

Distribuciones y Posibles Aplicaciones del Estadístico Univariado $(X_i - \bar{X})/S$ para Estimadores Máximo Verosímil e Insesgado de σ

Mario Arrijo Rodríguez*

Carlos Díaz Ramos**

Luis Antonio Pérez González***

Introducción

La Ingeniería Industrial reconoce a la Estadística como una herramienta muy importante en la recolección, el procesamiento y el análisis de los datos con el fin de disponer de elementos científicamente válidos en la toma de decisiones. Por tal motivo, cuando se conoce el comportamiento estadístico de los modelos utilizados, la toma de decisiones llega a los niveles de optimalidad deseados.

Los valores estandarizados de una muestra aleatoria de una distribución normal $(X_i - \bar{X})/S$, son de gran utilidad en muchas aplicaciones de la estadística moderna en la Ingeniería Industrial; así, podemos encontrar su aplicación en el control estadístico del proceso cuando se desea construir cartas de control para datos individuales (no agrupados) (Djahuri, 1998), así-

mismo, pueden ser utilizados para la prueba de significancia de la diferencia entre la media de un subgrupo y la media general (Cramér, 1999), entre otras aplicaciones. Varios autores han encontrado, con métodos distintos, la distribución exacta (Djahuri, 1998; Cramér, 1999); sin embargo, en ningún trabajo se detallan dichos procesos, ya que se consideran obvios algunos pasos que, al menos desde el punto de vista de Ingeniería Industrial, es importante remarcar. Como es sabido, el conocimiento de la distribución exacta de un estadístico hace posible el cálculo de las probabilidades de interés, la localización de sus valores esperados, su forma y su función característica, así como las curvas de potencia en las pruebas estadísticas donde intervienen.

En este artículo detallamos la obtención de la distribución exacta del estadístico univariado $(X_i - \bar{X})/S$, cuando se usa tanto el estimador máximo verosímil, como el estimador insesgado de la varianza de la muestra. Se sigue de cerca el procedimiento utilizado por Cramér, obteniéndose también la distribución de su forma cuadrática en las dos versiones antes mencionadas. Asimismo, se da el comportamiento gráfico de las distribuciones obtenidas.

Iniciamos presentando los fundamentos utilizados para la deducción de las distribuciones, aplicándolos al caso en donde se utiliza el estimador máximo verosímil de la varianza poblacional; posteriormente, hacemos lo propio con los demás modelos estadísticos; se muestran también las gráficas de

las funciones de densidad de $(X_i - \bar{X})/S$ para distintos tamaños de muestra y, finalmente, se presentan algunos usos y aplicaciones potenciales de los valores estandarizados.

1. Distribución de $(X_i - \bar{X})/S$

Teorema 1. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $N(0, \sigma^2)$ y

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \quad (1)$$

entonces, la distribución de

$$t = \frac{(X_i - \bar{X})}{s} \quad (2)$$

es

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{t^2}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2(n-1)}} & -\sqrt{n-1} < t < \sqrt{n-1} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

Demostración.

Reemplacemos las X_i por nuevas variables Y_i por medio de la transformación ortogonal $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz ortonormal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \frac{1}{\sqrt{n-1}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

en donde

$$\mathbf{Y}' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n), \quad \mathbf{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n), \quad \mathbf{A} = (a_{ij}) \quad (5)$$

Se sabe (Ciucu, págs. 22 y 23) que la independencia de los elementos de $\mathbf{X}$ y la ortogonalidad de $\mathbf{A}$, implican que los componentes del vector $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ son independientes. Además:

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} X_2 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} X_n = \sqrt{n} \bar{X} \quad (6)$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{n-1}} (X_1 - \bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} X_1 - \frac{X_2}{\sqrt{n(n-1)}} - \dots - \frac{X_n}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (7)$$

*Maestro en Ciencias con especialidad en Planificación Industrial por el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Subdirector Administrativo del Instituto Tecnológico de Orizaba. Correo electrónico: mlarrijo@yahoo.com.

**Maestro en Ciencias con especialidad en Investigación de Operaciones por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Profesor de la Maestría en Ingeniería Industrial del Instituto Tecnológico de Orizaba. Correo electrónico: kdiaz@prodigy.net.mx.

***Ph.D. en Matemáticas Aplicadas por la Universidad de Bucarest, Rumania. Profesor del Doctorado en Ingeniería Industrial del Instituto Tecnológico de Orizaba. Director de la División de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Universidad Politécnica del Valle de México. Correo electrónico: perezpor@prodigy.net.mx.

$$Y'Y = \sum_{i=1}^n Y_i^2 = X'A'AX = X'X = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (8)$$

lo que conduce a

$$Y_1^2 = n\bar{X}^2 \quad (9)$$

$$nS'^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (10)$$

con lo que (2) se transforma en

$$\tau = \frac{Y_2}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad (11)$$

Observando que la ecuación anterior nos lleva a

$$\tau^2 = (n-1) \frac{Y_2^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \leq (n-1) \quad (12)$$

por eso, la f.d.p. de τ se encontrará definida en el intervalo $[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]$.

Consideremos ahora la transformación

$$W = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\tau^2}{n-1}}} \quad (13)$$

Utilizando (12) obtenemos

$$1 - \frac{\tau^2}{n-1} = 1 - \frac{Y_2^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - Y_2^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (14)$$

con lo que (13) queda como

$$W = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \frac{\frac{\sqrt{n-1} Y_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} = \frac{Y_2}{\sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad (15)$$

en donde se identifica una variable aleatoria normal estándar en el numerador, y la raíz cuadrada de una chi-cuadrada con $n-2$ grados de libertad entre sus grados de libertad en el denominador, lo que nos lleva a concluir que W se distribuye t de Student con $n-2$ grados de libertad, o sea

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{n-2}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 + \frac{w^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad -\infty < w < \infty \quad (16)$$

Sea la transformación

$$\tau = g(W) = \frac{W\sqrt{n-1}}{\sqrt{W^2 + n-2}} \quad (17)$$

Sabemos (4, pág. 205) que

$$f_\tau(t) = \begin{cases} f_W(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dt} g^{-1}(t) \right|, & t \in \{t \mid t = g(w), w \in \mathbb{R}\} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (18)$$

donde $J = \frac{d}{dt} g^{-1}(t)$ es el jacobiano de la transformación.

En nuestro caso

$$\left| \frac{d}{dt} g^{-1}(t) \right| = \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + n-2}} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{n-1}}} \quad (19)$$

y

$$g^{-1}(t) = W = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{n-1}}} \quad (20)$$

$$J = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \left(1 - \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad (21)$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \frac{1}{\sqrt{n-2}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n-2} \frac{t^2}{1 - \frac{t^2}{n-1}}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \left(1 - \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n-1}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n-1}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 - \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad -\sqrt{n-1} < t < \sqrt{n-1} \end{aligned}$$

Queda así demostrado el teorema.

Es fácil probar que la media y la varianza de τ están dadas por las expresiones,

$$\mu_\tau = 0, \quad \sigma_\tau^2 = 1 \quad (22)$$

Frecuentemente, la estandarización de observaciones $N(\mu, \sigma^2)$ mediante el uso de la expresión $(X_i - \bar{X})/S'$ lleva a suponer que su distribución es $N(0, 1)$, por lo que incluso se le asigna el nombre de variable o estadístico Z , recurriendo al mismo símbolo que se utiliza para hacer referencia a una variable aleatoria normal estándar. Este supuesto es totalmente erróneo, según puede apreciarse en la figura 1. En ella se observa que para $n=3$ la distribución tiene forma de U, para $n=4$ la distribución es uniforme, cuando $n=5$ la distribución es parabólica y cuando $n=10$ se asemeja a la distribución t de Student.

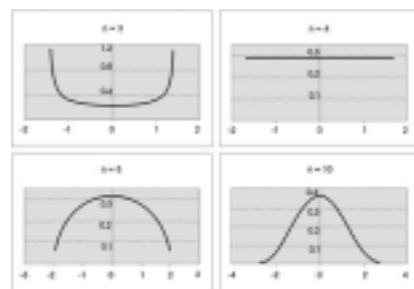


Figura 1. La f.d.p. de τ para $n=3, 4, 5$ y 10 cuando se usa el estimador máximo verosímil de σ .

2. Distribución de $(X_i - \bar{X})/S$

Corolario 1. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $N(0, \sigma^2)$. Entonces, la distribución de (2) con S' sustituida por el estimador insesgado S de σ , es

$$f_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n-1}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 - \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (23)$$

con

$$\tau = \frac{(X_1 - \bar{X})}{S}, \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (24)$$

y

$$\mu_\tau = 0, \quad \sigma_\tau^2 = \frac{n-1}{n} \quad (25)$$

En la figura 2 se ilustra la forma de esta distribución para diferentes valores de n . Al igual que en la gráfica de la figura 1, la distribución tiene forma de U para $n=3$, es uniforme para $n=4$, es una parábola para $n=5$, y cuando $n=10$ se asemeja mucho más a la función de densidad de probabilidades t de Student.

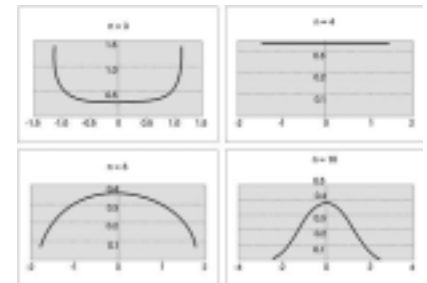


Figura 2. f.d.p. de τ para $n=3, 4, 5$ y 10 cuando se usa el estimador insesgado de σ .

3. Distribución de $((X_i - \bar{X})/S)^2$

Teorema 2. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $N(0, \sigma^2)$. Entonces la distribución de τ^2 (ecuación 12) está dada por:

$$f_{\tau^2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n-1}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 - \frac{t}{n-1}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{t}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (26)$$

Demostación.

Haremos uso de las relaciones encontradas anteriormente para llevar a cabo la demostración. De la

ecuación (12) encontramos que la función de densidad de probabilidades de τ^2 se encontrará definida para $0 \leq \tau^2 \leq n-1$.

Hagamos ahora la transformación

$$W = \frac{n-2}{n-1} \left(\frac{\tau^2}{1 - \frac{\tau^2}{n-1}} \right) \quad (27)$$

sustituyendo (12) y (14) en (27) llegamos a

$$W = \frac{n-2}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n}} = \frac{Y_2^2}{\sum_{i=2}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=2}^n Y_i)^2}{n-2}} \quad (28)$$

en donde puede observarse que $W \sim F_{1, n-2}$, o lo que es lo mismo

$$\frac{(n-2)\tau^2}{(n-1-\tau^2)} \sim F_{1, n-2} \quad (29)$$

Sabemos (4, pag. 249) que si $Y \sim F_{m, n}$, entonces $(mY/n)/(1+mY/n)$ se distribuye $\beta(m/2, n/2)$. Aplicando este resultado a (29) obtenemos:

$$\frac{x}{n-1} \sim \beta(1/2, (n-2)/2) \rightarrow x \sim (n-1)\beta(1/2, (n-2)/2) \quad (30)$$

De esta relación se sigue que la f.d.p. de τ^2 es la dada por la ecuación (26). Queda de esta manera demostrado el teorema.

Utilizando los mismos argumentos se puede demostrar que la f.d.p. de τ^2 , cuando se usa el estimador insesgado de σ^2 , es

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{x}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}-1} \left(1 - \frac{x}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (31)$$

ya que en este caso las expresiones correspondientes a (27), (28), (29) y (30) nos conducen a:

$$\frac{nx}{(n-1)^2} \sim \beta(1/2, (n-2)/2) \rightarrow x \sim \frac{(n-1)^2}{n} \beta(1/2, (n-2)/2) \quad (32)$$

4. Distribución de $(\bar{X}_k - \bar{X})/S$

Teorema 3. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $N(0, \sigma^2)$, y sea

$$\tau = \frac{(\bar{X}_k - \bar{X})}{S}, \quad k < n \quad (33)$$

en donde

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} \quad (34)$$

Entonces, la distribución de τ es

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-k}{2})} \left(\frac{x}{n-k} \right)^{\frac{n-k}{2}-1} \left(1 - \frac{x}{n-k} \right)^{\frac{n-k}{2}} \quad (35)$$

Demostración.

Consideremos al igual que en la demostración del teorema 1, que las $X_1, X_2, \dots, X_n$ se convierten en las nuevas variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ mediante la transformación ortogonal $Y = AX$, solamente que ahora Y_1 y Y_2 están dadas por

$$Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{n}} + \frac{X_2}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{X_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n-k}{n}} \bar{X} \quad (36)$$

$$Y_2 = \sqrt{\frac{nk}{n-k}} (\bar{X}_k - \bar{X}) \quad (37)$$

De la última ecuación se desprende que

$$(\bar{X}_k - \bar{X}) = \sqrt{\frac{n-k}{nk}} Y_2 \quad (38)$$

Considerando las relaciones anteriores y las correspondientes de la sección 2, la ecuación (33) se transforma en

$$\tau = \frac{\sqrt{\frac{n-k}{nk}} Y_2}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n}}} = \sqrt{\frac{n-k}{k}} \frac{Y_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2}} \quad (39)$$

Así, de la ecuación anterior encontramos

$$\tau^2 = \frac{(n-k)}{k} \frac{Y_2^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2} \quad (40)$$

con lo que llegamos a determinar que

$$\tau^2 \leq \frac{(n-k)}{k} \rightarrow -\sqrt{\frac{(n-k)}{k}} \leq \tau \leq \sqrt{\frac{(n-k)}{k}} \quad (41)$$

Consideremos ahora la siguiente transformación

$$W = \frac{k(n-2)}{n-k} \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{k}{(n-k)} \tau^2}} \quad (42)$$

Determinemos primeramente el término del radical del denominador

$$1 - \frac{k}{(n-k)} \tau^2 = 1 - \frac{k}{(n-k)} \frac{(n-k)}{k} \frac{Y_2^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2} = 1 - \frac{Y_2^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_2^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2} = \frac{\sum_{i=3}^n Y_i^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2} \quad (43)$$

Sustituyendo (39) y (43) en (42)

$$W = \sqrt{\frac{k(n-2)}{n-k}} \frac{\sqrt{\frac{n-k}{k}} \frac{Y_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=3}^n Y_i^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}} = \frac{Y_2}{\sqrt{\sum_{i=3}^n Y_i^2}} \quad (44)$$

La ecuación anterior nos indica que W sigue una distribución t de Student con $n-2$ grados de libertad.

El jacobiano de la transformación es:

$$J(W \rightarrow \tau) = \sqrt{\frac{k(n-2)}{n-k}} \left(1 - \frac{k}{n-k} \tau^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (45)$$

Resulta de esta forma que:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{x}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}-1} \left(1 - \frac{x}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (46)$$

Queda así demostrado el teorema.

La media y la varianza de τ están dadas por las ecuaciones

$$\mu_\tau = 0, \quad \sigma_\tau^2 = \frac{(n-k)}{k(n-1)} \quad (46)$$

La figura 3 muestra la gráfica de la distribución, contrastándose con la distribución normal correspondiente. En ella se aprecia que su forma es semejante a la distribución t, forma que mantiene para diferentes valores de k y n . Al mismo tiempo, podemos ver que la distribución de τ , de ninguna manera es una distribución normal.

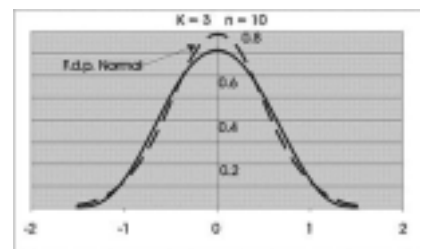


Figura 3. f.d.p. de τ cuando de usa el estimador máximo verosímil de σ .

5. Distribución de $(\bar{X}_k - \bar{X})/S$

Corolario 2. Dadas las consideraciones del teorema 3 y

$$\tau = (\bar{X}_k - \bar{X})/S, \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

la f.d.p. de τ es

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-k}{2})} \left(\frac{x}{n-k} \right)^{\frac{n-k}{2}-1} \left(1 - \frac{x}{n-k} \right)^{\frac{n-k}{2}} \quad (47)$$

La media y la varianza de τ están dadas por las ecuaciones

$$\mu_{\tau} = 0, \sigma^2 = \frac{(n-k)}{nk} \quad (48)$$

En la figura 4 se puede apreciar la gráfica de la distribución para $k=3$ y $n=10$. Como sucede para las diferentes combinaciones de n y k , su forma es muy parecida a la distribución t de Student. En la gráfica se muestra también la distribución normal con la misma media y desviación estándar de τ , comprobándose así, que ambas

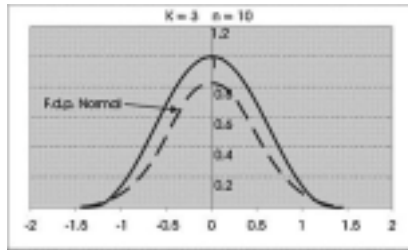


Figura 4. f.d.p. de τ cuando se usa el estimador insesgado de σ .

distribuciones son significativamente diferentes.

Conclusiones

En la actualidad la velocidad de generación del conocimiento es cada vez mayor, surgiendo con ello nuevos modelos, herramientas y tecnologías, lo cual transforma cada vez más dramáticamente la forma de hacer las cosas. Esto ha obligado a que los sistemas tengan que adquirir una capacidad de respuesta acorde con dicha velocidad, para aprovechar estos avances en la mejora continua de sus operaciones y mantenerse así, en un mercado cada vez más competitivo. Debido a la elevada competitividad a la que se enfrentan las organizaciones, ya no es suficiente la utilización de las técnicas clásicas para la

mejora continua de los procesos; es necesario, en este momento y en los tiempos por venir, la utilización de conocimientos más avanzados para lograr efficientar significativamente sus resultados.

Los modelos estadísticos propuestos en el presente artículo representan una eficiente alternativa en el control estadístico del proceso y en las pruebas de normalidad, más aun, cuando los enfoques de los modernos sistemas de calidad, como son 6s e ISO 9000, se apoyan fuertemente en el uso de modelos estadísticos para lograr la mejora continua y la calidad total. Por tal motivo, es preocupación de los autores difundir el uso y la aplicación de este tipo de herramientas entre los profesores y los practicantes de la Ingeniería Industrial. 

Bibliografía

- Ciucu, George & Virgil Craiu. *Inferenta Statistica*. Editura Didactica si Pedagogica-Bucaresti. Rumania, 1974.
- Cramér, Harald. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press. EUA. 1999.
- Djahuri, Maman A. *A unifying concept of X chart and X-bar chart when subgroup sizes are equal*. Department of Mathematics, Institut Teknologi Bandung. Indonesia. 1998.
- Mood, A. M. et al. *Introduction to The Theory of Statistics, third edition*. McGrawHill. EUA. 1974.
- Nomikos, P. and J.F. MacGregor. "Multivariate SPC Charts for Monitoring Batch Process". *Technometrics*, Vol. 37, No. 1. EUA. 1995.
- Tracy N.D. et al. "Multivariate Control Chart for Individual Observations". *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, No. 2. USA. 1992.

