

**A105-00122-1**

**ALGUNOS FENÓMENOS DIDÁCTICOS PRESENTES EN LA CONSTRUCCIÓN ESCOLAR DE LAS UNIDADES ANGULARES**

Hilario Meneses Pérez

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA (CICATA) DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

[hilariomeneses@gmail.com](mailto:hilariomeneses@gmail.com)

Gustavo Martínez Sierra

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA (CICATA) DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

[gmartinezierra@gmail.com](mailto:gmartinezierra@gmail.com)

**Eje temático: Análisis del proceso de aprendizaje**

*Este trabajo ofrece resultados sobre la construcción del conocimiento a través del estudio de los procesos presentes en la construcción de sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado procesos de articulación y convención matemática. Se muestra una descripción, de lo que a nuestro parecer son nociones básicas que permiten interpretar a la convención matemática como generadora de conocimiento dentro del marco de la aproximación socioepistemológica en matemática educativa. Para tal fin se dan evidencias del funcionamiento de la noción convención matemática, de manera específica se quiere exponer el proceso de conversión de las unidades angulares, como una evidencia más de ésta. En particular se tiene por objetivo presentar los resultados de los avances por identificar los procesos de articulación y convención matemática presentes en la construcción de la conversión de unidades angulares (grados ↔ radianes → real).*

*Palabra clave: Socioepistemología, construcción/producción de conocimiento, convención matemática, funciones trigonométricas.*

**Introducción.**

La investigación que se desarrollo está inmersa dentro de una línea de investigación que tienen por objetivo favorecer el desarrollo, en situación escolar, del pensamiento matemático avanzado en los estudiantes. En una de las facetas teóricas de esta línea se asume que el objeto de estudio de la Matemática Educativa es el sistema didáctico (estudiantes, saber y profesor-institución) y los fenómenos que en él suceden. Es dentro de esta perspectiva teórica que hemos asumido como problema de investigación la explicación sistémica de algunos fenómenos didácticos que investigaciones anteriores han evidenciado. Estos fenómenos giran alrededor de las respuestas erróneas que proporcionan algunos estudiantes e incluso profesores sobre uso las unidades angulares (*grados ↔ radianes ↔ real.*) y a su falta de argumentos para justificar las respuestas correctas que proporcionan. Esta situación es resumida en lo siguiente:

- Las respuestas reiteradas de estudiantes y profesores de nivel secundario, medio y superior en donde desconocen el ¿por qué? cuando se usan medidas angulares en radianes no deben indicarse unidades.
- La ausencia de argumentos, entre estudiantes y profesores del área de nivel, medio y superior, distintos a la memoria (como 'leyes'), para establecer porque en matemáticas superiores la medida más conveniente para un ángulo es el radian.

La detección de los fenómenos antes citados proporciona evidencia que la utilización de medidas angulares en radianes puede no haber alcanzado la estabilidad necesaria para la construcción de la noción de función trigonométrica. Esta detección es el origen del trabajo de investigación; ya que todos los fenómenos mencionados funcionan como obstáculos para la construcción de la noción de función trigonométrica.

La postura sistémica que asume el trabajo de investigación lo lleva a abordar preguntas de investigación relativas al sistema didáctico. Al ser nuestro objetivo la explicación de las respuestas de los estudiantes –las cuales reflejan sus concepciones– nuestro trabajo hará preguntas alrededor del saber.

En cuanto al saber enseñado consideramos las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles fueron los mecanismos que permitieron la construcción y la aceptación social de la noción de unidades angulares en radianes?
- ¿Cuál es la vida escolar de la utilización de las unidades angulares grados ↔radianes ↔real?

Hemos formulado estas preguntas con el objetivo de establecer los mecanismos del consenso en dos grupos sociales; el primero el de la sociedad de matemáticos que construyó la noción de unidades angulares *grados* → *radianes* → *reales* y el segundo el de la sociedad (alumnos, profesor) que conforman un sistema didáctico con el fin de estudiar la misma noción. Nuestra hipótesis fundamental es que los mecanismos que encontremos en el primero nos proporcionarán elementos para entender los mecanismos del segundo y con ello responder a nuestra pregunta de investigación.

La detección de los fenómenos antes citados proporciona evidencia de que la noción de unidades angulares en radianes, puede no haber alcanzado la estabilidad necesaria para la construcción de la noción de función trigonométrica. Esta detección es el origen de este trabajo de tesis; ya que todos los fenómenos mencionados funcionan como obstáculos para la construcción de la noción de función trigonométrica en el sentido antes considerado.

### Metodología

La metodología que se desprende de nuestra postura sistémica y de las preguntas con que hemos descrito el problema de investigación determina la necesidad de llevar a cabo el análisis a los libros de texto con el objetivo de construir un esquema de la vida escolar de la utilización de las unidades angulares grados ↔radianes ↔real. Además de contemplar el análisis de programas de estudio para identificar aquellas de sus partes que consideran la noción de la conversión de unidades angulares y el análisis de textos del nivel medio superior y superior.

Con base a lo encontrado en el análisis didáctico se diseñó y aplicó una entrevista a varios profesores de nivel medio superior, con la intención de conocer cómo enseñan o explican a sus estudiantes temas relacionados con las funciones trigonométricas y cómo entienden ellos mismos las transiciones del argumento de una función trigonométrica.

Por lo que de acuerdo a la intención de la investigación realizaremos un análisis a los propósitos que se plantean para el tratamiento de la función trigonométrica, cuál es la bibliografía sugerida para el profesor y estudiante. Además, ya ubicados los libros de texto que se utilizan en el tratamiento de la función trigonométrica, analizaremos la forma de definir la medida angular en ambos sistemas (sexagesimal y cíclico), cuál es la razón de grados ↔radianes ↔real cómo es el tránsito de radianes ↔real, y cuál es la justificación de tales transiciones para la graficación de la función trigonométrica.

Criterios a considerar en el análisis de textos.

- ✓ La forma de definir la medida angular en el sistema sexagesimal.
- ✓ La manera de definir la medida angular en el sistema cíclico.
- ✓Cuál es la intención de la conversión *grados*→*radianes*.
- ✓ Cómo es el tránsito de *radianes*→*reales*.
- ✓Cuál es el fundamento de tales transiciones para graficación de las FT.

Consideramos que el análisis de libros así como la entrevista realizada a los profesores nos mostrará evidencias de la vida escolar de la transición por la que pasa el argumento de una FT. Los análisis que realizaremos lo haremos mediante tres etapas.

- **Primera etapa:** se estudiarán los planes y programas de estudio, en específico los objetivos que se plantean en éste.
- **Segunda etapa:** se analizarán los libros de textos sugeridos tanto para el profesor como para el estudiante, observando de manera específica cómo es el tratamiento de las medidas angulares, de sus transiciones, además de los ejercicios y ejemplos que se utilizan para ello.

- **Tercer etapa:** basándonos en lo encontrado en los anteriores análisis se diseñará un instrumento de análisis dirigido tanto para profesores como alumnos del nivel medio superior y superior con la intención de conocer cómo vive el concepto de la conversión de unidades angulares, la transiciones *grados* → *radianes* → *reales*.

Análisis de datos y discusión de resultados.

De acuerdo con el análisis didáctico realizado se pueden distinguir seis etapas, que coinciden con Montiel 2005, en la construcción escolar de las funciones trigonométricas. Estas etapas, señalan la estructura general del discurso matemática general de las FT:

- Etapa Escolar 1. Sobre los ángulos: clasificación, unidad de medida, ángulos dirigidos.
- Etapa Escolar 2. Sobre los triángulos: clasificación, propiedades, razones trigonométricas, solución de triángulos, las razones trigonométricas en el plano y sus signos de acuerdo a su posición.
- Etapa Escolar 3. Problemas de aplicación, leyes e identidades trigonométricas.
- Etapa Escolar 4. El círculo trigonométrico: círculo unitario, ángulos-arcos, conversión de unidades grados → radianes → reales, graficación de la función trigonométrica.
- Etapa escolar 5. La función trigonométrica: dominio y rango, propiedades (periodicidad y acotamiento), variación de parámetros.
- Etapa Escolar 6. Operaciones con la función trigonométrica: derivación e integración.

En el Nivel Superior la aparición de la función trigonométrica depende del contexto profesional universitario, normalmente la encontramos en los programas de ciencia e ingeniería.

En este contexto se distingue al menos dos tipos de conceptos a los que hemos interpretado como articuladores, y por tanto posibles portadores de rupturas conceptuales, de los sistemas conceptuales matemáticos entre las distintas etapas escolares:

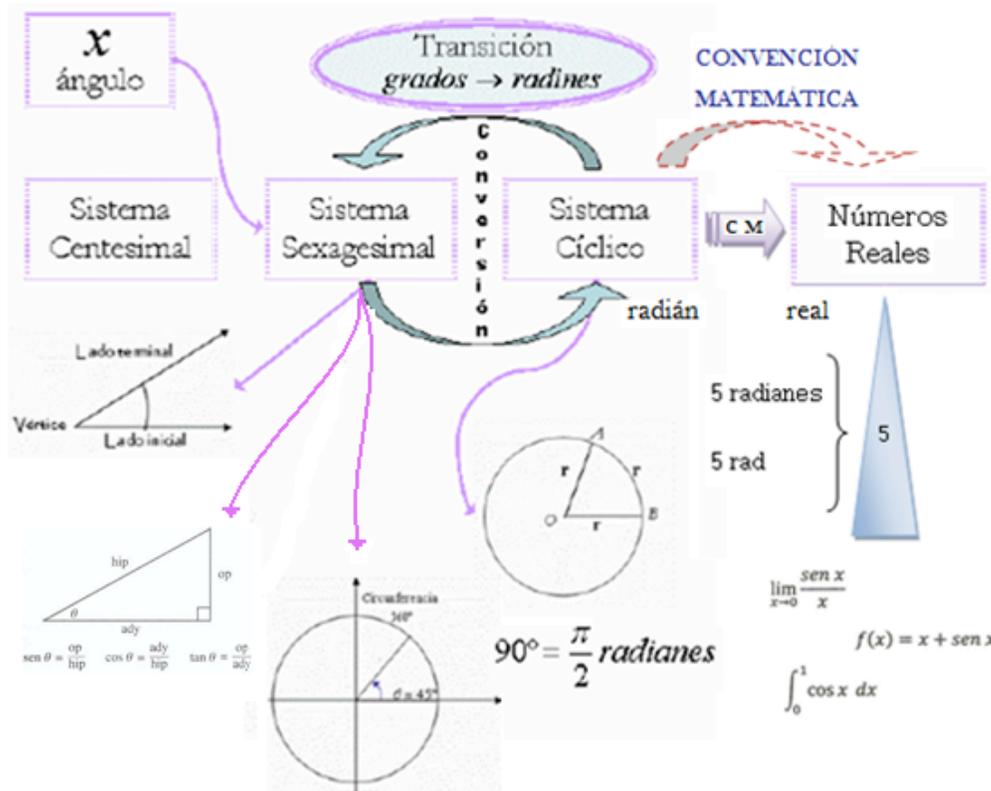
1. El establecimiento del significado de ángulos mayores de  $360^\circ$  y de ángulos negativos.
2. El establecimiento del significado del valor de las funciones trigonométricas en números reales a través de la conversión de unidades angulares *grados* → *radianes* → *reales*; para así poder definir a las FT como funciones de variable real: Si  $x$  es un número real,  $(\text{sen } x)$  es igual, por definición,  $[\text{sen}(x \text{ radianes})]$ .

En el análisis didáctico encontramos un patrón común, que es la evidencia de un discurso matemático escolar. La mayoría de los libros señalados inician definiendo al ángulo como una abertura de dos semirrectas unidas por un punto denominado vértice o bien considerando una circunferencia que tienen de longitud  $360^\circ$  y la unidad de medida es el grado ( $1^\circ$ ) y si éste se divide en 60 partes iguales se forma el minuto ( $1'$ ) y si éste a su vez se divide en otras 60 partes iguales se forma el segundo ( $1''$ ). Posteriormente se define a la medida angular en el sistema cíclico, donde se afirma que un radian es la medida de un ángulo con el vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de circunferencia igual al radio. En seguida se presentan fórmulas de conversión de un sistema a otro. Es de señalar que ocasionalmente, en estas fórmulas encontramos errores, en el sentido matemático, que muestran la presencia de rupturas conceptuales. Así, por ejemplo, en Fuenlabrada (2004)

encontramos la expresión  $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{radianes}$ , en donde podemos notar el uso de dos unidades de medida

en el mismo lado de una igualdad, y en Ruiz (2005), encontramos que escribe  $30^\circ = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$  bajo el argumento que "por simplicidad hemos omitido la palabra radianes al aplicar la regla de transformación", la omisión de la expresión "rad" o "radianes" no queda muy clara para el lector, en un momento se está manipulando una medida angular en un sistema cíclico y en otro momento solo a un número real sin quedar realmente explícito el por qué de tal acción. Es más, cuando algunos autores lo hacen explícito sólo justifican a la omisión de las expresiones ya mencionadas como algo que simplificará, facilitará y proporcionará comodidad para

seguir manipulando la cantidad solo como un número real. Finalmente en algunos de los libros se prosigue con la graficación de las funciones trigonométricas, en algunos casos solo la caracterización de éstas; en donde algunas veces usa a los grados como unidad para el dominio de las funciones trigonométricas. La estructura del discurso matemático escolar mencionado con anterioridad se simplifica en el esquema siguiente.



Estructura del discurso matemático escolar de las FT en los libros de texto (Méndez, 2008-Meneses, 2009)

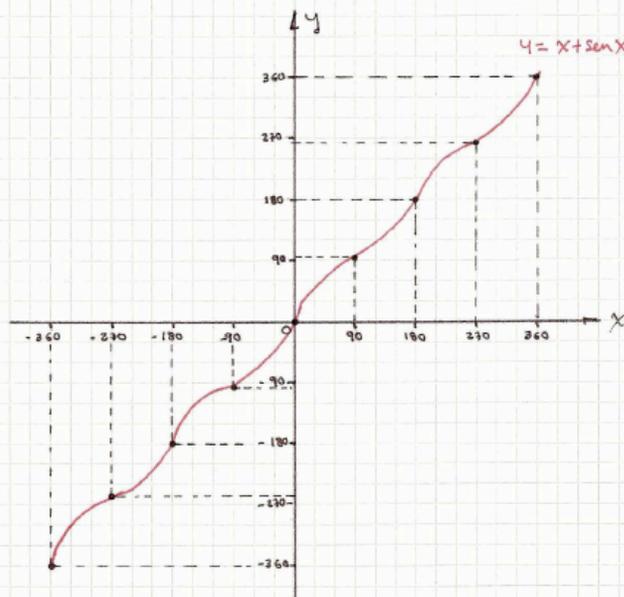
Con base en lo encontrado en el análisis de los libros de texto se diseñó una entrevista tanto para estudiantes como para profesores con la intención de averiguar que concepciones tienen de las unidades angulares.

La principal señal de ruptura conceptual que encontramos en los profesores se presenta cuando se encuentran ante la decisión de elegir una unidad de medida angular (la sexagesimal o la cíclica) o utilizar números reales. Por ejemplo, en una de las actividades un profesor asigna valores de  $x$  reales, mientras que a la  $x$  de  $\text{sen } x$  le da valores en grados a pesar de que ambas expresiones constituyen una sola expresión, en una integral definida de una función trigonométrica se asigna valores en grados al momento de integrar en los límites de la función y se determina utilizar valores del sistema sexagesimal para el plano de coordenadas rectangulares. Lo que provoca considerar que el dominio de las funciones trigonométricas es dimensional con la unidad en grados o radianes.

#### Actividad 4

Construye un bosquejo de la gráfica de la función  $y = f(x) = x + \sin x$ . Si lo deseas utiliza la siguiente tabla como ayuda.

x (grados)	y = x + sin x
-360	-360
-270	-269
-180	-180
-90	-91
0	0
90	91
180	180
270	269
360	360

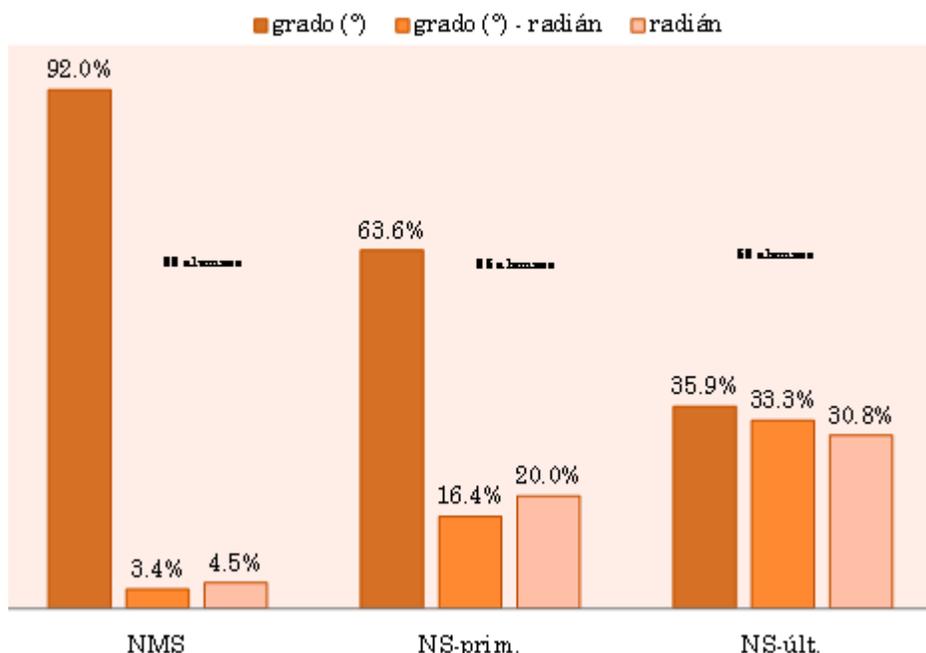


2. Lo que nos pide este problema es, evaluar la siguiente

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \sin x \, dx \\
 \Rightarrow & \int_0^1 \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^1 \\
 & = -[\cos(1) - \cos(0)] \\
 & = -[0,9998 - 1] \\
 & = -[-0,000152] \\
 & = \underline{0,000152}
 \end{aligned}$$

Evidentemente que esta ruptura conceptual de la unidad angular es más evidente en estudiantes, así se manifiesta en el análisis realizado a los cuestionarios el cual queda sintetizado en el siguiente grafico. El estudiante elige equivocadamente como unidad de medida el grado

### Alumnos: ¿grados o radianes?



#### Conclusiones.

En este análisis podemos identificar un patrón que siguen los libros de texto que habitualmente son utilizados en el nivel superior para el tratamiento de Trigonometría, específicamente en lo que corresponde a las funciones trigonométricas, con la finalidad de que los estudiantes que necesiten recordar estos temas deben de estudiar este apartado cuidadosamente antes abordar temas como las derivadas y las integrales de las funciones trigonométricas, en tal contexto se estudia la evolución de la unidades angulares grados  $\rightarrow$  radianes  $\rightarrow$  reales ( $^\circ \rightarrow \text{rad} \rightarrow \mathbb{R}$ ) como concepto matemático.

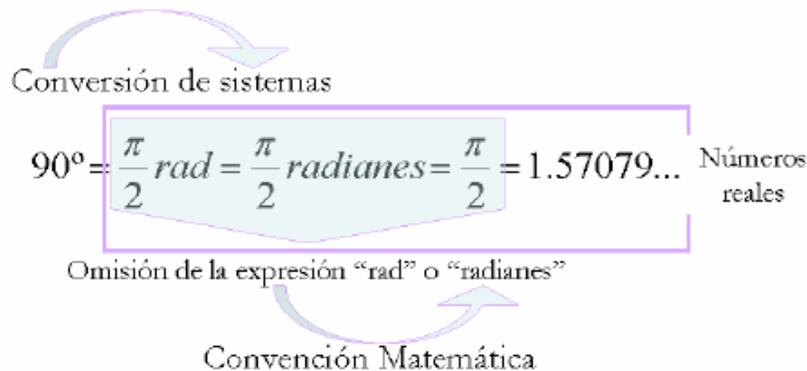
Algo característico de los libros analizados es el orden en que tratan los temas es muy similar. Aún más la forma en que se explican, por ejemplo, la medición angular en el sistema sexagesimal y la conversión de éste con el sistema cíclico es prácticamente la misma en cada los libros de texto.

Otro punto importante que se resalta en el análisis es que en los libros de texto analizados, no se hace explícito la evolución de radianes  $\rightarrow$  reales, además no se encuentra un argumento del por qué de las transiciones grados  $\rightarrow$  radianes  $\rightarrow$  reales. Algunos de estos libros muestran frases respecto a la transición radianes  $\rightarrow$  reales, por ejemplo: "se acostumbra omitir la palabra radianes", "cuando se usa el valor de un ángulo en radianes, no suelen indicarse las unidades", "por comodidad y simplicidad omitiremos la palabra radianes", etc. son muestra de que el uso del radián es una convención matemática necesaria para el tratamiento de las funciones trigonométricas.

En resumen, el análisis de los libros nos permite localizar algunas rupturas conceptuales asociado al concepto que hemos considerado como articulador.

No se hace explícito los motivos por los que repentinamente aparece un sistema de medición de ángulos como son los radianes.

La destematización (es decir el considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las funciones trigonométricas (Ver siguiente figura). Esto puede percibirse en las frases que algunos de estos libros presentan, como por ejemplo: "se acostumbra omitir la palabra radianes", "cuando se usa el valor de un ángulo en radianes, no suelen indicarse las unidades", "por comodidad y simplicidad omitiremos la palabra radianes".



Una explicación de tales rupturas surge de la consideración que dentro de la estructura del discurso matemático escolar existe diferentes prácticas sociales, tales como: 1) aquella que considera la medición del ángulo a través de grados es considerado como "natural" y en consecuencia es la unidad de medida elegida dentro de la actividad matemática escolar. En contraste, desde nuestro enfoque, la medida de los ángulos con radianes es un concepto que articula, en sentido matemático, la medición de los ángulos con los grados y las FT como funciones de variable real. Así, la contradicción entre el significado matemático y el significado construido por el discurso matemático escolar es la fuente de las rupturas conceptuales.

#### Referencias

- Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(2), 195 – 218.
- Martínez-Sierra, G. (2008). From the analysis of the articulation of the trigonometric functions to the corpus of eulerian analysis to the interpretation of the conceptual breaks present in its scholar structure. In R. Cantoral, F. Fasanelli, A. Garciadiego, R. Stein., C. Tzanakis (Eds.) *Proceedings of the HPM 2008. History and Pedagogy of Mathematics. The HPM Satellite Meeting of ICME 11*.
- Méndez, C. (2008). *Sobre la construcción escolar de las funciones trigonométricas: La transición grados → radianes → reales en el nivel medio superior*. Tesis de maestría. Facultad de Matemáticas - Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México
- Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis de doctorado publicada. Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones e Intercambio Científico, Jaén España.
- Swokowsky-Cole (2002). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. México: International Thompson.
- Zill, D. (1992). *Álgebra y trigonometría*. México: Mc Graw Hill