



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

“LA FUNCIÓN DE ONDA DE HUSIMI E  
INTERFERENCIA CUÁNTICA EN EL  
ESPACIO FASE”

*T E S I S*

*Que para obtener el título de  
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS  
presenta*

*FRANCISCO JAVIER LÓPEZ RAMOS*



*DIRECTOR: DR. ARTURO ZÚÑIGA SEGUNDO*

*México D.F., agosto del 2007*

# Indice.

Indice .....	1
Introducción .....	3
I Representación de estado coherente (REC).....	6
II Estadística de número de fotones.....	10
2.1 Estados desplazados de número .....	10
2.2 Estados comprimidos desplazados de número.....	12
2.3 Distribución de número de fotones.....	14
III Conclusiones.....	17
Referencias.....	18

**“A MI FAMILIA”**

**Y EN ESPECIAL**

**“A MI HIJO AXEL ZHERO Y MI MADRE”**

# Introducción

Las funciones de onda definidas en el espacio fase han alcanzado un alto grado de conexiones entre ellas, las teorías de Torres Vega y Frederick [1-5], Harriman [6] y Ban [7], son ejemplos donde estas funciones de onda están definidas en términos de las variables de configuración  $(q, p)$ . Es decir, de manera natural uno puede encontrar asociaciones entre funciones de onda  $|\psi\rangle$  y funciones de onda en el espacio fase, utilizando el vector  $|\Gamma\rangle = |q, p\rangle$ , que se considera un vector propio de algún operador  $\hat{\Gamma}$  definido en el espacio fase.

Por otra parte, se han investigado nuevos estados cuánticos del campo electromagnético, donde uno de los más estudiados son los estados comprimidos [8]. Son de gran importancia en comunicaciones e interferometría óptica [9]. Tales estados están caracterizados por el hecho de que la indeterminación en una de sus cuadraturas del campo electromagnético, o varianzas de  $p$  y  $q$ , es más pequeña que en los estados coherentes usuales. A diferencia, un estado coherente es un estado de mínima incertidumbre con varianzas de  $p$  y  $q$ , iguales a las del estado base del oscilador armónico  $(\hbar/2)$  [10]. Por tal motivo, los estados coherentes y comprimidos constituyen la estructura del marco teórico de la óptica moderna [11].

Las oscilaciones en la estadística de número de fotones son características interesantes y comunes a estados no-clásicos. Los estados comprimidos tienen estas propiedades y sus oscilaciones son interpretadas como interferencia en el espacio fase [12-13]. El propósito principal de esta tesis, es estudiar las propiedades estadísticas de un estado comprimido en términos de funciones de onda de Husimi y no de sus densidades de probabilidad como se definen en el libro Wolfgang P. Schleich [13].

Para facilitar nuestro trabajo utilizaremos el espacio fase cuántico, cuyo concepto y funciones de quasiprobabilidad asociadas, han demostrado ser extremadamente útiles e

interesantes para muchas aplicaciones fundamentales de la mecánica cuántica. Aunque la más antigua y famosa distribución de quasiprobabilidad sea la función de Wigner [14], preferimos utilizar la representación de estado-coherente propuesta hace algunos años por Gabino Torres Vega [1-5]. Esta representación propone una ecuación de evolución, del tipo de Schrödinger, para funciones de onda en el espacio fase, con ello surgió la posibilidad de analizar la dinámica de los sistemas cuánticos completamente en el espacio fase en la misma forma que se hace en el espacio de coordenadas. Esta representación coincide con la totalidad de las representaciones de estado-coherente para el grupo de Heisenberg-Weyl [3], por lo que la llamamos representación de estado-coherente. En esta representación se han encontrado soluciones analíticas para algunos sistemas cuánticos [4,5], cuyas funciones cumplen con la relación de incertidumbre y se aproximan a las densidades clásicas en el límite apropiado [6,15].

En el capítulo I, damos una breve descripción de la representación de estado-coherente que utilizaremos. En esta representación se introducen funciones de onda que dependen simultáneamente de la coordenada  $q$  y del momento  $p$  cuya dinámica está descrita por una ecuación de evolución con la misma estructura que la que tiene la ecuación de Schrödinger en el espacio de coordenadas, con expresiones para los operadores de coordenada y momento apropiadas para el espacio fase. Como la estructura de esta ecuación es la misma que la usual en el espacio de coordenadas, el análisis de la dinámica en el espacio fase se hace en la misma forma que en el espacio de coordenadas, sin la necesidad de introducir cantidades ni complicaciones adicionales. A diferencia de otras teorías, nosotros empezamos con una ecuación de Schrödinger directamente en el espacio fase que puede reducirse a los espacios de coordenadas o de momentos si se desea. En otras teorías, se procede justamente en la dirección opuesta pues, de la función de onda en el espacio de coordenadas se construye una densidad de probabilidad en el espacio fase.

En el capítulo II, introducimos las expresiones de los estados desplazados de número y el estado comprimido desplazado, definidos totalmente en la representación de estado coherente [15] y probamos su conexión con las densidades de Husimi [13]. Con ayuda del algoritmo numérico descrito en la Ref. 2, calculamos las estadísticas del número de fotones correspondiente a dicho estado comprimido, tal como son definidas en el trabajo de

Mudarain y Stephany [12]. Cabe mencionar que nos evitamos hacer las aproximaciones respecto a la fase del estado de número y el comprimido desplazado. Consideramos que este es el punto más importante de la tesis, ya que de manera natural, directa y sin ninguna aproximación llegamos a la expresión analítica de la estadística de número de fotones. Consideramos que es posible hacer una generalización a estados comprimidos desplazados de número como en el trabajo de Celia y Dantas [17] o por el de Mudarain y Stephany [18].

Por último en el capítulo III, damos nuestras conclusiones.

## Representación de estado-coherente (REC)

En un análisis de la dinámica cuántica de un sistema dado, ordinariamente escogemos una representación particular de un espacio abstracto de Hilbert y trabajamos con cantidades dinámicas y sus ecuaciones de evolución en esta representación. En este capítulo exponemos brevemente la formulación de estado-coherente que utilizamos. Los detalles se encuentran en las referencias [1-5]. La ventaja de esta representación radica principalmente, en poder analizar sistemas cuánticos completamente en el espacio fase, de la misma forma como se hace en la representación de coordenadas de la mecánica cuántica, además tenemos una ecuación de evolución muy simple en comparación con la de Wigner [14], adicionalmente es posible comparar las dinámicas cuántica y clásica en un mismo espacio.

Los vectores base  $|\Gamma\rangle = |p, q\rangle$  formalmente serían los vectores propios de un operador hermítico  $\hat{\Gamma}$  en el espacio fase,  $\hat{\Gamma}|\Gamma\rangle = \Gamma|\Gamma\rangle$  con una relación de ortogonalidad  $\langle\Gamma'|\Gamma\rangle = \delta(\Gamma' - \Gamma)$ . Ya que  $\hat{\Gamma}$  y su vector propio  $|\Gamma\rangle$  no son conocidos, es posible que  $|\Gamma\rangle$  no sea vector propio simultáneo de  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$ . La proyección  $\langle\Gamma|\psi\rangle = \psi(\Gamma)$ , del ket abstracto  $|\psi\rangle$  en esta representación, nos da la función de onda en el espacio fase, es decir, una función de onda con variables independientes  $p$  y  $q$ , y la cantidad  $|\psi(\Gamma)|^2 \equiv \psi^*(\Gamma)\psi(\Gamma)$ , (donde  $\psi^*(\Gamma) = \langle\psi|\Gamma\rangle = \langle\Gamma|\psi\rangle^*$ ), se toma como una densidad de probabilidad. Esta definición asegura que la densidad cuántica  $|\psi(\Gamma)|^2$  sea una cantidad no negativa en el espacio fase que satisface los requerimientos para una densidad de probabilidad, es decir,  $\int d\Gamma |\psi(\Gamma)|^2 = 1$ , y la densidad de probabilidad correspondiente a diferentes sistemas o regiones separadas del espacio fase sea aditiva.

La relación de cerradura para los vectores base es  $\hat{I} = \int |\Gamma\rangle d\Gamma \langle\Gamma|$ , donde la integración se realiza sobre todo el espacio fase. Esta relación nos permite calcular el producto

escalar entre los vectores  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  como  $\langle\psi|\phi\rangle = \int d\Gamma \psi^*(\Gamma)\phi(\Gamma)$ . Esto asegura que la longitud  $\langle\psi|\psi\rangle$ , del vector  $|\psi\rangle$ , sea mayor o igual a cero, y debe ser cero sólo para el vector nulo. La ecuación anterior también requiere que la función de onda sea cuadráticamente integrable en el espacio fase,  $\langle\Gamma|\psi\rangle \in L^2$ . La varianza o dispersión de  $\hat{A}$ , la escribimos como

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2, \quad (1.1)$$

donde  $\langle\hat{A}^2\rangle = \int d\Gamma \psi^*(\Gamma)\hat{A}^2\psi(\Gamma)$ , y  $\langle\hat{A}\rangle = \int d\Gamma \psi^*(\Gamma)\hat{A}\psi(\Gamma)$ .

Las acciones de los operadores  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  sobre un ket arbitrario  $|\psi\rangle$  se definen como

$$\langle\Gamma|\hat{P}|\psi\rangle = \left(\frac{p}{2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\psi(\Gamma), \quad \langle\Gamma|\hat{Q}|\psi\rangle = \left(\frac{q}{2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\psi(\Gamma). \quad (1.2)$$

Estos operadores son hermíticos y no conmutan entre sí, de hecho  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\hat{I}$ . Con esto, la ecuación de Schödinger en el espacio fase es

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\Gamma|\psi\rangle = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{p}{2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 + V\left(\frac{q}{2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\langle\Gamma|\psi\rangle, \quad (1.3)$$

donde  $V(q/2 + i\hbar\partial/\partial p)$  indica que la función potencial  $V(x)$  se evalúa en el operador  $q/2 + i\hbar\partial/\partial p$ . Como los operadores que utilizamos son hermíticos, los valores propios son reales y las funciones propias son ortogonales.

Las acciones que los operadores  $\exp(i\xi\hat{Q}/\hbar)$  y  $\exp(i\eta\hat{P}/\hbar)$  tienen sobre el vector base  $|\Gamma\rangle$  serán:

$$\exp(i\xi\hat{Q}/\hbar)|p, q\rangle = \exp(i\xi q/2\hbar)|p - \xi, q\rangle, \quad (1.4)$$

$$\exp(i\eta\hat{P}/\hbar)|p, q\rangle = \exp(i\eta p/2\hbar)|p, q + \eta\rangle. \quad (1.5)$$

Es posible reducir a la función de onda  $\langle\Gamma|\psi\rangle$  a las funciones  $\langle q|\psi\rangle$  o  $\langle p|\psi\rangle$  mediante proyecciones (sin embargo, este proceso no es reversible). Para la función de onda en la representación en coordenadas utilizamos

$$\langle q|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{e^{+ipq/2\hbar}}{\sqrt{4\pi\hbar}} \langle\Gamma|\psi\rangle.$$



Una proyección similar para obtener la función de estado en la representación de momentos será,

$$\langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{e^{-ipq/2\hbar}}{\sqrt{4\pi\hbar}} \langle \Gamma | \psi \rangle .$$

Algunas veces se pueden encontrar soluciones analíticas, pero es más probable que tengamos que resolver esta ecuación numéricamente (en los capítulos siguientes encontraremos ejemplos de ambos casos). Un método numérico que permite propagar funciones de onda en el espacio fase [2], utiliza la aproximación

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} \approx e^{\lambda\hat{A}/2} e^{\lambda\hat{B}} e^{\lambda\hat{A}/2} ,$$

(cuando  $\lambda \ll 1$ ), para calcular el resultado de aplicar el propagador

$$e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} \rightarrow \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \Delta t \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{p}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 + V \left( \frac{q}{2} + i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \right\} ,$$

a alguna función de onda. El error que se tiene al hacer esta aproximación es de orden  $\mathcal{O}(t^3)$ , así que, para un  $\Delta t$  pequeño, podemos utilizar el propagador aproximado

$$\begin{aligned} \exp \left[ -\frac{i\Delta t}{4\hbar m} \left( \frac{p}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 \right] \exp \left[ -i\frac{\Delta t}{\hbar} V \left( \frac{q}{2} + i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{i\Delta t}{4\hbar m} \left( \frac{p}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 \right] . \end{aligned}$$

Aunque parece difícil de hacer, esta es una expresión muy conveniente ya que se puede utilizar el método de la transformada rápida de Fourier para evaluar la acción de este operador sobre una función de  $p$  y  $q$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ e^{-(i\Delta t/4m\hbar)(p/2 - i\hbar\partial/\partial q)^2} \psi(p, q) \right] = \\ e^{-(i\Delta t/4m\hbar)[(p+p')/2]^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\hbar}} \int dq e^{-ip'q/2\hbar} \psi(p, q) , \quad (1.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-(i\Delta t/\hbar)V(q/2 + i\hbar\partial/\partial p)} \psi(p, q) \right] = \\ e^{-(i\Delta t/\hbar)V[(q+q')/2]^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\hbar}} \int dp e^{ipq'/2\hbar} \psi(p, q) . \quad (1.7) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{F}$  indica la transformada de fourier y  $q'$  y  $p'$  son las variables recíprocas a  $p$  y  $q$ , respectivamente. Entonces, a grandes rasgos, el método numérico consiste en calcular la transformada de fourier de la función, multiplicar por alguno de los factores  $\exp\{-(i\Delta t/4m\hbar)[(p+p')/2]^2\}$  o  $\exp\{-(i\Delta t/\hbar)V[(q+q')/2]^2\}$  y calcular la transformada inversa del resultado. Repitiendo este proceso podemos propagar una función de onda inicial hasta algún tiempo dado en incrementos de  $\Delta t$ .

## Estadística de número de fotones

### 2.1 Estados desplazados de número

Los estados desplazados de número (EDN) [16,19] se encuentran aplicando el operador de desplazamiento de Glauber [10] sobre los estados de número (EN) [5], es decir,  $|n, \beta\rangle = \hat{D}(\beta) |n\rangle$ , siguiendo la notación de Nieto [20], donde

$$\hat{D}(\beta) = \exp(\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}) = \exp\left(-iq_o \hat{P} + ip_o \hat{Q}\right). \quad (2.1)$$

Aquí  $\beta$  es el parámetro de coherencia  $\beta = (q_o + ip_o)/\sqrt{2}$ , y los operadores  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  son los de momento y coordenada definidos en la Ec.(1.2). En lo sucesivo utilizaremos  $\hbar = \omega = m = 1$ .

Combinando la relación anterior y la formula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) [21], encontramos que los EDN en el espacio fase son:

$$\langle \Gamma, q_o, p_o | n \rangle = \mathcal{N} H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma (q - q_o)^2 - \frac{1}{2} \phi (p - p_o)^2 + i(\gamma p_o q - \phi p q_o - \alpha p q + \phi p_o q_o) \right], \quad (2.2)$$

donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización,  $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$ ,  $\phi = \frac{1}{2} - \alpha$ , y  $\alpha$  es un parámetro complejo con  $|\alpha| < \frac{1}{2}$ . Como sucede con la funciones de onda en la REC, éstas son una interpolación entre la representación de coordenadas ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) y momentos ( $\alpha = -\frac{1}{2}$ ), cuando  $\alpha = 0$ , tendrán igual peso en ambas coordenadas  $q$  y  $p$ .  $H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$  son un conjunto de polinomios ortogonales definidos en el espacio fase con propiedades similares a los polinomios de Hermite, además satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$H_{n+1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = 2u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 4n\alpha H_{n-1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha), \quad (2.3)$$

donde

$$u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = \gamma(q - q_o) - i\phi(p - p_o) .$$

Algunos de estos polinomios son:

$$\begin{aligned} H_0(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 1 , & H_1(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 2u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) , \\ H_2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 4u^2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 4\alpha , \\ H_3(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 8u^3(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 24u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)\alpha . \end{aligned} \quad (2.4)$$

El caso de  $\alpha = 0$ , es particularmente interesante ya que nos permite hacer contacto con la mecánica clásica, para este valor de  $\alpha$ , la densidad cuántica está dada por la magnitud al cuadrado de la ecuación (2.2) y es:

$$|\psi_n(\Gamma; \alpha = 0)|^2 = \frac{1}{2\pi n!} \left[ \frac{1}{2}(q - q_o)^2 + \frac{1}{2}(p - p_o)^2 \right]^n \exp \left[ -\frac{1}{2}(q - q_o)^2 - \frac{1}{2}(p - p_o)^2 \right] . \quad (2.5)$$

En la Fig. 2.1 mostramos una densidad definida por la Ec. (2.5). De acuerdo a la definicion de Schleich [13], la densidad de Husimi para un estado desplazado de número es:

$$Q(\delta, \beta) = \frac{1}{\pi} \frac{|\delta - \beta|^{2n}}{n!} \exp(-|\delta - \beta|^2) , \quad (2.6)$$

donde  $\delta = (q + ip)/\sqrt{2}$  y  $\beta = (q_o + ip_o)/\sqrt{2}$ , tal como lo habíamos mencionado anteriormente. Al comparar estas dos últimas ecuaciones concluimos que la densidad definida en la Ec. (2.5) es la mitad de la densidad de Husimi definida por la Ec. (2.6).

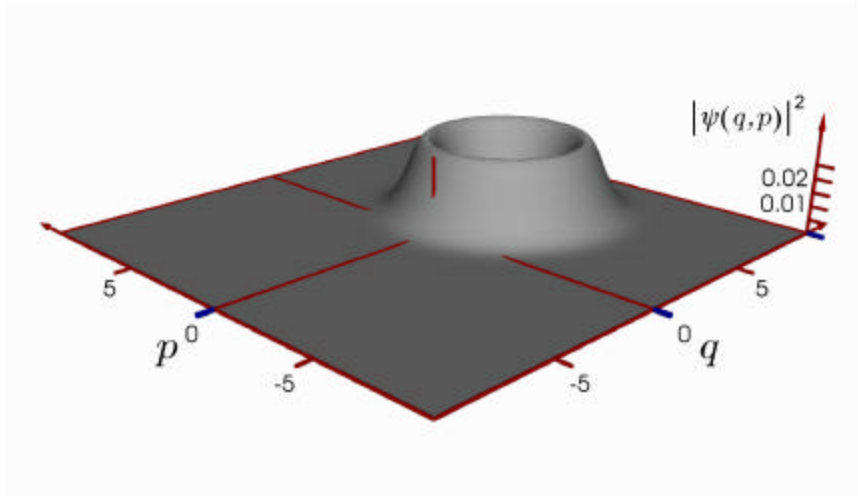


Fig. 2.1. Módulo al cuadrado de la Ec. 2.2, para  $q_o = 3.0$ ,  $p_o = 0.0$  y  $\alpha = 0.0$ . Esta densidad es proporcional a la de Husimi definida en la Ref. [13].

## 2.2 Estados comprimidos desplazados de número

Los estados comprimidos desplazados de número (ECDN)  $|n, \beta, \xi\rangle$  [22], son obtenidos por la aplicación del operador general de compresión  $\hat{S}(\xi)$ , sobre los estados de número  $|n\rangle$  seguido del operador de desplazamiento  $\hat{D}(\beta)$  tal que  $|n, \beta, \xi\rangle = \hat{D}(\beta)\hat{S}(\xi)|n\rangle$  (vea por ejemplo a Nieto [20]), donde  $\hat{S}(\xi) = \exp(\xi\hat{a}^{\dagger 2} - \xi^*\hat{a}^2)$ . Aquí  $\xi = \eta \exp(i\theta)$  es el parámetro complejo de compresión. Los ECDN más generales en el espacio fase cuántico son [16]:

$$\langle \Gamma, q_o, p_o, \xi | n \rangle = \mathcal{N} \tilde{H}_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) \exp \left[ -\frac{1}{2}\phi(q - q_o)^2 - \frac{1}{2}\gamma(p - p_o)^2 + i(\gamma p_o q - \phi p q_o - \alpha p q + \phi p_o q_o) \right], \quad (2.7)$$

donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización y  $\alpha$  es el parámetro complejo definido por  $\alpha = -\frac{1}{2} \tanh(2\eta) \exp(-i\theta)$ .  $\gamma$  y  $\phi$  son funciones de  $\alpha$  como antes. De la misma manera  $\tilde{H}_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$ , son otro conjunto de polinomios ortogonales definidos en el espacio fase, que satisfacen la relación de recurrencia

$$\tilde{H}_{n+1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = 2\tilde{u}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)\tilde{H}_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 4n\alpha^* \tilde{H}_{n-1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha), \quad (2.8)$$

donde,

$$\tilde{u}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = \left( \frac{1}{4} - |\alpha|^2 \right)^{1/2} [(q - q_o) - i(p - p_o)].$$

Cuando  $n = 0$ , la Ec. (2.7) nos define el estado comprimido

$$\langle \Gamma, q_o, p_o, \xi | 0 \rangle = \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - |\alpha|^2}}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2}\phi(q - q_o)^2 - \frac{1}{2}\gamma(p - p_o)^2 + i(\gamma p_o q - \phi p q_o - \alpha p q + \phi p_o q_o) \right], \quad (2.9)$$

cuyo módulo al cuadrado es

$$|\langle \Gamma, q_o, p_o, \xi | 0 \rangle|^2 = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - |\alpha|^2}}{\pi} \exp \left[ -\phi(q - q_o)^2 - \gamma(p - p_o)^2 \right], \quad (2.10)$$

en la Fig. 2.2 mostramos una densidad definida por la Ec. (2.10).

El estado comprimido con parámetros de compresión complejo  $\xi = \eta \exp(i\theta)$ , puede ser obtenido del estado vacío (EN con  $\alpha = 0$ ), reemplazando la coordenada  $q$  por  $qS$  y el momento  $p$  por  $p/S$  [16], donde  $S^2 = (\frac{1}{2} - \alpha)/(\frac{1}{2} + \alpha)$ , con  $\alpha = -\frac{1}{2} \tanh(2\eta) \exp(-i\theta)$ , como antes.

De acuerdo a la definicion de Schleich [13], la densidad de Husimi para un estado comprimido desplazado es:

$$Q(\delta, \beta) = \frac{2}{\pi} \frac{S}{S^2 + 1} \exp \left[ -\frac{2S^2}{S^2 + 1} (\delta_r - \beta_r)^2 - \frac{2}{S^2 + 1} (\delta_i - \beta_i)^2 \right], \quad (2.11)$$

donde  $\delta_r = q/\sqrt{2}$ ,  $\beta_r = q_o/\sqrt{2}$ ,  $\delta_i = p/\sqrt{2}$  y  $\beta_i = p_o/\sqrt{2}$ .

Finalmente escribimos:

$$\frac{S^2}{S^2 + 1} = \phi, \quad \frac{1}{S^2 + 1} = \gamma, \quad \frac{S}{S^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} - |\alpha|^2},$$

Al comparar las densidades (2.10) y (2.11), claramente mostramos que la densidad de Husimi del estado comprimido es dos veces el módulo al cuadrado de la Ec. (2.9).

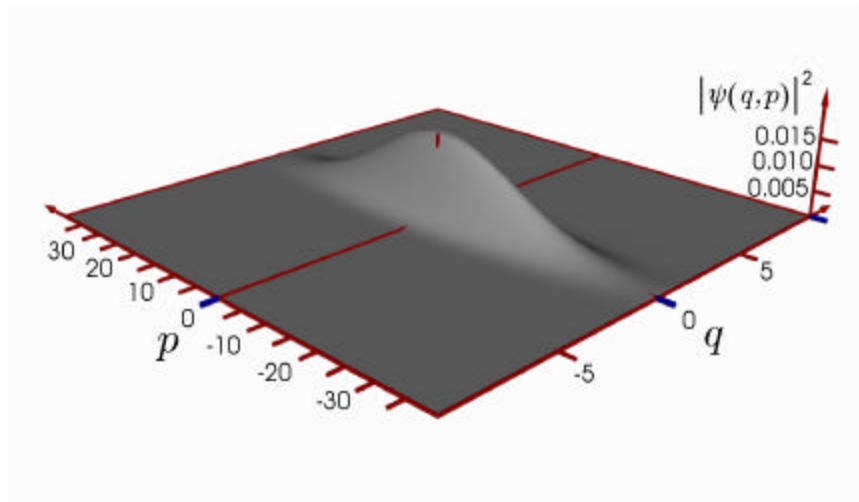


Fig. 2.2. Módulo al cuadrado de la Ec. 2.9, para  $q_o = 0.3590886913$ ,  $p_o = 0.0$  y  $\alpha = -0.5 \tanh(3.0)$ . Esta densidad es proporcional a la de Husimi definida en la Ref. [13].

## 2.3 Distribución de número de fotones

La probabilidad de hallar  $n$  fotones en el estado  $|\psi\rangle$  está dado por:

$$p(n) = |\langle n | \psi \rangle|^2, \quad (2.12)$$

que en nuestro caso para simplificar, el ket  $|n\rangle$  será la Ec. (2.2), con  $\alpha = 0$  y  $q_o = p_o = 0$ . El ket  $|\psi\rangle$  corresponde al estado comprimido (2.9) con  $\alpha \neq 0$  (real),  $q_o \neq 0$  y  $p_o = 0$ . Note que la arbitrariedad de  $\alpha$  en los ECDN esta relacionada con la sobrecompletes de los estados coherentes [23]. Por lo tanto es claro que:

$$\begin{aligned} \langle n | \psi \rangle = & \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}\pi n!}} \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) q_o^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp \left[ -\frac{1}{2} (1 - \alpha) q^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) qq_o \right] \int_{-\infty}^{\infty} dp (q - ip)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 + \alpha) p^2 + i \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) q_o + \alpha q \right] p \right\}, \end{aligned}$$

la cual se puede resolver utilizando la representación integral de los polinomios de Hermite  $H_n(x)$

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2} dt,$$

y la formula [24]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x - y)^2}{2u} \right] H_n(x) dx = (2\pi u)^{\frac{1}{2}} (1 - 2u)^{\frac{n}{2}} H_n \left[ y(1 - 2u)^{-\frac{1}{2}} \right],$$

de donde escribimos finalmente

$$\begin{aligned} p(n) = & \frac{1}{2^{n+1}\pi n!} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}}{\pi} \left( \frac{2}{1 + \alpha} \right)^{n+1} \frac{\pi}{2^n 2^n} \frac{2(1 + \alpha)}{(1 + 2\alpha)^2} \exp \left[ -\left( \frac{1}{2} - \alpha \right) q_o^2 \right] \\ & \left| H_n \left[ \frac{\left( \frac{1}{2} - \alpha \right) q_o}{\sqrt{-2\alpha}} \right] \right|^2. \end{aligned}$$

Al sustituir el valor de  $\alpha = -\frac{1}{2} \tanh 2\eta$ , en la relación anterior tenemos:

$$p(n) = \frac{\tanh^n 2\eta}{n! 2^n \cosh 2\eta} \exp \left[ -\frac{q_o^2}{2} (1 + \tanh 2\eta) \right] \left| H_n \left[ \frac{q_o}{\sqrt{2}} \frac{(\cosh 2\eta + \sinh 2\eta)}{\sqrt{2} \sinh 2\eta \cosh 2\eta} \right] \right|^2. \quad (2.13)$$

Observe que en la Ec. (2.13) es posible utilizar el hecho que:

$$(\cosh 2\eta + \sinh 2\eta)^2(1 - \tanh 2\eta) = 1 + \tanh 2\eta ,$$

donde finalmente escribimos

$$p(n) = \frac{\tanh^n 2\eta}{n!2^n \cosh 2\eta} \exp \left[ \left( \frac{q_o}{\sqrt{2}} \right)^2 (\cosh 2\eta + \sinh 2\eta)^2 (\tanh 2\eta - 1) \right] \left| H_n \left[ \frac{q_o (\cosh 2\eta + \sinh 2\eta)}{\sqrt{2} \sqrt{2} \sinh 2\eta \cosh 2\eta} \right] \right|^2 . \quad (2.14)$$

Es importante notar que en el trabajo de Mundarain y Stephany [12], para calcular el estado comprimido primero aplica el operador de desplazamiento seguido inmediatamente del operador de compresión, contrario a nuestros cálculos. En general  $\hat{S}(\xi)\hat{D}(q_o, p_o) = \hat{D}(q'_o, p'_o)\hat{S}(\xi)$  cuando:

$$\begin{aligned} q'_o &= q_o(\cosh 2\eta + \cos \theta \sinh 2\eta) + p_o \sin \theta \sinh 2\eta , \\ p'_o &= q_o \sin \theta \sinh 2\eta + p_o(\cosh 2\eta - \cos \theta \sinh 2\eta) , \end{aligned} \quad (2.15)$$

recuerde que  $\theta = 0$  y  $p_o = 0$ , que al sustituir en la Ec. (2.14) resulta

$$p(n) = \frac{\tanh^n 2\eta}{n!2^n \cosh 2\eta} \exp \left[ \left( \frac{q'_o}{\sqrt{2}} \right)^2 (\tanh 2\eta - 1) \right] \left| H_n \left[ \frac{q'_o}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \sinh 2\eta \cosh 2\eta} \right] \right|^2 ,$$

que finalmente, si  $\beta = q'_o/\sqrt{2}$  escribimos:

$$p(n) = \frac{\tanh^n 2\eta}{n!2^n \cosh 2\eta} \exp [\beta^2(\tanh 2\eta - 1)] \left| H_n \left[ \frac{\beta}{\sqrt{2} \sinh 2\eta \cosh 2\eta} \right] \right|^2 , \quad (2.16)$$

que es una relación idéntica a la utilizada por Mundarain y Stephany [12], y un caso particular de la obtenida por H. P. Yuen [25]. Por lo tanto hemos mostrado la existencia de funciones de onda definidas en el espacio fase cuántico, cuyo módulo al cuadrado es proporcional a las densidades de Husimi. A diferencia de Mundarain y Stephany [12], que construyen estas funciones de onda a partir de las densidades de Husimi, nosotros no tenemos que hacer alguna suposición respecto a las fases de estas funciones.

Como una prueba final, consideremos realizar numéricamente la integral que nos define la probabilidad de transición (2.12), para calcular el operador de número  $\hat{N} =$



$\hat{H} - 1/2$ , utilizaremos el algoritmo presentado en la parte final del capítulo I, cuyos detalles se encuentran en la referencia [2]. Esto nos sirve como prueba para nuestros cálculos. El estado comprimido lo calculamos de acuerdo a lo propuesto por Mundarain y Stephany [12], es decir que  $q_o = 5.1\sqrt{2}/(\cosh 3.0 + \sinh 3.0)$ ,  $p_o = 0$  y  $\alpha = -0.5 \tanh 3.0$ . En la Fig. 2.3 mostramos la estadística de fotones, observe el caracter oscilatorio.

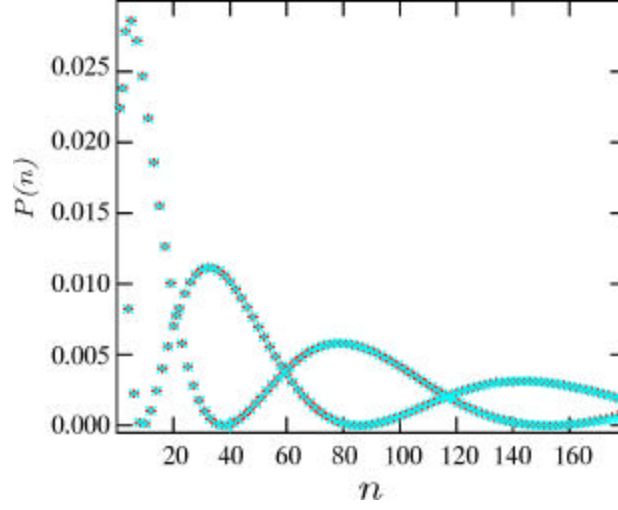


Fig. 2.3. Estadística de número de fotones correspondiente al estado comprimido mostrado en la Fig. 2.2. Las (X) corresponden a los resultados analíticos calculados con la relación (2.16). Las (+) son los resultados numéricos.

Observamos que se tiene una buena concordancia para las  $n$  menores que 120, ya que es necesario incrementar el intervalo de integración, que fue de  $(-40,40)$  para  $p$  y  $(-10,10)$  para  $q$ . Consideramos que esta gráfica muestra que nuestro método numérico puede muy bien ayudarnos a encontrar o explorar distintas configuraciones, como por ejemplo superposición de estados comprimidos desplazados de número.

## Conclusiones

Los trabajos de Schleich y Wheeler han mostrado que la oscilaciones en la “cola” de la estadística de número de fotones para los estados comprimidos puede ser explicada en términos de la “interferencia en el espacio fase”. En este trabajo mostramos que el concepto de interferencia puede ser desarrollado en términos de funciones de onda en el espacio fase, cuyos modulos al cuadrado son las densidades de Husimi de la óptica cuántica. Es claro que esta aproximación es muy diferente de la propuesta de Schleich y Wheeler, pero los resultados por supuesto son los mismos. En el método de Schleich y Wheeler, se utilizan la áreas de intersección entre las densidades de Wigner correspondientes a los estados de número y comprimidos.

La función de Husimi permite una comparación directa de los resultados cuánticos y los que se realizan clásicamente. Ya que en la mecánica clásica el estado de un sistema está dado como una densidad de probabilidad asociada al espacio fase.

En esta ocasión hemos incrementado nuestras aplicaciones de la REC de la mecánica cuántica. Es importante resaltar que los cálculos los realizamos en la forma estandar, es decir, como se enseña en los libros básicos, con la novedad de utilizar funciones de onda definidas en el mismo espacio que la mecánica clásica, esto nos permite estudiar con más detalle las analogías entre tales dinámicas.

En un futuro cercano esperamos reportar resultados sobre interferencia cuántica sobre estados comprimidos desplazados de número.

## Referencias

- [1] Go. Torres-Vega, and J. H. Frederick, *J. Chem. Phys.* **93**, 8862 (1990).  
Go. Torres-Vega, and J. H. Frederick, *J. Chem. Phys.* **98**, 3103 (1993).  
Go. Torres-Vega, *J. Chem. Phys.* **98**, 7040 (1993).  
Go. Torres-Vega, *J. Chem. Phys.* **99**, 1824 (1993).
- [2] Go. Torres-Vega, and J. H. Frederick, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2601 (1991).  
Go. Torres-Vega, Klaus B. Møller, and A. Zúñiga-Segundo, *Phys. Rev. A* **57**, 771 (1998).
- [3] Klaus B. Møller, T. G. Jorgensen, and Go. Torres-Vega, *J. Chem. Phys.* **106**, 7228 (1997).
- [4] Go. Torres-Vega, A. Zúñiga-Segundo, and J. D. Morales-Guzmán, *Phys. Rev. A* **53**, 3792 (1996).  
Go. Torres-Vega, J. D. Morales-Guzmán, and A. Zúñiga-Segundo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31** 6725 (1998).
- [5] Go. Torres-Vega, and J. D. Guzmán, *J. Chem. Phys.* **101**, 5847 (1994).
- [6] J. E. Harriman, *J. Chem. Phys.* **100**, 3651 (1994).
- [7] M. Ban, *J. Math. Phys.* **39**, 1744 (1998).
- [8] Una abundante colección de trabajos sobre estados comprimidos puede ser encontrada en: *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, (10)(1987).
- [9] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* **23**, 921 (1981).
- [10] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).  
J. R. Klauder, *J. Math. Phys.* **4**, 1055, (1963).  
J. R. Klauder, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 897 (1986).  
J. R. Klauder, and E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics* (Benjamin, New York, 1968).
- [11] Y. S. Kim, and M. E. Noz, *Phase Space Picture of Quantum Mechanics. Group Theoretical Approach*, Lecture Notes in Physics Series–Vol.40. (Singapore, World

- Scientific, 1991).
- D. Han D, Y. S. Kim, and M. E. Noz, *Phys. Rev. A* **37**, 807 (1988).
- D. Han D, Y. S. Kim, and M. E. Noz, *Phys. Rev. A* **40**, 902 (1988).
- Y. S. Kim, and E. P. Wigner, *Am. J. Phys.* **58**(5), 439 (1990).
- [12] D. F. Mundarain, and J. Stephany, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37** 3869 (2004).
- [13] W. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, (Berlin, Wiley-VCH, 2001)p 324-327.
- [14] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [15] J. J. Woldraz, *J. Chem. Phys.* **100**, 7476 (1994).
- [16] A. Zúñiga-Segundo, *Rev. Mex. Fis.* **49**, 401 (2003).
- [17] Célia M.A. Dantas, G. Norton de Almeida, and B. Baseia, *Braz. J. of Phys.* **28**, 462 (1998).
- [18] D. F. Mundarain, and J. Stephany, *Phys. Lett. A*, **316** 357 (2003).
- [19] F. A. M. De Oliveira, M. S. Kim and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **41**(1990)2645.
- [20] M. M. Nieto, *Phys. Lett. A*, **229** 135 (1997).
- [21] B. Mielnik and J. Plebanski, *Ann. Inst. H. Poincare.* **12**(1970)215 ; D. R. Truax, *Phys. Rev. D*, **31**(1985)1988.
- [22] P. Král, *J. Mod. Opt.* **37**(1990)889.
- [23] M. Orszag, *Quantum optics*, (Berlin, Springer-Verlag, 2000) p 31.
- [24] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, (New York, Academic Press, 1980)p 838, 1033.
- [25] H. P. Yuen, *Phys. Rev. A* **13**, 2226 (1976).