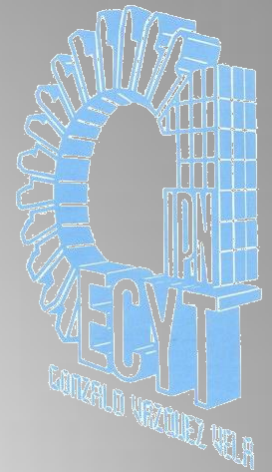


Instituto Politécnico Nacional
CECyT No. 1 "Gonzalo Vázquez Vela"



Cálculo Diferencial

Temario de tercer Corte

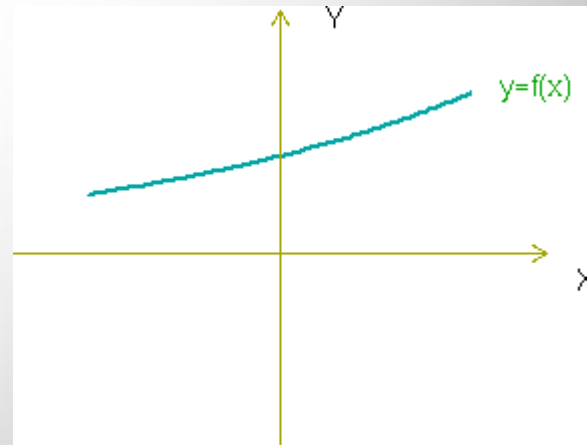
Prof. Martha Guadalupe
Escoto Villaseñor

**Creciente y
decreciente.**

Estrictamente creciente.

- Una función $f(x)$ es estrictamente creciente en un intervalo (a, b) , si para dos valores cuales quiera del intervalo x_1 y x_2 se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$



- Cuando en la gráfica de una función estrictamente creciente nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia arriba:
- $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- Una función f es estrictamente creciente en el punto de abscisa $x = a$ si existe algún número positivo h tal que f es estrictamente creciente en el intervalo : $(x - h, x + h)$
- De esta esta definición se deduce que si f es derivable en $x = a$ y f y es estrictamente creciente en el punto de abscisa $x = a$, entonces
- $f'(a) \geq 0$

Función creciente en un intervalo

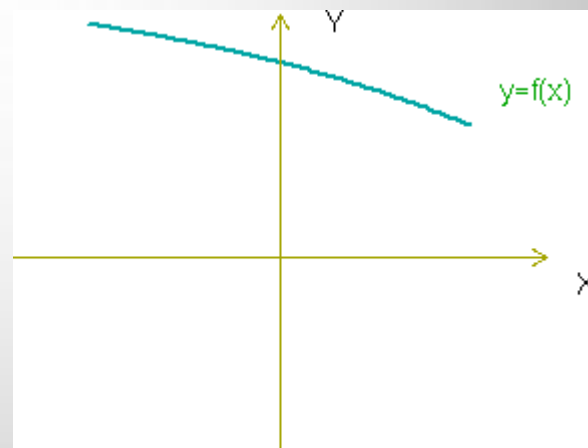
- Una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo (a, a) , si para dos valores cualesquiera del intervalo, x_1 y x_2 , se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Función estrictamente decreciente en un intervalo

- Una función $f(x)$ es estrictamente creciente en un intervalo (a, b) , si para dos valores cuales quiera del intervalo x_1 y x_2 se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$



- Cuando en la gráfica de una función estrictamente creciente nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia arriba:
- $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- Una función f es estrictamente creciente en el punto de abscisa $x = a$ si existe algún número positivo h tal que f es estrictamente creciente en el intervalo : $(x - h, x + h)$
- De esta esta definición se deduce que si f es derivable en $x = a$ y f' es estrictamente creciente en el punto de abscisa $x = a$, entonces
- $f'(a) \geq 0$

Función decreciente de un intervalo.

- Una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo (a, a) , si para dos valores cualesquiera del intervalo, x_1 y x_2 , se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

Concavidad

Si un punto $A(x,y)$ describe una curva la tangente A varia en la forma siguiente:

Cuando la pendiente de la tangente aumenta, cuando A describe el arco y la segunda derivada es positiva o cuando la tangente queda por debajo de la curva y el arco es cóncavo hacia arriba.

La pendiente de la tangente disminuye cuando A describe el arco y la segunda derivada es negativa, quedando la tangente por arriba de la curva y siendo el arco cóncavo hacia abajo.

CÁLCULO DEL SENTIDO DE LA CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN

- 1.- Calculamos la primera y segunda derivada.
- 2.- La segunda derivada la igualamos con cero y obtenemos los valores de “ x ”, los cuales son los puntos de inflexión (punto de cambio).

El siguiente ejercicio es un ejemplo de concavidad:

$$Y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

$$Y' = 3x^2 - 8x + 5$$

$$Y' = 6x - 8$$

$$6x - 8 = 0$$

$$6x = 8$$

$$x = 8/6$$

$$x = 4/3$$

x	y
3	8
2	1
1	5
0	0
-1	16

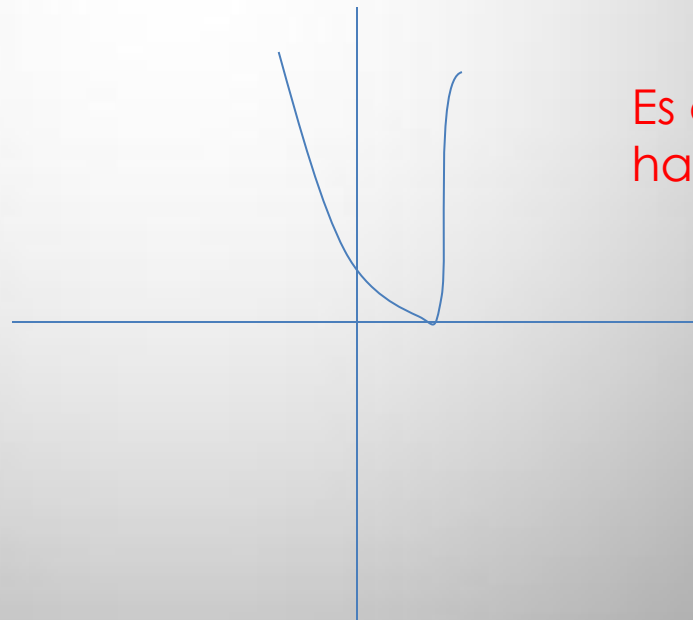
$$x^3 = 3x^2 dx/dx$$

$$= 3x^2$$

$$3x^2 = 3x (2) dx/dx$$

$$= 6x$$

$$Y' = 6x - 6$$



Es cóncava
hacia arriba

EJERCICIO A RESOLVER

- Calcula en que intervalo la función es cóncavo hacia arriba o abajo

$$y = 3x^2 - 3$$

$$y = 6x$$

$$6x = 0$$

$$0 = \frac{0}{6}$$

$$x = 0$$

X	Y
2	
1	
0	
-1	
-2	

- Poner el valor dado a un rango de 2 hacia arriba y abajo

- Sustituir en los valores de la tabla en $y = 6x$

$$y = 6(2) = 12$$

$$y = 6(1) = 6$$

$$y = 6(0) = 0$$

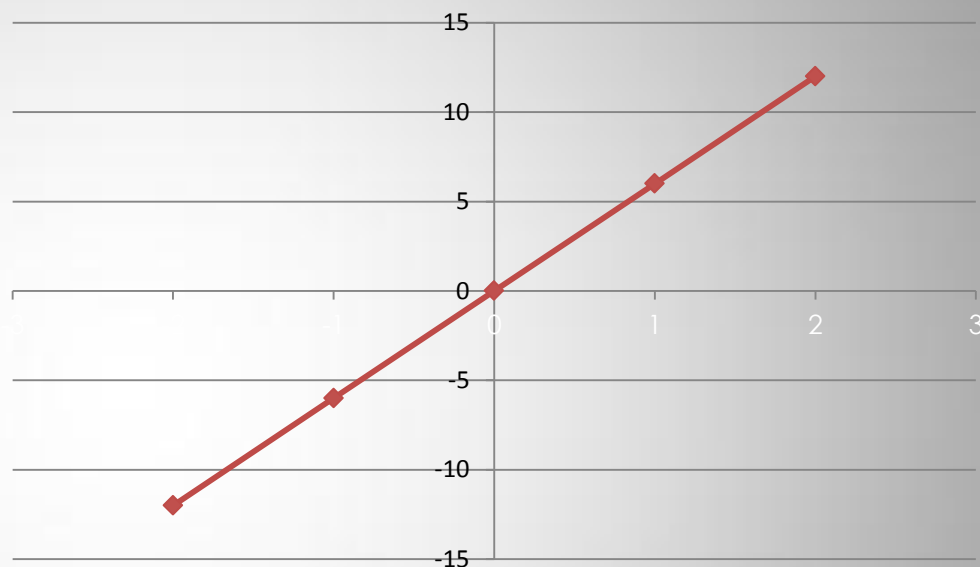
$$y = 6(-1) = -6$$

$$y = 6(-2) = -12$$

- Registramos los valores
- de (x) y graficamos

X	Y
2	12
1	6
0	0
-1	-6
-2	-12

GRAFICA DEL CONCAVO



Es cóncavo hacia arriba

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

¿Cuál será el área máxima que se puede obtener con un perímetro de 600 m. cuyo lado mas largo es a y el mas corto b?

$$A = b.h$$

$$P = 2l + 2l$$

$$600 = 2a + 2b$$

$$2a = 600 - 2b$$

$$a = \frac{600 - 2b}{2}$$

$$a = 300 - b$$

$$-2b = -300$$

$$b = \frac{-300}{-2}$$

$$b = 150$$

$$a = 300 - b$$

$$a = 300 - 150$$

$$a = 150$$

$$A = 150 * 150$$

$$A = 22500$$

$$A = a.b$$

$$A = (300 - b).b$$

$$A = -b^2 + 300b$$

$$A^1 = -2b + 300$$

$$A^2 = -2(\text{tenemos un Max,})$$

$$-2b + 300 = 0$$

- ⦿ Entre los valores q puede tener una función (Y) puede haber uno que sea el mas grande y otro que sea el mas pequeño. A estos valores se les llama respectivamente punto máximo y punto mínimo absolutos.
- ⦿ Si una función continua es ascendente en un intervalo y a partir de un punto cualquiera empieza a decrecer, a ese punto se le conoce como punto crítico máximo relativo, aunque comúnmente se le llama solo máximo.
- ⦿ Por el contrario, si una función continua es decreciente en cierto intervalo hasta un punto en el cual empieza a ascender, a este punto lo llamamos punto crítico mínimo relativo, o simplemente mínimo.
- ⦿ Una función puede tener uno, ninguno o varios puntos críticos.

MÉTODOS PARA CALCULAR MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

- ⦿ **CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA, UTILIZADO PARA UNA FUNCIÓN CONTINUA Y SU PRIMERA DERIVADA TAMBIÉN CONTINUA.**
- ⦿ Obtener la primera derivada.
- ⦿ Igualar la primera derivada a cero y resolver la ecuación.
- ⦿ El valor o valores obtenidos para la variable, son donde pudiera haber máximos o mínimos en la función.
- ⦿ Se asignan valores próximos (menores y mayores respectivamente) a la variable independiente y se sustituyen en la derivada. Se observan los resultados; cuando estos pasan de positivos a negativos, se trata de un punto máximo; si pasa de negativo a positivo el punto crítico es mínimo.
- ⦿ Cuando existen dos o más resultados para la variable independiente, debe tener la precaución de utilizar valores cercanos a cada uno y a la vez distante de los demás, a fin de evitar errores al interpretar los resultados.
- ⦿ Sustituir en la función original (Y) el o los valores de la variable independiente (X) para los cuales hubo cambio de signo. Cada una de las parejas de datos así obtenidas, corresponde a las coordenadas de un punto crítico.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

- ⦿ Este método es más utilizado que el anterior, aunque no siempre es más sencillo. Se basa en que en un máximo relativo, la concavidad de una curva es hacia abajo y en consecuencia, su derivada será negativa; mientras que en un punto mínimo relativo, la concavidad es hacia arriba y la segunda derivada es positiva.
- ⦿ Este procedimiento consiste en:
- ⦿ Calcular la primera y segunda derivadas
- ⦿ Igualar la primera derivada a cero y resolver la ecuación.
- ⦿ Sustituir las raíces (el valor o valores de X) de la primera derivada en la segunda derivada.
- ⦿ Si el resultado es positivo, hay mínimo. Si la segunda derivada resulta negativa, hay un máximo.
- ⦿ Si el resultado fuera cero, no se puede afirmar si hay o no un máximo o mínimo.
- ⦿ Sustituir los valores de las raíces de la primera derivada en la función original, para conocer las coordenadas de los puntos máximo y mínimo.

Calcular los máximos y mínimos en las funciones:

$$\odot 1. f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$\odot f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$\odot f''(x) = 6x$$

$$\odot f''(-1) = -6 \text{ Máximo}$$

$$\odot f''(1) = 6 \text{ Mínimo}$$

$$\odot f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

$$\odot f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

$$\odot \text{Máximo}(-1, 4) \text{ Mínimo}(1, 0)$$

Si dos números suman 1, ¿Cuál es el máximo valor que puede tener su producto?

Solución-Juan Beltrán:

Sea

x : uno de los números

$1-x$: el otro número

$x(1-x)$: producto entre los números

$f(x) = x - x^2$, $\text{dom} f = [0, 1]$: función del producto de los número

$\Rightarrow f'(x) = 1 - 2x$

$f'(x)$ siempre existe

$f'(x) = 0$ si $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$: número crítico de f

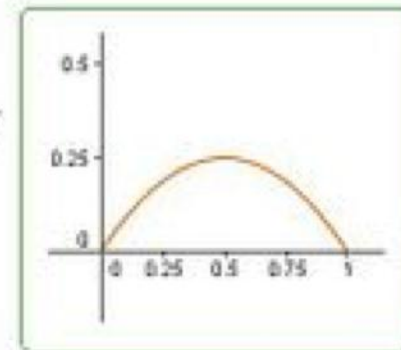
$\Rightarrow f(0) = 0 - 0^2 = 0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4};$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$: valor máximo absoluto de f en $[0, 1]$

$$f(1) = 1 - 1^2 = 0$$

Respuesta: el valor máximo que puede tener el producto de los números es de $\frac{1}{4}$.



EJERCICIO: 1

$$2x^2 - 5x + 3$$

Paso: 1

$$Y^I = 4x - 5$$

$$4x - 5 = 0$$

$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$$Y^{II} = 4$$

Paso: 2

$$Y = 2x^2 - 5x + 3$$

$$Y = -\frac{1}{8}$$

X	Y
3	7
2	3
5/4	0
1	-1
0	5

$$\left(5/4, -1/8\right)$$

Es un punto mínimo

EJERCICIO: 2

$$Y = 4 - 3x - x^2$$

Paso: 1

$$Y^I = -2x - 3$$

$$-2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = -3/2$$

$$Y^I = -2x - 3$$

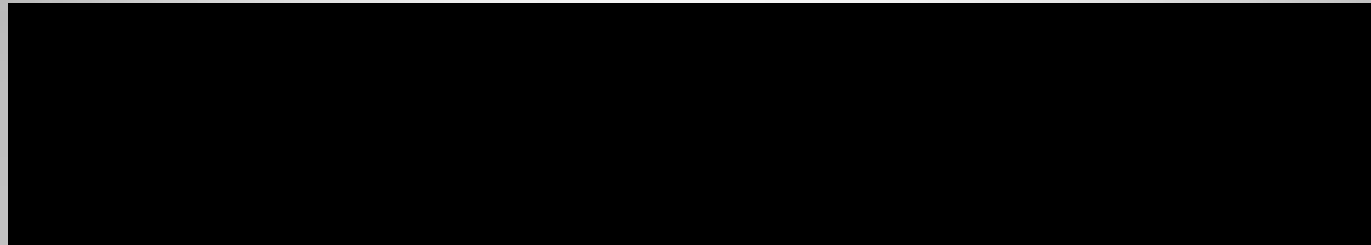
$$Y^{II} = -2$$

Paso: 2

$$Y = 4 - 3(-3/4) - (3/4)^2$$

$$Y = 6.8$$

X	Y
1	-5
0	-3
-3/2	0
-2	1
-3	3



Es un punto máximo

Calcular los máximos y mínimos en las funciones:

$$1. f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 \text{ Máximo}$$

$$f''(1) = 6 \text{ Mínimo}$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

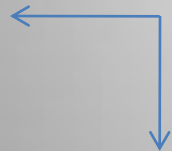
$$\text{Máximo}(-1, 4) \text{ Mínimo}(1, 0)$$

Velocidad y Aceleración

Móvil

Es un cuerpo en movimiento: un hombre, un coche, etc. Son móviles cada partícula del cuerpo que se mueve y describe una trayectoria.

Se acostumbra a considerar como origen del movimiento a un punto fijo.



Movimiento
negativo (-)



Movimiento
positivo (+)

Velocidad

La velocidad instantánea de una partícula que se mueve en una recta se describe como la ecuación $S=f(x)$ donde S = distancia y se dice que esta en función del tiempo.

La velocidad de una partícula es la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo.

Sus unidades son m/s.

$$\frac{\partial(S)}{\partial t} = V$$

$$V = S'$$

Aceleración

La aceleración es la razón de cambio de la velocidad (V) con respecto al tiempo (t) y se define como la rapidez de la variación de la velocidad (V) con respecto al tiempo (t).

Sus unidades son m/s²

$$a = \frac{d(V)}{dt}$$

$$a = \text{m/s}^2$$

$$a = \frac{\partial^2(S)}{\partial x^2}$$

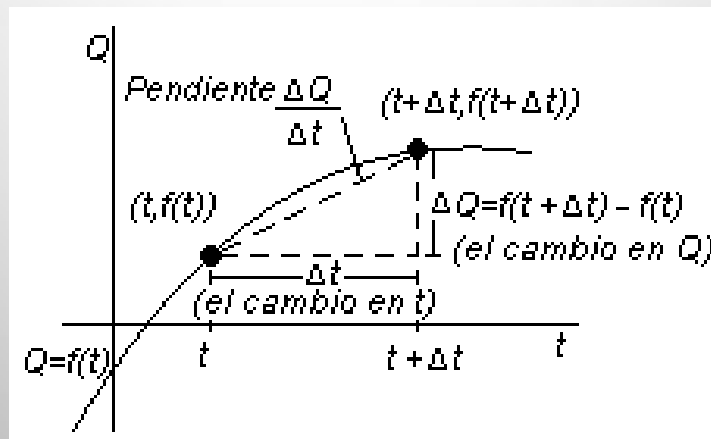
Razón de Cambio

Comenzando por la Razón Instantánea de Cambio de una función cuya variable independiente es el tiempo t . suponiendo que Q es una cantidad que varía con respecto del tiempo t , escribiendo $Q=f(t)$, siendo el valor de Q en el instante t .

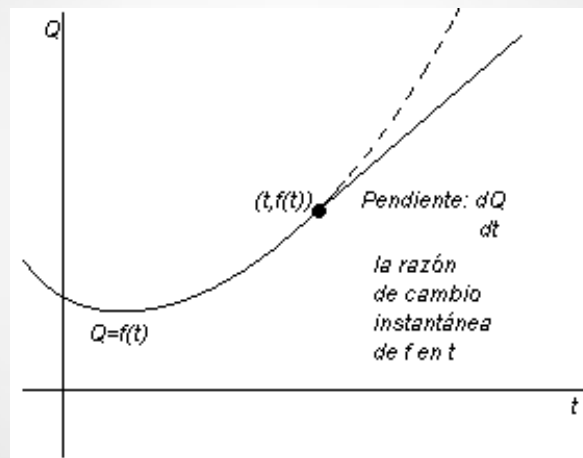
El cambio en Q desde el tiempo t hasta el tiempo $t+\Delta t$, es el incremento

La Razón de Cambio Promedio de Q (por la unidad de tiempo) es, por definición, la razón de cambio ΔQ en Q con respecto del cambio Δt en t , por lo que es el cociente

Definimos la razón de cambio instantánea de Q (por unidad de tiempo) como el límite de esta razón promedio cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Es decir, la razón de cambio instantánea de Q es



Lo cual simplemente es la derivada $f'(t)$. Así vemos que la razón de cambio instantánea de $Q=f(t)$ es la derivada



¡FIN DE SEMESTRE!

Gracias

¡BONITAS VACACIONES!