INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

UNIDAD ZACATENCO

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

FORMULACIÓN DE UNA CIMENTACIÓN SUPERFICIAL EN SUELO ARCILLOSO CONSIDERANDO INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA E IMPLEMENTACIÓN EN UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA CIVIL

PRESENTA:

MIGUEL MORENO AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS:

DR. NORBERTO DOMÍNGUEZ RAMÍREZ

México D.F. Septiembre 2011

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D. F., siendo las 18:00 horas del día 27 del mes de septiembre del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A. – U. Z. para examinar la tesis titulada:

"FORMULACIÓN DE UNA CIMENTACIÓN SUPERFICIAL EN SUELO ARCILLOSO CONSIDERANDO INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA E IMPLEMENTACIÓN EN UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS".

Presentada por el alumno:

Moreno	Aguilar	Miguel
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro:

B	0	8	1	7	8	8

aspirante de:

MAESTRO EN INGENIERÍA CIVIL

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Norberto Domínguez Ramírez

Dr. Héctor Aurêliano Sánchez Sánchez

Dr. Esteban Flores Méndez

Dr. Jorge Luis Alamilla López

Dr. Francisco Antelmo Díaz Guerra

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA UNIDAD ZACATENCO MÉXICO SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

M. en C. Pino Durán Escamilla

NJRC/pgr.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México Distrito Federal el día 27 de Septiembre del 2011, el que suscribe Miguel Moreno Aguilar, alumno del Programa de Maestría en Ingeniería Civil con número de registro B081788, adscrito a la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Norberto Domínguez Ramírez y cede los derechos del trabajo intitulado "FORMULACIÓN DE UNA CIMENTACIÓN SUPERFICIAL EN SUELO ARCILLOSO CONSIDERANDO INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA E IMPLEMENTACIÓN EN UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección mmorenoa@ipn.mx . Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Miguel Moreno Aguilar

RESUMEN

El modelado numérico de las estructuras se realiza para estimar la respuesta estructural real de un sistema; en la medida en que dichos modelos predicen con mayor aproximación el comportamiento estructural, se tendrá una mayor eficiencia en el diseño estructural.

En el caso de edificaciones asentadas en suelos compresibles de tipo arcilloso, la dificultad radica en modelar y reproducir numéricamente el comportamiento **no lineal** de este tipo de material, con el fin de incluir sus efectos en la evaluación de su respuesta. Para realizar el análisis en estas condiciones, una posibilidad es construir un modelo completo basado en el Método de los Elementos Finitos (MEF), en el que se incluyan elementos para representar a la losa de la zapata aislada y elementos para representar el suelo subyacente, desde la superficie de desplante hasta la profundidad del estrato duro, lo que implica una complejidad excesiva y costosa para estructuras relativamente simples. En consecuencia, para un ingeniero de la práctica profesional sería preferible disponer de un mecanismo de fácil inserción en los modelos convencionales de análisis estructural, que internamente incorpore de una manera simple y eficaz el comportamiento complejo no lineal de zapatas aisladas asentadas en suelos compresibles de tipo arcilloso.

En este trabajo se propone una estrategia numérica simplificada que incluye la formulación de un **súper elemento**, llamado ***Elemento Zapata Aislada*** (*IFE "**I**solated **F**oundation **E**lement"*), que se utilice como condición de frontera en los análisis convencionales de ingeniería estructural e incluya el comportamiento complejo de un suelo compresible estratificado, así como su implementación computacional en códigos convencionales de análisis estructural; el algoritmo es de tipo iterativo y está expresado en términos de rigideces, de modo que el programador puede integrarlo de manera sencilla a un código sin modificar su estructura principal computacional. Por otra parte, el usuario podrá incorporarlo en su modelo estructural, indicando simplemente algunos parámetros y el punto nodal donde requiere este súper elemento.

ABSTRACT

The numerical modeling of structures is carried out in order to estimate the real structural response of a system; in the measure that these models predict the structural behavior of each component with a better approximation, it will be possible to improve the structural design of the system.

In the case of constructions resting on clay soils, the difficulty for predicting their structural response resides in how to model the **non lineal behavior** of the soil. One possibility of numerical analysis of this problem is by using the Finite Element Method (FEM), in which a model can be built with solid or shell elements to represent the slab of the isolated foundation and solid elements to represent the underlying soil, taken into account a set of layers defined between foundation bottom and the top of the hard stratum; nevertheless, this work implies an excessive and expensive complexity even for relatively simple structures. By these reasons, for a standard structural engineer it would be better to have a simpler efficient mechanism for classical numerical models, which will be able to incorporate in a simple way the complex non lineal behavior of isolated foundation resting on clay soils.

In this work it is proposed a simplified numerical strategy that includes a super element called "**Isolated Foundation element**" IFE, which has been formulated and implemented in a conventional program for structural analysis; the iterative method converges fast and it could easily be implemented in a standard finite element code without modifying the internal computational structure of the program. In the practice, a user will be able to incorporate the IFE in its structural model, indicating some parameters and the nodal point where this super element is required.

FORMULACIÓN DE UNA CIMENTACIÓN SUPERFICIAL EN SUELO ARCILLOSO CONSIDERANDO INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA E IMPLEMENTACIÓN EN UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS.

CONTENIDO

		Página
Capítulo I.	Generalidades	1
I.1	Problemática	1
I.2	Objetivo	2
I.3	Metas	2
I.4	Justificación	3
I.5	Estado del Arte	4
Capítulo II.	Base teórica	14
II.1	Formulación del Elemento Zapata Aislada IFE	14
II.2	Cálculo de la Matriz de Influencia	18
II.3	Estrategia de análisis para el empleo del Elemento IFE	23
Capítulo III.	Desarrollo del algoritmo	28
Capítulo IV.	Validación Numérica del Modelo y Comparación de Resultados	32
Capítulo V.	Ejemplos de Aplicación Práctica	37
	Conclusiones y Perspectivas	50
	Referencias Bibliográficas	52
Apéndice A	Deformación Volumétrica de los Estratos	53
Apéndice B	Cálculo de esfuerzos en la masa del suelo	65

CAPÍTULO I
GENERALIDADES

I.1 Problemática

El análisis estructural se realiza en forma cotidiana en todos los proyectos de ingeniería, para evaluar la magnitud de las fuerzas (elementos mecánicos) que actúan internamente en cada uno de los componentes de la estructura (trabes, columnas, zapatas, etc.) y con base en ello definir las características geométricas y materiales necesarias que resistan satisfactoriamente los esfuerzos provocados por los elementos mecánicos, cumpliendo los requisitos de seguridad estructural del reglamento aplicable.

En la práctica profesional se recurre a hipótesis simples para describir el comportamiento de los materiales (comportamiento elástico lineal) y a modelos simplificados de interacción suelo – estructura para la simulación y predicción de la respuesta de un sistema dado; utilizando programas de computo para análisis lineal, comúnmente se discretiza en pocos puntos nodales la planta de cimentación y en estos se introduce un resorte elástico lineal en donde se simulan las propiedades **no lineales** del subsuelo estratificado; esta práctica conduce a resultados poco aproximados de una solución muy compleja y depende de la rigidez estimada de los resortes que simulan al suelo en el modelo de análisis; en consecuencia, esto puede conducir a diseños muy conservadores e inclusive a diseños inseguros, ya que no hay forma de garantizar los resultados obtenidos.

En el caso de edificaciones asentadas en suelos arcillosos, la dificultad radica en el comportamiento **no lineal** de este tipo de material; para realizar el análisis en estas condiciones, se requiere de la utilización de métodos matriciales refinados siendo el más empleado el método de los elementos finitos: en un modelo de esta naturaleza generalmente se incluyen elementos para representar la losa de la zapata aislada y elementos para representar el suelo subyacente, definido desde la superficie de desplante hasta la profundidad del estrato duro, lo que implica una complejidad excesiva y costosa en términos de cálculo, aún para estructuras relativamente simples.

Aunque existen programas de cómputo sofisticados, basados en el método de los elementos finitos especializados en el análisis no lineal en donde se incluye la interacción suelo-estructura, tienen un costo económico elevado y son difíciles de utilizar en la práctica común de ingeniería de cimentaciones, pues se requiere de personal altamente calificado, empleo de sistemas de cómputo con una gran capacidad de memoria por los modelos numéricos que poseen una gran cantidad de puntos nodales y solo se justifica su empleo en proyectos muy especiales. Adicionalmente, otra problemática radica en la dificultad de validar las soluciones obtenidas mediante dichos programas comerciales, ya que es difícil su adaptación a la forma de trabajo regional o local y tratándose de suelos, los de la **Ciudad**

de México representan un reto experimental y numérico, ya que deben generarse modelos matemáticos apropiados, por lo que es necesario contar con programas alternos para su validación.

I.2 Objetivo

En este trabajo se propone una estrategia numérica simplificada para el análisis convencional de sistemas estructurales apoyados en cimentaciones asentadas en suelos arcillosos, la cual incluye la formulación de un **súper elemento**, llamado ***Elemento Zapata Aislada*** (***IFE "Isolated Foundation Element"***), que se utiliza como condición de frontera e incluye el comportamiento complejo de un suelo **no lineal estratificado**; también se implementa en un programa de Elementos Finitos convencional, en el que los usuarios podrán utilizarlo, al proporcionar unos cuantos parámetros, para realizar análisis estructurales de interacción suelo-estructura con mejor aproximación de una manera fácil; los resultados obtenidos simularan a los que se obtendrían al realizar el análisis por medio de programas sofisticados y costosos de Elementos Finitos que requieren equipos de cómputo rápidos y con gran capacidad de memoria, modelos de análisis con una gran cantidad de nodos y la especialización en el personal requerido para su utilización.

I.3 Metas

Desarrollar la formulación teórica que sustenta al Elemento Zapata Aislada (elemento **IFE)** e implementarlo en códigos convencionales de análisis estructural**,** considerando el mallado automático de la geometría de la zapata aislada y el suelo subyacente desde la superficie de desplante hasta la profundidad del estrato duro; considerando la interacción Suelo – Estructura de una manera transparente para el usuario, quien sólo tendrá que proporcionar unos cuantos parámetros y obtendrá resultados, tanto de desplazamientos como de elementos mecánicos en cada elemento **IFE** para su diseño posterior, aplicando cualquier reglamento de diseño. Dicho de otro modo, se pretende que el elemento IFE posea las características siguientes:

- ✓ Represente adecuadamente la geometría asignada a la zapata aislada, soportada en un medio estratificado de material No Lineal.
- ✓ Considere el efecto de las cargas de la propia estructura en la masa del suelo para definir su comportamiento No lineal y rigidez equivalente (Interacción suelo - estructura).

- ✓ Considere la influencia de las cargas de construcciones vecinas en el comportamiento del suelo de soporte.
- ✓ Tenga un comportamiento compatible y aceptable de acuerdo a las pruebas de laboratorio realizadas.
- ✓ Sea fácil de utilizar en programas de cómputo convencionales al especificar unos cuantos parámetros.
- ✓ Su implementación en códigos (programas) convencionales de análisis estructural.

I.4 Justificación

Este tipo de análisis estructural **no lineal**, no se realiza en forma cotidiana por los ingenieros de la práctica profesional, esencialmente por lo laborioso y costoso que resulta en proyectos relativamente simples o con poco presupuesto; por otra parte, se requiere de conocimientos del Método de los Elementos Finitos, de la disposición de un programa especializado para efectuarlo, de tiempo, eficiencia y capacidad de almacenamiento para la entrada y manipulación de una gran cantidad de datos, de experiencia para la interpretación de los resultados, los cuales generalmente no se muestran en la forma en que están acostumbrados los ingenieros de cálculo estructural que emplean programas convencionales de análisis basados únicamente en el método de las rigideces o similares: en este sentido vale la pena señalar que los programas de Elementos Finitos muestran distribuciones de esfuerzos en lugar de elementos mecánicos o diagramas de momentos flexionantes, diagramas de fuerzas cortantes, etc. de los diferentes componentes del modelo estructural.

Por dichas razones, el desarrollo de herramientas numéricas que por un lado presenten una relativa simplicidad de aplicación para un ingeniero común, y que por el otro se distingan por las potencialidades internas de simulación de fenómenos reales, será siempre justificable, y al ponerse al alcance de todos los ingenieros como parte de los programas que ellos manejan en forma rutinaria, el trabajo lo realizaran sin mayor dificultad, pero con la ventaja de simular un modelo mejorado que represente con mayor precisión el comportamiento real de la estructura que se pretende construir, basado en un análisis estructural refinado que provea de elementos mecánicos mejor estimados en todos los componentes estructurales, y con ello se obtenga un mejor diseño racional de la estructura, menos conservadora, que los propios reglamentos de construcción reconocen al emplear métodos de análisis más precisos.

I.5 Estado del arte

El fenómeno de Interacción Suelo-Estructura (ISE) se refiere a la modificación de la respuesta estática ó dinámica de una estructura por efectos de la flexibilidad del suelo en el cual se sustenta la misma. Desde un punto de vista mecánico, la ISE existe desde el instante preciso en que dos medios de naturaleza diferente –cimentación (concreto, madera, acero) y suelo (roca, arcilla, arena, etc.), interactúan e intercambian fuerzas y energía, generando localmente fenómenos disipativos. Desde el punto de vista dinámico (en particular, ante un evento sísmico), la flexibilidad del suelo modifica no solamente la magnitud y configuración de los desplazamientos de la estructura soportada, sino también genera una redistribución de los esfuerzos en ambos medios afectando globalmente (positiva o negativamente) el grado de seguridad de la estructura.

En la actualidad, la mayoría de los análisis de sistemas estructurales se realiza con el auxilio de programas de cómputo basados en diversas metodologías, mayoritariamente de tipo matricial en los que internamente se resuelve el estado de equilibrio a través de la resolución de un sistema de ecuaciones que se integra de una matriz de rigidez global del sistema, un vector de desplazamientos y un vector de fuerzas. Partiendo de esta formulación, puede deducirse que el efecto ISE podría integrarse al problema a través de su implementación en alguno de los tres componentes, regularmente como coeficientes adicionales en la matriz de rigidez. Dicho de otro modo, en los programas de análisis estructural convencionales se considera la interacción suelo – estructura sólo de una manera básica, es decir, el ingeniero en estructuras coloca un resorte lineal en cada dirección requerida, de acuerdo al modelo estructural, donde se tengan condiciones de frontera específicos y las constantes de rigidez del resorte son estimadas burdamente considerando los valores recomendados en la literatura que son válidos en suelos "tipo" que no necesariamente corresponden a los del sitio de proyecto; en otro casos, se realiza un estudio de mecánica de suelos básico y solo se hace una estimación del módulo de reacción del suelo de soporte, estimación que no considera los diferentes estratos del subsuelo; los resultados de este tipo de análisis suelen ser conservadores e inclusive, en algunos casos, se obtienen resultados inseguros ya que pueden invertirse los esfuerzos en algunos de los resortes, simulando que en el suelo se presenta tracción, lo cual no corresponde a la realidad. El funcionamiento descrito corresponde a todos los programas comerciales (SAP, ETABS, STAAD, etc.) utilizados por los ingenieros de la práctica profesional, cuando se realiza un análisis lineal.

En algunos programas comerciales, se tiene la posibilidad de indicar que los elementos frontera (resortes) trabajen sólo a compresión, lo que mejora los resultados obtenidos; en este caso el análisis se complica ya que necesariamente se requiere realizar un análisis incremental de tipo **no lineal**, situación no común entre los ingenieros. Aun así, los

resultados obtenidos son poco aproximados a la respuesta real de la estructura, pues se pretende modelar un suelo estratificado **no lineal** con un resorte de rigidez constante.

Como referencia, para utilizarse en análisis lineales o donde se utilicen resortes de rigidez constante, se muestran en la tabla I.01 los valores para el módulo de reacción de diferentes tipos de suelo (Bowles 1982):

TABLA I.01 Valores del Módulo de Reacción

Tipo de Suelo		Módulo de Reacción kN/m^3
Arena Suelta		4800 - 16000
Arena Media Densa		9600 - 80000
Arena Densa		64000 - 128000
Arena arcillosa Media densa		32000 - 80000
Arena limosa Media densa		24000 - 48000
Suelo Arcilloso:		
Blanda	$q_u < 200$ kPa	12000 - 24000
Media	200 kPa $< q_u <$ 400 kPa	24000 - 48000
Compacta	$q_u > 800$ kPa	> 48000

En una mejor aproximación, los ingenieros pueden colocar resortes no lineales con curvas esfuerzo deformación específicas; pero que de ninguna manera consideran el entorno global del terreno de soporte, es decir, la influencia que cargas o esfuerzos lejanos puedan tener en determinados puntos donde se colocaron los mencionados resortes que representan al medio de soporte; se consideran los resortes no lineales como unidades independientes que no interactúan unos con otros; cuando se utiliza gran cantidad de éstos resortes de manera que quedan próximos entre sí, se tiene una cimentación tipo "Winkler", que básicamente consiste en una cama de resortes independientes; lo que también conduce a resultados poco aproximados con el comportamiento real que tendrá la estructura por construir. En esta condición se encuentran programas comerciales como SAP, que son capaces de realizar análisis no lineal y la rigidez de los elementos de frontera (resortes) puede ser especificada mediante curvas esfuerzo deformación.

Inevitablemente, para considerar la interacción suelo estructura "completa", interacción entre todas las partes del medio de soporte y la estructura de cimentación, se tiene que recurrir a programas sofisticados que utilicen metodologías numéricas avanzadas, con toda la complejidad de uso, interpretación de resultados y costo.

Aunque el método de elementos finitos es una herramienta poderosa de análisis estructural, no resulta fácil modelar un terreno estratificado arcilloso como el de la Cd. de México. Vale la pena señalar que los modelos de materiales que pretenden representar el comportamiento no lineal de este tipo de suelo continúan en desarrollo; en este sentido, es aceptado de forma generalizada que los materiales más comunes en ingeniería representados por su curva Esfuerzo-Deformación como la mostrada en la fig. I.001, exhiban una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones hasta un nivel de esfuerzos conocido como límite de proporcionalidad; más allá de este límite, la relación esfuerzo-deformación se vuelve no lineal pero no necesariamente inelástica. Los comportamientos inelásticos se caracterizan por la aparición de deformaciones permanentes, que empiezan cuando el material excede el punto de fluencia, y que son apreciables en cuanto el cuerpo se descarga y éste no recupera su configuración inicial (ver fig. I.001).

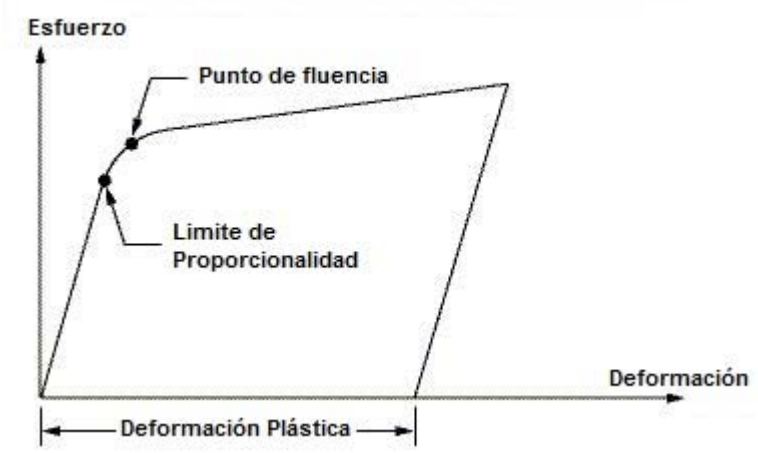


Fig. I.001 Curva Esfuerzo-Deformación de comportamiento material Elasto-plástico

Entre los modelos termodinámicos de comportamiento no lineal destacan los modelos de plasticidad, los cuales se basan en la capacidad disipativa del material y en la continuidad del dominio. En estos modelos, el inicio de la plasticidad está determinado por algún criterio de fluencia como pueden ser los criterios de Tresca o de Von Mises (Heyman 1982). La plasticidad es **no conservativa**, siendo un fenómeno evolutivo en el cual la secuencia en la que se apliquen las cargas afecta la respuesta final del sistema estudiado para un instante dado; en problemas donde se espera una respuesta plástica, generalmente se emplean métodos de análisis temporal o también llamados "incrementales", ya que se deben aplicar las cargas en forma incremental, es decir, como una serie de pasos de tiempo con pequeños incrementos de carga, de manera que la trayectoria carga - desplazamiento sea aproximadamente similar a la esperada físicamente.

En el caso específico del comportamiento no lineal del suelo, se han desarrollado múltiples modelos. En 1957 Drucker (Drucker *et al.* 1957) propuso que el comportamiento del suelo podría ser modelado como un material elasto-plástico con endurecimiento por deformación y le agregó al modelo clásico de fricción de Drucker-Prager un "casco" semiesférico, el cual se combina con el típico cono de Drucker-Prager.

En la figura I.002 se muestra una función típica de fluencia para el modelo con casco elíptico y consiste en tres superficies de falla: f_1 - una envolvente de falla por fricción, f_2 - un casco elíptico de falla para limitar el endurecimiento por deformación en compresión y f_3 - un plano de corte para limitar la falla por tracción; esta función de fluencia de tres superficies presenta discontinuidad en los puntos de intersección entre dichas superficies, ocasionando que se presente inestabilidad tanto numérica como material.

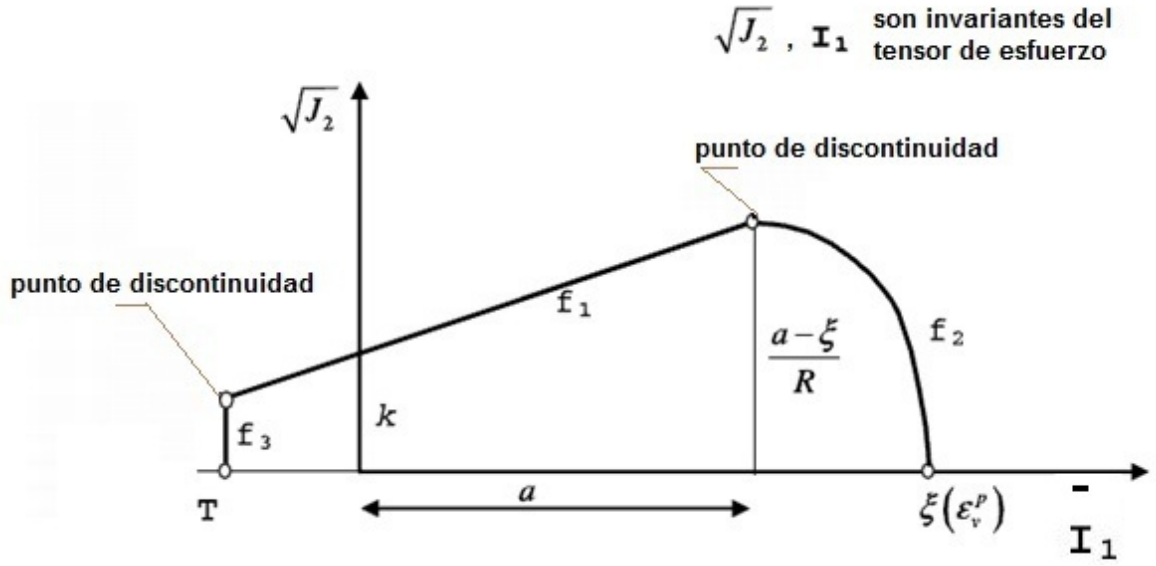


Fig. I.002 Modelo Típico de Fluencia en el plano $I_1 - \sqrt{J_2}$

Diversos autores han hecho variaciones a este modelo típico de tres superficies de falla (ver fig. I.002), de manera que se aproxime cada vez más al comportamiento real de diversos tipos de suelos. Recientemente para el caso de las arcillas, Samir Dolarevic (Dolarevic, Ibrahimgegovic 2007) desarrolló un modelo modificado de tres superficies para materiales elasto-plásticos con el fin de evitar los problemas numéricos de singularidad que se presentan en el punto donde empieza la descarga, suavizando esta transición mediante una curva tangente, tal y como se muestra en la fig. I.003; también agrego una curva circular para suavizar la transición entre la superficie f_1 y la f_3 que corresponde a la falla por tracción.

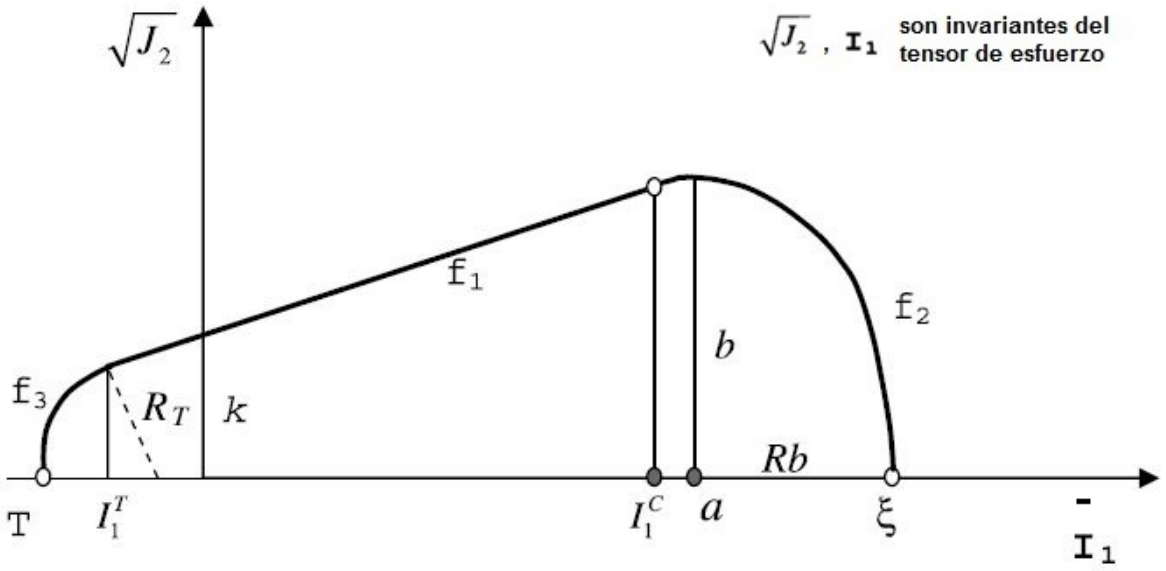


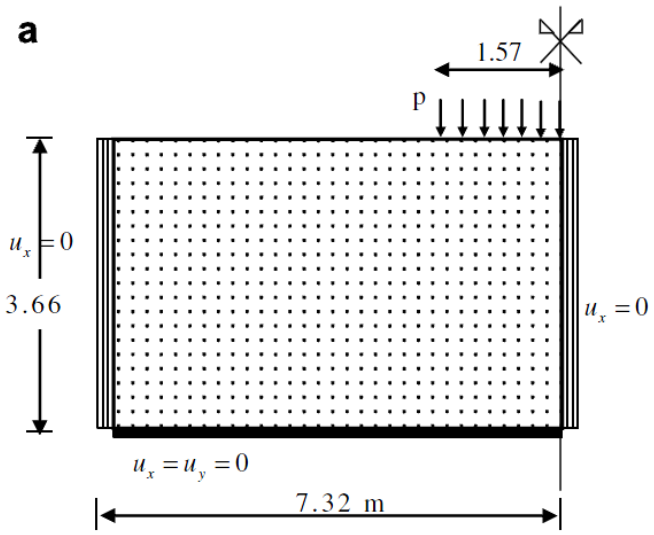
Fig. I.003 Modelo modificado con casco en el plano $I_1 - \sqrt{J_2}$

El modelo utilizado por Samir Dolarevic (Dolarevic, Ibrahimgegovic 2007) para comprobar sus resultados se presenta en la fig. I.004a y consiste en un modelo para determinar la capacidad de carga de una cimentación superficial sujeta a una carga vertical en un estrato de arcilla con las dimensiones y condiciones de frontera mostrados en la misma figura; el modelo analizado se considero como un problema de deformaciones planas y abarca toda la masa del suelo hasta donde se pueden tener desplazamientos nulos o casi nulos. En la fig. I.004a se muestran esquemáticamente los puntos nodales considerados. En la tabla I.02 se muestran los parámetros del modelo modificado propuesto por Dolarevic y utilizado en los análisis.

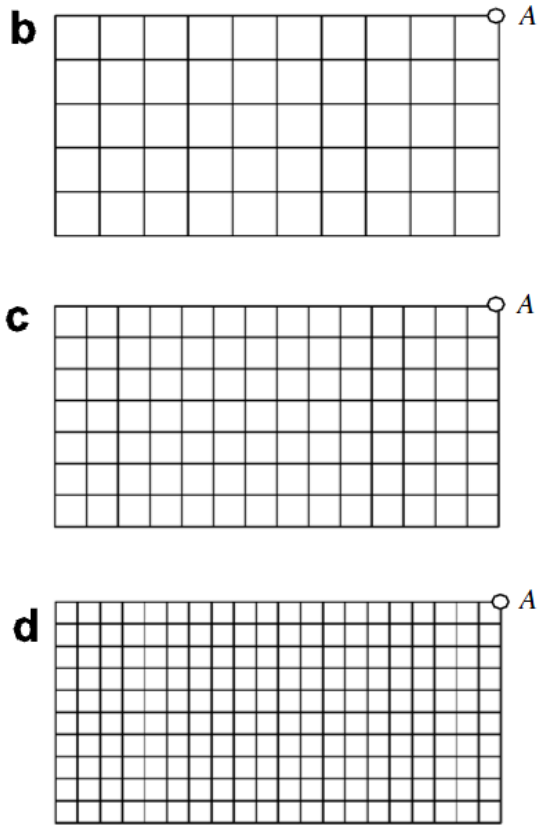
TABLA I.02 Parámetros del Modelo Modificado de Tres Superficies

Constantes Elásticas	$K = 172$ MPa, $G = 80$ MPa
Parámetros Plásticos	$c = 69$ kPa, $\varphi = 20°$, $k = 63.6$ kPa, $\alpha = 0.112$
Parámetros Endurecimiento	$W = 0.003$, $D = 1.26$ mm^2/N, $R = 4$
Posición Inicial del Casco	$\xi_0 = 300$ kN/m^2

Dolarevic realizó los cálculos empleando tres diferentes mallados para observar la convergencia de la solución: fig. I.004b modelo de 50 elementos de cuatro nodos, fig.I.004c modelo de 98 elementos y fig. I.004d modelo con 200 elementos finitos; la carga se aplico en doce incrementos de carga.



(a) Modelo Analítico



(b) Malla con 50 elementos; (c) Malla con 98 elementos; (d) Malla con 200 elementos

Fig. I.004 Estrato de Arcilla sujeto a una carga de una zapata flexible

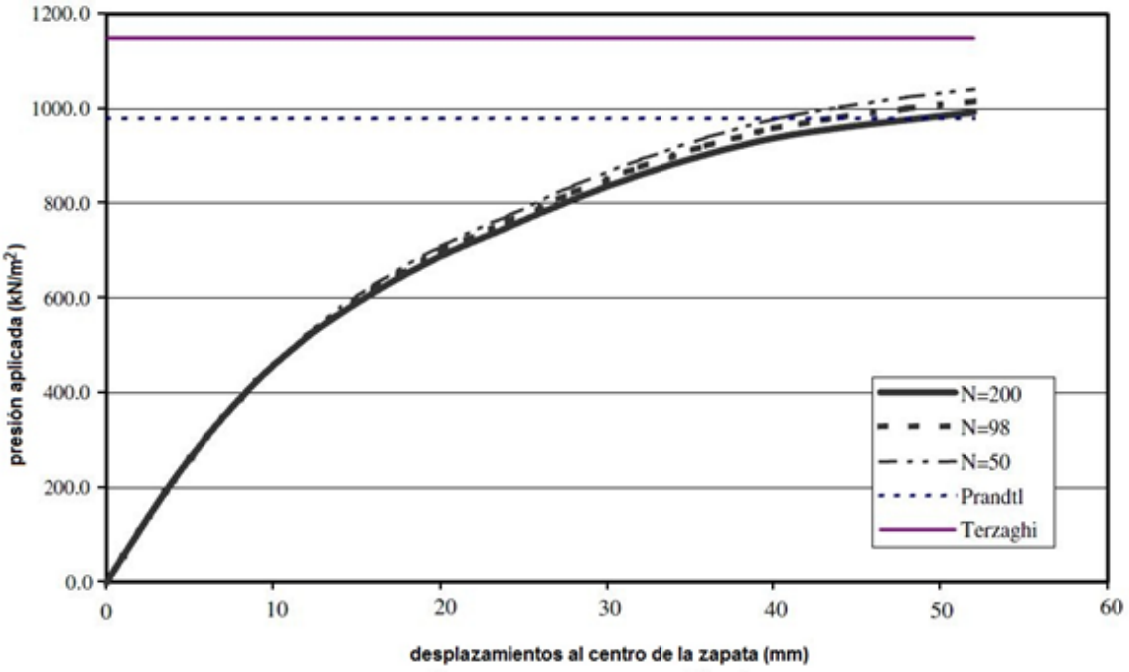


Fig. I.005 Comparación de Resultados

La respuesta completa carga – desplazamiento, obtenida por Dolarevic, para las distintas mallas que analizo se muestra en la fig. I.005, donde la relación entre la presión aplicada y el desplazamiento al centro de la cimentación (Punto A fig. I.004) se presenta y compara razonablemente con las bien conocidas soluciones para la capacidad de carga de Terzaghi y Prandtl.

Otros autores como Katherina Rojas (Rojas *et al.*) tratan de reducir el tamaño de la malla global, como se observa en la fig. I.006, donde se presenta un espacio semi-infinito elástico en 2D; se utiliza un acoplamiento convencional de elementos finitos colocados en zonas cercanas a las cargas (zona FEM) y el dominio semi-infinito es discretizado con elementos de frontera (zona BEM), en donde no es relevante obtener una distribución detallada de los esfuerzos y deformaciones.

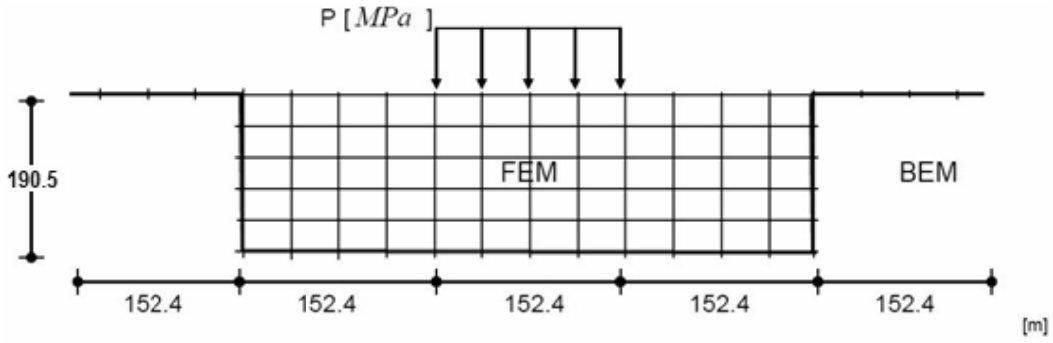


Fig. I.006 Discretización del modelo de espacio semi-infinito 2D

Katherina Rojas (Rojas *et al.*) muestra como realizar el acoplamiento iterativo entre dos modelos matemáticos substancialmente diferentes, logrando la compatibilidad y el equilibrio en la superficie de interface.

Esta metodología resulta atractiva, aunque los autores solo lo muestran para un material homogéneo, elástico lineal; no es posible utilizarla con materiales no lineales estratificados, debido a las limitaciones asociadas a los elementos de frontera.

Programas comerciales actuales como Ansys (ANSYS Mechanical) y Abaqus (SIMULIA), utilizan el modelo modificado de **Drucker-Prager** mostrado en la fig. I.007, para modelar materiales granulares como suelos (arenas), rocas y concreto. La superficie de fluencia incluye dos segmentos principales: una superficie de falla por cortante proporcionando al modelo una falla por cortante dominante y una superficie cónica ("cap") que se corta con el eje de las ordenadas de esfuerzo equivalente, esta superficie cónica limita la superficie de falla en compresión hidrostática proporcionando un mecanismo de endurecimiento inelástico que represente la compactación plástica, entre estas dos superficies hay una superficie de transición para proporcionar un cambio gradual entre ambas; este modelo requiere de solo tres parámetros para definir este tipo de material: cohesión (debe ser mayor a cero), ángulo de fricción interna y el ángulo de dilatancia (aumento de volumen de material debido a fluencia).

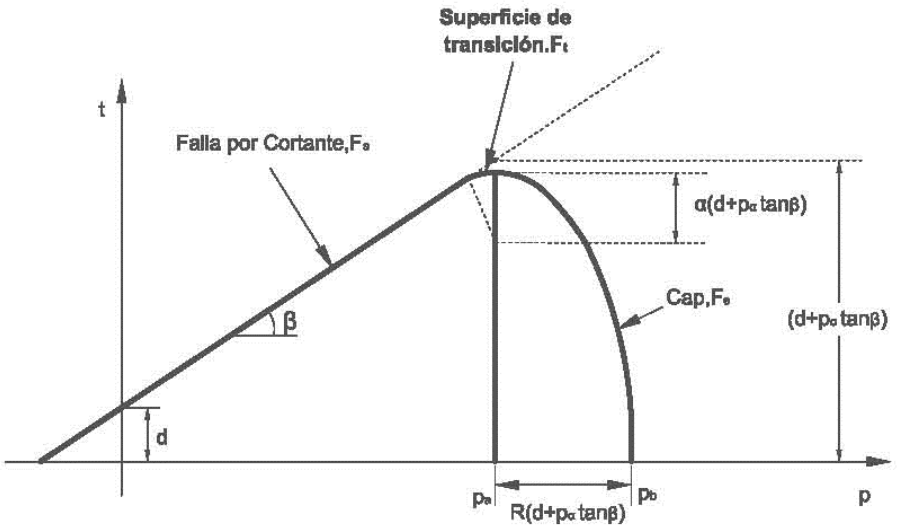


Fig. I.007 Modelo modificado de Drucker-Prager: superficie de fluencia en el plano *t-p*

El criterio de falla por cortante utilizado por el modelo modificado de Drucker-Prager es el criterio de falla de la ley Mohr – Coulomb, como se muestra en la fig. I.008; este criterio ha sido ampliamente usado en aplicaciones geotécnicas. El criterio Mohr - Coulomb supone que la falla está controlada por el máximo esfuerzo cortante y que esta falla por esfuerzo cortante depende del esfuerzo normal. Esto puede representarse gráficamente (fig. I.008) al dibujar el círculo de Mohr para los estados de esfuerzos a la falla en términos de los esfuerzos principales máximo y mínimo. La línea de falla Mohr – Coulomb es la mejor línea recta tangente que se pueda trazar entre los mencionados círculos de Mohr.

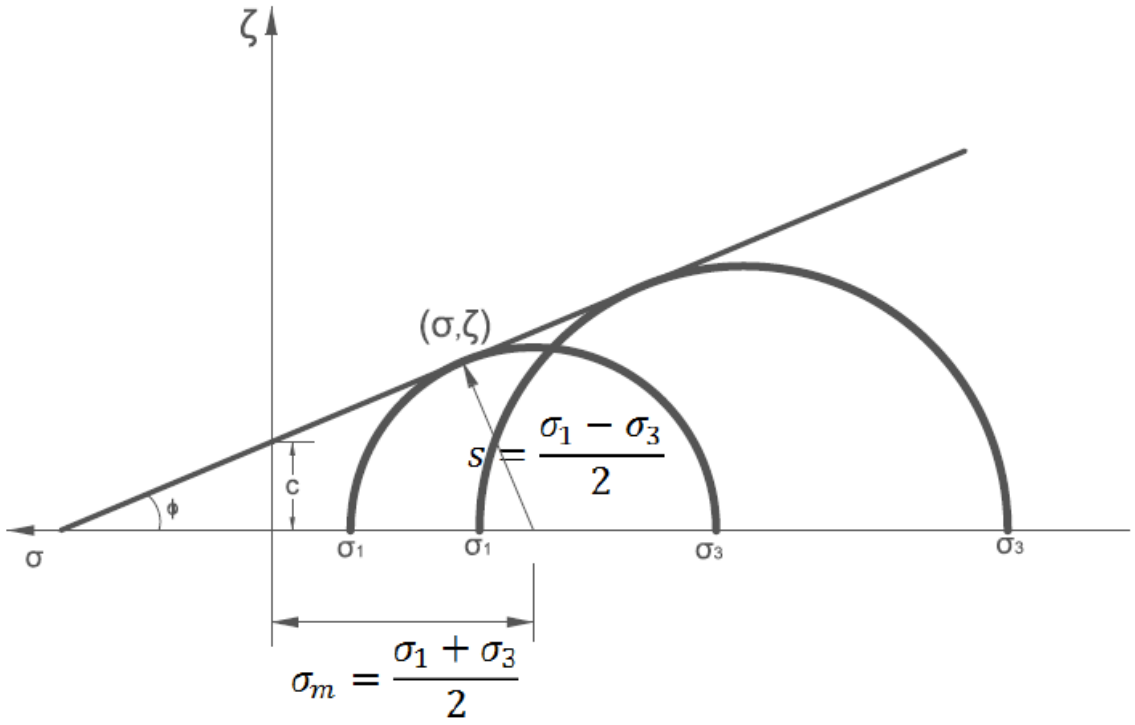


Fig. I.008 Criterio de Falla Mohr-Coulomb

La arcilla no es un material friccionante, por lo que la solución al utilizar el modelo de **Drucker-Prager** dependerá del valor del ángulo de fricción interna, siendo mejor la aproximación en el caso de arcillas duras, compactas y de compacidad media, y menos aproximada en las arcillas blandas o muy blandas, donde el ángulo de fricción interna se aproxima a cero.

Como puede observarse, la única forma razonable de aproximar el comportamiento no lineal de los suelos estratificados de tipo arcilloso por medio de estos modelos termodinámicos, es mediante el empleo del Método de Elementos Finitos, lo cual implica modelar todo el dominio del suelo, hasta donde razonablemente se establezca una frontera con deformación nula. Dado que esto representa un gran volumen de cálculo y memoria que para casos sencillos resulta injustificado, se deduce la conveniencia de simplificar el análisis, de modo que sin un profundo estudio del comportamiento del suelo arcilloso se pueda obtener una respuesta aceptable en términos físicos.

CAPÍTULO II
BASE TEÓRICA

En este trabajo de investigación, una de las piezas fundamentales es la introducción de un elemento finito especial, el cual se inspira en la resolución de problemas multi-escalas, que consiste en analizar y calcular por separado cada uno de los elementos que integran un sistema estructural, estudiando su respectiva respuesta local luego de ser afectados por un conjunto de fenómenos asociados únicamente a ese mismo elemento, y reintegrando y/o condensando dicha respuesta a la escala global. En este caso, se propone la implementación de un súper-elemento que represente el comportamiento local de una zapata aislada apoyada sobre un suelo arcilloso, y al cual se le ha llamado "Elemento Zapata Aislada" (o IFE, acrónimo del inglés: "Isolated Foundation Element") (Moreno, Domínguez 2011).

II.1 Formulación del Elemento Zapata Aislada (IFE **I**solated **F**oundation **E**lement)

Para la formulación de este **súper elemento**, tomando como referencia los ejes locales, como se muestra en la figura II.001, del elemento IFE, definimos para su funcionamiento tres grados de libertad:

- ✓ Rotación alrededor del Eje X
- ✓ Desplazamiento Vertical Eje Y
- ✓ Rotación alrededor del Eje Z

Los parámetros requeridos para definir un elemento Zapata Aislada (IFE) son:

- Dimensión A en dirección del Eje X local
- Dimensión B en dirección del Eje Z local
- Módulo de reacción k_o en kg/cm^3, T/cm^3, lbs/in^3, etc.
- Angulo θ respeto al Sistema Global de Referencia

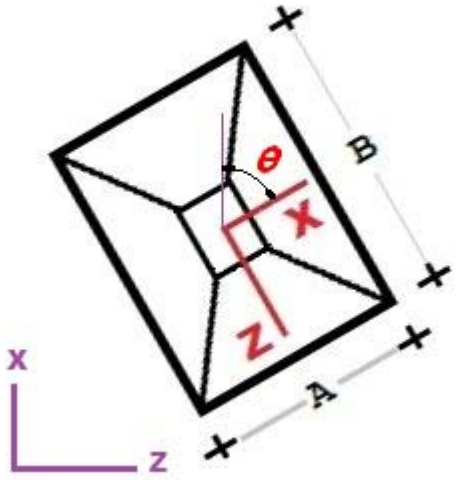


Fig. II.001 Sistema Local de Referencia del Elemento Zapata Aislada IFE

Con estos parámetros definimos la rigidez del elemento IFE en el nodo donde se conecta:

- ✓ Rigidez a la rotación alrededor del Eje X: $K_{\emptyset x} = k_o \frac{AB^3}{12}$
- ✓ Rigidez al desplazamiento vertical Eje Y: $K_y = k_o.A.B$ (II.1.1)
- ✓ Rigidez a la rotación alrededor del Eje Z: $K_{\emptyset z} = k_o \frac{A^3B}{12}$

El cálculo correspondiente de la rigidez al desplazamiento vertical K_y en dirección del Eje Y, se muestra con detalle en el esquema de la figura II.002; donde se emplea la ecuación de equilibrio $F = K.d$, sabiendo que las deformaciones son proporcionales al modulo de reacción k_o el desplazamiento vertical que se obtiene es $d = \sigma/k_o$; siendo σ el esfuerzo en el medio de soporte. Evaluando el esfuerzo en el medio de soporte y realizando las sustituciones mostradas en la figura II.002 se obtiene la rigidez al desplazamiento vertical $K_y = k_o.A.B$

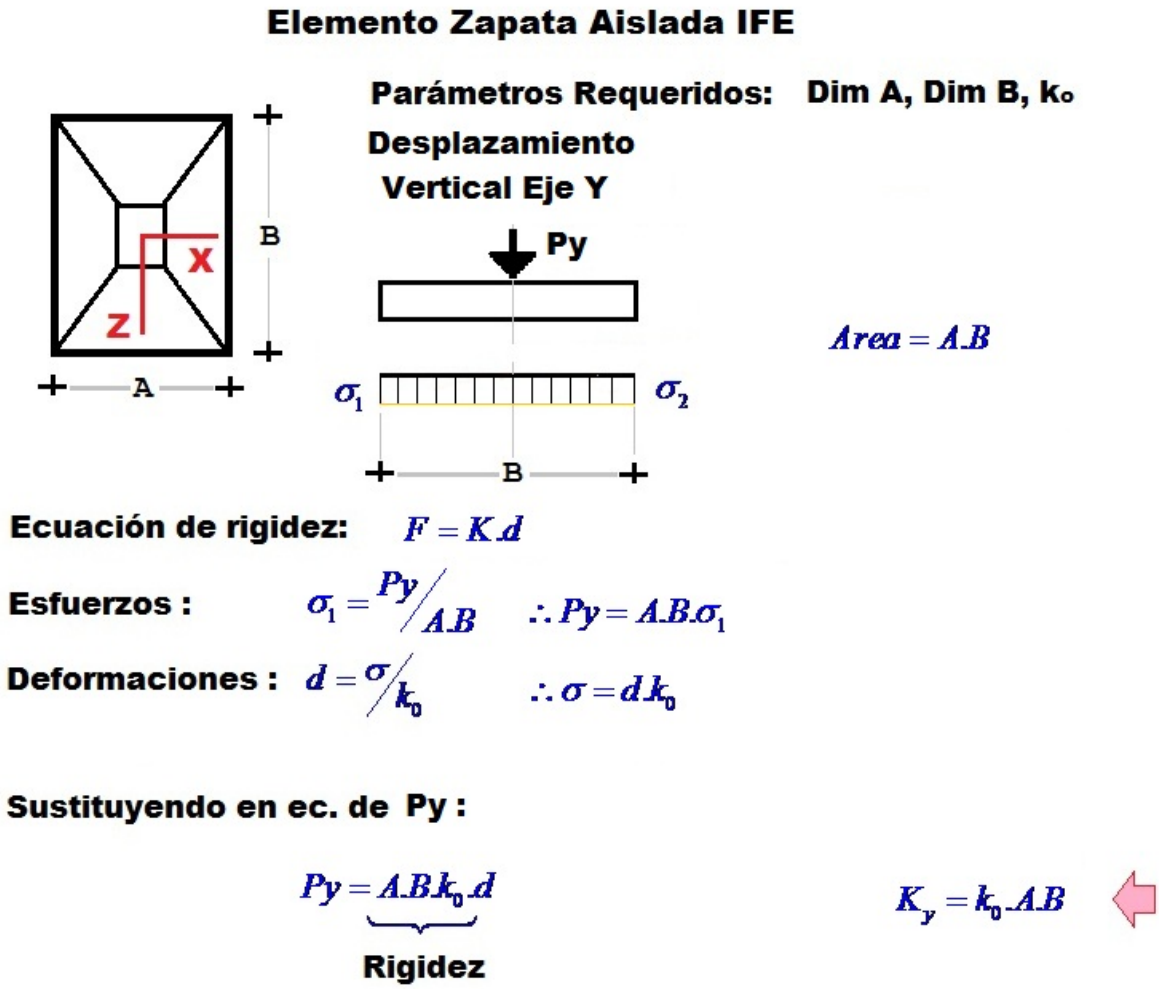


Fig. II.002 Rigidez al desplazamiento vertical K_y del elemento IFE

El cálculo correspondiente de la Rigidez a la Rotación alrededor del Eje X $K_{\emptyset x}$, se muestra con detalle en el esquema de la figura II.003; en este caso se emplea la ecuación de equilibrio $M_x = K_{\emptyset x}.\theta$, sabiendo que las deformaciones verticales son proporcionales al modulo de reacción k_o y que la rotación de la zapata vale $\theta = 2.d/B$ se obtiene el esfuerzo en el medio de soporte como $\sigma = \theta.B.k_o/2$; al sustituir en la ecuación de equilibrio y simplificar (ver figura II.003), se obtiene la rigidez a la rotación alrededor del Eje X $K_{\emptyset x} = k_o.A.B^3/12$

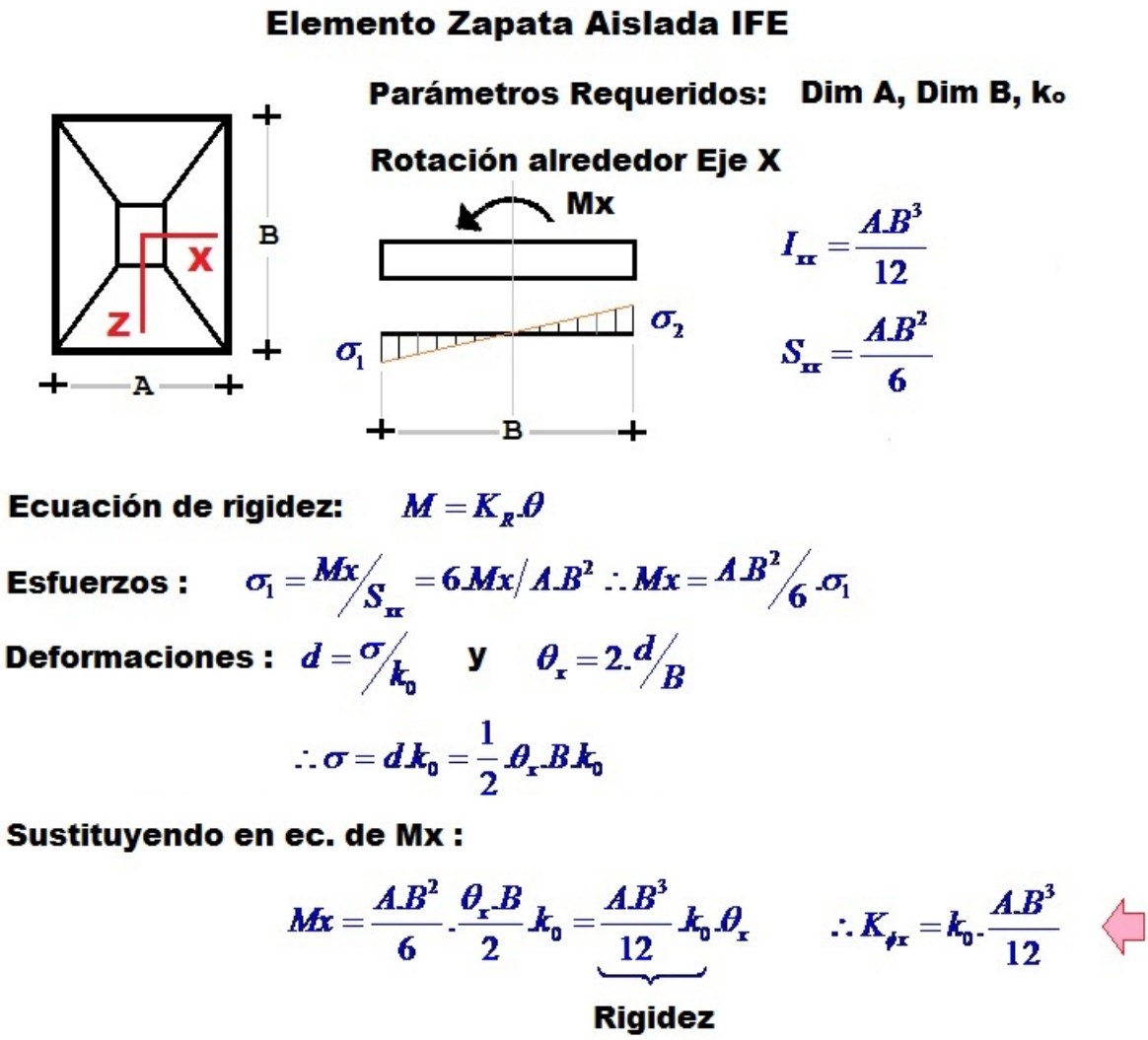


Fig. II.003 Rigidez a la Rotación $K_{\emptyset x}$ del Elemento IFE

Se realizó un desarrollo similar para el caso de la rigidez a la rotación $K_{\emptyset z}$ alrededor del Eje Z.

Con las expresiones (II.1.1) determinamos las características de rigidez que proporciona el elemento IFE al modelo estructural en cada uno de los grados de libertad considerados, previa aplicación de la rotación matricial entre el Sistema Local IFE y el Sistema Global estructural, en cada punto nodal donde se coloque este tipo de elemento; durante el proceso de análisis, el valor del módulo de reacción se actualiza en cada ciclo, tal y como se explica posteriormente en la sección II.3.

II.2 Cálculo de la Matriz de Influencia

El cálculo de la matriz de influencia para **cargas estáticas verticales**, se realiza utilizando el procedimiento propuesto por el Dr. Leonardo Zeevaert (Zeevaert 1980), para lo cual, en forma imaginaria subdividimos la superficie del suelo en estudio en pequeñas regiones que llamaremos zonas de influencia, que al interceptar los diferentes estratos, se forman pequeños volúmenes de terreno cuyas propiedades se consideran uniformes y serán referidas al punto medio, como se muestra en la figura II.004

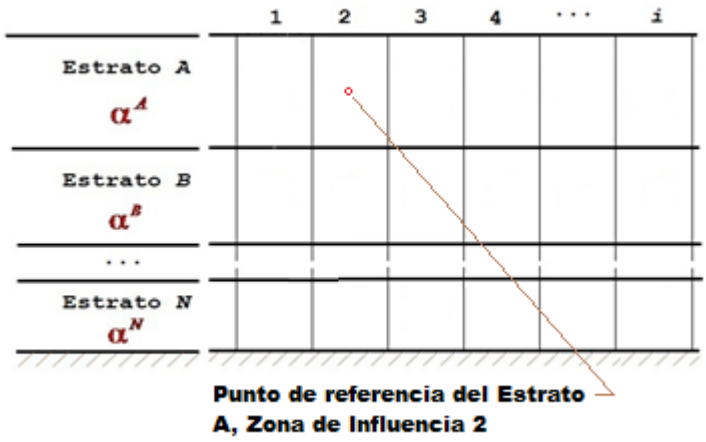


Fig. II.004 Volúmenes Imaginarios de Suelo para su Estudio

El cálculo de los desplazamientos verticales de la superficie del suelo, tanto hundimientos como expansiones, requiere el conocimiento de las relaciones de comportamiento esfuerzo-deformación-tiempo de los diferentes estratos del subsuelo (Zeevaert 1973, capítulo II). En el apéndice A de este trabajo (Zeevaert 1980), se presenta un procedimiento para obtener los parámetros requeridos del suelo, a partir de las pruebas de laboratorio. Si α^N representa la deformación volumétrica del estrato N para un tiempo determinado t, y $\Delta\sigma_{ji}^N$ al incremento medio de esfuerzo en un punto j para el mismo estrato N debido a la carga aplicada en una zona de influencia o área tributaria a_i, se puede definir a la deformación del estrato N como:

$$\Delta\delta_{ji}^N = \alpha^N . \Delta\sigma_{ji}^N \qquad \text{(II.2.1)}$$

y el desplazamiento vertical de la superficie en el punto j, será la suma de las deformaciones de todos los estratos:

$$\delta_{ji} = \sum_A^N \alpha^N . \Delta\sigma_{ji}^N \qquad \text{(II.2.2)}$$

El valor de $\Delta\sigma_{ji}^{N}$ en cualquier punto de la masa del suelo se puede expresar en función de la carga por unidad de área superficial q_i aplicada en un área tributaria a_i:

$$\Delta\sigma_{ji}^{N} = I_{ji}^{N} . q_i \qquad \text{(II.2.3)}$$

en donde I_{ji}^{N} es el termino *j i* de la matriz de influencia y *N* indica el estrato en cuestión. Para el cálculo de la distribución de esfuerzos en la masa del suelo, puede utilizarse la Teoría de Boussinesq, Westergaard ó Fröhlich; como referencia en el apéndice B se presenta la distribución de esfuerzos de Boussinesq y Westergaard (Braja 2009).

En la figura II.005 el punto *i* se entiende localizado al centro del área tributaria a_i donde se aplica la carga por unidad de área q_i, y *j* el punto en la superficie donde se calculan los efectos resultantes.

Sustituyendo la expresión (II.2.3) en la (II.2.2) obtenemos:

$$\delta_{ji} = \sum_{A}^{N} \alpha^{N} . I_{ji}^{N} . q_i$$

Supongamos que el área tributaria a_i está cargada con q_i = +1.0, se obtendrá el desplazamiento unitario vertical en *j* debido a la carga unitaria en *i*

$$\bar{\delta}_{ji} = \sum_{A}^{N} \alpha^{N} . I_{ji}^{N} \qquad \text{(II.2.4)}$$

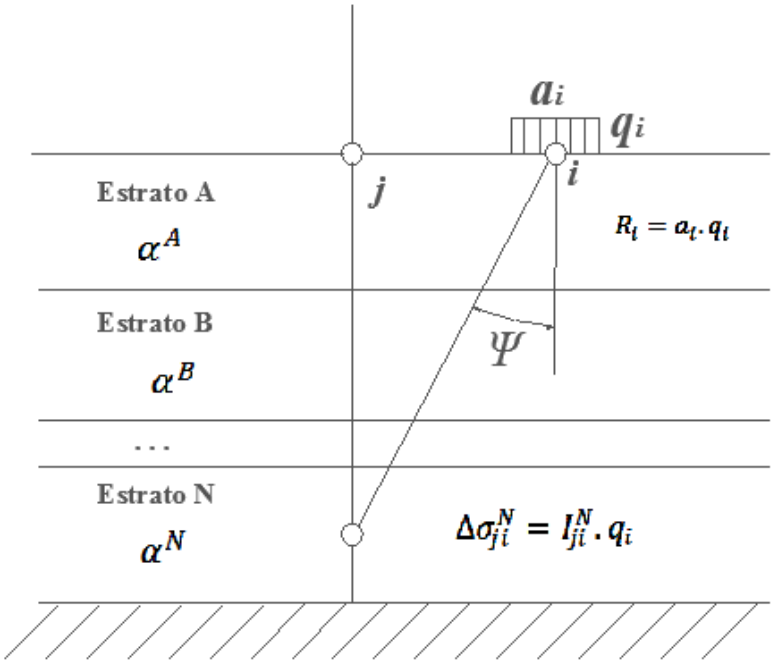


Fig. II.005 Incremento de Esfuerzo Vertical en el punto medio del estrato N

Realizando el cálculo de las influencias I_{ji} de esfuerzo unitario en la forma que se muestra en la figura II.006, se podrán calcular los desplazamientos verticales unitarios en la superficie del terreno, debido a la carga q_1 = +1.0 aplicada en el área tributaria a_1 ó zona de influencia 1, de acuerdo con la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\delta}_{31} \\ \bar{\delta}_{41} \\ \cdots \\ \bar{\delta}_{i1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{11}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{21}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{31}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{41}^{\mathrm{A}} & \cdots & \mathrm{I}_{i1}^{\mathrm{A}} \\ \mathrm{I}_{11}^{\mathrm{B}} & \mathrm{I}_{21}^{\mathrm{B}} & \mathrm{I}_{31}^{\mathrm{B}} & \mathrm{I}_{41}^{\mathrm{B}} & \cdots & \mathrm{I}_{i1}^{\mathrm{B}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{I}_{11}^{\mathrm{N}} & \mathrm{I}_{21}^{\mathrm{N}} & \mathrm{I}_{31}^{\mathrm{N}} & \mathrm{I}_{41}^{\mathrm{N}} & \cdots & \mathrm{I}_{i1}^{\mathrm{N}} \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^{A} \\ \alpha^{B} \\ \cdots \\ \alpha^{N} \end{pmatrix}$$

o bien $$\left[\bar{\delta}_{j1}\right] = \left[I_{j1}^{N}\right]^{T} . [\alpha^{N}] \qquad \text{(II.2.5)}$$

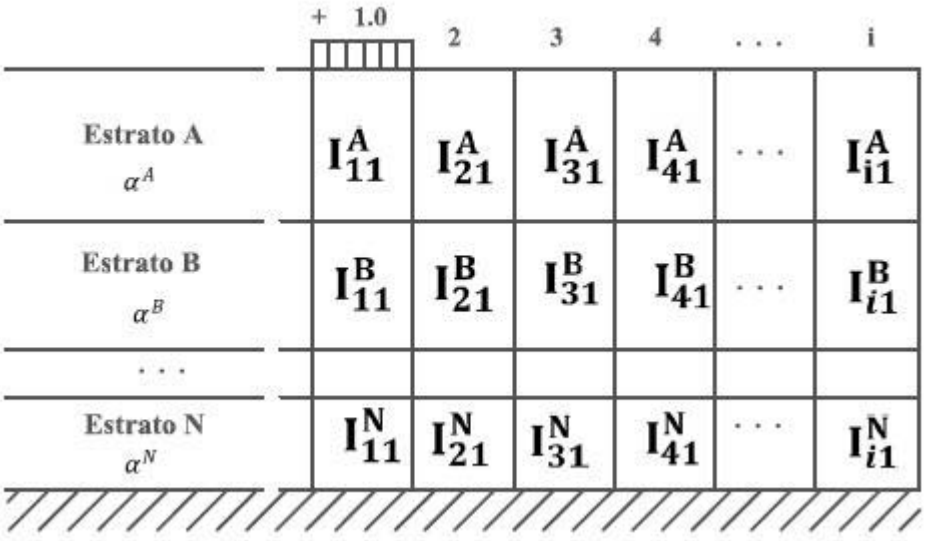


Fig. II.006 Factores de Influencia para carga unitaria en la zona 1

esto es

$$\begin{bmatrix} \overline{\delta}_{11} \\ \overline{\delta}_{21} \\ \overline{\delta}_{31} \\ \overline{\delta}_{41} \\ \cdots \\ \overline{\delta}_{i1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{11}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{11}^{\mathrm{B}} & \cdots & \mathrm{I}_{11}^{\mathrm{N}} \\ \mathrm{I}_{21}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{21}^{\mathrm{B}} & \cdots & \mathrm{I}_{21}^{\mathrm{N}} \\ \mathrm{I}_{31}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{31}^{\mathrm{B}} & \cdots & \mathrm{I}_{31}^{\mathrm{N}} \\ \mathrm{I}_{41}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{41}^{\mathrm{B}} & \cdots & \mathrm{I}_{41}^{\mathrm{N}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{I}_{i1}^{\mathrm{A}} & \mathrm{I}_{i1}^{\mathrm{B}} & \cdots & \mathrm{I}_{i1}^{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^{A} \\ \alpha^{B} \\ \cdots \\ \alpha^{N} \end{pmatrix}$$

Utilizando la expresión (II.2.5) para las zonas 1, 2, 3, …, *i*, se forma la matriz general para todas las zonas de influencia del suelo en estudio, como sigue:

$$\left[\overline{\delta}_{ji}\right] = \begin{bmatrix} \left[\overline{\delta}_{j1}\right]^{T} \\ \left[\overline{\delta}_{j2}\right]^{T} \\ \left[\overline{\delta}_{j3}\right]^{T} \\ \left[\overline{\delta}_{j4}\right]^{T} \\ \cdots \\ \left[\overline{\delta}_{ji}\right]^{T} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\delta}_{11} & \overline{\delta}_{21} & \overline{\delta}_{31} & \overline{\delta}_{41} & \cdots & \overline{\delta}_{i1} \\ \overline{\delta}_{12} & \overline{\delta}_{22} & \overline{\delta}_{32} & \overline{\delta}_{42} & \cdots & \overline{\delta}_{i2} \\ \overline{\delta}_{13} & \overline{\delta}_{23} & \overline{\delta}_{33} & \overline{\delta}_{43} & \cdots & \overline{\delta}_{i3} \\ \overline{\delta}_{14} & \overline{\delta}_{24} & \overline{\delta}_{34} & \overline{\delta}_{44} & \cdots & \overline{\delta}_{i4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{\delta}_{1i} & \overline{\delta}_{2i} & \overline{\delta}_{3i} & \overline{\delta}_{4i} & \cdots & \overline{\delta}_{ii} \end{pmatrix} \qquad \text{(II.2.6)}$$

La matriz expresada en (II.2.6) traspuesta y multiplicada por la matriz columna de las cargas $\boldsymbol{q_i}$ en las áreas tributarias o zonas de influencia $\boldsymbol{a_i}$, proporciona la matriz columna de los desplazamientos verticales $\boldsymbol{\delta_i}$ de la superficie cargada.

Finalmente obtenemos

$$\left[\delta_i\right] = \left[\overline{\delta}_{ji}\right]^{T} \cdot \left[q_i\right] \qquad \text{(II.2.7)}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \cdots \\ \delta_i \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\delta}_{11} & \overline{\delta}_{12} & \overline{\delta}_{13} & \overline{\delta}_{14} & \cdots & \overline{\delta}_{1i} \\ \overline{\delta}_{21} & \overline{\delta}_{22} & \overline{\delta}_{23} & \overline{\delta}_{24} & \cdots & \overline{\delta}_{2i} \\ \overline{\delta}_{31} & \overline{\delta}_{32} & \overline{\delta}_{33} & \overline{\delta}_{34} & \cdots & \overline{\delta}_{3i} \\ \overline{\delta}_{41} & \overline{\delta}_{42} & \overline{\delta}_{43} & \overline{\delta}_{44} & \cdots & \overline{\delta}_{4i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{\delta}_{i1} & \overline{\delta}_{i2} & \overline{\delta}_{i3} & \overline{\delta}_{i4} & \cdots & \overline{\delta}_{ii} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \cdots \\ q_i \end{bmatrix}$$

Si las áreas tributarias son del mismo tamaño, se obtendrá una matriz simétrica de desplazamientos unitarios, es decir

$$\left[\overline{\delta}_{ij} \right] = \left[\overline{\delta}_{ji} \right]$$

La expresión (II.2.7) es la que utilizaremos para el cálculo de los hundimientos o expansiones de la superficie del terreno.

II.3 Estrategia de análisis para el empleo del Elemento IFE

Para llevar a cabo el análisis numérico de un sistema estructural de cimentación, formado por trabes de liga y elementos IFE acoplados, como se muestra en la figura II.007, e incluir la interacción con el suelo de soporte, se propone la siguiente estrategia de cálculo secuencial:

- ✓ Se subdivide el área de la cimentación en pequeñas regiones rectangulares, como se muestra en la figura II.007, que llamaremos **Zonas de Influencia**, extendiendo éstas fuera de los límites de la cimentación, para considerar en el análisis los efectos de las cargas de construcciones vecinas, cuando así se requiera.

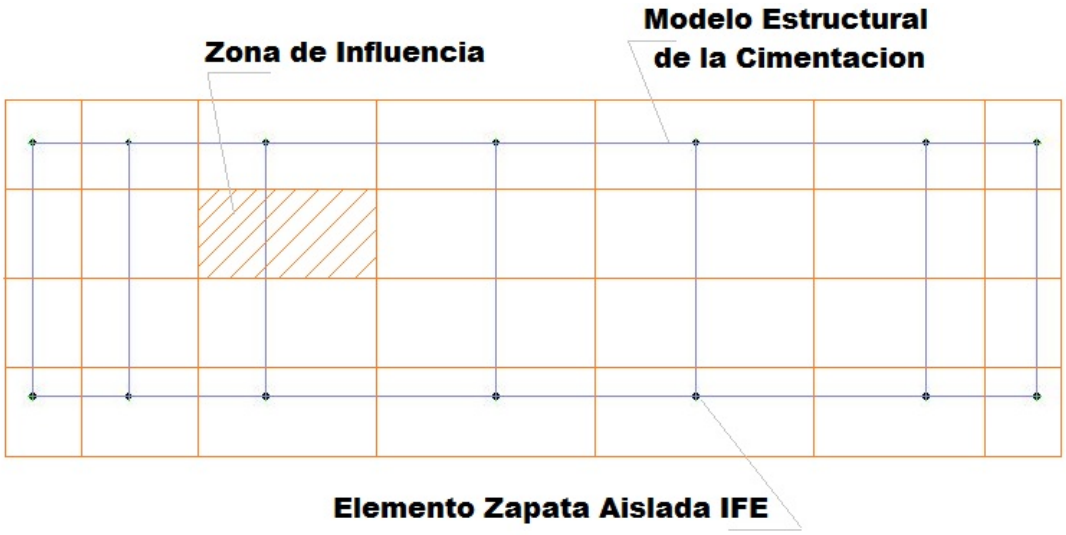


Fig. II.007 Zonas de Influencia y Modelo Estructural de Cimentación

- ✓ Se realiza un estudio de asentamientos de la superficie del terreno (inciso II.2 y Zeevaert 1980) cuando se colocan cargas unitarias en cada una de las Zonas de Influencia, es decir, se calcula la **Matriz de Influencia**. En la figura II.008, se muestran los coeficientes de la matriz de influencia, que se obtienen cuando se carga la zona 1 con una carga unitaria.

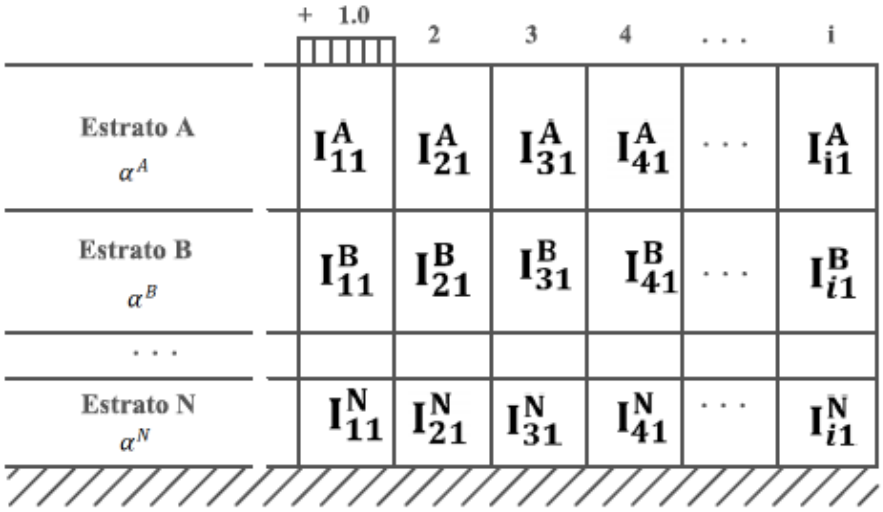


Fig. II.008 Factores de Influencia para carga unitaria en la zona 1

- ✓ Se genera el modelo estructural para el análisis de la cimentación, utilizando el elemento Zapata Aislada IFE en los puntos nodales que requieran soporte; generalmente se colocan en la base de las columnas. En la figura II.009 se presenta un modelo estructural de cimentación con 14 puntos nodales, 19 trabes de liga y 14 elementos Zapata Aislada IFE.

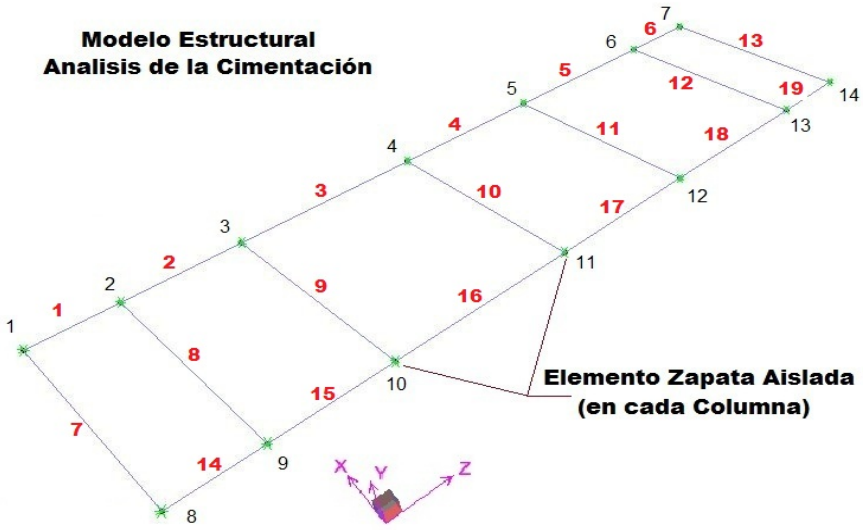


Fig. II.009 Modelo de Análisis Estructural de la Cimentación

El proceso de análisis iterativo se efectúa de la manera siguiente:

a) Se realiza el análisis estructural de la cimentación, considerando en los elementos IFE los valores actualizados del modulo de reacción de cada zona de influencia; obteniéndose la configuración deformada como la que se muestra en la figura II.010. En el primer análisis de la cimentación, deberá utilizarse un módulo de reacción inicial e igual para todos los elementos IFE del modelo estructural.

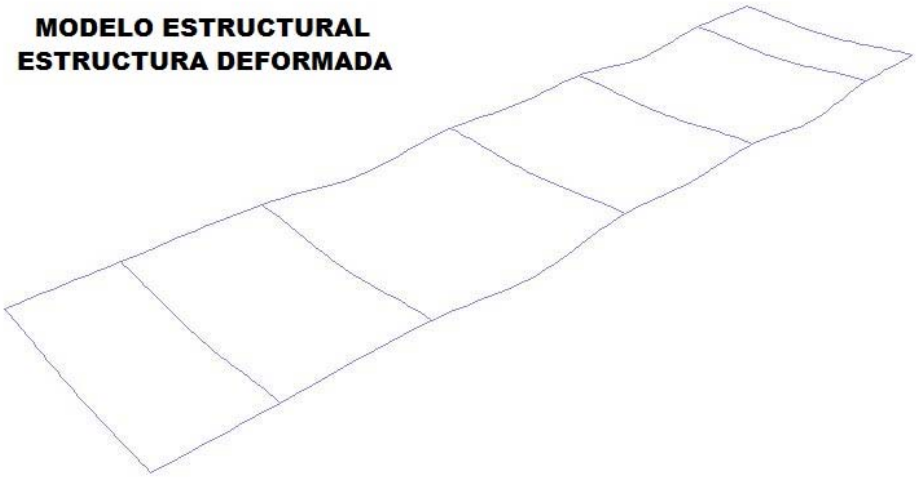


Fig. II.010 Deformaciones del Modelo Estructural de la Cimentación

b) Se determinan y acumulan las cargas en cada una de las Zonas de Influencia, de acuerdo a la localización en planta de éstas y los elementos IFE del modelo estructural, en la figura II.011 se muestra un modelo con 28 zonas de influencia; al realizar la acumulación de cargas se pueden incluir, en su caso, las cargas generadas por construcciones vecinas, rellenos, firmes, trabes de liga, cargas importantes como equipos, cisternas, etc.; que influyan en el análisis y no estén consideradas en el modelo estructural de la cimentación.

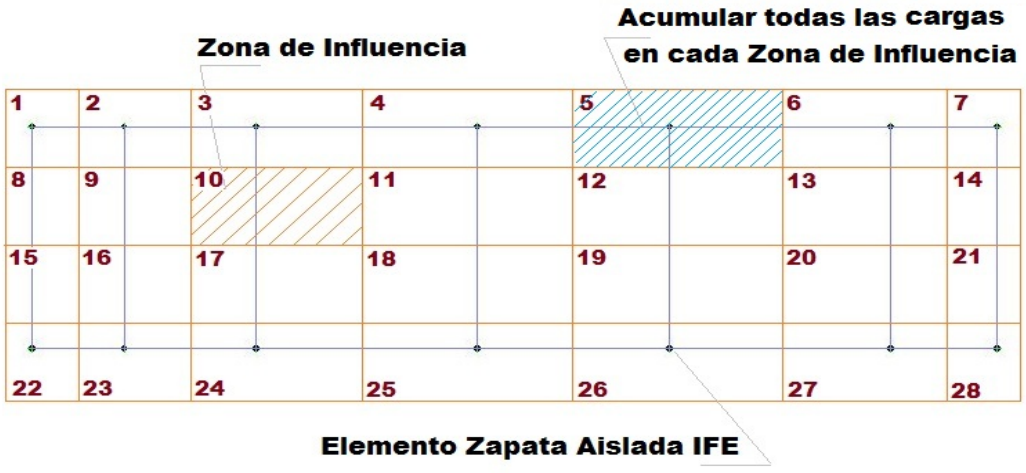


Fig. II.011 Acumulación de Cargas en todas las Zonas de Influencia

c) Se utiliza la expresión II.2.7 definida en el inciso II.2, para calcular las deformaciones ó hundimientos en la superficie del terreno, utilizando las cargas acumuladas en cada zona de influencia obtenidas en el punto anterior y la matriz de influencia.

$$[\delta_i] = \left[\overline{\delta}_{ji}\right]^T .[q_i] \qquad \text{(II.2.7)}$$

d) Se estima un módulo de reacción válido para cada una de las Zonas de Influencia mediante la expresión II.3.1, y se calculan las nuevas propiedades de rigidez de los elementos IFE, de acuerdo a su localización en planta y las mencionadas zonas de influencia. Se muestra la expresión para el cálculo del módulo de reacción equivalente en la zona *i* en el ciclo *k*.

$$\left[k_{0_i}\right]_k = \left(\frac{P_i}{\delta_i}\right)_k \qquad \text{(II.3.1)}$$

las propiedades de rigidez de los elementos IFE para el ciclo *k*, se determinan con las expresiones II.1.1 definidas en el inciso II.1, utilizando los valores actualizados del modulo de reacción de cada zona de influencia; se muestran las expresiones II.1.1 como referencia:

$$K_{\phi x} = k_0 . \frac{A.B^3}{12}$$

$$K_y = k_0 . A.B \qquad \text{(II.1.1)}$$

$$K_{\phi z} = k_0 . \frac{A^3 . B}{12}$$

La Matriz de Rigidez en el Sistema Local de Referencia del elemento IFE, se expresa como:

$$K_{local} = \begin{bmatrix} k_o.A.B^3/12 & 0 & 0 \\ 0 & k_o.A.B & 0 \\ 0 & 0 & k_o.A^3.B/12 \end{bmatrix}$$

y la Matriz de Rigidez del elemento IFE referida al Sistema Global del Sistema estructural:

$$K_{global} = \begin{bmatrix} K_1.c^2 + K_3.s^2 & 0 & (K_1 - K_3).c.s \\ 0 & K_2 & 0 \\ (K_1 - K_3).c.s & 0 & K_1.s^2 + K_3.c^2 \end{bmatrix}$$

donde C = coseno θ , S = seno θ y θ es el ángulo del elemento IFE respeto al Sistema Global de Referencia; K_1, K_2, y K_3 están dadas por las expresiones II.1.1.

e) Se verifica si se satisface el criterio de convergencia definido en la expresión II.3.2, donde ε es el porcentaje de variación entre los valores estimados del modulo de reacción para cada zona de influencia en cada ciclo y *Tol* es la máxima variación deseada.

$$\varepsilon = \left| \frac{\left[k_{0_i}\right]_k - \left[k_{0_i}\right]_{k-1}}{\left[k_{0_i}\right]_k} \right| .100 \leq Tol \qquad \text{(II.3.2)}$$

Se repiten los pasos descritos en los incisos (a) a (e) tantas veces como sea necesario hasta que se satisfaga la expresión II.3.2 mencionada.

CAPÍTULO III
DESARROLLO DEL ALGORITMO

Como en todo proceso de elaboración de una estrategia basada en métodos numéricos, ésta pasa por tres etapas:

i. Formulación teórica.
ii. Implementación numérica por medio de algoritmos computacionales y validación numérica.
iii. Calibración experimental (fuera de los alcances de este trabajo, aunque altamente recomendable).

En el capítulo previo se trataron los fundamentos teóricos en los que se sustenta esta propuesta de análisis estructural –lo que correspondería a la etapa i-, los cuales deben ahora traducirse en algoritmos matemáticos que permitan la implementación numérica en algún programa computacional. Estos algoritmos deben por su parte, ser validados ya sea por la aproximación obtenida respecto a alguna solución analítica conocida, o bien por medio de la comparación con resultados obtenidos en códigos similares reconocidos científicamente.

En múltiples ocasiones, la formulación teórica resulta sencilla de entender cuando el proceso se observa desde una simple perspectiva humana, pero en términos computacionales una simple suma acumulada puede ser de una alta complejidad en función del lenguaje de programación y de la estructura global del código en el cual la nueva formulación será integrada.

Para este caso, la estrategia se implementó en el programa **FINITO**, que es un código general basado en el Método de los Elementos Finitos desarrollado por el autor, el cual está escrito en el lenguaje FORTRAN.

La estructura del programa de elementos finitos **FINITO** es modular, de manera que resulta fácil agregar, mejorar o suprimir elementos de la librería de elementos finitos que forma parte del programa; esta estructura básica del módulo de control principal, descrita en el diagrama de bloques de la figura III.002, consiste en:

- Entrada de datos de control, que definen la descripción, el tamaño del modelo de análisis, inicialización de arreglos requeridos.
- Llamado a las rutinas independientes que definen la formulación de cada elemento finito que forma parte de la librería, requeridas según el modelo por analizar.
- Ensamble global del sistema de ecuaciones que rige el comportamiento del modelo por analizar.

- Solución del sistema de ecuaciones e impresión de desplazamientos obtenidos del modelo.
- Llamado a las rutinas independientes que definen los resultados requeridos de cada elemento finito que forma parte de la librería y fue utilizado en el modelo.
- Actividades finales, para una salida limpia del programa de cómputo.

El elemento IFE fue implementado agregando al programa básico una rutina llamada **ZAPATAIFE** con la formulación del elemento de acuerdo a lo descrito en el sección II.3.d y otra rutina llamada **ZAPATAIFE1** con las instrucciones necesarias para la obtención de los resultados requeridos en este elemento finito, el diagrama de bloques de la figura III.003 muestra en detalle los cálculos internos que corresponden a las rutinas nuevas implementadas en el programa **FINITO**; los resultados obtenidos en el elemento IFE son los momentos flexionantes alrededor del eje X y del eje Z, la reacción vertical en el eje Y referidos al sistema local del Elemento IFE, además también se proporcionan los esfuerzos en el medio de soporte en las cuatro esquinas, como se señala en la figura III.001.

Fig. III.001 Resultados Obtenidos en el Elemento Zapata Aislada IFE

Estas rutinas se agregaron a la librería del programa básico, como se muestra en el diagrama de bloques de la figura III.002, y al módulo de control principal se le indicó la existencia de las nuevas rutinas para su llamado cuando sean requeridas.

El esquema numérico adoptado, es similar al método de Newton-Raphson, en el que se estima una primera aproximación del módulo de reacción (valor inicial), se realizan los pasos descritos en el capitulo II.3, lo que nos proporciona un procedimiento recursivo para estimar el valor del módulo de reacción en cada iteración, hasta lograr la aproximación deseada; esta estrategia fue implementada en el programa **FINITO,** como se muestra en el bloque "Método Iterativo" indicado en el diagrama de la figura III.002.

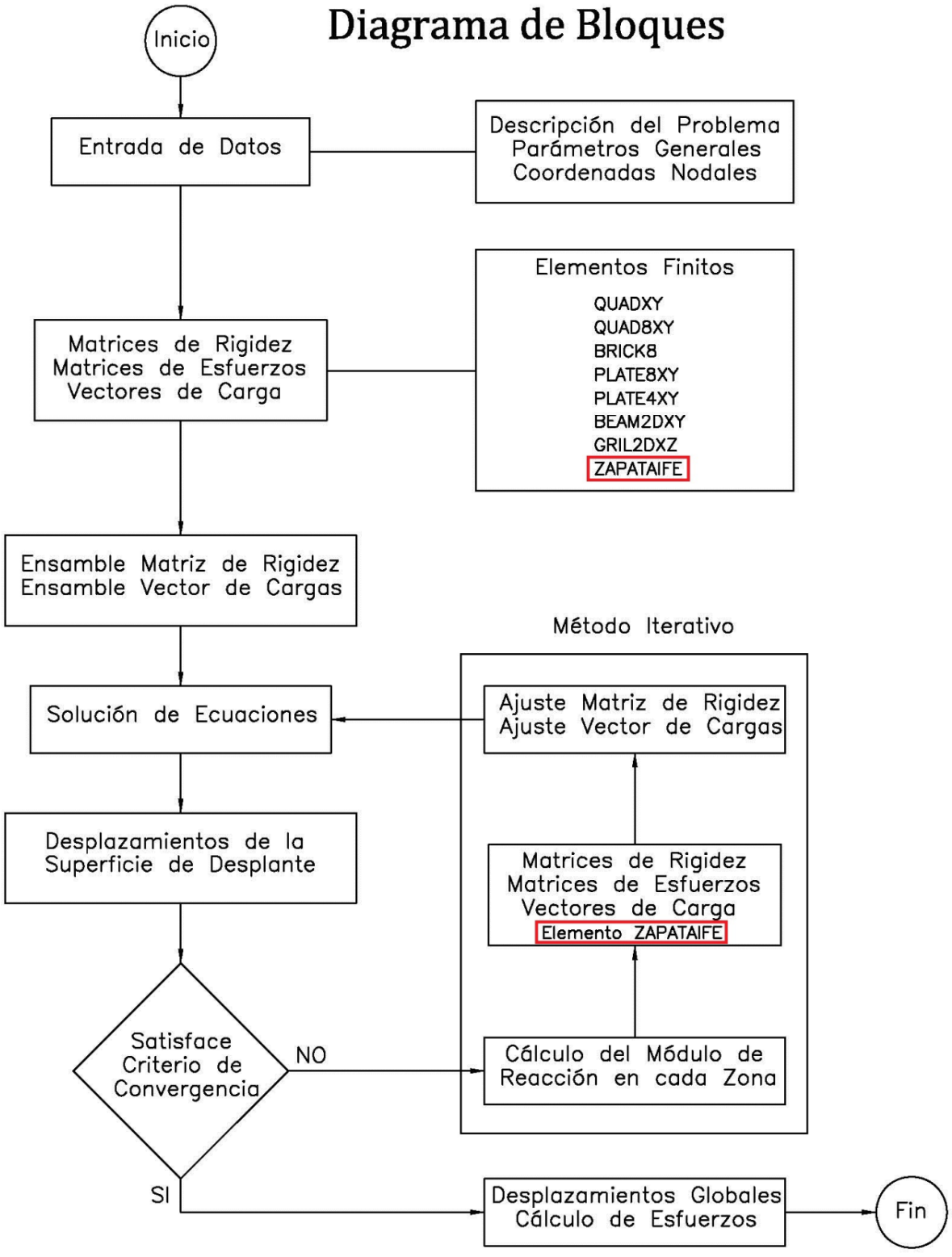


Fig. III.002 Diagrama de Bloques de la Estrategia Implementada

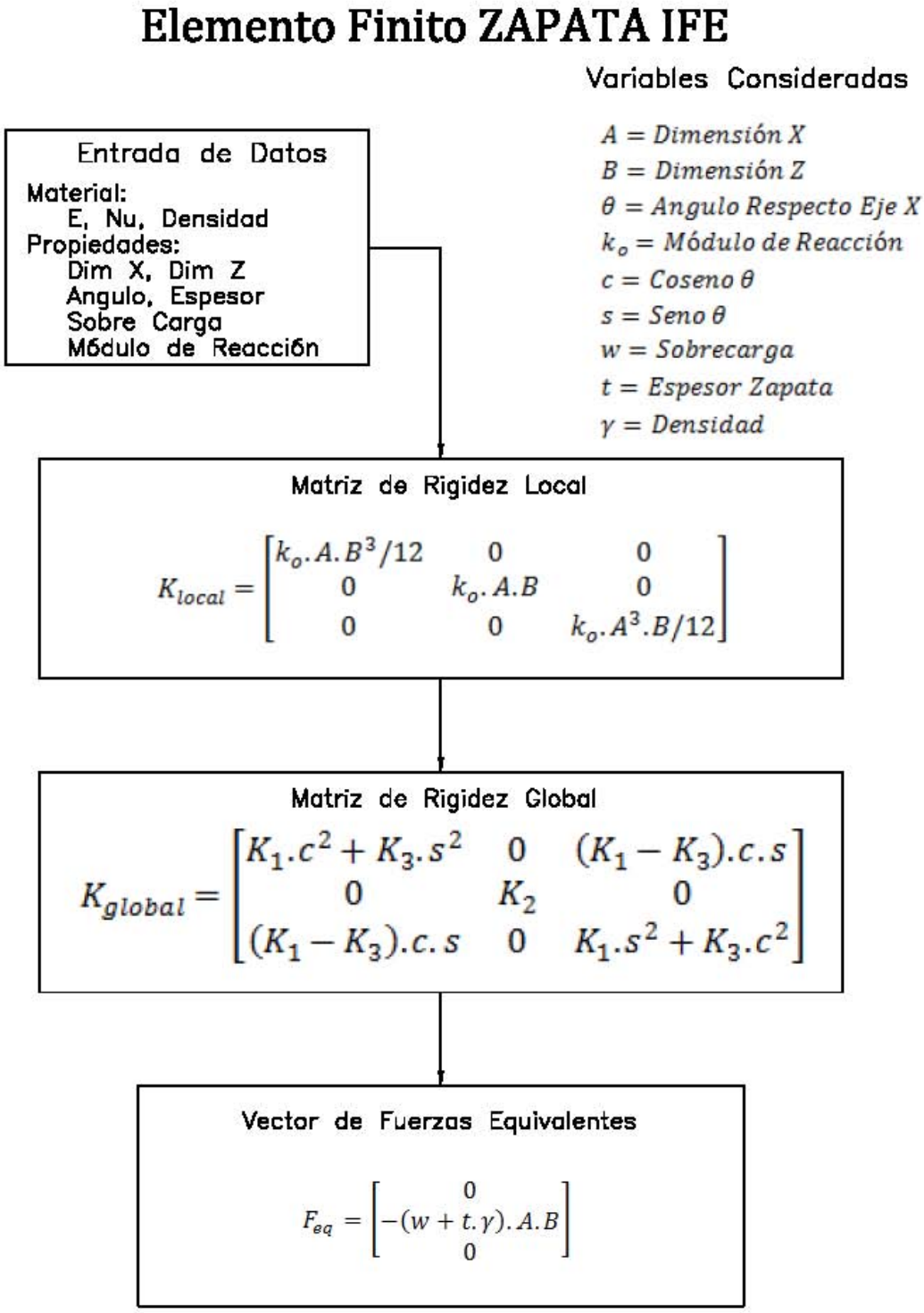


Fig. III.003 Diagrama de Bloques Local de Cálculos Internos Elemento IFE

CAPÍTULO IV
VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Con el fin de validar la estrategia presentada, se propuso analizar una zapata de concreto soportada en un suelo estratificado con tres estratos como se muestra en la figura IV.001; la carga total aplicada es de 15.2057 T. Debido a que no hay una solución analítica para este tipo de problema, dadas las características del sistema suelo-estructura, la estrategia de validación numérica fue realizada al comparar los resultados obtenidos de modelos detallados de elemento finito en dos códigos diferentes: ANSYS y GEOSTUDIO.

Aunque ambos códigos son muy poderosos en el análisis de elemento finito y debido a sus propias características y limitaciones, fue necesario realizar algunas adaptaciones al problema respecto a las hipótesis de análisis. En una primera aproximación, se consideró un modelo axisimétrico con una carga circular flexible con radio de 50 cm (correspondiendo a un área de 0.785 m^2) y así se generó el modelo en ambos códigos de análisis mencionados.

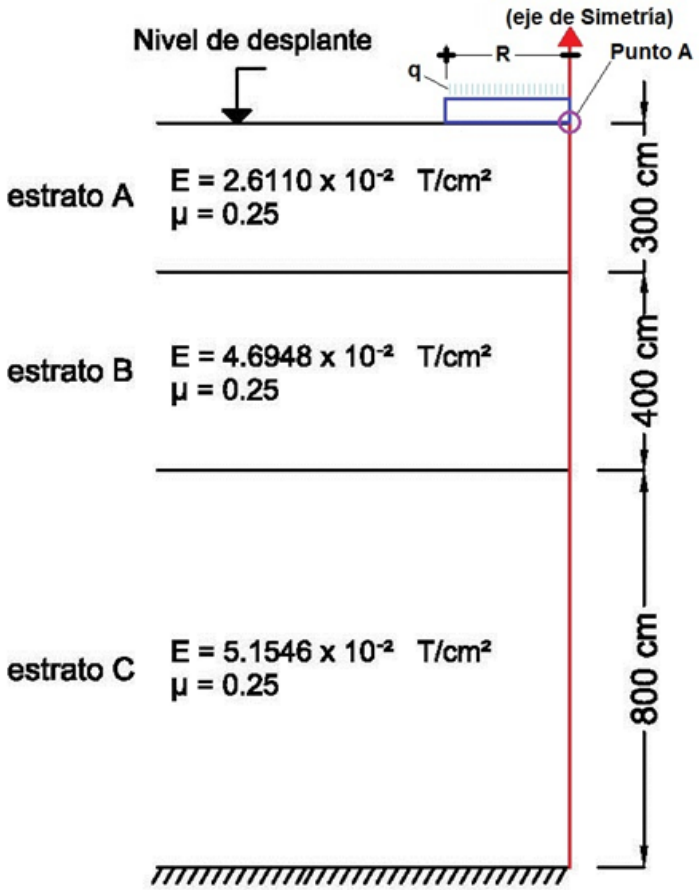


Fig. IV.001 Modelo Axisimétrico y Estratos considerados en el modelo de validación

Para la comparación de resultados se considero relevante el desplazamiento vertical en el punto "A" indicado el la figura IV.001; el resumen de los resultados numéricos de los análisis axisimétricos realizados en ambos programas, se muestra en la tabla IV.01; al considerar un solo material (E=2.6110 x 10^{-2} T/cm^2) en los tres estratos se obtiene un desplazamiento vertical del punto "A" de 6.6420 cm en el programa Ansys y un desplazamiento de 7.000 cm con el programa Geostudio.

TABLA IV.01 Resultados numéricos de los análisis axisimétricos realizados en códigos ANSYS y GEOSTUDIO

Análisis Axisimétrico			
Datos			
R =	50.00	cm	
q =	19.3605	T/m2	
Q total =	15.2057	T	
	Espesor Estrato cm	**Mod. Elas T/m2**	**Rel. de Poisson**
	300.00	261.100	0.25
	400.00	469.480	0.25
	800.00	515.460	0.25
Programa FEM	**Deformación Y cm**		**Terreno de Soporte**
Ansys	6.6420	cm	1 mat, 3 estratos
GeoStudio	6.7279	cm	3 mat, 3 estratos
GeoStudio	7.0000	cm	1 mat, 3 estratos

Adicionalmente se compararon estos resultados con la solución exacta de un semi-espacio elástico con un material E=2.6110 x 10^{-2} T/cm^2, con una carga total de 15.206 T. colocada en un área circular con diámetro de 100 cm.; obteniéndose un desplazamiento al centro del área cargada de 6.9517 cm.

En la tabla IV.02 se consignan los resultados obtenidos con la solución exacta, cambiando el diámetro del área cargada, pero manteniendo siempre la misma carga vertical total de 15.206 T. en todos los casos estudiados; se observa que al ir ampliando el área cargada disminuye el desplazamiento máximo obtenido, por ejemplo cuando el diámetro del área cargada es de 112.838 cm se obtiene un desplazamiento de 6.16076 cm, para un diámetro de 141.421 cm de área cargada se obtiene un desplazamiento de 4.91557 cm.

TABLA IV.02 Solución exacta de un semi-espacio Elástico

Solucion con estrato H ~ Infinito			
Semi-espacio Elástico			
Area cargada circular flexible			
	$dy = \frac{q.B.(1-\mu^2)}{E}$		
Mod. Elas. =	261.1	T/m2	
Rel. Poisson =	0.25		
Diámetro B	q	W	Despl. Y
cm	T/m2	T	cm
100.000	19.3609	15.206	6.95170
112.838	15.2060	15.206	6.16076
141.421	9.6804	15.206	4.91557

Cuando se consideran las propiedades de los tres estratos como lo indica la figura IV.001, se obtiene un desplazamiento vertical en el punto "A" de 6.7279 cm con el programa Geostudio (ver tabla IV.01).

Por otro lado, el mismo problema se analizo con el programa de cómputo **FINITO** considerando los estratos y las propiedades de los mismos como se señalan en la figura IV.001; se modelo una zapata rígida de 1m x 1m con una carga de 15.206 T.

Para observar la respuesta del programa FINITO se realizo una serie de análisis cambiando algunos aspectos: con respecto al medio de soporte, se consideraron diversos tamaños de malla, combinados con diferentes criterios del módulo de variación volumétrica asignado a cada estrato, tal y como se muestra en la tabla IV.03; los estratos se subdividieron en dos o más estratos, para observar la variación y tendencia de los resultados; la distribución de esfuerzos dentro de la masa del suelo fue calculada de acuerdo a la teoría de Boussinesq (Bowles 1982); en el programa FINITO se pueden utilizar diferentes teorías para la distribución de esfuerzos en la masa del suelo a elección del usuario (Teoría de Boussinesq, Westergaard ó Fröhlich (Braja 2009)).

Con el programa FINITO se obtiene un desplazamiento de **6.0276 cm** mientras que con el programa Geostudio se obtuvo un desplazamiento de 6.7279 cm (ver tabla IV.01); en el modelo realizado con FINITO se consideraron 30 zonas de influencia de 100 cm x 100 cm cada una, ocho estratos obtenidos al dividir en cuatro el estrato "A", en dos el estrato "B" y

en dos el estrato “C”; se considero el parámetro de variación volumétrica $\alpha = H/E$ donde H es el espesor del estrato y E el modulo de elasticidad.

TABLA IV.03 Resultados numéricos obtenidos con el programa FINITO

Programa de Computo "FINITO"					
Datos					
	q1 =	15.206	T/m2		
	Q total =	15.206	T		
	Espesor Estrato cm	**Mod. Elas T/m2**	**Rel. de Poisson**		
	300.00	261.100	0.25		
	400.00	469.480	0.25		
	800.00	515.460	0.25		
Criterios del Parámetro Alfa					
Alfa 1	(H / E)			H= Espesor del Estrato	
Alfa 2	(H * (1 - Nu^2) / E)			E= Modulo de Elasticidad	
Alfa 3	(H * (1+Nu)(1 - 2*Nu) / (E*(1-Un)))			Nu = Relación de Poisson	
Resultados					
Malla Suelo	100 x 100	200 x 300	100 x 100	100 x 100	100 x 100
	5 x 6	3 x 3	5 x 6	5 x 6	5 x 6
Delta Y	5.5470	2.0040	5.9168	6.0276	5.8451
	3 mat	3 mat	3 mat	3 mat	1 mat
	Alfa 2	**Alfa 2**	**Alfa 1**	**Alfa 1**	**Alfa 2**
No. deEstratos	7	7	7	8	7

Respecto a la diferencia obtenida, podemos hacer las siguientes aseveraciones:

- ✓ Aun que la carga vertical total es la misma, en los modelos axisimétricos se tiene un área cargada menor que en el modelo IFE, incrementando la presión vertical aplicada (de 15.206 T/m^2 a 19.4 T/m^2) y consecuentemente cualquier desplazamiento vertical.
- ✓ En lugar de obtener el desplazamiento del nodo localizado exactamente bajo el centro de la carga aplicada, como es el caso de ANSYS y GEOSTUDIO, el modelo propuesto analiza la correspondiente zona de influencia y el desplazamiento obtenido representa el promedio en dicha zona de influencia.
- ✓ En el modelo axisimetrico la carga se distribuye a través de un elemento flexible, mientras que en el modelo IFE la carga es transferida por medio de una losa rígida.
- ✓ El modelo IFE está basado en una formulación numérica tridimensional (3D) y no en una formulación axisimétrica 2D, lo que influye en la distribución de esfuerzos en la masa del suelo.

En una segunda aproximación, se construyo otro modelo tridimensional con el programa ANSYS, en el que un volumen de suelo de 17m x 17m x 15m de altura, fue mallado con **4335 elementos sólidos 3D de 20 nodos**, elementos de 1m x 1m x 1m en todos los estratos y aplicando una carga 15.2057 T/m^2 en la cara superior de un solo elemento, al centro del modelo, con el fin de comparar los resultados obtenidos previamente con el elemento IFE. El desplazamiento vertical máximo obtenido con ANSYS fue alrededor de 2.607 cm; valor muy pequeño respecto a todos los modelos utilizados previamente. Se atribuye esta respuesta a la excesiva rigidez asociada al tipo de elemento utilizado en el modelo (elemento sólido de 20 nodos); en otras palabras, el uso de un modelo tridimensional costoso no garantiza una buena aproximación a la respuesta real de un sistema suelo-estructura, mientras que modelos simplificados como el elemento IFE propuesto puede proporcionar buenos resultados con solo pocos cálculos numéricos.

Desafortunadamente muy pocas cimentaciones de edificios pueden analizarse con un **modelo axisimétrico**; por lo que, la única forma razonable de realizar un análisis tridimensional con resultados aceptables de una cimentación soportada en zapatas aisladas unidas mediante trabes de liga y considerar la interacción suelo–estructura en forma simple y rutinaria es a través de la utilización del elemento IFE propuesto.

CAPÍTULO V
EJEMPLO DE APLICACIÓN PRÁCTICA

V.1 Construcción del Modelo

Para mostrar la utilización del Elemento Zapata Aislada **IFE**, se analiza el sistema de cimentación de la figura V.001; una retícula de cimentación convencional integrada por cuatro elementos Zapata Aislada IFE unidas por siete trabes de liga de sección transversal rectangular de concreto; sistema estructural discretizado en seis puntos nodales.

En este ejemplo, la descarga que resulta en la zapata del nodo 1 es similar a la carga de 15.206 T. aplicada en los modelos axisimétricos utilizados en la validación numérica descrita en el capítulo IV; se investiga la variación en el desplazamiento vertical de dicha zapata, debido a la influencia de las descargas de las zapatas vecinas.

Las coordenadas de los puntos nodales, propiedades geométricas de los elementos y cargas aplicadas al sistema estructural en estudio, se presentan en la tabla V.01

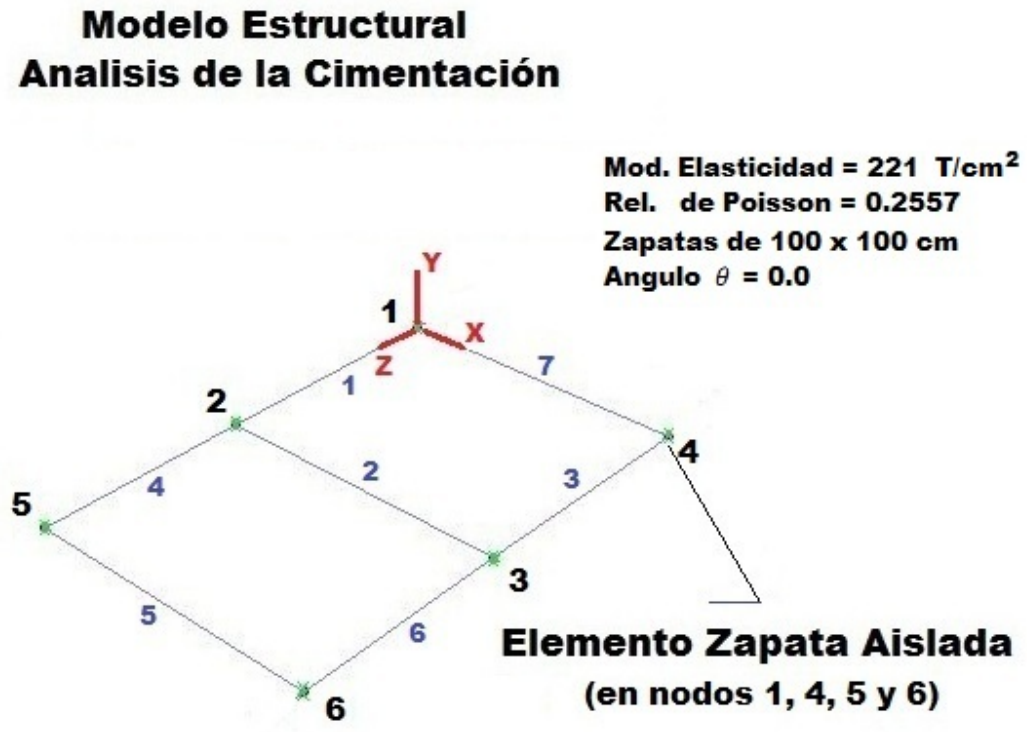


Fig. V.001 Modelado de un caso practico

TABLA V.01 Coordenadas Nodales, Propiedades Geométricas y Cargas Aplicadas

COORDENADAS DE PUNTOS NODALES			
Punto	X	Z	
	(cm)	(cm)	
1	0	0	
2	0	300	
3	400	300	
4	400	0	
5	0	600	
6	400	600	

DATOS DE LOS ELEMENTOS DEL MODELO					
			Carga Concentrada		Carga
Elemento	Longitud	Sección	a	P	Uniforme
	(cm)		(cm)	(T)	(T/m)
1	300	25 x 50	150	5.00	
2	400	20 x 50			2.00
3	300	25 x 50	150	5.00	
4	300	25 x 50	150	5.00	
5	400	20 x 50			2.00
6	300	25 x 50			
7	400	20 x 50			4.00

Para el suelo de soporte, se considera un módulo de reacción inicial $k_o = 0.5\ kg/cm^3$; las características geométricas y propiedades del suelo estratificado con tres estratos se muestran en la tabla V.02; la profundidad se refiere al punto medio del estrato. Para el análisis se consideran siete estratos, dividiendo en tres el estrato "A", en dos el estrato "B" y en dos el estrato "C".

TABLA V.02 Propiedades del suelo estratificado

Profundidad	Espesor	Mod. Elas.	Rel. de Poisson
cm	cm	T/m2	
150.00	300.00	261.100	0.25
500.00	400.00	469.480	0.25
1100.00	800.00	515.460	0.25

El área total de cimentación se divide en 9, 16 y 30 zonas de influencia para verificar el efecto del tamaño de dichas zonas en los cálculos. En la figura V.02 se muestra el modelo analizado con nueve zonas de influencia.

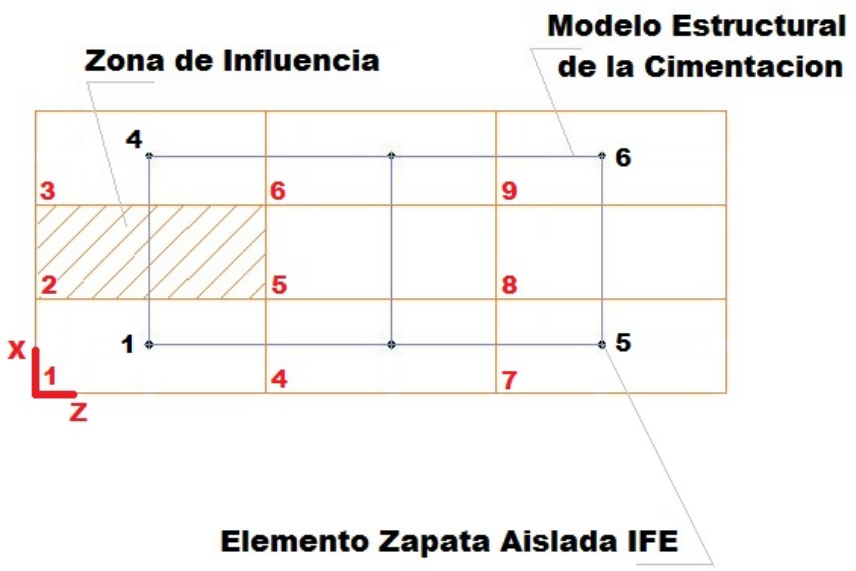


Fig. V.02 Modelo de la Cimentación con 9 Zonas de Influencia

TABLA V.03 Resultados del análisis de interacción suelo-Estructura

Programa de Computo "FINITO"									
Datos del Suelo									
	Espesor cm	**Mod. Elas T/m2**	**Alfa 1**	**Alfa 2**	**Alfa 3**				
	300.00	261.100	11489.85	10771.73	9574.875				
	400.00	469.480	8520.06	7987.56	7100.05				
	800.00	515.460	15520.12	14550.11	12933.43				
	Alfa 1	(H / E)							
	Alfa 2	(H * (1 - Nu^2) / E)			Nu = 0.25	en todos los casos			
	Alfa 3	(H * (1+Nu)(1 - 2*Nu) / (E*(1-Nu)))							
Resultados Obtenidos									
Malla Suelo	200 x 300	133.3 x 200	100 x 100	100 x 100	100 x 100	100 x 100	100 x 100	100 x 100	**Distribucion**
	3 x 3	4 x 4	5 x 6	5 x 6	5 x 6	5 x 6	5 x 6	5 x 6	**de Esfuerzos**
Deformación	2.2165	2.9633	3.7032	3.4701	5.2699	5.7913	6.1810	5.1424	Boussinesq
Vertical Y						4.7442	5.0632	4.2129	Westergaard
(cm)						4.4102	4.7067	3.9165	Fhröhlich
Descarga (T)	15.078	15.112	15.140	15.132	15.192	15.206	15.216	15.189	Boussinesq
Estratos	3	3	3	3	6	7	7	7	
	Alfa 1	**Alfa 1**	**Alfa 1**	**Alfa 2**	**Alfa 2**	**Alfa 2**	**Alfa 1**	**Alfa 3**	

Los resultados numéricos obtenidos al analizar el sistema de cimentación con el programa **FINITO**, en el que se incluye elementos IFE y se considera la interacción suelo-estructura, se muestran en la **tabla V.03**. Los desplazamientos verticales máximos mostrados corresponden a la zapata más cargada (zapata del nodo 1) y cambia de acuerdo al número de zonas de influencia consideradas en el análisis; pero también depende del método de distribución de esfuerzos seleccionada. Por ejemplo, un modelo dividido en 30 zonas de influencia (5 x 6), subdividido en siete estratos (3 en el estrato "A", 2 en el estrato "B" y 2 en el estrato "C") y usando el parámetro de variación volumétrica $\alpha = H/E$ (alfa 1), muestra un desplazamiento de 6.1810 cm cuando se utiliza el Método de Boussinesq para la distribución de esfuerzos, un desplazamiento de 5.0632 cm se obtiene cuando el criterio de Westergaard es utilizado y un desplazamiento de 4.7067 cm utilizando el criterio de Fröhlich.

Para el mismo parámetro de variación volumétrica $\alpha = H/E$ (alfa 1), método de distribución de esfuerzos (Boussinesq) y tres estratos en el medio de soporte, el valor del desplazamiento vertical para 9 zonas de influencia es aproximadamente de 2.2165 cm con una fuerza de reacción de 15.078 T.; para 16 zonas de influencia se obtuvo un desplazamiento de 2.9633 cm con una reacción de 15.112 T. y para 30 zonas de influencia un desplazamiento 3.7032 cm. con una fuerza de reacción de 15.140 T.; resultados obtenidos para la zapata IFE del nodo 1 (ver tabla V.03).

V.2 Resultados y Discusión

Antes de hacer cualquier comparación, debe mencionarse que el mismo sistema estructural de cimentación fue previamente analizado usando los resortes clásicos de Winkler, con un módulo de reacción de 0.5 kg/cm^3, obteniéndose un desplazamiento máximo de 3.0253 cm y una fuerza de reacción aproximada a 15.126 T. en la zapata del nodo 1. De nuestros cálculos utilizando elementos IFE y diferentes zonas de influencia, observamos como el tamaño de la malla afecta a la respuesta final de la estructura, pero solamente cuando se usan pocas zonas de influencia: la utilización de un número mayor de zonas de influencia no afecta significativamente el desplazamiento vertical esperado.

El desplazamiento obtenido en el **análisis 3D con FINITO** utilizado en la validación numérica descrita en el capítulo IV, es de 5.9168 cm y la carga aplicada en el único elemento IFE fue de 15.206 T. (ver tabla IV.03); el desplazamiento vertical obtenido en el modelo de la figura V.001 es de 6.1810 cm y la descarga de 15.216 T. (ver tabla V.03); el **incremento en el desplazamiento vertical es de 4.47 %**; el incremento es normal y puede explicarse como resultado de considerar la influencia de las descargas de las zapatas vecinas, lo que es imposible de realizar si únicamente consideramos el uso de los resortes clásicos de Winkler.

V.3 Modelado de un Marco Plano (2D)

Se realiza el análisis de un marco plano convencional formado por seis puntos nodales, dos crujías de 400 cm, un solo nivel con altura de 300 cm; la carga vertical total aplicada es de 58 T., la fuerza horizontal de 12 T. corresponde a la fuerza sísmica, si esta estructura se localiza en la zona III del DF. (zona del lago con terreno arcilloso); de acuerdo a la zonificación del Distrito Federal, le corresponde un coeficiente sísmico de 0.4 y un factor de ductilidad para este tipo de estructuración igual a 2; en este ejemplo buscamos comparar la influencia de las condiciones de frontera en la distribución de los elementos mecánicos (flexión y cortante) en todo el sistema estructural, considerando tres diferentes maneras de analizar este tipo de estructura: i) análisis tradicional básico con apoyos empotrados, ii) análisis estructural avanzado con soportes elásticos tipo Winkler y iii) Análisis con interacción suelo-estructura con el programa FINITO, utilizando elementos zapata aislada IFE en la base de las columnas.

i) Análisis Tradicional Básico con Apoyos Empotrados

La geometría y las cargas aplicadas al marco plano analizado en este inciso, se muestra en la figura V.03

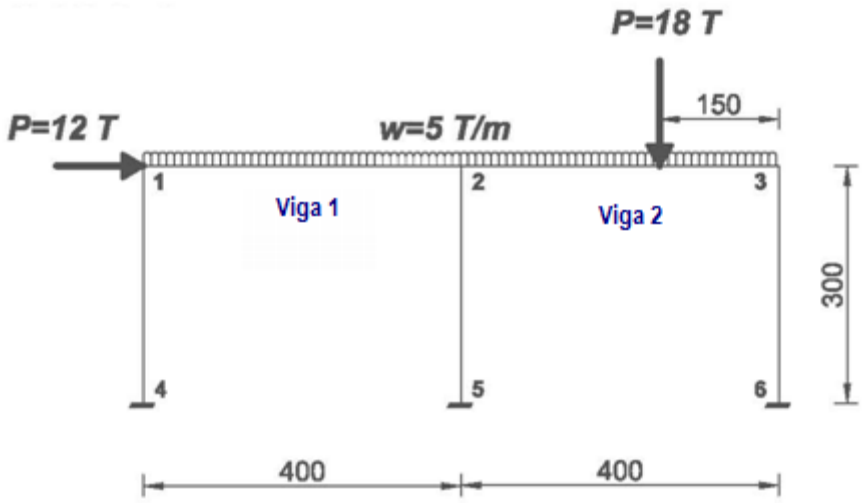


Fig. V.03 Marco Plano con apoyos empotrados

Los desplazamientos y reacciones obtenidas en este análisis se muestran en la tabla V.04, donde, como era de esperarse los nodos 4, 5 y 6 no presentan ninguna deformación; el desplazamiento horizontal de la trabe es de 1.320 cm en el nodo 1, valor menor al admisible de 0.006 x 300 = 1.80 cm (RCDF 2004); la reacción máxima vertical es de 32.286 T. en el apoyo del nodo 5.

TABLA V.04 Resultados del análisis del Marco Plano con apoyos empotrados

	Desplazamientos		
	dx	dy	Rot θ
Nodo	(cm)	(cm)	(rad)
1	1.320	-0.011	-0.00270
2	1.303	-0.070	-0.00210
3	1.293	-0.045	0.00368
4	0.000	0.000	0.00000
5	0.000	0.000	0.00000
6	0.000	0.000	0.00000
	Reacciones		
	Rx	Ry	Mom Z
Nodo	(T)	(T)	(T-cm)
4	-2.929	5.016	504.230
5	-3.166	32.286	525.249
6	-5.905	20.699	797.502

En la tabla V.05, se consignan los elementos mecánicos máximos y mínimos (momento flexionante y fuerza cortante) en las trabes.

TABLA V.05 Elementos Mecánicos Máximos y Mínimos en las Trabes

	Fuerza Cortante	Momento Flexionante
	T	T-cm
Viga 1		
Max	**5.016**	**626.117**
Min	**-14.984**	**-1619.095**
Viga 2		
Derecha	**17.301**	**1558.509**
Min	**-20.699**	**-1194.662**

ii) Análisis estructural avanzado con soportes elásticos tipo Winkler

La geometría y las cargas aplicadas al marco plano analizado en este inciso, se muestra en la figura V.04

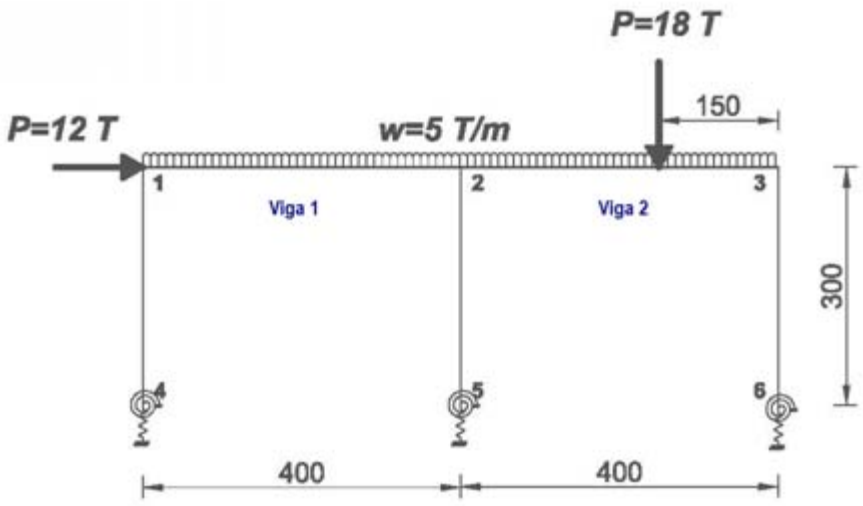


Fig. V.04 Marco Plano con apoyos elásticos tipo Winkler

En la tabla V.06 se tienen los datos que corresponden a las rigideces de los soportes elásticos considerados, se utilizo el menor valor del modulo de reacción recomendado en libros de texto para arcilla blanda (Bowles 1982); la rigidez de los resortes se estimo utilizando la tecnología IFE desarrollada en este trabajo de investigación (ver expresiones II.1.1).

TABLA V.06 Rigidez de los resortes Tipo Winkler

		Resortes Equivalentes	
Nodo	Zapata Aislada	Resorte Vertical	Resorte Rotacional
	(cm)	(T/cm)	(T-cm/rad)
4, 6	160 x 160	30.72	65536
5	200 x 200	48.00	160000
	ko = 1.20 kg/cm^3	*Arcilla Blanda	
		(ver Joseph E. Bowles)	

Los desplazamientos y reacciones obtenidas en este análisis se muestran en la tabla V.07; el desplazamiento vertical del nodo 5 es de -0.657 cm; el desplazamiento horizontal de la trabe es de 2.304 cm en el nodo 1, valor 28 % mayor al admisible de 0.006 x 300 = 1.80 cm (RCDF 2004); la reacción máxima vertical es de 31.521 T. en el apoyo del nodo 5.

TABLA V.07 Resultados del análisis del Marco Plano con apoyos elásticos tipo Winkler

	Desplazamientos		
	dx	dy	Rot θ
Nodo	(cm)	(cm)	(rad)
1	2.304	-0.172	-0.00426
2	2.288	-0.725	-0.00306
3	2.278	-0.747	0.00366
4	0.000	-0.161	-0.00558
5	0.000	-0.657	-0.00372
6	0.000	-0.701	-0.00786
	Reacciones		
	Rx	Ry	Mom Z
Nodo	(T)	(T)	(T-cm)
4	-2.652	4.959	365.968
5	-4.070	31.521	594.693
6	-5.278	21.520	515.048

En la tabla V.08, se consignan los elementos mecánicos máximos y mínimos (momento flexionante y fuerza cortante) en las trabes.

TABLA V.08 Elementos Mecánicos Máximos y Mínimos en las Trabes

	Fuerza Cortante	Momento Flexionante
	T	T-cm
Viga 1		
Max	**4.959**	**675.630**
Min	**-15.041**	**-1586.640**
Viga 2		
Derecha	**16.480**	**1589.009**
Min	**-21.520**	**-1068.405**

iii) Análisis con interacción suelo-estructura con el programa FINITO y elementos IFE

La geometría y las cargas aplicadas al marco plano analizado en este inciso, se muestran en la figura V.05; el medio de soporte consiste en tres estratos con las propiedades y características mostradas en la misma figura. Para el análisis se considero 5 zonas de influencia y ocho estratos.

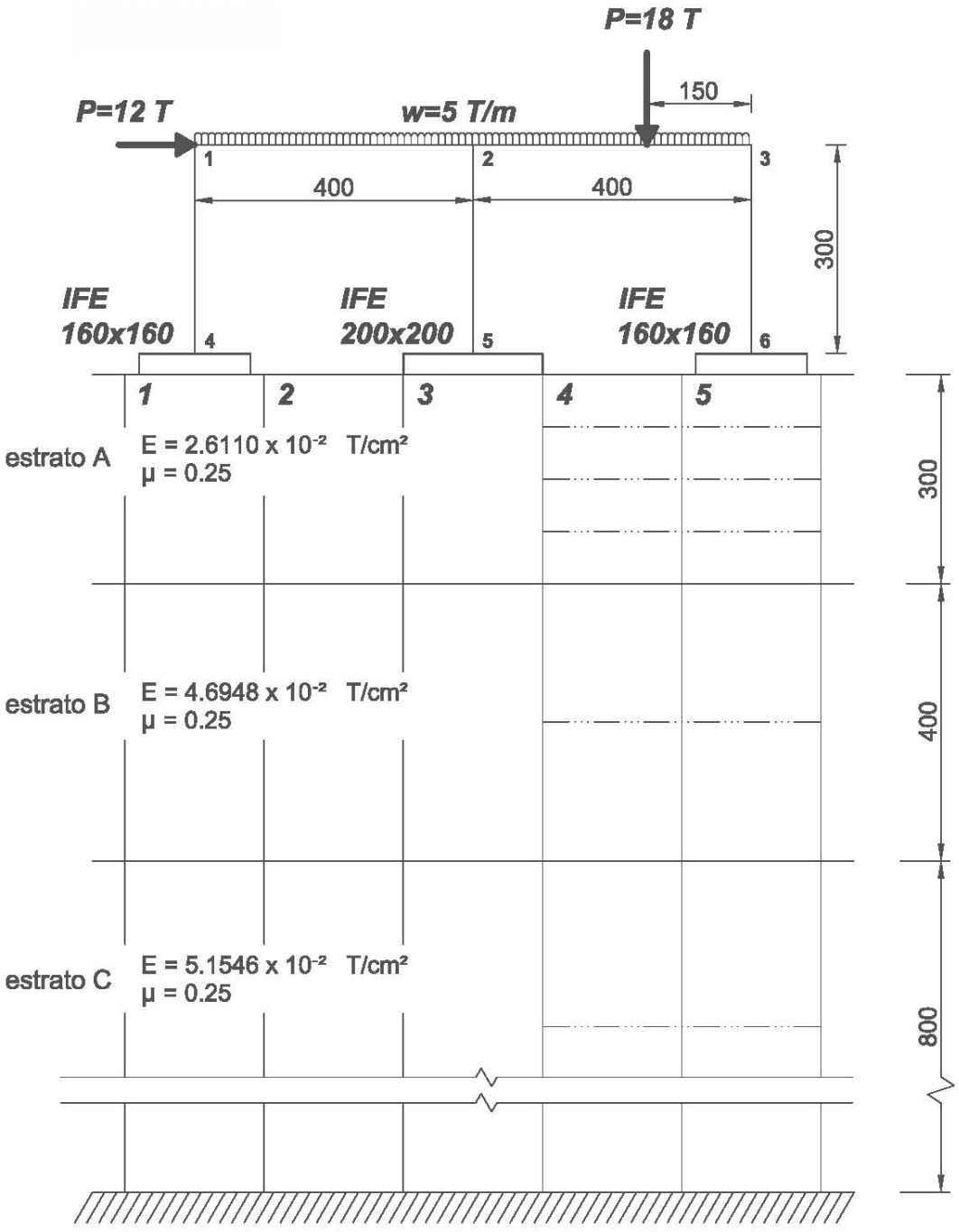


Fig. V.05 Marco Plano apoyado en elementos IFE

Los desplazamientos y reacciones obtenidas en este análisis se muestran en la tabla V.09; el desplazamiento vertical del nodo 5 es de -4.959 cm, el desplazamiento vertical relativo máximo es de 3.311 cm, **valor 106.9% mayor al permisible de 0.004 x 400 = 1.60 cm** para estructuras de concreto; el desplazamiento horizontal de la trabe es de 5.031 cm en el nodo 1, **valor 179.5 % mayor al admisible de 0.006 x 300 = 1.80 cm** (RCDF 2004); la reacción vertical en el apoyo del nodo 5 es de 25.334 T. Fácilmente se observa que el marco plano excede las deformaciones admisibles (RCDF 2004).

TABLA V.09 Resultados del análisis del Marco Plano apoyado en elementos IFE

	Desplazamientos		
	dx	dy	Rot θ
Nodo	(cm)	(cm)	(rad)
1	5.031	-1.664	-0.01278
2	5.012	-5.014	-0.00656
3	5.001	-4.989	0.00376
4	0.000	-1.648	-0.01712
5	0.000	-4.959	-0.01850
6	0.000	-4.934	-0.02412

	Reacciones		
	Rx	Ry	Mom Z
Nodo	(T)	(T)	(T-cm)
4	-1.747	7.132	158.020
5	-4.013	25.334	315.080
6	-6.239	25.534	266.250

En cuanto a elementos mecánicos (momento flexionante y cortante), en la tabla V.10 se muestran los valores máximos y mínimos en las trabes.

TABLA V.10 Elementos Mecánicos Máximos y Mínimos en las Trabes

	Fuerza Cortante	Momento Flexionante
	T	T-cm
Viga 1		
Max	**7.132**	**874.876**
Min	**-12.868**	**-780.830**
Viga 2		
Derecha	**12.466**	**1662.018**
Min	**-25.534**	**-1605.550**

Para apreciar la variación de los elementos mecánicos en las trabes, en la figura V.06 se muestran los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, obtenidos en los tres análisis, para la trabe 1 (izquierda).

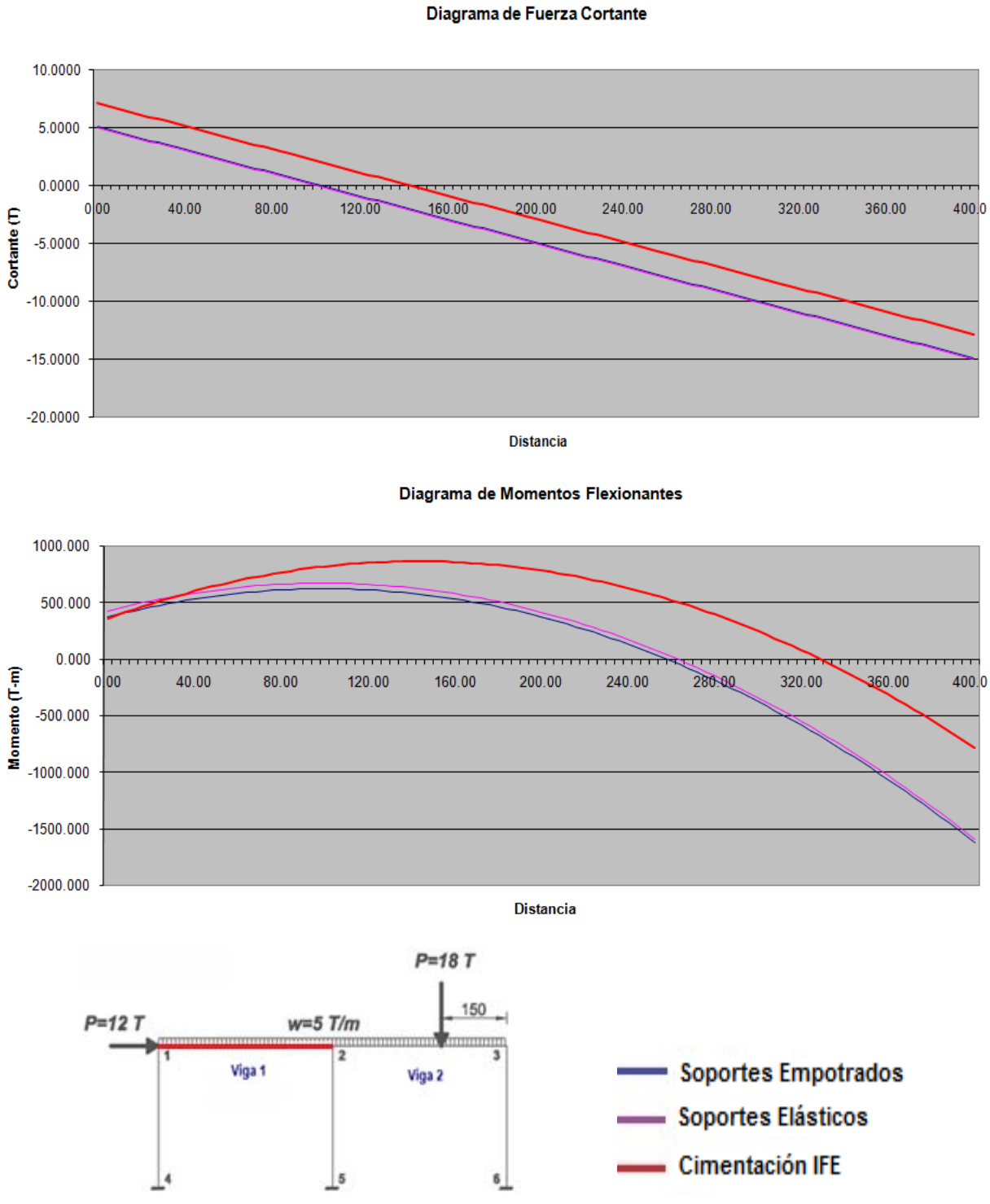


Fig. V.06 Fuerza Cortante y Momento Flexionante de la Trabe 1

Los diagramas correspondientes a la trabe 2 (derecha), se muestran en el figura V.07

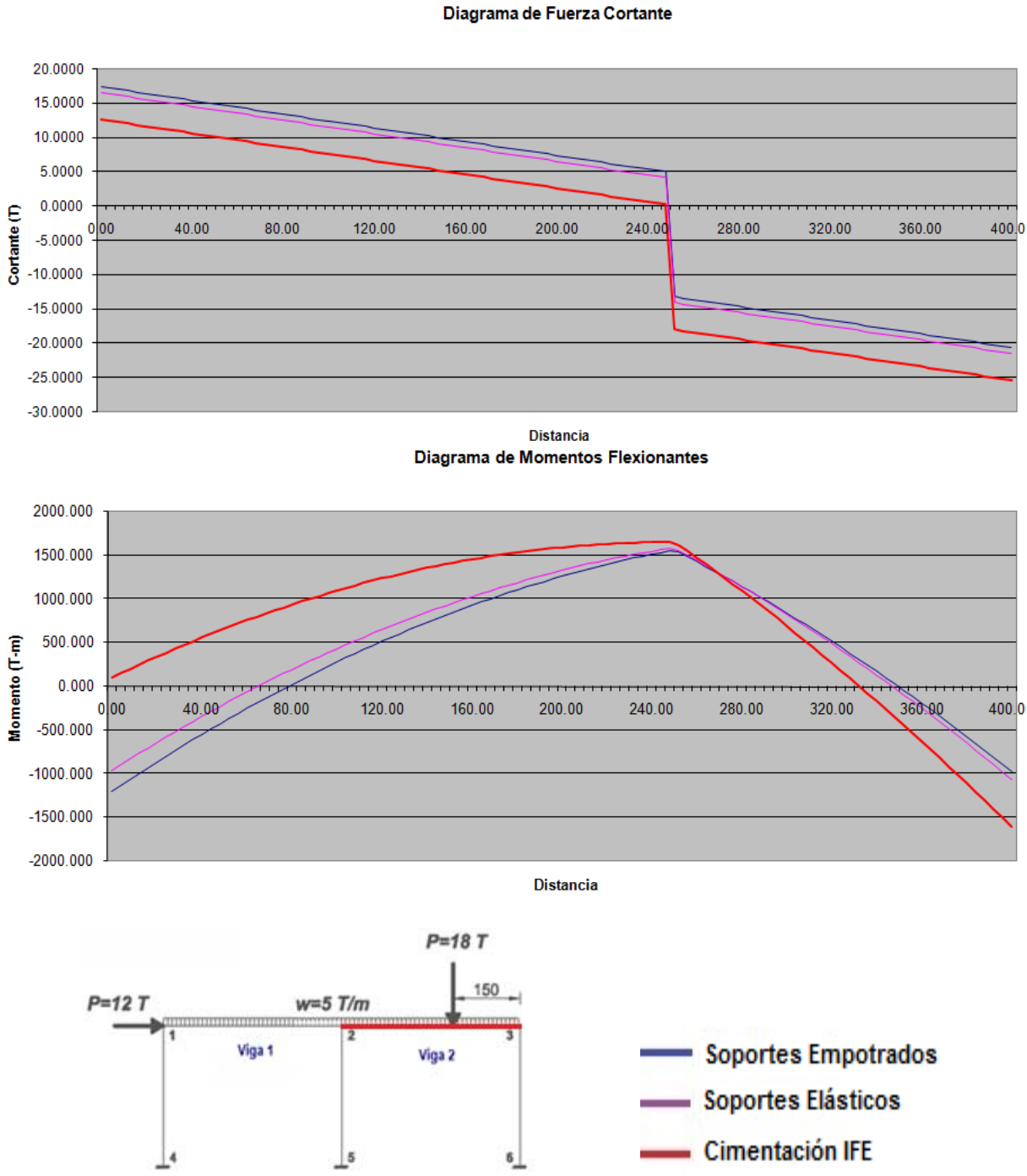


Fig. V.07 Fuerza Cortante y Momento Flexionante de la Trabe 2

En los diagramas de las figuras V.06 y V.07 se observa claramente que el diseño de las trabes cambia de una manera importante al considerar la interacción suelo-estructura y

elementos IFE en el análisis; si diseñamos la estructura con los resultados obtenidos de los métodos tradicionales de análisis, el diseño resulta escaso.

Finalmente, en la figura V.08 se muestran las presiones generadas en el medio de soporte, la presión máxima corresponde a la zapata del nodo 6 y vale 13.8744 T/m^2, valor que puede exceder al valor admisible de una arcilla blanda como el de la ciudad de México. En la misma figura, se muestra el modulo de reacción equivalente en la zona de influencia correspondiente a cada elemento IFE; la distribución de rigidez del suelo corresponde a la clásica distribución que se presenta en suelo arcilloso bajo carga uniforme (Braja 2009).

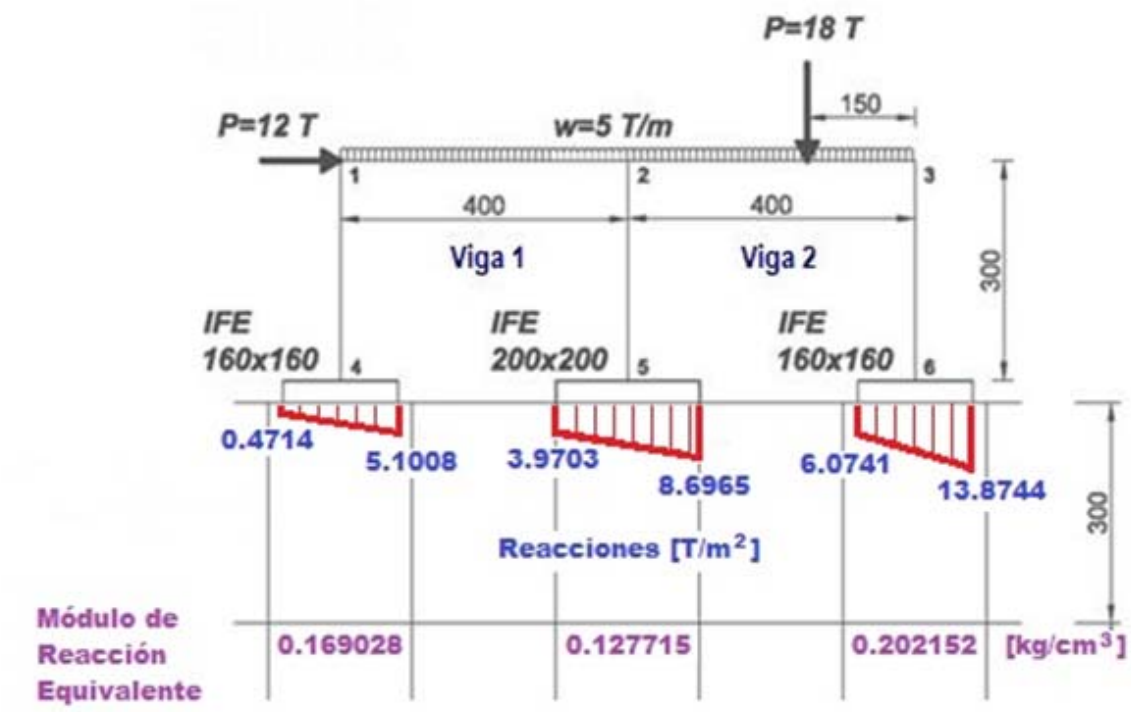


Fig. V.08 Presiones y Módulo de Reacción equivalente en el medio de soporte

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se propuso una estrategia numérica simplificada para el análisis de un sistema cimentación-suelo arcilloso, incluyendo el desarrollo de un nuevo súper elemento finito llamado **Elemento Zapata Aislada (IFE)**. Al incluir los parámetros experimentales del suelo dentro del modelo, es posible evaluar el asentamiento superficial del medio de soporte e incluir su efecto en la respuesta global de la estructura del sistema de cimentación. Evitando por una parte, un alto número de cálculos -en comparación con modelos refinados tridimensionales basados en elementos finitos convencionales (e.g. sólidos 3D), y por otra, mejorando la respuesta estructural que puede obtenerse al simular las condiciones de frontera con técnicas clásicas (empotramiento puro, resortes tipo Winkler), esta estrategia numérica aporta buenos resultados respecto a los desplazamientos verticales y las fuerzas de reacción debido en gran medida a su capacidad de tomar en consideración la interacción entre todos los elementos IFE a través del empleo de las zonas de influencia: en una modelación con elementos tipo Winkler, por ejemplo, cada resorte actúa de manera aislada sin afectar la capacidad de los resortes vecinos. En esta propuesta, el suelo que se deforma bajo cada zapata transfiere y recibe de sus vecinos toda información relacionada con deformaciones, esfuerzos, etc.

Al comparar los elementos mecánicos en vigas extraídas de un mismo sistema estructural en el cual se usaron diferentes condiciones de frontera (soporte fijo, soporte elástico y cimentación IFE), se demostró que hay diferencias significantes no solo en los valores numéricos sino también en la distribución de dichos elementos mecánicos, lo que puede modificar el diseño de ingeniería de todo el sistema estructural.

Otra de las ventajas de esta estrategia, es que si bien se pudo integrar un súper elemento finito dedicado a modelar zapatas aisladas rígidas, se pueden desarrollar e integrar diferentes tipos de súper elementos finitos especializados, por ejemplo, un súper elemento para modelar específicamente zapatas corridas, para losas de cimentación o para pilas y pilotes, sin afectar la estructura interna de cualquier código de elemento finito; por otro lado, se está investigando la posibilidad de ampliar las capacidades del elemento zapata aislada IFE desarrollado, de forma que se incluya en la formulación del elemento finito, la flexibilidad de la losa de la zapata aislada, la utilización de zapatas excéntricas, y zapatas desplantadas a una profundidad mayor de 0.5 m respecto al nivel del sistema de trabes de liga, zapatas que requieren de un dado de concreto para su conexión.

A través del empleo de las zonas de influencia, pueden incluirse fácilmente en el análisis el efecto de cargas ajenas al propio sistema de cimentación, como pueden ser cargas de construcciones vecinas existentes, rellenos, equipo pesado, cisternas, etc. o inclusive, prever el efecto que cargas futuras de construcciones colindantes tengan en el sistema de cimentación actual; todo disponible cuando el ingeniero analista lo juzgue necesario.

La validación de la estrategia se hizo por comparación con los resultados numéricos obtenidos con otros programas numéricos reconocidos, obteniéndose una buena aproximación con un menor costo de cálculo. Sin embargo, en lo que respecta a la calibración de la estrategia propuesta, no es posible llevarla a cabo al carecerse de referencias experimentales rigurosas parecidas al problema que se intenta resolver. No obstante, una forma de calibración que se vislumbra es a través de un estudio predictivo de la respuesta real de alguna edificación representativa monitoreada constantemente.

Este trabajo puede alentar el desarrollo y ser la base para implementar el análisis de interacción suelo arcilloso-Estructura dinámica para análisis sísmicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS Mechanical, ANSYS Multiphysics, A General Purpose Finite Element Analysis (FEA), Computer Aided Engineering (CAE) software tools developed by ANSYS, Inc, www.ansys.com

Bowles, Joseph E., 1982, Foundation Analysis and Design, McGraw Hill International Book Company.

Braja M. Das, 2009, Shallow Foundations - Bearing Capacity and Settlement, CRC Press

Dolarevic Samir, Ibrahimgegovic Adnan, 2007, A modified three surface elasto plastic cap model and its numerical implementation, Computer and Structures 85 (2007) 419 – 430, Elsevier.

Drucker D.C., Gibson R.E, Henkel D.J., 1957, Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity. Trans ASCE, 122:338-46.

Hetenyi M., 1946, Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press.

Heyman Jacques, 1982, Elements of Stress Analysis, Cambridge University Press.

Moreno M., Dominguez N. (2011), Simplified finite element formulation of a superficial foundation embedded in clay soil taking into account of Soil-Structure Interaction, World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM11), Seoul, Korea.

RCDF, 2004, Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo y Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones.

Rojas Katherina, Lehmann Lutz, Cerrolaza Miguel, Un Método de Acople para MEF-MEC para Análisis de Interacción Suelo – Estructura, Boletín Técnico IMME Volumen 46 No. 2.

SIMULIA, a Dassault Systèmes brand, A General Purpose Finite Element Analysis: Abaqus FEA, Multiphysics, Optimization and Simulation Lifecycle Management, www.simulia.com

Zeevaert Leonardo, 1973, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold.

Zeevaert Leonardo, 1980, Interacción Suelo – Estructura de Cimentación, Limusa.

APÉNDICE A
DEFORMACIÓN VOLUMÉTRICA DE LOS ESTRATOS

Para realizar el cálculo de los desplazamientos verticales de la superficie del suelo, es necesario conocer los valores de la deformación volumétrica α de cada uno de los diferentes estratos del modelo. En este trabajo se consideran los siguientes casos para la evaluación de la deformación volumétrica α :

- ✓ Expansión por descargas
- ✓ Recompresión por carga
- ✓ Compresión sin expansión previa

A.1 Expansión por descargas

Cuando se efectúa una excavación se induce un alivio de los esfuerzos efectivos σ_{oi} existentes en la masa del suelo, el cual es máximo en el fondo de la excavación e igual a σ_{od}. Dicho alivio produce una expansión que para un estrato cercano al fondo implica una deformación unitaria por expansión.

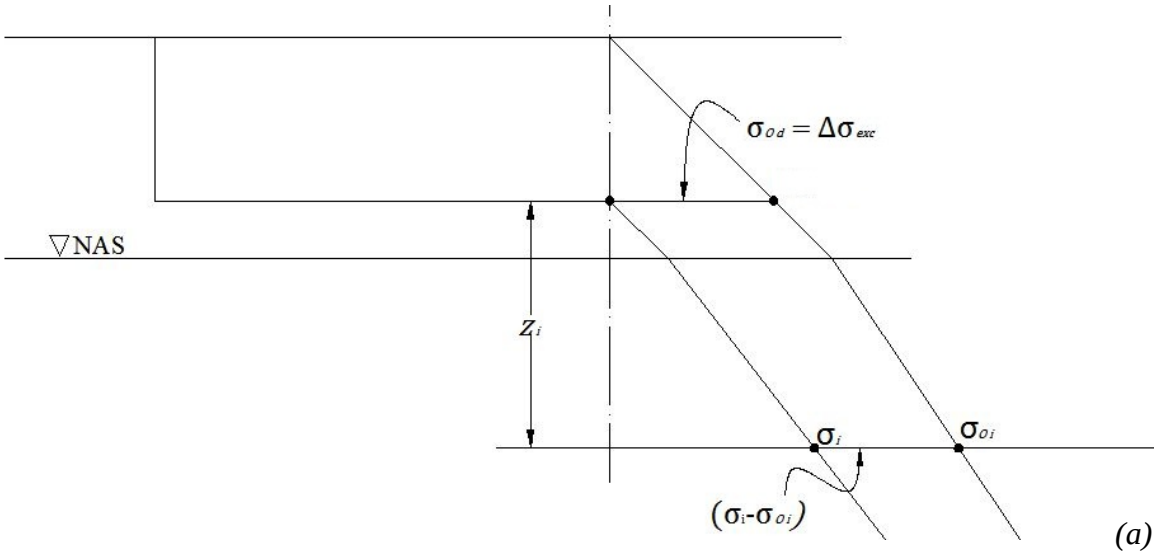
Sin embargo, nótese que si el alivio es parcial, $(\sigma_{oi} - \sigma_i)$, a una profundidad z_i, la expansión unitaria a esa profundidad será únicamente $\Delta\epsilon_i$ sobre la línea vertical del comportamiento de expansión, figura A1.

Zeevaert (1973), encontró de investigaciones realizadas en probetas de suelo inalterado que la ley fenomenológica que rige este fenómeno se puede expresar por:

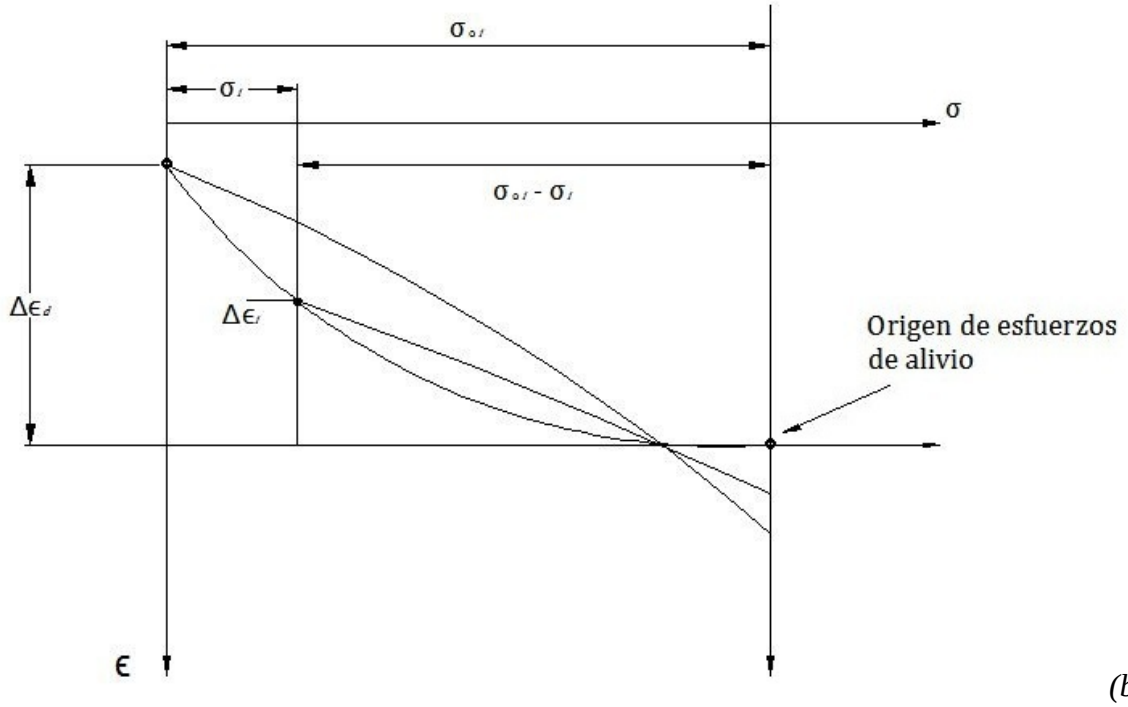
$$\Delta\epsilon_i = a(\sigma_{o\,i} - \sigma_i)^c \qquad (A.1)$$

en donde los parámetros a y c pueden determinarse en el laboratorio. Investigaciones recientes de esta ley, Casteletti (1978), indican que el valor del exponente c permanece prácticamente invariable con el confinamiento en el caso de arcillas y arcillas limosas. Por consiguiente, de pruebas en probetas no confinadas, figura A2, se puede determinar por medio de un ciclo de histéresis, a un nivel de esfuerzos $\sigma_i \leq 1/4\, q_u$, compatible con los factores de seguridad que se emplean en el diseño de cimentaciones y para el cual el rango de esfuerzos aplicados produce efectos visco-plásticos pequeños, el valor del módulo

secante de deformación unitaria por expansión que corresponde a la respuesta elástica máxima queda definida por:



(a)



(b)

Fig. A1 Ciclo de histéresis

$$M_{e\,o} = \frac{\Delta\epsilon_o}{\Delta\sigma_o} \qquad (A.2)$$

El valor de c se puede obtener de la curva de expansión dibujándolas en escalas logarítmicas donde resulta una línea recta cuya pendiente es el valor c .

$$c = \frac{\log \epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}}{\log \sigma_{r2}/\sigma_{r1}} \qquad (A.3)$$

Considerando la ecuación (A.1), para un alivio total de esfuerzos $\Delta\sigma_o$ se obtiene

$$\Delta\epsilon_o = a(\Delta\sigma_o)^c$$

el módulo secante $M_{e\,o}$ será

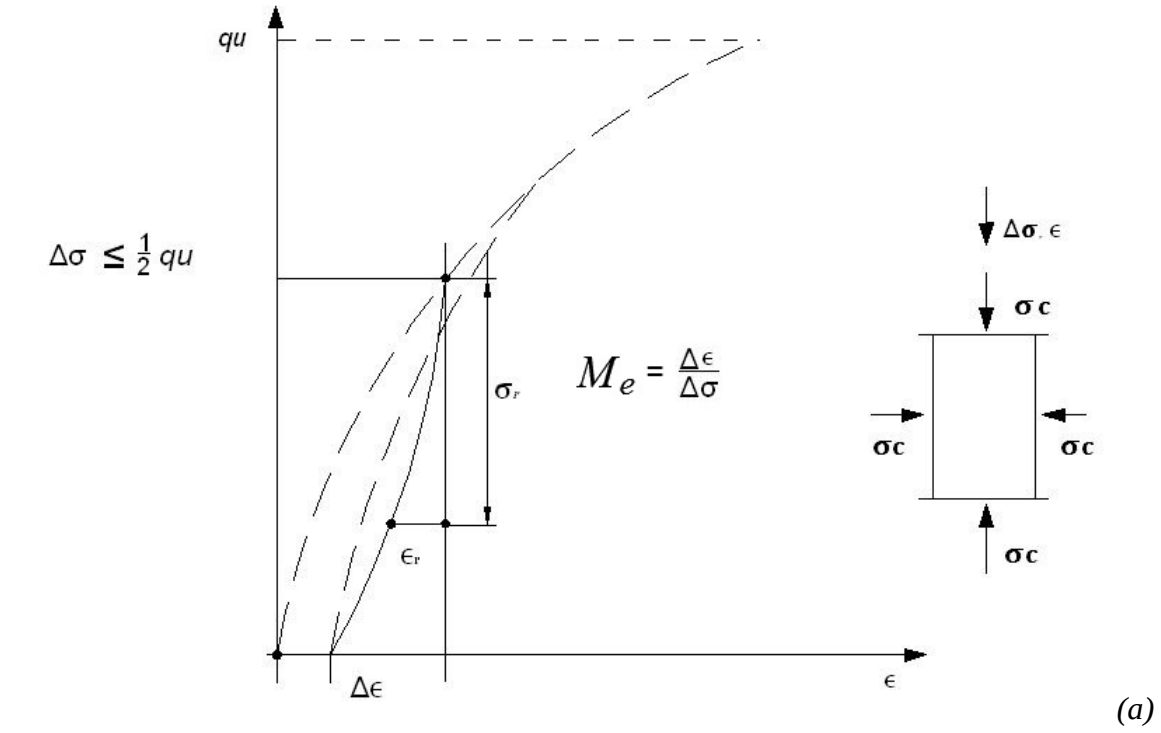
$$M_{e\,o} = a(\Delta\sigma_o)^{c-1} \qquad (A.4)$$

Así también el módulo secante para un alivio parcial de esfuerzos

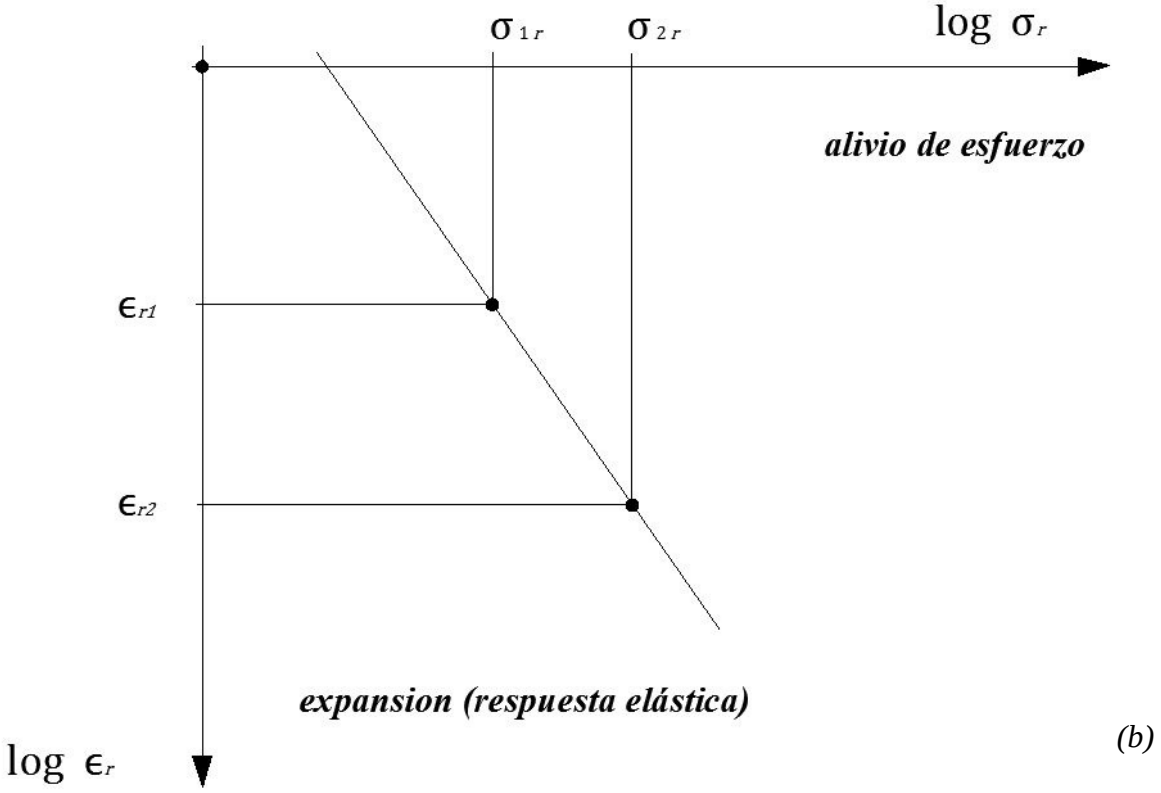
$$M_{e\,i} = \frac{\Delta\epsilon_i}{\Delta\sigma_i} = a(\Delta\sigma_i)^{c-1} \qquad (A.5)$$

de donde la relación de los módulos de deformación unitaria por expansión será

$$\frac{M_{e\,i}}{M_{e\,o}} = \left(\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\sigma_o}\right)^{c-1} \qquad (A.6)$$



(a)



(b)

Fig. A2 Prueba de Compresión Simple

La relación anterior se conoce como el factor de expansión

$$\rho_{e\,i} = \left(\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\sigma_o}\right)^{c-1} \qquad (A.7)$$

El valor ρ_e podrá ser calculado a partir de c , determinado en las pruebas de laboratorio por la respuesta elástica. Conociendo la relación del alivio de esfuerzo parcial al total, figura A.1.

$$\rho_{e\,i} = \left(\frac{\sigma_{oi} - \sigma_i}{\sigma_{o\,i}}\right)^{c-1} \qquad (A.8)$$

Así también de las pruebas se conoce el valor M_{eo} de la respuesta elástica máxima, por consiguiente el módulo de deformación unitaria de la respuesta elástica para la descarga parcial a la profundidad investigada será

$$M_{e\,i} = \rho_{e\,i}(M_{eo})_i \qquad (A.9)$$

Conocidos estos valores representativos de cada estrato de espesor d_i se calcula la expansión volumétrica del estrato

$$\alpha_{e\,i} = M_{e\,i} \cdot d_i \qquad (A.10)$$

el cual multiplicado por el alivio de esfuerzos $(\sigma_{o\,i} - \sigma_i)$ a esa profundidad dará la expansión elástica del estrato

$$\Delta\delta_{e\,i} = \alpha_{e\,i}(\sigma_{o\,i} - \sigma_i) \qquad (A.11)$$

A.2 Recompresión por carga

Al ser colocada la carga debido al peso del edificio en una cimentación compensada o semi-compensada se recomprime el suelo en sus componentes elásticas, plásticas y visco-plásticas:

$$\Delta\epsilon_c = \Delta\epsilon_e + \Delta\epsilon_p + \Delta\epsilon_{vp} \qquad (A.12)$$

para descarga y recompresión total $\Delta\sigma_{o\,i}$ el módulo secante será

$$M_{c\,o} = \frac{\Delta\epsilon_{eo}}{\Delta\sigma_{oi}}\left(1 + \frac{\Delta\epsilon_{po}}{\Delta\epsilon_{eo}} + \frac{\Delta\epsilon_{vpo}}{\Delta\epsilon_{eo}}\right)$$

o bien

$$M_{c\,o} = M_{e\,o}\left(1 + k_{po} + k_{vpo}\right)$$

en donde

$$k_{po} = \frac{\Delta\epsilon_{po}}{\Delta\epsilon_{eo}}\ , \qquad k_{vpo} = \frac{\Delta\epsilon_{vpo}}{\Delta\epsilon_{eo}}$$

en la misma forma para un alivio parcial y recompresión $\Delta\sigma_i$ se tiene, figura A.3

$$M_{c\,i} = M_{e\,i}\left(1 + k_{pi} + k_{vpi}\right) \qquad (A.13)$$

y consecuentemente la relación de dichos módulos

$$\frac{M_{c\,i}}{M_{c\,o}} = \frac{M_{e\,i}}{M_{e\,o}}\,\frac{1 + k_{pi} + k_{vpi}}{1 + k_{po} + k_{vpo}}$$

pero $\frac{M_{e\,i}}{M_{e\,o}} = \rho_{ei}$ de donde

$$\frac{M_{c\,i}}{M_{c\,o}} = \rho_{e\,i}\,\frac{1 + k_{pi} + k_{vpi}}{1 + k_{po} + k_{vpo}} \qquad (A.14)$$

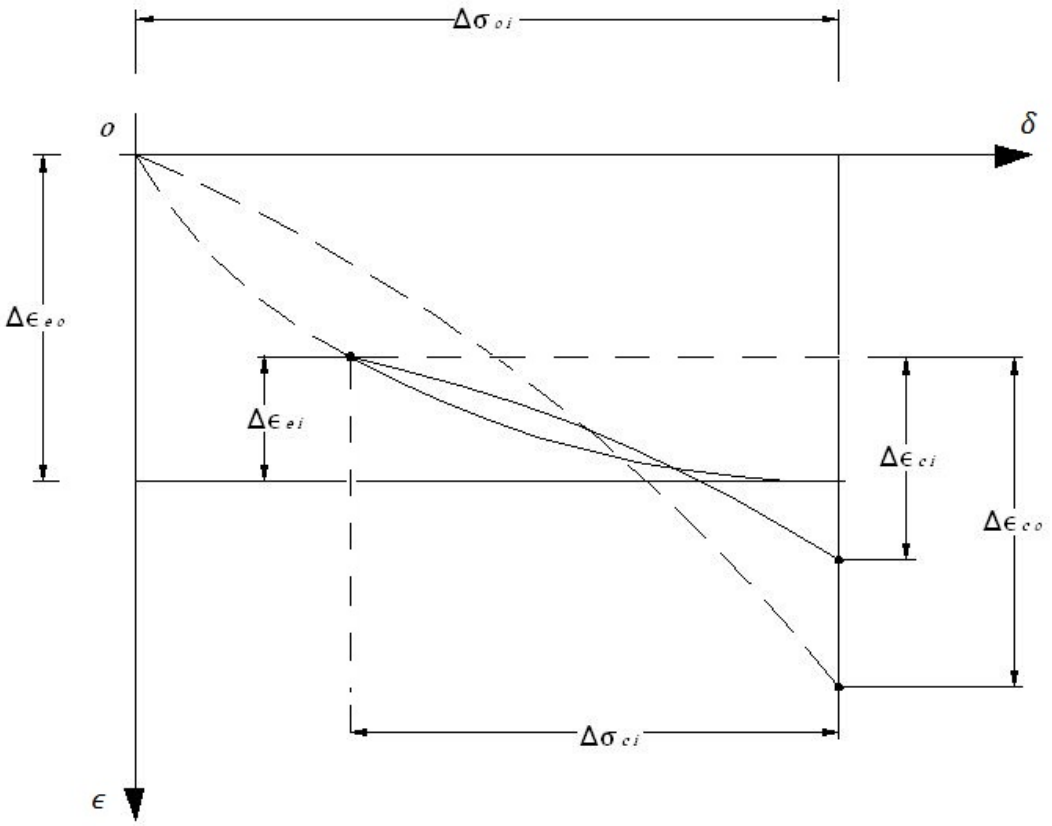


Fig. A3 Ciclo de histéresis de descarga y carga parcial

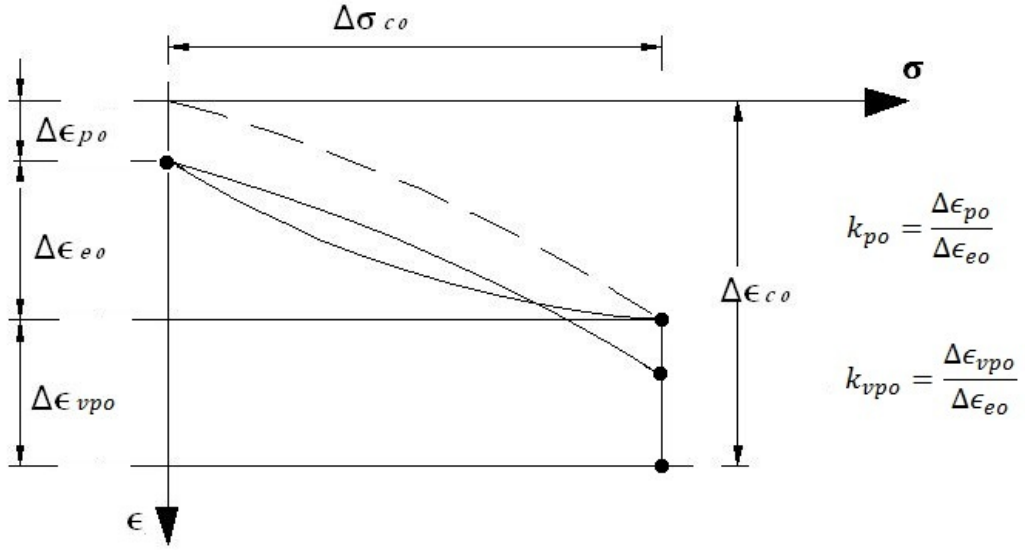


Fig. A4 Ciclo de histéresis para descarga y carga total

Aquí las incógnitas son k_{pi} y k_{vpi} ya que los valores $M_{c\,o}$, k_{po} y k_{vpo} pueden ser determinados por medio de pruebas de laboratorio en probetas de material inalterado para

el alivio máximo de esfuerzos efectuando un ciclo de histéresis, como muestra la figura A.4, por consiguiente:

$$M_{c\,o} = \frac{\Delta\epsilon_{co}}{\Delta\sigma_{co}}$$

$$k_{po} = \frac{\Delta\epsilon_{po}}{\Delta\epsilon_{eo}} \qquad (A.15)$$

$$k_{vpo} = \frac{\Delta\epsilon_{vpo}}{\Delta\epsilon_{eo}}$$

Nótese que el valor de $\Delta\epsilon_{vpo}$, es función del tiempo en que la carga permanezca aplicada sobre la probeta.

Las leyes fenomenológicas que rigen los valores de k_{pi} y k_{vpi} con respecto a los valores de k_{po} y k_{vpo}, son aún desconocidas. Sin embargo, se puede hacer la hipótesis aproximada de que estos valores son proporcionales al nivel de esfuerzos de carga aplicada para alivio parcial de esfuerzos a carga aplicada para alivio total de esfuerzos según se muestra en la figura A3

$$\frac{k_{pi}}{k_{po}} \cong \frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\sigma_{o\,i}}$$

$$\frac{k_{v\,p\,i}}{k_{v\,p\,o}} \cong \frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\sigma_{o\,i}} \qquad (A.16)$$

Sustituyendo las ecs. (A.16) en la ec. (A.14) se obtiene

$$\frac{M_{c\,i}}{M_{c\,o}} = \rho_{e\,i} \cdot \frac{1 + (k_{po} + k_{vpo})\frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\sigma_{o\,i}}}{1 + (k_{po} + k_{vpo})} \qquad (A.17)$$

de donde el factor de recompresión ρ_c, queda definido por el segundo miembro de la expresión anterior. El valor del módulo secante de deformación unitaria para la recompresión del estrato investigado será

$$M_{c\,i} = \rho_{c\,i} \cdot M_{c\,o} \qquad (A.18)$$

y la compresión volumétrica del estrato N es

$$\alpha_c^N = (M_{c\,i} \cdot d)_N \qquad (A.19)$$

Si se utilizan los resultados de pruebas de consolidación donde el módulo de compresibilidad volumétrica unitaria es (Zeevaert, 1973),

$$m_v = M_c \cdot v_c \ , \qquad v_c = \frac{(1+v)(1-2v)}{(1-v)}$$

$$m_v = m_{e\,p}\ F(T_v) + m_t\ log\left(1 + \frac{4.62}{\beta} T_v\right)$$

aquí

$m_{e\,p}$; coeficiente de compresibilidad volumétrica unitario para la deformación elasto – plástica.

$F(T_v)$; Función de Terzaghi de la teoría de la consolidación, donde T_v es el tiempo primario.

m_t ; coeficiente de compresibilidad volumétrica unitario para la deformación viscosa intergranular $\beta = m_t/m_{e\,p}$.

Si m_e , representa el fenómeno puramente elástico, entonces se puede escribir

$$m_{e\,p} = m_e\left(1 + k_{\,p}\right) \qquad (A.21)$$

El factor de recompresión

$$\rho_c = \frac{(m_v)_i}{(m_v)_o}$$

y sustituyendo los valores para las condiciones *r y o*, respectivamente, se obtiene

$$\rho_c = \frac{\left(m_{e\,p}\right)_i F(T_v) + m_{ti}\, log\left(1 + \frac{4.62\, T_v}{\beta i}\right)}{\left(m_{e\,p}\right)_o F(T_v) + m_{to}\, log\left(1 + \frac{4.62\, T_v}{\beta o}\right)} \qquad (A.22)$$

lo anterior se puede escribir como sigue

$$\rho_c = \frac{m_{e\,i}\left(1 + k_{\,p\,i}\right)\left[F(T_v) + \beta i\, log\left(1 + \frac{4.62\, T_v}{\beta i}\right)\right]}{m_{e\,o}\left(1 + k_{\,p\,o}\right)\left[F(T_v) + \beta o\, log\left(1 + \frac{4.62\, T_v}{\beta o}\right)\right]}$$

aquí $\rho_e = m_{e\,i}\,/m_{e\,o}$ además haciendo la hipótesis expresada por las (A.16) se obtiene finalmente la siguiente expresión para el factor de recompresión en función de valores $m_{e\,p}, m_t$ o β para tiempos iguales

$$\rho_c = \rho_e \frac{1 + k_{\,p\,i}}{1 + k_{\,p\,o}} \cdot \frac{F(T_v) + \beta i\, log\left(1 + \frac{4.62\, T_v}{\beta i}\right)}{F(T_v) + \beta o\, log\left(1 + \frac{4.62\, T_v}{\beta o}\right)} \qquad (A.23)$$

en donde

$$k_{p\,i} = k_{p\,o}\ \frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\sigma_{o\,i}} \qquad y \qquad \beta i = \beta o\ \frac{\Delta\sigma_{c\,i}}{\sigma_{o\,i}}$$

El valor de k_p se puede estimar de las pruebas.

Nótese que los resultados de la prueba de consolidación son válidos únicamente para un material confinado lateralmente a deformación nula, por lo que al usar el concepto $M_{c\,o}$ deberá corregirse en la forma

$$M_{c\,o} = \frac{m_{v\,o}}{v_c} \qquad (A.24)$$

Los valores de v_c y k_p tienen los siguientes valores aproximadamente para suelos inalterados en estado confinado.

MATERIAL	v_c	k_p
Arcillas	0.40	0.35
Arcillas limosas	0.50	0.35
Limos arcillosos	0.65	0.30
Limos	0.75	0.30
Arenas limosas	0.80	0.25

A.3 Compresión sin expansión previa

Cuando en el problema de que se trate se incrementa la carga en la superficie del suelo, sin haberse efectuado un alivio de los esfuerzos efectivos por excavaciones, entonces no se efectuará la corrección del módulo de deformación unitaria, esto es: $\rho_c = 1$.

APÉNDICE B
CÁLCULO DE ESFUERZOS EN LA MASA DEL SUELO

B.1 Distribución de Esfuerzos de Boussinesq

La distribución de esfuerzos de Boussinesq (Boussinesq 1885; Holtz and Kovacs, 1981) supone que el suelo es una semiesfera homogénea, isotrópica y linealmente elástica (la relación de Poisson es igual a 0.5). La siguiente relación da la distribución vertical de esfuerzos debido a una carga puntual Q; la posición de la línea de distribución está dada por una distancia radial al punto de aplicación y es calculada por la ecuación B.1.

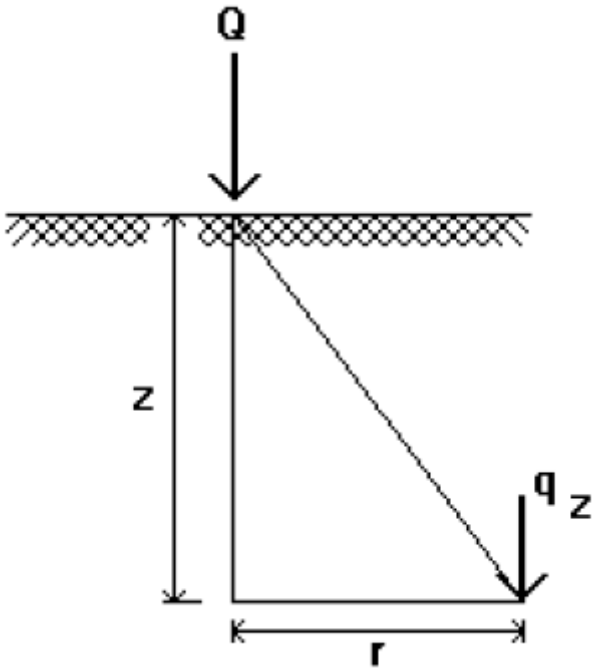


Fig. B1 Definición de los términos usados

$$q_z = Q.\frac{3z^3}{2\pi(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad (B.1)$$

donde

Q = Carga Puntual Total Aplicada

q_z = Esfuerzo a la profundidad z

z = Profundidad a donde se considera q_z

r = Distancia radial al punto de aplicación

Una zapata generalmente se coloca en una excavación y un relleno se coloca sobre la zapata. Cuando se calcula el incremento de esfuerzo efectivo de una o varias zapatas cargadas, se debe considerar la excavación y el relleno.

En el caso de requerir el esfuerzo impuesto por una carga lineal P, se puede integrar la expresión B.1 a lo largo de una línea, obteniéndose:

$$q_z = P.\frac{2z^3}{\pi(r^2+z^2)^2} \qquad (B.2)$$

donde

P = Carga Lineal Aplicada (fuerza/longitud)

q_z = Esfuerzo a la profundidad z

z = Profundidad a donde se considera q_z

r = Distancia radial al punto de aplicación

Newmark (1935) integró la expresión B.1 sobre un área finita, obteniendo la distribución de esfuerzos bajo la esquina de un área rectangular uniformemente cargada.

$$q_z = q_o \frac{A \text{ x } B + C}{4\pi} \qquad (B.3)$$

donde

$$A = \frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1+m^2n^2}$$

$$B = \frac{m^2 + n^2 + 2}{m^2 + n^2 + 1}$$

$$C = \arctan\left[\frac{2mn\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}{m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2}\right]$$

q_o = Carga uniforme Aplicada (fuerza/área)

$m = {}^{x}/_{z}$

$n = {}^{y}/_{z}$

x = Longitud del área cargada

y = Ancho del área cargada

z = profundidad del punto bajo la esquina a donde se calcula el esfuerzo

Notar que los esfuerzos sólo se proporcionan en un punto, si se requieren los esfuerzos a otras profundidades, por ejemplo, para determinar la distribución de esfuerzos debajo de la esquina del área cargada, se deberá repetir el cálculo para cada profundidad. Para determinar el esfuerzo en un punto diferente a una esquina, deberá dividirse al área cargada en pequeñas áreas rectangulares, de manera que los vértices de todas ellas coincidan con el punto de interés; al sumar los resultados parciales se obtendrá el esfuerzo buscado.

El cálculo de esfuerzos descrito, consume gran cantidad de tiempo en cálculos manuales, aún para áreas cargadas relativamente simples; Newmark (1942) publicó los diagramas de influencia con los cuales, el tiempo y el trabajo requerido para el cálculo de esfuerzos debajo de un punto, fue considerablemente disminuido aún para áreas cargadas de forma irregular.

Un estudio detallado de la expresión B.3, revela que la distribución de esfuerzos cerca de la base del área cargada produce un cambio brusco en los valores de esfuerzo, por lo que Newmark realizó un ajuste a la ecuación B.3, obteniéndose:

$$q_z = q_o \frac{A \text{ x } B + \pi - C}{4\pi} \qquad (B.3a)$$

Expresión valida cuando

$$m^2 + n^2 + 1 \leq m^2 n^2$$

(ver variables en la expresión B.3)

B.2 Distribución de Esfuerzos de Westergaard

Westergaard (1938) sugirió que en un suelo estratificado, los estratos horizontales restringen la expansión horizontal del mismo, por lo que es adecuado suponer que los estratos del suelo son horizontalmente rígidos (la relación de Poisson es igual a cero) permitiendo únicamente esfuerzo vertical de compresión para los esfuerzos impuestos. La solución de Westergaard para esfuerzos debido a una carga puntual Q, está definido por:

$$q_z = \frac{Q}{\pi z^2} \cdot \frac{1}{(1 + 2(r/z)^2)^{3/2}} \qquad (B.4)$$

donde

Q = Carga Puntual Total Aplicada

q_z = Esfuerzo a la profundidad z

z = Profundidad a donde se considera q_z

r = Distancia radial al punto de aplicación

La integración de la expresión de Westergaard, en un área cargada de x x y resulta en la expresión B.5 (Taylor, 1948)

$$q_z = q_o \frac{1}{2\pi} \arctan\left[\frac{1}{\sqrt{D + E + F}}\right] \qquad (B.5)$$

donde

$$D = \frac{1}{2m^2}; \quad E = \frac{1}{2n^2}; \quad F = \frac{1}{4m^2n^2}$$

q_o = Carga uniforme Aplicada (fuerza/área)

$m = {}^{x}/_{z}$

$n = {}^{y}/_{z}$

x = Longitud del área cargada

y = Ancho del área cargada

z = profundidad del punto bajo la esquina a donde se calcula el esfuerzo

De manera similar, esta distribución de esfuerzos también consume gran cantidad de tiempo en cálculos manuales; se han desarrollado diagramas de influencia similares a los generados por Newmark, utilizando la solución de Westergaard; facilitando su utilización manual.