Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada
y Tecnología Avanzada del IPN
Programa de Matemática Educativa

La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Matemática Educativa
presenta:

Araceli María Eugenia Torres Bezaury

Directora de la tesis:
M. en C. Liliana Suárez Téllez

Co-Director de la tesis:
Dr. Francisco Cordero Osorio

México, D.F., junio de 2004

Índice general

Relación de cuadros

Título

La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo dar cuenta de los aprendizajes que logran los estudiantes del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (NMS-IPN) al trabajar con un problema de una situación real de movimiento empleando tecnología como son los sensores (dispositivos transductores) y calculadora graficadora.

En atención a las demandas que la sociedad le plantea, el IPN tiene como meta la definición de un nuevo perfil que contribuya a la formación de estudiantes con capacidad emprendedora, responsabilidad, creatividad y flexibilidad en su desempeño profesional. Por tal razón la Academia Institucional de Matemáticas del NMS del IPN cuenta con un Plan de Trabajo que contiene un conjunto de proyectos que se vinculan entre sí. Este trabajo de tesis se inscribe en el proyecto "La tecnología como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas", que tiene como una de sus metas la instalación de laboratorios de matemáticas con tecnología en el NMS-IPN, generando y aprovechando la investigación sobre el aprendizaje que se logra con el uso de tecnología.

La hipótesis que guía la investigación es que la tecnología genera un nuevo uso de las gráficas.

El marco teórico con el que se abordó este proyecto contempla cuatro aspectos que guardan una estrecha relación: El primero fue la aproximación socioepistemológica que sostiene que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana. Además, toma en cuenta cuatro dimensiones para abordar las problemáticas que estudia. Un segundo aspecto se refiere a la problemática enfocada: el uso de las gráficas. A partir de una revisión se han identificado tres usos: el primero se refiere a la construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, el segundo uso es cuando se usan operaciones gráficas y el tercer uso se refiere a la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología, que es el enfoque especial de este trabajo. El tercer aspecto tiene que ver con el estado del arte sobre aspectos de graficación. En la literatura de matemática educativa se han podido identificar algunas de las concepciones que tienen los estudiantes con la tarea de graficación, las cuales tienen que ver con la interpretación y construcción de las mismas. El cuarto aspecto lo constituye el marco que sirvió de referencia para describir un nuevo uso de las gráficas: el Comportamiento Tendencial de la Funciones (Cordero, 1998).

Con este marco descrito se formularon las preguntas de investigación siguientes: ¿en que sentido logran tener una visión global y local de la gráfica?, ¿qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente?

La situación de aprendizaje que se usó consiste en hacer la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. Pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos. Para dar respuesta a las preguntas planteadas en esta investigación, se implementó un taller extracurricular que sirvió de escenario para establecer las modalidades de trabajo, el tipo de actividad a resolver, cierto manejo de la tecnología y las grabaciones del trabajo de los estudiantes.

Los estudiantes hacen una descripción de la posición y de la velocidad, discutiendo sobre la inclinación de las rectas, aun antes de realizar la simulación y obtener las gráficas con la tecnología. Los estudiantes pudieron relacionar la representación verbal con la representación de la simulación, identificaron los intervalos de cambios de velocidad, con respecto a la pendiente podemos afirmar que pudieron identificar en la gráfica que una recta con menor inclinación representaba que su velocidad era más lenta que aquella que tuviera mayor inclinación, pudieron transitar fácilmente entre las diferentes representaciones que estaban en juego como son la verbal, la gráfica y por supuesto la de la simulación. Con este trabajo se ha contribuido a entender la naturaleza de las construcciones que un estudiante del NMS del IPN puede realizar usando tecnología para modelar situaciones de movimiento.

Title

Modelling and graphing body motion situations using technological devices

Summary

The following piece of research focuses on the learning achievements fulfilled by a group of students at a pre University level, from the Instituto Politécnico Nacional (NMS-IPN), who is faced to real problem solving situations of movement, using technological devices such as sensors (transducer devices) and graphic calculators.

Aware of the society needs, the IPN has proposed a new professional profile, which is meant to contribute to the student's new habit formation that enhances enterprising abilities, responsibility and creativity in their professional performance. That is the reason why, the "Academia Institucional de Matemáticas del NMS del IPN" is carrying out an academic program based on the "Programa de Mejoramiento de las Matemáticas" (Math's improvement study program), which includes a set of projects that are linked all together.

This work has been called "The Technology as a Tool for the Comprehension and the Use of Math", which main purpose is the installation of Math Laboratories enriched with technology at a pre University level (NMS).

These tools are meant to do some research about the learning processes influenced by the use of these technological devices.

The hypothesis that guides this research is based on the beliefs that technology can help to a new use of the graphs.

The theoretical background, in which this project was based, includes four aspects that keep a very tight relationship: the first one refers to the socioepistemological approach which states that the knowledge constructions must be in accordance with the modeling and the use of Math, as the language to the human being. Besides, it takes into consideration four dimensions to deal with the proposed problems; the cognitive, the epistemological, the didactic and the social one.

The second aspect refers to the focus problem research: the use of graphs. After a revision, it has been identified three uses of them: the first one handles with the design of graphs using the corresponding relationship between two variables; the second one focuses graph operations and the third one refers to the graphing by means of the simulation of the physical phenomena using technology, which it is the focus of this work.

The third aspect is related to the state of art in graphical aspects. In Math learning Literature there have been identified some of the conceptions that students develop when making graphs, which are related to their own interpretation and development.

The four aspect is framed by the work "Tendencial Behavior of Functions" (Cordero 1998).

Having drawn the frame, the following research questions were formulated:

In what sense do the students get to have a global and local vision about the graphs?

What knowledge do the students get to do, to say and to discuss about the slope?

The learning situation, which was used, consists on doing the movement graphs of a common person who goes away from a departure point to 500 mts, and then it goes back. This person has only nine minutes to do this, but during this movement it stops four minutes. In order to give answers to the stated research questions, an "extracurricular workshop" was scheduled, which serves as a scenario to set up the different modalities of the work, the kind of activity to work with, the use of the technology and the recording of the sessions.

Based on the main problem, the students could get a description of the position and the speed, discussing about the slope of the straight lines, before doing the simulation and obtain the graphs with the technology, being also were to relate the verbal representation and its simulation. They identified the intervals of speed changes. As a result of this work, we can state that students could identify from the graphs, that one straight line with fewer slope represents a lower speed and than one with higher slope represents a higher speed. In conclusion, this work contributes to understand the source of constructions made by a student from the NMS at the IPN, using technology to model situations involving movement.

Glosario

Glosario

Aproximación Socioepistemológica (Cantoral & Farfán, 1998).
Aproximación teórica, construida al seno de la Matemática Educativa, un acercamiento desde esta perspectiva debe significar el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana (Cordero, 2001).

Argumentos
Son las explicaciones que los estudiantes logran hacer y decir con respecto a la actividad de aprendizaje desde el punto de vista individual y grupal.

Calculadora graficadora
La incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas la considera como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas, en la que los estudiantes pueden transitar entre las diferentes representaciones como son la simulación, la verbal, la tabular, la gráfica, y la algebraica; además permite que el estudiante, desplazando el esfuerzo concentre su atención hacia los significados matemáticos y generando al mismo tiempo un nuevo uso de las matemáticas.

Caracterización de una situación de aprendizaje
Es parte de los trabajos realizados por la AIM (AIM-NMS-IPN, 2002) es una herramienta que sirve para identificar si un problema o actividad de aprendizaje representa una ayuda para que los estudiantes logren aprendizajes significativos. Por lo que respecta al problema planteado podemos afirmar que es una experiencia de aprendizaje de resolución de problemas, la modalidad del trabajo se realiza en equipos de tres estudiantes, el lugar de realización es en el salón de clases, los materiales utilizados, el tiempo estimado para su realización, son considerados como productos de la actividad los registros de los estudiantes, las estrategias a seguir. El diseño del problema considera referencias curriculares, en cuanto a contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales. También se identifican su relación con 'Las

Competencias Básicas del Estudiante de Bachillerato' y con algunos de los estándares de álgebra del NCTM.

Construcción de conocimiento

Proceso mediante el cual las personas y/o comunidades pasan de un estado de conocimiento a otro que es considerado, en algún sentido, superior al anterior.

Dispositivos transductores

Instrumentos como el sensor que toma datos los cuales transfiere a la calculadora, ésta a través de sus programas los guarda en listas que representan respectivamente el tiempo, la distancia, la velocidad y la aceleración, de esta manera se obtienen la gráfica de la distancia contra tiempo, la velocidad contra tiempo y la aceleración contra tiempo.

Graficación

Práctica escolar de utilidad en los cursos de matemáticas del NMS, en la que se han identificado tres usos de las gráficas: construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, es decir, localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica; cuando se grafica por operaciones gráficas y la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología, que es el enfoque especial de este trabajo.

Herramientas utilizadas por los estudiantes para dar cuenta de su aprendizaje

Como son: "interpretar" distintas representaciones como son la verbal, la gráfica y por supuesto la simulación; "identificar" en la gráfica los cambios de posición y de velocidad; "reconocer" patrones de comportamientos gráficos con respecto a las gráficas de la posición y de la velocidad, y "relacionar" las gráficas antes y después de usar tecnología.

La modelación matemática

Debe ser entendida como la reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas; es una construcción original que utiliza material conocido, por ejemplo, las ideas y concepciones compartidas por los participantes. La parte esencial de la modelación es la formación de esas construcciones, y hacer distinción entre ellas para seleccionar una es una clase de actividades y acciones hechas con herramientas. Por ello, el humano se somete a usarlas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y así reconstruir significados. (Cordero, 2001).

Modelación

Es una construcción de conocimiento matemático en un ambiente social y que Arrieta (2003) describe como un proceso de matematización en el aula como actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en un salón de clases, usando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza (comprendidos los fenómenos sociales, económicos, etc.) confrontando y argumentando diferentes versiones.

Paquetes Didácticos

Auxiliares para los cursos de matemáticas elaborados por la AIM-NMS-IPN los cuales contienen: libro del estudiante y libro del profesor, disco del estudiante, disco del profesor, sitios en plataformas en Internet y Talleres para profesores para el manejo de los materiales mismos.

Procedimientos

Todo que los estudiantes realizan directamente sobre la modelación y simulación, en este sentido, nos referimos a las gráficas que se construyen antes y después de usar tecnología.

Procesos y objetos

La base de los procesos y objetos se encuentran en las formas de las gráficas que se obtienen con el sensor y la calculadora graficadora.

Secuencias

La dinámica que se llevó a cabo en las sesiones de trabajo con los estudiantes, de acuerdo con las modalidades de trabajo planteadas en Suárez (2000), tomó forma en las siguientes secuencias:

Secuencia I: Graficación. Los estudiantes leen y aceptan resolver el problema; los alumnos construyen las gráficas que describe la situación del problema en acetatos (sin emplear tecnología). Para después continuar con una discusión grupal, en donde los equipos explican a sus compañeros las gráficas que realizaron.
Secuencia II. La simulación. Los estudiantes diseñan la forma en que se van a mover ante el sensor, realizan la simulación y finalizan con una discusión grupal nuevamente con el propósito de contrastar las gráficas obtenidas antes y después de usar la tecnología.

Significados y sistemas simbólicos

Se encuentran directamente en las gráficas, los cuales pueden detectarse a través del análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad, que se verá reflejada en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar pequeños intervalos que indique cuando es más lento, más rápido, se detiene, rápido, lento, cuando es positiva o negativa.

Simulación

Es una actividad que permite expresar un fenómeno de cambio a través de una dependencia entre variables, proporciona el lenguaje más cercano al fenómeno estudiado, el menos simbólico, y que aparece al realizar un experimento o al simularlo con la calculadora graficadora y los dispositivos transductores. El uso de simulaciones debe servir de guía al estudiante para avanzar en el uso de herramientas y la generación de significados hasta lograr una visión cualitativa de la situación planteada sobre el movimiento.

Taller extracurricular de modelación

Taller sabatino de cuatro sesiones de tres horas llevado a cabo con alumnos voluntarios en el CECyT "Wilfrido Massieu Pérez". Las dos primeras sesiones estuvieron enfocadas a que los alumnos se familiarizaran con las modalidades de trabajo; con la tecnología; con el tipo y estructura de las actividades del taller y con la toma de registros (Suárez 2000). La tercera sesión se trabajó con el problema de movimiento que ha sido el motor de toda esta investigación y la cuarta sesión con un problema del movimiento vertical de un elevador.

Introducción

Introducción

El presente trabajo de tesis titulado "*La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología"* tiene como objetivo reportar los resultados de una investigación inscrita en el marco de la Matemática Educativa cuyo propósito es dar cuenta de los aprendizajes que logran los estudiantes de los distintos semestres (primero, tercero y quinto) del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional al trabajar con un problema de una situación real de movimiento empleando tecnología como son los dispositivos transductores y la calculadora graficadora. Para lograr este objetivo se han tomado en cuenta los capítulos que a continuación se resumen:

Capítulo I. Antecedentes

En este capítulo se da a conocer un panorama general del programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa que ofrece CICATA-IPN. Este programa contempla dos objetivos bien definidos: la incorporación de saberes matemáticos al sistema didáctico y la formación de profesionales que cuenten con elementos para conocer las condiciones de la enseñanza escolar y esclarecer las condiciones del aprendizaje, con la finalidad de usar dichos conocimientos en la mejora de procesos educativos. Estos objetivos se han tomado en cuenta para el desarrollo del trabajo de tesis. Para lograr dichos objetivos el programa de Maestría atiende varias líneas de investigación, una de ellas es *la innovación tecnológica y los saberes matemáticos* que es donde se inserta este trabajo de investigación. La incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas debe reconocer a ésta como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas, en la que los estudiantes pueden lograr transitar entre las diferentes representaciones: la simulación (la situación), la verbal, la tabular, la gráfica, y la algebraica. En términos educativos la modelación y la simulación han resultado ser buenas estrategias para analizar el comportamiento de un sistema, incluso han sido una rica fuente de significados matemáticos. Se ha elegido un contexto tecnológico de modelación para estudiar la relación entre la tecnología (calculadoras y dispositivos transductores) y la construcción del aprendizaje matemático. Para ello se ha utilizado una actividad de aprendizaje que tiene como propósito generar un nuevo uso de las gráficas que permite un tránsito entre las representaciones mencionadas y la generación significados propiciando que los estudiantes logren una visión cualitativa de un cierto fenómeno de movimiento.

El programa de maestría contribuye sustancialmente a la formación de profesionales académicos especializados con una visión que les permite colaborar en la resolución de problemas propios de sus instituciones. En particular, al IPN le corresponde atender a las necesidades del país para sustentar su desarrollo científico y tecnológico, por lo que deberá convertirse en un espacio de socialización que integre en sus propuestas formativas la ciencia, la tecnología y el conocimiento con una ética de responsabilidad profesional, en donde el currículo, la pedagogía, la organización, el diseño y la aplicación de las políticas institucionales, tengan la capacidad para actuar consistentemente frente a los escenarios de este siglo. Por tal motivo es que la Academia Institucional de Matemáticas (AIM-NMS-IPN) ha trabajado para enfrentar estos desafíos por lo que propone un plan integral que toma en cuenta los resultados del Simposio ***"La Prospectiva del IPN y los Desafíos para el Siglo XXI"*** que tuvo lugar en noviembre de 1997. En este Simposio el Instituto destacó que el quehacer institucional se debe orientar hacia la creación de un sistema educativo capaz de colocar a todo individuo en la posibilidad de adquirir, actualizar y usar adecuadamente el conocimiento pertinente con un sentido de solidaridad. El plan de trabajo de la AIM cuenta con un conjunto de programas con objetivos a corto, mediano y largo plazos los cuales se vinculan con las líneas de trabajo permanentes de la AIM y, con un Programa de Mejoramiento del Estudio de las Matemáticas (MEM); este último está compuesto de una serie de proyectos (Ver Cuadro I.1) que se articulan para sentar las bases y así solucionar de fondo los problemas que obstaculizan el cumplimiento de los objetivos del área de matemáticas en el NMS-IPN. En este contexto, este trabajo de tesis atiende a uno de estos proyectos: "La tecnología como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas", que tiene como una de sus metas a mediano plazo la instalación de un laboratorio con computadoras, dispositivos transductores y, sobre todo, con secuencias didácticas integradoras vinculadas con objetivos curriculares.

Capítulo II. Marco teórico

Este capítulo tiene la finalidad de dar a conocer la problemática a la cual nos enfrentamos cuando se estudian las características del aprendizaje que se logran cuando se incorporan dispositivos de transducción, sensores y calculadoras con poder de graficación, para el registro, el análisis y la interpretación de datos diversos en el salón de clases, en las experiencias de aprendizaje con alumnos del NMS-IPN. Para ello se ha planteado la siguiente hipótesis: *La tecnología genera un nuevo uso de las gráficas*.

Se han identificado tres usos de las gráficas, uno de ellos es la construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, un segundo uso es por operaciones gráficas, y un tercer uso se refiere a la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología, que es el enfoque especial de este trabajo.

Para efectos del desarrollo de esta investigación se tomó en cuenta la descripción que hace Azcárate (1990) de las representaciones de una función como la expresión de una dependencia entre variables. Dichas representaciones son: la simulación (que se refiere a la situación), la verbal, la gráfica, la tabular y la algebraica; y que de manera particular nuestro explora el tránsito entre las tres primeras. A partir de lo descrito por Azcárate (1990) sobre las diferentes representaciones y sobre todo poniendo énfasis en la hipótesis, nos interesa en particular el tercer uso de la gráfica, por tal motivo es que surgen las siguientes preguntas de investigación con respecto a las concepciones de los conocimientos matemáticos de los estudiantes: ¿en qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?, ¿cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?, ¿qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente? y ¿cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

Para responder estas preguntas se optó por utilizar la situación de aprendizaje que se encuentra en el Capítulo III de este trabajo, y que fue tomada de lo Paquetes Didácticos diseñados por la AIM del NMS-IPN, en la cual los estudiantes deberán transitar por un ciclo de exploraciones graficas que comienza con la situación, sigue con la realización de simulación y regresa a la situación $(situación - simulación - situación)$. Este ciclo de exploraciones permite incorporar los significados generados por los estudiantes para la construcción de una apreciación cualitativa y cuantitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo (Suárez, 2002).

Capítulo III. Situación de aprendizaje

En este capítulo se presenta la situación de aprendizaje que servirá para probar las hipótesis de investigación, se pide a los estudiantes que construyan la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. Pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos.

La elección de esta situación se basa en una caracterización del problema, realizada a partir de los requerimientos de la AIM para cumplir con los objetivos de sus programas (AIM-NMS-IPN, 2002). En el mismo sentido, esta caracterización sirve para identificar si un problema o actividad de aprendizaje cumple con algunas características que garanticen que los estudiantes logren aprendizajes significativos (Suárez, 2000). En esta caracterización se incluyen contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales como parte de las referencias curriculares contenidas en los programas del NMS. Como parte de la descripción de la situación de aprendizaje se incluyen las estrategias que se siguieron en la práctica de la situación de aprendizaje con los estudiantes, y la solución de referencia.

La solución de referencia contempla dos tipos de comportamientos gráficos de la posición: a través de rectas y a través de rectas y parábolas. Con la finalidad de hacer un análisis analítico de estos comportamientos gráficos, se determinan las ecuaciones correspondientes a la posición y a la velocidad, obteniendo las *funciones a trozos* que caracterizan todo el recorrido. Se incluye un ejemplo del tipo de gráficas que se obtendrán con la simulación realizada con la tecnología. En este capítulo sólo se incluye el caso donde el trazo de función constante se encuentra en el segundo intervalo de la función a trozos, pero se incluyen los otros casos en el Anexo 2.

Capítulo IV. Aspectos metodológicos

En este capítulo se describe la metodología que se usó en el análisis de las producciones de los estudiantes al poner en práctica la situación de aprendizaje con los estudiantes en un taller extracurricular de modelación.

Para la toma de datos, a partir de las preguntas de investigación formuladas en este trabajo, se optó por el diseño de una matriz que permitió incorporar la información recopilada, tomando en cuenta dos secuencias, la primera se refiere a lo que los estudiantes realizan y discuten antes de realizar la simulación con la tecnología y la segunda secuencia en la que los estudiantes realizan la simulación y discuten la situación a partir de las gráficas que surgen en la calculadora.

Los datos se recopilaron a través de los reportes hechos por los estudiantes, los registros de los monitores, las transcripciones de audio de tres equipos, la trascripción y digitalización de un video con las discusiones generales y las pantallas de la calculadora.

Capítulo V. Conclusiones

Tomando como punto de partida el análisis de la práctica de la situación de aprendizaje con los estudiantes se generan las conclusiones de cada una de las preguntas formuladas en la investigación, tomando en cuenta las dos secuencias mencionadas. Esta confrontación es la que permite esbozar una conclusión general sobre la hipótesis "*La tecnología genera un nuevo uso de las gráficas*" especificando sus características.

Capítulo I

Antecedentes

Capítulo I. Antecedentes

El conocimiento sobre la incorporación de saberes matemáticos al sistema didáctico, y favorecer con ello que la enseñanza produzca efectivamente el aprendizaje en los estudiantes, requiere la formación de profesores e investigadores ampliamente especializados. Este interés en la especialización en Matemática Educativa para contribuir a mejorar el estudio de las matemáticas en el NMS del IPN, motivó el inició en los estudios de Maestría en Matemática Educativa, en treinta años como profesora de matemáticas del Nivel Medio Superior ha sido una preocupación constante el encontrar los medios necesarios para lograr que los estudiantes logren aprendizajes, y lo que es más importante que puedan hacer un buen uso de dichos aprendizajes en su vida cotidiana. Por otra parte las exigencias del sector educativo actual requieren de profesionales que cuenten con elementos para conocer las condiciones de la enseñanza escolar y esclarecer las condiciones del aprendizaje, con la finalidad de usar dichos conocimientos en la mejora de procesos educativos. Estos son dos de los objetivos del programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del CICATA-IPN (PROME, 2000) y que han sido tomados en cuenta en el desarrollo de la investigación sobre las gráficas y la modelación en el estudio del movimiento con tecnología que se presenta en este documento. La incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas considera a ésta como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas, en la que los estudiantes pueden transitar entre las diferentes representaciones como son la simulación (que se refiere a la situación), la verbal, la tabular, la gráfica, y la algebraica, además permite que el estudiante, desplazando el esfuerzo y la atención hacia los significados matemáticos y generando al mismo tiempo un nuevo uso de las matemáticas. Esto se observa de manera patente en cuanto a la forma de gráficas antes y después de la incorporación de la tecnología. Es importante resaltar que al integrar la tecnología a la enseñanza de las Matemáticas no sólo no equivale a reducir los cursos de esta materia, sino por el contrario se requiere de una planeación más completa que sirva para el análisis e interpretación de los resultados obtenidos, profundizando en los conceptos y en el desarrollo del razonamiento.

I.1 Programa de Matemática Educativa: Una estrategia para la formación de profesores

A continuación comentamos tres características dentro del trabajo del programa de maestría que contribuyen a resolver los problemas de una institución, en particular en el NMS del IPN.

Al reconocer que los saberes matemáticos se han constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema de enseñanza obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento; de manera que influyen también, por ejemplo, en las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor, y en la apropiación y usos del contenido matemático mismo. Este proceso de incorporación plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados, que nos permitan entender los mecanismos de adaptación del saber matemático a las prácticas tanto de los profesores como de sus estudiantes. El profesor además de contar con una buena base en cuanto a contenido matemático, tendrá que entender los mecanismos que el estudiante sigue para apropiarse de ciertos conocimientos matemáticos, así como también poder identificar el tipo de concepciones que ellos tienen y que impiden de alguna manera el establecimiento de nuevos conceptos en sus estructuras mentales, por lo tanto, el profesor tendrá que diseñar situaciones didácticas o actividades de aprendizaje (como es el caso de este trabajo) con la finalidad de promover realmente aprendizaje entre sus estudiantes, y para lograr dicho objetivo es necesario conocer las condiciones de la enseñanza en las aulas escolares y esclarecer las condiciones del aprendizaje en situación escolar con la finalidad de usar dicho conocimiento en la mejora de los procesos educativos.

El programa de posgrado en Matemática Educativa cuenta con un equipo de profesores ubicados en centros de investigación y universidades del país y del extranjero que contribuyen a la formación de profesores con miras a observar con otros ojos a la matemática escolar; conocer las metodologías a seguir para desarrollar matemática educativa; desarrollo de ingenierías didácticas para la matemática avanzada; desarrollo del pensamiento matemático; procesos de institucionalización del saber matemático escolar;

innovación tecnológica y saberes matemáticos. Esta última es la que tiene que ver con el presente proyecto de investigación, en la que los estudiantes tienen que modelar una situación de movimiento, utilizando dispositivos transductores y calculadora graficadora. En términos educativos la modelación y la simulación han resultado ser buenas estrategias para analizar el comportamiento de un sistema, incluso han sido una rica fuente de significados matemáticos. Para ello se ha utilizado una actividad de aprendizaje que tiene como propósito mostrar cómo la interacción entre el uso de representaciones pueden propiciar que el estudiante avance en el uso de herramientas matemáticas y en la generación de significados hasta lograr una visión cualitativa de un cierto fenómeno de movimiento.

Los resultados de esta investigación tendrán incidencia en algunos de los proyectos de la AIM-NMS-IPN tales como la elaboración de los paquetes didácticos para los cursos de matemáticas, implementar talleres íntersemestrales para profesores, el diseño de situaciones de aprendizaje con movimiento vertical, participar en grupos académicos que fortalezcan el enriquecimiento de la labor docente, y en un futuro de se pretende diseñar actividades que tengan que ver con factores de reproducibilidad.

I.2 Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional

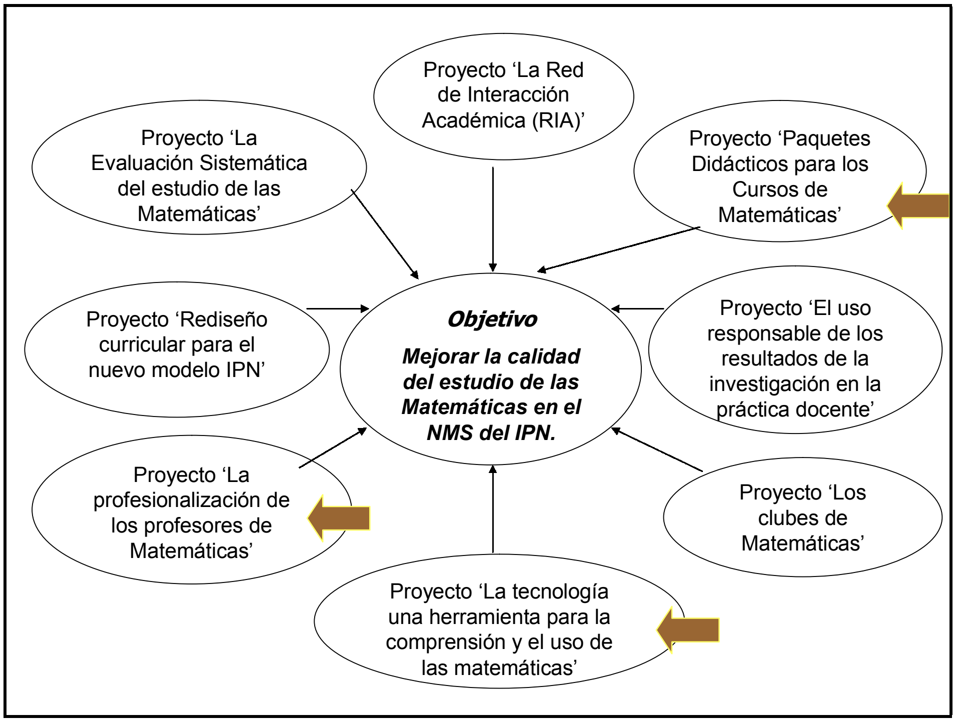
Al IPN le corresponde atender a las necesidades del país para sustentar su desarrollo científico y tecnológico, por lo que deberá convertirse en un espacio de socialización que integre en sus propuestas formativas la ciencia, la tecnología y el conocimiento con una ética de responsabilidad profesional, en donde el currículo, la pedagogía, la organización, el diseño y la aplicación de las políticas institucionales, tengan la capacidad para actuar consistentemente frente a los escenarios de este siglo.

Para lograr estas metas, el IPN debe mantener un esquema dinámico de acción que lo haga un espacio de formación, aprendizaje, actualización e investigación de alta calidad; un espacio y una comunidad en los que la permanencia y el apoyo se hagan posibles en función del mérito intelectual, la competencia demostrada y el potencial de contribución social, a donde la sociedad y sus instituciones puedan dirigirse para obtener respuestas confiables a sus cuestionamientos.

En atención a las demandas que la sociedad le plantea, el IPN tiene como eje de su transformación un nuevo perfil profesional que orienta el diseño y la instrumentación de nuevos modelos educativos que proponen una relación adecuada entre los conocimientos, las habilidades práctico-productivas y las actitudes que dotarán a los estudiantes de capacidad emprendedora, responsabilidad, creatividad y flexibilidad en su desempeño profesional. Estos son los desafíos que, en palabras de la propia institución, el IPN reconoce para el presente y el futuro inmediatos. En consecuencia la AIM del NMS presta atención ya no sólo a la tradicional organización de los aprendizajes de los estudiantes, sino también a la investigación la cual genera nuevos saberes acerca de nuestra realidad educativa, y obtiene productos útiles para la práctica de los profesores en el salón de clases, como serían: el rediseño de la dimensión matemática de los planes y programas del NMS, tanto en la modalidad escolarizada como en la abierta; a la participación de los profesores en programas de actualización permanente, en los que alternan los papeles docente y discente; a la vinculación con los sectores productivos por medio de programas que consideran la participación de profesores y estudiantes en la solución de problemas reales de la industria; al diseño de situaciones que incorporen las nuevas herramientas tecnológicas; a la vinculación con los otros niveles educativos; a la divulgación, que incluye un programa de publicaciones, y al desarrollo de una cultura organizacional.

I.3 Programa de Mejoramiento para el Estudio de las Matemáticas

El Plan de Trabajo de la AIM del NMS (AIM-NMS-IPN, 2000) cuenta con un conjunto de proyectos que se vinculan con dos tipos de programas por un lado, con los programas que constituyen las líneas de trabajo permanentes de la AIM y, por otro, con un Programa de Mejoramiento del Estudio de las Matemáticas (MEM) [Véase Cuadro I.1].
El programa MEM opera en parte la AIM pero que incluye estrategias en otros niveles de la institución y tiene un carácter sistémico con respecto a la institución.



Cuadro I.1. Diagrama con los proyectos que conforman el Programa MEM.

Considera además como protagonista al grupo académico del que formamos parte todos los profesores de Matemáticas del NMS del IPN, que en un plazo razonable debe contar con una base en educación matemática y manejo de herramientas tecnológicas, y equipos de especialistas que lo faculten para desempeñar las funciones que le corresponden en el concierto de los esfuerzos de la institución toda. Y también tiene un énfasis en el mejoramiento de la calidad del aprendizaje (y por tanto de sus resultados) en sus estudiantes.

Una de las tendencias actuales, derivadas de la incorporación de la tecnología y de la investigación sobre los ambientes de aprendizajes, señala que las estrategias para el mejoramiento de la educación se deben ocupar preferentemente del aprendizaje, de lo que logra el estudiante más que de lo que hace el profesor. Aquí se trata de mejorar los espacios de aprendizaje escolarizados destacando la participación del profesor y, además, brindar a los estudiantes la oportunidad de que se responsabilicen de su aprendizaje y logren cierto nivel de autonomía en sus necesidades de aprendizaje. Esto es, garantizar las condiciones y crear ambientes propicios en los que el estudiante tenga el control del proceso o, por lo menos participe activamente, y pueda hacer por sí lo que, a veces, la institución no le brinda.

La formación básica de todos los profesores de Matemáticas del NMS-IPN, en educación matemática y en el manejo de herramientas tecnológicas, se espera lograr en un plazo de entre seis y ocho años, si las condiciones de infraestructura tecnológica y de capacitación para su uso lo permiten, se puede acelerar este proceso, y así atender los problemas del IPN y aprovechar los resultados obtenidos en estudios formales realizados por los profesores politécnicos en aquellas instituciones.

Por todo lo expuesto anteriormente, este trabajo de tesis se inscribe en el proyecto “La tecnología como una herramienta para la comprensión y el uso de las matemáticas”, el cual tiene como una de sus metas la instalación de un laboratorio con computadoras, dispositivos transductores con secuencias didácticas integradoras vinculadas con objetivos curriculares. Esta investigación está vinculada con otros dos proyectos: “Paquetes didácticos para los cursos de Matemáticas” y “Profesionalización de los profesores de las Matemáticas”, ya que, por un lado, la situación de aprendizaje constituirá un módulo que se incluirá en los libros del estudiante y del profesor, y, por otro lado, se diseñará un taller de capacitación para profesores y estudiantes para el manejo del módulo.

El compromiso es proporcionar resultados de investigación que puedan dar pauta para la elaboración de dichas secuencias didácticas, así como también dar evidencias de las concepciones matemáticas obtenidas por los estudiantes al poder trabajar con una situación real de movimiento. Desde el punto de vista epistemológico existen muchos problemas relacionados con las ciencias como son física, la biología, la química; que por su naturaleza requieren de las matemáticas para su explicación en las que intervienen un conjunto de variables las cuales pueden ser expresadas a través de gráficas tales como distancia contra tiempo, velocidad contra tiempo, aceleración contra tiempo, crecimiento de una población de bacterias contra tiempo, entre otros. por tal motivo es necesario que los estudiantes cuenten con elementos suficientes para poder interpretar correctamente dichas gráficas. En este sentido es por lo que se considera la importancia de este trabajo.

Capítulo II

Marco teórico

Capítulo II. Marco teórico

En este proyecto de investigación de tesis se estudian las características del aprendizaje que se logran cuando se incorporan dispositivos de transducción y calculadoras con poder de graficación, para el registro, el análisis y la interpretación de datos diversos en el salón de clases, en las experiencias de aprendizaje con alumnos del NMS-IPN. En este trabajo se ha planteado como hipótesis que *la tecnología genera un nuevo uso de las gráficas*. Este capítulo explica cómo la perspectiva que sirve como marco teórico de referencia para llevar a cabo esta investigación, tanto para definir la problemática abordada como para dar una lectura de las producciones de los estudiantes a la situación de aprendizaje.

II.1 La aproximación socioepistemológica

En la enseñanza de las matemáticas una problemática fundamental es la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, estas matemáticas tienen naturaleza y funciones distintas, sin embargo, la segunda tiene que interpretar y reorganizar a la primera (Cordero 2001), es por ello que en investigación educativa se deben buscar marcos teóricos de referencia que ayuden a la reconstrucción de significados de procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares.

Por tanto para la presente investigación se ha decidido tomar como marco teórico la aproximación socioepistemológica (Cantoral & Farfán, 1998). Un acercamiento desde esta perspectiva debe significar el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana (Cordero, 2001).

La socioespistemología en su conjunto contempla cuatro dimensiones. A continuación las describiremos brevemente en lo que atañe a las gráficas:

La epistemológica es la que tiene que ver directamente con el contenido matemático de enseñanza el cual debe estudiarse desde las perspectivas de su origen y su funcionamiento, es decir, cuáles son las formas que se utilizan en la enseñanza escolar para poder graficar, y cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes al estudiar los aspectos globales y locales de las gráficas.

La didáctica se refiere a todo lo relacionado con el profesor, como sería la caracterización del tema, es decir, en nuestro caso, determinar los procedimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales que se persiguen como objetivos en los programas de estudio del NMS, así como también el análisis de textos que servirán de apoyo, y sobre todo la situación de aprendizaje que servirá de motor para que los estudiantes construyan significados de los contenidos matemáticos relacionados con el uso de las gráficas.

La cognitiva tiene que ver con los procesos de construcciones mentales que realizan los estudiantes, como son las relaciones entre las representaciones y procedimientos que utilizan para poderse apropiar del conocimiento que está en juego, en este sentido, nos referimos a las herramientas que son utilizadas por los estudiantes para dar cuenta de su aprendizaje como serían la de "interpretar" distintas representaciones como son la verbal, la gráfica y por supuesto la simulación; "identificar" en la gráfica los cambios de posición y de velocidad; "reconocer" patrones de comportamientos gráficos con respecto a las gráficas de la posición y de la velocidad, y a "relacionar" las gráficas antes y después de usar tecnología. En este sentido se pretende dar evidencias de cómo se reconstruyen conceptos matemáticos por los estudiantes, relacionados con la primera derivada y la función primitiva que corresponden a la situación de aprendizaje planteada en el capítulo III y que tienen que ver con las gráficas de la velocidad y posición respectivamente.

La social, la graficación es una actividad humana por lo que es en la organización social donde se construyen los significados de la matemática como recursos para aceptar ciertos conocimientos matemáticos, es decir, en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención, y la epistemología debería reconocer la actividad humana como una organización social y una fuente donde se construye conocimiento (Cordero, 2001). Es por ello que en este trabajo se ha seleccionado una actividad de aprendizaje en el contexto del movimiento y el uso de la tecnología, para que los estudiantes construyan significados globales y locales de las gráficas así como también dar significado a la velocidad cuando ésta es positiva o negativa, cuando es lenta, rápida, nula, más rápida, más lenta. El punto de partida será la modelación. La modelación matemática debe ser entendida como la reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas; es una construcción original que utiliza material conocido, por ejemplo, las ideas y concepciones compartidas por los participantes. La parte esencial de la modelación es la formación de esas construcciones, y hacer distinción entre ellas para seleccionar una es una clase de actividades y acciones hechas con herramientas. Por ello, el humano se somete a usarlas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y así reconstruir significados. (Cordero, 2001).

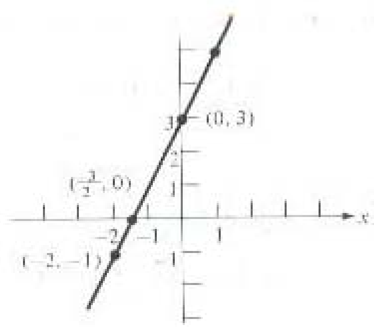
II.2 Una problemática para el uso de las gráficas

A partir de una revisión de libros de texto (Phillips, 1999, por ejemplo) y trabajos de investigación en Matemática Educativa (Cordero y Solís, 2001; Cantoral y Montiel, 2001; Suárez *et al*, 2003) se han identificado tres usos de las gráficas que a continuación se explican.

Uno de ellos es la construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, es decir, localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica, este procedimiento se encuentra frecuentemente en libros de texto del Nivel Medio y Nivel Medio Superior, por ejemplo el desarrollado en uno de los libros de texto del curso de Álgebra del NMS-IPN. [Véase Cuadro II.1]

$y = 2x + 3$

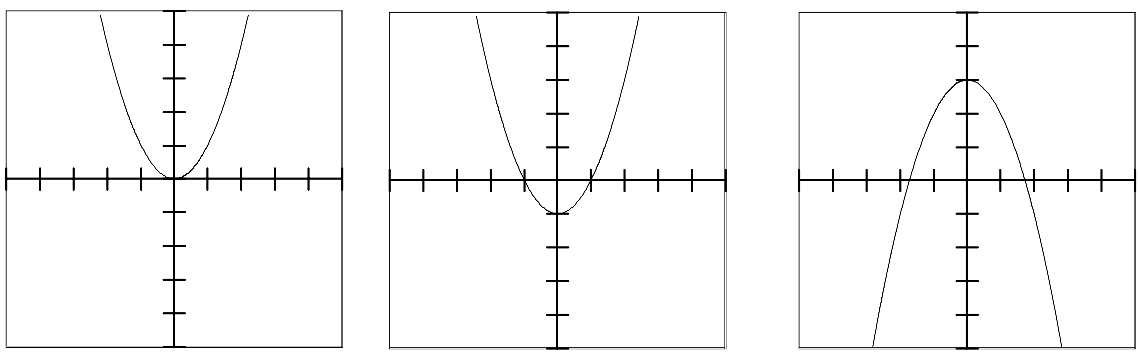
x	0	1	2	-1	-2	$-3/2$
y	3	5	7	1	-1	0



Cuadro II.1 Libro de texto para el curso de Álgebra de NMS: Phillip (1999).

Un segundo uso es cuando se grafica por *operaciones gráficas*, ejemplo de este uso se observa en las los diseños de situación de Cordero (2001) en los que se pide explorara a los estudiantes lo que sucede cuando a la gráfica de una parábola se le suma una recta con todas sus variantes: una constante, una recta que pase por el origen y tenga una pendiente positiva o negativa, una recta que no pase por el origen y tenga una pendiente positiva o negativa, y también cuando el coeficiente del término cuadrático toma un valor mayor o menor a la unidad. Este tipo de trabajo de operaciones con gráficas lo podemos encontrar en SEP (1994) p. 191, Quiroz (1989) y, particularmente, en Cordero (2001) p. 39 [Véase los cuadros II.2, II.3, II.4 y II.5].

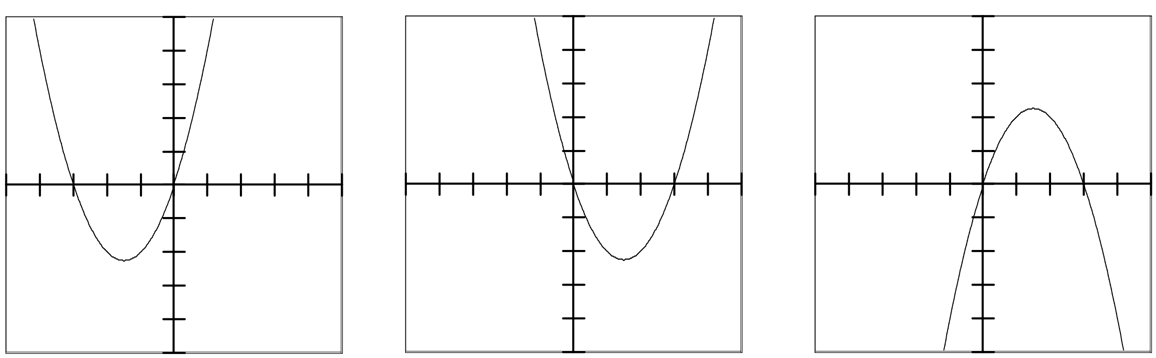
Cuando se le suma una constante a $y = x^2$



$y = x^2$ $\qquad$ $y = x^2 - 1$ $\qquad$ $y = -x^2 + 3$

Cuadro II.2 Gráficas de la suma de la parábola y una constante

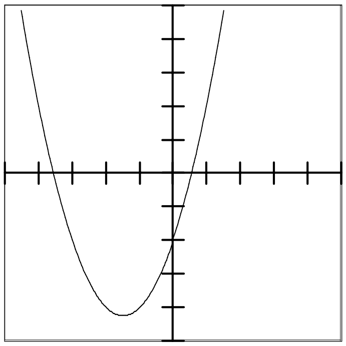
Cuando se le suma una recta a $y = x^2$ que pase por el origen y con pendiente positiva o negativa



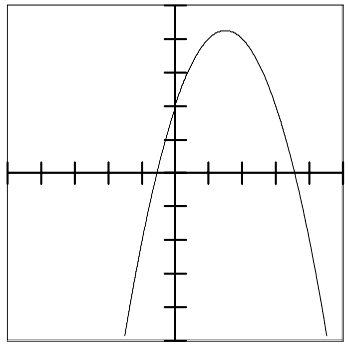
$y = x^2 + 3x$ $\qquad$ $y = x^2 - 3x$ $\qquad$ $y = -x^2 + 3x$

Cuadro II.3 Gráficas de la suma de la parábola y una recta que pasa por el origen

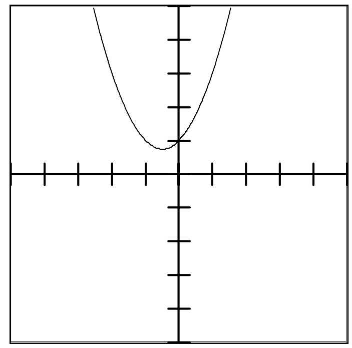
Cuando se le suma una recta a $y = x^2$ que no pase por el origen y tenga pendiente positiva o negativa.



$y = x^2 + 3x - 2$



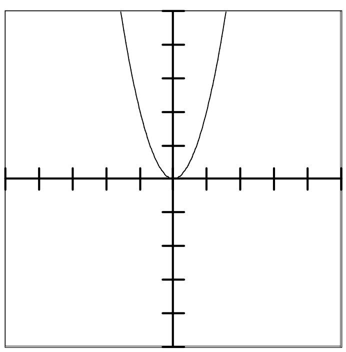
$y = -x^2 + 3x + 2$



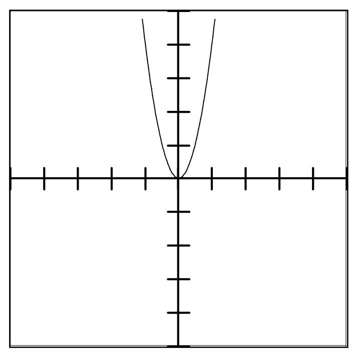
$y = x^2 + x + 1$

Cuadro II.4 Gráficas de la suma de la parábola y una recta

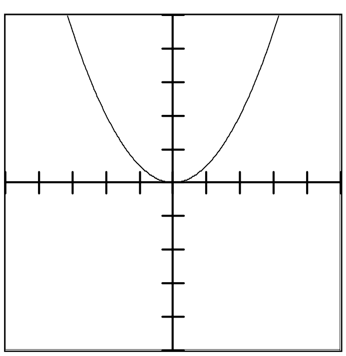
Cuando el coeficiente de $y = x^2$ sea mayor o menor a la unidad.



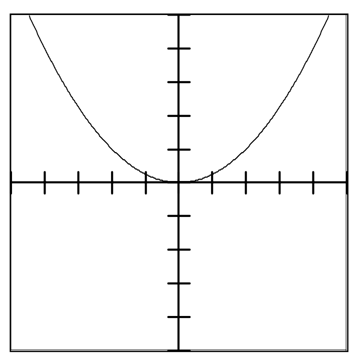
$y = 2x^2$



$y = 4x^2$



$y = 0.5x^2$



$y = 0.25x^2$

Cuadro II.5 Gráficas del producto de la parábola y una constante

Un tercer uso se refiere a la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología, éste es el enfoque especial de este trabajo, al hablar de representaciones de una función como la expresión de una dependencia entre variables, Azcárate (1990) p. 62 hace una descripción de dichas representaciones que a continuación se menciona. [Véase cuadro II.6]

Modelo físico o simulación	Descripción verbal	Tabla de valores	Gráfica	Fórmula o ecuación

Cuadro II.6 Representaciones según Azcárate (1990)

Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables. Dejando al margen el modelo físico o su simulación, que proporciona el lenguaje más cercano al fenómeno estudiado, el menos simbólico, y que aparece al realizar un experimento o al simularlo con tecnología, debemos considerar en primer lugar, la descripción verbal, que utiliza el lenguaje común para darnos una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional y a la cual nos referimos cuando queremos interpretar los restantes lenguajes, de un nivel simbólico mayor.

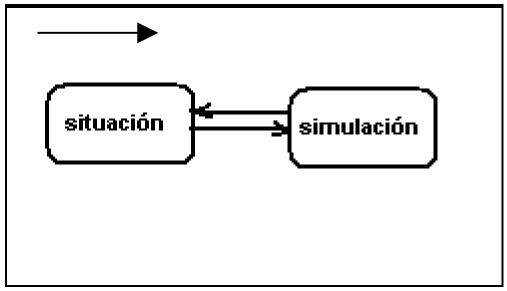
Siguiendo un orden creciente de abstracción, la tabla de valores nos da una visión cuantitativa, fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia, es decir, de la identificación de pares de valores, pero en la mayoría de los casos parcial e insuficiente puesto que de ella difícilmente podemos extraer las características globales de la función.

Los dos lenguajes de mayor abstracción y por tanto más difíciles de interpretar, son la gráfica y la fórmula o expresión algebraica, permiten obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa (aunque aproximada en el caso de la gráfica), proporcionando mayor y mejor información que los lenguajes anteriores, al mismo tiempo que posibilitan la caracterización de modelos. La diferencia entre ambos lenguajes es evidente: la gráfica permite “ver” las características globales de la función (variaciones y períodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, periodicidad, etc), también determinables a partir de la ecuación (cuando es posible establecerla a partir de métodos elementales), pero mucho más difíciles de interpretar, ya que su determinación a través del lenguaje algebraico presupone, por un lado el conocimiento del significado de los símbolos utilizados y por otro la interpretación a través de ellos de conceptos abstractos, que a través de la gráfica es posible intuir más fácilmente. Por otro lado, la ecuación permite determinar valores de ambas variables con precisión, siempre que se conozca el algoritmo de resolución de la ecuación correspondiente, mientras que a través de la gráfica el proceso es mucho más directo aunque nos da, tan sólo, valores aproximados.

Con base en lo descrito por Azcárate (1990) sobre las diferentes representaciones y sobre todo poniendo énfasis en la hipótesis, nos interesa en particular el tercer uso de la gráfica, por tal motivo es que surgen las siguientes preguntas de investigación con respecto a las concepciones de los conocimientos matemáticos que logran alcanzar los estudiantes: ¿En que sentido logran tener una visión global de la gráfica?, ¿cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?, ¿qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente? y ¿cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

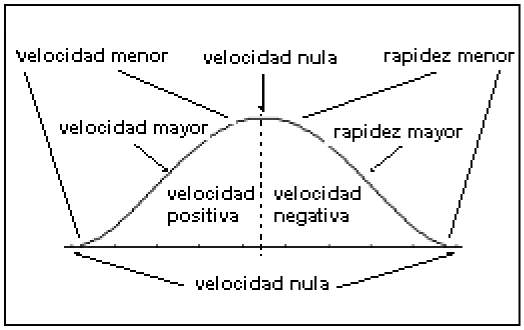
Para responder a estas preguntas, se optó por utilizar la situación de aprendizaje que se encuentra en el Capítulo III de este trabajo, y que fue tomada de los Paquetes Didácticos diseñados por la Academia Institucional de Matemáticas del NMS-IPN

Con ella se pretende lograr que los estudiantes transiten entre los diferentes registros de representación como son: la descripción verbal, el modelo físico del movimiento o simulación y la gráfica. El uso de simulaciones debe servir de guía al estudiante para avanzar en el uso de herramientas y la generación de significados hasta lograr una visión cualitativa de la situación planteada sobre el movimiento. Durante la secuencia de la actividad los estudiantes deberán transitar por un ciclo de exploraciones que comienza con la situación, sigue con la realización de simulación y regresa a la situación $(\textit{situación} - \textit{simulación} - \textit{situación})$ la cual llevarán a cabo los estudiantes tantas veces como sea necesario. [Véase Cuadro II.7]



Cuadro II.7 Interacción entre dos representaciones

Con la secuencia propuesta en el Capítulo III ocurre de forma natural una interacción entre las gráficas de los estudiantes y los significados asociados con las gráficas que resultan de simular con el uso de la tecnología la situación del movimiento establecida. Una de las variables que se determinan en la situación es la instrucción de construir por una gráfica que represente la situación antes de la simulación con tecnología. Una vez que los estudiantes hayan logrado hacer la grafica del movimiento sin el uso de tecnología, pasarán a realizar la simulación del fenómeno con el sensor y la graficadora. El sensor toma datos de tiempo y distancia que transfiere a la calculadora, ésta a través de sus programas los guarda en listas l1, l2, l3 y l4 que representan respectivamente el tiempo, la distancia, la velocidad y la aceleración, de esta manera se obtienen la gráfica de la distancia contra tiempo, la velocidad contra tiempo y la aceleración contra tiempo. Los ciclos de exploraciones, discusiones y reflexiones de $(situación - simulación - situación)$ permiten incorporar los significados generados por los estudiantes para la construcción de una apreciación cualitativa y cuantitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo. [Véase Cuadro II.8] En este sentido la actividad de aprendizaje planteada permite la construcción de conocimiento a partir de la simulación y modelación.



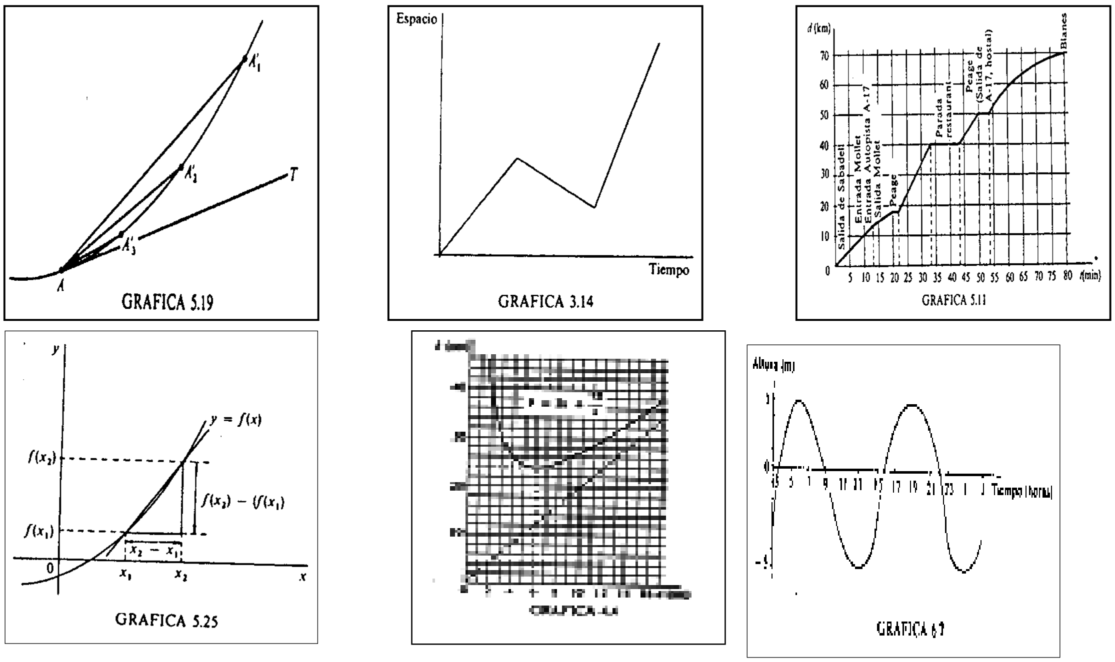
Cuadro II.8 Descripción cualitativa de la velocidad

La modelación se entiende como una construcción de conocimiento matemático que se realiza en un ambiente social y que Arrieta (2003) describe como un proceso de matematización en el aula como actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en un salón de clases, usando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza (comprendidos los fenómenos sociales, económicos, etc.) confrontando y argumentando diferentes versiones.

Mochón (2000) afirma que los modelos matemáticos ayudan a entender mejor los fenómenos que describen, desarrollando nuestra intuición sobre su funcionamiento. Además, al mismo tiempo, nos sirven para predecir lo que pasaría en la situación real, tanto en condiciones normales como al modificar algún factor que intervenga en el modelo.

En el ámbito escolar se privilegia el uso de modelos matemáticos como es el uso de ecuaciones, dejando de lado la tabulación y las gráficas, es por ello que el interés de esta investigación se refleja en el uso de las gráficas para dar significado a una situación real y con ello analizar los significados que se pueden asociar a los conceptos matemáticos involucrados.

Dentro de la línea de investigación "La reconstrucción de una base de significados del cálculo " desarrollada por Cordero (2001, 1998) se encuentran varios proyectos, en uno de ellos, reportado por Flores (2003), se realiza un análisis acerca de los tipos de gráficas utilizadas en diferentes contextos encontradas en Azcárate (1990). Este análisis aporta una clasificación inicial de las gráficas: pueden no tener ejes coordenados, pueden ser utilizadas para dar la explicación de un concepto matemático, existen también gráficas que sólo utilizan el primer cuadrante o los cuatro cuadrantes, gráficas que representan una función analítica o una situación real y gráficas que pueden estar o no inscritas en una cuadrícula. [Véase Cuadro II.9]



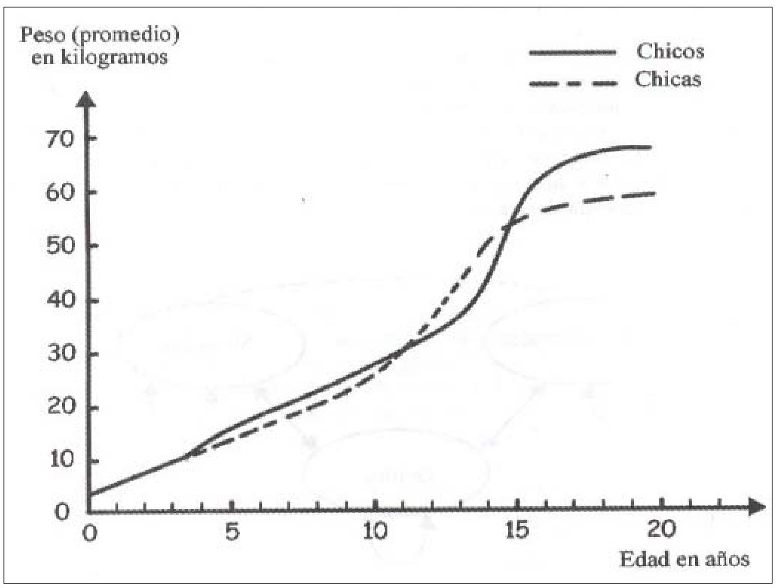
Cuadro II.9 Variedad de gráfica, variedad de usos de gráficas

II.3 Estado del arte sobre aspectos de graficación

En la literatura de matemática educativa se han podido identificar algunas de las concepciones que tienen los estudiantes de la tarea de graficación, las cuales tiene que ver con la interpretación y construcción de las gráficas, tal como lo señala Leinhardt (1990). A continuación presentamos una selección de aquellos aspectos que se relacionan con la problemática, las preguntas de investigación y la hipótesis de nuestro trabajo de investigación.

Al interpretar gráficas, los estudiantes a menudo restringen su enfoque a un simple punto aun cuando un margen de puntos (un intervalo) es más apropiado. Sobreenfatizar las interpretaciones punto a punto puede dar como resultado la concepción de una gráfica como una colección de puntos aislados más que como un objeto o una entidad conceptual [Schoenfeld *et al*., en prensa; Stein, Baxter y Leinhardt, en prensa; Yerushalmy, 1988, citados en Leinhardt (1990)].

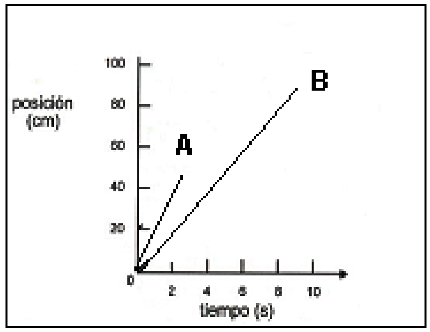
Preece (1983) [citado en Leinhardt (1990)] encontró que los estudiantes a menudo respondían con un solo punto cuando se les formulaban las preguntas "¿cuándo las chicas son más pesadas que los muchachos?" y "¿cuándo las chicas están creciendo más aprisa?". [Véase Cuadro II.10]



Cuadro II.10 Descripción de intervalos

De acuerdo con Preece (1983b) [citado en Leinhardt (1990)], los estudiantes encontraron que la palabra *cuándo* era bastante imprecisa y tomaron la opción más fácil y dieron un solo punto de respuesta.

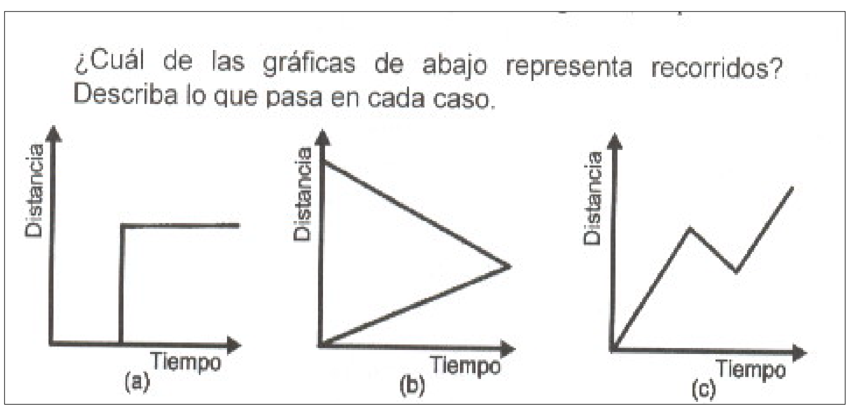
Otra concepción encontrada es que los estudiantes confunden la pendiente de una recta con la altura de la recta, esta confusión se ve reflejada tanto en la interpretación como en la graficación. [Véase Cuadro II.11]



Cuadro II.11 ¿Mayor altura?, ¿mayor pendiente?

Hasta el momento no se ha podido identificar la causa de esta problemática sólo se puede decir que los estudiantes confunden dos características de la recta, su altura y su pendiente.

La concepción que se presenta con mayor frecuencia entre los estudiantes respecto a la interpretación y construcción de gráficas es la interpretación icónica, es decir, los estudiantes a veces interpretan una gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación [Janvier, 1978; Kerslake, 1977, 1981; Mcdermott *et al.*, 1987; Preece, 1983b; Schultz, Clement y Mokros, 1986; Stein y Leinhardt, 1989; citados en Leinhardt (1990)] [Véase Cuadro II.12].



Cuadro II.12 Tres gráficas de recorridos

A los estudiantes se les pidió que eligieran las gráficas que representan desplazamiento, un buen número de estudiantes respondió que las tres gráficas indicaban desplazamiento, siendo que en la primera se ocupan varias posiciones en el mismo instante, y la segunda se ocupan dos posiciones en el mismo instante.

II.4 Un marco para describir un nuevo uso de las gráficas

Tomando en cuenta la revisión anterior podemos caracterizar el uso de las gráficas a partir de las actividades de modelación con las características del Comportamiento Tendencial de la Funciones (Cordero, 1998), de acuerdo con el siguiente análisis:

Construcción de representaciones	**Gráficas utilizando la relación de correspondencia**	**Operaciones gráficas**	**Gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico con tecnología**
Significados y sistemas simbólicos	Establecer ejes de coordenadas Determinar puntos en el eje cartesiano	Transformación de funciones Comportamiento de una función Función derivada y primitiva	Comportamiento de las gráficas de la posición y de la velocidad en relación con la simulación (función primitiva y su derivada)
Procedimientos	Operaciones fundamentales	Variación de la variable y de sus coeficientes	Determinar la escala para el tiempo y la posición Identificar el tipo de movimiento Relacionar las gráficas con la situación
Procesos y objetos	Variables Función	Forma de la gráfica	Forma de la gráfica para identificar patrones de comportamiento relacionando las gráficas de la posición y de la velocidad
Argumentos	Relaciones de la función con la gráfica a partir de su expresión algebraica	Comportamiento tendencial de la función	A mayor velocidad mayor valor absoluto de la pendiente en la gráfica de posición A mayor pendiente en la grafica de posición, mayor distancia con respecto al eje en la gráfica de velocidad.

Cuadro II.13 Marco para describir un nuevo uso de gráficas

Este cuadro [Ver Cuadro II.13] explica cómo un conjunto de categorías se convierte en un programa que organiza contenidos, conceptos e ideas acerca de los tres usos de las gráficas ya mencionados cuyo funcionamiento consiste en establecer el marco de referencia del contenido matemático (marco epistemológico), donde aparecen los planos de representación y procedimientos del estudiante (dimensión cognitiva), y después, utilizando ambos, el marco de referencia y las representaciones y procedimientos, se establecen los argumentos o explicaciones de lo que en el marco de referencia se reorganiza (dimensión didáctica).

En particular en nuestro proyecto, la construcción de representaciones toma como foco de atención a las gráficas generadas por los estudiantes antes y después de usar tecnología, en las que se estudian aspectos globales y locales de las mismas.

Los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas, estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, cuándo la velocidad es positiva o negativa. Con respecto al análisis cuantitativo (que no se tomó en cuenta en esta investigación) las expresiones analíticas de la posición (función primitiva) y la velocidad, se pueden describir mediante funciones a trozos. O bien, una vez encontrada una de las funciones obtener la segunda por medio de las operaciones de derivación o integración.

La base de los procedimientos se apoya en las actividades de modelación y simulación que los estudiantes realizan, en este sentido, nos referimos a las gráficas que se construyen antes y después de usar tecnología.

La base de los procesos y objetos se encuentra en las formas de las gráficas que se obtienen con el sensor y la calculadora graficadora.

En cuanto a los argumentos son las explicaciones que los estudiantes dan con respecto a la actividad de aprendizaje desde los puntos de vista individual y grupal.

Capítulo III

Situación de Aprendizaje

Capítulo III. Situación de Aprendizaje

La situación de aprendizaje que servirá para probar las hipótesis de investigación consiste en hacer la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. Pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos.

Epifanía

"Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía".

La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos.

1) Construye una gráfica que describa los cambios de posición de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.
2) Todos hemos escuchado o hecho descripciones de objetos en movimiento, que incluyan expresiones como 'detenido', 'rápido', 'lento', 'más rápido', 'disminuyó su velocidad', 'más alejado', 'aceleró más', y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria.

Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario.

Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea negativa, positiva o nula, y describe las características de la gráfica, al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características correspondientes de la gráfica.

III.1 Caracterización del problema

Se considera que este problema sirve como una buena situación de aprendizaje ya que cumple en gran medida con las expectativas planteadas en lo que representa una caracterización de un buen problema (Suárez, 2000). Dicha caracterización es parte de los trabajos realizados por la AIM (AIM-NMS-IPN, 2002) puesto que sirve para identificar si un problema o actividad de aprendizaje tiene un potencial para que los estudiantes logren aprendizajes significativos.

Por lo que respecta al problema planteado podemos afirmar que:

- Es una experiencia de aprendizaje de resolución de problemas.
- La modalidad del trabajo se realiza en equipos de tres a cuatro estudiantes.
- El lugar de realización es en el salón de clases
- Las herramientas utilizadas durante los trabajos son: Calculadora con poder de graficación, sensor de movimiento CBR, proyector de acetatos, pantalla líquida, cámara de video y fotográfica.
- El tiempo estimado para su realización es de tres horas.
- Son considerados como productos de la actividad los reportes de los estudiantes y registros audiovisuales de su trabajo.

El problema cumple con algunas de las referencias curriculares, en relación a:

Contenidos conceptuales son los que corresponden a los temas que se ubican en los programas del Nivel Medio Superior del IPN, y que abarcan desde el primero hasta el sexto semestre, tales como: Funciones lineales y cuadráticas; Interpretación y relación de variables tales como el tiempo, la distancia, y la velocidad, con sus respectivas características, así como la utilización de escalas para la representación de gráficas.

Contenidos procedimentales son los relacionados con el desempeño matemático que esperamos lograr en los estudiantes, como serían: formación de hábitos de organización del propio aprendizaje; desarrollo de hábitos favorables para elevar la calidad del propio trabajo y de la participación del trabajo en equipo; habilidad para resolver situaciones conflictivas; uso eficaz del lenguaje y formas de expresión matemática; desarrollo de estrategias personales para el análisis y resolución de problemas reales; exploración sistemática en la búsqueda de soluciones; formación de hábitos de pensamiento analítico para el manejo de situaciones problemáticas: Tránsito de los diferentes registros representación de una situación; formulación de un plan de trabajo, para abordar situaciones problemáticas; formulación, defensa y entendimiento de aspectos de la vida profesional y cotidiana; Análisis crítico sobre información de carácter numérico; Empleo de formas de pensamiento lógico; Aplicación eficaz de los métodos algorítmicos asociados a los contenidos conceptuales del curso.

C**ontenidos actitudinales** con estos esperamos formar profesionales con una buena formación en matemáticas por lo que nuestras actividades están encaminadas a que los estudiantes sean capaces de tener: actitud propositiva ante el conocimiento; confianza en las matemáticas para resolver problemas, comunicar ideas y razonar; Perseverancia de llegar hasta el final de la tarea matemática; valorar las matemáticas en nuestra cultura, como herramienta y como lenguaje; actitud científica ante la interpretación de datos; perseverancia en la búsqueda de datos; flexibilidad para modificar el punto de vista; camadería honesta con sus compañeros; aprecio por la cultura matemática y por sus aportaciones al mundo personal y profesional; responsabilidad ante los compromisos que exige el curso; superación continua de la calidad del propio trabajo; tolerancia, escucha, participación y respeto en el trabajo en equipo y grupal.

Por otra parte, se considera su relación 'Las Competencias Básicas del Estudiante de Bachillerato que establece la SEP' [Ver anexo 1] y con los estándares de álgebra. [Ver anexo 2].

Las estrategias a seguir para la resolución del problema son: comprensión del problema, que los estudiantes construyan una gráfica que represente los cambios de posición con respecto al tiempo; simulen el movimiento a partir del gráfico propuesto utilizando el sensor y la calculadora graficadora; relacionen las gráficas de la distancia y de la velocidad, con el fin de dar un significado físico y matemático a dichas variables; que utilicen las tablas que se registran en la calculadora, para establecer los diferentes tipos de funciones.

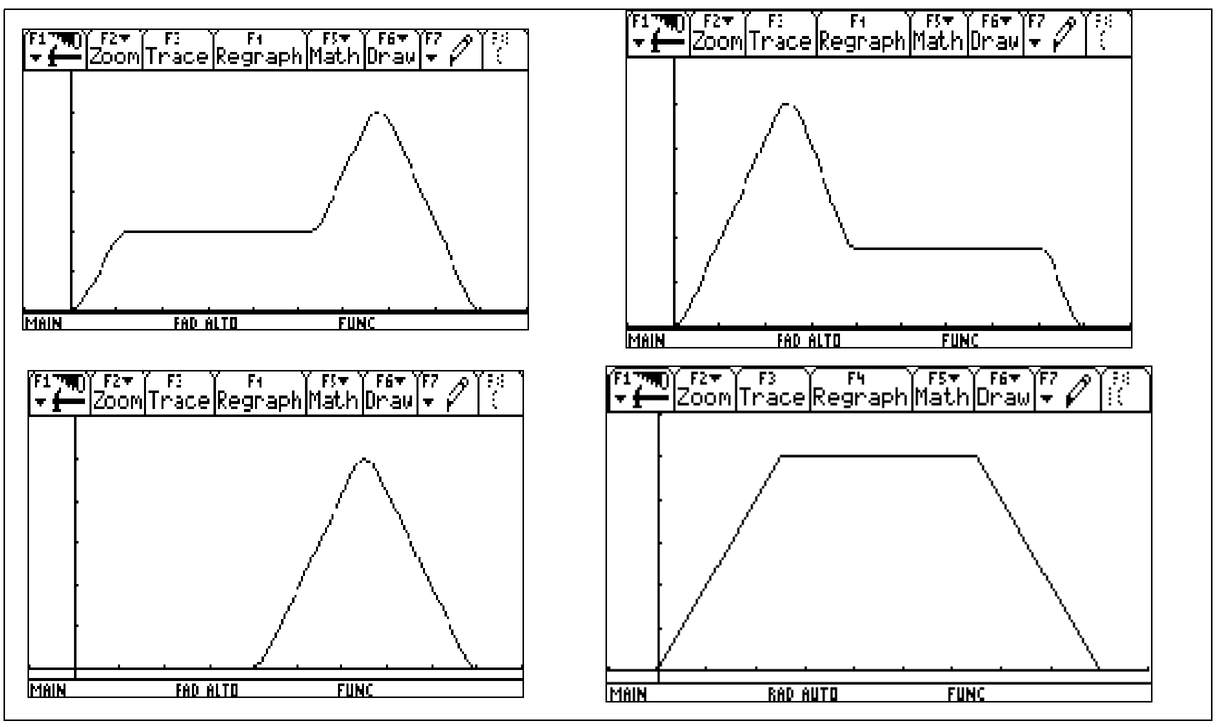
El proceso de evaluación se llevará a cabo con los registros elaborados por los estudiantes, así como sus participaciones en las diferentes actividades, que se pueden observar directamente en el salón de clases, y con el análisis de videos y audio.

Dentro de las observaciones es necesario formular preguntas a los estudiantes, para que les ayuden a identificar patrones y formular conjeturas.

A continuación se presenta la solución de referencia del problema.

III.2 Solución de referencia

El problema planteado cuenta con cuatro intervalos posibles de encuentro de Valentina con Juan [Ver Cuadro III.1]: primero cuando se lo puede encontrar en el camino a la biblioteca, segunda cuando se lo encuentra de regreso al salón de clases, tercera cuando se lo encuentra al salir del salón de clases y cuarta cuando se lo encuentra en la biblioteca.



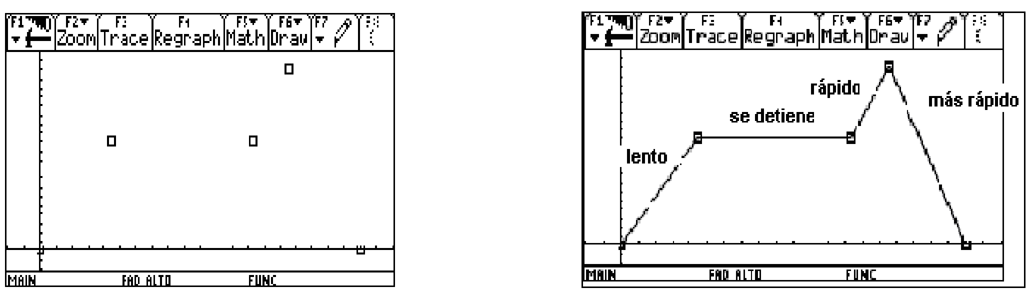
Cuadro III.1 Cuatro posibilidades de encuentro

A continuación se presenta el caso donde se lo encuentra en el camino hacia la biblioteca, para ello consideraremos primero rectas y después rectas y parábolas. Los otros casos se encuentran en el Anexo 2. La historia del problema, en las que se consideran las diferentes posiciones en las que se puede encontrar la persona, así como la identificación de manera en que ella realiza el movimiento (rápido, lento, más rápido, detenido), y el tipo de velocidad que se relaciona con cada cambio de dirección.

Descripción del fenómeno de movimiento a través de rectas

Como ya se mencionó el problema tiene varias posibilidades de solución, ya que el punto de encuentro no está determinado en el planteamiento del problema "Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos…". El encuentro se puede dar en cualquiera de los tiempos entre $t = 0$ y $t = 5$, ya que si se lo encuentra después no puede permanecer con Juan cuatro minutos porque sabemos que regreso en $t = 9$.

Tomando en cuenta que los desplazamientos que realiza Valentina son en línea recta, a continuación haremos cuando Valentina se encuentre a Juan antes de llegar a la biblioteca.



Cuadro III.2 Tres puntos y su unión con líneas rectas

Como podemos observar en el Cuadro III.2 hay cuatro intervalos de la posición de Valentina, el eje de las "x" representa el tiempo que va de $0 \leq t \leq 9$ y el eje "y" la distancia recorrida por Valentina que va de $0 \leq d \leq 500$

a) Cuando Valentina sale del salón de clases y va en dirección a la biblioteca, aquí suponemos que Valentina recorre 300 metros en dos minutos, que es cuando se encuentra con Juan. Por lo que obtenemos la función de la recta que pasa por el origen, y por el punto $(2,300)$ cuya forma es:

$$d = at, \quad (0,0) \ y \ (2,300)$$

Por lo que la función será:

$$d = 150t$$
$$0 \leq t \leq 2$$

En consecuencia la velocidad de Valentina en este trayecto es de $150m/\min$.

b) Después del recorrido anterior, y como ya dijimos Valentina se encuentra con Juan a los 300 metros, y ahí pierde cuatro minutos, por lo que no hay desplazamiento, la función de dicha recta que pasa por los puntos $(2,300) \ y \ (6,300)$ es de la forma:

$$d = a, \quad (2,300) \ y \ (6,300)$$

Por lo que la función es:

$$d = 300$$
$$2 < t \leq 6$$

Como podemos observar la velocidad de Valentina en este lapso de tiempo es nula.

c) Pasados los cuatro minutos que se entretiene Valentina con Juan, vuelve a emprender el recorrido hacia la biblioteca, el cual le lleva un minuto en recorrer 200 metros que le faltaban para llegar a la biblioteca. La forma de la función de la recta de dicho recorrido, es de la forma:

$$d = at + b, \quad (6,300) \ y \ (7,500)$$

La función será:

$$d = 200t - 900$$
$$6 < t \leq 7$$

Aquí la velocidad es de $200m/\min$.

d) Finalmente Valentina tiene que recuperar el tiempo perdido, por lo que tiene que recorrer los 500 metros en dos minutos, para llegar a tiempo a su clase. La forma de la función de este último recorrido es el siguiente:

$$d = -ax + b, \quad (7{,}500)\ y\ (9{,}0)$$

Dicha función es:

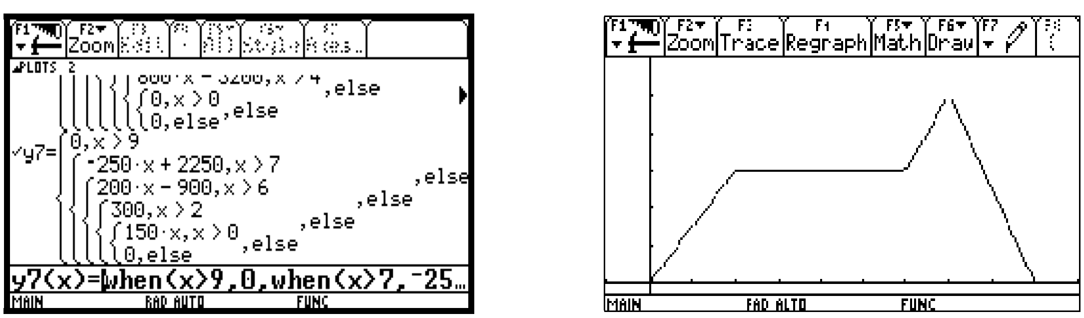
$$\begin{aligned} &d = -250t + 2250 \\ &7 < t \le 9 \end{aligned}$$

En este trayecto la velocidad de Valentina es de $-250m/\min$. Resulta ser negativa porque ella ya va de regreso al salón de clases.

La función resultante de todo su trayecto es una función a trozos que podemos expresar de la siguiente manera:

$$d = \begin{bmatrix} 150t, & (0 \le t \le 2) \\ 300, & (2 < t \le 6) \\ 200t - 900, & (6 < t \le 7) \\ -250t + 2250, & (7 < t \le 9) \end{bmatrix}$$

Usando la calculadora graficadora podemos escribir dicha función, y ver la gráfica correspondiente. [Ver Cuadro III.3]



Cuadro III.3 Pantalla de una función a trozos rectos y su gráfica

En cuanto a la velocidad y como ya se ha determinado durante los dos primeros minutos la velocidad es constante y de $150m/\min$. su función entonces será:

$$v = 150$$
$$0 \le t \le 2$$

Cuando se detiene a platicar con Juan su velocidad es igual a cero, por lo que su función será:

$$v = 0$$
$$2 < t \le 6$$

Pasados los cuatro minutos que estuvo con Juan continúa su camino hacia la biblioteca por lo que aumenta su velocidad, nuevamente se hace constante, y es de $200m/\min$. La función entonces sería:

$$v = 200$$
$$6 < t \le 7$$

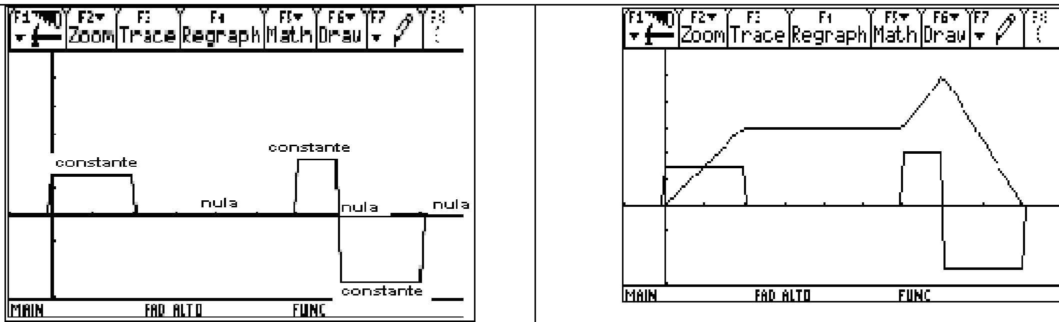
Finalmente regresa al salón de clases por lo que recorre 500 metros en dos minutos y aquí su velocidad es de $-250m/\min$.(es negativa porque va de regreso) la función es la siguiente:

$$v = 250$$
$$7 < t \le 9$$

La función resultante de la velocidad es una función a trozos que podemos escribir de la siguiente manera:

$$v = \begin{bmatrix} 150, & (0 \le t \le 2) \\ 0, & (2 < t \le 6) \\ 200, & (6 < t \le 7) \\ -250, & (7 < t \le 9) \end{bmatrix}$$

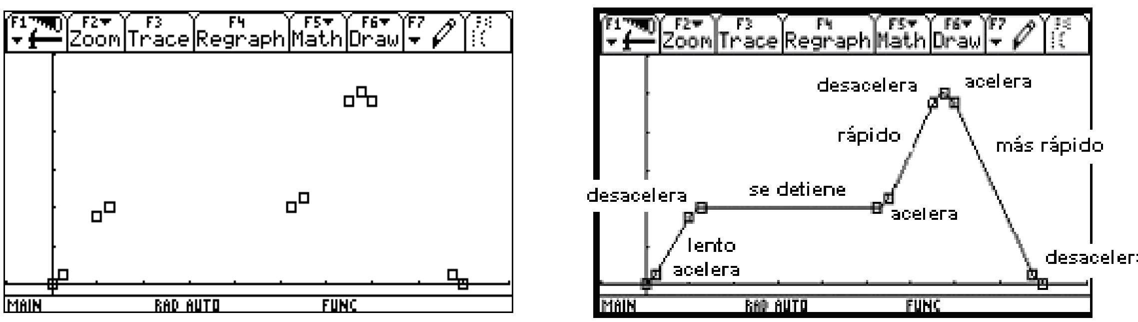
En la Cuadro III.4 (i) se muestra la gráfica de la velocidad, y en (ii) el contraste entre las gráficas de la posición y la de la velocidad.



Cuadro III.4. Gráficas de la velocidad (i) y la posición (ii)

Descripción del fenómeno de movimiento a través de rectas y parábolas

Ahora consideramos rectas y parábola debido a que al cambiar de una posición a otra debe existir una aceleración o una desaceleración, como se muestra en el Cuadro III.5.



Cuadro III.5 Diez puntos y su unión con trazos rectos y curvos

Como podemos ver, existen nueve cambios los cuales se describen a continuación:

1) Cuando Valentina sale del salón de clase y emprende el camino a la biblioteca, aquí consideramos que a ella le lleva 0.25minutos en alcanzar una velocidad constante, y que en ese lapso de tiempo recorre 25 metros, por lo que describe una media parábola cuyo vértice es el origen, y un punto de la parábola es $(0.25,25)$ por lo que su expresión es de la forma:

$$d = at^2; (0,0)\ y\ (0.25,25)$$
$$d = 400t^2 \quad 0 \le t \le 0.25$$

La función de la velocidad es la expresión: $v = 800t$, lo cual se traduce que al final de ese trayecto es de $200m/\min$.

2)En seguida Valentina recorre 150m en línea recta para encontrarse con Juan, para lo cual le lleva 0.75 minutos; dicha recta pasa por los puntos $(0.25,25)\ y\ (1,175)$, y la forma de dicha función es:

$$\begin{aligned}&d = at + b; (0.25,25)\ y\ (1,175)\\&d = 200t - 25\\&0.25 < t \leq 1\end{aligned}$$

La función que expresa la velocidad en este trayecto es: $v = 200m/\min.$ es constante, y positiva porque va de ida.

3) El encuentro con Juan se realiza a los 200m de su recorrido, ella tiene que disminuir su velocidad hasta hacer alto total, por lo que la expresión de su movimiento es la mitad de una parábola cuyo vértice es el punto $(1.25,200)$, y pasa por el punto $P(1,175)$. La forma de dicha parábola es:

$$\begin{aligned}&d = -at^2 + bt + c; V(1.25,200)\ y\ P(1,1.75)\\&d = -400t^2 + 1000t - 425\\&1 < t \leq 1.25\end{aligned}$$

La función de la velocidad es: $v = -800t + 1000$, lo que significa que Valentina tendrá que ir disminuyendo su velocidad de $200m/\min.$ hasta cero que es cuando se detiene a platicar con Juan.

4) Como se sabe Valentina al encontrarse con Juan pierde 4 minutos, por lo que no hay avance en su recorrido, y la función en este lapso de tiempo es una recta que pasa por los puntos $P_1(1.25,200)\ y\ P_2(5.25,200)$. Esta recta es de la forma:

$$\begin{aligned}&d = a; P_1(1.25,200)\ y\ P_2(5.25,200)\\&d = 200\\&1.25 < t \leq 5.25\end{aligned}$$

Y como consecuencia la velocidad en esos 4 minutos es nula cuya función es $v = 0$

5) Valentina vuelve a emprender su recorrido para llegar a la biblioteca, por lo su movimiento es una media parábola que pasa por el vértice $(5.25,200)$ y por el punto $P(5.5,225)$. Dicha parábola toma la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&d = at^2 + bt + c; V(5.25,200)\ y\ P(5.5,225)\\
&d = 400t^2 - 4200t + 11225\\
&5.25 < t \leq 5.5
\end{aligned}
$$

La función de la velocidad en este lapso de tiempo es: $v = 800t - 4200$, por lo que su velocidad, al final del trayecto es de 200m/min.

6) En seguida para llegar al biblioteca recorre 250m en un minuto y en línea recta, y si esta recta pasa por los puntos $P_1(5.5,225)\ y\ P_2(6.5,475)$, entonces la forma de la recta es:

$$
\begin{aligned}
&d = at + b; P_1(5.5,225)\ y\ P_2(6.5,475)\\
&d = 250t - 1150\\
&5.5 < t \leq 6.5
\end{aligned}
$$

Aquí la velocidad es constante y positiva porque va de ida, la función de la velocidad es: $v = 250$, es decir, su velocidad es de $250m/\min$.

7) Cuando Valentina llega a la biblioteca, recoge el cuaderno y sale de la biblioteca para emprender el camino de regreso al salón, para entonces ella tiene que recorre 25 m. Hasta recoger el cuaderno y otros 25m. Para salir de la biblioteca, esto le lleva medio minuto, por lo que, el movimiento que describe es una parábola con vértice en $(6.75,500)$, y que pasa por los puntos $P_1(6.5,475)\ y\ P_2(7,475)$. La función de dicho movimiento es de la forma:

$$
\begin{aligned}
&d = -at^2 + bt + c; V(6.75,500), P_1(6.5,475)\ y\ P_2(7,475)\\
&d = -400t^2 + 5400t - 17725\\
&6.5 < t \leq 7
\end{aligned}
$$

La función correspondiente a la velocidad en este trayecto es: $v = -800t + 5400$, lo cual significa que Valentina disminuye su velocidad de $200m/\min$. hasta cero que es cuando se detiene y toma el cuaderno, para después acelerar de 0 a $-200m/\min$. (es negativa porque va de regreso).

8) Ahora Valentina tendrá que recorrer 450m en línea recta en 1.75 minutos, por lo que la recta que describe este movimiento pasa por los puntos $P_1(7,475)\ y\ P_2(8.75,25)$, y la forma que toma esta función es:

$$\begin{aligned}&d=-at+b;\ P_1(7,475)\ y\ P_2(8.75,25)\\&d=-257.14t+2275\\&7<t\leq 8.75\end{aligned}$$

En este tramo tiene que aumentar aun más su velocidad, por lo que lo recorre a $-257.14m/\min$. La función de la velocidad es $V=-257.14$.

9) Finalmente le faltan 25m para llegar a su destino, en el cual tiene que disminuir su velocidad hasta hacer alto total, aquí de nuevo se concluye que es una media parábola cuyo vértice es el punto $(9,0)$ y que pasa por el punto $P(8.75,25)$, la forma de ésta parábola es:

$$\begin{aligned}&d=at^2+bt+c;\ P(8.75,25)\ y\ V(9,0)\\&d=400t^2-7200t+32400\\&8.75<t\leq 9\end{aligned}$$

La función correspondiente a la velocidad en este trayecto es: $v=800t-7200$, lo que implica que es de $-200m/\min$. tiene que ir disminuyendo la velocidad hasta llegar a cero que es donde se encuentra su salón de clases.

La función resultante de todo el recorrido que realiza Valentina, es una función a trozos cuya expresión es la siguiente:

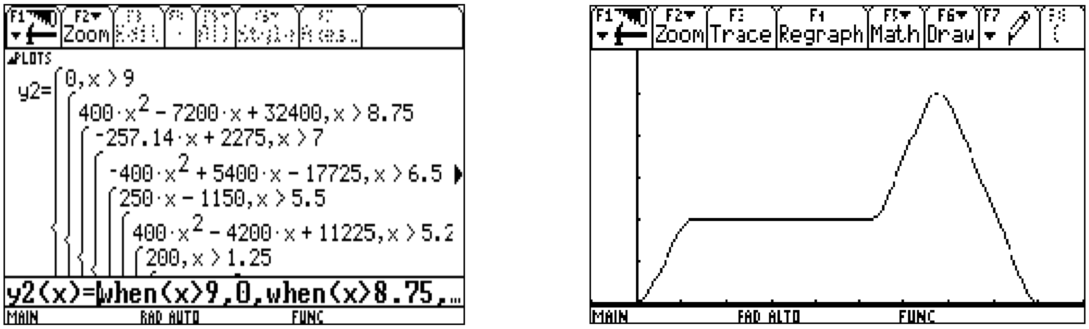
$$d = \begin{bmatrix} 400t^2 & 0 \le t \le 0.25 \\ 200t - 25 & 0.25 < t \le 1 \\ -400t^2 + 1000t - 425 & 1 < t \le 1.25 \\ 200 & 1.25 < t \le 5.25 \\ 400t^2 - 4200t + 11225 & 5.25 < t \le 5.5 \\ 250t - 1150 & 5.5 < t \le 6.5 \\ -400t^2 + 5400t - 17725 & 6.5 < t \le 7 \\ -257.14t + 2275 & 7 < t \le 8.75 \\ 400t^2 - 7200t + 32400 & 8.75 < t \le 9 \end{bmatrix}$$

La función final de la velocidad de Valentina en todo el trayecto, es una función a trozos cuya expresión es la siguiente:

$$v = \begin{bmatrix} 800t & 0 \le t \le 0.25 \\ 200 & 0.25 < t \le 1 \\ -800t + 1000 & 1 < t \le 1.25 \\ 0 & 1.25 < t \le 5.25 \\ 800t - 4200 & 5.25 < t \le 5.5 \\ 250 & 5.5 < t \le 6.5 \\ -800t + 5400 & 6.5 < t \le 7 \\ -257.14 & 7 < t \le 8.75 \\ 800t - 7200 & 8.75 < t \le 9 \end{bmatrix}$$

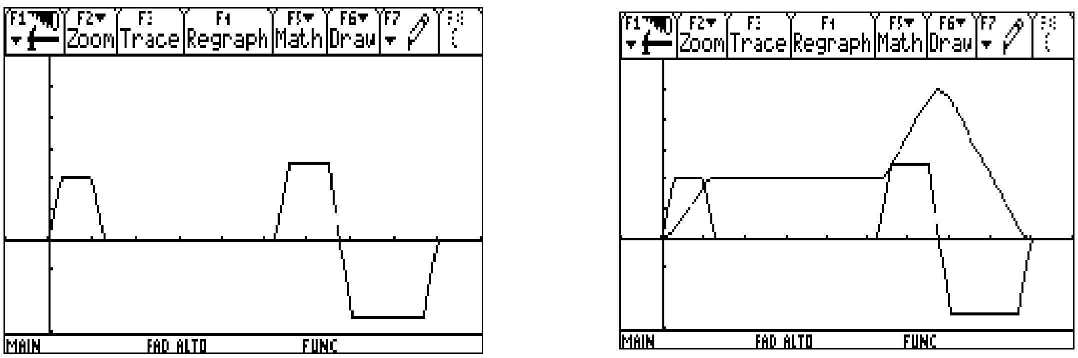
Nota: Esta descripción funcional es una primera aproximación de un modelo que se ajusta más al movimiento que se detecta con el sensor, en la cual se utilizan conocimientos de los cursos de Álgebra y Geometría Analítica. Es posible que todavía se tengan dificultades en los puntos de transición de la parábola a la recta que pueden subsanarse con conocimientos de Cálculo Diferencial.

En el Cuadro III.6 podemos ver cómo se escribe la función de la posición de Valentina en la calculadora graficadora, y en la gráfica de la misma función.



Cuadro III.6 Pantalla de una función a trozos rectos y curvos y su gráfica

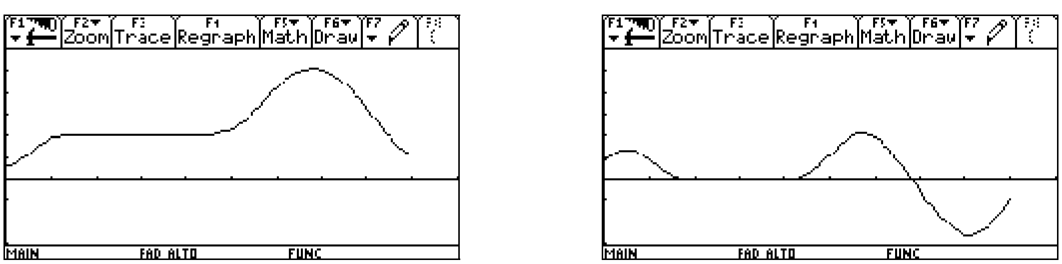
En el Cuadro III.7 se presenta la gráfica de la velocidad, y el contraste entre las gráficas de la posición y la velocidad.



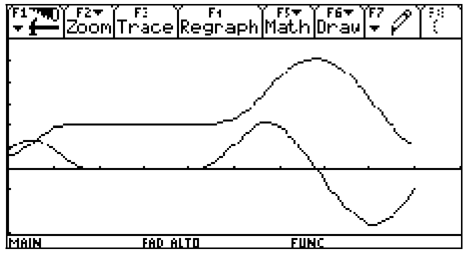
Cuadro III.7. Gráficas de la velocidad (i) y la posición (ii)

Descripción del fenómeno de movimiento a través de las gráficas de la simulación

En seguida se presentan las gráficas de la posición de Valentina [Cuadro III.8 (i)] y de la velocidad [Cuadro III.8 (ii)], que se obtuvieron después de hacer varios ensayos con el sensor y la calculadora graficadora, y en el Cuadro III.9 se presenta el contraste de las dos gráficas.



Cuadro III.8. Gráficas de la posición (i) y la velocidad (ii) con simulación



Cuadro III.9. Gráficas simultáneas

III.3 Historia de la actividad de aprendizaje[1]

Aunque la solución analítica de la situación de aprendizaje no está prevista para que los estudiantes lleguen a ella por la falta de tiempo, pero si se espera que los estudiantes logren identificar aspectos locales y globales de las gráficas tanto de la posición como de la velocidad cuando sólo se usen trazos rectos o bien trazos rectos y parábolas como serían: la forma de las gráficas, cuando la velocidad puede ser positiva, negativa o nula, cuando puede ir lento, rápido, más lento, más rápido o cuando se detiene.

[1] Término basado en el de "Historia del problema" Suárez (2002).

Capítulo IV

Aspectos metodológicos

Capítulo IV. Aspectos metodológicos

IV.1 Taller extracurricular de modelación: el escenario

Para dar respuesta a las preguntas planteadas en esta investigación, se implementó un taller extracurricular los sábados de cuatro sesiones de tres horas cada una en el CECyT "Wilfrido Massieu Pérez"[2]. Las dos primeras estuvieron enfocadas a que los alumnos se familiarizaran con las modalidades de trabajo (trabajo en equipo y discusión grupal); con la tecnología (calculadora graficadora, transductores y sensores); con el tipo y estructura de las actividades del taller (descripciones gráficas de fenómenos de movimiento y de temperatura) y con la toma de registros como videos en audio y video, fotografías, y escritura de un reporte (Suárez 2000).

La tercera sesión se trabajó con el problema de movimiento que ha sido el motor de toda esta investigación y la cuarta sesión con un problema del movimiento vertical de un elevador.

Al taller asistieron veinte estudiantes voluntarios de ocho CECyT de primero, tercero y quinto semestre. También se contó con un grupo de monitores formados por profesores y alumnos que tenían experiencia con las diferentes modalidades de trabajo ya mencionadas.

En la tercera sesión que es la que nos interesa asistieron dieciocho estudiantes, por lo que se formaron seis equipos de tres alumnos con un monitor cada uno, la función del monitor fue la de animar a que los integrantes del equipo expresaran en voz alta lo que estuvieran pensando, estar atentos a todas las observaciones que ellos hicieran, así como también recordarles que tenían que elaborar un reporte de la actividad. Es muy importante resaltar

[2] Uno de los dieciséis CECyT del NMS del IPN. Ha sido nombrado desde julio de 2003 como 'Escuela Modelo en la integración de la tecnología'.

que el monitor no debía entablar conversación con los integrantes del equipo, y sobre todo debían procurar involucrar en la actividad a todos los miembros del equipo respetando los tiempos que se fueran estableciendo para cada una de las secuencias.

IV.2 Dinámica de trabajo

La dinámica que se llevó a cabo en dicha sesión, de acuerdo con las modalidades de trabajo planteadas en Suárez (2000), tomó forma en las siguientes secuencias:

- Secuencia I: Graficación

Los estudiantes leen y aceptan resolver el problema; los alumnos construyen las gráficas que describe la situación del problema en acetatos (sin emplear tecnología).

- Discusión grupal

Cuando la mayoría de los equipos terminaron de hacer sus gráficas, se les pidió a cuatro de los equipos a que pasaran al frente a explicar a sus demás compañeros sus gráficas que realizaron en los acetatos, esta actividad resulta muy provechosa ya que los estudiantes comparten todos los conocimientos de matemáticas que pusieron en juego.

- Secuencia II. La simulación

A continuación se les pide a los estudiantes que diseñen la forma en que se van a mover ante el sensor, por lo que ellos toman en cuenta el tiempo y la distancia y la forma en que se tienen que moverse ante el sensor para lograr la gráfica de su propuesta, por lo que tienen que hacer escalas pues ya saben que el sensor toma datos a partir de medio metro y no más de ocho metros; Después pasan a realizar la simulación y modelación con la tecnología.

- Discusión grupal

Para finalizar se realiza nuevamente una discusión entre todos los equipos cuyo propósito es la de contrastar las gráficas obtenidas antes y después de usar la tecnología.

IV.3 Recopilación de datos: descripción de los registros

Para realizar el análisis del trabajo realizado por los estudiantes se cuenta con los diferentes fuentes de registros que se describen a continuación:

Los reportes hechos por los miembros del equipo, en los cuales se describe el trabajo realizado por ellos, así como también las decisiones que fueron tomando para dar respuesta al problema de la situación planteada, se decidió que al final de la sesión se les daría quince minutos para que ellos pudieran completar su trabajo.

Los registros de los monitores, cada monitor contaba con una guía [Ver anexo 3] acerca de las observaciones que se debían tomar en cuenta sobre el trabajo en equipo de los estudiantes.

Con la ayuda del software que nos permite pasar las pantallas de la calculadora a la computadora se lograron rescatar las pantallas de las gráficas de la distancia, velocidad y la información del zoom que obtuvieron los estudiantes con respecto a la simulación del problema de la situación planteada.

Las transcripciones de audio de tres equipos.

Se cuenta también con la transcripción y digitalización de un video el cual contiene la grabación de un equipo y las exposiciones de las discusiones grupales.

Nota: Se presentaron deficiencias en los equipos de grabación tanto de video como de audio razón por la cual la falta de una buena visión y el poder escuchar con claridad la riqueza del trabajo en equipo y el individual, no permitió identificar a cada estudiante así como también el trabajo desarrollado en la pantalla y el pizarrón.

IV.4 Toma de datos

A partir de las preguntas de investigación formuladas en este trabajo, se optó por el diseño de una matriz [Ver Cuadro IV.1] la cual nos permitió incorporar toda la información recopilada

Pregunta	Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
¿En que sentido logran tener una visión global de la gráfica?		
¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?		
¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente?		
¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?		

Cuadro IV.1 Matriz de información para organizar las evidencias

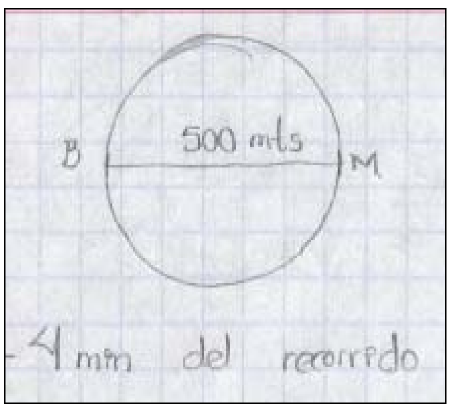
EQUIPO 1 (No se cuenta con audio) Gabriela, Diego, Alberto

Pregunta: ¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?

<table>
<tr><th>Secuencia I y discusión</th><th>Secuencia II y discusión</th></tr>
<tr>
<td>

Monitor: *"Primero empezaron a dibujar un círculo, pero después entendieron que se tenía que hacer una gráfica de distancia contra tiempo".* [Ver Gráfica IV.1.1]

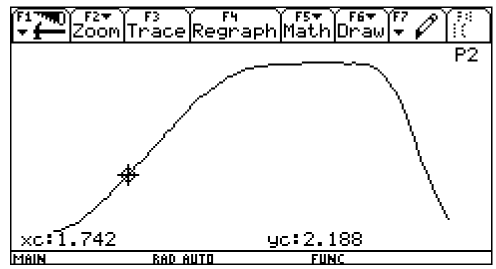
Monitor: *"Al principio tuvieron algunos problemas para identificar la posición".*



Gráfica IV.1.1

</td>
<td>

La gráfica que obtuvieron con el sensor no corresponde a la gráfica que ellos propusieron.



Gráfica IV.1.2

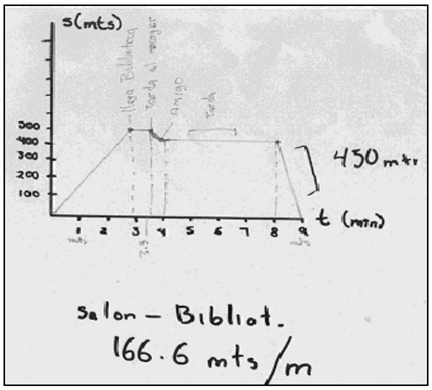
Como podemos observar en la gráfica, que resultó de su experimento nos indica que los cuatro minutos que pierde Valentina son en la biblioteca. [Ver Gráfica IV.1.2]

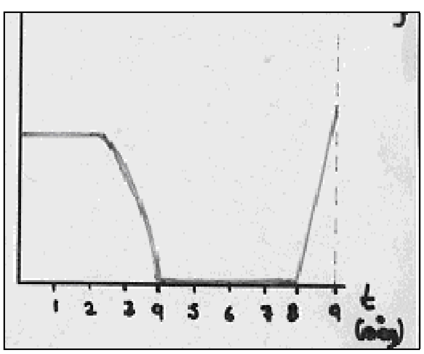
</td>
</tr>
</table>

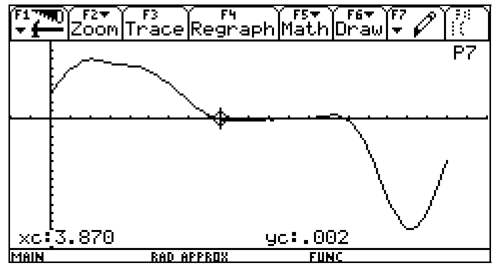
Cuadro IV.2 Realizaciones del equipo 1, pregunta 1

EQUIPO 1… continuación

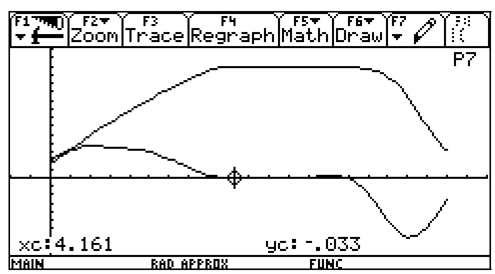
Pregunta: ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?

<table>
<tr><td>Secuencia I y discusión</td><td>Secuencia II y discusión</td></tr>
<tr><td>Utilizaron sólo trazos rectos para graficar, sin embargo en una parte de la gráfica hacen trazo curvo y lo señalan
[Ver Gráfica IV.1.3]


Gráfica IV.1.3
También calculan la velocidad al inicio y final del recorrido.
Hacen la gráfica de la velocidad, poniendo énfasis cuando la velocidad es igual a cero, pero no corresponde a lo propuesto en la gráfica de la posición. [Ver Gráfica IV.1.6]


Gráfica IV.1.6</td><td>La gráfica de la velocidad muestra claramente los cambios: es positiva cuando va de ida, es igual a cero cuando se detiene, y es negativa cuando emprende el regreso al salón de clases. [Ver Gráfica IV.1.4]


Gráfica IV.1.4

Al contrastar las gráficas de la distancia y de la velocidad, podemos observar que acelera primero para alcanzar una velocidad constante, después desacelera para hacer alto total, y ahí deja pasar el tiempo, para después acelerar y lograr una velocidad constante más rápida que en la primera ocasión, para que finalmente desacelere para hacer alto total. [Ver Gráfica IV.1.5]


Gráfica IV.1.5</td></tr>
</table>

Cuadro IV.3 Realizaciones del equipo 1, pregunta 2

EQUIPO 1… continuación

Pregunta: ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente? No existen evidencias

Pregunta: ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

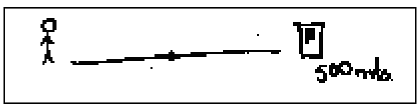
Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Relacionan la representación verbal de la situación con la representación gráfica. Monitor: "Determinaron el tiempo en segundos y la distancia en metros, no tuvieron dificultad para identificar los ejes"	

Cuadro IV.4 Realizaciones del equipo 1, pregunta 3

Equipo 2 Alejandro, Oscar, Miguel

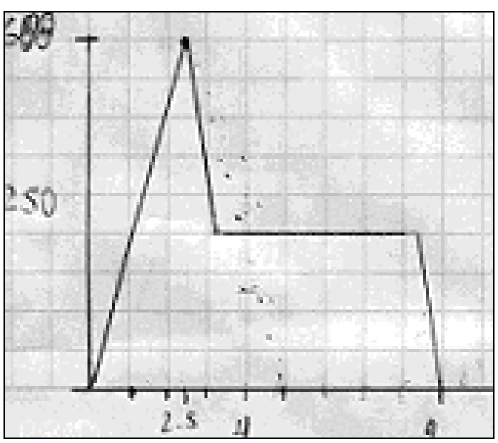
Pregunta: ¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?

<table>
<tr><td>Secuencia I y discusión</td><td>Secuencia II y discusión</td></tr>
<tr><td>
Realizan un dibujo previo representando a Valentina y a la biblioteca, determinando la distancia que hay entre ambas. [Ver Gráfica IV.2.1]

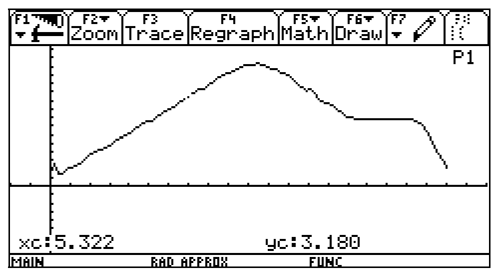


Gráfica IV.2.1

Los estudiantes sólo hacen trazos rectos, por lo que no indican cuando existe un cambio de velocidad. [Ver Gráfica IV.2.3]



Gráfica IV.2.2
</td><td>
Este equipo determina que los cuatro minutos que pierde Valentina son de regreso al salón de clases, por lo que al principio va tranquila, pero al final tiene que ir demasiado rápido para llegar a tiempo a su clase, como podemos ver aquí si aparecen los ejes coordenados. [Ver Gráfica IV.2.2]

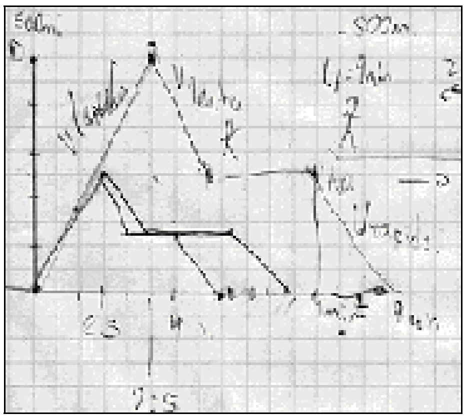
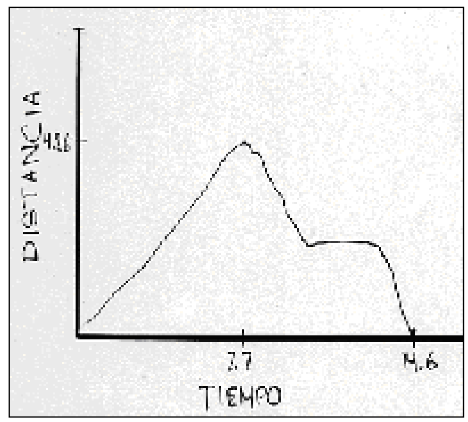


Gráfica IV.2.3
</td></tr>
</table>

Cuadro IV.5 Realizaciones del equipo 2, pregunta 1

EQUIPO 2… continuación

Pregunta: ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Sólo determinan dónde la velocidad es rápida lenta y constante. [Ver Gráfica IV.2.4]  *Gráfica IV.2.4*	Al pedirles a los estudiantes que dibujen una gráfica parecida a la que obtuvieron con el sensor, ya tomaron en cuenta los cambios de velocidad, como se muestra en la  Gráfica. [Ver Gráfica IV.2.5] *Gráfica IV.2.5*

Cuadro IV.6 Realizaciones del equipo 2, pregunta 2

EQUIPO 2… continuación

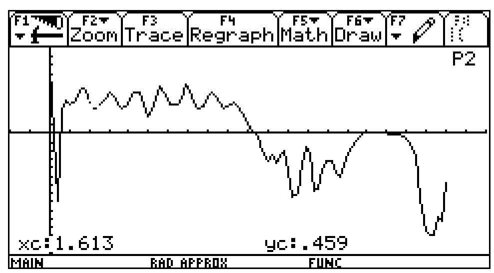
Pregunta: ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Aunque los estudiantes no mencionan el término de pendiente, hacen referencia de alguna manera a ella, cuando discuten acerca de cómo quedaría finalmente la gráfica, por lo que el alumno Oscar dice: *"Finalmente llega a este punto y se queda 4 minutos aquí y se esta tomando en cuenta que esta todavía tranquila y ya llega bien tranquilita y todo, pero llega a este punto donde está Juan entonces ya vio que se le hizo bien tarde y el tiempo que sobró aumentó su velocidad para compensar el tiempo.* *Alejandro:" La final debe ser más inclinada"*.	

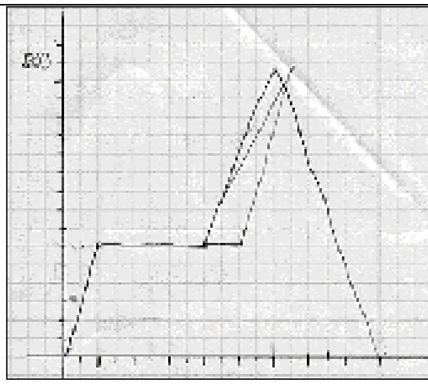
Cuadro IV.7 Realizaciones del equipo 2, pregunta 3

EQUIPO 2… continuación

Pregunta: ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

<table>
<tr><th>Secuencia I y discusión</th><th>Secuencia II y discusión</th></tr>
<tr><td>Relacionan la representación verbal con la gráfica, para indicar cuándo la velocidad es constante, por lo que su discusión gira en torno a dónde ubicar en la gráfica los cuatro minutos que se detuvo. El alumno Alejandro dice: “Digamos que estuvo afuera en su salón, digamos que eso nos indica, entonces la distancia sería cero, entonces avanza el tiempo hasta los cuatro minutos, bueno, o sea, en el mismo punto se queda los cuatro minutos y de ahí avanza hasta acá, los otros cinco minutos que le quedaron fueron 2.5 pero es que esta diferencia como si tú dijeras si llegó a cierta distancia pero no sabemos cuál”.
Miguel: “Va corriendo y va aumentando la velocidad pero más o menos en un tiempo corto aquí el tiempo ya no avanza porque ya se detuvo a los cuatro minutos, sigue corriendo más o menos en 2.5 pero ahora tengo que ver dónde pongo esto”[Ver Gráfica IV.2.7]</td><td>En la gráfica de la velocidad podemos observar que de manera muy rápida alcanza una velocidad constante, para después disminuir su velocidad hasta llegar a cero, que es cuando se detiene a recoger su cuaderno y continuar con su recorrido, hasta hacer de nuevo alto total que cuando su velocidad es nuevamente cero, y después continuar con el regreso. Claramente vemos que cuando la velocidad es positiva va de ida, y negativa cuando va de regreso [Ver Gráfica IV.2.6]


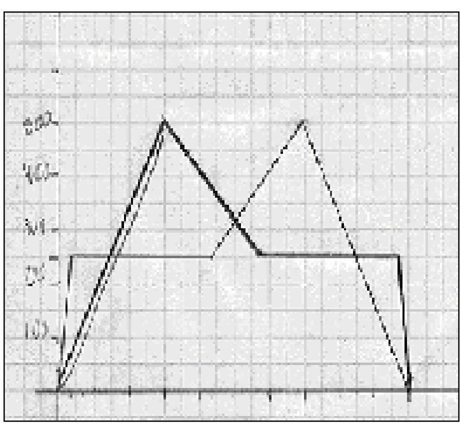
Gráfica IV.2.7
Al hacer el contraste con la gráfica de la posición y de la velocidad, se pueden apreciar los cambios de la velocidad. Cuando la velocidad se hace cero, es cuando recoge su cuaderno y cuando se detiene cuatro minutos, es positiva cuando va de ida y negativa cuando va de regreso. [Ver Gráfica IV.1.8]</td></tr>
</table>



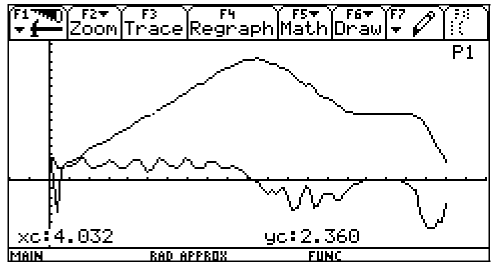
Gráfica IV.2.6

Alejandro: "*Si te acuerdas que la distancia era en metros y suponiendo que a la mitad se encuentra su novio va a partir de aquí que al llegar a la biblioteca no, o sea, nada la detuvo entonces la distancia fueron 2.5 lo que tardó entonces la distancia sería la mitad y aquí serían 2.5 entonces de regreso fue cuando se encontró a su novio y podríamos poner que a la mitad se lo encontró entonces es cuando va a avanzar el tiempo pero va a ser nulo, por que no va avanzar, entonces ya cuando llega a la biblioteca es el tiempo que tardó, ya con respecto a las medidas podremos decir que en 2.5 llegó hasta la biblioteca por ejemplo en 4 minutos*.

Miguel: "*Depende dónde lo quieras tomar, como no especifica"*. [Ver Gráfica IV.2.9]



Gráfica IV.2.9



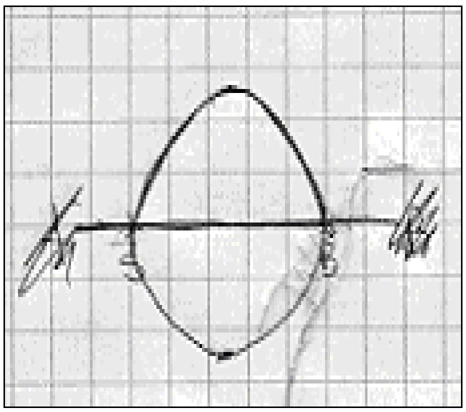
Gráfica IV.2.8

Cuadro IV.8 Realizaciones del equipo 2, pregunta 4

EQUIPO 3 Angélica, Joseph, Félix

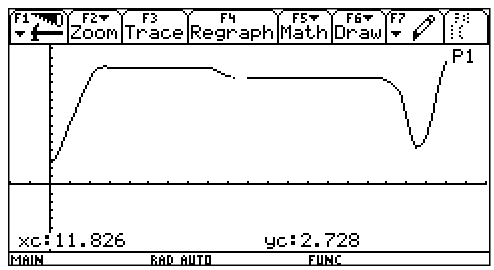
Pregunta: ¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?

<table>
<tr><th>Secuencia I y discusión</th><th>Secuencia II y discusión</th></tr>
<tr>
<td>
Realizan un dibujo previo para entender la situación. [Ver Gráfica IV.3.1]



Gráfica IV.3.1

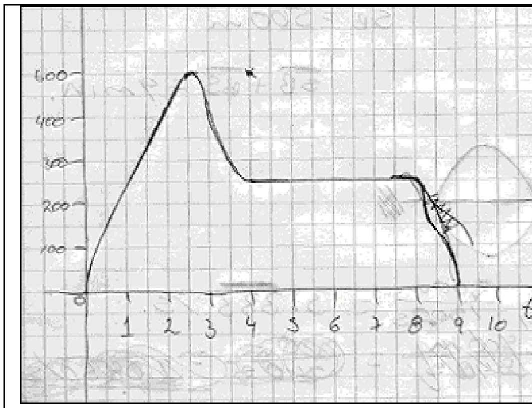
Hacen una gráfica de toda la situación [Ver Gráfica IV.3.3]
</td>
<td>
Este equipo determinó que los cuatro minutos que perdió Valentina fueron de regreso al salón de clases. La parte donde llega a la biblioteca no se distingue muy bien, tal vez, se deba a que se salieron del alcance del sensor. Sin embargo, podemos observar que al iniciar el recorrido no va tan rápido como al final de su recorrido, que es cuando tiene que recuperar el tiempo que perdió. [Ver Gráfica IV.3.2]



Gráfica IV.3.2

Moderador 3 “No tuvieron dificultad en decidir los movimientos aunque la gráfica obtenida con el sensor es diferente en el tiempo de permanencia en la biblioteca, se sintieron satisfechos y no pensaron en otro intento”.

El equipo no tuvo elementos para identificar que una parte la gráfica no salió por limitaciones del sensor.
</td>
</tr>
</table>



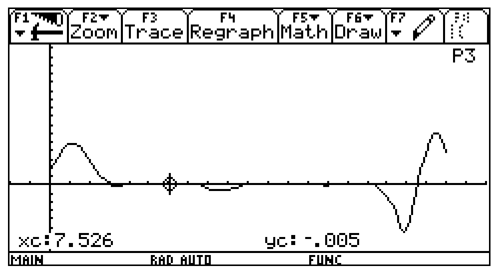
Gráfica IV.3.3

Gráfica hecha por Joseph

Él hace un comentario a su gráfica:

Joseph*: "Lo que está rayado es que no existe. Hay un punto de inflexión que no voy a tomar".*

En su gráfica de la velocidad vemos que acelera hasta llegar a una velocidad constante, después desacelera hasta hacer alto total, que es cuando recoge su cuaderno; después vuelve acelerar hasta alcanzar una velocidad constante, pero de regreso y nuevamente desacelera hasta hacer alto total que es cuando pierde los cuatro minutos, después de este tiempo vuelve acelerar pero con mayor velocidad, hasta que finalmente desacelere para hacer alto total que es cuando llega al salón de clases. Las velocidades positivas indican que va de ida y las negativas que va de regreso; y cuando la velocidad es cero es que hace alto total. [Ver Gráfica IV.3.4]



Gráfica IV.3.4

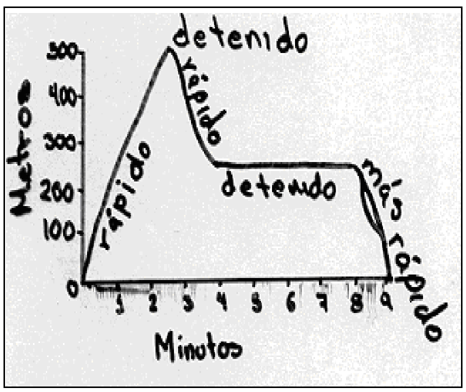
Monitor *"No se detuvieron tanto en la gráfica de la velocidad la vieron y les pareció bien."*

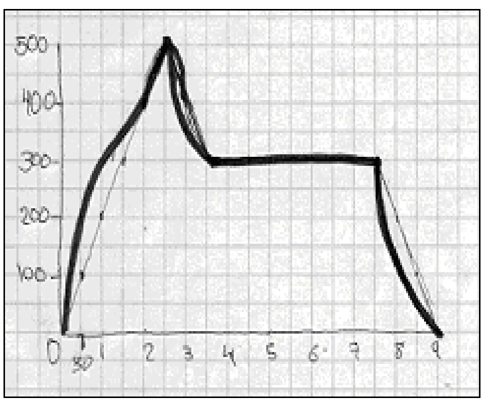
Monitor *"No les inquietó las diferencias entre las gráficas de posición que ellos hicieron y con la que resultó de su experimento. Sin mayores dudas dijeron que sí correspondían."*

Cuadro IV.9 Realizaciones del equipo 3, pregunta 1

EQUIPO 3… continuación

Pregunta: ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Los estudiantes identifican el tipo de velocidades sin dificultad: *Monitor: ¿Cómo identificas en esta gráfica la velocidad?* *Joseph*: "Velocidad positiva, luego velocidad negativa y velocidad nula y velocidad más negativa. Se particionan en segmentos las gráficas y con tramos más pequeñitos en los cuales sí se puede calcular". *[Ver Gráfica IV.3.5]*  *Gráfica IV.3.5* Este equipo decide que los cuatro minutos que se pierden serán de regreso al salón de clases. Ellos emplean trazos rectos y curvos para indicar el cambio de posición, Angélica no está muy de acuerdo, pero sus compañeros la convencen de la siguiente manera: ANGÉLICA*: "Es que veo las de ustedes muy curvas".* Joseph*:" Ah, porque estás manejando velocidad constante, y yo la hice la gráfica más curva, porque al ser una persona no puede controlar tanto su velocidad y mantenerse constante, constante, constante. Si es una persona a lo mejor da un*	

pasito más, por eso le puse un poquito más curveada da la gráfica, porque va a haber un momento en que corra, un poquito más rápido y un poquito más lento, pero se puede tomar constante porque es un tramo muy pequeño o sea son cambios muy chiquitos". Monitor: *¿Qué significado tiene en el movimiento de la persona, dicen que no se va a mover igual?* Joseph*: "Tiene que haber un momento, en que, a fuerzas, va a disminuir su velocidad, porque va agarrar su libro. Y no pasa corriendo ¡zum!, tiene que pararse un poco, ¿ajá? Al principio, y empieza de lento empieza corriendo después llega corriendo, después llega a ser lento, para tomar su libro, después llega a ser lento rápido porque se pra en un punto, entonces ahí después constante y después ya es rápido, rápido".* [Ver Gráfica IV.3.6]  *Gráfica IV.3.6* Gráfica hecha por Angélica donde se nota que hizo una corrección de trazos rectos a curvos. Hay una llamada de atención sobre intervalos pequeños donde se observan las aceleraciones y desaceleraciones.	

Cuadro IV.10 Realizaciones del equipo 3, pregunta 2

EQUIPO 3… continuación

Pregunta: ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
(Video) Ante la imposibilidad de que otro equipo dé una explicación acerca de cómo la pendiente de una recta es mayor que la pendiente de otra recta, a pesar de que las puede identificar con facilidad, este equipo sí da una explicación: Joseph: "*No, no, no, moviendo el eje de las "y" ahí en cada una y tomando como referencia y ahí el ángulo que va a formar una con otra te va a demostrar la pendiente*".	No existen evidencias

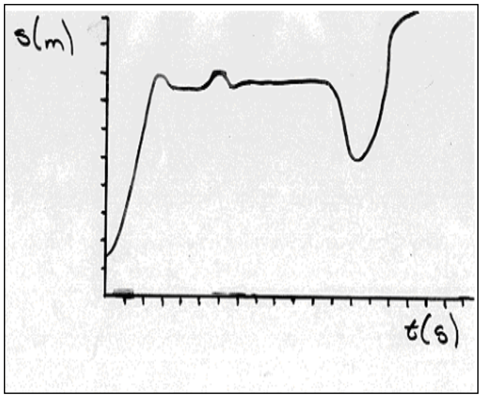
Cuadro IV.11 Realizaciones del equipo 3, pregunta 3

EQUIPO 3… continuación

Pregunta: ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Los estudiantes relacionan la situación de movimiento con la gráfica. Monitor: *Usaron como escala en distancia 1 cm. por cada 100 metros y en tiempo 1 cm. por cada minuto.* El alumno Joseph habla de cambios de velocidades cuando contesta a la pregunta del profesor sobre cómo entendía el problema: Monitor: P*ero de lo que tú entiendes, ¿de qué se trata?* Joseph: "*De que una persona sé está desplazando de un punto a otro con ciertas velocidades, pero se detiene un momento. Después tiene que acelerar para recuperar el tiempo que perdió".* La alumna Angélica tiene problemas para entender el tiempo de todo el recorrido, por lo que el profesor pide a Joseph que explique: Angélica: *¿De ida y vuelta hizo 9 minutos? ¿Cómo?* Monitor: *A ver, ¿cómo entienden*? Joseph: "*Yo le entiendo de que de ida y vuelta, ya con lo que tardó en estar con Juan son los 9 minutos. Ajá, Valentina tardó en total 9 minutos"* Angélica hace una gráfica con trazos rectos por lo que le profesor le pregunta: Monitor: "Bueno, ya estás tratando de responder la primera. ¿Qué te representa?, ¿una línea recta? ¿y la otra?" Angélica responde*: "Pues nada, ¡no!, es que estoy viendo, más o menos cuánto tiempo hizo en ir el primero a la biblioteca, resta los cuatro minutos que perdió con Juan quedan 5 minutos por lo que son 2.5 en ir a la biblioteca y 2.5 para ir al salón"* Angélica tiene problemas para interpretar la situación. Angélica: "En esta parte no entiendo muy bien el problema, o no sé si sea de redacción, ... dice: Pero en el camino se encontró a Juan y se detuvo a intercambiar… lo que le llevo 4 minutos, pero de los	

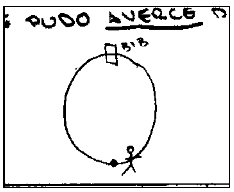
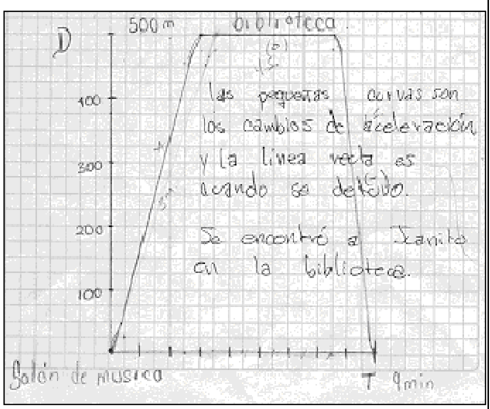
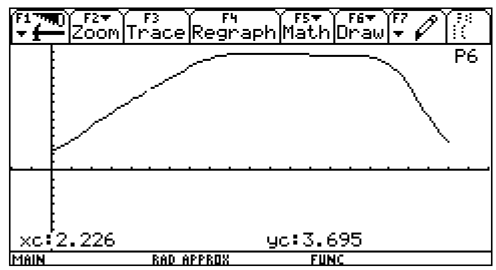
largos minutos y la obligó a recuperar ...” Joseph: “*De los 4 minutos dice que se le hicieron largos, que se tardó más”*. Félix*:” tardó más de los cuatro minutos, que luego tuvo que recuperar”*. ANGÉLICA: *“¿Qué es epifanía?*” El profesor le pregunta a Félix sobre la gráfica que hizo Monitor: *“Esa gráfica que estás haciendo, ¿qué significa cada línea, o sea, que es lo que tienes?”* Félix*: “Distancia y en otro tiempo recorrido”*. Monitor*: “A ver, su compañero acaba de poner una gráfica, a ver si están de acuerdo con su idea”*. Félix*: ... “Después dice que regresó aquí a los 5 minutos, a los 150 metros, donde tuvo el contacto, entonces tardó 4 minutos, y los otros 2 segundos son para regresar”*. Joseph*: “¿Cuánto tiempo le pusiste de constante?, ¿Cuántos minutos?, ¿Cuatro minutos?”* Félix*: “Cuatro minutos”* Joseph*: “Cuatro minutos de velocidad constante cuando se paró”*. *Joseph*: “Le puse 2, qué burro soy”. El profesor pregunta sobre el cálculo de la velocidad Monitor: ¿Ya calculaste velocidades? FÉLIX*: “Velocidad es igual a distancia sobre tiempo”*. Joseph*: “Si, no sé si la segunda se repite otra que sea ya la aceleración que es velocidad entre tiempo. Cuando esta persona se aleja, la velocidad es positiva y cuando regresa es negativa”*. Félix*: “Cuando la persona va a la biblioteca es positiva la velocidad y cuando regresa es negativa”*. Los estudiantes discuten acerca de cómo sería la gráfica de la velocidad: Monitor: *“¿En que tramo la velocidad es positiva y en cual negativa?”*. Joseph:*” Bueno, cuando va para arriba es positiva y cuando va hacia abajo es negativa”*.. Monitor*: “Podemos distinguir la ida y el regreso”*. Joseph: “*Sí, se interpreta por el desplazamiento”*. *Monitor*: “*Si quisiéramos una gráfica de velocidad, ¿cómo quedaría la grafica?”*. Joseph: *“Pues ya sería la resultante”*. Monitor: “*Pero, ¿cómo quedaría?”*.	

Joseph: *"Sube y luego baja".* ANGÉLICA: "*Si convertiste los minutos a segundos".* Joseph*:* "Sí, está bien". Ésta es la gráfica de la velocidad que lograron hacer, convirtieron el tiempo en segundos y la velocidad en metros sobre segundos. [Ver Gráfica IV.3.7]  *Gráfica IV.3.7*	

Cuadro IV.12 Realizaciones del equipo 3, pregunta 4

EQUIPO 4 (No se cuenta con audio)

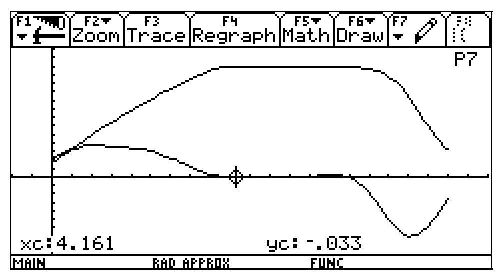
Pregunta: ¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Monitor: "*Dibujan una circunferencia considerando el principio y el final del recorrido y observando dónde pudo haberse detenido y por qué*". [Ver Gráfica IV.4.1]  *Gráfica IV.4.1* Este equipo considera que el encuentro se da en la biblioteca, utilizan curvas y rectas e indican que los cambios se deben a la aceleración y cuando se detiene es en línea recta. [Ver Gráfica IV.4.3]  *Gráfica IV.4.3* No alcanzan a hacer la gráfica de la velocidad	Como podemos observar en la gráfica, los estudiantes proponen que los cuatro minutos que pierde Valentina son en la biblioteca, por lo que lleva un paso más o menos tranquilo, para luego acelerar y recuperar el tiempo perdido y llegar al salón de clases. Este equipo es el que más se acerca a su propuesta original. [Ver Gráfica IV.4.2]  *Gráfica IV.4.2*

Cuadro IV.13 Realizaciones del equipo 4, pregunta 1

EQUIPO 4… continuación

Pregunta: ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Monitor: *"Tuvieron dificultad para establecer los ejes coordenados, cuál eje es distancia y cuál tiempo. También si regresaba al punto de origen donde el tiempo y la distancia era cero y si donde regresaba era con un tiempo ya avanzado y una distancia igual."*	Cuando los estudiantes hacen el contraste entre la gráfica de la posición y la de la velocidad, interpretan que en la gráfica de la velocidad va aumentando porque empieza el recorrido y va disminuyendo cuando se detiene, que se vuelve cero cuando ya no avanza y vuelve a aumentar cuando empieza a caminar pero como va de regreso es negativa y se vuelve a ser cero cuando se detiene. [Ver Gráfica IV.4.4]  *Gráfica IV.4.4*

Cuadro IV.14 Realizaciones del equipo 4, pregunta 2

EQUIPO 4… continuación

Pregunta: ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente? No existen evidencias

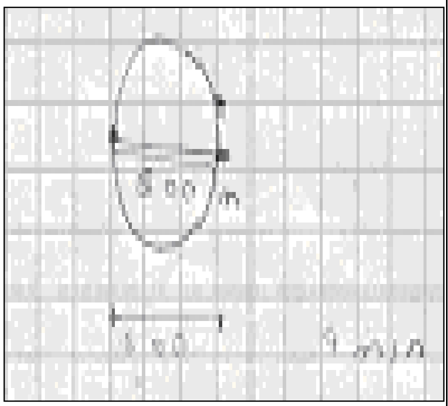
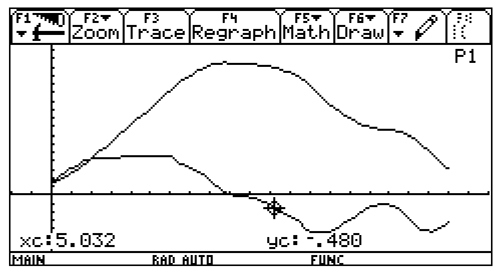
Pregunta: ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Para considerar la posición de Valentina elaboraron una gráfica usando como variables la distancia y el tiempo. Monitor: *"Dicen que su velocidad es positiva cuando avanza hacia delante hacia enfrente, negativa cuando viene de regreso y nula cuando se detiene".* Monitor: *"Dicen que va lento sólo al principio porque no tiene prisa, que se detiene cuando llega a la biblioteca y rápido cuando regresa por que perdió tiempo". (no lo señalan en su gráfica)* Monitor: *"Ellos piensan que en la gráfica de la velocidad va aumentando porque empieza el recorrido y va disminuyendo cuando se detiene, que se vuelve cero cuando ya no avanza y que vuelve aumentar cuando empieza a caminar pero como va de regreso es negativa y se vuelve a ser cero cuando se detiene"*	Para hacer la simulación ellos establecen que cambiaran los minutos por los segundos y también los metros y que todo el movimiento lo harán en una sola línea recta.

Cuadro IV.15 Realizaciones del equipo 4, pregunta 4

EQUIPO 5 (Julio, Juan Carlos, Netzahualcoyotl)

Pregunta: ¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?

<table>
<tr><td>Secuencia I y discusión</td><td>Secuencia II y discusión</td></tr>
<tr><td>Monitor: “Realizan dibujos previos para la interpretación del problema, apoyándose en la circunferencia, realizando dos veces la lectura del problema, en voz alta y de manera personal”. [Ver Gráfica IV.5.1]

Gráfica IV.5.1</td><td>Este equipo determinó que de regreso al salón de clases es cuando se pierden los cuatro minutos, sin embargo en la gráfica es ligeramente perceptible la pérdida de este tiempo, y en la gráfica de la velocidad tampoco está registrada esta pérdida de tiempo, sólo registra cuando se detiene en la biblioteca. [Ver Gráfica IV.5.2]


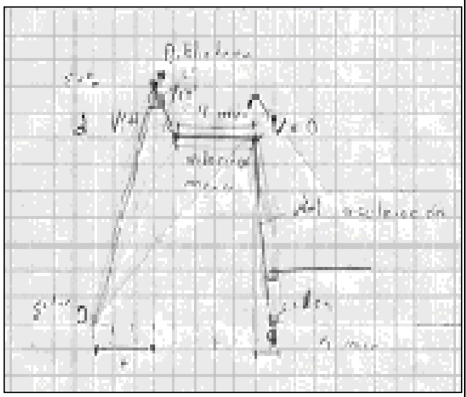
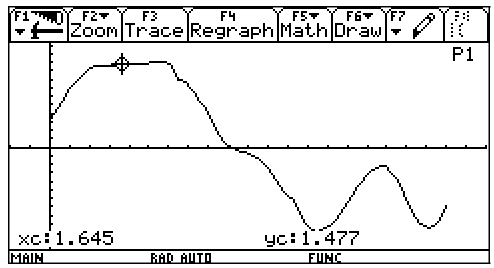
Gráfica IV.5.2</td></tr>
</table>

Cuadro IV.16 Realizaciones del equipo 5, pregunta 1

EQUIPO 5… continuación

Pregunta: ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión

Utilizan trazos rectos para hacer su gráfica e indican los signos de las velocidades, así como también cuando se hace cero, que es cuando pierde los cuatro minutos. [Ver Gráfica IV.5.3]  *Gráfica IV.5.3*	La gráfica de la velocidad nos permite ver con más detalle los cambios efectuados, tales como: acelera para alcanzar una velocidad constante, desacelera hasta detenerse, vuelve acelerar pero ya de regreso hasta alcanzar una velocidad constante y vuelve [Ver Gráfica IV.5.4]  *Gráfica IV.5.4*

Cuadro IV.17 Realizaciones del equipo 5, pregunta 2

EQUIPO 5… continuación

Pregunta: ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente? No existen evidencias

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
(Video) El alumno Julio señala en su gráfica que una recta tiene más pendiente que otra y dice: "*aquí la velocidad es cero en el intervalo de 4 minutos y aquí acelera por eso es que ésta tiene más pendiente que ésta;*	

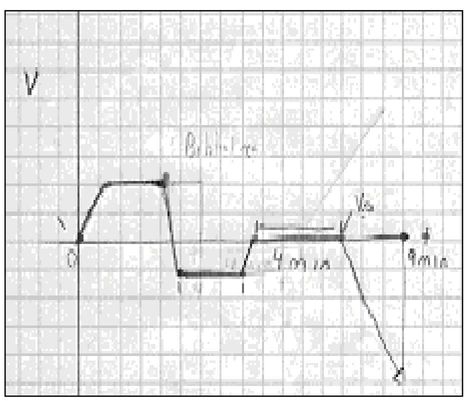
esta línea tiene más pendiente que ésta, porque hay una aceleración aquí y la velocidad también" sin embargo no pudo explicar el porqué una recta tenía más pendiente que otra	

Cuadro IV.18 Realizaciones del equipo 5, pregunta 3

EQUIPO 5… continuación

Pregunta: ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

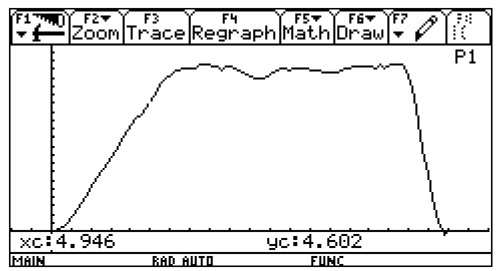
Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Monitor: *"Identifican sin ningún problema cada uno de los ejes. Identifican las variables tiempo y distancia"*. *Monitor: "No existe problema en determinar los ejes de coordenadas, lo que sí escogen una escala que la modifican dos veces"*. El alumno Julio explica a sus compañeros cómo se debe construir la gráfica de la posición diciendo: *"es cuando se regresa por eso ya cae, cae porque es negativa y nos indica que va ser negativa , pero aquí en este pedacito pon tú que si camina, ves, que era circular esto era circular, esto era circular nos dice que aquí estaba el salón, que aquí estaba la biblioteca y tenía 500 metros*, *entonces nos dice que la chava esta sale del salón acelera un poquito va a ser mayor ¿eh?, o sea a la aceleración quiere decir que cambió la velocidad pero ya aquí permanece constante. Llega a la biblioteca, agarra su cuaderno, sale inmediatamente, entonces aquí acelera un poquitito, permanece la velocidad constante en alguno de estos puntos el eje "x" se va a topar con su chavo, cuando se topa a su chavo queda estática cuatro minutos, luego ya dice "ay caray ya es bien tarde" y se regresa pero aquí ya va acelerar va ir corriendo, pero no va a chocar, va a ir desacelerando, ya"*	

Lo que dice el mismo estudiante sobre el signo de las velocidades y cuando estas se hacen constantes. Julio: *“Nos indican aquí que construyamos una gráfica de una velocidad con respecto al tiempo. Entonces aquí acelera un poco, se mantiene constante decrece, bueno se vuelve negativa la velocidad y se mantiene constante otro momento pon tú que sea precisamente ese intervalo por que no es una gráfica exacta la cual no tenemos valores y ya tenemos una función para construirla, aquí tenemos una velocidad que va a permanecer constante otro momento, se encuentra a su chavo, ahí está, decrece la velocidad se hace nula cuatro minutos la velocidad es nula y acelera. Entonces sería así”.* Construyen la gráfica de la velocidad. [Ver Gráfica IV.5.5]  *Gráfica IV.5.5*	

Cuadro IV.19 Realizaciones del equipo 5, pregunta 4

EQUIPO 6 (No se cuenta con audio): Rubén (2), Luis (1), Marisol (9)

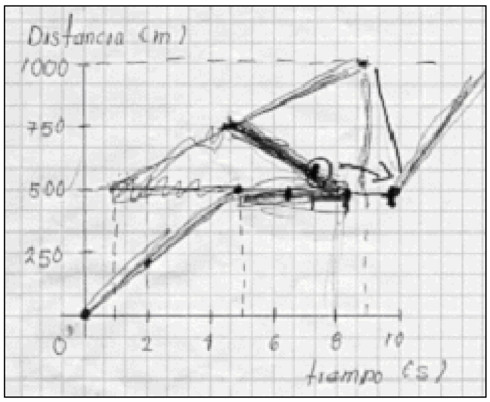
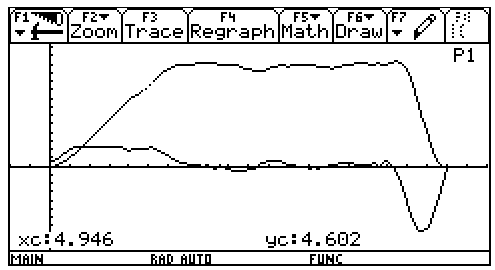
Pregunta: ¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Monitor: *"Rubén señala (subraya) cierta información del problema: "biblioteca" etc. Marisol propone una lista de datos. Luis propone concentrarse en la información del segundo párrafo, pero comienzan a leer nuevamente el primer párrafo. Dibujan el patio circular".* Monitor: *"Hacen su gráfica por separado. Marisol usa "x y "y". Rubén pone primero la escala con el tiempo, Luis sólo los ejes. Tardan mucho en hacer la gráfica".* *Se preguntan qué graficar, velocidad, distancia.* *Monitor: "Deciden graficar la distancia total".* Monitor: *"A las nueve y media comienzan a decir que la gráfica puede ser una cúbica, que no puede ser una recta, sólo piensan en trazos rectos".* Cuando comienzan a hacer la gráfica sólo hacen trazos rectos.	Como podemos observar en la gráfica, los estudiantes proponen para simular la situación, que los cuatro minutos que pierde Valentina es en la biblioteca. También podemos resaltar que la velocidad que utiliza para ir a la biblioteca no es la misma cuando va de regreso al salón de clases; de ida va más lento que de regreso, debido al las pendientes de dichas "rectas". [Ver Gráfica IV.6.1]  *Gráfica IV.6.1*

Cuadro IV.20 Realizaciones del equipo 6, pregunta 1

EQUIPO 6… continuación

Pregunta: ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
En su primera gráfica interpretan el regreso, como regresar en el tiempo, que luego corrigen. [Ver Gráfica IV.6.2]  *Gráfica IV.6.2*	El contraste con la gráfica de la posición y de la velocidad, nos permite ver con más detalle los distintos cambios que existen tanto en la posición como en la velocidad, así como la relación entre ambos cambios. [Ver Gráfica IV.6.3]  *Gráfica IV.6.3*

Cuadro IV.21 Realizaciones del equipo 6, pregunta 2

EQUIPO 6… continuación

Pregunta: ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente? No existen evidencias

Pregunta: ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
Este equipo tuvo muchas dificultades, por lo que no pudieron avanzar.	El equipo a pesar de no haber logrado hacer las gráficas de la posición y de la velocidad antes de usar el sensor, lograron hacer el experimento.

Cuadro IV.22 Realizaciones del equipo 6, pregunta 4

Capítulo V

Conclusiones

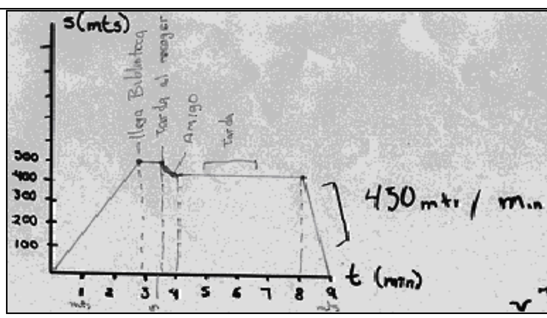
Capítulo V. Conclusiones

De acuerdo con las preguntas de investigación de este proyecto y tomando en cuenta las características cualitativas de las gráficas que hicieron los estudiantes en la secuencia I y, después, en la secuencia II, ambas descritas en el capítulo de la metodología, a continuación se concluye lo siguiente:

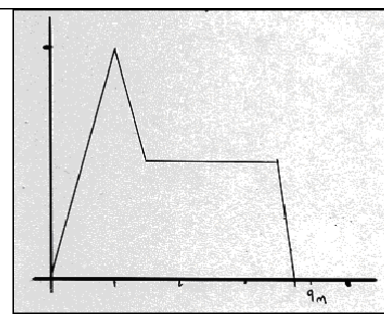
I. ¿En qué sentido logran tener una visión global de la gráfica?

a) Secuencia I

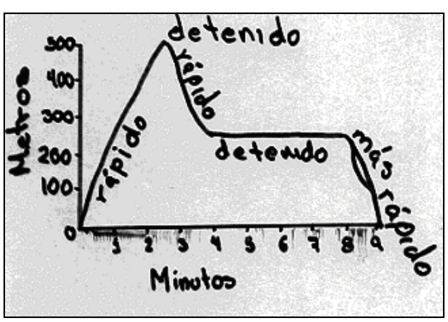
Todos los equipos lograron hacer una gráfica correspondiente a los cambios de posición. Ya hemos mencionado en el capítulo anterior que unos logran desde el inicio hacer trazos curvos y otros no. Podemos concluir que la naturaleza de la tarea, es decir, partir de una situación para graficarla, hace que los estudiantes recurran a todo lo que saben para lograr la gráfica que se pide.

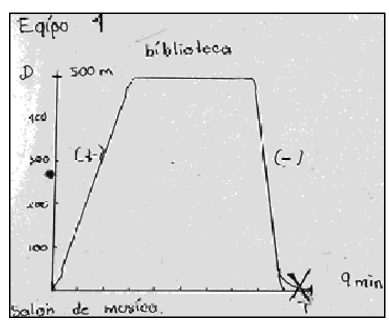


Equipo 1

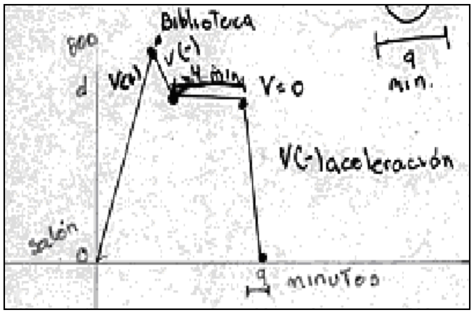


Equipo 2

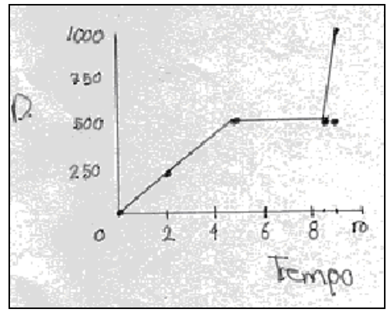




Equipo 3



Equipo 4



Equipo 5

Equipo 6

Cuadro VI.1 Descripción gráfica global de la situación.

b) Secuencia II

Los equipos pudieron relacionar adecuadamente la representación verbal con la representación de la simulación, ya que pudieron realizar la simulación de la situación planteada sin ningún problema. Al observar las gráficas obtenidas con el sensor y la calculadora graficadora, se dieron cuenta que los trazos no siempre deberían de ser rectos.

II. ¿Cuáles son las visiones locales de la gráfica que pueden identificar?

a) Secuencia I

Sólo un equipo conformado con alumnos de quinto semestre pudieron terminar claramente los intervalos de velocidad como rápido, detenido y más rápido en la gráfica..

b) Secuencia II

Todos los equipos pudieron identificar sin problema en las gráficas los intervalos de cambios de velocidad, así como también lograron establecer las relaciones que existían entre las gráficas de la posición y velocidad como los intervalos donde la velocidad es constante, cuando se hace cero, cuando es positiva y cuando es negativa.

III. ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la pendiente?

a) Secuencia I

Tenemos evidencias de tres participantes que discuten acerca de la inclinación de las rectas que aparece en la gráfica de la posición, y que la relacionan con el sentido de la velocidad (positiva o negativa). Dado que no tenemos transcripciones de todos los equipos no podemos dar cuenta de lo que pasó, sin embargo, creemos que las intervenciones fueron aprobadas y adoptadas por todo el grupo.

b) Secuencia II

Con respecto a la pendiente podemos afirmar que todos los estudiantes pudieron identificar en la gráfica que una recta con menor inclinación representaba que su velocidad era más lenta que aquella que tuviera mayor inclinación, y que era positiva cuando iba de ida y negativa cuando iba de regreso.

IV: ¿Cuál es el tipo de control que tienen para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

a) Secuencia I

Con respecto a la representación verbal y representación gráfica en general los estudiantes pudieron establecer los diferentes tiempos y posiciones que establece el problema, emplearon como variables en el eje horizontal al tiempo y en el eje vertical a la distancia, algunos estudiantes intentaron hacer cálculos de velocidades utilizando la fórmula correspondiente.

b) Secuencia II

Al hacer la simulación del problema y al poder contrastar las gráficas de la posición y de la velocidad los estudiantes pudieron transitar fácilmente entre las diferentes representaciones que estaban en juego como son la verbal, la gráfica y por supuesto la de la simulación, identificando como ya se mencionó en la gráfica de la posición los intervalos cuando era lento, rápido, más rápido y cuando se detenía; con respecto a la velocidad identificaron los intervalos en que ésta se hacía constante, nula, positiva y negativa.

En general podemos decir, tomando en cuenta todo lo escrito, con respecto a nuestra hipótesis: "*La tecnología genera un nuevo uso de las gráficas*", que con las actividades de simulación y modelación gráfica que potencia la tecnología se puede caracterizar un nuevo uso de las gráfica, y que en términos generales tiene las siguientes características con relación estrecha al Comportamiento Tendencial de las Funciones (Cordero, 1998).

Construcción de representaciones	**Gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico con tecnología**
Significados y sistemas simbólicos	Comportamiento de las gráficas de la posición y de la velocidad en relación con la simulación (función primitiva y su derivada). En este sentido a pesar de que los estudiantes hacen un dibujo inicial que no corresponde necesariamente a una gráfica, simplemente lo hacen para entender lo que se les propone en el problema, sin embargo todos logran hacer la gráfica de la posición e identifican los cambios de posición, aunque la mayoría de los estudiantes optó por hacer trazos rectos, al contrastar las gráficas que ellos realizaron con la que resultó de la simulación, reconocieron que para indicar dichos cambios, deberían utilizar trazos curvos los cuales son interpretados por ellos como cambios de velocidades. Para la gráfica de la posición identifican los ejes de coordenadas, representando al eje horizontal como el tiempo y al eje vertical como la distancia, unos cuantos estudiantes tuvieron algunos problemas al respecto por lo que señalan los monitores. Algunos de los estudiantes intentan calcular las velocidades, haciendo uso de la fórmula de la velocidad $V = \frac{d}{t}$
Procedimientos	Determinar la escala para el tiempo y la posición Identificar el tipo de movimiento Relacionar las gráficas con la situación De manera natural los estudiantes transitan constantemente entre las

	representaciones verbal y gráfica antes de la simulación y en la realización de la simulación transitan continuamente entre las representaciones simulación y gráfica. Con respecto a la simulación los estudiantes a pesar de haber recibido instrucciones acerca de cómo funciona el sensor, ellos pasan por alto esta información y realizan la simulación una y otra vez, hasta obtener la gráfica que ellos proponen en un principio. Sólo toman en cuenta que el sensor toma datos a partir de medio metro y no más de ocho metros, por lo que tienen determinar la escala que van a utilizar y la forma en que se tienen que mover ante el sensor.
Procesos y objetos	Forma de la gráfica para identificar patrones de comportamiento relacionando las gráficas de la posición y de la velocidad. Los estudiantes pudieron identificar sin dificultad los intervalos donde la velocidad es: positiva, negativa, nula, cuando es lenta, rápida, más lenta, más rápida y cuando esta era constante. Cabe destacar que lo anterior es logrado por los estudiantes después de haber realizado la simulación, y al hacer el contraste entre las gráficas de la posición y de la velocidad.
Argumentos	A mayor velocidad mayor pendiente en la gráfica de posición A mayor pendiente en la grafica de posición, mayor altura en la gráfica de velocidad. Con respecto a la pendiente pudieron identificar que la recta con mayor inclinación significaba que tendría que ir más rápido, y que la recta con menor inclinación significaba que tendría que ir más lento, así como también cuando la recta no tiene inclinación significaba que se habría detenido y en consecuencia su pendiente sería igual a cero (sólo dos alumnos discutieron estos aspectos cuando se realizó la discusión grupal).

La tecnología nos permite tener una visión global y local, tanto cualitativa como cuantitativa de la gráfica, en la que los estudiantes pueden explorar y dar explicaciones de lo que sucede con la situación, por lo será necesario plantear problemas de situaciones reales en las que los estudiantes puedan transitar con facilidad entre las diferentes representaciones: simulación, verbal, tabular, gráfica y algebraica antes y después de usar la tecnología. Las actividades propuestas a los estudiantes deben estar encaminadas a generar conocimientos matemáticos integradores.

V.1 Sugerencias para trabajo futuro

Con este trabajo se ha contribuido a entender la naturaleza de las construcciones que un estudiante del NMS del IPN puede realizar usando tecnología para modelar situaciones de movimiento. Sin embargo, las realizaciones de los estudiantes están ancladas tanto en la estructura de la actividad de modelación de la situación de aprendizaje, como en las propias características del grupo de estudiantes que asistió voluntariamente al taller extracurricular. Será importante observar las realizaciones que puedan lograr profesores y estudiantes en cursos regulares. Para llevar a cabo esta tarea se incluirá en el Paquete Didáctico de los libros de Álgebra y Cálculo módulos con esta actividad que describa el potencial que tiene para cumplir con los objetivos curriculares de estos cursos.

Esta inclusión curricular no es incompatible con la creación de laboratorios de matemáticas con tecnología que permitan, por un lado con profesores, capacitar en el uso de los módulos con tecnología y diseñar nuevos materiales, y por otro con estudiantes explorar diseños relacionados con fenómenos de movimiento, por ejemplo, Suárez *et al* (2003), y otros fenómenos físicos, por ejemplo, (Sánchez, et al en prensa).

Referencias

Referencias

AIM-NMS-IPN (2000) Álgebra para el Nivel Medio Superior. Guía para el profesor. IPN

AIM-MNS-IPN (2000) Plan de trabajo de la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional. Documento interno de trabajo.

Arrieta, J. (2003) La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN.

Azcárate, C.; Deulofeu, J. (1990) Funciones y gráficas. Editorial Síntesis.

Cantoral, R.; Farfán, R. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, 42,* 353-369.

Cantoral, R. Farfán, R.; Cordero, F. (2000) Desarrollo del pensamiento matemático. Trillas.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2001) Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático. Prentice Hall y Pearson Education.

Carrasco, G.; Barrera, H.; Rosales, E.; Carranza, G. (2003) Programa 'Mejoramiento del Estudio de las Matemáticas en el Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional' (MEM-NMS-IPN). En Memorias de los carteles y ponencias presentados en el Primer Congreso de Investigación del Nivel Medio Superior.

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4, 2, 103-128.

Cordero, F. (1998) El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 1, Núm. 1*, 57-74.

Cordero, F.; Solís M.(2001). Las gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial Iberoamericana.

Flores, R. (2003) El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Proyecto de Tesis de Maestría en CINVESTAV. Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario

Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero. México.

Leinhardt, G., Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990) Traducción hecha por el M. En C. Hernández, R. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV.

Mochón, S. (2000) Modelos matemáticos para todos los niveles. Grupo Editorial Iberamericana.

Phillips, E., Butts, T. y Shaughnessy, M. (1999). Álgebra con Aplicaciones. Editorial Oxford.

PROME (2003) Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN www.matedu.cicata.ipn.mx/matedu

Quiroz, M. (1989) Instalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios: un enfoque alternativo para la reconstrucción del discurso matemático escolar del precálculo. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

SEP (1994). Libro para el Maestro Educación Secundaria. Coordinador general Alarcón J.

Romano, S.; Suárez, L.; Ortega P. (2003) Los dispositivos de transducción para la modelación en las clases de matemáticas. Memorias del Primer Congreso de Investigación del Nivel Medio Superior.

Sánchez, M.; Molina, G. (en prensa). Un laboratorio de ciencias con el sistema de análisis de datos EA-100. Grupo Editorial Iberoamérica. Casio Académico.

Suárez, L. (2002) Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo. Anteproyecto Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L. (2000) El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas. Tesis de Maestría del DME del Cinvestav-IPN.

Suárez, L.; Carrillo, C.; López, J. (2003) Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Torres, A.; Suárez, L. (2003) La modelación y las gráficas en el estudio del movimiento con tecnología. En Memorias de los carteles y ponencias presentados en el Primer Congreso de Investigación del Nivel Medio Superior.

Torres, J. (1997). La Metodología de Estudio en un Ambiente de Resolución de Problemas. Tesis de Maestría del DEM-Cinvestav. No publicada.

Anexos

Competencias Básicas del Estudiante de Bachillerato[3]

Las competencias básicas se refieren al dominio, por parte del estudiante, de los conocimientos, habilidades, valores y actitudes que son indispensables tanto para la comprensión del discurso de las ciencias, las humanidades y la tecnología, como para su aplicación en la solución de los problemas de su vida escolar, laboral o cotidiana, por lo que se considera que son —o deben ser— comunes a todos los bachilleratos del país. Se considera que, en términos generales, las competencias básicas que deben estar presentes en el perfil del educando son:

- Expresarse correcta y eficientemente en español, tanto en forma oral como escrita, así como interpretar los mensajes en ambas formas.
- Manejar la información formulada en distintos lenguajes y discursos (gráficos, matemáticos, simbólicos, de cómputo, etc.).
- Utilizar los instrumentos culturales, científicos, metodológicos y técnicos, básicos para la resolución de problemas en su dimensión individual y social, con actitud creativa y trabajando individualmente o en grupos.
- Comprender, criticar y participar racional y científicamente, a partir de los conocimientos asimilados, en los problemas ecológicos, socioeconómicos y políticos de su comunidad, región y del país.
- Aprender por sí mismos, poniendo en práctica métodos y técnicas eficientes para propiciar su progreso intelectual.
- Evaluar y resolver las situaciones inherentes a su edad y desarrollo, incluso en lo que se refiere al conocimiento de sí mismo, su autoestima y autocrítica, salud física y formación cultural y estética, a efecto de tomar decisiones que lo beneficien en lo individual y en lo social.
- Desempeñarse individual o grupalmente de manera independiente en su vida escolar y cotidiana.
- Integrar los conocimientos de los diferentes campos, en una visión global del medio natural y social, como paso normativo hacia la inter y multidisciplinariedad.

[3] Documento tomado de IPN, (1994). Modelo Educativo "Pertinencia y Competitividad", Documento interno del IPN.

Anexo 2

Estándares 2000 del Consejo Nacional de Matemáticas (NCTM) de Álgebra para los grados del 9 al 12

Expectativas

Los programas de enseñanza desde preescolar hasta el grado 12 deben permitirles a todos los estudiantes—	**En los años escolares del 9–12 los estudiantes deben saber hacerlo—**
2.1 <u>Comprender patrones</u>, relaciones y funciones	• 2.1.1 generalizar patrones al usar funciones definidas explícita o recursivamente; • 2.1.2 comprender relaciones y funciones y seleccionarlas, usar varias representaciones y pasar fácilmente de unas a otras; • 2.1.3 analizar funciones de una variable al estudiar razones de cambio, intercepciones, ceros, asíntotas y comportamientos locales y globales; • 2.1.4 comprender y realizar transformaciones como las combinaciones aritméticas, la composición y la inversión de las funciones más comunes y, mediante el uso de la tecnología, hacer las mismas operaciones con expresiones simbólicas más complicadas; • 2.1.5 comprender y comparar las propiedades de clases de funciones, incluyendo funciones exponenciales, polinomiales, racionales, logarítmicas y periódicas; • 2.1.6 interpretar representaciones de funciones de dos variables

2.2 Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas al usar símbolos algebraicos	• 2.2.1 comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, desigualdades y relaciones; • 2.2.2 escribir formas equivalentes de ecuaciones, desigualdades y sistemas de ecuaciones y resolverlas con soltura –mentalmente o con lápiz y papel en casos simples y utilizando la tecnología en todos los casos; • 2.2.3 utilizar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas; • 2.2.4 utilizar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones recursivas y paramétricas, para funciones y relaciones; • 2.2.5 juzgar el significado, la utilidad y lo sensato de los resultados de las manipulaciones simbólicas, incluyendo aquellos llevados a cabo con el uso de tecnología.
2.3 Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	• 2.3.1 identificar relaciones cuantitativas esenciales en una situación y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelar las relaciones; • 2.3.2 usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar relaciones que surgen en varios contextos; • 2.3.3 obtener conclusiones razonables sobre una situación que se modeló.
2.4 Analizar el cambio en varios contextos	• 2.4.1 aproximar e interpretar razones de cambio de datos gráficos y numéricos.

Análisis cuantitativo del problema de Epifanía (casos complementarios)

Rectas

Como ya se ha mencionado, el problema se puede resolver de muchas formas ya que Valentina puede encontrarse a su bienamado Juan en distintas posiciones en el transcurso de nueve minutos.

Ahora vamos a considerar los movimientos de Valentina, tomando en cuenta que estos sean rectas y parábolas, estas últimas son debido a que ella en ciertos momentos, tiene que disminuir su velocidad cuando se va parando o bien acelerar para continuar con su recorrido.

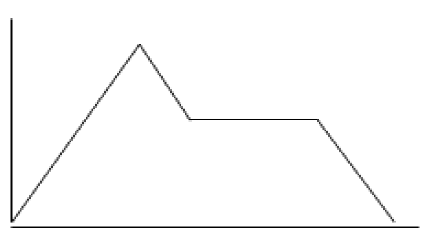
Para ello hacemos tres consideraciones además de la presentada en el capítulo III:

2ª Consideración: Cuando Valentina se encuentra con Juan después de salir de la biblioteca.

3ª Consideración: Cuando Valentina se encuentra con Juan saliendo del salón de clase.

4ª Consideración: Cuando Valentina se encuentra con Juan en la biblioteca

2ª Consideración.



Podemos observa que en el trayecto de Valentina existen cuatro intervalos:

a) Cuando Valentina sale del salón de clases directo a la biblioteca sin parar, aquí suponemos que este recorrido lo hace 3 minutos, así que la forma de la ecuación de dicho trayecto es la siguiente:

$$d = at, \quad (0,0)\ y\ (3{,}500)$$

Por lo que la ecuación de la recta es:

$$d = \frac{500}{3}t$$
$$0 \leq t \leq 3$$

La velocidad de Valentina durante todo este trayecto es de $\frac{500}{3}$ m/min.

b) Al salir de la biblioteca corre 200 metros para encontrarse con Juan, lo cual le lleva un minuto, y la forma de la ecuación de la recta es:

$$d = -at + b, \quad (3{,}500)\ y\ (4{,}300)$$

Dicha ecuación será:

$$d = -200t + 110$$
$$3 < t \leq 4$$

La velocidad de Valentina en este trayecto es de -200m/min. Es negativa porque Valentina va de regreso, es decir, se acerca al salón de clases.

c) Como ya lo mencionamos en el inciso anterior Valentina se encuentra con Juan a una distancia de 300 metros del salón de clases, y ahí permanece 4 minutos con él, por lo que la forma de esta ecuación es:

$$d = a, \quad (4{,}300)\ y\ (8{,}300)$$

Por lo que la ecuación de dicha recta es:

$$d = 300$$
$$4 < t \leq 8$$

Como podemos ver la velocidad de Valentina en este lapso de tiempo es nula, pues no se tuvo avance alguno.

d) Finalmente Valentina tiene que recuperar el tiempo perdido, así que recorre los 300 metros restantes en un minuto, la forma de la ecuación de dicha trayectoria es la siguiente:

$$d = -at + b, \quad (8{,}300)\ y\ (9{,}0)$$

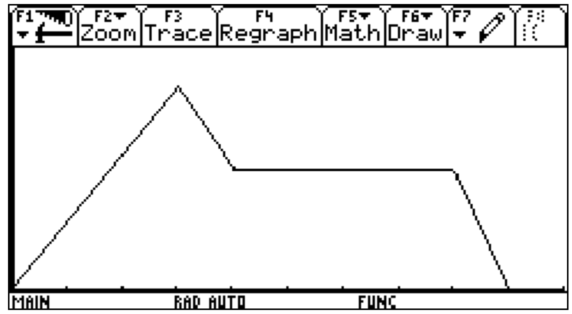
Y la ecuación resultante sería:

$$d = -300t + 2700$$
$$8 < t \leq 9$$

En este último trayecto Valentina desarrolló una velocidad de -300m/min. es negativa porque como ya dijimos, va de regreso a su salón de clases.

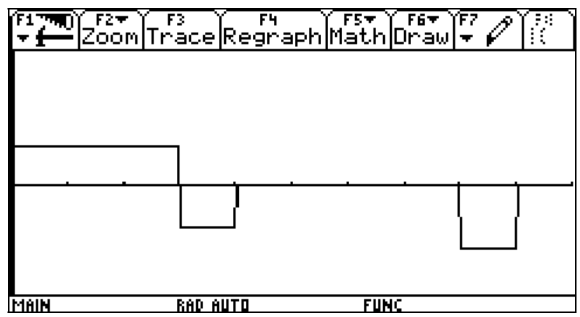
La función resultante de todo su trayecto es una función a trozos que podemos expresar de la siguiente manera:

$$d = \begin{bmatrix} \frac{500}{3}t & 0 \le t \le 3 \\ -200t + 110 & 3 < t \le 4 \\ 300 & 4 < t \le 8 \\ -300t + 2700 & 8 < t \le 9 \end{bmatrix}$$

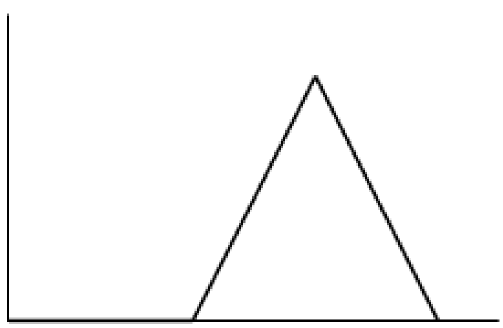


La función que resulta de la velocidad es una función a trozos que se expresa de la siguiente manera:

$$v = \begin{bmatrix} \frac{500}{3} & 0 \le t \le 3 \\ -200 & 3 < t \le 4 \\ 0 & 4 < t \le 8 \\ -300 & 8 < t \le 9 \end{bmatrix}$$



3ª Consideración



Como podemos ver en esta trayectoria existen únicamente tres intervalos:

a) Cuando Valentina se encuentra con Juan inmediatamente al salir del salón de clases, y permanece ahí con él durante cuatro minutos, la ecuación de dicha recta es de la forma:

$$d = a, \quad (0,0)\ y\ (4,0)$$

Dicha ecuación es:

$$d = 0$$
$$0 \le t \le 4$$

La velocidad de Valentina en este lapso de tiempo es nula, ya que ella no se movió de lugar durante 4 minutos.

b) Valentina después de los 4 minutos, emprende el camino hacia la biblioteca para recoger su cuaderno, esto le lleva 2.5 minutos, durante los cuales recorre los 500 metros (distancia a la que está la biblioteca). La ecuación de dicho recorrido tiene la forma siguiente:

$$d = at + b, \quad (4{,}0)\ y \left(\frac{13}{2}{,}500\right)$$

Por lo que la ecuación será:

$$d = 200t - 800$$
$$4 < t \le \frac{13}{2}$$

La velocidad alcanzada por Valentina en este intervalo de tiempo es de 200m/min.

c) Finalmente Valentina emprende el regreso al salón de clases, y nuevamente recorre los 500 metros en 2.5 minutos. La ecuación resultante es de la forma:

$$d = -at + b, \quad \left(\frac{13}{2}{,}500\right) y\ (9{,}0)$$

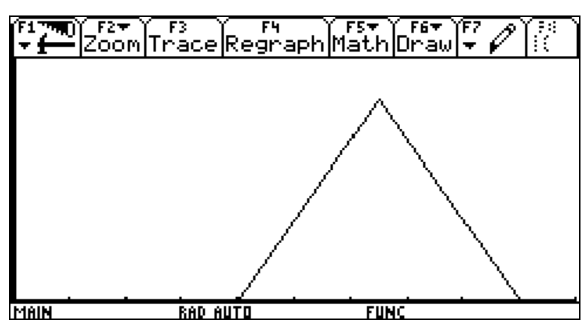
Dicha ecuación es:

$$d = -200t + 1800$$
$$\frac{13}{2} < t \le 9$$

Valentina alcanza una velocidad de -200m/min. en este último trayecto, y como ya lo hemos mencionado, es negativa porque Valentina va de regreso al salón de clases.

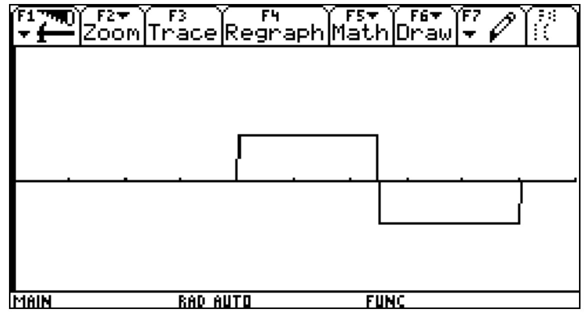
La función que representa el recorrido completo, es una función a trozos que se expresaría de la siguiente manera:

$$d = \left[\begin{array}{ll} 0 & 0 \le t \le 4 \\ 200t - 800 & 4 < t \le \frac{13}{2} \\ -200t + 1800 & \frac{13}{2} < t \le 9 \end{array}\right]$$

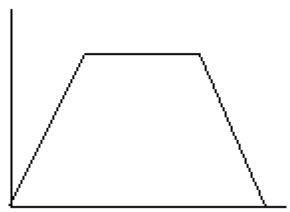


La función de la velocidad es una función a trozos que toma la siguiente forma:

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \le t \le 4 \\ 200 & 4 < t \le \frac{13}{2} \\ -200 & \frac{13}{2} < t \le 9 \end{bmatrix}$$



4ª Consideración



En esta trayectoria existen únicamente tres cambios de dirección:

a) Cuando Valentina sale del salón de clases directo a la biblioteca sin parar, aquí suponemos que este recorrido lo hace 2.5 minutos, así que la forma de la ecuación de dicho trayecto es la siguiente:

$$d = at, \quad (0{,}0)\ y\ (2.5{,}500)$$

Por lo que la ecuación de la recta es:

$$d = 200t$$
$$0 \le t \le 2.5$$

La velocidad desarrollada en este trayecto es de 200m/min.

b) Al llegar a la biblioteca se encuentra con Juan, por lo que permanece ahí los cuatro minutos, la forma de la ecuación es la siguiente:

$$d = a, \quad (2.5{,}500)\ y\ (6.5{,}500)$$

Por lo que la ecuación de la recta es:

$$d = 500$$
$$2.5 < t \le 6.5$$

La velocidad en este tramo es nula, pues no hubo avance alguno

c) Pasados los cuatro minutos que estuvo con Juan regresó al salón de clase, por lo que tuvo que recorrer 500 metros en 2.5 minutos. La ecuación de esta trayectoria es de una recta que pasa por los puntos $P_1(6.5,500)\ y\ P_2(9,0)$, y tiene la siguiente forma:

$$d = at + b, \quad (6.5,500)\ y\ (9,0)$$

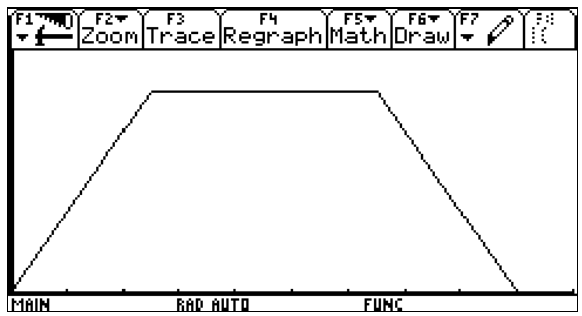
Dicha ecuación es:

$$d = -200t + 1800$$
$$6.5 < t \leq 9$$

La velocidad alcanzada en este trayecto fue de –200m/min. es negativa porque va de regreso.

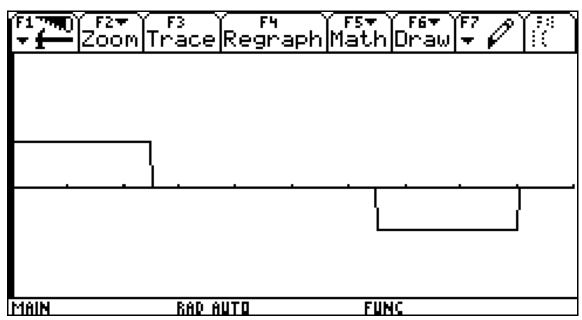
La función resultante de todo el recorrido es una función a trozos que se expresa de la siguiente forma:

$$d = \begin{bmatrix} 200t & 0 \leq t \leq 2.5 \\ 500 & 2.5 < t \leq 6.5 \\ -200t + 1800 & 6.5 < t \leq 9 \end{bmatrix}$$



La función de la velocidad es una función a trozos que toma la siguiente forma:

$$v = \begin{bmatrix} 200 & 0 \leq t \leq 2.5 \\ 0 & 2.5 < t \leq 6.5 \\ -200 & 6.5 < t \leq 9 \end{bmatrix}$$



Tomando en cuenta recta y parábolas

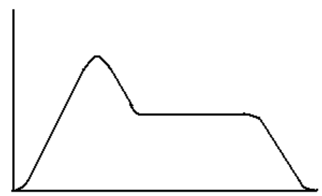
Ahora vamos a considerar los movimientos de Valentina, tomando en cuenta que estos sean rectas y parábolas, estas últimas son debido a que ella en ciertos momentos, tiene que disminuir su velocidad cuando se va parando o bien acelerar para continuar con su recorrido. Para ello se hacen las siguientes consideraciones:

2ª Consideración: Cuando Valentina se encuentra con Juan después de salir de la biblioteca.

3ª Consideración: Cuando Valentina se encuentra con Juan saliendo del salón de clase.

4ª Consideración: cuando Valentina se encuentra con Juan en la biblioteca.

2ª Consideración



Como podemos observar existen nueve cambios y son los siguientes:

1) Cuando Valentina sale del salón de clase y emprende el camino a la biblioteca, aquí consideramos que a ella le lleva 0.25minutos en alcanzar una velocidad constante, y que en ese lapso de tiempo recorre 25 metros, por lo que describe la mitad de una parábola cuyo vértice es el origen, y un punto de la parábola es $P(0.25,25)$ por lo que su ecuación es de la forma:

$$d = at^2; V(0,0)\ y\ P(0.25,25)$$
$$d = 400t^2 \quad 0 \le t \le 0.25$$

La función de la velocidad en esos 0.25minutos es: V = 800t $0 \le t \le 0.25$ por lo que su velocidad es de 200m/min. al final de ese trayecto.

2) Después recorre en línea recta 450 metros, para lo cual emplea dos minutos, llegando a un total de 475metros recorridos, por lo que consideramos los puntos $P_1(0.25,25)$ y $P_2(2.25,475)$; la forma de la ecuación de dicha recta es:

$$d = at + b; \quad P_1(0.25,25)\ y\ P_2(2.25,475)$$
$$d = 225t - 31.25$$
$$0.25 < t \le 2.25$$

La función de la velocidad en dicho trayecto es V = 225 $0.25 < t \leq 2.25$, es constante y es de 225m/min.

3) Cuando Valentina llega a la biblioteca, recoge el cuaderno y sale de la biblioteca para emprender el camino de regreso al salón, para entonces ella tiene que recorre 25 m. hasta recoger el cuaderno y otros 25m. para salir de la biblioteca, esto le lleva medio minuto, por lo que, el movimiento que describe es una parábola con vértice en (2.5,500), y que pasa por los puntos P_1(2.25,475) y P_2(2.75,475). La ecuación de dicho movimiento es de la forma:

$$d = -at^2 + bt + c;\ P_1(2.25{,}475), V(2.5{,}500)\ y\ P_2(2.75{,}475)$$
$$d = -400t^2 + 2000t - 2000$$
$$2.25 < t \leq 2.75$$

La función de la velocidad es V = -800t + 2000 $2.25 < t \leq 2.75$, por lo que su velocidad antes de llegar y tomar su cuaderno va disminuyendo de 200m/min. hasta cero, que es cuando se detiene y toma el cuaderno, para luego acelerar de 0 a –200m/min. (es negativa porque va de regreso).

4) Valentina recorre nuevamente en línea recta y con velocidad constante una distancia de 275m en un minuto; emocionada por ver desde lejos a Juan corre más rápido que la primera vez. La recta que describe el movimiento de Valentina pasa por los puntos P_1(2.75,475) y P_2(3.75,200), y es de la forma:

$$d = -at + b;\ P_1(2.75{,}475)\ y\ P_2(3.75{,}200)$$
$$d = -275t + 1231.25$$
$$2.75 < t \leq 3.75$$

La función de la velocidad es V = -275 $2.75 < t \leq 3.75$, por lo que su velocidad en dicho trayecto es de –275m/min. es constante, y negativa porque va de regreso.

5) Antes de encontrarse con Juan ella tiene que ir disminuyendo la velocidad, hasta hacer alto total, en un lapso de 0.25 minutos, en los cuales recorre 25m, por lo que consideramos

la mitad de una parábola con vértice en (4,175) que es cuando se detiene completamente, y que pasa por el punto P(3.75,200). Dicha parábola es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
&d = at^2 + bt + c; V(4{,}175)\ y\ P(3.75{,}200)\\
&d = 400t^2 - 3200t + 6575\\
&3.75 < t \le 4
\end{aligned}$$

La función de la velocidad es V = 800t - 3200 al finalizar este lapso de tiempo, por lo que su velocidad es de –200m/min.

6) Recordemos que al encontrarse con Juan, se queda ahí durante cuatro minutos, es decir, no avanza en su recorrido, y la función que describe esta situación pasa por los puntos P_1(4.175) y P_2(8,175), por lo que su forma es:

$$\begin{aligned}
&d = a; P_1(4{,}175)\ y\ P_2(8{,}175)\\
&d = 175\\
&4 < t \le 8
\end{aligned}$$

La velocidad en ese intervalo de tiempo es nula, por lo tanto su función será: V = 0

7) A los 8 minutos emprende de nuevo el retorno a su salón de clases, en consecuencia, pensamos que tarda 0.25 minutos y se desplaza 25m antes de alcanzar su máxima velocidad, este movimiento registra nuevamente la mitad de una parábola con vértice en (8,175) y que pasa por el punto P(8.25,150), por lo que la forma de dicha función es:

$$\begin{aligned}
&d = -at^2 + bt + c; V(8{,}175)\ y\ P(8.25{,}150)\\
&d = -400t^2 + 6400t - 25425\\
&8 < t \le 8.25
\end{aligned}$$

La función correspondiente a la velocidad al final de ese lapso de tiempo es V = -800t + 6400, lo que significa que llevaba una velocidad de –200m/min.

8) Para recuperar el tiempo que perdió con Juan y poder llegar a tiempo a su clase de música. sólo le faltan por recorrer aproximadamente 175m, y sólo cuenta con 0.75minutos ,

así es que, nuevamente corre en línea recta para llegar al salón de clases por lo que se supone que dicha recta pasa por los puntos $P_1(8.25,150)$ y $P_2(8.75,25)$ la cual toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
&d = -at + b;\ P_1(8.25,150)\ y\ P_2(8.75,25)\\
&d = -250t + 1137.5\\
&8.25 < t \le 8.75
\end{aligned}$$

Por lo que la función de la velocidad es V = -250, es constante y de –250m/min.

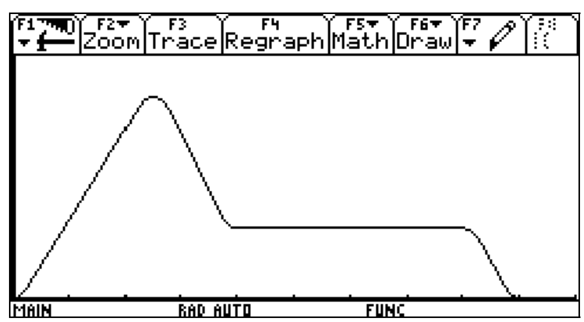
9) Finalmente le faltan 25m para llegar a su destino, en el cual tiene que disminuir su velocidad hasta hacer alto total, aquí de nuevo se concluye que es una media parábola cuyo vértice es el punto (9,0) y que pasa por el punto P(8.75,25), la forma de ésta parábola es:

$$\begin{aligned}
&d = at^2 + bt + c;\ P(8.75,25)\ y\ V(9,0)\\
&d = 400t^2 - 7200t + 32400\\
&8.75 < t \le 9
\end{aligned}$$

Aquí la función de la velocidad es V = 800t – 7200, lo que significa que su velocidad al inicio de este trayecto fue de –200m/min.

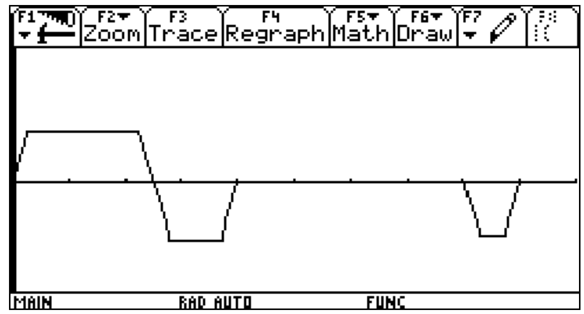
La función final de todo el recorrido que realiza Valentina, es una función a trozos cuya expresión es la siguiente:

$$d = \begin{bmatrix}
400t^2 & 0 \le t \le 0.25\\
225t + 24.75 & 0.25 < t \le 2.25\\
-400t^2 + 2000t - 2000 & 2.25 < t \le 2.75\\
-275t + 1231.25 & 2.75 < t \le 3.75\\
400t^2 - 3200t + 6575 & 3.75 < t \le 4\\
175 & 4 < t \le 8\\
-400t^2 + 6400t - 25425 & 8 < t \le 8.25\\
-250t + 1137.5 & 8.25 < t \le 8.75\\
400t^2 - 7200t + 32400 & 8.75 < t \le 9
\end{bmatrix}$$

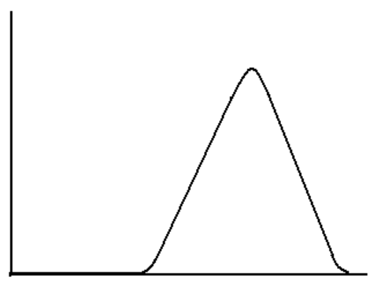


La función final de la velocidad de Valentina en todo el trayecto, es una función a trozos cuya expresión es la siguiente:

$$v = \begin{bmatrix} 800t & 0 \le t \le 0.25 \\ 225 & 0.25 < t \le 2.25 \\ -800t + 2000 & 2.25 < t \le 2.75 \\ -275 & 2.75 < t \le 3.75 \\ 800t - 3200 & 3.75 < t \le 4 \\ 0 & 4 < t \le 8 \\ -800t + 6400 & 8 < t \le 8.25 \\ -250 & 8.25 < t \le 8.75 \\ 800t - 7200 & 8.75 < t \le 9 \end{bmatrix}$$



3ª Consideración.



En esta consideración sólo encontramos seis cambios, los cuales describimos a continuación:

1) Cuando Valentina se encuentra con Juan al salir del salón de clases, por lo que transcurren cuatro minutos, y todavía no ha iniciado su recorrido, es decir, no logra avanzar en este tiempo. Por tanto se describe una recta que pasa por los puntos $P_1(0,0)$ y $P_2(4,0)$. Dicha recta es de la forma:

$$d = a; P_1(0,0)\ y\ P_2(4,0)$$
$$d = 0$$
$$0 \le t \le 4$$

Como en este lapso de tiempo no hay movimiento, la función de la velocidad es: V = 0

2) Al iniciar su recorrido a la biblioteca, le toma 0.25 minutos en alcanzar una velocidad constante, y en los que recorre 25m, por lo que la función que describe dicho movimiento es una media parábola cuyo vértice es el punto (4,0) y pasa por el punto P(4.25,25). La forma de ésta parábola es:

$$
\begin{aligned}
&d = at^2 + bt + c; V(4,0)\ y\ P(4.25,25) \\
&d = 400t^2 - 3200t + 6400 \\
&4 < t \leq 4.25
\end{aligned}
$$

La función correspondiente a la velocidad es: V = 800t – 3200 lo cual implica que Valentina alcanzó en este corto tiempo una velocidad de 200m/min.

3) Después Valentina hace un recorrido en línea recta hacia la biblioteca, aquí consideramos que ella tiene que recorrer 450m en dos minutos, así que la recta que describe su movimiento pasa por los puntos P_1(4.25,25) y P_2(6.25,475), y la forma de ésta función es:

$$
\begin{aligned}
&d = at + b; P_1(4.25,25)\ y\ P_2(6.25,475) \\
&d = 225t - 931.25 \\
&4.25 < t \leq 6.25
\end{aligned}
$$

La velocidad promedio en este trayecto fue de 225m/min. y la función de la velocidad es: V = 225

4) Cuando Valentina llega a la biblioteca, recoge el cuaderno y sale de la biblioteca para emprender el camino de regreso al salón de clases, entonces ella tiene que recorre 25 m. hasta recoger el cuaderno y otros 25 m. para salir de la biblioteca, esto le lleva medio minuto, por lo que, el movimiento que describe es una parábola con vértice en (6.5,500), y que pasa por los puntos P_1(6.25,475) y P_2(6.75,475). La función de dicho movimiento es de la forma:

$$
\begin{aligned}
&d = -at^2 + bt + c; V(6.5,500), P_1(6.25,475)\ y\ P_2(6.75,475) \\
&d = -400t^2 + 5200t - 16400 \\
&6.25 < t \leq 6.75
\end{aligned}
$$

La velocidad de Valentina disminuye de 200m/min. hasta cero, que es cuando se detiene a recoger rápidamente su cuaderno, para después acelerar de 0 a –200m/min. Para llegar a tiempo a su clase. La función de la velocidad en este trayecto es: V = -800t + 5200

5) Nuevamente para llegar al salón de clases recorre en línea recta 450m en dos minutos, la recta de dicho movimiento pasa por los puntos P_1(6.75,475) y P_2(8.75,25), y tiene la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
&d = -at + b;\ P_1(6.75.475)\ y\ P_2(8.75{,}25)\\
&d = -225t + 1993.75\\
&6.75 < t \leq 8.75
\end{aligned}
$$

La velocidad de Valentina en este trayecto es de –225m/min. ya hemos dicho que es negativa porque ya va de regreso, y la función de la velocidad es: V = -225

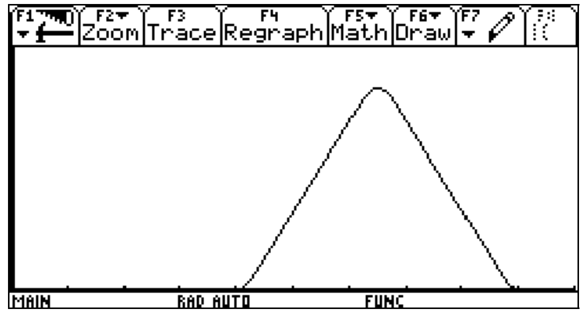
6) Finalmente antes de entrar al salón de clase Valentina tiene que disminuir su velocidad, por lo que se considera que describe una mitad de parábola con vértice en (9,0) y que pasa por el punto P(8.75,25), cuya forma es:

$$
\begin{aligned}
&d = at^2 + bt + c;\ V(9{,}0)\ y\ P(8.75{,}25)\\
&d = 400t^2 - 7200t + 32400\\
&8.75 < t \leq 9
\end{aligned}
$$

La función de la velocidad que corresponde a este trayecto es : V = 800t – 7200, lo cual significa que tuvo que disminuir su velocidad de -200m/min. hasta llegar a cero, que es cuando llega a su salón de clases.

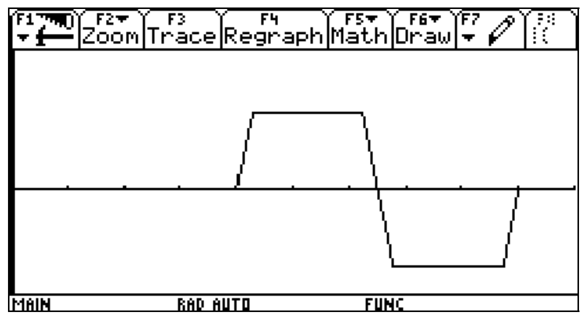
La función resultante de todo el recorrido que realizó Valentina, es una función a trozos que podemos expresar de la siguiente manera:

$$d=\begin{bmatrix} 0 & 0\le t\le 4 \\ 400t^2-3200t+6400 & 4<t\le 4.25 \\ 225t-931.25 & 4.25<t\le 6.25 \\ -400t^2+5200t-16400 & 6.25<t\le 6.75 \\ -225t+1993.75 & 6.75<t\le 8.75 \\ 400t^2-7200t+32400 & 8.75<t\le 9 \end{bmatrix}$$

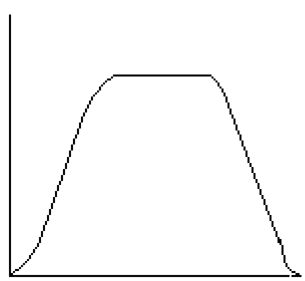


La función final de la velocidad de Valentina en todo el trayecto, es una función a trozos cuya expresión es la siguiente:

$$v=\begin{bmatrix} 0 & 0\le t\le 4 \\ 800t-3200 & 4<t\le 4.25 \\ 225 & 4.25<t\le 6.25 \\ -800t+5200 & 6.25<t\le 6.75 \\ -225 & 6.75<t\le 8.75 \\ 800t-7200 & 8.75<t\le 9 \end{bmatrix}$$



4ª Consideración.



En esta última consideración sólo encontramos siete cambios, los cuales describimos a continuación:

1) Cuando Valentina se encuentra con Juan en la biblioteca, aquí consideramos que a ella le lleva 0.25minutos en alcanzar una velocidad constante, y que en ese lapso de tiempo

recorre 25 metros, por lo que describe la mitad de una parábola cuyo vértice es el origen, y un punto de la parábola es P$(0.25,25)$ por lo que su ecuación es de la forma:

$$d = at^2; V(0,0)\ y\ P(0.25,25)$$
$$d = 400t^2 \quad 0 \le t \le 0.25$$

La función de la velocidad en esos 0.25minutos es: V = 800t $0 \le t \le 0.25$ por lo que su velocidad es de 200m/min. al final de ese trayecto.

2) Después recorre en línea recta 450metros, para lo cual emplea dos minutos y medio, llegando a un total de 475metros recorridos, por lo que consideramos los puntos $P_1(0.25,25)$ y $P_2(2.5,475)$; la forma de la ecuación de dicha recta es:

$$d = at + b;\ P_1(0.25,25)\ y\ P_2(2.75,475)$$
$$d = 180t - 20$$
$$0.25 < t \le 2.75$$

La función de la velocidad en dicho trayecto es $V = 180,\ 0.25 \le t \le 2.75$, es constante y es de 180m/min.

3) Antes de llegar a la biblioteca tiene que ir bajando su velocidad hasta hacer alto total, por lo que la gráfica describe una media parábola con vértice en $(3,500)$ y que pasa por el punto $P(2.75,475)$, la ecuación de dicha parábola es de la forma siguiente:

$$d = at^2 + bt + c; \quad V(3,500)\ y\ P(2.75,475)$$
$$d = -400t^2 + 2400t - 3100$$
$$2.75 < t \le 3$$

La ecuación de la velocidad en este trayecto es: $v = -800t + 2400, \quad 2.75 \le t \le 3$ es negativa porque va disminuyendo.

4) Al llegar a la biblioteca que es donde se encuentra con Juan y pierde los cuatro minutos, la ecuación de dicha recta es de la forma:

$$d = a, \quad P_1(3,500)\ y\ P_2(7,500)$$
$$d = 500$$
$$3 < t \le 7$$

Al no haber desplazamiento la velocidad es igual a cero, por lo que su ecuación se describe como $v = 0, \quad 3 < t \le 7$

5) Una vez que han transcurrido los cuatro minutos que se detuvo con Juan, nuevamente emprende el regreso al salón de clases por lo que para alcanzar una velocidad constante empieza a acelerar, y su recorrido describe una media parábola con vértice en $(7,500)$ y pasa por el punto $P(7.25,475)$, dicha ecuación es de la forma:

$$d = at^2 + bt + c, \quad V(7,500)\ y\ P(7.25,475)$$
$$d = -400t^2 + 5600t - 19100$$
$$7 < t \le 7.25$$

La ecuación de la velocidad en este trayecto es: $v = -800t + 5600, \quad 7 \le t \le 7.25$ es negativa porque ya va de regreso.

6) Después corre en línea recta para llegar al salón de clases 450 metros y lo hace en minuto y medio, la ecuación de dicha recta pasa por los puntos $P_1(7.25,475)\ y\ P_2(8.75,25)$ y es de la forma siguiente:

$$d = at + b, \quad P_1(7.25,475)\ y\ P_2(8.75,25)$$
$$d = -300t + 2650$$
$$7.25 < t \le 8.75$$

En consecuencia la ecuación de la velocidad en este trayecto es: $v = -300 \quad 7.25 < t \le 8.75$, es negativa porque va de regreso.

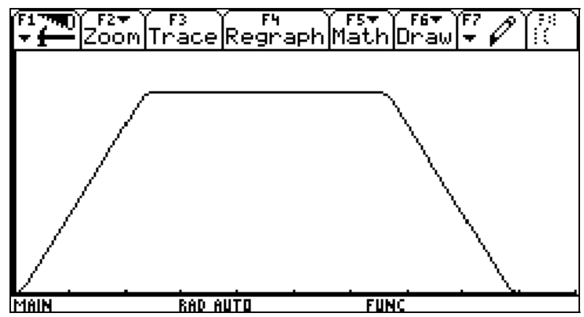
7) Finalmente para llegar al salón y hacer alto total tendrá que disminuir su velocidad, por lo que le faltan 25 metros, los cuales los recorre en 0.25 minutos, este recorrido toma la forma de una media parábola con vértice en $(9,0)$ y pasa por el punto $P(8.75,25)$, la expresión algebraica de dicha parábola es la siguiente:

$$d = at^2 + bt + c, \quad V(9,0)\ y\ P(8.75,25)$$
$$d = 400t^2 - 7200t + 32400$$
$$8.75 < t \leq 9$$

La ecuación de la velocidad en este trayecto es: $v = 400t - 7200 \quad 8.75 \leq t \leq 9$

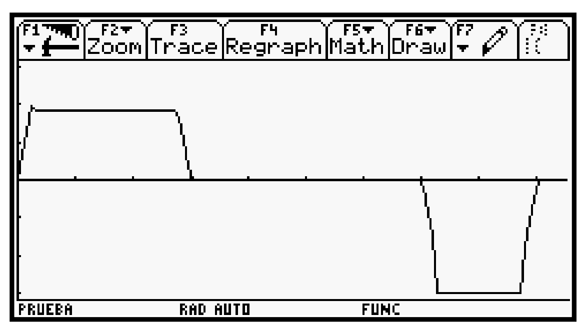
La función resultante de todo el recorrido que realizó Valentina, es una función a trozos que podemos expresar de la siguiente manera:

$$d = \left[\begin{array}{ll} 400t^2 & 0 < t \leq 0.25 \\ 180t - 20 & 0.25 < t \leq 2.75 \\ -400t^2 + 2400t - 3100 & 2.75 < t \leq 3 \\ 500 & 3 < t \leq 7 \\ -400t^2 + 5600t - 19100 & 7 < t \leq 7.25 \\ -300t + 2650 & 7.25 < t \leq 8.75 \\ 400t^2 - 7200t + 32400 & 8.75 < t \leq 9 \end{array}\right]$$



La función final de la velocidad de Valentina en todo el trayecto, es una función a trozos cuya expresión es la siguiente:

$$v = \left|\begin{array}{ll} 800t & 0 < t \leq 0.25 \\ 180 & 0.25 < t \leq 2.75 \\ -800t + 2400 & 2.75 < t \leq 3 \\ 0 & 3 < t \leq 7 \\ -800t + 5600 & 7 < t \leq 7.25 \\ -300 & 7.25 < t \leq 8.75 \\ 800t - 7200 & 8.75 < t \leq 9 \end{array}\right|$$



Recordemos que la solución analítica de la situación de aprendizaje no se llevó a cabo por la falta de tiempo, sin embargo estos resultados puede servir para trabajos futuros.

Anexo 4

Taller de Modelación, 11 de octubre 2003. Tercera sesión.

Primera parte

Actividades del monitor: animar a que los integrantes del equipo expresen en voz alta lo que estén pensando, estar atentos a todas las observaciones que ellos hagan, así como recordarles que tienen que elaborar un reporte de la actividad que están realizando. Es muy importante no entablar conversación con los participantes, y sobre todo procurar que todos se involucren en la actividad en los tiempos que se establezcan.

¿Qué tipo de dibujos previos hacen para describir o entender la situación?	
¿Establecen un sistema de coordenadas? Si es así cuáles son las variables que emplean para determinar los cambios de posición	
¿Toman en cuenta las unidades y las escalas en los ejes?	

Describe cómo lo hacen	
¿Que tipo de trazos realizan para construir la gráfica?, es decir, si utilizan rectas o curvas o rectas y curvas	
Establecen algún tipo de función matemática, si es así cuál o cuáles son En su gráfica señalan los cambios de posición de ida, de regreso y cuando se detiene;	

emplean intervalos, (indican de donde a donde) para describir dichos cambios	
Hacen referencia a otra situación o fenómeno para explicar su gráfica	
Con respecto a la gráfica de la velocidad pueden identificar en la gráfica cuando tiene que ir más rápido, más lento o se detiene, si es así cómo lo hacen.	
Al hacer la gráfica de la velocidad, la relacionan con la de la distancia.	

Utilizan variables y escalas para determinar la velocidad, si es así cuáles son.	
¿Qué tipo de expresiones utilizan para indicar el tipo de velocidad que está en juego? Llegan a diseñar algún tipo de función para la velocidad, si es así, cuál o cuáles son	

Segunda parte.

Esta parte está relacionada con la modelación del problema con el uso del sensor y la calculadora graficadora.

Cómo determinan el movimiento ante el sensor para lograr una gráfica que se parezca a la propuesta por ellos.	
¿Qué problemas tiene para usar el sensor y la graficadora?	
¿Cómo es la gráfica que logran obtener con el sensor y la calculadora tanto para la posición y la velocidad?	

Después de obtener la gráfica de la posición qué observaciones hacen con respecto a la que ellos propusieron al inicio.	
Con respecto a la gráfica de la velocidad que obtienen con la graficadora, qué observaciones hacen al compararla con la que ellos propusieron inicialmente.	
Utilizan las tablas para ver el tipo de variación.	
Emplean la regresión para obtener un tipo de función que más se acerque a la que	

aparece en la graficadora	
En la discusión grupal cuál fue el equipo que tuvo mejor desarrollo.	