideran que la serie converge debido al área que representa la función contenida en la serie, este parece ser un resultado después de haber visto el criterio de la integral. Al parecer la explicación geométrica del criterio de la integral causó una huella más permanente que los demás criterios de convergencia.*
4. *Otros alumnos consideran que la serie es el valor que da un límite, algunos confunden el límite alcanzado por el criterio de convergencia como el valor de la serie y unos pocos piensan en el límite de la sucesión de sumas parciales.*
5. *Ciertos estudiantes consideran que la serie converge porque los elementos son pequeños y se pueden omitir, otros más piensan que los elementos se "detienen" de alguna manera y por eso ya no suman más.*

En esta clasificación podemos ver que hay dos tendencias de pensamiento,

- Algunos alumnos mantienen la idea de serie=suma correspondiente a los períodos II y III provocando que sus respuestas sobre la convergencia estén basadas en considerar sumas, pero los alumnos no pueden hacer la "suma" total de la serie. Esto provoca que no puedan conjeturar cuál es esa "suma" ni cómo se podría encontrar ya que esto no lo cubre el DME debido a que la transposición didáctica lo eliminó.
- Algunos alumnos consideran el "área" como la suma de la serie debido a que continúan pensando en sumar, es decir, serie=suma. El criterio de la integral suele mostrarse geométricamente como una aproximación de rectángulos y la suma de las áreas de esos rectángulos. Así, el área sigue representando la suma, operación que

conocen y manejan desde la infancia. Esto marca un pensamiento correspondiente a los períodos I y III.

- Algunos alumnos consideran que deben utilizarse límites, como una respuesta que aplica "lo que el maestro dijo", pero para aplicar correctamente esta forma de solución necesitan cambiar su pensamiento y hacerlo corresponder al período IV. Consideramos que los alumnos no logran hacer este cambio y por esa razón sus respuestas siguen buscando la suma de la serie y esto provoca el "error" de considerar el valor del límite (del criterio) como la suma de la serie.

Por otra parte cuando a los alumnos se les interroga acerca de las razones por las que es importante conocer la convergencia o divergencia de las series infinitas no logran articular una razón o explicación de esta importancia. En general, los alumnos sólo ven que es una "suma" pero no logran ver cómo o en qué se pueden aplicar. Esto es el resultado de la transposición didáctica experimentada durante los períodos IV y V.

Cuando los alumnos son cuestionados acerca de lo que significa el criterio de la razón, sus respuestas muestran un pensamiento que no corresponde al de los períodos IV y V que sería el necesario para entender un criterio de convergencia. Por ejemplo, cuando el alumno responde "*Que a todas las n las sustituyes por n+1 y lo divides entre la serie normal y luego lo simplificas"*. Se observa que están describiendo la forma de aplicar el criterio pero no están describiendo lo que significa el criterio pues este significado está más allá del período de desarrollo en que se encuentran. Respuestas como "*No sé qué significa pero ayuda a eliminar los exponentes y así simplifica determinar su convergencia"* nos muestran que **los criterios son "cajas negras" que le indican al estudiante la convergencia o divergencia pero no sabe lo que hay dentro**. A los alumnos les preguntamos cosas que corresponden a conceptos dominantes en los períodos IV y V pero ellos continúan atrapados en los períodos I, II y III.

Las respuestas del tipo "*Es comparar dos funciones al mismo límite* y *Que aunque tiende a infinito, siempre va a dar por lo menos 1 así que converge en 1"* refuerzan nuestra afirmación anterior, además nos permiten ver que la desconexión de los criterios de convergencia y su significado (por qué funcionan) generan en los alumnos la confusión de que el valor del límite equivale al valor al que converge la serie.

Algo semejante podemos ver en el caso de la pregunta sobre el criterio de la integral, los alumnos nuevamente son incapaces de explicar por qué la serie y la integral debieran tener el mismo comportamiento, respuestas como "*Porque la integral se comporta igual que la serie* y *Porque se llega a un resultado que al evaluarlo nos lo van a decir y hay un criterio"* muestran que el alumno sigue pensando en que el criterio de alguna "manera desconocida" asegura ese comportamiento. Pero el alumno no sabe por qué. También expresiones como "*Porque uno de sus límites tiende a ser infinito y esto nos da la pauta para saber si un límite o una sumatoria de números nos den como resultados números reales"* nos describe la forma de aplicar el criterio pero el alumno sigue sin explicar el porqué "funciona" el criterio. Esta falta de explicaciones nuevamente la identificamos con el hecho de que el alumno sigue "pensando" como en los períodos I, II y III sin lograr un razonamiento que corresponda a los períodos IV y V, esto lo reforzamos al leer respuestas como "*Porque uno de sus límites tiende a ser infinito y esto nos da la pauta para saber si un límite o una sumatoria de números nos den como resultados números reales"* y "*Porque las integrales impropias no están acotadas por números exactos sino sus límites van al infinito"* que nos dicen que el alumno sigue pensando en sumar o evaluar.

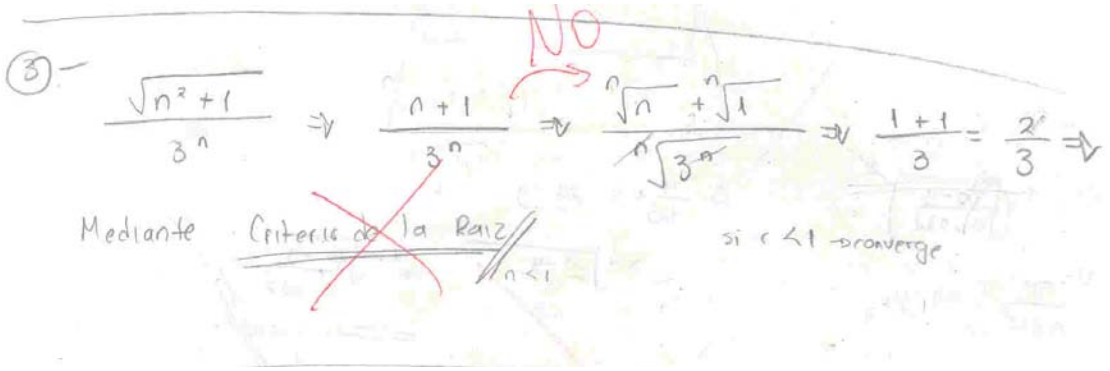
Finalmente, las respuestas que se obtienen de la actividad en la que se les pide a los estudiantes calcular algunas sumas parciales de la serie armónica (sin decirles que son sumas parciales) nos indican que la forma dominante del pensamiento de los alumnos es la de sumar, bajo un esquema de sumar elementos se sienten confiados y seguros de estar haciendo bien las cosas tal vez porque es una operación sencilla y conocida por ellos. La mayoría de los alumnos opina que puede calcular las sumas parciales sin mayor complicación que el tiempo empleado en esos cálculos, sin embargo casi ninguno de ellos hace mención de la imposibilidad de realizar las sumas hasta llegar a un número infinito de elementos.

Estas observaciones nos orillan a afirmar que **en el grueso de la población de estudiantes que respondieron las actividades se encuentra un pensamiento correspondiente al del período III**, es decir, los alumnos consideran serie = suma aunque no sepan cómo calcularla.

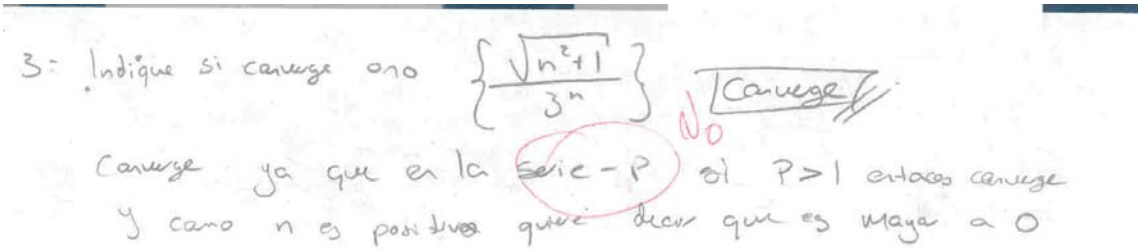
5.1.2 Análisis de cómo resuelven ejercicios los alumnos

Regresamos ahora a los "errores" cometidos por los estudiantes al momento de responder un examen y que anteriormente comentamos. A la luz del desarrollo histórico de las series infinitas, la transposición didáctica y el discurso matemático escolar vigente en las escuelas debemos cambiar el nombre de "error" por otro término que describa mejor lo que sucede cuando un alumno intenta escribir el análisis de la convergencia de las series infinitas.

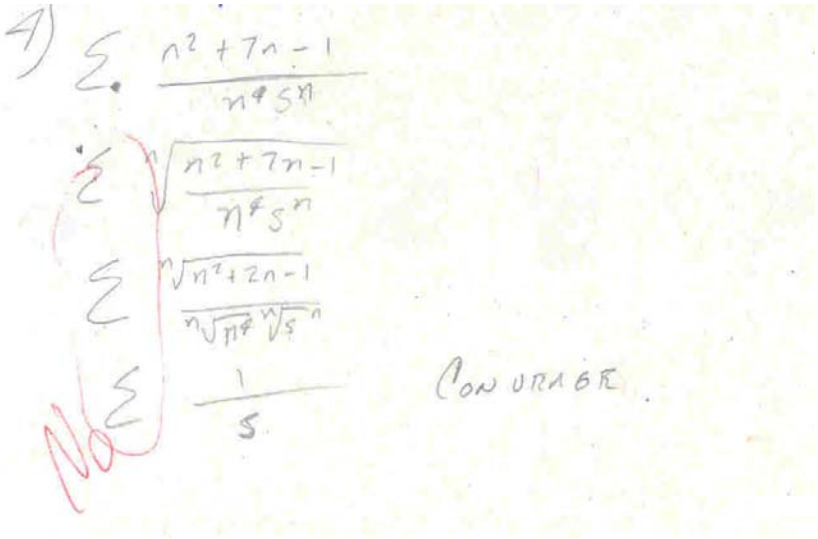
En 3.4 vimos varios tipos de errores que ahora analizamos, en la siguiente imagen aparece la resolución de un ejercicio donde el alumno debe establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\left\{\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n}\right\}$



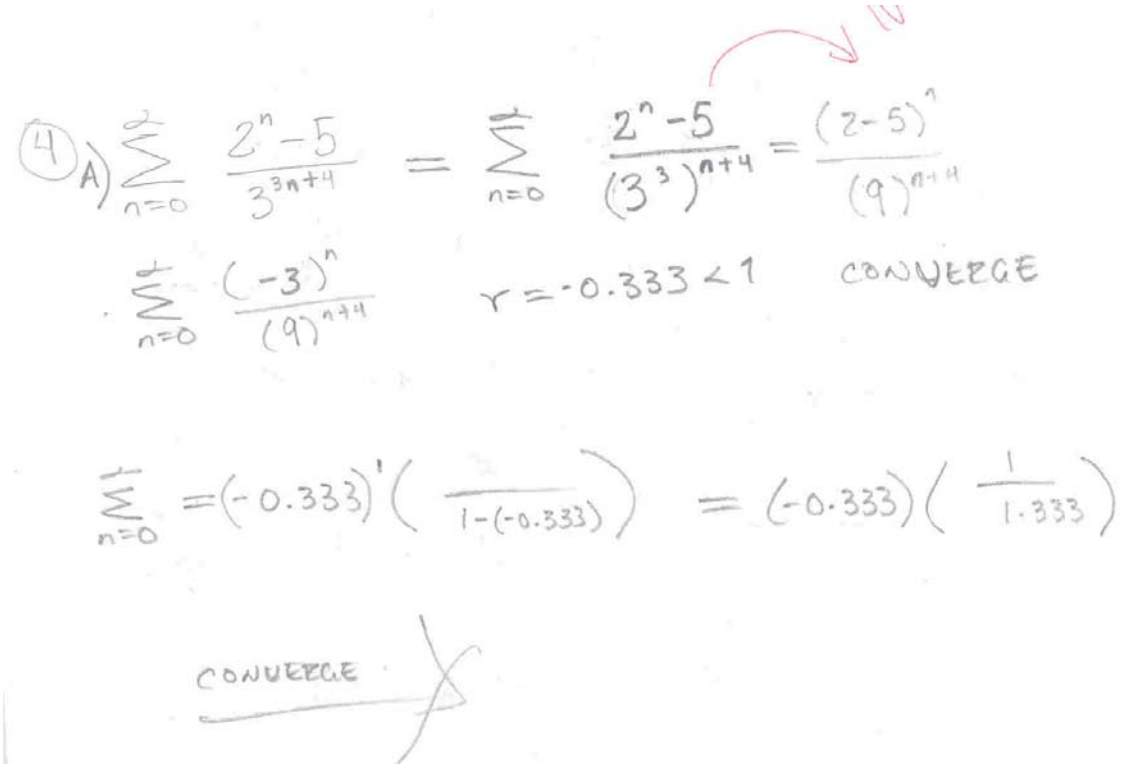
En la imagen podemos observar cómo el estudiante no establece una diferencia entre los conceptos de sucesión y serie, utiliza un criterio correspondiente a series infinitas para analizar el comportamiento de una sucesión. Este error podemos situarlo en el período I debido a que es en ese período cuando las sucesiones son manejadas y estudiadas. En la siguiente imagen se observa el mismo problema, el alumno no identifica la forma apropiada para resolver un ejercicio de sucesiones y aplica un criterio de series.



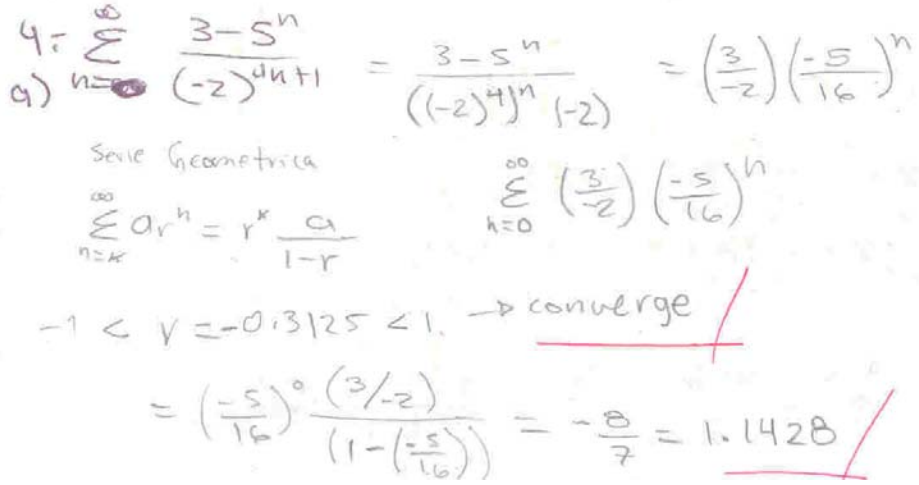
En la imagen siguiente podemos observar cómo el alumno no aplica la simbología adecuada, esto lo asociamos con un pensamiento correspondiente al período II en el cual no existe una simbología única y cada investigador suele presentar simbología propia.



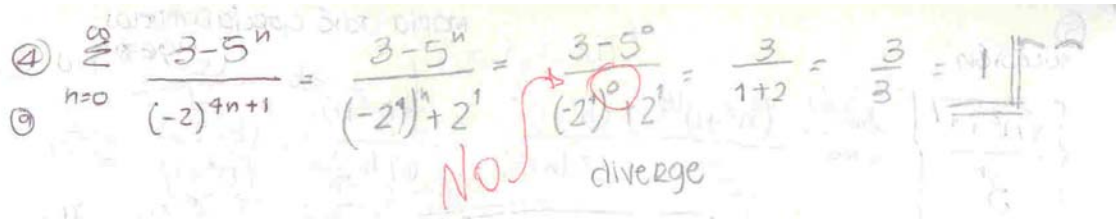
Lo mismo puede ser observado en la siguiente imagen, el alumno forza la expresión a modo de lograr aplicar el criterio de la serie geométrica.



En forma semejante analizamos la siguiente imagen en la que el alumno ahora separa dos expresiones para utilizar el criterio de la serie geométrica



Ahora podemos ver lo que nosotros interpretamos como una evidencia de que el estudiante llega a tener un pensamiento del tipo del período III en el que todo debe ser resuelto utilizando aritmética, de esta forma los estudiantes evalúan las expresiones para poder obtener un valor que les de información sobre la serie infinita.



De la misma forma clasificamos el siguiente ejercicio que fue tomado del pizarrón en el cual estaban estudiando algunos alumnos. Consideramos que los estudiantes evalúan la serie para poder manejar "números" que son lo que pueden y están acostumbrados a manejar, de esta manera interpretamos este comportamiento como evidencia de que los estudiantes presentaban un pensamiento correspondiente al período II.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n-1} =$$

para n = 1 se tiene $\frac{1+1}{1+3-1} = \frac{2}{3}$ entonces a = $\frac{2}{3}$

para n = 2 se tiene $\frac{2+1}{2^2+3(2)-1} = \frac{3}{9}$ entonces r = $\frac{1}{3}$

5.2 Análisis de trabajos previos

Ahora vamos a revisar nuevamente lo que algunos investigadores han hecho, pero lo haremos bajo la perspectiva que hemos construido:

- Tesis de doctorado de Aline Robert, [Ro82].
- Tesis de doctorado de José Armando Albert, [Ab96].
- Tesis de maestría de Raúl Flores.
- Tesis de maestría de Velia Pérez.
- Tesis de maestría de Julio A. Moreno.
- Tesis de maestría de Javier Douglas.
- Investigación de J. Mamona (1990).
- Investigación de Robert Davis (1982).
- Investigación de Alcock y Simpson (2005).

Tesis de Robert.

Nuestra aproximación nos permite afirmar que las respuestas de alumnos que encontró la investigadora son semejantes a las que nosotros detectamos debido a que el DME que se manejaba en Francia en la época de su investigación es parecido al que utilizamos en nuestras escuelas.

Consideramos que los errores detectados por Robert se deben a que los ejercicios que propone a los estudiantes son de tipo formal y su evaluación se realiza desde el punto de vista del rigor matemático, es decir corresponden a los períodos IV y V. Pero las respuestas que ella comenta nos permiten ver que sus estudiantes tienen razonamientos correspondientes a los períodos I, II o III.

Tomando en cuenta nuestra perspectiva consideramos que los cuestionarios aplicados por nosotros nos han permitido establecer una semejanza entre los razonamientos de los estudiantes franceses del estudio y nuestros alumnos.

Tesis de Flores.

Desde nuestra perspectiva consideramos que esta investigación contiene elementos valiosos que bien podrían ser retomados en investigaciones futuras, esto lo decimos porque la idea fundamental del investigador fue hacer que los estudiantes logren pasar del razonamiento del período III al correspondiente al período IV.

Sin embargo al mismo tiempo vemos que al inicio de la investigación, mediante un esquema geométrico y el ejercicio de hacer sumas de áreas, el autor refuerza el razonamiento correspondiente a los períodos I y III, es decir geométrico y aritmético.

Al momento en que el investigador intenta introducir el manejo de las series en un razonamiento de período IV, siguiendo los pasos de *Cauchy*, encuentra resistencias por parte de los estudiantes con lo que obtiene la conclusión "*No es natural operar con los términos de una serie para determinar si esta converge o diverge."*
Desde nuestra perspectiva consideramos que se podría iniciar esta misma experiencia utilizando manipulaciones algebraicas que no involucren a los períodos I al III.

Tesis de Pérez.

Para nuestro análisis de esta investigación consideramos las siguientes frases escogidas por la autora a partir de las conversaciones con y entre los estudiantes:

- *Esto lo sacamos observando y observando pero en realidad no lo vamos a poder hacer.* (comentario de Claudia)
- *Entre más grande sea el número de términos y que tiendan a infinito más van a ser iguales pero, ¿cuándo va a ser infinito? Pues no se puede dar ni un número ni una cifra.* (comentario de Claudia)

- *Esta (la fórmula) está bien, pero especificar, dar como una aclaración donde diga que ya sabemos que en la práctica no se puede, porque qué tal que te digan –No es cierto porque nunca vas a poder llegar al infinito.* (comentario de Claudia)
- *…ya que fue lo que los obligó a cambiar el signo de igualdad por el de equivalencia al decidir escribir* $e^x \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad n \to \infty$ …(comentario de la autora)
- *…Chava, no acepta que dos funciones de diferente naturaleza como* e^x *que siempre es positiva y creciente, que no tiene raíces, pueda ser igual al polinomio, que es una función positiva y negativa, que crece, decrece y tienen puntos de inflexión.* (comentario de la autora)

(Pérez, 1991, p. 63)

- *Chava en cambio, no acepta la igualdad de* e^x *con el polinomio, el signo de igualdad significa para él, una transmisión de las propiedades de una función hacia la otra, o bien, lo que trata de establecer, es que –Dos funciones son iguales sólo si tienen las mismas propiedades o características.* (comentario de la autora) (Pérez, 1991, p. 66)
- *Es decir, la igualdad se da por no tener argumentos de negación o validez en el infinito.* (comentario de la autora) (Pérez, 1991, p. 66)

De acuerdo a nuestra perspectiva podemos enumerar las siguientes observaciones:

1) El escenario gráfico reforzó la visión geométrica de las series de Taylor, aunque los alumnos no supieran que estaban manipulando los términos de una serie de Taylor. Es decir, en la primera etapa de la investigación se reforzó la visión de los períodos I y II.
2) El escenario numérico reforzó la visión de serie como una suma, es decir, la segunda etapa de la investigación generó o reforzó un razonamiento correspondiente al período III.
3) Los comentarios hechos por los estudiantes muestran que al intentar el paso de lo gráfico y numérico a lo analítico se mantuvieron las dificultades. Desde nuestra perspectiva decimos que esto se debe a que los alumnos recibieron un reforzamiento del pensamiento correspondiente a los períodos I, II y III; sin embargo, cuando la investigadora les pide expresar una fórmula está introduciendo y forzando el pensamiento correspondiente al período IV, lo cual los estudiantes no logran hacer.

4) Un comentario de la autora reafirma nuestra observación del punto anterior, cuando dice que uno de los estudiantes debe aceptar su propio análisis sólo porque no puede refutarlo.
5) Este trabajo presenta algunas de las dificultades que los alumnos enfrentan, aún tratándose de alumnos que fueron seleccionados con condiciones muy favorables, *"…haber obtenido las más altas calificaciones en el Área de Matemáticas a lo largo de los seis semestres cursados, ser considerados por sus profesores como* ***muy buenos para las matemáticas*** *y participativos en clase y con disponibilidad…Además habían llevado taller de computación…".* (Pérez, 1991, p. 8)
6) Más adelante profundizaremos este punto, pero podemos adelantar que estos alumnos empiezan a manejar la idea de convergencia sin conocer criterios de convergencia y sin realizar manipulaciones de tipo algebraico.

Tesis de Moreno.

De acuerdo a la perspectiva que desarrollamos hacemos las siguientes observaciones

1. En este trabajo se enfatiza el enfoque geométrico (por las gráficas) de las series infinitas, lo cual refuerza el pensamiento de los períodos II y III.
2. El escenario gráfico y de simulación le permite a los alumnos visualizar el comportamiento de las sumas parciales, sin embargo, la función límite involucra un proceso al infinito que necesita de herramientas diferentes a la graficación para ser percibido, esto es correspondiente al período IV y V.
3. Los alumnos, al observar las gráficas que se van generando, pueden asociar un sentido a las fórmulas que antes carecían de significado, pero siempre bajo un pensamiento de período III.
4. Cuando los alumnos recurren a justificaciones como "*los radios se hacen cada vez más pequeños*", "*el punto prácticamente gira sobre si mismo*", desarrollan un sentido práctico de la convergencia, aunque continúa siendo un pensamiento correspondiente al período III ya que coinciden con el tipo de razonamientos y justificaciones utilizadas en ese período y que consisten en razonamientos físicos o geométricos.

5. Por el comentario del punto anterior podemos explicar que el autor exprese "…*para la mayoría de los estudiantes persistieron las dificultades para expresar analíticamente a las funciones*…" debido a que lograr este tipo de expresiones analíticas necesita de teoremas y criterios de convergencia que no están basados en el aspecto geométrico de las series y que corresponden al tipo de razonamiento de los períodos IV y V.
6. En ese mismo sentido justificamos los comentarios del autor "…*la problemática que encierra la noción de convergencia de series trigonométricas,* ***es muy compleja***." y "*Las* ***dificultades y obstáculos epistemológicos****, que generan los procesos infinitos propios de la convergencia,* ***son difíciles de superar*** *en su totalidad*…", por la misma razón esgrimida en el punto (5). Es decir, enseñamos períodos I al III a nuestros alumnos pero les preguntamos cosas correspondientes a otro período.
7. Como comentario aparte, el autor cita en
    a. "*la convergencia de sucesiones numéricas es un obstáculo para comprender la convergencia de sucesiones de funciones*"
    b. Una dificultad que subyace es "*el predominio de sucesión sobre la noción de serie*"

    (Moreno, 1999, pp. 12-13)

    Esto lo identificamos con el hecho de que durante el período V (período actual) se establece la separación de ambos tipos de series infinitas, de funciones y numéricas, y la transposición didáctica colocó a las series numéricas como antecedente de las series de funciones. Además se ha hecho énfasis de no considerar a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ como una suma, sino como **el límite de una sucesión** de sumas parciales. Y sin embargo, la información recibida por los alumnos no les permite lograr esta concepción.

Tesis de Douglas.

De acuerdo a nuestra perspectiva podemos realizar los siguientes comentarios:

1. En esta investigación no se trabaja o analiza directamente el razonamiento de los estudiantes por lo que no podemos ubicarlos en algún período en particular.

2. El autor realiza afirmaciones en el sentido de que la Transposición Didáctica de los conocimientos matemáticos influye en la escuela, lo que es coincidente con nuestros análisis realizados.
3. El autor comenta "*Podemos aseverar que los libros de texto de cálculo, fueron influenciados por los resultados del desarrollo de las investigaciones matemáticas relacionadas con la elaboración de los fundamentos lógicos de esta ciencia*" lo cual concuerda con nuestra perspectiva del avance en pensamiento que representa el período V.
4. Basado en toda su investigación el autor propone que "*se deben modificar los contenidos del curso de cálculo, desarrollándolo, tomando como concepto esencial, a la SERIE DE TAYLOR*" lo cual quizás permita que los alumnos tengan un desarrollo en lo concerniente a lo gráfico, pero esto representa la propuesta de Lagrange y entonces coincide con el pensamiento del período III.
5. Por el punto anterior, consideramos que la propuesta anterior no ayudaría a los estudiantes a lograr aplicar las técnicas de análisis para la convergencia y divergencia de series debido a que estas técnicas pertenecen al período V. Además de que *Cauchy* demostró la insuficiencia de la serie de Taylor.

Investigación de Mamona.

Aplicando nuestra perspectiva consideramos que

1. Las preguntas realizadas en los cuestionarios versan sobre el manejo de conceptos que corresponden al período V.
2. La pregunta 1 necesita que el alumno comprenda cabalmente el significado de convergencia y que además tenga un manejo mínimo de conceptos sobre los números reales y su estructura topológica, ya que requiere el manejo de cotas y "colas" de sucesiones, es decir, razonamiento de período V.
3. La autora reporta que el estudiante necesitó la gráfica para comprender que tenía un error en su resultado, esto lo identificamos con el hecho de que el pensamiento del alumno corresponde a los períodos I y II.

4. La autora comenta que el estudiante tiene la tendencia de sumar los términos de la sucesión, esto concuerda con nuestra afirmación de que los alumnos suelen tener tendencias hacia el pensamiento del período III en el que lo que importa es **sumar**. Además de que es una operación conocida por él.
5. Como afirmación final, la investigadora dice "***it is the difficulty of transition from the stage where arithmetic is used to solve more or less physical problems, to the one where mathematics is used to explore the structure and behavior of number systems themselves.***" Lo que concuerda con nuestra suposición de que los alumnos mantienen un pensamiento correspondiente a los períodos I, II y III, y que sin embargo en la escuela suele preguntárseles conceptos en el sentido de los períodos IV y V donde los criterios de convergencia y la estructura topológica de los reales es necesaria.

Investigación de Davis.

Interpretamos ahora los resultados de Davis desde nuestra perspectiva:

1. El alumno tenía mucha confianza en los métodos aritméticos que él mismo había desarrollado, por lo cual su pensamiento era semejante al del período I y además estaba reforzado por sus constantes éxitos en el manejo de sumas y operaciones básicas.
2. Los problemas que debía resolver correspondían a un período diferente (IV y V) y sus métodos aritméticos por lo tanto no le eran útiles.
3. Los problemas que tenía que resolver involucraban un manejo algebraico que no realizaba correctamente debido a que sus métodos propios no eran adecuados fuera de la aritmética.
4. El mal manejo de la notación (comentado ampliamente por el autor) aumentaba los errores que cometía al utilizar sus métodos propios.
5. Lo que el autor comenta al decir que Peter no había logrado construir un marco adecuado para las series infinitas, lo identificamos nosotros con el hecho de que su razonamiento no había logrado cambiar del período III al IV (y menos aún al período V)

Investigación de Alcock y Simpson.

De acuerdo a nuestra perspectiva comentamos

A. Las preguntas involucran conceptos correspondientes al período V.
B. Los alumnos de la banda *Full definition* presentan un pensamiento que asociamos al correspondiente al período V, ya que manejan adecuadamente la notación $\varepsilon - \delta$ y los conceptos relacionados de convergencia.
C. Los alumnos de la banda *Partial-definition* parecen estar en la transición de los períodos III y IV, de acuerdo a los extractos de las entrevistas de los estudiantes.
D. Los alumnos de la banda *No-definition* parecen mantener un pensamiento correspondiente al período III, aunque no hay muchas evidencias más que un intento de representación gráfica. En cualquiera de los casos estos alumnos no presentan un pensamiento del tipo de los períodos IV o V, lo que provoca sus resultados no satisfactorios.

6. Conclusiones

En este capítulo presentamos respuestas a algunas de las preguntas que fueron formuladas en la sección 2.4.

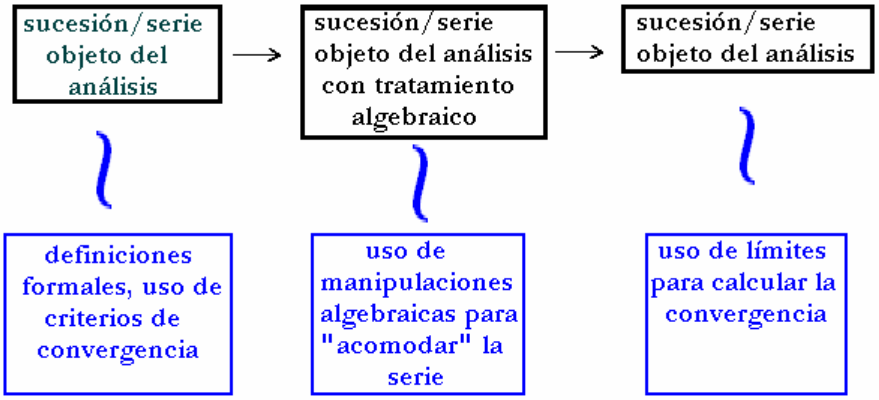
Algunas de las respuestas están planteadas para incidir directamente en el salón de clases y otras más están concebidas dentro de un área de investigación que plantea más preguntas de las que son resueltas.

6.1 Conclusiones Generales

Abordamos ahora las conclusiones de este trabajo. Justificamos nuestras afirmaciones en todo el desarrollo histórico que se escribió en la sección 4.1 y su análisis de la sección 4.2, en el discurso matemático escolar vigente del que hemos logrado hacer una caracterización, en el desglose de la transposición didáctica experimentada por las series infinitas que aparece en la sección 4.4 y en toda la evidencia que hemos recolectado a lo largo de esta investigación.

I. Para responder a la pregunta 1 (*¿El DME actual permite a los estudiantes la construcción del concepto de sucesión y serie infinita que plantea el mismo DME?*) vamos a considerar cada una de las preguntas 1.a hasta 1.e
    a. *¿Qué dice el DME vigente acerca de las sucesiones y series?* En 4.3 se presentaron evidencias que nos permiten analizar parte del DME a lo largo de la historia, desde la aparición de las sucesiones y series hasta nuestros días. En la última parte del análisis se describe el estado actual del DME y que es el correspondiente al período V de desarrollo de las series. En 3.2 se hizo un análisis de lo que los profesores opinan al respecto de las sucesiones y series y de la forma en que se trabaja **dentro** del aula de clases. Tomando en cuenta lo anterior podemos decir que en la actualidad las sucesiones y series son

consideradas como objetos matemáticos abstractos su definición y propiedades no tienen conexión alguna con los problemas que les dieron origen, en la mayoría de los casos son enseñadas basándose en la formalidad del libro de texto. El esquema siguiente resume la visión de las sucesiones y series desde el punto de vista de los libros de texto.



b. *Para los alumnos, ¿qué es una sucesión infinita?* , y

c. *Para los alumnos, ¿qué es una serie infinita?* Fueron investigadas y estudiadas en 3.1 mediante cuestionarios escritos y sondeos personalizados, además se analizó en 3.4 la forma en que los alumnos responden los ejercicios sobre convergencia. Basados en las respuestas proporcionadas por los estudiantes y lo que escriben al analizar la convergencia de sucesiones y series podemos afirmar que los alumnos no tienen un concepto claro acerca de las sucesiones y series, de hecho **las evidencias indican que para la mayoría de ellos no hay una diferencia clara entre ambos conceptos**.

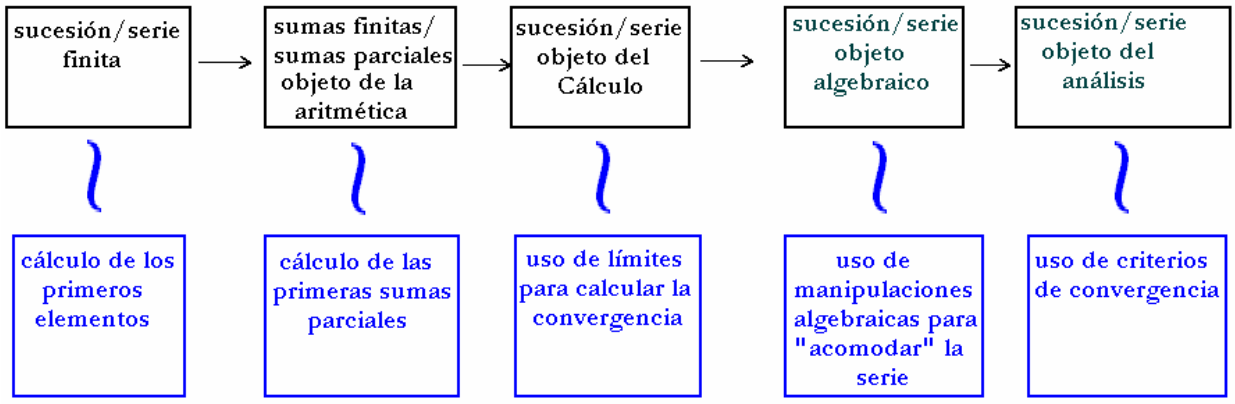
d. *¿Pueden, los alumnos, distinguir las diferencias existentes entre ambos conceptos?* Nuestra respuesta es no. Muchos estudiantes manejan las sucesiones como si fueran series y viceversa, esto puede verse porque

    i. La convergencia de sucesiones se ve aplicando un límite al término general de la sucesión y viendo si existe el límite. Muchos alumnos hacen lo mismo con las series, calculan el límite del término general de la serie y deducen su convergencia o divergencia de esta manera.

ii. Aplican criterios de convergencia de series a sucesiones, por ejemplo utilizan el criterio de la raíz para ver la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n}\right\}$

Esta es la muestra visible de la mayoría de los errores que catalogamos como error de concepto y que ubicamos como un pensamiento correspondiente a los períodos I o II, pero el origen de dichos errores parece estar ubicado en múltiples factores como son el uso cotidiano de las palabras sucesión y serie, el manejo del infinito y hasta la definición formal de serie que involucra una sucesión (una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales). Falta estudiar más este apartado pero en apariencia los estudiantes al ver la definición leen que una serie es una sucesión pero nosotros les decimos que no es igual a una sucesión.

e. *¿Cómo van formando los alumnos los conceptos de sucesión y serie infinitas?* De acuerdo a las evidencias recolectadas con los estudiantes y de acuerdo al desarrollo histórico que se realizó de las series infinitas podemos afirmar que **los alumnos reproducen los tres primeros períodos (I, II y III) del desarrollo histórico de las series infinitas, es decir, primero tienen una aproximación de serie=suma** aparentemente provocado por el DME vigente que utiliza sumas parciales y porque está basada en una operación conocida y dominada por ellos. Las evidencias nos muestran que **la mayoría de los estudiantes no logran cambiar su pensamiento para llegar al correspondiente de los períodos IV y V**, y el cual es el tipo de pensamiento que se desea. Esto aparece resumido en el siguiente esquema.



Así, a la pregunta I respondemos que el DME vigente **no permite** la construcción del concepto de sucesión y serie que el mismo DME plantea.

II. Para responder a la segunda pregunta de investigación (*¿cómo seleccionan, los alumnos, el criterio de convergencia que aplicarán?*) procedemos a analizar las interrogantes planteadas como 2.a hasta 2d.

   a. *¿Cómo son las definiciones utilizadas actualmente en la escuela?* De acuerdo a 4.3, las definiciones son formales, incluyendo conceptos que no han sido cubiertos en los programas de estudio. Las definiciones suelen estar expresadas en la terminología $\varepsilon - \delta$, o en el mejor de los casos utilizando límites; sin embargo estas definiciones generalmente se encuentran después de algún capítulo que se dedica al estudio de la estructura del campo de los números reales.

   b. *¿Qué opinan los estudiantes sobre los criterios de convergencia?* De acuerdo a las respuestas obtenidas de los alumnos en 3.1 hemos podido observar que los estudiantes utilizan los criterios de convergencia sin darles un significado particular más allá del sólo utilizarlos como receta de cocina. La transposición didáctica ha eliminado muchos de los fundamentos teóricos que los alumnos necesitarían para aceptar y utilizar los criterios de convergencia como una herramienta muy poderosa, quedando reducido su uso al ensayo y error de una simple receta de cocina.

   c. *¿Qué significado tiene un criterio de convergencia para los estudiantes?* Podemos suponer, por los sondeos escritos y por la entrevista personal, que para los alumnos el criterio es una técnica que casi mágicamente dice si hay convergencia o divergencia; pero la razón por la que el criterio "funciona" está fuera de su alcance, ya sea porque nunca se hacen esta pregunta o porque simplemente no pueden imaginar la razón matemática por la que algo que en apariencia no tiene conexión con la serie (el límite y el cociente) les permite saber si la serie converge o no. **Para los estudiantes un criterio de convergencia es una regla extraña cuyo enunciado difícilmente entienden** y mucho menos se preguntan por qué es que sirve para analizar la convergencia. Intentan aplicar criterios de convergencia porque el profesor se los pide sin embargo los estudiantes no ven la necesidad de utilizarlos porque además no ven la necesidad de estudiar la convergencia.

d. *¿Qué procedimiento sigue un estudiante al resolver ejercicios de convergencia?* De acuerdo a las evidencias que hemos reunido, **los alumnos no tienen una forma clara de identificar y seleccionar un criterio de convergencia apropiado a una serie particular** y se inclinan por el ensayo y error, lo que situamos como pensamiento de los períodos I y II cuando se hacen desarrollos sin contar con un método específico. Pueden (o intentan) aplicar un criterio a las series que aparecen en la sección correspondiente del libro pero no logran elegir en el caso de que se les proporcione una serie sin indicar la sección del libro a la que corresponde. Como un intento de solución de este problema se está desarrollando y depurando una propuesta didáctica.

Así, a la segunda pregunta de investigación podemos responder que **la mayoría de los estudiantes** que participaron en la investigación **no presentan una metodología propia que les permita elegir el criterio de convergencia más adecuado** para resolver un ejercicio particular. En la mayoría de los casos, la falta de significado de los criterios **forza a los alumnos a recurrir al ensayo y error** con la finalidad de resolver un ejercicio que el profesor (en tarea o examen) le ha indicado que resuelva.

III. Para responder a la tercera pregunta de investigación (*¿Es necesario el conocimiento del álgebra para construir (y trabajar con) el concepto de serie infinita?*) fue necesario reconstruir cronológicamente el desarrollo de las series infinitas, que fue tratado en 3.1.

a. *¿En qué culturas aparecen las sucesiones y series?* Nuestro acercamiento histórico nos permite decir que las sucesiones y series, finitas o infinitas, aparecen con los egipcios, los babilonios, las diversas culturas de la India, los árabes, los chinos y los europeos. Sin tener evidencias de los pueblos mesoamericanos sospechamos que también hayan logrado estos conceptos debido a sus avances en matemáticas y astronomía. Es decir, a lo largo del mundo surgieron estos conceptos.

b. *¿Cuáles son los problemas o actividades que dan origen a las sucesiones y series?* De acuerdo a nuestra investigación en los egipcios, babilonios y chinos las sucesiones y series se presentan principalmente al momento de realizar actividades de reparto de bienes y posesiones, y en el cálculo del pago de impuestos. Los hindúes y los árabes parecen estar motivados por la necesidad

de calcular valores exactos de semi cuerdas de ángulos (su equivalente a nuestra función seno) para hallar posiciones en el espacio. Para los europeos, aparte de las razones anteriores también existe la de resolver problemas físicos y mecánicos.

c. *Aquellas culturas que utilizan sucesiones y series, ¿cómo las obtienen? ¿qué áreas de la matemática utilizan en su obtención?* Aunque hay autores que afirman que los hindúes tenían conceptos equivalentes a las diferenciales, no existen evidencias de que sus desarrollos hayan sido realizados mediante algún tipo de "cálculo diferencial", en cambio las expansiones más comúnmente utilizadas por las escuelas matemáticas hindúes son realizadas mediante la geometría y la aritmética utilizando recursión y expresiones equivalentes a nuestras fracciones continuas. Esto puede observarse en los trabajos de *Arquímedes* y *Madhava* en series, y de *Fibonacci* en sucesiones. Hacia el final de la *Escuela de Kerala* en la India y en los matemáticos árabes y chinos se observa un mayor trabajo en álgebra. Después de la aparición del cálculo se utilizarán derivadas e integrales para encontrar series.

d. *¿Qué áreas de la matemática actual están involucradas en el concepto y manejo de las sucesiones y series?* En 4.1 se encontró que la forma en que actualmente se manejan las series se originó en el paso del período IV al V. Es decir, cuando se concluyó el proceso de aritmetización de la matemática y la aparición de la topología. Es decir, la estructura topológica del campo de los números reales es la razón principal por la que las sucesiones de números reales pueden ser convergentes y converger a un número real. Muchas de las definiciones de convergencia de sucesiones de funciones están basadas en la estructura de los reales. La teoría de la medida establecida por Lebesgue, Borel, Cantor, etc., utiliza la convergencia de sucesiones de funciones para definir la mayoría de sus conceptos. En resumen, nuestras definiciones de sucesión y serie utilizan Análisis Real, Análisis Funcional y Topología.

e. *¿Qué áreas están involucradas en el DME vigente?* Basándonos en 4.3 y 4.4, podemos decir que actualmente el DME descansa en la aritmética, el álgebra y el cálculo. Siendo específicos, las definiciones están hechas en términos de sumas parciales (aritmética), la convergencia está definida en términos de límites (cálculo) y los

criterios de convergencia utilizan manipulaciones algebraicas para escribir la serie de una forma que sea simple la aplicación de un límite que finalmente dirá si la serie converge o no. Este DME **no incluye** topología, análisis real (teoría de la medida) ni análisis funcional.

Así, nuestra respuesta a la tercera pregunta de investigación es no, de acuerdo a la forma en que históricamente se desarrollaron los conceptos de sucesión y serie infinita, y tomando en cuenta la forma en que se define una serie infinita afirmamos que **el conocimiento y manejo del álgebra no es un requisito indispensable para comprender el concepto de sucesión y serie infinita**. Tampoco es necesaria para realizar cálculos y sumas parciales por lo que **los alumnos pueden hacer suposiciones sobre las series infinitas sin necesidad del álgebra**. Desde la perspectiva de los estudiantes para las series infinitas el álgebra sólo es una herramienta necesaria y útil al momento de manejar los criterios de convergencia.

Resultados adicionales:

IV. Después de haber analizado el largo camino que han recorrido las series numéricas infinitas para instalarse en la escuela desde su "invención" hasta su axiomatización y considerando que se involucran conceptos matemáticos desconocidos por los alumnos podemos afirmar que los conceptos y el manejo de las series infinitas **no pueden ser comprendidos por los alumnos en unas cuantas semanas de clases**. Será necesario realizar investigaciones que indiquen una metodología y tiempos escolares más adecuados para el estudio de estos temas.

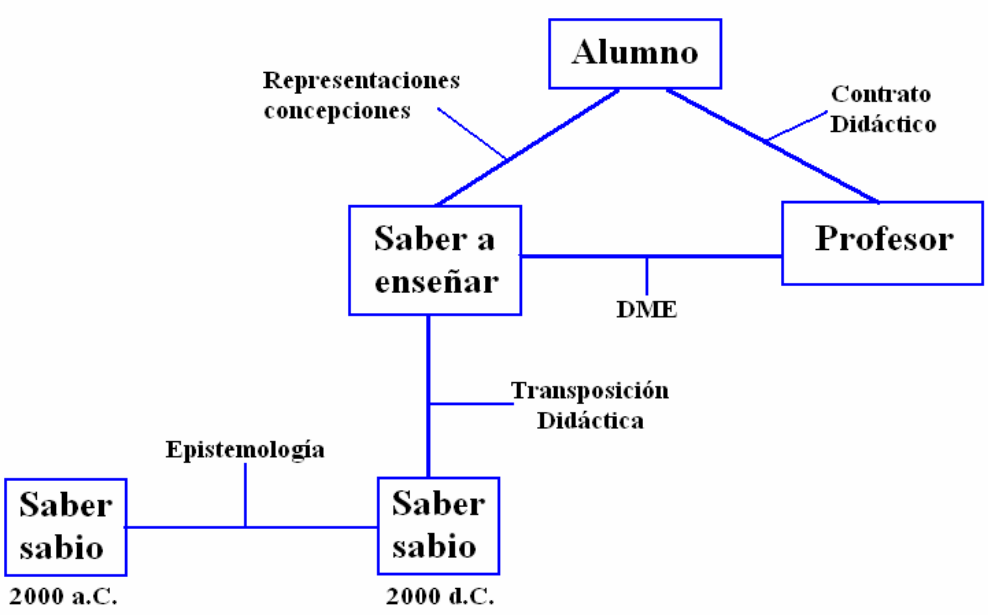
V. Algunos alumnos logran conceptualizar las series en términos abstractos pero no tenemos evidencias de cómo lo logran, tampoco podemos decir hasta qué nivel de abstracción logran llegar. La única evidencia de esta abstracción parece ser la elección y aplicación correcta de los criterios de convergencia. Este nivel ha sido encontrado en alumnos que en general tienen un buen desempeño escolar. Es necesario realizar estudios específicos al respecto.

VI. Hasta el momento se ha realizado un análisis de los acercamientos que en algunos trabajos previos se han efectuado sobre las series infinitas, pero basados en los cinco períodos que hemos establecido hemos encontrado que **la naturaleza de las preguntas que se les hacen a los alumnos corresponde a los períodos IV y V**, estas preguntas requieren de un tipo de pensamiento y un manejo de propiedades topológicas que los alumnos no tienen. Por otra parte hemos observado que **las aproximaciones que se han intentado recientemente refuerzan los tipos de razonamiento que corresponden a los períodos I, II y III**, tipos de razonamiento basados en la aritmética, la geometría, la física y el pragmatismo. Así, encontramos que los estudiantes reciben definiciones, ejemplos y aplicaciones que corresponden a un tipo de pensamiento determinado pero al mismo tiempo se les hacen preguntas que corresponden a un tipo de pensamiento completamente diferente. Por lo anterior podemos afirmar que **los estudiantes no pueden responder correctamente a las preguntas de convergencia, y esto no es porque cometan errores sino porque no tienen las herramientas y tampoco han desarrollado el tipo de pensamiento que les permita usar esas herramientas aún en el caso de que las tuvieran**. Nuestra visión es que lo anterior seguirá sucediendo mientras las aproximaciones que se realizan estén disociadas de los períodos que hemos establecido. Consideramos que es necesario generar una metodología que permita a los alumnos pasar entre los diferentes períodos de desarrollo de las series infinitas, en particular que les permita hacer el paso del período III al período IV. Para esto consideramos que debe diseñarse una metodología con actividades que tengan una secuencia del tipo siguiente de modo que

   a. Permita a los alumnos construir el concepto de serie infinita con sumas parciales.
   b. Permita a los alumnos experimentar con la densidad de los números racionales.
   c. Permita que los alumnos verifiquen algunas propiedades topológicas de los números reales.
   d. Genere en los estudiantes la necesidad de considerar el comportamiento de los elementos de una serie infinita.
   e. Permita a los estudiantes establecer estrategias o pseudo-criterios de convergencia creados por ellos mismos.

f. Enfatice la utilidad y uso de los criterios de convergencia que aparecen en los libros de texto.

VII. Basados en nuestros análisis el esquema de 2.2 lo hemos modificado considerando la epistemología de las series infinitas y el DME:



6.3 Epílogo

Esta investigación intentó responder a preguntas que surgieron en el salón de clases, algunas han sido respondidas pero otras necesitan ser profundizadas. Aunado a esto se han generado más preguntas de las que podemos abordar por el momento, por lo tanto consideramos que se abre un amplio abanico de posibilidades de realizar investigación. Podemos pensar en términos del aula de clase, en términos históricos, epistemológicos,… para el futuro pensamos que surgen a modo de lista incompleta las siguientes ideas a desarrollar

- ✓ Encontrar las razones que generaron los cambios de pensamiento que a su vez provocaron un nuevo período en el desarrollo de las series infinitas.

- ✓ Entender por qué los matemáticos hindúes lograron avances tan espectaculares adelantándose por varios siglos al resto del mundo.
- ✓ Estudiar por qué algunos conceptos surgen en unas culturas y no en otras.
- ✓ Investigar por qué surge la necesidad de considerar series infinitas en la historia y en las aplicaciones.
- ✓ Estudiar por qué la creación de criterios de convergencia cayó en el olvido.
- ✓ Investigar cómo es que algunos estudiantes logran pasar del período III al IV y la mayoría no lo logra.
- ✓ Estudiar las representaciones internas que los estudiantes hacen de las series infinitas y cómo influyen esas representaciones en el uso de los criterios de convergencia.
- ✓ Generar una propuesta didáctica para las series infinitas que pueda ser utilizada en las aulas de clase.
- ✓ Investigar si estudiantes sin conocimientos de cálculo pueden desarrollar el concepto de serie infinita y sus aplicaciones.
- ✓ Investigar hasta dónde pueden avanzar los estudiantes sin conocimientos de álgebra en el desarrollo del concepto de serie infinita.
- ✓ Diseñar secuencias didácticas que permitan a los estudiantes clarificar algunos de los conceptos involucrados en el tema de series infinitas.
- ✓ Etc…

Bibliografía

LIBROS

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni Analitiche Libro Secondo del Calcolo Differenziale*. Italia.

Baule, B. (1949). *Tratado de Matemáticas Superiores para Ingenieros y Físicos*. Madrid, España: Editorial Labor S.A.

Babson, J. (1711). *Collection of the Works of Sir Isaac Newton* [Colección de los trabajos de Sir Isaac Newton]. Londres : Ex officina Pearsoniana. (Versión digital obtenida de http://burndy.mit.edu/Collections/Babson/Online/Analysis/ el 17 de noviembre de 2005)

Berger, M. (1859). *Théorie élémentaire des séries* [Teoría Elemental de las Series]. París, Francia: Mallet Bachelier (Versión digital obtenida de http://gallica.bnf.fr/ el 23 de agosto de 2005)

Bromwich, T. (1955). *An introduction to the theory of infinite series* [Una introducción a las series infinitas] 2da edición. New York, USA: Macmillan & Co.

Cauchy, A. (1821). *Cours D'Analyse* [Curso de Análisis]. (Versión digital obtenida de http://gallica.bnf.fr/ el 23 de agosto de 2005)

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

Cajori, F. (1993). A history of Mathematical Notations. Estados Unidos. Dover.

Collette, J. (1986). Historia de las Matemáticas I. 2da. Edición. Madrid. España. Siglo XXI.

De Mora, J. y Ludwika, M. (2003). *Apuntes para una historia de las matemáticas y astronomía en la India antigua*. México. UNAM, Instituto de Investigaciones Filológicas

Gardiner, A. (2002).*Understanding infinity: The mathematics of infinite processes* [Entendiendo el Infinito: Las matemáticas de los procesos infinitos]. New York, E.U. Dover Publications.

Grattan-Guinness, I. (1980). *From the Calculus to Set Theory 1630-1910, An introductory History* [Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos 1630-1910, Una introducción histórica]. New Jersey, E.U. Princeton University Press

Grattan-Guinness, I. (1970). *The development of the foundations of mathematical analysis form Euler to Riemann* [El Desarrollo de los fundamentos del Análisis Matemático desde Euler a Riemann]. Massachusetts, E. U. The MIT Press

Hardy, G. (1949). *Divergent Series* [Series Divergentes]. Londres: Oxford University Press.

Jolley, L. (2005). *Summation of Series*. USA: Dover Publications Inc.

Jordan, C. (1909). *Cours d'anlyse* [Curso de Análisis]. París, Francia: Gauthiers- Villars

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [Pensamiento Matemático desde la antigüedad hasta los tiempos modernos]. New York. Oxford Press University.

Knopp, K. (1921). *Theory and Application of infinite series*. Londres: Blackie & Son Limited

Lacroix, S. (1800). *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral (Tome 3 Traité des différences et des séries)* [Tratado de Cálculo Diferencial y de Cálculo Integral (Tomo 3 Tratado de diferencias y de series)]. París, Francia : Libraire pour les Mathématiques. (Versión digital obtenida de http://gallica.bnf.fr/ el 23 de agosto de 2005)

Lacroix, S. (1810). *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral Tome Premier* [Tratado de Cálculo Diferencial y de Cálculo Integral, Primer Tomo]. París, Francia : Libraire pour les Mathématiques

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Editorial. Madrid, España.

L'Hôpital, G. (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* [Análisis de los infinitamente pequeños, para la inteligencia de las líneas curvas]. París, Francia: L'imprimerie Royale.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo I*. Octava Edición. México: Mc Graw Hill.

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas, del cálculo al caos*. Barcelona, España. Ediciones Paidós Ibérica

Newton, I. (2001).*Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. Colección Mathema. México. UNAM. (Manuscrito original de 1671)

Newton, I. (1687, 1711). *Principia Mathematica* (Versión digital obtenida de http://burndy.mit.edu/Collections/Babson/Online/Principia/ el 17 de noviembre de 2005)

Newton, I. (2002). *An account of the book entituled commercium epistolicum collinii et aliorum, de analysi promota*. En D. R. Wilkins (Ed.). (Trabajo original publicado en Philosophical Transaction of the Royal Society of London 1714-1715)

Newman, J. (1976). SIGMA El mundo de las matemáticas. 3ra. Edición. Barcelona, España. Ediciones Grijalbo S.A.

Purcell, E. Varberg, D. y Rigdon, S. (2001). *Cálculo* 8va. Edición. México. Prentice Hall.

Reiff, R. (1992). *Geschichte der unendlichen Reihen* [Historia de las Series Infinitas]. Verlag. Liechtenstein. (Obra original de 1889).

Smith, D. (2005). *History of Modern Mathematics* [Historia de las Matemáticas Modernas]. Mathematical Monographs No.1. 4ta edición. (Versión original de 1906) Obtenido de la página del Proyecto Gutemberg el 17 de marzo de 2006
URL: http://www.gutenberg.org/catalog/

Thomas, B., Finney, R. y Weir, M. (1998). *Cálculo una variable.* México. Prentice Hall.

ARTICULOS

Alcock, L. y Simpson, A. (2005). Convergence of Sequences and Series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics* 58, 77-100.

Barbeau, E. y Leah, P. (1976). Euler's 1760 paper on divergent series. *Historia Mathematica* 3, 141-160.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemas en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4(2), 165-198.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L'hospital y María Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Vol. 9(2), 253-265.

Davis, R. (1982). Frame-based knowledge of mathematics: Infinite Series. *Journal of Mathematical Behavior* Vol. 3(2), 99-120.

Euler, L. (1730). De progressionibus trasncendentibus, sev quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 5, pp. 36-57. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Euler, L. (1731). De summa seriei ex numeris primis formatae 1/3-1/5+1/7+1/11-1/13-1/17+1/19+1/23-1/29+1/31+etc. Ubi numeri primi formae 4n-1 habent signum positivum, formae autem 4n+1 signum negativum. (Sobre la suma de series de números de la forma 1/3-1/5+1/7+1/11-1/13-1/17+1/19+1/23-1/29+1/31+etc. donde los números primos de la forma 4n-1 tienen signo positivo, los de forma 4n+1 signo negativo). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 25 de junio de 2006.

Euler, L. (1731). De summatione innumerabilium progresionum (La suma de una progresión innumerable). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 3 de junio de 2006.

Euler, L. (1732). Methodus Generalis Sumandi Progressiones. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, pp. 68-97. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Euler, L. (1734). De progressionibus harminicis observationes (Sobre progresiones aritméticas). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 6 de junio de 2006.

Euler, L. (1735). De summis serierum reciprocarum (Sobre las sumas de series de recíprocos). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 6 de junio de 2006.

Euler, L. (1741). Demonstration de la somme de cette suite 1+1/4+1/9+1/16+etc. (Demostración de la suma de la serie 1+1/4+1/9+1/16+etc.). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 1 de junio de 2006.

Euler, L. (1742). De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dessertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime divreso derivantur (Sobre la suma de series de recíprocos de potencias de números naturales de otro trabajo, en el cual las sumas son obtenidas principalmente de otra fuente). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 6 de junio de 2006.

Euler, L. (1744). Variae observationes circa series infinitas. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9, pp. 160-188. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Euler, L. (1746). De seriebus divergentibus (Sobre series divergentes). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 20 de junio de 2006.

Euler, L. (1749). De serierum determinatione seu nova methodus invendi terminos generales serierum (Sobre la determinación de series, o un nuevo método para encontrar los términos generales de series). Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 25 de junio de 2006.

Euler, L. (1752). Subsidium calculi sinuum. Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 25 de junio de 2006.

Euler, L. (1758). Elementa Doctrinae Solidorum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Pretropolitanae* 4, pp. 109-140. Obtenido de http://www.eulerarchive.com/ el 10 de octubre de 2007.

Ferraro, G. (1998). Some aspects of Euler's Theory of Series: Inexplicable functions and the Euler-MacLaurin Summation formula. *Historia Mathematica* 25, 290-317.

Ferraro, G. y Panza, M. (2003). Developing into series and returning from series: A note on the foundations of eighteenth-century analysis. *Historia Mathematica* 30, 17-46.

Ferraro, G. (2007). Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815. *Historia Mathematica* 34, 62-88.

Fuss, P. (sin fecha). *Euler's Correspondence with Christian Goldbach*. Tomado el 19 de junio de 2006 de http://www.math.dartmouth.edu/~euler/correspondence/correspondents/Goldbach.html

Gupta, R. (1974). An Indian form of Third Order Taylor Series Approximation of the Sine. *Historica Mathematica* 1, 287-289.

Hayashi, T. (1997). Āryabhata's Rule and Table for Sine-Differences. *Historia Mathematica* 24, 397-406

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. (2006). *Cómo forma y educa el Tecnológico de Monterrey a sus alumnos*. Monterrey, México.

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. (2005). *El modelo educativo del Tecnológico de Monterrey*. Monterrey, México.

Joyce, D. (1995). History of Mathematics. Tomado de la página web del Department of Mathematics and Computer Science, Clark University el 11 de mayo de 2006. http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/china.html

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics* 48, 137-174.

Kragh, H. (2000). The theory of infinite series as seen by N.H. Abel. Dinamarca. University of Aarhus, History of Science Department. (Obtenido de www.henrikkragh.dk/palermo2k/lecture1.pdf el 20 de junio de 2005)

Mamona, J. (1990). Sequences and series-sequences and functions: students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 21(1), p. 333-337.

The MacTutor History of Mathematics Archive. (sin fecha). Obtenido el 26 de abril de 2006 de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

Miller, J. (2006). Earliest Known Uses of some of the Words of Mathematics. Tomado de la página Web http://members.aol.com/jeff570/mathword.html
el 15 de enero de 2006.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics* 48, 239-257

O'Connor, J. y Robertson, E. (2000). Madhava of Sangamagramma. Obtenido de la página de la School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Scotland http:///www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Madhava.html el 7 de marzo de 2006.

Pearce, I. (2002). Indian Mathematics: Redressing the balance. Obtenido de la página de la School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland el 6 de marzo de 2006
URL: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Projects/Pearce/index.html

Plofker, K. (2001). The "error" in the Indian "Taylor series approximation" to the sine. *Historia Mathematica* 28, 283-295.
Pringsheim, A. (1889). Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. *Mathematische Annalen* 35 (3), 297-456

Rhind (2006). Papiro de Rhind. Tomado de la página de la organización de Egiptología el 26 de Abril de 2006 http://www.egiptología.org

Ruiz, L. (2001). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza aprendizaje. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 14, pp. 132-140.

History of Mathematics. (sin fecha). Tomado de la página de la Simon Fraser University el 11 de mayo de 2006
http://www.math.sfu.ca/histmath/China/1stCenturyAD/NineChapIntro.html

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics* 18, 371-397.

Tall, D. (2001). Natural and Formal Infinities. Educational Studies in Mathematics 48, 199-238

TESIS

Albert, J. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica*. México. CINVESTAV. Tesis de doctorado no publicada.

Douglas, J. (1992). *Un estudio acerca del discurso matemático escolar: La serie de Taylor*. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios*. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Moreno, J. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Pérez, V. (1991). *Sobre la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato. Análisis de las estrategias que posibilitan la construcción del concepto. Estudio de Casos*. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Robert, A. (1982). *L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur*. Universite Paris VII. París, Francia. Tesis de doctorado no publicada

APÉNDICES

A continuación presentamos algunos de los documentos a los que hemos hecho referencia en el cuerpo de este trabajo, presentamos las actividades tal y como fueron presentadas a los estudiantes y algunas de las respuestas que obtuvimos de parte de ellos.

También se anexan algunas imágenes de los cuestionarios aplicados a los estudiantes.

Apéndice A

En este apéndice se observan algunas de las respuestas de los alumnos a la actividad Taylor.

Esta actividad consiste en graficar la función exponencial $f(x) = e^x$ y polinomios de Taylor de orden creciente de modo que los alumnos observen que las gráficas de los polinomios se van pareciendo a la gráfica de la exponencial. En forma semejante se trabaja con la función coseno y algunos polinomios de Taylor.

En la actividad no se les indicó a los alumnos que buscaran semejanzas entre las gráficas sino que sólo se les pidió que describieran lo que observaban.

Así, lo que se observa es que los alumnos observaron puntos de tangencia, concavidades, dominios, contradominios y sólo unos pocos observaron la semejanza de las gráficas.

Las respuestas que se muestran corresponden a alumnos que no observaron la convergencia de las gráficas.

EJEMPLO 1

Dibuja las gráficas de las siguientes funciones en los mismos ejes para que puedas comparar sus comportamientos, **dibújalas en el orden en que se te dan**.

1. y = e^x

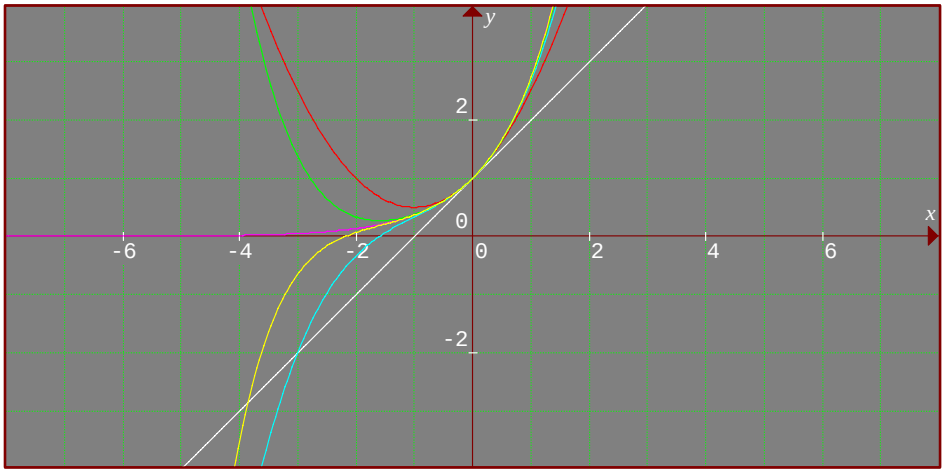
2. y = 1+x

3. y=1+x+(x^2/2)

4. y=1+x+(x^2/2)+(x^3/6)

5. y=1+x+(x^2/2)+(x^3/6)+(x^4/24)

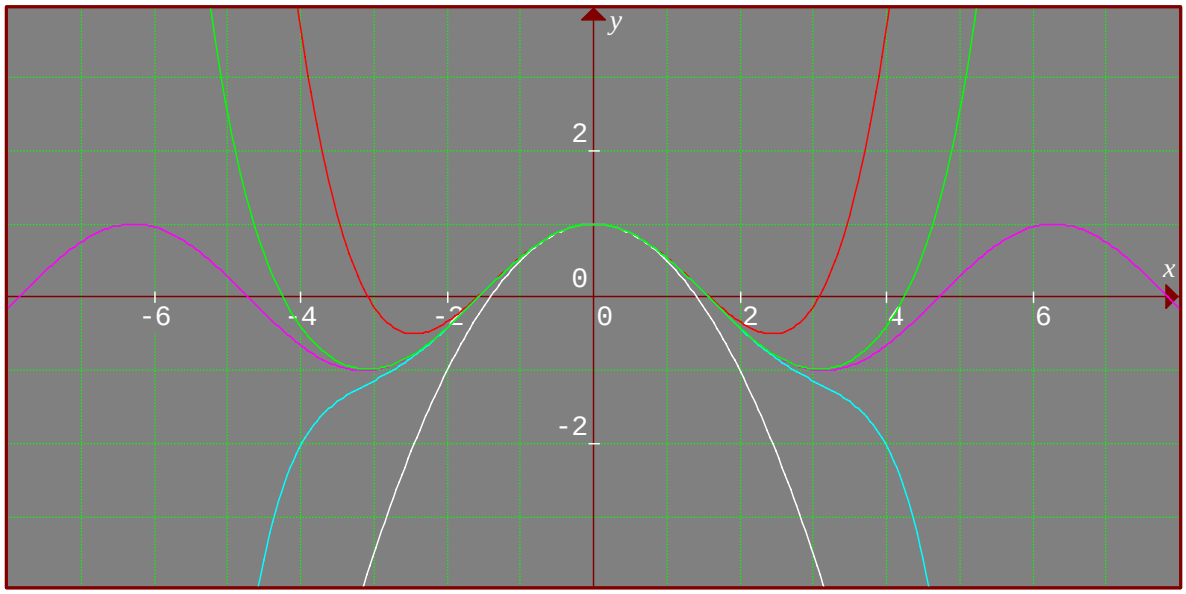
6. y=1+x+(x^2/2)+(x^3/6)+(x^4/24)+(x^5/120)



En la primer gráfica y = e^x podemos ver que recorrerá todo el eje x, conforme vaya cambiando el valor de su exponente además de ir creciendo su recorrido comparado con el eje y cuando empieza a tomar números positivos. La segunda gráfica, y = 1+x, es una línea recta inclinada. La tercera gráfica, y=1+x+(x^2/2), empieza a utilizar exponente, lo cual crea una gráfica curva cóncava hacia arriba. Cuarta gráfica, y=1+x+(x^2/2)+(x^3/6), usa exponente 2 y 3, lo cual produce una gráfica curva pero de izquierda a derecha parece la mitad de una curva cóncava hacia abajo y la segunda mitad de izquierda a derecha parece una mitad de una cóncava hacia arriba. Quinta gráfica, y=1+x+(x^2/2)+(x^3/6)+(x^4/24), utiliza dos exponentes pares y un non, por lo que vuelve a ser una gráfica con concavidad hacia arriba. Sexta gráfica, y=1+x+(x^2/2)+(x^3/6)+(x^4/24)+(x^5/120), usa dos exponentes pares y dos nones por lo cual es muy similar a la cuarta.

Por separado dibuja ahora las gráficas de:

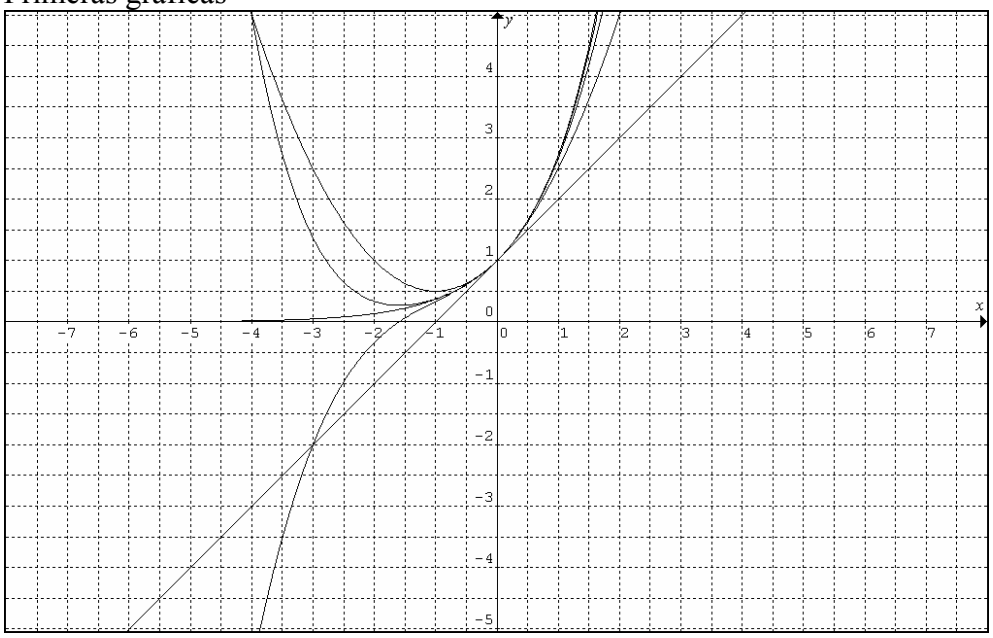
1. y=cos(x)
2. y=1-(x^2/2)
3. y=1-(x^2/2)+(x^4/24)
4. y=1-(x^2/2)+(x^4/24)-(x^6/720)
5. y=1-(x^2/2)+(x^4/24)-(x^6/720)+(x^8/40320)



Conforme aumenta el grado del polinomio, me puedo dar cuenta de que las concavidades y se van haciendo más grandes y se expanden hacia los lados. En la de grado 2, es cóncava hacia abajo. En la de grado 4 forma una especie de “W”, con una especie de combinación de dos concavidades hacia arriba separadas por una curva cóncava hacia abajo. La de grado seis es muy parecida a la de cuatro, pero los extremos de ambos lados tienden hacia menos infinito conforme al eje y. Por ultimo la de grado 8 se parece a la de grado 4, forma una “W”, pero es mayor su tamaño en cuanto a su concavidad y se extiende hacia los lados.

EJEMPLO 2.

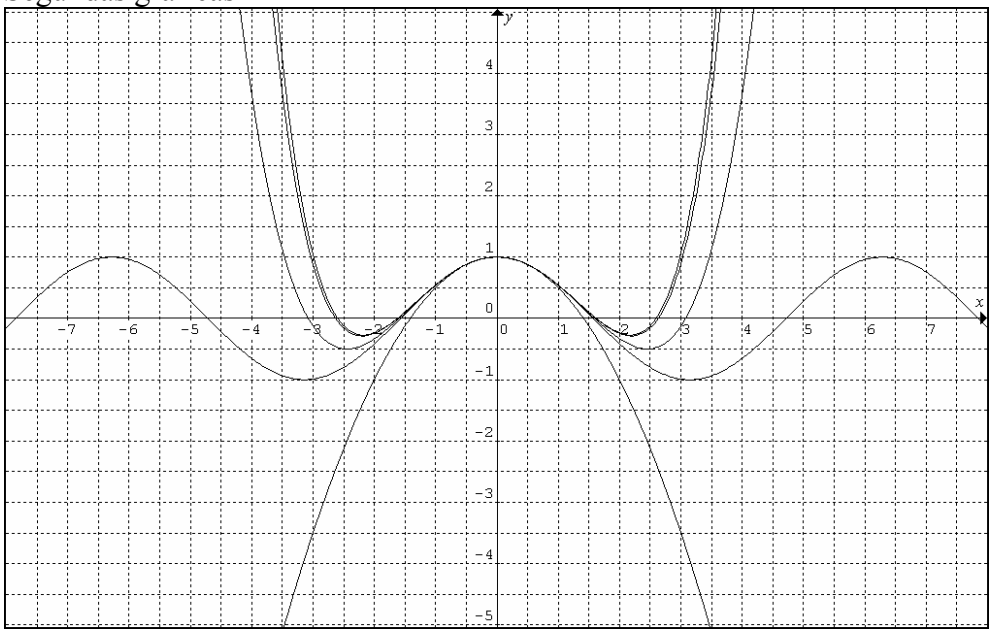
Primeras gráficas



Observaciones:

- Todas las gráficas tienen como dominio a los números reales.
- Todas pasan por el punto (0,1)
- Mientras va aumentando el grado de los polinomios las gráficas se vana cerrando.
- El signo (+) hace que las gráficas sean cóncavas hacia arriba.

Segundas gráficas



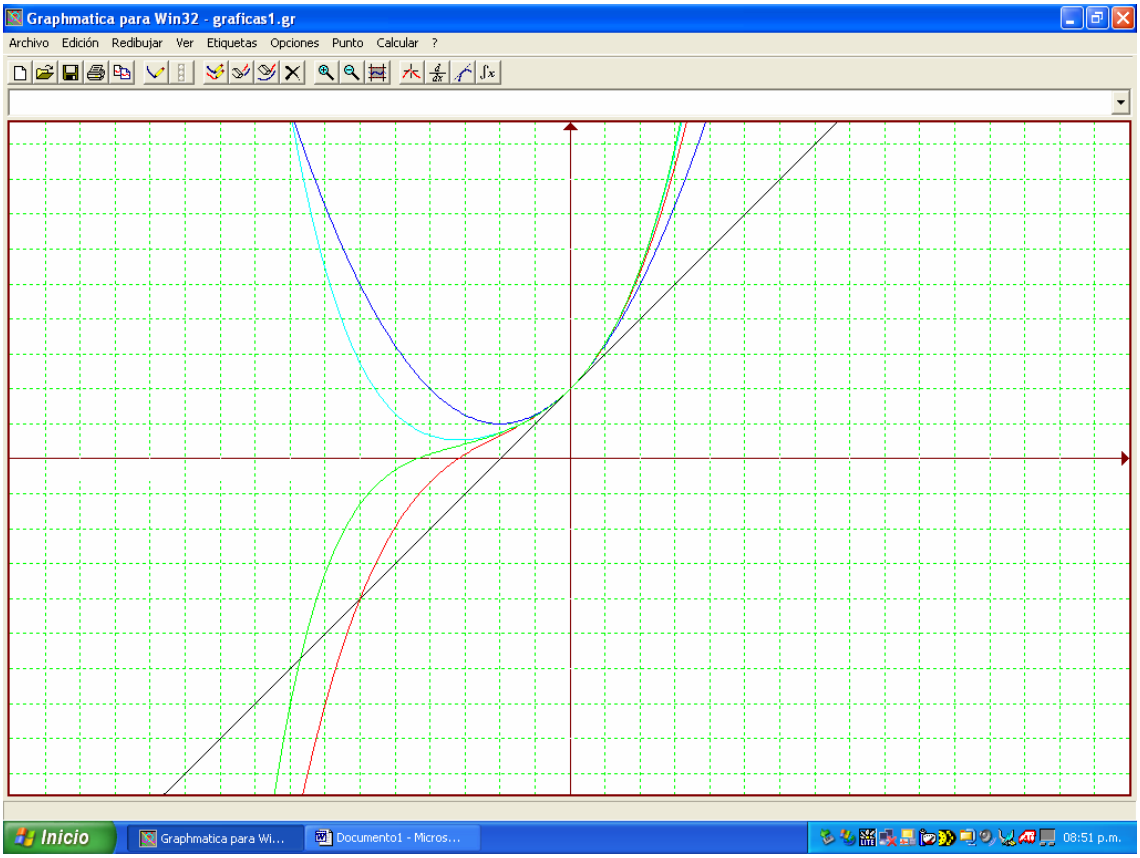
Observaciones:

- Todas las gráficas tienen como dominio a los números reales.

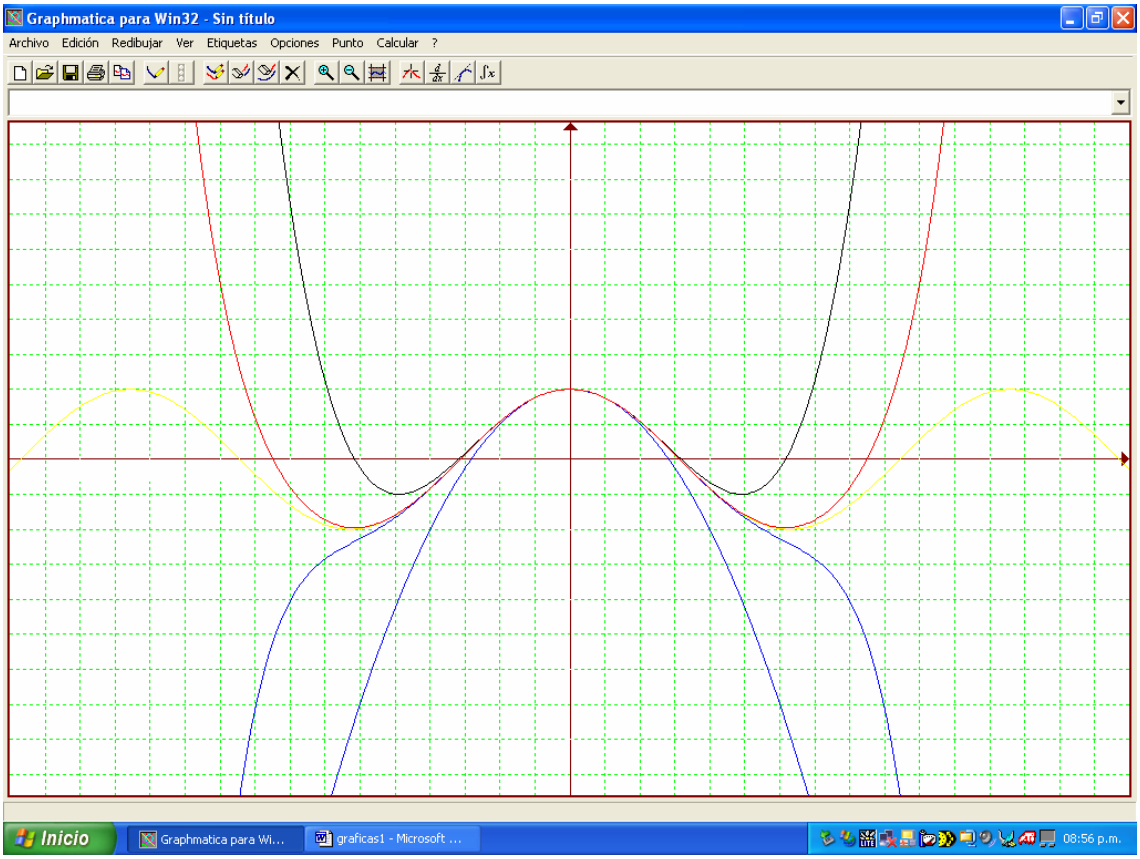
- Todas pasan por el punto (0,1)
- La gráfica del coseno tiene su rango [-1,1]
- La segunda gráfica tiene rango [-infinito,1]
- Mientras aumentan el grado de los polinomios las gráficas se van cerrando y su rango cambia, se va haciendo más pequeño.
- El signo menos que se encuentra después del 1 hace que todas las gráficas sean primero cóncavas hacia abajo y los signos mas (+) hacen que las gráficas se conviertan en crecientes.

EJEMPLO 3.

En estas gráficas podemos ver que las funciones van siendo parábolas, llevan una "secuencia", empiezan con la función y=x, siguen con funciones como y=x*x y terminan con funciones como y=x*x*x.



En las siguientes funciones son diferentes, tienen mucho que ver los signos, cuando son funciones con signos negativos, cambian las funciones.


Graphmatica para Win32 - Sin título
Archivo Edición Redibujar Ver Etiquetas Opciones Punto Calcular ?
Inicio
Graphmatica para Wi...
graficas1 - Microsoft ...
08:56 p.m.

Apéndice B

En este apéndice se observan algunas de las respuestas de los alumnos a las actividades de la serie armónica y de la serie de recíprocos de cuadrados.

Ejemplo 1. El alumno aproxima el valor de π, y responde las preguntas incluidas en cada sección de la actividad. Puede observarse que en este ejemplo sucede lo comentado en la sección **1.2.3** sobre el comportamiento de EXCEL de considerar constantes las sumas parciales a partir de cierto valor.

PRIMERA PARTE:

Primero vas a calcular unas fracciones que son los recíprocos de los cuadrados de los números naturales, es decir, para el número 1 calculas $1/1^2$, para el 2 calculas la fracción $1/2^2$.Estas fracciones y su valor, colócalas en una tabla como la siguiente

N	VALOR
1	1
2	0.25
3	0.11111
4	0.0625
5	0.04
6	0.027
7	0.0204
8	0.015625
9	0.01234
10	0.01
11	8.26X10-3
12	6.94X10-3
13	5.91X10-3
14	5.10X10-3
15	4.44X10-3
16	3.90X10-3
17	3.46X10-3
18	3.08X10-3
19	2.77X10-3
20	2.5X10-3
21	2.26X10-3
22	2.06X10-3
23	1.89X10-3
24	1.73X10-3
25	1.6X10-3
26	1.47X10-3
27	1.37X10-3
28	1.27X10-3
29	1.189X10-3
30	1.11X10-3
31	1.040X10-3
32	9.76X10-4
33	9.18X10-4
34	8.65X10-4
35	8.16X 10-4
36	7.71X10-4
37	7.30X10-4
38	6.92X10-4
39	6.57X10-4
40	6.25X10-4
41	5.94X10-4
42	5.66X10-4
43	5.40X10-4
44	5.16X10-4
45	4.93X10-4
46	4.72X10-4
47	4.52X10-4
48	4.34X10-4
49	4.16X10-4
50	4X10-4
51	3.84X10-4
52	3.69X10-4
53	3.55X10-4
54	3.42X10-4
55	3.30X10-4
56	3.18X10-4
57	3.07X10-4
58	2.97X10-4
59	2.87X10-4
60	2.77X10-4
61	2.68X10-4
62	2.60X10-4
63	2.51X10-4
64	2.44X10-4
65	2.36X10-4
66	2.29X10-4
67	2.22X10-4

68	2.16X10-4
69	2.10X10-4
70	2.040X10-4
71	1.98X10-4
72	1.92X10-4
73	1.87X10-4
74	1.82X10-4
75	1.77X10-4
76	1.73X10-4
77	1.68X10-4
78	1.64X10-4
79	1.60X10-4
80	1.56X10-4
81	1.52X10-4
82	1.48X10-4
83	1.45X10-4
84	1.41X10-4

85	1.38X10-4
86	1.35X10-4
87	1.32X10-4
88	1.29X10-4
89	1.26X10-4
90	1.23X10-4
91	1.20X10-4
92	1.18X10-4
93	1.156X10-4
94	1.13X10-4
95	1.10X10-4
96	1.08X10-4
97	1.06X10-4
98	1.04X10-4
99	1.02X10-4
100	1X10-4

Ahora responde las preguntas siguientes:

1. ¿Qué puedes decir de los números que calculaste en la última columna (VALOR)?
   CONFORME IBA CRECIENDO EL DIVISOR EL VALOR ERA MAS PEQUEÑO.
2. ¿Crees que todos estos números continúen el comportamiento que observaste en (1)?

   SI, POR QUE ES UNA SECUENCIA ADEMÁS DE QUE POR LOGICA SE PUEDE DEDUCIR.

3. ¿Qué explicación le das a ese comportamiento?

   QUE ENTRE MAS GRANDE SEA EL DIVISOR MAS CHICO VA A SER EL RESULTADO.

4. Si continuaras con los términos 101, 102, 103,... sin detenerte, ¿qué pasaría con los números de la última columna?

   SEGUIRÍAN DISMINUYENDO.

5. ¿Qué obtendrías en la pregunta (4)?

   NUMEROS MUY PEQUEÑOS YA QUE EL EXPONENTE NEGATIVO VA CRECIENDO

SEGUNDA PARTE:

Ahora vas a hacer productos y sumas.

Agrega una columna. Multiplica la columna **Valor** por 6 y agrégalo en la nueva columna, es decir calcula 1 * 6=6, luego calcula 0.25 * 6 = 1.5, continua de esta manera.

N	VALOR	PRODUCTO
1	1	6
2	0.25	1.5
3	0.11111	0.66666
4	0.0625	0.375
5	0.04	0.24
6	0.027	0.162
7	0.0204	0.1224
8	0.015625	0.09375
9	0.01234	0.07404
10	0.01	0.06
11	8.26X10-3	0.049
12	6.94X10-3	0.041
13	5.91X10-3	0.035
14	5.10X10-3	0.03
15	4.44X10-3	0.026
16	3.90X10-3	0.023
17	3.46X10-3	0.02
18	3.08X10-3	0.018
19	2.77X10-3	0.016
20	2.5X10-3	0.015
21	2.26X10-3	0.013
22	2.06X10-3	0.012
23	1.89X10-3	0.011
24	1.73X10-3	0.01
25	1.6X10-3	9.6X10-3
26	1.47X10-3	8.82X10-3
27	1.37X10-3	8.22X10-3
28	1.27X10-3	7.62X10-3
29	1.189X10-3	7.08X10-3
30	1.11X10-3	6.66X10-3
31	1.040X10-3	6.24X10-3
32	9.76X10-4	5.85X10-3
33	9.18X10-4	5.50X10-3
34	8.65X10-4	5.19X10-3
35	8.16X 10-4	4.89X10-3
36	7.71X10-4	4.62X10-3
37	7.30X10-4	4.38X10-3
38	6.92X10-4	4.15X10-3
39	6.57X10-4	3.94X10-4
40	6.25X10-4	3.75X10-3
41	5.94X10-4	3.56X10-3
42	5.66X10-4	3.39X10-3
43	5.40X10-4	3.24X10-3
44	5.16X10-4	3.09X10-3
45	4.93X10-4	2.95X10-3
46	4.72X10-4	2.83X10-3
47	4.52X10-4	2.71X10-3
48	4.34X10-4	2.60X10-4
49	4.16X10-4	2.49X10-3
50	4X10-4	2.4X10-3
51	3.84X10-4	2.30X10-3
52	3.69X10-4	2.21X10-3
53	3.55X10-4	2.13X10-3
54	3.42X10-4	2.05X10-3
55	3.30X10-4	1.98X10-3
56	3.18X10-4	1.90X10-3
57	3.07X10-4	1.84X10-3
58	2.97X10-4	1.78X10-3
59	2.87X10-4	1.72X10-3
60	2.77X10-4	1.66X10-3
61	2.68X10-4	1.60X10-3
62	2.60X10-4	1.56X10-3
63	2.51X10-4	1.50X10-3
64	2.44X10-4	1.46X10-3
65	2.36X10-4	1.41X10-3
66	2.29X10-4	1.37X10-3
67	2.22X10-4	1.33X10-3
68	2.16X10-4	1.29X10-3
69	2.10X10-4	1.26X10-3
70	2.040X10-4	1.22X10-3
71	1.98X10-4	1.18X10-3
72	1.92X10-4	1.15X10-3
73	1.87X10-4	1.12X10-3
74	1.82X10-4	1.09X10-3
75	1.77X10-4	1.06X10-3

76	1.73X10-4	1.03X10-3
77	1.68X10-4	1.00X10-3
78	1.64X10-4	9.84X10-4
79	1.60X10-4	9.6X10-4
80	1.56X10-4	9.36X10-4
81	1.52X10-4	9.12X10-4
82	1.48X10-4	8.88X10-4
83	1.45X10-4	8.7X10-4
84	1.41X10-4	8.46X10-4
85	1.38X10-4	8.28X10-4
86	1.35X10-4	8.1X10-4
87	1.32X10-4	7.92X10-4
88	1.29X10-4	7.74X10-4
89	1.26X10-4	7.56X10-4
90	1.23X10-4	7.38X10-4
91	1.20X10-4	7.2X10-4
92	1.18X10-4	7.08X10-4
93	1.156X10-4	6.9X10-4
94	1.13X10-4	6.78X10-4
95	1.10X10-4	6.6X10-4
96	1.08X10-4	6.48X10-4
97	1.06X10-4	6.36X10-4
98	1.04X10-4	6.24X10-4
99	1.02X10-4	6.12X10-4
100	1X10-4	6.6X10-4

Agrega otra columna. En esta columna vas a hacer la suma de algunas filas de la columna PRODUCTO y vas a colocar esa suma en la nueva columna SUMAS. Por ejemplo, las primeras sumas serían como se ve:

fila 2: 6 + 1.5 = 7.5

fila 3: 6 + 1.5 + 0.666666666 = 8.166666666

fila 4: 6 + 1.5 + 0.666666666 + 0.375 = 8.541666666

fila 5: 6 + 1.5 + 0.666666666 + 0.375 + 0.24 = 8.781666666

fila 6: 6 + 1.5 + 0.666666666 + 0.375 + 0.24 + 0.166666666 = 8.948333333

con lo que debes obtener la siguiente tabla

N	VALOR	PRODUCTO	SUMAS
1	1	6	
2	0.25	1.5	7.5
3	0.11111	0.66666	8.16666
4	0.0625	0.375	8.54166
5	0.04	0.24	8.78166
6	0.027	0.162	8.94366
7	0.0204	0.1224	9.06606
8	0.015625	0.09375	9.15981
9	0.01234	0.07404	9.23385
10	0.01	0.06	9.29385
11	8.26X10-3	0.049	9.34285
12	6.94X10-3	0.041	9.38385
13	5.91X10-3	0.035	9.41885
14	5.10X10-3	0.03	9.44885
15	4.44X10-3	0.026	9.47485
16	3.90X10-3	0.023	9.49785
17	3.46X10-3	0.02	9.51785
18	3.08X10-3	0.018	9.53585
19	2.77X10-3	0.016	9.55185
20	2.5X10-3	0.015	9.56685
21	2.26X10-3	0.013	9.57985
22	2.06X10-3	0.012	9.59185
23	1.89X10-3	0.011	9.60285
24	1.73X10-3	0.01	9.61285
25	1.6X10-3	9.6X10-3	9.61285
26	1.47X10-3	8.82X10-3	9.61285
27	1.37X10-3	8.22X10-3	9.61285
28	1.27X10-3	7.62X10-3	9.61285
29	1.189X10-3	7.08X10-3	9.61285

30	1.11X10-3	6.66X10-3	9.61285
31	1.040X10-3	6.24X10-3	9.61285
32	9.76X10-4	5.85X10-3	9.61285
33	9.18X10-4	5.50X10-3	9.61285
34	8.65X10-4	5.19X10-3	9.61285
35	8.16X 10-4	4.89X10-3	9.61285
36	7.71X10-4	4.62X10-3	9.61285
37	7.30X10-4	4.38X10-3	9.61285
38	6.92X10-4	4.15X10-3	9.61285
39	6.57X10-4	3.94X10-4	9.61285
40	6.25X10-4	3.75X10-3	9.61285
41	5.94X10-4	3.56X10-3	9.61285
42	5.66X10-4	3.39X10-3	9.61285
43	5.40X10-4	3.24X10-3	9.61285
44	5.16X10-4	3.09X10-3	9.61285
45	4.93X10-4	2.95X10-3	9.61285
46	4.72X10-4	2.83X10-3	9.61285
47	4.52X10-4	2.71X10-3	9.61285
48	4.34X10-4	2.60X10-4	9.61285
49	4.16X10-4	2.49X10-3	9.61285
50	4X10-4	2.4X10-3	9.61285
51	3.84X10-4	2.30X10-3	9.61285
52	3.69X10-4	2.21X10-3	9.61285
53	3.55X10-4	2.13X10-3	9.61285
54	3.42X10-4	2.05X10-3	9.61285
55	3.30X10-4	1.98X10-3	9.61285
56	3.18X10-4	1.90X10-3	9.61285
57	3.07X10-4	1.84X10-3	9.61285
58	2.97X10-4	1.78X10-3	9.61285
59	2.87X10-4	1.72X10-3	9.61285
60	2.77X10-4	1.66X10-3	9.61285
61	2.68X10-4	1.60X10-3	9.61285
62	2.60X10-4	1.56X10-3	9.61285
63	2.51X10-4	1.50X10-3	9.61285
64	2.44X10-4	1.46X10-3	9.61285
65	2.36X10-4	1.41X10-3	9.61285
66	2.29X10-4	1.37X10-3	9.61285
67	2.22X10-4	1.33X10-3	9.61285
68	2.16X10-4	1.29X10-3	9.61285
69	2.10X10-4	1.26X10-3	9.61285
70	2.040X10-4	1.22X10-3	9.61285
71	1.98X10-4	1.18X10-3	9.61285
72	1.92X10-4	1.15X10-3	9.61285
73	1.87X10-4	1.12X10-3	9.61285
74	1.82X10-4	1.09X10-3	9.61285

75	1.77X10-4	1.06X10-3	9.61285
76	1.73X10-4	1.03X10-3	9.61285
77	1.68X10-4	1.00X10-3	9.61285
78	1.64X10-4	9.84X10-4	9.61285
79	1.60X10-4	9.6X10-4	9.61285
80	1.56X10-4	9.36X10-4	9.61285
81	1.52X10-4	9.12X10-4	9.61285
82	1.48X10-4	8.88X10-4	9.61285
83	1.45X10-4	8.7X10-4	9.61285
84	1.41X10-4	8.46X10-4	9.61285
85	1.38X10-4	8.28X10-4	9.61285
86	1.35X10-4	8.1X10-4	9.61285
87	1.32X10-4	7.92X10-4	9.61285
88	1.29X10-4	7.74X10-4	9.61285
89	1.26X10-4	7.56X10-4	9.61285
90	1.23X10-4	7.38X10-4	9.61285
91	1.20X10-4	7.2X10-4	9.61285
92	1.18X10-4	7.08X10-4	9.61285
93	1.156X10-4	6.9X10-4	9.61285
94	1.13X10-4	6.78X10-4	9.61285
95	1.10X10-4	6.6X10-4	9.61285
96	1.08X10-4	6.48X10-4	9.61285
97	1.06X10-4	6.36X10-4	9.61285
98	1.04X10-4	6.24X10-4	9.61285
99	1.02X10-4	6.12X10-4	9.61285
100	1X10-4	6.6X10-4	9.61285

1. ¿Qué puedes decir de las operaciones de la última columna?

AL PRINCIPIO SE VE TODO BIEN OEI NO ENTIENDO POR QUE A PARTIR DEL NUMERO 24 EMPIEZA A SALIR TODO IGUAL.

2. ¿Hasta cuándo puedes hacer estas sumas?

HASTA EL NUMERO 24.

3. ¿Puedes continuar haciendo estas sumas o tienes que detenerte en algún valor?

ME TENGO QUE DETENER EN 9.61285

4. Si dices que debes detenerte en algún valor, ¿cuál valor? y ¿porqué debes detenerte?

POR QUE DESPUÉS D EESE VALOR LA SUMA YA ES PEQUEÑÍSIMA Y NO SE PUEDE SEGUIR CONTABILIZANDO.

5. En estos tiempos de computadoras, ¿es posible que suceda lo de la pregunta 4? ¿por qué?

SI, POR QUE NADA MAS ESTAN PROGRAMADAS PARA CIERTAS OPERACIONES LOGICAS.

Ahora agrega una última columna a la tabla y en ella vas a colocar la **RAÍZ CUADRADA** de los números de la columna SUMAS.

N	VALOR	PRODUCTO	SUMAS	RAIZ CUADRADA
1	1	6		
2	0.25	1.5	7.5	2.738612788
3	0.11111	0.66666	8.16666	2.857736867
4	0.0625	0.375	8.54166	2.922611846
5	0.04	0.24	8.78166	2.963386576
6	0.027	0.162	8.94366	2.990595258
7	0.0204	0.1224	9.06606	3.01098987
8	0.015625	0.09375	9.15981	3.026517801
9	0.01234	0.07404	9.23385	3.038725062
10	0.01	0.06	9.29385	3.048581637
11	8.26X10-3	0.049	9.34285	3.056607597
12	6.94X10-3	0.041	9.38385	3.063307037
13	5.91X10-3	0.035	9.41885	3.0690145
14	5.10X10-3	0.03	9.44885	3.073898177
15	4.44X10-3	0.026	9.47485	3.078124429
16	3.90X10-3	0.023	9.49785	3.081858206
17	3.46X10-3	0.02	9.51785	3.085101295
18	3.08X10-3	0.018	9.53585	3.088017163
19	2.77X10-3	0.016	9.55185	3.090606737
20	2.5X10-3	0.015	9.56685	3.093032493
21	2.26X10-3	0.013	9.57985	3.095133277
22	2.06X10-3	0.012	9.59185	3.097071197
23	1.89X10-3	0.011	9.60285	3.09884656
24	1.73X10-3	0.01	9.61285	3.100459643
25	1.6X10-3	9.6X10-3	9.61285	3.100459643
26	1.47X10-3	8.82X10-3	9.61285	3.100459643
27	1.37X10-3	8.22X10-3	9.61285	3.100459643
28	1.27X10-3	7.62X10-3	9.61285	3.100459643
29	1.189X10-3	7.08X10-3	9.61285	3.100459643
30	1.11X10-3	6.66X10-3	9.61285	3.100459643
31	1.040X10-3	6.24X10-3	9.61285	3.100459643
32	9.76X10-4	5.85X10-3	9.61285	3.100459643
33	9.18X10-4	5.50X10-3	9.61285	3.100459643
34	8.65X10-4	5.19X10-3	9.61285	3.100459643
35	8.16X 10-4	4.89X10-3	9.61285	3.100459643

36	7.71X10-4	4.62X10-3	9.61285	3.100459643
37	7.30X10-4	4.38X10-3	9.61285	3.100459643
38	6.92X10-4	4.15X10-3	9.61285	3.100459643
39	6.57X10-4	3.94X10-4	9.61285	3.100459643
40	6.25X10-4	3.75X10-3	9.61285	3.100459643
41	5.94X10-4	3.56X10-3	9.61285	3.100459643
42	5.66X10-4	3.39X10-3	9.61285	3.100459643
43	5.40X10-4	3.24X10-3	9.61285	3.100459643
44	5.16X10-4	3.09X10-3	9.61285	3.100459643
45	4.93X10-4	2.95X10-3	9.61285	3.100459643
46	4.72X10-4	2.83X10-3	9.61285	3.100459643
47	4.52X10-4	2.71X10-3	9.61285	3.100459643
48	4.34X10-4	2.60X10-4	9.61285	3.100459643
49	4.16X10-4	2.49X10-3	9.61285	3.100459643
50	4X10-4	2.4X10-3	9.61285	3.100459643
51	3.84X10-4	2.30X10-3	9.61285	3.100459643
52	3.69X10-4	2.21X10-3	9.61285	3.100459643
53	3.55X10-4	2.13X10-3	9.61285	3.100459643
54	3.42X10-4	2.05X10-3	9.61285	3.100459643
55	3.30X10-4	1.98X10-3	9.61285	3.100459643
56	3.18X10-4	1.90X10-3	9.61285	3.100459643
57	3.07X10-4	1.84X10-3	9.61285	3.100459643
58	2.97X10-4	1.78X10-3	9.61285	3.100459643
59	2.87X10-4	1.72X10-3	9.61285	3.100459643
60	2.77X10-4	1.66X10-3	9.61285	3.100459643
61	2.68X10-4	1.60X10-3	9.61285	3.100459643
62	2.60X10-4	1.56X10-3	9.61285	3.100459643
63	2.51X10-4	1.50X10-3	9.61285	3.100459643
64	2.44X10-4	1.46X10-3	9.61285	3.100459643
65	2.36X10-4	1.41X10-3	9.61285	3.100459643
66	2.29X10-4	1.37X10-3	9.61285	3.100459643
67	2.22X10-4	1.33X10-3	9.61285	3.100459643
68	2.16X10-4	1.29X10-3	9.61285	3.100459643
69	2.10X10-4	1.26X10-3	9.61285	3.100459643
70	2.040X10-4	1.22X10-3	9.61285	3.100459643
71	1.98X10-4	1.18X10-3	9.61285	3.100459643
72	1.92X10-4	1.15X10-3	9.61285	3.100459643
73	1.87X10-4	1.12X10-3	9.61285	3.100459643
74	1.82X10-4	1.09X10-3	9.61285	3.100459643
75	1.77X10-4	1.06X10-3	9.61285	3.100459643
76	1.73X10-4	1.03X10-3	9.61285	3.100459643
77	1.68X10-4	1.00X10-3	9.61285	3.100459643
78	1.64X10-4	9.84X10-4	9.61285	3.100459643
79	1.60X10-4	9.6X10-4	9.61285	3.100459643
80	1.56X10-4	9.36X10-4	9.61285	3.100459643

81	1.52X10-4	9.12X10-4	9.61285	3.100459643
82	1.48X10-4	8.88X10-4	9.61285	3.100459643
83	1.45X10-4	8.7X10-4	9.61285	3.100459643
84	1.41X10-4	8.46X10-4	9.61285	3.100459643
85	1.38X10-4	8.28X10-4	9.61285	3.100459643
86	1.35X10-4	8.1X10-4	9.61285	3.100459643
87	1.32X10-4	7.92X10-4	9.61285	3.100459643
88	1.29X10-4	7.74X10-4	9.61285	3.100459643
89	1.26X10-4	7.56X10-4	9.61285	3.100459643
90	1.23X10-4	7.38X10-4	9.61285	3.100459643
91	1.20X10-4	7.2X10-4	9.61285	3.100459643
92	1.18X10-4	7.08X10-4	9.61285	3.100459643
93	1.156X10-4	6.9X10-4	9.61285	3.100459643
94	1.13X10-4	6.78X10-4	9.61285	3.100459643
95	1.10X10-4	6.6X10-4	9.61285	3.100459643
96	1.08X10-4	6.48X10-4	9.61285	3.100459643
97	1.06X10-4	6.36X10-4	9.61285	3.100459643
98	1.04X10-4	6.24X10-4	9.61285	3.100459643
99	1.02X10-4	6.12X10-4	9.61285	3.100459643
100	1X10-4	6.6X10-4	9.61285	3.100459643

Ahora responde las preguntas:

1. ¿Qué puedes decir de los números de la última columna al ir aumentando las filas?
   SE VAN HACIENDO MAS REALES

2. ¿Obtienes un número? ¿El número que obtuviste te parece familiar? ¿cuál?

SI, BO ME PARECE FAMILIAR, NO LE ENCUANTRO RELACION EN ESTOS MOMENTOS.

3. Si no obtienes un número, ¿qué obtienes?

   UNA CONSTANTE

4. Si continúas con los términos 101, 102, 103,... ¿qué crees que pasaría con los números de la columna RAÍZ CUADRADA?

SEGUIRIA SIENDO UNA CONSTANTE

5. ¿Habría un valor final? **Si** ¿cuál es ese valor? **No** ¿por qué no hay valor final?

NO HABRÍA VALOR FINAL POR QUE SE VA A INFINITO.

Ejemplo 2. El alumno aproxima el valor de π, pero utiliza más términos de los 100 que originalmente se le pidieron.

1	Sergio				NOTA: La hoja tiene valores hasta de 1000, porque no me gusta quedarme con dudas.							
2											Sumas	
3	n	fracción	valor	producto	Sumas	Raiz cuadrada	n	fracción	valor	producto		Raiz cuadrada
4	1		1	6			51		0.000384	0.002307	9.750796402	3.122626523
5	2		0.25	1.5	7.5	2.738613	52		0.00037	0.002219	9.753015337	3.122981802
6	3		0.111111	0.666667	8.166667	2.857738	53		0.000356	0.002136	9.755151328	3.123323763
7	4		0.0625	0.375	8.541667	2.922613	54		0.000343	0.002058	9.757208941	3.12365314
8	5		0.04	0.24	8.781667	2.963388	55		0.000331	0.001983	9.759192412	3.123970616
9	6		0.027778	0.166667	8.948333	2.991376	56		0.000319	0.001913	9.761105678	3.124276825
10	7		0.020408	0.122449	9.070782	3.011774	57		0.000308	0.001847	9.7629524	3.124572355
11	8		0.015625	0.09375	9.164532	3.027298	58		0.000297	0.001784	9.764735991	3.124857755
12	9		0.012346	0.074074	9.238606	3.039508	59		0.000287	0.001724	9.766459633	3.125133538
13	10		0.01	0.06	9.298606	3.049362	60		0.000278	0.001667	9.7681263	3.125400182
14	11		0.008264	0.049587	9.348193	3.057482	61		0.000269	0.001612	9.76973877	3.125658134
15	12		0.006944	0.041667	9.38986	3.064288	62		0.00026	0.001561	9.771299644	3.125907811
16	13		0.005917	0.035503	9.425363	3.070075	63		0.000252	0.001512	9.77281136	3.126149606
17	14		0.005102	0.030612	9.455975	3.075057	64		0.000244	0.001465	9.774276203	3.126383886
18	15		0.004444	0.026667	9.482642	3.07939	65		0.000237	0.00142	9.775696322	3.126610996
19	16		.003906	[illegible]	[illegible]	[illegible]	66		[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.126831261
1194												
1195							11243		7.91E-09	4.75E-08	[illegible]	3.141066983
1196							11244		7.91E-09	4.75E-08	9.866301837	3.14106699
1197							11245		7.91E-09	4.74E-08	9.866301885	3.141066998
1198							11246		7.91E-09	4.74E-08	9.866301932	3.141067005
1199							11247		7.91E-09	4.74E-08	9.86630198	3.141067013
1200							11248		7.9E-09	4.74E-08	9.866302027	3.14106702
1201							11249		7.9E-09	4.74E-08	9.866302074	3.141067028
1202							11250		7.9E-09	4.74E-08	9.866302122	3.141067036
1203							11251		7.9E-09	4.74E-08	9.866302169	3.141067043
1204							11252		7.9E-09	4.74E-08	9.866302217	3.141067051
1205							11253		7.9E-09	4.74E-08	9.866302264	3.141067058
1206							11254		7.9E-09	4.74E-08	9.866302311	3.141067066
1207												
1208												

NOTA: La pagina de Excel, tiene valores hasta mil, porque, no me gusta quedarme con la duda, de lo que pasaría. Por eso es tan grande.

1.- Los números de la última columna tiene una tendencia a 0
2.- si, creo que todos estos números continúen el comportamiento que observe.
3.- el número con el que se divide uno se hace más grande, por lo tanto decrece el resultado en proporciones muy grandes, sobre todo con el cuadrado
4.- Se harían infinitamente pequeños
5.- . 000 infinitos y un numero.

6.- Las operaciones de la última columna es un número ascendente, que tiene a 9.866302
7.- 9.8663, deja de variar notablemente ahí.
8.- Se puede realizar siempre, pero el resultado ya no variara lo suficiente después de 9.8663
9.- 9.8663, porque al sumar los números son extremamente pequeños y no afectan
10.- si, es posible que suceda, es como un límite al infinito
11.- que se parecen mucho a π y tuenen una tendencia ascendente.
12.- Si un numero π
13.- los números de la raíz cuadrada no varían tanto, solo en las millonésimas.
14.- En términos de realidad, nunca habría un valor final siempre se estaría sumando algo, no importa que tan pequeño sea el valor, el numero anterior es mas pequeño pero asiendo suposiciones, si llegaría a un limite.

Apéndice C.

En este apéndice se observa la actividad **Estadio** y algunas respuestas de alumnos, de la misma manera se observa la actividad **Estadio 2** y más respuestas de alumnos.

Actividad Estadio.

Se va a realizar un evento masivo y por ello se efectuará en un estadio, pero el escenario en el que actuará el artista estará colocado en una de las cabeceras del estadio, por lo que todos esos asientos **no se podrán utilizar**; así que para calcular el costo de los boletos de entrada debe saberse el número total de asientos que hay en la cabecera.

El problema radica en que como la cabecera del estadio no es rectangular, cada fila tiene un número diferente de asientos

La primera fila tiene 50 asientos, la segunda tiene 52, la tercera tiene 54, etc.

1. ¿Cuántos asientos hay en la fila 45?
2. Ahora, debido a que se necesita conocer el número total de asientos de la cabecera, ¿cuántos asientos hay en total si la cabecera tiene 50 filas?
3. Encuentra una fórmula que te permita calcular el número de asientos de cualquier fila.
4. Encuentra una fórmula que te permita calcular el número total de asientos en la cabecera para cualquier número n de filas que tenga la cabecera.

EJEMPLO 1. El alumno utiliza geometría.

1. ¿Cuántos asientos hay en la fila 45?

R= Realizando mis cálculos en la fila 45 debe de haber 138 asientos.

2. Ahora, debido a que se necesita conocer el número total de asientos de la cabecera, ¿cuántos asientos hay en total si la cabecera tiene 50 filas?

R= Realizando mis cálculos en la fila 50 debe de haber 148 asientos.

3. Encuentra una fórmula que te permita calcular el número de asientos de cualquier fila

R= La fórmula que yo realice para calcular cuantos asientos hay en cada fila es:

$$\text{Número de asientos} = (\text{Número de fila} * 2) + 48$$

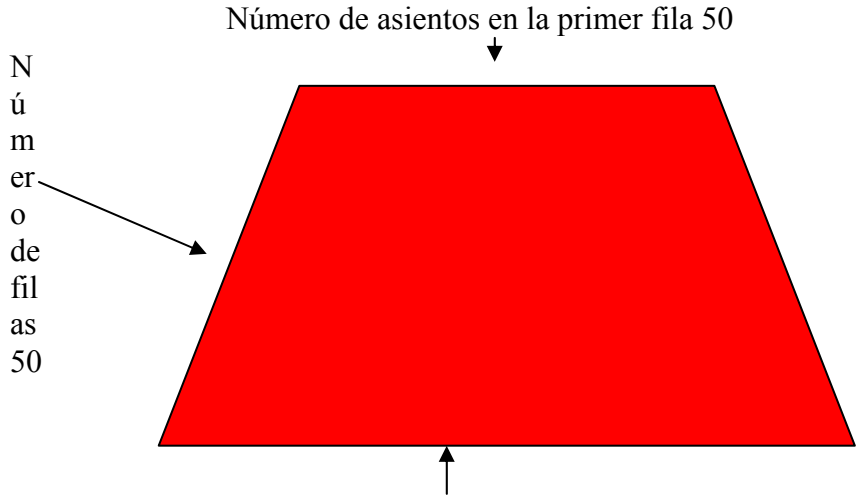
4. Encuentra una fórmula que te permita calcular el número total de asientos en la cabecera.

R= La fórmula que yo realice para calcular cuantos asientos hay en toda la cabecera es:

$$\text{Número total de asientos} = \left(\frac{\text{Número de asientos primer fila} + \text{Número de asientos ultima fila}}{2} \right) \text{Número de filas}$$

Por consiguiente el número de asientos en la cabecera del estadio es de 4950

Esa fórmula la deduje gracias a que la forma de la cabecera del estadio es de forma de un trapecio



EJEMPLO 2. El alumno utiliza integrales pero las aplica mal.

1. ¿Cuántos asientos hay en la fila 45?

138 asientos.

2. Ahora, debido a que se necesita conocer el número total de asientos de la cabecera, ¿cuántos asientos hay en total si la cabecera tiene 50 filas?

4900.

3. Encuentra una fórmula que te permita calcular el número de asientos de cualquier fila.

$y = 2x + 48$.

4. Encuentra una fórmula que te permita calcular el número total de asientos en la cabecera.

$y = \int_{b}^{0} 2x + 48$.

Procedimiento:

$$y = 2x + 48$$
$$y = 2(45) + 58 = 138 asientos$$
$$Y = \lim n \to \infty \sum_{k=0}^{n} \left(x^2 + 48\right) dx$$
$$Y = \int_{\#\, filas}^{0} 2x + 48$$
$$Y = \int_{50}^{0} 2x + 48 = \left[x^2 + 48x\right]_{50}^{0} = 50^2 + 48(50) = 4900 asientos$$

Actividad ESTADIO 2.

Recordemos el problema del estadio:

Se va a realizar un evento masivo y por ello se efectuará en un estadio, pero el escenario en el que actuará el artista estará colocado en una de las cabeceras del estadio, por lo que todos esos asientos **no se podrán utilizar**; así que para calcular el costo de los boletos de entrada debe saberse el número total de asientos que hay en la cabecera. El problema radica en que como la cabecera del estadio no es rectangular, cada fila tiene un número diferente de asientos.

La primera fila tiene 50 asientos, la segunda tiene 52, la tercera tiene 54, etc.

1. ¿Cuántos asientos hay en la fila 45?
2. Ahora, debido a que se necesita conocer el número total de asientos de la cabecera, ¿cuántos asientos hay en total si la cabecera tiene 50 filas?

Considere que cada fila va a ir aumentando de asientos, por lo que podría representarse el número de asientos como una suma que empieza en 50 y se le agrega el número de asientos anteriormente dicho, es decir:

FILA 1: 50 asientos = 50 + 0 asientos

FILA 2: 52 asientos = 50 + 2 asientos

FILA 3: 54 asientos = 50 + 4 asientos

lo que puede expresarse como una suma con un múltiplo de 2 como se ve en la tabla siguiente

FILA	ASIENTOS	ASIENTOS COMO SUMA	SUMA REORDENADA
PRIMERA	50	50 + 0	50 + 2(0)
SEGUNDA	52	50 + 2	50 + 2(1)
TERCERA	54	50 + 4	50 + 2(2)
CUARTA	56	50 + 6	50 + 2(3)
...	...	...	...
FILA - n	...	50 +	50 + 2(n-1)

Otra forma de expresar la forma en que cambia el número de asientos por fila es considerar una suma que empieza con 48

FILA	ASIENTOS	ASIENTOS COMO SUMA	SUMA REORDENADA
PRIMERA	50	48 + 2	48 + 2(1)
SEGUNDA	52	48 + 4	48 + 2(2)
TERCERA	54	48 + 6	48 + 2(3)
CUARTA	56	48 + 8	48 + 2(4)
...	...	...	...
FILA-n	...	48 + ...	48 + 2(n)

Así, tenemos dos posibles expresiones para el número de asientos en la fila n:

N(n) = 50+2(n-1)

y

M(n) = 48+2n

De esta forma tenemos

FILA 45:

N(45) = 50 + 2(45-1) = 50 + 2*44 = 138 asientos

M(45) = 48 + 2(45) = 48 + 90 = 138 asientos

Ahora resolvamos el problema de la suma de asientos de todas las filas.

Consideremos una suma de Riemann para una de estas expresiones:

$$\sum_{n=1}^{50}(48+2n)=\sum_{n=1}^{50}48+2\sum_{n=1}^{50}n$$

$$=48(50)+2\frac{50*51}{2}$$

$$=2400+2550$$

$$=4950$$

Lo que nos proporciona el número total de asientos en las 50 filas.

Si ahora consideramos la integral de la misma expresión, la pregunta es si tendremos el mismo número de asientos:

$$\int_1^{50}(48+2x)dx=\left[48x+x^2\right]_1^{50}$$

$$=48*50+(50)^2-(48+1)$$
$$=2400+2500-49$$
$$=4851$$

y si ahora consideramos la misma integral pero desde 0:

$$\int_0^{50}(48+2x)dx=\left[48x+x^2\right]_0^{50}$$

$$=48*50+(50)^2-\left(48*0+0^2\right)$$
$$=2400+2500$$
$$=4900$$

Reproduce los cálculos anteriores para la expresión

N(n) = 50+2(n-1)

Ahora responde las siguientes preguntas:

1) ¿Por qué la suma de Riemann sí proporciona el número correcto de asientos?

2) ¿Por qué la primera y la segunda integral no proporcionan el número correcto de asientos? (Se supone que la integral es una "suma")

3) ¿Qué pasa con la integral de 0 a 51? ¿Sería válido usarla?

4) ¿Por qué la segunda integral se acerca más al valor correcto?

5) ¿Puede hacerse algo para obtener el valor exacto con una integral?

EJEMPLO 3.

¿Por qué la suma de Riemann sí proporciona el número correcto de asientos?
Porque la suma de Riemann es una sumatoria que abarca desde el extremo de las filas, por lo mismo logra considerar todos los asientos que contiene la cabecera.

¿Por qué la primera y la segunda integral no proporcionan el número total de asientos?
Porque ninguna de las dos integrales toma en cuenta a todos los asientos. Por ejemplo la integral que va de 0 a 50 no está tomado en cuenta un asiento de cada fila, y en el caso de la integral de 1 a 50 no esta tomado en cuenta 2 asientos de cada fila además adicionalmente le descuenta un asiento más a la última fila. Gracias a esto concluimos que las integrales no están tomando en cuenta todos los elementos de cada fila.

¿Qué pasa con la integral de 0 a 51, sería válido usarla?
Esta integral tampoco sería válido usarla ya que también nos proporcionaría un dato erróneo el cual sería 5049, ya que en este caso pasa lo contrario de lo que ocurría con la integral de 1 a 50 ya que está tomando en cuenta dos asientos de mas en cada fila excepto en la última fila que solo toma en cuenta n asiento de más.

¿Por qué la segunda integral se acerca más al valor correcto?
Porque tiene mejor determinados los límites que la primera integral, ya que estos límites son más cercanos al dato que nosotros en realidad queremos conocer.

¿Puede hacerse algo para obtener el valor exacto con una integral?
Desgraciadamente para este tipo de problema ninguna integral nos va a dar el valor exacto del número de asientos que contiene la cabecera, ya que la integral que más se acerca a este dato es la integral que ve desde 2 a 51 ya que con estos límites se obtiene un total de 4949 asientos, lo cual es muy cercano al valor real de asientos los cuales son 4950.

EJEMPLO 4.

1) ¿Por qué la suma de Riemann sí proporciona el número correcto de asientos?

Por que la suma de riemann puede calcular los pequeños cambios que van surgiendo en las series y la integral va calculando de una forma uniforme

2) ¿Por qué la primera y la segunda integral no proporcionan el número correcto de asientos? (Se supone que la integral es una "suma")

Si pero la integrales no se van modificando de una forma uniforme es lo que le impide calcar de manera exacta los pequeños cambios

3) ¿Qué pasa con la integral de 0 a 51? ¿Sería válido usarla?

No por que se están modificando las condiciones iniciales del problema además de no proporcionar un resultado ya que el resultado es 5049

4) ¿Por qué la segunda integral se acerca más al valor correcto?

Por que es la que ocupa de una mejor forma las condiciones además de que presenta el cambio de una forma más aproximada

5) ¿Puede hacerse algo para obtener el valor exacto con una integral?

Pues si pero deberíamos de buscar el rango correcto de la integral para que el resultado fuera exacto

EJEMPLO 5.

1) ¿Por qué la suma de Riemann sí proporciona el número correcto de asientos?

Porque es una suma infinita de la forma $a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$; también se le llama sucesión de sumas parciales, por tanto este procedimiento es más preciso y abarca más subintervalos para llegar al resultado correcto.

2) ¿Por qué la primera y la segunda integral no proporcionan el número correcto de asientos? (Se supone que la integral es una "suma")

Debido a que los subintervalos son más amplios entre si, al momento de hacer el cálculo no se hace la aproximación correcta por tanto el resultado es incorrecto.

3) ¿Qué pasa con la integral de 0 a 51? ¿Sería válido usarla?

Debido a que el intervalo es más preciso el resultado de esta integral se aproxima más a la respuesta correcta. Si se quiere un resultado aproximado entonces es válido desarrollar la integral.

4) ¿Por qué la segunda integral se acerca más al valor correcto?

Porque el intervalo que se esta usando abarca más valores entonces el cálculo se aproxima más al dato o resultado correcto.

5) ¿Puede hacerse algo para obtener el valor exacto con una integral?

Evaluar la integral con un intervalo mucho más amplio para que la aproximación se apegue al resultado correcto.

Apéndice D

En este apéndice aparece la actividad en que se trata sobre la forma de acelerar la convergencia de una sucesión.

En esta práctica vamos a acelerar la convergencia numérica de una tabla de datos.

Primero consideremos la siguiente tabla.

n	x_n
1	1.0403
2	1.37758
3	1.44496
4	1.46891
5	1.48007
6	1.48614
7	1.48981
8	1.4922
9	1.49383
10	1.495
11	1.49587
12	1.49653
13	1.49704
14	1.49745
15	1.49778
16	1.49805
17	1.49827
18	1.49846

19 1.49862

20 1.49875

21 1.49887

22 1.49897

23 1.49905

24 1.49913

25 1.4992

Es decir, tenemos una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la cual sólo tenemos 25 elementos, así que nos falta una infinidad de los elementos.

La pregunta es si con estos 25 términos es suficiente para calcular la convergencia de esta sucesión.

Vamos a utilizar la fórmula

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Para crear una nueva sucesión $\{y_n\}$ que converja más rápido que $\{x_n\}$

Así tenemos que para calcular y_1 tenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{(x_{1+1} - x_1)^2}{x_{1+2} - 2x_{1+1} + x_1} \\ &= x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_3 - 2x_2 + x_1} \\ &= 1.0403023 - \frac{[1.3775825 - 1.0403023]^2}{1.4449569 - 2*1.3775025 + 1.0403023} \\ &= 1.4617750 \end{aligned}$$

En forma semejante podemos calcular y_2 con lo que tenemos

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_{2+1} - x_2)^2}{x_{2+2} - 2x_{2+1} + x_2}$$

$$= x_2 - \frac{(x_3 - x_2)^2}{x_4 - 2x_3 + x_2}$$

$$= 1.4821293$$

Podemos juntar las dos sucesiones para ver que la $\{y_n\}$ converge más rápido

n	x_n	y_n
1	1.0403	1.46178
2	1.37758	1.48213
3	1.44496	1.48979
4	1.46891	1.49342
5	1.48007	1.49541
6	1.48614	1.49662
7	1.48981	1.49741
8	1.4922	1.49795
9	1.49383	1.49834
10	1.495	1.49863
11	1.49587	1.49885
12	1.49653	1.49902
13	1.49704	1.49915
14	1.49745	1.49926

15 1.49778 1.49935

16 1.49805 1.49942

17 1.49827 1.49949

18 1.49846 1.49954

19 1.49862 1.49958

20 1.49875 1.49962

21 1.49887 1.49966

22 1.49897 1.49969

23 1.49905 1.49971

24 1.49913 □

25 1.4992 □

Comparando se observa que para x_{25}=1.4992 se alcanza desde el valor y_{14}. Afirmamos que la sucesión $\{y_n\}$ converge más rápido.

Pero $\{y_n\}$ también es sucesión y se puede acelerar su convergencia también, por lo que podemos construir una sucesión $\{z_n\}$ a partir de la sucesión $\{y_n\}$ tal y como se trabajó inicialmente con $\{x_n\}$

Así tenemos para z_1 y z_2

$$z_1 = y_1 - \frac{[y_{1+1} - y_1]^2}{y_{1+2} - 2y_{1+1} + y_1}$$

$$= y_1 - \frac{[y_2 - y_1]^2}{y_3 - 2y_2 + y_1}$$

$$= 1.4617750 - \frac{[1.4821293 - 1.4617750]^2}{1.4897855 - 2*1.4821293 + 1.4617750}$$

$$= 1.4944016$$

$$z_2 = y_2 - \frac{[y_{2+1} - y_2]^2}{y_{2+2} - 2\,y_{2+1} + y_2}$$
$$= y_2 - \frac{[y_3 - y_2]^2}{y_4 - 2\,y_3 + y_2}$$
$$= 1.4966888$$

Podemos juntar las tres sucesiones para ver que la {zn} converge más rápido

n	x_n	y_n	z_n
1	1.0403	1.46178	1.4944
2	1.37758	1.48213	1.49669
3	1.44496	1.48979	1.49784
4	1.46891	1.49342	1.49849
5	1.48007	1.49541	1.49888
6	1.48614	1.49662	1.49914
7	1.48981	1.49741	1.49932
8	1.4922	1.49795	1.49945
9	1.49383	1.49834	1.49954
10	1.495	1.49863	1.49962
11	1.49587	1.49885	1.49967
12	1.49653	1.49902	1.49972
13	1.49704	1.49915	1.49975
14	1.49745	1.49926	1.49978
15	1.49778	1.49935	1.49981
16	1.49805	1.49942	1.49983
17	1.49827	1.49949	1.49985
18	1.49846	1.49954	1.49986

19 1.49862 1.49958 1.49987

20 1.49875 1.49962 1.49989

21 1.49887 1.49966 1.4999

22 1.49897 1.49969 ""

23 1.49905 1.49971 ""

24 1.49913 "" ""

25 1.4992 "" ""

Podemos ver cómo desde el valor z_7=1.4993 ya se alcanza un valor semejante al de x_{25}.

Podemos decir que $\{z_n\}$ converge mucho más rápido que $\{x_n\}$ o $\{y_n\}$.

Podemos ver en la siguiente imagen cómo las sucesiones pueden acelerarse hasta donde uno quiera. Por cierto esta sucesión converge a 2/3 o 0.6666...

	Xn	Yn	Zn	Wn	Vn	
1	1.5000000000	0.8333333333	0.7187500000	0.6856060606	0.6741071429	0.6697303930
2	1.0000000000	0.7708333333	0.7045454545	0.6815476190	0.6727941176	0.6692708333
3	0.8750000000	0.7424242424	0.6964285714	0.6789215686	0.6718750000	0.6689311520
4	0.8181818182	0.7261904762	0.6911764706	0.6770833333	0.6711956522	0.6686699026
5	0.7857142857	0.7156862745	0.6875000000	0.6757246377	0.6706730766	0.6684625758
6	0.7647058824	0.7083333333	0.6847826087	0.6746794872	0.6702586215	0.6682942887
7	0.7500000000	0.7028985507	0.6826923077	0.6738505747	0.6699218741	0.6681552135
8	0.7391304348	0.6987179487	0.6810344828	0.6731770833	0.6696428556	0.6680356633
9	0.7307692308	0.6954022989	0.6796875000	0.6726190476	0.6694079041	0.6679396587
10	0.7241379310	0.6927083333	0.6785714286	0.6721491228	0.6692072995	0.6678488471
11	0.7187500000	0.6904761905	0.6776315789	0.6717479676	0.6690341033	0.6677713691
12	0.7142857143	0.6885964912	0.6768292683	0.6714015151	0.6688829888	0.6677203845
13	0.7105263158	0.6869918699	0.6761363636	0.6710992907	0.6687499586	0.6676288720
14	0.7073170732	0.6856060606	0.6755319149	0.6708333335	0.6686321502	0.6676056578
15	0.7045454545	0.6843971631	0.6750000000	0.6705974840	0.6685267216	0.6675935305
16	0.7021276596	0.6833333333	0.6745283019	0.6703869051	0.6684321214	0.6673478386
17	0.7000000000	0.6823899371	0.6741071429	0.6701977402	0.6683471110	0.6676083944
18	0.6981132075	0.6815476190	0.6737288136	0.6700268809	0.6682687657	0.6673935393
19	0.6964285714	0.6807909605	0.6733870968	0.6698717961	0.6681987293	0.6669238274
20	0.6949152542	0.6801075269	0.6730769231	0.6697303915	0.6681342973	
21	0.6935483871	0.6794871795	0.6727941176	0.6696009382	0.6680731217	
22	0.6923076923	0.6789215686	0.6725352113	0.6694819843	0.6680207387	
23	0.6911764706	0.6784037559	0.6722972973	0.6693722920		
24	0.6901408451	0.6779279279	0.6720779221	0.6692708341		
25	0.6891891892	0.6774891775	0.6718750000			
26	0.6883116883	0.6770833333	0.6716867470			
27	0.6875000000	0.6767068273				
28	0.6867469880	0.6763565891				
29	0.6860465116					
30	0.6853932584					

Ahora les toca calcular la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ de la que aparecen 30 valores en la tabla siguiente

n	**a_n**
1	3.34147
2	2.97943
3	2.82719
4	2.7474
5	2.69867
6	2.6659
7	2.64237
8	2.62467
9	2.61088
10	2.59983
11	2.59078
12	2.58324
13	2.57685
14	2.57137
15	2.56662
16	2.56246
17	2.55879
18	2.55553
19	2.55261
20	2.54998
21	2.5476
22	2.54544
23	2.54346
24	2.54165
25	2.53999
26	2.53845
27	2.53703
28	2.53571
29	2.53448
30	2.53333

EJEMPLO 1. El alumno utiliza Excel.

Esta sucesión converge a 2.522

n	a_n	b_n	c_n	D_n	e_n	f_n	g_n	h_n	i_n
1	3.34147	2.71671804	2.55221007	2.55423127	2.54744809	2.56286674	2.5640477	2.53061355	2.53061294
2	2.97943	2.65952638	2.55796876	2.53813062	2.56816319	2.57033114	2.53061112	2.53061233	2.53061233
3	2.82719	2.62221756	2.54732013	2.56024672	2.56104736	2.53061595	2.53061355	2.53061355	2.56046973
4	2.7474	2.59861473	2.54238742	2.56607644	2.53057528	2.53061112	2.53061112	2.62681671	2.51705759
5	2.69867	2.58244999	2.53557243	2.52945789	2.53061601	2.53061601	2.68298086	2.41303222	2.51025917
6	2.6659	2.57093244	2.52679685	2.53061045	2.53061045	2.84053945	2.59402846	2.61564874	2.45805607
7	2.64237	2.56224468	2.53061598	2.53061598	3.14727258	2.5200515	2.5343873	2.3960217	2.44502935
8	2.62467	2.55526704	2.53061044	3.77251647	2.53696925	2.61622865	2.31022152	2.48247512	2.45696008
9	2.61088	2.54982875	*5.01402061*	2.5133218	2.52050782	2.06716483	2.44922619	2.4164178	2.56100122
10	2.59983	2.54558993	2.53141409	2.53742185	2.50062749	2.50327767	2.47605731	2.52138003	2.53512849
11	2.59078	2.54134383	2.5134527	2.48069655	2.52275762	2.44157934	2.52483126	2.55014355	2.51892745
12	2.58324	2.53836956	2.44179209	2.51142379	2.36009141	2.51972792	2.52111722	2.51873017	2.51862579
13	2.57685	2.53571247	2.52690334	2.51970359	2.52337812	2.52451842	2.51685823	2.5189287	2.51876777
14	2.57137	2.53312847	2.50798259	2.5284364	2.51964445	2.51279065	2.52019814	2.51950487	2.52214751
15	2.56662	2.53130245	2.53878506	2.516415	2.50368567	2.51901813	2.51815039	2.52214385	
16	2.56246	2.52960902	2.52320047	2.52083069	2.5248862	2.52001017	2.52215119	2.52214751	
17	2.55879	2.52753235	2.51847323	2.52677813	2.5167723	2.52213632	2.52214383		
18	2.55553	2.52612862	2.52317589	2.52400359	2.52216023	2.52215109	2.52215117		
19	2.55261	2.5249424	*2.52521566*	2.5219984	2.52213621	2.52213682			
20	2.54998	2.52423273	2.52222863	2.52217444	2.52217531	2.51940385			
21	2.5476	2.52168	2.52201488	2.52212561	2.51970311				
22	2.54544	2.52237882	2.52264425	2.51932686	2.51943616				
23	2.54346	*2.52161933*	2.51969642	2.51976154					
24	2.54165	2.51868667	2.51936803	2.51846758					
25	2.53999	2.52022667	2.51738355						
26	2.53845	2.518286	2.51977261						
27	2.53703	2.51767							
28	2.53571	2.51679875							
29	2.53448								
30	2.53333								

EJEMPLO 2. El alumno utiliza el lenguaje JAVA.

Usando la plataforma Eclipse con Java 5 se realizó el siguiente programa que nos da el resultado de la sucesión.

```
import java.util.Arrays;

public class Prog_Series {

	public double[] ar;

	public Prog_Series(double[] arr) {
		this.ar = new double[arr.length];
	}

	public double[] serie(double[] arre, int z) {
		double n;
		int cosa = z - 1;
		n = arre[cosa]
				- (((arre[cosa + 1] - arre[cosa]) * (arre[cosa +
1] - arre[cosa])) / (arre[cosa + 2]
						- 2 * arre[cosa + 1] + arre[cosa]));
		ar[cosa] = n;

		return ar;

	}

	public double[] getAr() {
		return ar;
	}

	public static void main(String[] args) {
		double[] arre = { 3.34147, 2.97943, 2.82719, 2.7474, 2.69867,
2.6659,
				2.64237, 2.62467, 2.61088, 2.59983, 2.59078,
2.58324, 2.57685,
				2.57137, 2.56662, 2.56246, 2.55879, 2.55553,
2.55261, 2.54998,
				2.5476, 2.54544, 2.54346, 2.54165, 2.53999,
2.53845, 2.53703,
				2.53571, 2.53448, 2.53333 };
		Prog_Series cosa = new Prog_Series(arre);

		System.out.println("An = " + Arrays.toString(arre));
		for (int i = 1; i < arre.length - 1; i++) {
			cosa.serie(arre, i);
		}
		System.out.println("Bn = " + Arrays.toString(cosa.ar));

		for (int i = 1; i < arre.length - 1; i++) {
			cosa.serie(cosa.ar, i);
		}

		System.out.println("Cn = " + Arrays.toString(cosa.ar));
```

```
            for (int i = 1; i < arre.length - 1; i++) {
                  cosa.serie(cosa.ar, i);
            }

            System.out.println("Dn = " + Arrays.toString(cosa.ar));

      }

}
```

El resultado que aparece en el display es el siguiente:

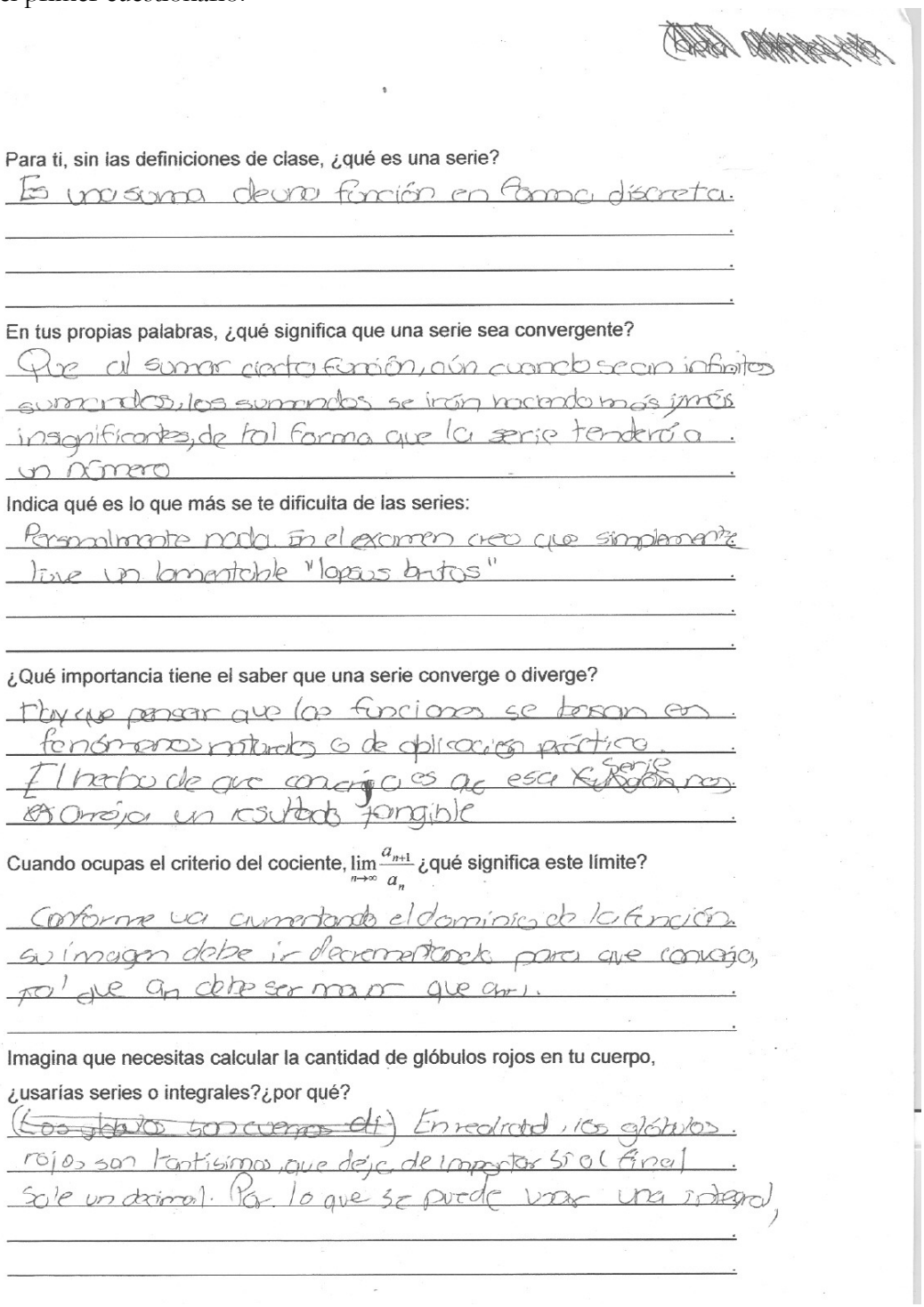
```
An = [3.34147, 2.97943, 2.82719, 2.7474, 2.69867, 2.6659, 2.64237,
2.62467, 2.61088, 2.59983, 2.59078, 2.58324, 2.57685, 2.57137, 2.56662,
2.56246, 2.55879, 2.55553, 2.55261, 2.54998, 2.5476, 2.54544, 2.54346,
2.54165, 2.53999, 2.53845, 2.53703, 2.53571, 2.53448, 2.53333]

Bn = [2.716718038131554, 2.659526375431332, 2.622217556342563,
2.5986147305764433, 2.582449989177487, 2.5709324356775296,
2.562244680306902, 2.5552670437956233, 2.5498287500000067,
2.5455899337748256, 2.5413438260869547, 2.538369560439568,
2.53571246575342, 2.5331284745762908, 2.531302448979572,
2.5296090243902447, 2.5275323529411766, 2.526128620689667,
2.5249423999999867, 2.524232727272739, 2.5216799999999795,
2.5223788235294404, 2.5216193333332857, 2.5186866666667265,
2.520226666666653, 2.5182859999999536, 2.517670000000025,
2.516798750000017]

Cn = [2.552210066015745, 2.5579687612525546, 2.5473201289074594,
2.5423874227562835, 2.535572426693624, 2.5267968523715756,
2.530615978791538, 2.5306104431751493, 5.014020607748231,
2.5314140928110107, 2.513452697256395, 2.4417920874026495,
2.5269033448961555, 2.507982591106311, 2.5387850591219663,
2.5232004746683376, 2.5184732288313665, 2.523175886367936,
2.5252156612450354, 2.522228632326832, 2.5220148760398535,
2.522644253127962, 2.5196964237094606, 2.519368030390094,
2.5173835460494347, 2.5197726052880753, 2.5176703017084656]

Dn = [2.554231270911235, 2.5381306165715336, 2.5602467189217855,
2.566076439561219, 2.529457894378861, 2.530610451187112,
2.530615978779199, 3.772516470384276, 2.5133218014419296,
2.5374218479426274, 2.4806965459678727, 2.5114237907866754,
2.519703591722955, 2.5284364027918826, 2.516415003147139,
2.520830688646366, 2.5267781339790285, 2.5240035855817253,
2.5219984002885307, 2.522174439536494, 2.522125609238595,
2.519326860394674, 2.519761542214916, 2.5184675756382626,
2.518654341635697, 2.51977436221945]
```

Con esto nos podemos dar cuenta que la sucesión se va acercando al 2.5 muy lentamente. Hay algunos resultados que no llevan un orden del todo correcto y pues eso afecta un poco nuestro resultado.

Apéndice E

Las siguientes son imágenes correspondientes a las hojas de respuesta de los cuestionarios analizados en la sección 3.1

Imágenes del primer cuestionario:



Para ti, sin las definiciones de clase, ¿qué es una serie?

Es una suma de una función en forma discreta.

En tus propias palabras, ¿qué significa que una serie sea convergente?

Que al sumar cierta función, aún cuando sean infinitos sumandos, los sumandos se irán haciendo más y más insignificantes, de tal forma que la serie tenderá a un número

Indica qué es lo que más se te dificulta de las series:

Personalmente nada. En el examen creo que simplemente tuve un lamentable "lapsus brutos"

¿Qué importancia tiene el saber que una serie converge o diverge?

Hay que pensar que las funciones se basan en fenómenos naturales o de aplicación práctica. El hecho de que converja o no esa serie/función nos arroja un resultado tangible

Cuando ocupas el criterio del cociente, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ¿qué significa este límite?

Conforme va aumentando el dominio de la función su imagen debe ir decrementando para que converja, por que a_n debe ser mayor que a_{n+1}.

Imagina que necesitas calcular la cantidad de glóbulos rojos en tu cuerpo, ¿usarías series o integrales? ¿por qué?

(~~Los glóbulos son cuerpos sólidos~~) En realidad, los glóbulos rojos son tantísimos, que deja de importar si al final sale un decimal. Por lo que se puede usar una integral,

Para ti, sin las definiciones de clase, ¿qué es una serie?

Es la suma de ~~[illegible]~~ muchas secciones de area cuyo resultado es un área total

En tus propias palabras, ¿qué significa que una serie sea convergente?

que si se puede llegar a un resultado. O sea que si buscamos un área en una funcion que tiende a infinito. podemos encontrarla o no, dependiendo si converge o diverge.

Indica qué es lo que más se te dificulta de las series:

Aveces saber que criterio aplicar para resolverlas.

¿Qué importancia tiene el saber que una serie converge o diverge?

~~[illegible]~~ Su importancia es mucha ya que ~~[illegible]~~ al saberlo podemos definir ~~[illegible]~~ un área o saber si una funcion tiene area infinita.

Cuando ocupas el criterio del cociente, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ¿qué significa este límite?

~~[illegible]~~

Que el incremento de la n+1 entre la n cuando tiende a infinito.

Imagina que necesitas calcular la cantidad de glóbulos rojos en tu cuerpo, ¿usarías series o integrales?¿por qué?

Series porque los globulos rojos no los puedo dividir ~~[illegible]~~ y dividir tendiendo a 0. Usan series como en el problema del estadio.

Para ti, sin las definiciones de clase, ¿qué es una serie?

Una sumatoria que se realiza de manera sucesiva que puede tender a infinito o no.

En tus propias palabras, ¿qué significa que una serie sea convergente?

Que tenga sumatoria, y eso me indica que en algun valor la serie deja de tender a infinito.

Indica qué es lo que más se te dificulta de las series:

Los criterios, aprendermelos, porque parecen de estadística y no son como las fórmulas de Física.

¿Qué importancia tiene el saber que una serie converge o diverge?

Para las aplicaciones que la serie puede tener.

Cuando ocupas el criterio del cociente, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ¿qué significa este límite?

Que a "a" le vamos a agregar una unidad. Y que a_n es la función original. Este criterio lo utilizamos para saber si converge o diverge.

Imagina que necesitas calcular la cantidad de glóbulos rojos en tu cuerpo, ¿usarías series o integrales?¿por qué?

Integrales, porque mis glóbulos rojos tienen una forma, la cual podemos considerarla como un punto, por lo que la integral me daría la cantidad exacta.

Para ti, sin las definiciones de clase, ¿qué es una serie?

La serie se utiliza cuando una función no es posible de una manera normal, así que se utilizan los criterios para poder realizarla.

¿Cómo explicas que se pueda sumar un número infinito de números reales?

porque es positivo o negativo y además es creciente del 1 al ∞.

En tus propias palabras, ¿qué significa que una serie sea convergente?

Significa que la serie es posible de realizar y te dice que se acerca a una cantidad sin llegar a ser el límite

¿Cómo explicas que una sucesión converja y la serie de sus términos no?

Cuando no se determina

Indica qué concepto se te dificulta más de las series y por qué:

Se me dificulta más el identificarlos, ya que son muchos criterios, porque al aplicarlos ya es fácil

¿Qué importancia tiene el saber que una serie converge o diverge?

saber si es posible determinarla y llegar a una conclusión, si diverge no tiene solución o no se determina

Cuando ocupas el criterio del cociente, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ¿qué significa este límite?

Cuando tiene el mismo exponente arriba y abajo es el de la enesima potencia

¿Cómo explicas que una integral impropia indique si una serie converge o no?

dependiendo de que sustituyes el límite que te da, si se determina podemos decir que converge, sino, no es posible hacerla

Imagina que necesitas calcular la cantidad de glóbulos rojos en tu cuerpo, ¿usarías series o integrales?¿Por qué?

No se

¿Cuántas veces habías visto el tema de series antes de este curso? 0 (1) 2 3 4

En general, ¿qué opinas acerca de las series?

Es difícil aprenderlo de memoria

Para ti, sin las definiciones de clase, ¿qué es una serie?

Una suma de términos.

En tus propias palabras, ¿qué significa que una serie sea convergente?

No sé, no entendí del todo qué significa ni para qué sirve.

Indica qué es lo que más se te dificulta de las series:

Saber bien cómo utilizar un criterio, es decir, cuál usar y cuál me dice el valor real y cuál sólo me dice si converge o no.

¿Qué importancia tiene el saber que una serie converge o diverge?

No sé, pues no tengo idea de qué significa todavía

Cuando ocupas el criterio del cociente, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ¿qué significa este límite?

Sólo tengo idea de cómo usarlo y más o menos de cuándo, pero no qué significa.

Imagina que necesitas calcular la cantidad de glóbulos rojos en tu cuerpo, ¿usarías series o integrales?¿por qué?

Series, pues son más exactas que las integrales.

Imágenes del segundo cuestionario en su primera parte:

Nombre: Alan Mandujano Burgos 469181

Realiza las siguientes sumas:

$1+\frac{1}{2}=$ $\frac{3}{2}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$ $\frac{6+3+2}{6}=\frac{11}{6}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ $\frac{24+12+8+6}{24}=\frac{50}{24}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$ $\frac{120+60+40+30+24}{120}=\frac{274}{120}$ $24\times5=120$

¿Hasta qué número puedes sumar sin ayuda de calculadora? ¿por qué?

todos pero se vuelve más tardado

Si tuvieras que sumar $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10{,}000}$, ¿Crees que se pudiera hacer la suma?

si pero tomaría mucho tiempo y por la complicación incluso podría quedar mal

¿Cómo la harías? (Recuerda que sin ayuda de calculadora)

sumando uno por uno hasta 10000

Si dices que puede hacerse la suma, ¿Cuánto crees que sería el resultado de esa suma?

un número muy largo que incrementaría muy poco

¿Qué significado crees que tenga ese resultado?

que el resultado tiene como límite un valor el cual nunca puede alcanzar

Nombre: Carlos Hernán Aparicio Rangel.

Realiza las siguientes sumas:

$1+\frac{1}{2}=$ $\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$ $\frac{6+3+2}{6}=\frac{11}{6}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ $\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$ $\frac{60+30+20+15+12}{60}=\frac{137}{60}$

¿Hasta qué número puedes sumar sin ayuda de calculadora? ¿por qué?

Pues hasta el infinito porque se agarraria las fracciones pasadas con la actual.

Si tuvieras que sumar $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10{,}000}$, ¿Crees que se pudiera hacer la suma?

Si

¿Cómo la harías? (Recuerda que sin ayuda de calculadora)

Agarraria la fracción pasada con el incremento y despues se agarraria la fracción resultante con el incremento.

Si dices que puede hacerse la suma, ¿Cuánto crees que sería el resultado de esa suma?

No tendria fin hasta que el usuario quiera que termine

¿Qué significado crees que tenga ese resultado?

La suma de todas las cantidades

Nombre: Dario Rivera del Río

Realiza las siguientes sumas:

$1+\frac{1}{2}=$ 3/2 //

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$ 11/6 //

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{44+6}{24}=\frac{25}{12}$ //

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{125+12}{60}=\frac{137}{60}$ //

¿Hasta qué número puedes sumar sin ayuda de calculadora? ¿por qué?

Todo lo q' quio

Si tuvieras que sumar $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10{,}000}$, ¿Crees que se pudiera hacer la suma?

si

¿Cómo la harías? (Recuerda que sin ayuda de calculadora)

le suma y le suma y le suma hasta q' acabe

Si dices que puede hacerse la suma, ¿Cuánto crees que sería el resultado de esa suma?

pues, tomando en cuenta 2 decimales "0" ← cero

¿Qué significado crees que tenga ese resultado?

pues q' siempre disminuye

Nombre: Mario I Rangel Rodriguez

Realiza las siguientes sumas:

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$

¿Hasta qué número puedes sumar sin ayuda de calculadora? ¿por qué?

El numero que sea

Si tuvieras que sumar $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10{,}000}$, ¿Crees que se pudiera hacer la suma?

Si se puede

¿Cómo la harías? (Recuerda que sin ayuda de calculadora)

Sacando minimo comun multiplo y sumar

Si dices que puede hacerse la suma, ¿Cuánto crees que sería el resultado de esa suma?

no se es tardado hacer lo

¿Qué significado crees que tenga ese resultado?

que apesar que es un numero grande se puede hacer la suma

Nombre: Sergio R Palicio Maraty

Realiza las siguientes sumas:

$1+\frac{1}{2}=$ 1.5 = $1\frac{1}{2}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$ $\frac{6+3+2}{6}=\frac{11}{6}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ $\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$ $\frac{60+30+15+12}{60}=\frac{137}{60}$

¿Hasta qué número puedes sumar sin ayuda de calculadora? ¿por qué?

Todos los puedo sumar. porque soy muy lista.

Si tuvieras que sumar $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10{,}000}$, ¿Crees que se pudiera hacer la suma?

Sí

¿Cómo la harías? (Recuerda que sin ayuda de calculadora)

Lo haría con un limite a 10,000 o podría integrar la sumatoria

Si dices que puede hacerse la suma, ¿Cuánto crees que sería el resultado de esa suma?

3.1415 o pi

¿Qué significado crees que tenga ese resultado?

Que las matematicas son una religión.

Imágenes del segundo cuestionario en su segunda parte:

Nombre: Alan Mandujano 469181

(Ahora vamos a suponer que puedes utilizar la mejor computadora del mundo)
Si por alguna razón se tuviera que sumar todos los términos posibles, ¿Hasta qué número se podría sumar? ¿por qué dices ese número?

hasta el máximo que pudiera manejar la computadora

¿Crees que se puedan considerar un número infinito de sumandos?

si pero no se puede sumar hasta el infinito

¿Cómo los sumas entonces?

usando límites o integrales

Si es un número infinito de términos, ¿cuándo terminas de hacer la suma?

nunca

¿Cuál sería la suma?

el infinito

¿Qué es el ε (épsilon) y la δ (delta) de una computadora?

¿Cuál es el número más grande que puede escribir manejar una computadora?

depende de su procesador y el tipo de dato que se maneje (entero, flotante, doble, etc.)

¿Cuál es el más pequeño?

depende de lo mismo que el de arriba, en realidad sólo cambia el signo de su exponente

Nombre: Carlos Hernán Aparicio R.

(Ahora vamos a suponer que puedes utilizar la mejor computadora del mundo)
Si por alguna razón se tuviera que sumar todos los términos posibles, ¿Hasta qué número se podría sumar? ¿por qué dices ese número?

Infinito

¿Crees que se puedan considerar un número infinito de sumandos?

Si

¿Cómo los sumas entonces?

programa

Si es un número infinito de términos, ¿cuándo terminas de hacer la suma?

nunca

¿Cuál sería la suma?

numero infinito

¿Qué es el ε (épsilon) y la δ (delta) de una computadora?

Σ = suma

Δ = Diferencia

¿Cuál es el número más grande que puede escribir manejar una computadora?

Infinito

¿Cuál es el más pequeño?

- infinito

Nombre: Daria Rivera del Río

(Ahora vamos a suponer que puedes utilizar la mejor computadora del mundo)
Si por alguna razón se tuviera que sumar todos los términos posibles, ¿Hasta qué número se podría sumar? ¿por qué dices ese número?

hasta q' se llena la pantallo

¿Crees que se puedan considerar un número infinito de sumandos?

No

¿Cómo los sumas entonces?

se haria un aproximado

Si es un número infinito de términos, ¿cuándo terminas de hacer la suma?

nunca pq lo infinito no tiene fin

¿Cuál sería la suma?

no se podria

¿Qué es el ε (épsilon) y la δ (delta) de una computadora?

ε = suma de todos los numeros

Δ = cambio

¿Cuál es el número más grande que puede escribir/manejar una computadora?

hasta el numero de digitos en pantalla

¿Cuál es el más pequeño?

hasta el numero de decimales q tenga

Nombre: Mario Ivan Rangel

(Ahora vamos a suponer que puedes utilizar la mejor computadora del mundo)
Si por alguna razón se tuviera que sumar todos los términos posibles, ¿Hasta qué número se podría sumar? ¿por qué dices ese número?

Se podria sumar n cantidad de numeros pa que la computadora tiene la capacidad de sumarlos

¿Crees que se puedan considerar un número infinito de sumandos?

Si

¿Cómo los sumas entonces?

El resultado de la ultima suma mas el nuevo valor

Si es un número infinito de términos, ¿cuándo terminas de hacer la suma?

nunca

¿Cuál sería la suma?

seria una suma infinita

¿Qué es el ε (épsilon) y la δ (delta) de una computadora?

la delta una resta (diferencia)

¿Cuál es el número más grande que puede escribir manejar una computadora?

es infinito $+\infty$

¿Cuál es el más pequeño?

el $-\infty$

Nombre: Sergio P Palicio Marcos

(Ahora vamos a suponer que puedes utilizar la mejor computadora del mundo)
Si por alguna razón se tuviera que sumar todos los términos posibles, ¿Hasta qué número se podría sumar? ¿por qué dices ese número?

hasta cualquier numero deseado

¿Crees que se puedan considerar un número infinito de sumandos?

Sí

¿Cómo los sumas entonces?

cuando el numero que tengo que sumar sea infinitamente pequeño y no afecte a la suma, ahí se detengo.

Si es un número infinito de términos, ¿cuándo terminas de hacer la suma?

cuando se desprecia el numero ahí se detiene, dando lugar a finito

¿Cuál sería la suma?

$1 + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{\infty}$

¿Qué es el ε (épsilon) y la δ (delta) de una computadora?

δ = diferencia ε = No se

¿Cuál es el número más grande que puede escribir manejar una computadora?

$+\infty$

¿Cuál es el más pequeño?

$-\infty$