INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL ANÁLISIS MICROECONÓMICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA
JOSÉ MANUEL MÁRQUEZ ESTRADA

TUTOR: LIC. SALVADOR QUINTÍN FLORES GARCÍA

AÑO: 2007

Fundamentos Matemáticos del Análisis Microeconómico

José Manuel Márquez Estrada

15 de agosto de 2007

Índice general

Introducción

A partir de los trabajos de Debreu en la década de los años 50, y de Arrow en los la década de los años 70, el estudio de la economía ha dado un cambio radical en su curso, ya que pasó de ser un estudio cualitativo del comportamiento de los agentes de la economía a ser una disciplina que utiliza a las matemáticas como lenguaje y motor en la obtención de sus resultados, midiendo, comparando, creando y probando nuevas hipótesis y teorías.

Hoy en día, los estudios más notables en economía utilizan fuertemente al análisis matemático, el análisis convexo, las ecuaciones diferenciales, la topología, la probabilidad y estadística, la teoría del control, la optimización dinámica, la teoría de juegos, entre otras disciplinas matemáticas, para poder modelar, comparar, cuantificar, explicar y predecir el comportamiento cotidiano de la economía, lo cual se hace evidente al leer cualquiera de las más prestigiadas revistas, documentos de trabajo y libros en esta rama.

También hacemos notar que, en particular, el estudio de la microeconomía se ha hecho esencial para poder incursionar en cualquier otro ámbito de la economía, ya que la mayoría de las demás disciplinas económicas estan microfundamentadas debido a que su sólida fundamentación axiomática y su desarrollo matemático nos dan certeza en los resultados que se obtienen, además de que el estudio individual y a escala de los agentes que conforman una economía se hace fundamental para poder explicar el comportamiento global de la economía y el de cualesquiera de sus sectores.

En este sentido, el presente trabajo pretende ser una conexión más directa entre el estudio en abstracto de algunas de las disciplinas matemáticas y la microeconomía, construyendo un modelo microeconómico que nos describa, lógica y congruentemente con la realidad, el comportamiento de los diferentes agentes que participan tomando acciones en nuestra economía, a través de una axiomatización racional de nuestra teoría, y contando con las diferentes ramas de las matemáticas para obtener resultados verdaderos y robustos bajo éste esquema.

La necesidad de proporcionar un análisis de este tipo en la economía se hace evidente al hacer una revisión bibliográfica sobre este tema, ya que notamos que la gran mayoría de los libros de economía no toman en cuenta la fundamentación de los resultados matemáticos que utilizan, restringiéndose solamente a un análisis técnico y operacional, y dando lugar a una carencia de fundamentos para enfrentar problemas que surgen bajo nuevas condiciones de la economía. También ocurre que en muchas ocasiones limitan el alcance de los resultados de la teoría económica al pedir que se cumplan condiciones innecesarias para la obtención de resultados.

En éste trabajo vamos a analizar desde un enfoque matemático las bases axiomáticas y analíticas de la teoría microeconómica moderna, así como hacer una descripción formal de los conceptos básicos y demostrar los resultados más importantes de las teorías del consumidor, del productor y del equilibrio general. De esta manera, adicionalmente, proporcionaremos una herramienta para que las personas con formación matemática o afín a ésta, puedan comprender los resultados básicos de la teoría microeconómica de forma precisa y correcta.

Estos objetivos se se podrán alcanzar a partir de definir, usando la herramienta matemática, los diferentes conceptos económicos que empleamos en la microeconomía, así como demostrando la mayoría de los resultados matemáticos que nos permiten demostrar a su vez, los resultados económicos a los que llegamos con éste análisis. Con éste proposito, hemos dividido éste trabajo en dos partes. La primera nos proporciona los fundamentos matemáticos que aplicaremos a la teoría económica que daremos en la segunda parte.

En el primer capítulo desarrollaremos la parte matemática del trabajo. Comenzaremos con una introducción a la teoría de conjuntos, dando algunas definiciones y propiedades de cardinalidad y topológicas, convenientes para nuestros propósitos, para las cuales nos basamos en la noción de conjunto cerrado. Definiremos los conceptos de función, relación y correspondencia, y analizaremos algunas de sus propiedades (delimitadas por los conceptos de la teoría de conjuntos anterior), lo cual nos permitirá modelar de forma adecuada el comportamiento del consumidor y del productor en nuestro modelo básico de Mecanismo Competitivo.

Siguiendo con el análisis de conjuntos convexos y su relación con los conceptos de función y correspondencia, definiremos los conceptos de cono y de cono asintótico de un conjunto, así como su cerradura convexa, prestando mucha atención a los resultados que necesitamos para nuestro análisis, con lo cual pretendemos demostrar varias de las propiedades importantes en el estudio de las funciones, principalmente de las de utilidad.

Por último, y sin restarle importancia por sus múltiples aplicaciones a la teoría económica, daremos la definición de hiperplano y de punto fijo. La primera relacionada con la separación de espacios, y la segunda con soluciones de sistemas de desigualdades o ecuaciones, con las cuales trabajaremos para garantizar la existencia de soluciones en nuestro modelo económico, permitiéndonos así definir y demostrar los resultados principales de la teoría de equilibrio general, basándonos también en la introducción a la teoría de juegos que damos al final de ésta parte del trabajo.

En el segundo capítulo abordaremos la parte económica de nuestro trabajo, para la cual hicimos la construcción matemática en el primer capítulo. En primer lugar daremos el marco de estudio de nuestro análisis económico describiendo el modelo general en el cual nos basaremos y dando los supuestos de partida de nuestro estudio. Después estudiaremos la teoría del consumidor, la cual se basa en los conceptos de relación y de conjuntos, así como en las propiedades que probamos de ellos.

El objetivo en ésta parte es dar las condiciones necesarias para garantizar la existencia de una función de utilidad y la satisfacción, de manera óptima, de las preferencias de los individuos a través de resolver el problema de maximización de las preferencias sujeto a las restricciones económicas de éste. Una vez cumplidos estos objetivos, pasaremos al estudio de la teoría del productor la cual es semejante a la del consumidor sólo que se basa en el criterio de los beneficios de determinados planes de producción, para lo cual requiere de otros supuestos sobre los conjuntos de posibilidades de producción. Aquí plantearemos el problema de maximización de beneficios del productor.

Por último, combinaremos estos análisis para encontrar el equilibrio de nuestro modelo general, con lo cual introduciremos el mecanismo de mercados, a través de los cuales nuestra economía funciona y que nos servirá para garantizar la existencia de un equilibrio de mercado competitivo, el cual denominaremos Equilibrio Walrasiano. De ésta manera pretendemos dar una visión general en el estudio de la microeconomía moderna, estudiando, a través de la herramienta matemática que desarrollamos en este trabajo, los diferentes componentes de una economía e interpretando los resultados a los que llegamos a través de nuestro análisis.

Pasamos del análisis de agentes de un sólo tipo (consumidor o productor), al de varios de estos agentes interactuando entre sí y con el otro tipo de agente (el mercado), para encontrar el equilibrio de competitivo en una economía, el cual podemos garantizar que existe bajo ciertas condiciones, las cuales se asume que se cumplen en condiciones normales, y el cual es deseable alcanzar dado que ahí, los distintos agentes de la economía maximizan su criterio de elección entre distintas opciones.

Capítulo 1

Principios Matemáticos

1.1. Introducción

La economía moderna no se entendería ni podríamos obtener tantos y tan certeros resultados sin las herramientas matemáticas usadas para sustentar la bases de los estudios económicos hoy en día. Fue con los trabajos de Gerard Debreu (1959) y Arrow y Hahn (1971) que se cristalizó el modelo básico de equilibrio general competitivo. En ésta parte de nuestro trabajo se darán las definiciones y resultados básicos necesarios para el correcto entendimiento de los conceptos y resultados económicos que se expondrán en la segunda parte. Estas definiciones tienen que ver con diversos temas de la matemática como la teoría de conjuntos, de funciones y relaciones, con el análisis matemático y propiedades topológicas de algunos espacios y conjuntos, así como los conceptos de conos, conjuntos convexos e hiperplanos.

Se comenzara con algunas definiciones y resultados básicos de conjuntos y su cardinalidad, dando en éste punto la definición de partición y de función, las cuales resultan indispensables para el entendimiento del problema del productor y del consumidor. Se seguirá con la definición de relación y sus propiedades, sobre las cuales se basa la teoría del consumidor y nos dan la noción de maximización sobre conjuntos. Un poco más adelante se introducirá la noción de norma, y con ella, varios conceptos topológicos de los conjuntos en $\mathbb{R}^n$, como la de conjunto cerrado y conjunto compacto, se analizarán las propiedades de la suma y el producto de conjuntos así como de funciones definidas sobre estos. En éste punto se dará el Teorema de Weierstrass que asegura la existencia de alguna solución al problema de maximización de la utilidad o del beneficio, que es un caso particular, pero muy importante de nuestro problema del consumidor y del productor.

Pasando éste punto el trabajo se enfoca al estudio de las propiedades de las correspondencias y su relación con los conceptos anteriores, dando paso al estudio de conos y de hiperplanos, que resulta fundamental para la comprensión de los resultados económicos y el planteamiento del modelo de equilibrio general. Al final se hará referencia al Teorema de punto fijo de Brouwer y de Kakutani, así como una introducción a la teoría de juegos. El primero asegura la existencia de un equilibrio competitivo para nuestra economía de intercambio puro y el segundo el de nuestra economía con producción descrito a través de la teoría de juegos, pero de los cuales omitiremos sus demostraciones, pues para ello se requieren herramientas matemáticas más sofisticadas que nos desviarían de nuestro propósito en éste trabajo.

1.2. Conjuntos

Damos por conocidos los conceptos y operaciones básicas de conjunto, subconjunto, unión e intersección de conjuntos. Dados A y B subconjuntos de E, definimos la **diferencia** de estos como $A \backslash B = \{ x \mid x \in A,\ x \notin B\}$ y el complemento de A como $A^c = E \backslash A$ respectivamente.

Recordamos que el **conjunto potencia** de un conjunto A es la familia de todos los subconjuntos de A, y lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$. Un conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de E se llamará **familia de conjuntos**.

Los conceptos de unión e intersección de conjuntos se generalizan para el caso de familias de conjuntos de la siguiente manera:

Dada un conjunto de índices I tenemos que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \textit{ para algún } i \in I\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \textit{ para todo } i \in I\}$$

Teorema 1.2.1 (Leyes de D'Morgan) *Sean A y B subconjuntos de E, entonces*

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demostración.

1. Sea $a \in (A \cap B)^c$ entonces $a \notin (A \cap B) \Leftrightarrow a \notin A$ o $a \notin B$, i.e., $a \in A^c \cup B^c$, luego $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. Sea ahora $b \in (A \cup B)^c$ entonces $a \notin A \cup B$, *i.e.*, $a \notin A$ y $a \notin B \Leftrightarrow a \in A^c$ y $a \in B^c \Leftrightarrow a \in A^c \cap B^c$, luego $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\square$

Nota 1.2.1 *Estos resultados se extienden por inducción para un número finito de conjuntos, es decir, se tiene que si $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$ entonces*

1. $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c$

2. $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$

Además, se extiende éste resultado de manera natural a familias numerables de conjuntos.

Definición 1.2.1 *Sea I un conjunto de índices, entonces:*

- *Una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de E, forman una **partición de E** si cumplen ser disjuntos a pares (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\ i \neq j$) y además $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.*

- *Considere n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ entonces el conjunto de n**-uplas ordenadas** $(a_1, \ldots, a_n)$, denotada por (a_i), donde $a_i \in A_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$, es el **producto cartesiano** de los conjuntos $A_1, \ldots, An$ denotado por*

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

*El elemento a_i se conoce como la i-ésima **coordenada o componente** de la n-upla.*

1.3. Funciones y Correspondencias

Definición 1.3.1 *Sean X, Y dos conjuntos cualesquiera*

- *Una **función** de X a Y (denotada por $f : X \to Y$) es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ tal que si $(x, y), (x, z) \in f$ entonces $y = z$, y además $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.*
- *En éste caso y se llamará el **valor de** f **en** x y se denotará por $y = f(x)$*

Note que si $X = \emptyset$, entonces $X \times Y = \emptyset$, el cual satisface por vacuidad la definición de función. El caso en que $Y = \emptyset$ no satisface la segunda parte de la definición de función.

Nota 1.3.1 *La definición anterior es usada para definir la **gráfica** de una función pero en nuestro caso nos ayudará a simplificar nuestro trabajo y a entender el significado económico y su relación con las preferencias definidas en el Capítulo 2, ya que ésta definición está íntimamente ligada con el sentido intuitivo de estos conceptos. Lo mismo pasa con la definición de correspondencia dada más adelante.*

Dada $f : X \to Y$, ésta induce dos funciones, una de ellas denotada por $\hat{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ y definida como sigue. Si $A \subseteq X$ entonces $\hat{f}$ en A es:

$$\hat{f}(A) = \{\ y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$$

Al conjunto $\hat{f}(A)$ se le llama la **imagen directa** de A bajo f. Cuando $\hat{f}(A) = \{y\}$ con $y \in Y$, la función f se dirá que es **constante** en A.

La otra función inducida por f se denota por $\hat{f}^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ y se define de la siguiente manera. Si $B \subseteq Y$ entonces $\hat{f}^{-1}$ en B es:

$$\hat{f}^{-1}(B) = \{\ x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Al conjunto $\hat{f}^{-1}(B)$ se le llama la **imagen inversa** de B bajo f.

Nota 1.3.2 *En el caso en que $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ ésta se llamará **correspondencia** de X en Y y difiere de la definición de función por la segunda propiedad de las funciones.*

Lema 1.3.1 *Sea como antes $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos, entonces*

1. $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$
2. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} A_i)$

Demostración.

1. $\displaystyle B \in (\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)) \ \Leftrightarrow\ B \in \mathcal{P}(A_i), \forall i \in I \ \Leftrightarrow\ B \subseteq A_i, \forall i \in I$

$$\Leftrightarrow\ B \subseteq (\bigcap_{i \in I} A_i) \ \Leftrightarrow\ B \in \mathcal{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

2. $B \in (\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)) \;\Rightarrow\; B \in \mathcal{P}(A_{i_0}),\; para\ algún\ i_0 \in I \;\Rightarrow\; B \subseteq A_{i_0}$

$$\Rightarrow\; B \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i) \;\Rightarrow\; B \in \mathcal{P}(\bigcup_{i\in I} A_i)$$

Luego, tenemos que: $\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup_{i\in I} A_i)$ □

Nota 1.3.3 *El siguiente ejemplo muestra que en el inciso **(2)** del lema anterior, la igualdad no se da necesariamente:*

Sean $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2\}$.

Así tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}, \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B\}$ pero

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, A, B\} \subset \mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, A, B, A \cup B\}$$

El siguiente teorema es resultado del lema anterior y nos ayudará a definir varios conceptos para las funciones de utilidad en el Capítulo 2.

Teorema 1.3.1 *Sean X, Y conjuntos, $f : X \to Y$, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X y $\{B_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de Y. Entonces:*

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

3. $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

4. $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

Demostración.

1. $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A_i$ tal que $f(x) = y$ para algún $i \in I \;\Leftrightarrow\; y \in f(A_i)$ para algún $i \in I \;\Leftrightarrow\; y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

2. $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \;\Rightarrow\; \exists x \in A_i$ tal que $f(x) = y,\ \forall i \in I$

   $\Rightarrow\; y \in f(A_i),\ \forall i \in I \;\Rightarrow\; y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

3. $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \;\Leftrightarrow\; \exists y \in B_j$ tal que $f(x) = y$ para algún $j \in J$

   $\Leftrightarrow\; x \in f^{-1}(B_j)$ para algún $j \in J \;\Leftrightarrow\; x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

4. $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \;\Leftrightarrow\; \exists y \in B_j$ tal que $f(x) = y,\ \forall j \in J \;\Leftrightarrow$

   $x \in f^{-1}(B_j),\ \forall j \in J \;\Leftrightarrow\; x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ □

Definición 1.3.2 *Sea $f : X \to Y$ una función*

- *f se llama **inyectiva** si $(x, y) \in f$ y $(w, y) \in f$ implican que $x = w$ (i.e. $x \neq w \Rightarrow f(x) \neq f(w)$).*

  Equivalentemente f es inyectiva $\Leftrightarrow$ para todo $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}(y)$ tiene a lo más un elemento.

- *f se llama **suprayectiva** si $\forall y \in Y,\ \exists x \in X$ tal que $(x, y) \in f$ (es decir $f(X) = Y$).*

- *Una función que cumple ser inyectiva y suprayectiva se dice ser **biyectiva**.*

- *Sea $g : Y \to Z$ otra función, si se cumple que $f(X) = Y$,definimos la **composición** de f con g, denotada por $g \circ f$, como un subconjunto de $X \times Z$ tal que $(x, z) \in g \circ f \;\Leftrightarrow\; \exists y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$ y $(y, z) \in g$*

Nota 1.3.4 *De la definición de composición de funciones y de biyectividad se tiene que si podemos componer dos funciones biyectivas, f y g, entonces la función resultante $g \circ f$ también es biyectiva.*

La suprayectividad es clara y la inyectividad resulta de que, dado $z \in (g \circ f)(X)$, como g es inyectiva, existe un único $y \in Y$ tal que $y = g^{-1}(z)$ y por lo tanto $f^{-1}(g^{-1}(z))$ tienen un sólo elemento.

Lema 1.3.2 *Si $f : X \to f(X) \subseteq Y$ es una función inyectiva en X, entonces existe una única función llamada la **inversa de f** denotada por*

$$f^{-1} : f(X) \to X$$

y dada por:

$$f^{-1}(y) = x \quad si \quad f(x) = y$$

Demostración. Primero observemos que f^{-1} es función pues dado $y \in f(X)$, si ocurre que $f^{-1}(y) = x_1$ y $f^{-1}(y) = x_2$, entonces $f(x_1) = y$ y $f(x_2) = y$ lo que implica que $x_1 = x_2$ pues f es inyectiva.

Además, dado $x \in X$ existe un único $y \in f(X)$ tal que $f(x) = y$ y $f^{-1}(y) = x$ no puede tomar otro valor (i.e. f^{-1} es única). $\square$

Nota 1.3.5 *Claramente, si $f : X \to Y$ es una función biyectiva entonces existe f^{-1}, la cual también es biyectiva y cumplen que:*

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in X$$

y también

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall y \in Y$$

.

Definición 1.3.3

- *Sea $f : X \to Y$ una función y sea W un conjunto que contiene a X, entonces una función $g : W \to Y$ se dice ser una* ***extensión de*** *f a W si se cumple que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ (alternativamente se dice que f es la* ***restricción*** *de g a X).*

- *Considere la familia de conjuntos $\{S_i\}_{i\in I}$ y su producto $\prod_{i\in I} S_i$. La función f_j que asocia a cada n-upla (s_i) su j-ésima coordenada s_j se llama la* ***j-ésima proyección*** *o la* ***proyección en*** *S_j.*

  La imagen de un elemento o conjunto bajo una función de éste tipo se llama la ***proyección*** *de tal elemento o conjunto.*

Nota 1.3.6 *Una operación binaria como la suma o la multiplicación usuales en los números reales o complejos no es más que una función definida por $f : X \times X \to X$ y que cumplen ciertas propiedades operacionales.*

1.4. Cardinalidad y Equipotencia

Definición 1.4.1 *Sean X, Y dos conjuntos no vacíos, decimos que X es* ***equipotente*** *a Y, y lo denotamos por $X \sim_{eq} Y$, si existe una biyección de X sobre Y.*

Nota 1.4.1 *Por las notas 1.3.4 y 1.3.5 vemos que se cumple lo siguiente:*

- $X \sim_{eq} Y \Rightarrow Y \sim_{eq} X$
- $X \sim_{eq} Y \sim_{eq} Z$ *entonces* $X \sim_{eq} Z$

Definición 1.4.2 *Sea X un conjunto cualquiera*

- *Sean $a, b \in \mathbb{N}$, denotamos al conjunto de números naturales entre a y b como*

  $$]a, b[= \{n \in \mathbb{N} \mid a \leq n \leq b\}$$

  Entonces decimos que el conjunto X es ***finito*** *si $X = \emptyset$ o si es equipotente al conjunto $]1, n[$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Dicho n es único y se llamará el* ***número cardinal*** *de X (denotado por $Car(X) = n$).*

  El hecho de que éste n sea único se prueba de la transitividad de la equipotencia.

- *Si el conjunto X es equipotente a $\mathbb{N}$, se llamara* ***conjunto numerable****, y se dice que es* ***a lo sumo numerable*** *si es finito o numerable.*

Lema 1.4.1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$*

- *Si $B \subseteq A$ es un conjunto infinito y A es numerable, entonces B es numerable.*
- *Si existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ suprayectiva, entonces A es a lo sumo numerable.*

Demostración.

- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de A, dado que $B \subseteq A$ es no vacío podemos tomar al natural n_1 más pequeño tal que $a_{n_1} \in B$. Así, formamos el conjunto $B_1 = B \setminus \{a_{n_1}\}$ y entonces, como B_1 es no vacío (pues B es infinito) podemos tomar el mínimo natural n_2 tal que $a_{n_2} \in B_1$. Ahora formamos el conjunto $B_2 = B_1 \setminus \{a_{n_2}\}$ y como B_2 es no vacío podemos tomar al mínimo natural n_3 tal que $a_{n_3} \in B_2$. Podemos ahora definir el conjunto $B_3 = B_2 \setminus \{a_{n_3}\}$ y continuar haciendo lo mismo.

  El proceso anterior describe una función biyectiva entre B y $\mathbb{N}$ dada por la sucesión $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, ya que cumple ser:

  - Suprayectiva, ya que dado $b \in B$, como $B \subseteq A$, éste cumple ser de la forma a_{n_0} para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y por construcción $a_{n_0} = a_{n_k}$ para algún $k \leq n_0$.
  - Inyectiva, pues dados $b_1, b_2 \in B$ $(b_1 \neq b_2)$, existen $a_n, a_m \in A$ tales que $a_n = b_1$ y $a_m = b_2$ y como $b_1 \neq b_2$ entonces $a_n \neq a_m$, luego $n \neq m$.

- Se sigue de la definición de función. Si A es finito acabamos, si no basta con quitar todos los $z \in \mathbb{N}$ tales que $f(z) = f(n)$ y con $z > n$, para formar una biyección. $\square$

Teorema 1.4.1 *El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es también numerable.*

Demostración. Por la Nota 1.4.1 vemos que basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. En efecto, probemos que la función $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$\phi(n, m) = 2^{n-1}(2m - 1)$$

es una función inyectiva de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ (en donde $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$).

Sean a, b dos naturales de la forma $a = 2^{n-1}(2m-1)$, $b = 2^{p-1}(2q-1)$ con $a = b$, entonces se tiene que $2m - 1 = 2^{p-n}(2q - 1)$. Como $(2m - 1)$ es impar se debe cumplir que $p - n = 0$ (pues en caso contrario $2^{p-n}(2q-1)$ es un natural par o un racional). Así, $2m - 1 = 2q - 1$ y luego $m = q$, por lo que tenemos que $(m, n) = (p, q)$.

De ésta forma $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim_{eq} f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ y como es un conjunto infinito llegamos a lo que queremos por el Lema 1.4.1.$\square$

Corolario 1.4.1 *El producto cartesiano de un número finito de conjuntos numerables es numerable, en particular*

$$\mathbb{N}^k = \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{k-veces} \sim_{eq} \mathbb{N}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre k. $\square$

Corolario 1.4.2 *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos a lo sumo numerables, entonces la unión de estos conjuntos es también a lo sumo numerable.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que A_n es numerable, para todo natural $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una biyección $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definimos la aplicación $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ dada por:

$$\phi(n, m) = f_n(m)$$

Sea $b \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \in A_{n_0}$, luego como f_{n_0} es suprayectiva, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b = f_{n_0}(m_0) = \phi(n_0, m_0)$.

Así la función ϕ es suprayectiva, por lo que el conjunto $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es a lo sumo numerable.$\square$

Teorema 1.4.2 $\mathbb{Z}$ *es numerable.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ una función definida por $f(n, m) = n - m$.

Claramente la función f es suprayectiva, luego $\mathbb{Z}$ es a lo sumo numerable. Pero $\mathbb{Z}$ no es finito, luego es numerable. $\square$

Teorema 1.4.3 $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

Demostración. $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}$, luego numerable.

Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ una función definida por $f(p, q) = \frac{p}{q}$.

Claramente la función f es suprayectiva, luego $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable y como $\mathbb{Q}$ no es finito, entonces es numerable. $\square$

1.5. Relaciones Binarias y Preórdenes

Definición 1.5.1 *Una* ***relación binaria*** $\mathcal{R}$ *en un conjunto arbitrario* X *es cualquier subconjunto de* $X \times X$*. Si* $(a, b) \in \mathcal{R}$ *escribiremos* $a\mathcal{R}b$*.*

En economía, en la teoría de la elección, estamos interesados en la relación binaria "**es al menos tan preferida a**" para comparar entre dos posibles alternativas de consumo que tenga el elector. Ésta relación será denotada por el símbolo " $\succeq$ " y la expresión "$x \succeq y$" se leerá como:

"x es al menos tan preferida a y".

Definición 1.5.2 *Sea* $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida en un conjunto* X*, entonces:*

- $\mathcal{R}$ *es* ***reflexiva*** *si* $a\mathcal{R}a$ *para todo* $a \in X$
- $\mathcal{R}$ *es* ***irreflexiva*** *si para todo* $a \in X$*,* $(a, a) \notin \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$ *es* ***simétrica*** *si* $a\mathcal{R}b$ *implica* $b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ *es* ***antisimétrica*** *si* $a\mathcal{R}b$ *y* $b\mathcal{R}a$ *implican que* $a = b$
- $\mathcal{R}$ *es* ***transitiva*** *si* $a\mathcal{R}b$ *y* $b\mathcal{R}c$ *implican* $a\mathcal{R}c$
- *Una relación binaria* $\mathcal{R}$ *se dice ser un* ***preorden*** *si cumple ser reflexiva y transitiva. En éste caso se dice que* X *es un* ***conjunto preordenado****.*
- *Si además de ser preorden, la relación* $\mathcal{R}$ *cumple ser antisimétrica, entonces ésta se llamará* ***orden****. En éste caso se dirá que el conjunto* X *es un* ***conjunto ordenado****.*

Nota 1.5.1 *De aquí en adelante usaremos el símbolo " $\succeq$ " en lugar de* $\mathcal{R}$ *para designar algún preorden en nuestro conjunto* X*.*

Ejemplo 1.5.1 *Los siguientes ejemplos tienen que ver con las definiciones anteriores y nos ayudarán a comprender mejor el espíritu de estas.*

- *La relación en economía que definimos arriba claramente cumple ser simétrica pues cualquier opción de consumo es tan buena como ella misma. Pero vemos que no tiene por qué cumplir las demás definiciones. Como es reflexiva no puede ser antirreflexiva.*
- *Vemos que si* $a = \$100$ *y* $b = \$10$ *entonces* $a \succeq b$ *pero NO ocurre que* $b \succeq a$*, luego la relación no es simétrica.*
- *Piense en el caso en que una persona tiene las opciones de viajar en microbús o en el metro de un punto a otro en la ciudad, muchas veces ocurre que al pasajero le da lo mismo tomar alguno de los dos medios (en ciertas circunstancias), pero estas opciones son diferentes entre sí, por lo que la relación de "qué medio de transporte prefiere" no es antisimétrica.*
- *Suponga que a una persona que le dan a escoger entre una manzana y una naranja, escoge la naranja, y luego entre una naranja y una pera escoge la pera. Puede ocurrir que al escoger entre la manzana y la pera escoja la manzana dado que los gustos de las personas en algunos casos no tienen por qué cumplir transitividad.*

- *Pensemos ahora en una persona que quiere invertir cierta cantidad de dinero en algún proyecto (suponga que los proyectos tardan lo mismo en realizarse) y que si él no distingue entre dos proyectos que le dan los mismos rendimientos, le da lo mismo elegir alguno de ellos. En éste contexto la relación de preferencia por un proyecto de ésta persona cumple ser un orden.*

Definición 1.5.3 *Dos elementos x, y de un conjunto preordenado (con preorden $\succeq$) pueden no cumplir $a \succeq b$ ni $b \succeq a$. En éste caso se dice que estos elementos son **no comparables**.*

*En el caso en que necesariamente se cumpla alguna de las relaciones anteriores se dice que el preorden (respectivamente el orden) es **completo**. Si esto no se cumple, el preorden (respectivamente el orden) se dice que es **parcial**.*

Notación

- Sea $\succeq$ un preorden, entonces $a \succeq b$ y $b \succeq a$ se escribe como $a \sim b$, y si tenemos que $a \succeq b$ pero no ocurre que $b \succeq a$ entonces escribimos $a \succ b$.
- Note que, bajo completitud, la expresión $b \succeq a$ es la negación de $a \succ b$.
- la expresión $y \preceq x$ es lo mismo que $x \succeq y$.

Uno de los pilares dentro de la teoría del consumidor es el supuesto de que el consumidor siempre puede elegir entre dos opciones de consumo o más.

Pero esto puede no pasar, por ejemplo si el consumidor no conoce todas las componentes de una opción. Imagine el caso en que a un recién llegado al país le dan a elegir de entre "arroz y guanzontles" o "sopa de pasta y un bistec", entonces normalmente ésta persona no podrá comparar estas dos opciones pues no conoce los guanzontles.

Definición 1.5.4 *Sea X un conjunto parcialmente ordenado.*

1. *Cuando $y \in X$ y no existe un elemento $x \in X$ tal que $x \succ y$ (respectivamente $y \succ x$), entonces y se llama **elemento maximal** (respectivamente **elemento minimal**) del conjunto X.*
2. *Cuando $y \in X$ y cumple con la propiedad de que $y \succeq x$ (respectivamente $x \succeq y$) para todo $x \in X$, se dice que y es un elemento **más grande** (respectivamente **más chico**) del conjunto X.*

Teorema 1.5.1 *Sea X un conjunto preordenado.*

- *Un elemento más grande (respectivamente más chico) del conjunto X es un elemento maximal (respectivamente minimal). Cuando el preorden es completo, el inverso de la afirmación anterior es cierto.*
- *Cuando el preorden en X cumple ser un orden, entonces existe a lo más un elemento más grande y un elemento más chico.*

Demostración.

- Sea y un elemento más grande de X, entonces $y \succeq x$ por lo que $x \not\succ y, \forall x \in X$ (vea **notación**). Así, $\nexists x \in X$ tal que $x \succ y$, i.e., y es un elemento maximal.

  Cuando el preorden es completo, sea y un elemento maximal de X, entonces dado $x \in X$ por definición $x \not\succ y$ y por completitud es equivalente a decir que $y \succeq x$ (vea notación). Como lo anterior es valido para cualquier $x \in X$, entonces $y \succeq x,\ \forall x \in X$.

- Si el preorden $\succeq$ es un orden, dados $y_1, y_2 \in X$ dos elementos más grandes de X, ocurre que $y_1 \succeq y_2$ pues $y_2 \in X$ y $y_2 \succeq y_1$ dado que $y_1 \in X$, y como $\succeq$ es antisimétrica por la definición de orden, entonces $y_1 = y_2$.

Las pruebas para elemento más chico y elemento minimal son similares. $\square$

Definición 1.5.5 *Sea X un conjunto preordenado y considere un subconjunto $W \subseteq X$.*

- *Un elemento $x \in X$ tal que $\forall w \in W$ se tiene que $x \succ w$ (respectivamente $w \succ x$) se llama **cota superior** (respectivamente **cota inferior**) del conjunto W.*

- *Suponga que W poseé al menos una cota superior, luego considere el conjunto Y de sus cotas superiores. Note que si $y \in Y$ y $y' \succeq y$, entonces $y' \in Y$. Un elemento mínimo de Y es una **mínima cota superior**.*

- *Suponga ahora que W tiene al menos una cota inferior, luego considere el conjunto Z de sus cotas inferiores. Note ahora que si $z \in Z$ y $z \succeq z'$, entonces $z' \in Z$. Un elemento máximo de Z se conoce como una **máxima cota inferior**.*

Nota 1.5.2 *Si X es un subconjunto de los números reales, entonces:*

- *Un elemento más grande (respectivamente más chico) de X, si existe, por el Teorema 1.5.1 es único y es llamado el **máximo** (respectivamente **mínimo**) del conjunto X y denotado por $\max X$ (respectivamente $\min X$).*

- *Ahora por el Teorema 1.5.1 y la Nota 1.5.3, una mínima cota superior (respectivamente máxima cota inferior) si existe es única y se llama el **supremo** (respectivamente **ínfimo**) del conjunto X y lo denotaremos por $\sup X$ (respectivamente $\inf X$).*

Definición 1.5.6 *Sea X un conjunto preordenado, $I \subseteq X$ se llama **intervalo** si $a, b \in I$ y además $a \preceq z \preceq b$ (vea Notación) implica que $z \in I$.*

Sean $a, b \in X$ tales que $b \succeq a$, entonces casos particulares de intervalos son los siguientes:

- $[a, b] = \{x \in X \mid a \preceq x \preceq b\}$

- $[a, b) = \{x \in X \mid a \preceq x \prec b\}$

- $(a, b] = \{x \in X \mid a \prec x \preceq b\}$

- $(a, b) = \{x \in X \mid a \prec x \prec b\}$

- $[a, \rightarrow) = \{x \in X \mid a \preceq x\}$

- $(\leftarrow, b] = \{x \in X \mid x \preceq b\}$

Definición 1.5.7 *Denote por* $S_1, S_2, \ldots, S_m$ *a* m *conjuntos preordenados con preordenes* $\succeq_i$ *en* S_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$.

- *Un preorden* $\succeq$ *es definido en el producto* $\prod_{i=1}^m S_i$ *dado por:*

$$(x_i) \succeq (y_i) \ \text{ si } x_i \succeq y_i, \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

- $(x_i) \succ (y_i)$ *significa que* $x_i \succeq y_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, *y que existe al menos un* i_0 *tal que* $x_{i_0} \succ y_{i_0}$
- *La notación* $(x_i) \gg (y_i)$ *significa que* $x_i \succ y_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots, m$

En economía se hace el supuesto de que los agentes siempre preferirán tener más "bienes deseados" que menos "bienes deseados", es decir, si tiene la posibilidad de elegir entre una canasta con cierta cantidad de bienes deseados y otra que contiene un poco más de cada uno de los bienes, entonces elegirá la segunda opción.

Esto tiene que ver con la monotonicidad de las preferencias del agente, conceptos que se definirán claramente en el siguiente capítulo.

Nota 1.5.3 *Note que el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la relación* $\geq$, *es un conjunto totalmente ordenado (todas las propiedades las cumple por construcción).*

Definición 1.5.8 *Sean* X, Y *dos conjuntos preordenados (con preordenes* $\succeq_X$ *y* $\succeq_Y$ *respectivamente). Una función* $f : X \to Y$ *se dice ser* ***creciente*** *(o una* ***representación*** *de* X *en* Y*) si* $x \sim_X x'$ *implica que* $f(x) \sim_Y f(x')$ *y además* $x \succ_X x'$ *implica que* $f(x) \succ_Y f(x')$.

En éste trabajo, como ya lo dijimos en la introducción, uno de nuestros objetivos es el construir una función de utilidad que refleje las preferencias de los consumidores, i.e., una función del conjunto de posibilidades de consumo (que en la definición se puede identificar con el conjunto X) a los números reales (con el conjunto Y) tal que si una canasta de consumo es indiferente a otra, les asigne el mismo valor, y si es preferida a otra, les asigne un valor menor a ésta última. Esto es la esencia en nuestro trabajo de definir una función creciente.

1.6. Límites en $\mathbb{R}^n$

En ésta sección vamos a tomar como conocidos varios conceptos de topología en $\mathbb{R}^n$, así como el de espacio vectorial real, sucesión, sucesión convergente y límite en $\mathbb{R}^n$. Vamos a definir algunos conceptos equivalentes para la Topología en $\mathbb{R}^n$ de definiciones más generales que se hacen para otros espacios más complicados. Esto lo haremos apoyados en resultados conocidos para $\mathbb{R}^n$ (como el Teorema de Heine-Borel y demás teoremas para sucesiones) con el fin de darle un enfoque más practico a la sección, puesto que nuestro objetivo es más económico que técnico.

Definición 1.6.1 *Sea E un espacio vectorial real. Una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ se llama* ***norma sobre E*** *si satisface los siguientes axiomas:*

1. $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in E$
2. $\|\lambda x\| \geq |\lambda| \, \|x\|,$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in E$
4. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

Nota 1.6.1 *Sabemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial y además:*

- *Definimos la* ***norma Euclidiana*** *como sigue*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  Éste espacio con la norma anterior se llama ***Espacio Euclidiano n-dimensional****.*

- *La norma dada por*

$$\|x\| = \max \{|x_i| \, , \; 1 \leq i \leq n\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  se conoce como la ***norma Cúbica****.*

Definición 1.6.2 *Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces definimos la* ***distancia entre estos dos conjuntos*** *como*

$$d(S, T) = \inf \{\|s - t\| \; \text{tal que} \; s \in S, t \in T\}$$

note que éste número siempre existe por la completes de los números reales.

Aprovecharemos las equivalencias topológicas de conjuntos con sucesiones en $\mathbb{R}^n$ para hacer las siguientes definiciones.

Definición 1.6.3 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces*

- *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un* ***punto adherente*** *a X si existe una sucesión de puntos en X que converge a x. El conjunto de todos los puntos adherentes a X se llama la* ***adherencia*** *(o también* ***clausura****) de X y la denotamos por $\overline{X}$.*
- *X se dice ser* ***cerrado*** *si contiene a todos sus puntos de adherencia.*
- *$Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto* ***abierto*** *si y sólo si Y^c es cerrado.*

Nota 1.6.2 *Con la notación de la definición anterior tenemos:*

- *Cualquier punto $x \in X$ es punto de adherencia de X (i.e. $X \subseteq \overline{X}$), basta tomar la sucesión cuyos elementos son todos el mismo x.*
- *La definición de conjunto cerrado nos dice que si X es cerrado, se cumple que $\overline{X} \subseteq X$. Entonces tomando en cuenta la primera parte de ésta nota, tenemos que X es cerrado si y sólo si $X = \overline{X}$.*

Lema 1.6.1 *Sean X, Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *$X \subseteq Y$ implica $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$*
2. *La adherencia de X (i.e. $\overline{X}$) es un conjunto cerrado*

Demostración.

1. Sea $x \in X$ entonces $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $x_k \to x$, pero como $X \subseteq Y$ entonces $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq Y$, así $x \in \overline{Y}$.
2. Sea x un punto de adherencia de $\overline{X}$ (i.e., $x \in \overline{\overline{X}}$), entonces $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \overline{X}$ tal que $x_k \to x$. Pero para cada $x_k \in \overline{X}$ existe una sucesión $\{x_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $x_{k_\ell} \to x_k$.

   Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos $x_{k_{\ell(k)}} \in \{x_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ tal que

   $$\left\| x - x_{k_{\ell(k)}} \right\| < \frac{1}{k}$$

   y así, la sucesión $\left\{ x_{k_{\ell(k)}} \right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ cumple que $x_{k_{\ell(k)}} \to x$, por lo que $x \in \overline{X}$. Entonces $\overline{X}$ contiene a todos sus puntos adherentes. □

Nota 1.6.3 *Con la notación del lema anterior, note que $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$. Como cada conjunto cerrado que contiene a X contiene también a $\overline{X}$, entonces la clausura de X se puede caracterizar como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a X (i.e. el conjunto cerrado más pequeño que contiene a X).*

Definición 1.6.4 *Definimos la **bola abierta** con centro en $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $\epsilon > 0$ al conjunto*

$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \epsilon\}$$

*Si cambiamos a la condición $\|x - y\| \leq \epsilon$, se llamará **bola cerrada**.*

Lema 1.6.2 *La bola abierta $B_\epsilon(x)$ es un conjunto abierto*

Demostración. Es consecuencia de la definición de conjunto abierto y del hecho de que si se toma una sucesión convergente a $x_0 \in B_\epsilon(x)$, podemos tomar una subsucesión convergente a x_0 cuyos elementos cumplen la desigualdad $\|x - y\| < \epsilon$, por lo que $\|x - x_0\| < \epsilon$.□

Teorema 1.6.1 *Sea $\mathcal{X}$ una familia de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, entonces:*

1. *Su intersección $\bigcap_{X\in\mathcal{X}} X$ es un conjunto cerrado.*

2. *Sean $X_1, \ldots, X_m \in \mathcal{X}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$ es cerrado.*

Demostración.

1. Sea $x \in \overline{\bigcap_{X\in\mathcal{X}} X}$ entonces existe $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \bigcap_{X\in\mathcal{X}} X$ tal que $x_k \to x$.

   Pero se cumple que $\bigcap_{X\in\mathcal{X}} X \subseteq X,\ \forall X \in \mathcal{X}$, entonces $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, y como X es cerrado se tiene que $x \in X,\ \forall X \in \mathcal{X}$, luego $x \in \bigcap_{X\in\mathcal{X}} X$, y contiene a todos sus puntos adherentes.

2. Sea ahora $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{m} X_i}$, entonces $\exists\, \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ tal que $x_k \to x$. Como hay un número finito de conjuntos X_i, podemos encontrar una subsucesión $\{x_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty} \subset X_{i_0}$ tal que $x_{k_\ell} \to x$ para algún $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Así $x \in \overline{X_{i_0}} = X_{i_0}$ (pues X_{i_0} es cerrado), por lo que $x \in \bigcup_{i=1}^{m} X_i$, por lo que ésta unión contiene a todos sus puntos adherentes. □

Definición 1.6.5 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $Y \subseteq X$. Definimos la* ***adherencia de** Y **respecto al conjunto*** X *como el conjunto de puntos adherentes de Y en X (así decimos que Y es* ***cerrado respecto a*** X *si contiene todos sus puntos adherentes contenidos en X).*

Teorema 1.6.2 *Con la notación anterior, tenemos que Y es cerrado en X si y sólo si existe un conjunto Z cerrado en $\mathbb{R}^n$ tal que $Y = Z \cap X$.*

Demostración. Si $Y = Z \cap X$ con Z cerrado en $\mathbb{R}^n$, Z contiene a todos sus puntos adherentes, entonces Y contiene a todos sus puntos adherentes en X.
Ahora si Y es cerrado en X, sea $\mathcal{C}_Y$ la familia de todos los conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ que contienen a Y, entonces por el Teorema 1.6.1, $W = \bigcap_{C\in\mathcal{C}_Y} C$ es un cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Pero $Y = W \cap X$ pues $(W \cap X)$ es el cerrado en X más pequeño que contiene a Y (el cual a su vez es cerrado en X), por lo que coinciden. □

Teorema 1.6.3 *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto infinito, entonces S contiene un conjunto numerable X tal que $S \subseteq \overline{X}$. En éste caso se dice que X es* ***denso*** *es S.*

Demostración. Sabemos que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ y numerable. Sea $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración para $\mathbb{Q}^n$ y $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una numeración para $\mathbb{Q}_+$. Tomemos la familia numerable por construcción

$$\mathcal{F} = \{B_{q_k}(r_n) \mid k, n \in \mathbb{N}\}$$

luego note que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} B_{q_k}(r_n)$$

pues dado $r \in \mathbb{R}^n$, como $\mathbb{Q}^n$ es denso tomamos r_n tal que $\|r_n - r\| < 1$, luego $r \in B_1(r_n)$. Así tenemos que $S = [S \bigcap \left(\bigcup_{k,n \in \mathbb{N}} B_{q_k}(r_n) \right)]$.

Sea $B_{q_k}(r_n) \in \mathcal{F}$, entonces si $S \cap B_{q_k}(r_n) \neq \emptyset$ tomamos un punto x_k^n cualesquiera de éste último conjunto. Así definimos al conjunto

$$X = \{x_k^n \in \mathbb{R}^n \mid x_k^n \in S \cap B_{q_k}(r_n) \neq \emptyset,\ k, n \in \mathbb{N}\}$$

Afirmamos que $X \subseteq S$ es un conjunto numerable (por construcción) tal que $S \subseteq \overline{X}$.

Sea $s \in S$, entonces si $s \in X$ no hay nada que hacer. Si $s \notin X$ entonces, $\forall q_k \in \mathbb{Q}_+$ se tiene que $B_{q_k}(s) \cap X \neq \emptyset$, pues en caso contrario $\exists q_{k_0} \in \mathbb{Q}_+$ tal que $B_{q_{k_0}}(s) \cap X = \emptyset$, por lo que podríamos tomar $r_{n_0} \in \mathbb{Q}^n$ tal que $\|s - r_{n_0}\| < \frac{q_{k_0}}{3} = q_{k_1}$, luego $B_{q_{k_1}}(r_{n_0}) \subseteq B_{q_{k_0}}(s)$ es tal que $s \in B_{q_{k_1}}(r_{n_0})$ y con $s \in S \cap B_{q_{k_1}}(r_{n_0})$, por lo que $s = x_{k_1}^{n_0} \in X$ (por definición de X). Pero esto último es una contradicción a que $B_{q_{k_0}}(s) \cap X = \emptyset$.$\square$

Definición 1.6.6 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$.*

- *Un punto $x \in X$ se dice ser **punto interior** si no es adherente a la clausura del complemento de X, i.e., si $x \notin \overline{X^c}$.*

  *El **interior de** X es el conjunto de todos los puntos interiores a X y se denotará por $int\,(X)$.*

- *El **exterior de** X es el complemento de su clausura y se denotará por $ext\,(X)$.*

Nota 1.6.4 *Note que por definición se tiene que $int\,(X) \subseteq X$.*

Definición 1.6.7 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se dice ser **punto frontera** de X si es punto de adherencia tanto de X como de su complemento X^c, es decir, si $x \in \overline{X} \cap \overline{X^c}$.*

*La **frontera** de X es el conjunto de sus puntos frontera y lo denotaremos por $Fr\,(X)$.*

Nota 1.6.5 *Note que de las definiciones anteriores se tiene $\mathbb{R}^n = int\,(X) \cup ext\,(X) \cup Fr\,(X)$. De la definición de frontera del conjunto X se tiene que $\overline{X} = X \cup Fr\,(X)$.*

Definición 1.6.8 *Considere la norma Cúbica en $\mathbb{R}^n$, y sea $k \in \mathbb{R}_+$:*

- *El conjunto $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq k\}$ se conoce como **cubo cerrado** de $\mathbb{R}^n$ con centro en 0 y lado $2k$.*

- *Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice estar **acotado** si existe un cubo cerrado K de centro en 0 y lado $2k$ que lo contenga, para algún $k \in \mathbb{R}_+$.*

La siguiente definición es resultado de la equivalencia que nos da la definición general de **conjunto compacto** con respecto al espacio Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$, esto gracias al Teorema de Heine-Borel .

Definición 1.6.9 *Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama **compacto** si éste es cerrado y acotado.*

Los siguientes resultados nos ayudarán a probar diferentes propiedades de los conjuntos cerrados y los conjuntos compactos, en particular los usaremos mucho cuando trabajemos con las posibilidades de consumo y de producción en la parte económica del trabajo.

Teorema 1.6.4 *Sean $X_1, \ldots, X_m$ subconjuntos cerrados (respectivamente compactos) de los espacios $\mathbb{R}^{n_1}, \ldots, \mathbb{R}^{n_m}$ respectivamente.*

Entonces el conjunto $X_1 \times \cdots \times X_m$ es un subconjunto cerrado (respectivamente compacto) de $\mathbb{R}^{\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)}$

Demostración. Primero demostrémoslo para los conjuntos cerrados.

Sea $x \in \overline{\prod_{i=1}^{m} X_i}$ entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \prod_{i=1}^{m} X_i$ tal que cumple $x_n \to x$, es decir, $x_n^i \to x^i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, siendo x_n^i la proyección de x_n en el cerrado X_i. Entonces $x^i \in X_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, por lo que $x \in \prod_{i=1}^{m} X_i$ y éste conjunto contiene a todos sus puntos adherentes.

Para demostrar el resultado para conjuntos compactos, basta probar que el conjunto $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ es acotado. Sabemos que X_i es acotado (por ser compacto) $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, luego existen m cubos cerrados $K_1, K_2, \ldots, K_m$ en $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \ldots, \mathbb{R}^{n_m}$ respectivamente, de lados $2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_m$ y centros en los origenes de estos espacios, tales que $X_i \subset K_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Así tomamos $k =$
$max\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, y entonces $X = \prod_{i=1}^m X_i$ está contenido en el cubo cerrado en $\mathbb{R}^{\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)}$ con centro en 0 y lado $2k$. $\square$

Definición 1.6.10 *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se dice ser* ***conexo*** *si NO es la unión de dos conjuntos no vacíos, disjuntos y cerrados respecto a X, i.e., X es conexo si no puede ser partido en dos subconjuntos no vacíos, disjuntos y cerrados respecto a X.*

Lema 1.6.3 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Demostración. Considere un intervalo cualquiera de extremos a y b (con $a \leq b$) denotado por $|a, b|$, sean A, B subconjuntos cerrados y disjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $|a, b| = (A \cup B) \cap |a, b|$ con $A \cap |a, b| \neq \emptyset$ y $B \cap |a, b| \neq \emptyset$.

Entonces $A^c \cap |a, b| = B \cap |a, b|$ y $\overline{A} = int\,(A) \cup Fr\,(A) = A$, luego sea $x \in Fr\,(A)$ entonces $x \in A$ y $x \in \overline{B \cap |a, b|} = B \cap |a, b|$ (pues B es cerrado) por lo que $x \in A \cap B \cap (a, b)$, lo cual es una contradicción a que A y B sean disjuntos.

Por otro lado, sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, que pertenecen a un conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}$, luego dado $a \leq x \leq b$, si $x \notin C$ entonces

$$C = C \cap (\mathbb{R} - \{x\}) = [C \cap \{r \mid r < x\}] \cup [C \cap \{r \mid r > x\}] = A \cup B$$

Sea $c \in C$, con $c \neq x \;\Rightarrow\; |x - c| = d > 0$, como C es cerrado $\exists\,\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C$ tal que $c_k \to c$. Entonces si $c \in A$ tomamos la subsucesión de términos que cumplen $|c_{k_\ell} - c| < d$, así $\{c_{k_\ell}\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ y $c_{k_\ell} \to c \;\Rightarrow\; A$ es cerrado. Lo mismo ocurre si $c \in B$.

Así podemos escribir $C = A \cup B$ con A y B cerrados y disjuntos y tales que $a \in A \cap C \neq \emptyset$ y $b \in B \cap C \neq \emptyset$, lo que contradice que C sea conexo. Entonces debe ocurrir que $x \in C$, es decir, C es un intervalo. $\square$

1.7. Funciones Continuas

Como en la sección anterior, seguimos definiendo conceptos en base a las equivalencias en términos de sucesiones en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.7.1 *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$ respectivamente. Sea $f : X \to Y$ una función y considere un punto $x_0 \in X$.*

- *La función f es* ***continua*** *en x_0 si para toda sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X que converge a x_0, se tiene que $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset f$ converge a (x_0, y_0) con $(x_0, y_0) \in f$.*

- *La función f es continua sobre X si es continua en todo $x \in X$*

Ejemplo 1.7.1 *Considere el caso de una tienda donde venden azúcar a granel. Note que pueden vender cualquier cantidad de gramos que un cliente le pida (que es de lo más parecido al supuesto de que un bien sea infinitamente divisible, el cual se verá más adelante). Entonces la función* ***precio del azúcar*** *$p : G \to D$ (con G=gramos de azúcar, D=pesos) dada por:*

$$p(g) = \alpha g \qquad \forall g \in G \subset \mathbb{R}_+$$

es continua pues dado $g_0 \in G$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en G que converge a éste elemento, entonces las imágenes (αg_n) convergen a (αg_0) con $(g_0, \alpha g_0) \in p$.

Teorema 1.7.1 *Sean X, W, Y subconjuntos de $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Defina la función $h : X \to Y$ como la función composición de $f : X \to W$ y $g : W \to Y$ (con $f(X) = W$). Si f es continua sobre X y g es continua sobre W, entonces h es continua sobre X.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ arbitrario, sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ con $x_k \to x_0$, como f es continua sobre X, $\{(x_k, w_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset f$ con $w_k \to w_0$ y $(x_0, w_0) \in f$; ahora como g es continua sobre W, $\{(w_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset g$ con $y_k \to y_0$ y $(w_0, y_0) \in g$. Así tenemos que $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset h$ con $y_k \to y_0$ y $(x_0, y_0) \in h$ (pues $(x_0, w_0) \in f$ y $(w_0, y_0) \in g$). $\square$

Teorema 1.7.2 *Sea $X_k \subset \mathbb{R}^{n_k}$ para cada $k = 1, 2, \ldots, p$, y considere el producto $X = \prod_{k=1}^{p} X_k$. Sea también $Y \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

1. *La proyección en X_k es continua*

2. *Sea $f_k : Y \to X_k$ una función continua para toda $k = 1, 2, \ldots, p$. Entonces $f : Y \to X$ dada por $f(y) = (f_k(y))$ para todo $y \in Y$, es continua.*

Demostración.

1. Sea $x_0 \in X$, entonces $x_0 = \left(\left(x_0^1\right), \ldots, \left(x_0^p\right)\right)$ con $\left(x_0^k\right) \in X_k$, para todo $k = 1, 2, \ldots, p$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $x_n \to x_0$, entonces $x_n = \left(\left(x_n^1\right), \ldots, \left(x_n^p\right)\right)$ con $\left(x_n^k\right) \in X_k$, para todo $k = 1, 2, \ldots, p$, $n = 1, 2, \ldots$. Así $x_n \to x_0 \Leftrightarrow \left(x_n^k\right) \to \left(x_0^k\right)$, $\forall k = 1, 2, \ldots, p \Leftrightarrow$ la proyección en X_k es continua para toda $k = 1, 2, \ldots, p$.

2. Como $f_k(y)$ es continua sobre Y, dado $y_0 \in Y$ y $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset Y$ tal que $y_m \to y_0$, entonces $\left\{y_m, x_m^k\right\}_{m=0}^{\infty} \subset f_k$ con $x_m^k \to x_0^k$ y $\left(y_0, x_0^k\right) \in f_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, p$.

   Por lo que se tiene que:

$$\left\{\left(y_m, \left(x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^p\right)\right)\right\}_{m=1}^{\infty} \subset f(y)$$

   con $\left(x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^p\right) \to \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^p\right)$ y $\left(y_0, \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^p\right)\right) \in f$ (pues se tiene que f_k es continua para todo $k = 1, 2, \ldots, p$), luego f es continua sobre Y. $\square$

Teorema 1.7.3 *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ y $f : X \to Y$, entonces*

1. *f es continua si y sólo si la imagen inversa $f^{-1}(A)$ de cada conjunto cerrado $A \subset Y$ es cerrada en X*

2. *En el importante caso en que $Y = \mathbb{R}$ (que f sea real-valuada) entonces f es continua si y sólo si la imagen inversa de intervalos en $\mathbb{R}$ de la forma $(-\infty, y]$ o $[y, +\infty)$ son cerrados en X*

3. *Si f es continua y X es compacto, entonces $f(X)$ también es compacto*

4. *Si f es continua y X es conexo, entonces $f(X)$ también es conexo*

Demostración.

1. Sea f continua y $A \subset Y$ un conjunto cerrado. Dado $x \in \overline{f^{-1}(A)}$, entonces existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f^{-1}(A)$ tal que $x_n \to x$. Como f es continua y $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset f$ con $y_n \to y$, entonces $y \in A$ (pues A es cerrado) y $x \in f^{-1}(A)$. Así $f^{-1}(A)$ contiene a todos sus puntos adherentes.

   Suponga que $f^{-1}(A)$ es cerrado para todo cerrado $A \subset Y$, pero que la función f no es continua. Entonces $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$, pero que $f(x_n)$ no converge a $f(x)$, es decir existen $\epsilon > 0$, una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un natural $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f(x_{n_k}) \notin B_\epsilon(f(x))$, $\forall k \geq k_0 \implies x_{n_k} \notin f^{-1}(B_\epsilon[f(x)])$, $\forall k \geq k_0$, luego entonces $x_{n_k} \in f^{-1}(B_\epsilon[f(x)]^c)$, $\forall k \geq k_0$ (el cual es cerrado por ser imagen inversa bajo f de un cerrado), y como $x_{n_k} \to x$, entonces $x \in f^{-1}(B_\epsilon[f(x)]^c)$ lo cual es una contradicción por definición de función.

2. Suponga que $f^{-1}((-\infty, y])$ y $f^{-1}([y, \infty))$ son cerrados $\forall y \in \mathbb{R}$, pero f no es continua. Entonces existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$ pero que $f(x_n)$ no converge a $f(x)$, luego $\exists B_\epsilon[f(x)] = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ tal que $f(x_n) \notin B_\epsilon(f(x))$, $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Por lo que $f(x_n) \in [(-\infty, f(x) - \epsilon] \cup [f(x) + \epsilon, \infty)]$, $\forall n \geq n_0$, y así el conjunto

$$C = f^{-1}[(-\infty, f(x) - \epsilon] \cup [f(x) + \epsilon, \infty)] = f^{-1}(-\infty, f(x) - \epsilon] \cup f^{-1}[f(x) + \epsilon, \infty)$$

   es un cerrado que contiene a todos los x_n, $\forall n \geq n_0$, y como $x_n \to x$ entonces $x \in C$, lo cual es una contradicción a la definición de función.

3. Demostremos que $f(X)$ es cerrado. Dado $y \in \overline{f(X)}$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(X)$ tal que $y_n \longrightarrow y$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $(x_n, y_n) \in f$. Como X es compacto la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, por lo que tiene una subsucesión $\{x_{n_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$

convergente a un punto $x \in X$ (pues X es cerrado), y como f es continua y ocurre que $(x_{n_\ell}, y_{n_\ell}) \longrightarrow (x, y)$, entonces $(x, y) \in f$. Así, $y \in f(X)$ y $f(X)$ es cerrado.

Ahora probemos que $f(X)$ es acotado. Supongamos que esto no es cierto, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que para todo cubo cerrado K con centro en $0 \in \mathbb{R}^m$ y radio $k \in \mathbb{R}_+$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \notin K$, $\forall n \geq n_k$. Como X es acotado, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $\{x_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente con $x_{n_l} \to x \in X$. Luego como f es continua, $f(x_{n_l}) \to f(x)$. Pero por lo anterior, $\forall k \in \mathbb{R}_+$ existe $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_{n_l}) \notin K$, $\forall l \geq l_k$ lo cual contradice que $f(x_{n_l})$ converge a $f(x)$.

4. Suponga que $f(X)$ no es conexo, entonces existen $A, B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos cerrados tales que $f(X) \subset A \cup B$, $f(X) \cap A \neq \emptyset$, $f(X) \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$.

   Como f es continua entonces $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ son dos cerrados que cumplen:

$$X \subset [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)],\ X \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset,\ X \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset,\ f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$$

   por la definición de función (lo que contradice a que X sea conexo). □

Nota 1.7.1 *El teorema anterior nos va a interesar de sobremanera en economía pues nos va a ayudar a entender y demostrar el siguiente Teorema [Weierstrass], el cual nos da condiciones suficientes para poder encontrar puntos óptimos en funciones definidas sobre conjuntos compactos. En la teoría del productor y del consumidor, el poder optimizar funciones es uno de los objetivos principales a los que aspira el investigador, y basándonos en el supuesto de que esto se puede hacer para ciertas funciones económicas de importancia, se han desarrollado infinidad de modelos y teorías económicas relevantes hoy en día.*

La parte de conexidad nos ayudará a demostrar y entender el teorema posterior [Bolzano], el cual nos dará la idea y las bases para la continuidad de la función de utilidad que definiremos en el Capítulo 2.

Teorema 1.7.4 (Weierstrass) *Sea $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua entonces, si X es compacto y no vacío, $f(X)$ tiene un máximo y un mínimo.*

*Al elemento x_M (respectivamente x_m) tal que $f(x_M) \geq f(x)$, $\forall x \in X$ ($\leq$ respectivamente) se le conoce como el **maximizador** (respectivamente **minimizador**) de f.*

Demostración. Note que del Teorema 1.7.3 el conjunto $f(X) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, es decir, es cerrado y acotado. Como $\mathbb{R}$ está ordenado completamente por el orden $\geq$, $f(X)$ tiene una mínima cota superior y una máxima cota inferior, y por ser cerrado, estas cotas le pertenecen. □

Teorema 1.7.5 *Sea $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua entonces, si X es conexo y no vacío, $f(X)$ es un intervalo.*

Así, si $x_1, x_2 \in X$ y "y" es un número real tal que $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$, entonces existe $x \in X$ que cumple $f(x) = y$.

Demostración. Por el Teorema 1.7.3 $f(X)$ es conexo y por el Teorema 1.6.2 $f(X)$ es un intervalo. □

1.8. Correspondencias Continuas

En ésta sección introducimos el concepto de continuidad para correspondencias, las cuales son un tanto más generales que las funciones y nos ayudarán a modelar comportamientos un poco más complejos que lo que nos permitirían las funciones (en concreto vamos a poder optimizar funciones donde no todos los supuestos económicos, como la convexidad estricta, se cumplen y obtener conjuntos "gruesos" derivados de éste tipo de casos). Éste concepto se dará en tres pasos.

Ejemplo 1.8.1 *Sea A el conjunto de todas las posibles acciones de un agente económico. Suponga que el ambiente donde actúa el agente, el cual delimita su respuesta ante un fenómeno económico, es especificado por un elemento* ***e*** *del conjunto E. Entonces* ***e*** *determina un subconjunto del conjunto A, donde su libertad de elección es restringida, y por lo tanto se especifica una correspondencia $\phi : E \to \mathcal{P}(A)$.*

Definición 1.8.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compacto, ϕ una correspondencia de X en Y y x_0 un punto de X. Entonces:*

1. *La correspondencia ϕ es* ***hemicontinua superiormente*** *en el punto x_0 si dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a x_0, si tomamos una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n \in \phi(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y con $y_n \to y_0$, entonces $y_0 \in \phi(x_0)$.*

2. *La correspondencia ϕ es* ***hemicontinua inferiormente*** *en el punto x_0 si dado el elemento $y_0 \in \phi(x_0)$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y, con $y_n \in \phi(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $y_n \to y_0$.*

3. *La correspondencia se llama* ***continua*** *en el punto x_0 si es hemicontinua superior e inferiormente en x_0.*

Nota 1.8.1 *Cuando $\phi(x)$ consiste de un sólo punto para toda $x \in X$ (cuando ϕ es función de X en Y), las definiciones de hemicontinua superiormente e inferiormente coinciden (puesto que dada una sucesión en X, sus imágenes bajo ϕ son únicas). Además, estas coinciden con la definición de continuidad de una función.*

Note también, como parte de la definición anterior, que la hemicontinuidad y la continuidad de una correspondencia en el conjunto X se tiene si se cumple esto para cada punto $x \in X$. Además, la definición de hemicontinuidad inferior no requiere de que Y sea compacto.

Teorema 1.8.1 *Sean X, Y y ϕ como antes, entonces definimos la* ***gráfica*** *de ϕ como el conjunto*

$$G(\phi) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \phi(x),\ \forall x \in X\}$$

Así, tenemos que la correspondencia ϕ es hemicontinua superiormente sobre X, si y sólo si su gráfica es cerrada en $X \times Y$.

Demostración. Dada una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset graf(\phi)$ convergente a (x_0, y_0) (con $x_0 \in Dom(\phi) \subset X$), entonces como $y_n \to y_0 \in Y$ y ϕ es hemicontinua superiormente, por definición $y_0 \in \phi(x_0)$, luego $(x_0, y_0) \in graf(\phi)$.

Sean ahora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tales que $x_n \to x_0$, y $y_n \to y_0$, como $graf(\phi)$ es un conjunto cerrado, $(x_0, y_0) \in graf(\phi)$ y así $y_0 \in \phi(x_0)$. Luego, ϕ es hemicontinua superiormente. □

Los siguientes teoremas nos ayudarán a conocer ciertas propiedades de las correspondencias y de paso nos definirán la composición de una correspondencia con una función y la proyección de una correspondencia.

Teorema 1.8.2 *Sean X, W, Y subconjuntos de $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente (con Y compacto). Sea $f : X \to W$ una función continua (con $f(X) = W$) y $\phi : W \to \mathcal{P}(Y)$ una correspondencia.*

Entonces, la correspondencia $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ dada por

$$\varphi(x) = \phi(f(x)) \qquad \textit{para todo } x \in X$$

cumple ser hemicontinua superiormente (respectivamente inferiormente) si ϕ es hemicontinua superiormente (respectivamente inferiormente).

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ con $y_n \in \varphi(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y tales que cumplen $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Definimos $w_n = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$, entonces como f es continua, $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $w_0 = f(x_0)$, luego:

1. Si ϕ es hemicontinua superiormente, como $w_n \to w_0$ y $y_n \in \phi(w_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $y_n \to y_0$, entonces $y_0 \in \phi(w_0) = \varphi(x_0)$.

2. Si ϕ es hemicontinua inferiormente, dada la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \to x_0$, ésta nos genera (por continuidad de f) la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w_n \to w_0$. Luego, existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_n \to y_0 \in \phi(w_0) = \varphi(x_0)$ con $y_n \in \phi(w_n) = \varphi(x_n)$. □

Teorema 1.8.3 *Sea X subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Sea Y_k subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n_k}$ para todo $k = 1, 2, \ldots, p$, y sea $\phi_k : X \to \mathcal{P}(Y_k)$ una correspondencia para cada Y_k. Considere el producto $Y = \prod_{k=1}^{p} Y_k$. Definimos la correspondencia $\phi : X \to \prod_{k=1}^{p} \mathcal{P}(Y_k)$ dada por*

$$\phi(x) = \prod_{k=1}^{p} \phi_k(x) \qquad \forall\, x \in X$$

si cada ϕ_k es hemicontinua superiormente (respectivamente inferiormente) entonces ϕ es hemicontinua superiormente (respectivamente inferiormente).

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x_0$, entonces:

1. Si ϕ_k es hemicontinua superiormente $\forall k = 1, 2, \ldots, p$, existe $\{y_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y_k$ tal que $y_n^k \in \phi_k(x_n)$ con $y_n^k \to y_0^k$, $\forall k = 1, \ldots, p$.

   Así se tiene que $y_0^k \in \phi_k(x_0)$, $\forall k = 1, \ldots, p$, y entonces:

   $$(y_n^1, \ldots, y_n^p) \to y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^p) \Longrightarrow y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^p) \in \prod_{k=1}^{p} \phi_k(x_0) = \phi(x_0)$$

   Por lo tanto, $y_0 \in \phi(x_0)$ y ϕ es hemicontinua superiormente.

2. Si cada ϕ_k es hemicontinua inferiormente, dado $y_0^k \in \phi(x_0^k)$, existe $\{y_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y_k$ tal que $y_n^k \to y_0^k$ con $y_n^k \in \phi_k(x_n),\ \forall k = 1, 2, \ldots, p$.

   Así tenemos que:

$$(y_n^1, \ldots, y_n^p) \to y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^p) \qquad \textit{con } (y_n^1, \ldots, y_n^p) \in \prod_{k=1}^{n} \phi_k(x_n) = \phi(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

   por lo que ϕ es hemicontinua inferiormente. □

Teorema 1.8.4 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compacto y sea $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ una correspondencia tal que $\phi(x)$ es un subconjunto cerrado en Y para todo $x \in X$.*

Sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua real valuada.

Dado $x \in X$ formamos la correspondencia $\mu : X \to \phi(x) \subset Y$ de todos los puntos en $\phi(x)$ que maximizan f como función de $y \in \phi(x)$. Definimos también la función real valuada $g : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \text{máx}\{f(x, y)\ \mid y \in \phi(x)\}$$

Se tiene que si f es continua sobre $X \times Y$ y ϕ es continua sobre X, entonces μ es hemicontinua superiormente y g es continua sobre X.

Demostración. Primero note que tanto μ como g están bien definidas pues como Y es compacto y $\phi(x)$ es cerrado en Y para todo $x \in X$, entonces $\phi(x)$ es un conjunto compacto para todo $x \in X$. Así, por el Teorema de Weierstrass, $g(x)$ existe para todo $x \in X$ y $\mu(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

- Mostremos que μ es hemicontinua superiormente.

  Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x_0$, tomamos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que cumple $y_n \in \mu(x_n) \subset \phi(x_n)$, con $y_n \to y_0$. Como ϕ es hemicontinua superiormente, $y_0 \in \phi(x_0)$, y como $y_n \in \mu(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$f(x_n, y_n) \geq f(x_n, \hat{y_n}), \qquad \forall \hat{y_n} \in \phi(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

  Por otra parte, como f es continua entonces $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$.

  Así, dado $\hat{y}_0 \in \phi(x_0)$, como ϕ es hemicontinua inferiormente, existe $\{\hat{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $\hat{y}_n \in \phi(x_n)$ y $\hat{y}_n \to \hat{y}_0$.

  Como $y_n \in \mu(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x_n, y_n) \geq f(x_n, \hat{y}_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego por continuidad de f

$$f(x_0, y_0) \geq f(x_0, \hat{y}_0) \Longrightarrow y_0 \in \mu(x_0)$$

  Así, μ es hemicontinua superiormente.

- Para mostrar que g es continua se siguen los mismos pasos, solo que ahora tomamos al número $r_0 = f(x_0, y_0)$ y vemos que $f(x_n, y_n) \to r_0$ por la continuidad de f. □

En el teorema anterior, podemos pensar en términos económicos a $f(x, y)$ como la ganancia de un agente al realizar una acción y dado que está en un ambiente determinado por x. Así, queremos encontrar los puntos donde la función f se maximiza y en los valores máximos que toma ésta función.

1.9. Vectores en $\mathbb{R}^n$

En ésta sección supondremos que el lector tiene conocimientos básicos de vectores, su suma, la multiplicación por escalar y su representación como n-uplas ordenadas. Utilizaremos la notación que hemos estado manejando, pero le añadiremos las siguientes definiciones.

Sean $x = (x_i), y = (y_i)$ dos vectores en $\mathbb{R}^\ell$, entonces:

- $x \geq y$ significa $x_i \geq y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, \ell$.
- $x > y$ significa $x \geq y$ con $x \neq y$.
- $x \gg y$ significa $x_i > y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

La notación anterior será válida durante todo el trabajo y nos será de mucha importancia por su utilidad en la parte económica del trabajo, ya que nos facilitará la definición y el manejo de la mayoría de los conceptos y resultados de ésta sección al estar trabajando sobre $\mathbb{R}^\ell$.

Los siguientes teoremas combinan dos de los conceptos que utilizaremos con mucha frecuencia en el desarrollo de la tesis, los conjuntos cerrados y las correspondencias.

Teorema 1.9.1 *Sean $X_1, \ldots, X_m$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i \subset \overline{\sum_{i=1}^{m} X_i}$
2. *Si los X_i son conjuntos compactos entonces* $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_i$ *es compacto*

Demostración.

1. Dado $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \in \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i$, existen sucesiones $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_i$ que cumplen que $x_i^n \to x_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$.
   Así, la sucesión $\{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \sum_{i=1}^{m} X_i$ es tal que
   $$[x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n \longrightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_m] \Longrightarrow \; x_1 + x_2 + \cdots + x_m \in \overline{\sum_{i=1}^{m} X_i}$$

2. Primero veamos que es cerrado, dado $x \in \overline{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_i}$, existe una sucesión
   $$\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_m^k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \sum_{i=1}^{m} X_i$$
   tal que $x^k \to x$. Como X_1 es compacto, existe una subsucesión $\left\{x_1^{n_{k_1}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left\{x_1^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1^{n_{k_1}} \to x_1$, y como es cerrado $x_1 \in X_1$. Luego, como X_2 es compacto, existe una subsucesión $\left\{x_2^{n_{k_2}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left\{x_2^{n_{k_1}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_2^{n_{k_2}} \to x_2$, y como es cerrado $x_2 \in X_2$.

Siguiendo con este procedimiento $n-1$ veces, llegamos a que, como X_m es compacto, existe una subsucesión $\left\{x_m^{n_{k_m}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left\{x_m^{n_{k_{m-1}}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_m^{n_{k_m}} \to x_m$, y como es cerrado $x_m \in X_m$.

Así, tomando la sucesión $\{x^{n_{k_m}}\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{x_1^{n_{k_m}}, x_2^{n_{k_m}}, \ldots, x_m^{n_{k_m}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, por construcción ésta converge a $x' = x_1 + x_2 + \ldots, x_m \in \sum_{i=1}^m X_i$, pero además, por ser una subsucesión de una sucesión convergente, debe de converger a $x \in \overline{\sum_{i=1}^{m} X_i}$.

Así, por la unicidad del límite de una sucesión, se tiene que

$$x = x' \in \sum_{i=1}^{m} X_i$$

Por otro lado, como X_i es acotado $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, existe un cubo K_i de radio $2k_i$ y centro en el origen tal que $X_i \subset K_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

Entonces, el cubo K con centro en el origen y de radio $2(\sum_{i=1}^m k_i)$ contiene a $\sum_{i=1}^m X_i$, por lo que éste conjunto es acotado. $\square$

Teorema 1.9.2 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

1. *Sea $f_k : X \to \mathbb{R}^m$ una función para $k = 1, 2, \ldots, p$. Definimos la función $f : X \to \mathbb{R}^m$ como*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)$$

si cada f_k es continua sobre X, entonces f es continua sobre X.

2. *Sea Y_k subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ y $\phi_k : X \to \mathcal{P}(Y_k)$ una correspondencia para cada $k = 1, 2, \ldots, p$. Considere la suma $Y = \sum_{k=1}^{p} Y_k$ y defina la correspondencia $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ dada por*

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k(x)$$

Si cada ϕ_k es hemicontinua superiormente (respectivamente inferiormente) sobre X, entonces ϕ es hemicontinua superiormente (respectivamente inferiormente) sobre X.

Demostración.

1. Dado $x \in X$, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $x_n \to x$, entonces

$$f_k(x_n) \to f_k(x), \ \forall k = 1, 2, \ldots, p$$

Es decir, $\forall \epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\|f_k(x_n) - f_k(x)\| < \frac{\epsilon}{p} \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, p$$

Así

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^{p} f_k(x_n) - \sum_{k=1}^{p} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=1}^{p} \|f_k(x_n) - f_k(x)\| < \sum_{k=1}^{p} \frac{\epsilon}{p} = \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

Luego, $f(x_n) \to f(x) \implies f$ es continua.

2. La prueba consta de dos partes:

   a) Suponga que ϕ_k es hemicontinua superiormente $\forall k = 1, 2, \ldots, p$, así para cualesquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \to x$, $\left\{y_n^k\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y_k$ cumpliendo que $y_n^k \in \phi_k(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $y_n^k \to y^k$, se cumple que $y^k \in \phi_k(x)$, $\forall k = 1, 2, \ldots, p$.
   Así, dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{y_n^1 + y_n^2 + \cdots + y_n^p)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $y_n^k \in \phi_k(x_n)$, tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y = y^1 + y^2 + \cdots + y^p$. Entonces se cumple que $y_n^k \to y^k$, para toda $k = 1, 2, \ldots, p$.
   Así, $y_n = y_n^1 + \cdots + y_n^p \Longrightarrow y^1 + \cdots + y^p = y$ con
   $y_n^k \in \phi_k(x_n)$, $\forall k = 1, 2, \ldots, p$. Por lo que $y \in \sum_{k=1}^{p} Y_k = Y$.

   b) Suponga que ϕ_k es hemicontinua inferiormente, $\forall k = 1, 2, \ldots, p$.
   Entonces, dada la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$, y dado el elemento $y = y_1 + \cdots + y_p \in \phi(x) \sum_{k=1}^{p} \phi_k(x)$, existen $\{y_k^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y_k$ tales que $y_k^n \to y_k$ con $y_k^n \in \phi_k(x_n)$.
   Así, tomamos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{y_n^1 + y_n^2 + \cdots + y_n^p\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que cumple con $y_n \in \sum_{k=1}^{p} \phi_k(x_n)$, entonces ocurre que

   $$y_n = y_n^1 + y_n^2 + \cdots + y_n^p \to y^1 + y^2 + \cdots + y^p = y$$

   luego, ϕ es hemicontinua inferiormente. □

Definición 1.9.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos puntos cualesquiera, $t, \tau \in \mathbb{R}$ tales que $t + \tau = 1$.*

- *El punto $z = tx + \tau y$ es llamado el **promedio ponderado** de x, y, con ponderadores (o pesos) t y τ*

- *La **línea recta** que pasa por los puntos x, y es*

$$\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = (1-t)\,x + ty,\ t \in \mathbb{R}\}$$

- *En la definición de línea recta, si además pedimos que $t \geq 0$, entonces la llamamos **media línea cerrada** y la denotaremos por $\vec{xy}$.*

- *Definimos y denotamos al **segmento cerrado** con extremos x, y, por*

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = (1-t)\,x + ty,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

*Cuando $x = y$, el segmento se llamará **degenerado**.*

Nota 1.9.1 *Para interpretar las definiciones que acabamos de hacer en términos de vectores, vamos a re-expresar a los puntos z como $z = t\,(y - x) + x$, i.e., la línea recta generada por el vector $(y - x)$ trasladada del origen por el vector x.*

Las siguientes definiciones y resultados nos ayudarán a sentar las bases y conceptos de la teoría económica, descrita en el Capítulo 2, ya que nos ayudarán a comprender la importancia de varios axiomas fundamentales de la economía, así como a desarrollar la intuición de estos.

Definición 1.9.2 *Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es* ***convexo*** *si dados dos puntos $x_1, x_2 \in X$, el segmento cerrado $[x_1, x_2]$ está contenido en X.*

Un ***cono poliédrico convexo*** *es la suma de m medias líneas cerradas con origen común.*

Teorema 1.9.3 *Considere subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *La intersección de una familia de conjuntos convexos es convexa*
2. *La suma y el producto de m subconjuntos convexos es convexa*
3. *La adherencia de un conjunto convexo es convexa*
4. *Un conjunto convexo es conexo*

Demostración.

1. Sea $\{S_i \subset \mathbb{R}^n\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos. Considere el conjunto $A = \bigcap_{i\in I} S_i$, así dados $x_1, x_2 \in A$ tenemos que $x_1, x_2 \in S_i,\ \forall i \in I$, luego $[x_1, x_2] \subset S_i,\ \forall i \in I$. Por lo tanto, $[x_1, x_2] \subset \bigcap_{i\in I} S_i$.

2. Sean $S_1, \ldots, S_m \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos. Dados $x = \sum_{i=1}^m x_i$,

   $y = \sum_{i=1}^m y_i \in \sum_{i=1}^m S_i$. Como los conjuntos S_i son convexos, entonces

   $$\alpha x_i + (1-\alpha) y_i \in S_i, \qquad \forall \alpha \in [0,1],\ \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

   por lo que tenemos

   $$\alpha(\sum_{i=1}^m x_i) + (1-\alpha)(\sum_{i=1}^m y_i) \in \sum_{i=1}^m S_i$$

   Ahora, sea $S = \prod_{i=1}^m S_i$, y sean $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in S$, entonces $\alpha x_i + (1-\alpha) y_i \in S_i,\ \forall \alpha \in [0,1],\ \forall i = 1, 2, \ldots, m$, y así

   $$\alpha x + (1-\alpha) y = (\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1, \ldots, \alpha x_m + (1-\alpha) y_m) \in \prod_{i=1}^m S_i = S$$

3. Dados $x, y \in \overline{S}$, entonces existen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Como S es convexo, los segmentos cerrados $[x_n, y_n]$ están contenidos en $S,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Dado $z = \alpha x + (1-\alpha) y \in [x, y]$, tenemos que $z_n = \alpha x_n + (1-\alpha) y_n \to z$, cumpliendo que $z_n \in S, \forall n \in \mathbb{N}$. Así, $z \in \overline{S},\ \forall \alpha \in [0,1] \Longrightarrow [x, y] \subset \overline{S}$.

4. Sean $S, A, B \subset \mathbb{R}^n$, con S conjunto convexo y A, B subconjuntos cerrados, tales que $A \cap B = \emptyset$ con $(A \cup B) \cap S = S$ y con $A \cap S \neq \emptyset,\ B \cap S \neq \emptyset$.

   Dados $x \in A \cap S,\ y \in B \cap S$, entonces $[x, y] \subset S = (A \cup B) \cap S$. Pero como $A \cap B = \emptyset$, existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in (A \cap S)$ y $z \notin (B \cap S)$, y con

$$z'(\epsilon) = [(\alpha+\epsilon)x + (1-\alpha-\epsilon)y] \in (B \cap S) \ \ y \ \ z'(\epsilon) \notin (A \cap S), \ \ \forall\, 0 < \epsilon \leq 1-\alpha$$

   Pero esto es una contradicción a que B sea cerrado pues, dado $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < (1-\alpha)$, tomamos $\epsilon = \frac{1}{N+n}$ y tomamos también la sucesión $\left\{z'(\frac{1}{N+n})\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \cap S$, la cual cumple que

$$z'(\frac{1}{N+n}) \to z = \alpha x + (1-\alpha)y \in (A \cap S) \ \square$$

Definición 1.9.3 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, su* ***envoltura convexa*** *se define como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X,i.e., el conjunto convexo más pequeño que contiene a X, y la denotamos por $\dot{X}$.*

Nota 1.9.2 *Sea X como en la definición, entonces por el Teorema 1.6.1 el conjunto $\overline{\dot{X}}$ es cerrado y por el Teorema 1.9.3 es convexo. Así podemos definir a la* ***envoltura convexa cerrada*** *de X como el conjunto $\overline{\dot{X}}$ (el conjunto convexo y cerrado más pequeño que contiene a X).*

Los siguientes lemas son muy importantes, ya que nos van a caracterizar a los conjuntos convexos y a las envolturas convexas de conjuntos arbitrarios como combinaciones convexas de elementos del conjunto en cuestión, lo cual nos ayudará a demostrar varios resultados tanto matemáticos como económicos posteriores.

Comenzaremos con la definición de combinación convexa, sobre la cual se basan nuestros resultados.

Definición 1.9.4 *Un vector suma de la forma*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

es llamado una ***combinación convexa*** *de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, si los coeficientes λ_i son todos no negativos y tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$.*

Lema 1.9.1 *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones convexas de sus elementos.*

Demostración. Vemos que cuando $m = 2$, por la definición de conjunto convexo, S es convexo si y sólo si contiene a sus combinaciones convexas.

Ahora, tome $m > 2$ y procedamos por inducción fuerte. Suponga que S es cerrado bajo todas las combinaciones convexas de menos de m vectores, dada una combinación convexa $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ de elementos de S, al menos uno de esos escalares es diferente a uno (pues en caso contrario $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = m \neq 1$); sin pérdida de generalidad asumamos que $\lambda_1 \neq 1$, entonces tome

$$y = \lambda'_2 x_2 + \cdots + \lambda'_m x_m, \qquad \text{con } \ \lambda'_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}, \ \forall i = 2, 3, \ldots, m$$

Note que $1-\lambda_1 = \lambda_2+\cdots+\lambda_m$, así $y \in S$ por ser una combinación convexa de $m-1$ elementos de S, pues se cumple que $\lambda_i' \geq 0$ para $i = 2, 3, \ldots, m$, y además

$$\lambda_2' + \lambda_3' + \cdots + \lambda_m' = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_m}{1-\lambda_1} = 1$$

Entonces, como $x = (1-\lambda_1)y + \lambda_1 x_1$, se tiene que $x \in S$.

Note además que si S es convexo entonces cualquier punto $x \in S$ se puede ver como una combinación convexa de dos elementos de S. $\square$

Lema 1.9.2 *Para todo $S \subset \mathbb{R}^n$, la envoltura convexa de éste conjunto consiste de todas las combinaciones convexas de sus elementos.*

Demostración. Por definición, cualquier elemento $x \in S$, también está contenido en $\dot{S}$, luego, por el lema anterior, todas sus combinaciones convexas están contenidas en el convexo $\dot{S}$.

Ahora, sean $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ y $y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_r x_r$ dos combinaciones convexas de elementos de S. Entonces, dado $0 \leq \lambda \leq 1$, el vector

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\alpha_1 x_1 + \cdots + (1-\lambda)\alpha_m x_m + \lambda\beta_1 y_1 + \cdots + \lambda\beta_r y_r$$

es otra combinación convexa de elementos de S, luego, el conjunto de combinaciones convexas de elementos de S es un conjunto convexo y por tanto contiene a $\dot{S}$. $\square$

Recordemos que dados dos vectores $x = (x_k)\,, y = (y_k)$ en $\mathbb{R}^n$, su **producto interno** $x \cdot y$ esta dado por $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ (la cual, vista como función, es continua). Cuando $x \cdot y = 0$ decimos que los vectores son **ortogonales**. Tomando esto en cuenta, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.9.5 *Sea $p \in \mathbb{R}^n$ diferente de 0, y sea $c \in \mathbb{R}$. El conjunto*

$$H(p,c) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot z = c\}$$

*es llamado **hiperplano** con **normal** p.*

Nota 1.9.3 *Con la notación anterior*

- *Si $w \in H(p,c)$ por definición se tiene que $p \cdot w = c$, así podemos expresar al hiperplano H como*
$$H(p,c) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot (z-w) = 0\}$$
Así éste hiperplano es el conjunto de puntos tales que $(z-w)$ es ortogonal a p.

- *Note también que si p y c son multiplicados por un mismo número real $r \neq 0$, el hiperplano $H(rp, rc)$ formado con estos elementos coincide con el original $H(p,c)$.*

Definición 1.9.6 *Sea $H(p,c)$ un hiperplano con normal p, el punto $z \in \mathbb{R}^n$ se dice que está **por encima de** $H(p,c)$ si cumple que $p \cdot z > c$. El **semiespacio cerrado por encima de** $H(p,c)$ es el conjunto*

$$H^+(p,c) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot z \geq c\}$$

*Si cambiamos los símbolos $>, \geq$ por $<, \leq$ obtenemos las definiciones de que z este **por debajo** de $H(p,c)$ y de $H^-(p,c)$, el **semiespacio cerrado por debajo de** $H(p,c)$.*

Lema 1.9.3 *Con la notación anterior, los semiespacios cerrados por encima y por debajo de $H(p,c)$ son conjuntos cerrados y convexos. Así $H(p,c)$ cumple estas propiedades por ser la intersección de estos conjuntos.*

Demostración. Veamos que $H^{+}(p,c)$ es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{+}(p,c)$ tal que $x_n \to x$, entonces $p \cdot x_n \geq c,\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que $p \cdot x \geq c$. Así tenemos que $x \in H^{+}(p,c)$.

Ahora veamos que es convexo. Sean $x, y \in H^{+}(p,c)$, entonces se tiene que $p \cdot x \geq c$ y que $p \cdot y \geq c$. Definimos $z_\alpha = \alpha x + (1-\alpha)y,\ \alpha \in [0,1]$, entonces

$$p \cdot z_\alpha = p \cdot (\alpha x) + p \cdot (1-\alpha)y \geq \alpha c + (1-\alpha)c = c$$

por lo que $z_\alpha \in H^{+}(p,c)\,,\ \forall \alpha \in [0,1]$.

La demostración para $H^{-}(p,c)$ es similar. □

Definición 1.9.7 *Sean X_1, X_2 dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que el hiperplano $H(p,c)$* ***separa*** *los conjuntos X_1 y X_2 si*

$$X_1 \subset H^{+}(p,c) \ \text{ y } \ X_2 \subset H^{-}(p,c)$$

es decir, si cada uno de los subconjuntos X_1, X_2 están contenidos en uno de los semiespacios determinados por el hiperplano $H(p,c)$.

Lema 1.9.4 *Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y convexo y sea $x \notin B$ un punto en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un único $y \in B$ tal que*

$$\|x-y\| < \|x-y'\|\,, \quad \forall y' \in B \setminus \{y\}$$

Demostración. Dada una norma en $\mathbb{R}^n$, definimos la función **distancia entre dos puntos** como

$$d(x,y) = \|x-y\|\,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Por la equivalencia entre normas en espacios Euclideanos, podemos tomar en particular la norma Euclideana, la cual es una función continua por, ser composición de funciones continuas.

Note que si fijamos $x \in \mathbb{R}^n$, la función distancia de x a $y \in B$ tiene al conjunto B como dominio, es decir

$$d(x) : B \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

donde

$$d(x)(y) = d(x,y), \quad \forall y \in B$$

Note que si B es convexo, entonces por el Teorema 1.7.5, $d(x,B)$ es un intervalo. Luego si B está acotado entonces por el Teorema 1.7.3, $d(x,B)$ es un compacto, por lo que toma la forma $[a,b]$; si no, es de la forma $[a,\infty)$ (pues B es acotado inferiormente y podemos tomar $B_1 = \{y \in B \mid d(x,y) \leq a+1\}$, el cual resulta ser un compacto tal que $B_1 \subset B$ y que cumple $d(x,B_1) = [a, a+1] \subset d(x,B)$). Así entonces, por el Teorema de Weierstrass, $\exists y \in B$ tal que $d(x,y) = a$ (la distancia mínima entre x y un elemento del conjunto B).

Ahora, suponga que existen $y_1, y_2 \in B$ tales que $y_1 \neq y_2$ y tales que $d(x,y_1) = d(x,y_2) = a$. Como B es convexo, tomamos $z = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \in B$.

Probemos que $[d(x,z)]^2 < a^2$ (que es equivalente a que $d(x,z) < a$ pues $d(x,z) \geq 0$). Vemos que

$$[d(x,z)]^2 = \sum_{i=1}^{n}[x_i - \frac{1}{2}(y_1^i + y_2^i)]^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - y_1^i) + (x_i - y_2^i)]^2$$

pero $[(x_i - y_1^i) + (x_i - y_2^i)]^2 = (x_i - y_1^i)^2 + (x_i - y_2^i)^2 + 2(x_i - y_1^i)(x_i - y_2^i)$, por lo que

$$[d(x,z)]^2 = \frac{1}{4}[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_1^i)^2 + \sum(x_i - y_2^i)^2] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_1^i)(x_i - y_2^i)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}[(x_i - y_1^i)(x_i - y_2^i)]$$

sumando y restando $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - y_1^i)^2 + (x_i - y_2^i)^2]$ tenemos

$$[d(x,z)]^2 = a^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i - y_1^i)[(x_i - y_2^i) - (x_i - y_1^i)] + (x_1 - y_2^i)[(x_i - y_1^i) - (x_i - y_2^i)]\right\}$$

$$= a^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - y_1^i)(y_1^i - y_2^i) + (x_i - y_2^i)(y_2^i - y_1^i)]$$

$$= a^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(y_1^i - y_2^i)[(x_i - y_1^i) - (x_i - y_2^i)] = a^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(y_1^i - y_2^i)^2$$

por lo que $[d(x,z)]^2 < a^2$ (pues $y_1 \neq y_2$), y así el elemento $y \in B$ tal que $d(x,y) = a$, es único. □

Teorema 1.9.4 *[Minkowski] Suponga que $B \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y convexo y sea $x \notin B$ un punto en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe $p \in \mathbb{R}^n$ con $p \neq 0$, y un valor $c \in \mathbb{R}$ tales que*

$$p \cdot x > c, \qquad p \cdot y < c, \qquad \forall y \in B$$

Demostración. Sea $y \in B$ tal que $\|x - y\| < \|x - y'\|$, $\forall y' \in B, y' \neq y$, el cual existe pues B es cerrado y convexo, y es único por la definición de la relación $<$ en $\mathbb{R}$. Entonces tomamos

$$p = x - y \qquad c' = p \cdot y$$

así, $p \cdot x - c' = p \cdot x - p \cdot y = p \cdot (x - y) = (x - y) \cdot (x - y) = \|x - y\|^2 > 0$ entonces $p \cdot x > c'$. Además, como B es convexo, dado $z \in B$, $z \neq y$, entonces $(z - y)$ forma un ángulo θ con el vector $(x - y)$ tal que $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, por lo que

$$p \cdot z - c' = p \cdot (z - y) = \|x - y\| \, \|z - y\| \, sen\theta \leq 0$$

pues $sen\theta \leq 0$, por los valores que toma θ. Entonces $p \cdot z \leq c'$.
Así, tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que se conserve la desigualdad $p \cdot x > c' + \delta$, y definimos $c = c' + \delta$, con lo que se cumplen las desigualdades

$$p \cdot x > c \;\; y \;\; p \cdot z < c. \; \square$$

1.10. Análisis Convexo y Teoría de Juegos

Continuaremos analizando varias de las propiedades importantes de algunos conjuntos convexos que nos interesan y haremos una pequeña introducción a la teoría de juegos con el fin de comprender el concepto de equilibrio de un juego y su importancia en la teoría de Equilibrio General.

Definición 1.10.1 *Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $x \in C$. Se dice que C es un* ***cono con vértice en*** *x si dado $y \in C$, con $y \neq x$, C contiene a la media línea cerrada $\vec{xy}$.*

Dados m conos $C_1, C_2, \ldots, C_m$ con vértice en el origen 0, se dice que estos son ***positivamente semi-independientes*** *si la suma $\sum_{k=1}^{m} x_k = 0$ con $x_k \in C_k$ (para $k = 1, 2, \ldots, m$), implica que $x_k = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, m$.*

Teorema 1.10.1 *Sean C_1, C_2 dos conos con vertives en 0. Entonces estos conos son positivamente semi-independientes si y sólo si $C_1 \cap (-C_2) = 0$.*

Demostración. Sean C_1, C_2 positivamente semi-independientes y suponga que se cumple $C_1 \cap (-C_2) \neq \{0\}$, entonces existe $x \neq 0$ tal que $x \in C_1$ y $x \in (-C_2)$, luego $(-x) \in C_2$, así $x + (-x) = x - x = 0$ con $x \in C_1$, $(-x) \in C_2$, lo cual contradice a la hipótesis de que sean positivamente semi-independientes.

Suponga ahora que $C_1 \cap (-C_2) = \{0\}$ y que existen $x \in C_1$, $y \in C_2$ distintos de 0 tales que $x + y = 0 \;\Rightarrow\; x = (-y)$. Como $(-y) \in (-C_2) \;\Rightarrow\; x \in (-C_2)$, entonces esto contradice que $C_1 \cap (-C_2) = \{0\}$. $\square$

Definición 1.10.2 *Dada la media línea recta $0\vec{x}_0$ (con $x_0 \neq 0$) y la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cumpliendo con $x_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y tal que genera la sucesión de semirectas $\left\{0\vec{x}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Se dice que la sucesión de semirectas de la forma $0\vec{x}_k$* ***converge a*** *$0\vec{x}_0$ (denotado por $0\vec{x}_k \to 0\vec{x}_0$) si dado $y_0 \in 0\vec{x}_0$ podemos encontrar una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $y_k \in 0\vec{x}_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, tal que*

$$y_k \to y_0 \quad \textit{cuando } k \to \infty.$$

Definición 1.10.3 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, sea $k \in \mathbb{R}$*

- *Definimos a el* ***cono generado por*** *S como el conjunto*

  $$C(S) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists s \in S \textit{ tal que } x \in 0\vec{s}\right\}$$

  el cuál, por definición, es el cono con vértice en 0 más pequeño que contiene a S.

- *Sea el conjunto*

  $$S^k = \{x \in S \mid \|x\| \geq k\}$$

  entonces $\Gamma\left(S^k\right)$ representa al cono cerrado más chico con vértice en 0 que contiene a S^k (es decir, representa a la intersección de todos los conos cerrados con vértice en 0 que contienen a S^k).

- *El* ***cono asintótico*** *de S es definido por:*

  $$\mathbf{A}S = \bigcap_{k\geq 0} \Gamma\left(S^k\right)$$

  el cual se observa que es un cono cerrado con vértice en 0.

Lema 1.10.1 *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces dados cualesquiera $s \in \mathbf{A}S$ y $k > 0$, existe una sucesión $\{s_i^k\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S^k$ tal que las semirrectas $\overrightarrow{0s_i^k}$ convergen a $\overrightarrow{0s}$.*

Demostración. Por la definición de Cono Asintótico tenemos que $s \in \Gamma(S^k)$, $\forall k > 0$. Así, dado $k \in \mathbb{R}_+$ fijo, como $\Gamma(S^k)$ es el cono cerrado con vértice en 0 más pequeño que contiene a S^k, tenemos que

$$\overline{C(S^k)} = \Gamma(S^k)$$

y como $s \in \Gamma(S^k)$, existe una sucesión $\{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq C(S^k)$ tal que $x_\ell \to s$. Pero note que, por la definición de $C(S^k)$, para cada x_ℓ existe $s_\ell^k \in S^k$ tal que $x_\ell \in \overrightarrow{0s_\ell^k}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\{s_\ell^k\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ es tal que $x_\ell \in \overrightarrow{0s_\ell^k}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, y $x_\ell \to s$, luego, como s es arbitrario se tiene que $\overrightarrow{0s^k} \to \overrightarrow{0s}$. □

Lema 1.10.2 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, el cono asintótico de S se caracteriza en términos de sucesiones como el conjunto*

$$\mathbf{A}S = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = \lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell \cdot s_\ell, \quad \textit{cuando } s_\ell \in S,\ \lambda_\ell \geq 0,\ \forall \ell \in \mathbb{N},\ \textit{y} \quad \lambda_\ell \downarrow 0 \right\}$$

donde $\lambda_\ell \downarrow 0$ significa que $\lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell = 0$ con $\lambda_{\ell_2} < \lambda_{\ell_1}$ si $\ell_2 > \ell_1$.

Demostración. Primero tomemos $s \in \mathbf{A}S$ y sea $k_0 = \|s\|$. Entonces, por el Lema 1.10.1 existe una sucesión $\{s_i^k\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S^k$ tal que las semirrectas $\overrightarrow{0s_i^k}$ convergen a $\overrightarrow{0s}$, para todo $k > 0$.

Note que la sucesión (de elementos a la misma distancia del origen que s) dada por

$$\left\{ \frac{k_0}{\|s_i^k\|} s_i^k \right\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Gamma(S^k)$$

converge al vector s, ya que se cumple que

$$\left\| \frac{k_0}{\|s_i^k\|} s_i^k - s \right\| = 2k_0 Sen(\frac{\theta_i}{2}) \longrightarrow 0$$

donde θ_i, el ángulo entre las semirrectas $\overrightarrow{0s}$ y $\overrightarrow{0s_k^i}$, tiende a 0.

Note que, dados $k_\ell > k_q$, si la sucesión $\left\{s_i^{k_\ell}\right\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S^{k_\ell}$ y cumple que $\overrightarrow{0s_i^{k_\ell}} \to \overrightarrow{0s}$, entonces como $\left\{s_i^{k_\ell}\right\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S^{k_q}$, siempre podemos encontrar, para cada $k_q \in \mathbb{N}$, un k_ℓ y un j en $\mathbb{N}$, suficientemente grandes y tales que el elemento $s^{k_q} = s_i^{k_q} \in S^{k_q}$ (para algún i suficientemente grande) cumple que:

1. $\left\| \frac{k_0}{\|s_i^{k_q}\|} s_i^{k_q} - s \right\| < \frac{1}{k_q}$
2. $\frac{k_0}{\|s_j^{k_\ell}\|} \leq \frac{k_0}{\|s_i^{k_q}\|}$

Por lo que tomamos $k_1 = 1$, $k_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k_2 > k_1 \textit{ y } \exists j \in \mathbb{N} \textit{ cumpliendo } 1 \textit{ y } 2\}$ (el cual siempre existe por la reflexión anterior), $k_3 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k_3 > k_2 \textit{ y } \exists j \in \mathbb{N} \textit{ cumpliendo } 1 \textit{ y } 2\}$, y así sucesivamente.

Entonces, para nuestra nueva sucesión de elementos de la forma $\left\{ \frac{k_0}{\|s^{k_q}\|} s^{k_q} \right\}_{q\in\mathbb{N}}$ se cumple

$$\lambda_{k_q} \cdot s^{k_q} = \frac{k_0}{\|s^{k_q}\|} s^{k_q} \longrightarrow s \qquad \textit{cuando } q \to \infty$$

con $\lambda_{k_q} = \frac{k_0}{\|s^{k_q}\|} \downarrow 0$ y además $s^{k_q} \in S,\ \lambda_{k_q} > 0,\ \forall q \in \mathbb{N}$.

Sea ahora $z = \lim\limits_{\ell\to\infty} \lambda_\ell \cdot s_\ell$ con $\|z\| < \infty$ y además $\lambda_\ell \downarrow 0,\ \lambda_\ell > 0,\ s_\ell \in S,\ \forall \ell \in \mathbb{N}$.

Nosotros queremos probar que

$$z \in \mathbf{A}S = \bigcap_{k>0} \Gamma(S^k)$$

Si $z = 0$ por definición $z \in \mathbf{A}S$. Suponga ahora que $z \neq 0$, entonces $0 < \|z\| = k_0 < \infty$, luego queremos ver que $z \in \Gamma(S^k),\ \forall k > 0$. Sea $k > 0$ arbitrario, entonces como $\lambda_\ell \downarrow 0$ se tiene que $\|s_\ell\| \to \infty$, por lo que existe ℓ_k suficientemente grande tal que

$$\|s_\ell\| > k, \quad \forall \ell \geq \ell_k$$

Como $\Gamma(S^k)$ es un cono con vértice en 0, entonces $\lambda_\ell \cdot s_\ell \in \Gamma(S^k),\ \forall \ell \geq \ell_k$, y como $\Gamma(S^k)$ es cerrado entonces

$$z = \lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell \cdot s_\ell \in \Gamma(S^k). \quad \square$$

El siguiente teorema tiene una gran importancia ya que nos va a auxiliar en la demostración de muchos resultados sobre las propiedades de los conjuntos de producción y consumo en el siguiente capítulo, además nos ayuda a comprender más sobre la naturaleza y las características de los conos asintóticos. El segundo inciso de éste teorema se ha adaptado a un caso más específico que es de nuestro interés para simplificar su demostración.

Teorema 1.10.2 *Con la notación anterior tenemos que*

1. *Sea* $S_1 \subset S_2$*, entonces* $\mathbf{A}S_1 \subset \mathbf{A}S_2$
2. *Sea* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $S \subset \mathbb{R}^n$*, entonces* $\mathbf{A}(S + \{x\}) = \mathbf{A}S$
3. *Si* $S, T \subset \mathbb{R}^n$ *con* $T \neq \emptyset$*, entonces* $\mathbf{A}S \subset \mathbf{A}(S + T)$
4. *Si* $S_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots, m$*, entonces* $\mathbf{A}\left(\prod_{j=1}^{m} S_j\right) = \prod_{j=1}^{m} \mathbf{A}S_j$

Demostración.

1. Vemos que si $S_1 \subset S_2$ entonces $S_1^k \subset S_2^k,\ \forall k \geq 0$, así
   $\Gamma(S_1^k) \subset \Gamma(S_2^k),\ \forall k \geq 0$
   por lo que
   $$\bigcap_{k\geq 0} \Gamma(S_1^k) \subset \bigcap_{k\geq 0} \Gamma(S_2^k) \Longrightarrow \mathbf{A}S_1 \subset \mathbf{A}S_2$$

2. Note que es suficiente probar que $\mathbf{A}S \subset \mathbf{A}(S+\{x\})$ pues con esto tendríamos que

$$\mathbf{A}(S+\{x\}) \subset \mathbf{A}[(S+\{x\})+\{-x\}] \subset \mathbf{A}S$$

Sea $z \in \mathbf{A}S$, entonces vemos que $z = \lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell \cdot s_\ell$, con $\|z\| < \infty,\ s_\ell \in S,\ \lambda_\ell > 0,\ \forall \ell \in \mathbb{N}$, y además $\lambda_\ell \downarrow 0$. Así podemos tomar la sucesión $\{\lambda_\ell(s_\ell + x)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, la cual cumple que $(s_\ell + x) \in [S+\{x\}],\ \forall \ell \in \mathbb{N}$, y además

$$\lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell(s_\ell + x) = \lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell \cdot s_\ell + \lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell \cdot x = z$$

dado que $\lim_{\ell\to\infty} \lambda_\ell \cdot x = 0$.

Así, $z \in \mathbf{A}(S+\{x\})$ y tenemos la contensión deseada.

3. Sea $t \in T$, entonces $\mathbf{A}S = \mathbf{A}(S+\{t\})$, pero $\mathbf{A}(S+\{t\}) \subset \mathbf{A}(S+\{T\})$, luego del inciso (1) tenemos que

$$\mathbf{A}S = \mathbf{A}(S+\{t\}) \subset \mathbf{A}(S+\{T\})$$

4. Por definición, $\forall k \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,m,\ S_j^k \subset \Gamma(S_j^k)$, luego $\prod_{j=1}^{m} S_j^k \subset \prod_{j=1}^{m} \Gamma(S_j^k),\ \forall k \geq 0$, y como éste último conjunto es un cono cerrado entonces $\Gamma(\prod_{j=1}^{m} S_j^k) \subset \prod_{j=1}^{m} \Gamma(S_j^k),\ \forall k \geq 0$, y así

$$\bigcap_{k\geq 0} \Gamma(\prod_{j=1}^{m} S_j^k) \subset \bigcap_{k\geq 0} \prod_{j=1}^{m} \Gamma(S_j^k)$$

lo cual equivale a decir que

$$\mathbf{A}(\prod_{j=1}^{m} S_j) \subset \prod_{j=1}^{m} \mathbf{A}S_j$$

Ahora, dado $x \in \prod_{j=1}^{m} \mathbf{A}S_j$ tenemos $x = (x_1,\ldots,x_m)$ con $x_j \in \mathbf{A}S_j, \forall j = 1,2,\ldots,m$. Entonces para cada j existe una sucesión $\left\{x_j^\ell\right\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset S_j$ (como en el segundo inciso) tal que $0\vec{x}_j^\ell \to 0\vec{x}_j$ por lo que $\prod_{j=1}^{m} 0\vec{x}_j^\ell \to \prod_{j=1}^{m} 0\vec{x}_j$. Así podemos encontrar una sucesión $\{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ con $x_\ell \in \prod_{j=1}^{m} 0\vec{x}_j^\ell$ tal que $x_\ell \to x$ y como $\mathbf{A}(\prod_{j=1}^{m} S_j)$ es cerrado entonces $x \in \mathbf{A}(\prod_{j=1}^{m} S_j)$. □

Corolario 1.10.1 *Con la notación anterior, un subconjunto cerrado y convexo que contiene al origen* 0*, contiene a su cono asintótico.*

Demostración. Sea S un conjunto cerrado y convexo que contiene al origen, entonces si S es acotado

$$\mathbf{A}S = \{0\} \subset S$$

Suponga que S no es acotado, tome $x_0 \in \mathbf{A}S$ por lo que se cumple que $x_0 \in \Gamma(S^k),\ \forall k \geq 0$, luego podemos tomar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\|x_n\| \to \infty$, y tal que cumple que $0\vec{x}_n$ converge al rayo $0\vec{x}_0$.

Sea $k_0 = \|x_0\|$, entonces definimos al conjunto

$$S(k_0) = \{x \in S \mid \ \|x\| = k_0\}$$

Como $\|x_n\| \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| \geq k_0$ para todo $n \geq n_0$, además como S es un conjunto convexo que contiene al origen 0, se cumple que $[0, x_n] \subset S,\ \forall n \in \mathbb{N}$, y entonces formamos la sucesión de los

$$z_\ell = S(k_0) \cap [0, x_{n_0+\ell}] \in S,\ \forall \ell \in \mathbb{N}$$

la cual converge a x_0 por construcción y como S es cerrado entonces $x_0 \in S$. $\square$

Lema 1.10.3 *El cono asintótico del conjunto $\mathbb{R}^n_+$ es él mismo, es decir*

$$\mathbf{A}(\mathbb{R}^n_+) = \mathbb{R}^n_+$$

Demostración. Del corolario anterior (Corolario 1.10.1), como $\mathbb{R}^n_+$ es cerrado, convexo y contiene al origen, entonces contiene a su cono asintótico, es decir

$$\mathbf{A}(\mathbb{R}^n_+) \subseteq \mathbb{R}^n_+$$

Ahora, dado $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n_+$, note que $x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$, luego dado $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $kx_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ y así $x_k = kx \in \mathbb{R}^n_+$.

Construyamos la sucesión

$$\left\{(\frac{1}{k})x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{k}(kx)\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n_+$$

la cual converge a x y cumple los requerimentos del Lema 1.10.2, por lo que

$$x \in \mathbf{A}(\mathbb{R}^n_+) \ \ y \ \ \mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbf{A}(\mathbb{R}^n_+). \qquad \square$$

El siguiente teorema será una herramienta muy útil en el Capítulo 2, ya que nos ayudará a demostrar algunas propiedades de la intersección y suma de conjuntos de una manera más sencilla que la directa.

Teorema 1.10.3 *Con la notación anterior tenemos:*

1. *Dada una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, si la intersección de sus conos asintóticos es $\{0\}$, entonces su intersección es acotada.*

2. *Dados m subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, si sus conos asintóticos son positivamente semi-independientes, entonces su suma es cerrada.*

Demostración.

1. Dada una colección $\{S_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, supongamos que

$$\bigcap_{i\in I}\mathbf{A}(S_i)=\{0\}$$

Como se cumple que

$$\mathbf{A}(\bigcap_{i\in I}S_i)\subset\mathbf{A}(S_i),\ \forall i\in I$$

entonces resulta que

$$\mathbf{A}(\bigcap_{i\in I}S_i)\subset\bigcap_{i\in I}\mathbf{A}(S_i)\implies\mathbf{A}(\bigcap_{i\in I}S_i)=\{0\}$$

Supongamos además que $D=\bigcap_{i\in I}S_i$ no es acotado, entonces tenemos que

$$D^k\neq\emptyset,\ \forall k\in\mathbb{R}_+$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$, sea $d_k\in D^k$, entonces definimos

$$\lambda_k=\frac{1}{\|d_k\|}$$

note que $\lambda_k d_k\in\mathbf{A}S$ por la definición de cono y también en la esfera $S(1)$ de centro en 0 y radio 1, para todo $k\in\mathbb{N}$, y como éste último conjunto está acotado, existe una subsucesión $\{\lambda_{k_\ell}d_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $z_0\in S(1)\cap\mathbf{A}S$, con $z_0\neq 0$.

2. Probemos ahora el segundo inciso para el caso en que tengamos dos conjuntos, el caso general se obtiene por inducción.

Sean $E,F\subset\mathbb{R}^n$ dos conjuntos cerrados y no vacíos con conos asintóticos positivamente semi-independientes y suponga que su suma $E+F$ no es un cerrado, entonces existe una sucesión $\{x_k+y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k\in E,\ y_k\in F,\ \forall k\in\mathbb{N}$ y tal que

$$x_k+y_k\longrightarrow z\notin E+F$$

La prueba se sigue en varios pasos:

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $z=0$ (pues por el Teorema 1.10.2, podemos trasladar a E hacia $[E-z]$ manteniendo $\mathbf{A}(E)=\mathbf{A}[E-z]$). Vemos que las sucesiones $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no son acotadas. Suponga que la sucesión de los x_k está acotada, luego contiene una subsucesión $\{x_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ convergente a $x\in E$ (pues E es cerrado). Entonces la subsucesión $\{x_{k_\ell}+y_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge a 0 (por ser subsucesión de una sucesión convergente), y $\{y_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge a $-x\in F$ (pues también F es cerrado). Así, tendríamos que $0=x+(-x)\in[E+F]$, contradiciendo nuestra hipótesis.

Tomamos ahora una subsucesión $\{x_{k_\ell}+y_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\{x_k+y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a 0, y tal que $\|x_{k_\ell}\|\to\infty,\ \|y_{k_\ell}\|\to\infty$, cumpliendo $\|x_{k_\ell}\|>0,\ \|y_{k_\ell}\|>0,\ \forall\ell\in\mathbb{N}$. Considere las sucesiones

$$\left\{\frac{x_{k_\ell}}{\|x_{k_\ell}\|}\right\}_{\ell\in\mathbb{N}},\ \left\{\frac{y_{k_\ell}}{\|y_{k_\ell}\|}\right\}_{\ell\in\mathbb{N}}\subset S(1)$$

donde $S(1)$ es la esfera en $\mathbb{R}^n$ de centro en 0 y radio 1. Como $S(1)$ es compacto, existen $x,\ y\in S(1)$ tales que $\frac{x_{k_\ell}}{\|x_{k_\ell}\|}\to x,\ \frac{y_{k_\ell}}{\|y_{k_\ell}\|}\to y$.

Vemos entonces que $x+y=0$, pues si suponemos que esto no pasa, entonces el elemento 0 no estaría contenido en la envoltura convexa del conjunto $\{x, y\}$.

Por el Teorema 1.9.4 (Minkowski) existen $p \in \mathbb{R}^n,\ p \neq 0$, y $c > 0$, tales que $p \cdot x \geq c$ y $p \cdot y \geq c$. Así tenemos que

$$p \cdot (x_{k_\ell} + y_{k_\ell}) = \|x_{k_\ell}\|\, p \cdot (\frac{x_{k_\ell}}{\|x_{k_\ell}\|}) + \|y_{k_\ell}\|\, p \cdot (\frac{y_{k_\ell}}{\|y_{k_\ell}\|})$$

por otra parte, como $p \cdot (\frac{x_{k_\ell}}{\|x_{k_\ell}\|}) \to [p \cdot x] > 0$ y $p \cdot (\frac{y_{k_\ell}}{\|y_{k_\ell}\|}) \to [p \cdot y] > 0$, entonces dado que $\|x_{k_\ell}\| \to \infty$ y también $\|y_{k_\ell}\| \to \infty$, se tiene que $\|p \cdot (x_{k_\ell} + y_{k_\ell})\| \to \infty$.

Pero como $x_{k_\ell} + y_{k_\ell} \to 0$, entonces $p \cdot (x_{k_\ell} + y_{k_\ell}) \to 0$, lo que contradice nuestro anterior resultado.

Por lo tanto $x + y = 0$ con $x \in \mathbf{A}(E)$ y con $y \in \mathbf{A}(F)$, y como son elementos de la esfera unitaria entonces $x \neq 0 \neq y$, contradiciendo nuestro supuesto de partida de que los conos asintóticos de E y F son positivamente semi-independientes. $\square$

Ahora, dado un conjunto S y $f : S \to S$ una función de S en sí mismo. Tenemos un especial interés en la existencia de un punto cuya imagen bajo f sea él mismo.

Definición 1.10.4 *Dada una **función** $f : S \to \mathbb{R}^n$, con $S \subset \mathbb{R}^n$, decimos que x^* es un **punto fijo** de f si $x^* = f(x^*)$.*

*En el caso en que f sea una **correspondencia**, decimos que $\hat{x}$ es un **punto fijo** de f si ocurre que $\hat{x} \in f(\hat{x})$.*

Geométricamente en el caso de funciones, un punto fijo significa un corte de la función f con la diagonal de $\mathbb{R}^n$. Desde un punto de vista operativo, un punto fijo puede relacionarse con la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: Sea $g : S \to \mathbb{R}^n$ una función y considere un sistema de ecuaciones

$$g(s) = 0$$

Definimos una función auxiliar $f : S \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(s) = s - g(s)$$

sea s^* un punto fijo de la función f, entonces por definición $x^* = x^* - g(x^*)$, es decir $g(x^*) = 0$.

El siguiente teorema es de suma importancia para nuestro análisis económico de la parte de equilibrio general del siguiente capítulo y se enuncia sin demostración.

Teorema 1.10.4 *[Brouwer] Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto no-vacío, compacto y convexo, entonces dada una función $f \subset S \times S$, existe $s^* \in S$ tal que es un punto fijo de f (i.e. $(s^*, s^*) \in f$).*

De la misma forma, dada una correspondencia $g : S \to S$, el siguiente teorema nos ayudará a demostrar la existencia de un punto, llamado equilibrio de Nash, en un juego en forma estratégica, y también se enuncia sin demostración.

Teorema 1.10.5 *[Kakutani] Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto no-vacío, compacto y convexo, dada una correspondencia $g : S \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$ que cumple con:*

- *$g(s)$ es un conjunto no vacío y convexo, $\forall s \in S$*

- *La gráfica de g es cerrada*

entonces existe $\hat{s} \in S$ tal que es un punto fijo de la correspondencia f (i.e. $\hat{s} \in g(\hat{s})$).

Para poder demostrar la existencia de un equilibrio en el caso de Equilibrio General con producción requerimos definir un ente que generaliza la teoría de juegos, llamado Economía Abstracta, lo cual hacemos en la sección 2.5. Sin embargo, debido a la idea intuitiva que nos proporcionan los juegos en forma estratégica de cómo funciona éste mecanismo y cómo modela el comportamiento de los agentes de una economía, hacemos una introducción a la Teoría de Juegos.

Un **juego en forma estratégica** es un modelo donde actúan varios agentes o jugadores, en el cual las decisiones de los demás agentes afectan el pago por la acción de un jugador. Suponemos que los jugadores actúan de manera racional.

La decisión sobre cual acción elegir la toman al mismo tiempo todos los jugadores (se hace simultáneamente), por lo que cada participante tiene un comportamiento estratégico, el cual le hace tomar la que considera que es la decisión que más beneficio le traerá en base a las decisiones que espera de los demás agentes dado el comportamiento estratégico y racional de cada uno y sus preferencias sobre las diferentes consecuencias de dichas acciones.

El hecho de que la decisión de los jugadores sea simultánea se puede interpretar como que los jugadores no tienen otra información más que las reglas del juego, sus pagos y que los demás jugadores son racionales.

Definición 1.10.5 *Definimos un **juego en forma estratégica** como la tripleta*

$$\Gamma = \left\{ J, \{A_n\}_{n=1}^{N}, \{\succeq_i\}_{n=1}^{N} \right\}$$

donde

- *J es el **conjunto de jugadores** ($n = 1, 2, \ldots, N$)*

- *A_n es el **conjunto de acciones** del jugador n (para $n = 1, 2, \ldots, N$), el cual siempre supondremos que es no vacío. Definimos al **conjunto de combinación de acciones** de los jugadores como $A = \prod_{n=1}^{N}(A_n)$ (donde cada $a \in A$ es una **combinación de acciones**).*

- *Las relaciones de preferencias $\succeq_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, están definidas sobre el conjunto de acciones de todos los jugadores A y son independientes para cada jugador.*

Podemos definir de forma natural a la relación de preferencia de cada jugador, pensando más en las consecuencias que cada $N - ada$ de acciones le traerá a cada uno de ellos, que en las acciones que toman en sí. Para ver esto, asociamos a cada combinación de acciones una y sólo una combinación de consecuencias $c \in C$, donde C es el **conjunto de consecuencias** de las acciones en A, el cual queda determinado a través de A por las características del juego.

Entonces pensamos que, a priori, existe una relación de preferencias $\succeq_i^*$ sobre el conjunto C, la cual induce a la relación de preferencias $\succeq_i$ sobre A en el sentido de que, dadas $a, b \in A$, entonces

$$a \succeq_n b \iff g(a) \succeq_n^* g(b)$$

donde $g : A \to C$ es la función que construimos al dar la regla de correspondencia entre los elementos de A y C y se conoce como la **función de consecuencias**.

Así, en base al criterio dado por las relaciones inducidas $\succeq_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$, los jugadores decidirán que acción tomar, considerando las acciones que pueden tomar los demás participantes.

Si la relación de preferencias $\succeq_n$ del n-ésimo jugador en un juego estratégico, puede ser representada por una función $u_n : A \to \mathbb{R}$ (en el sentido de que, dadas $a, b \in A$, se tiene que $a \succeq_n b \iff u_n(a) \geq u_n(b)$), entonces ésta se llamará **función de pagos** del jugador n. Estas funciones a menudo toman el lugar de las relaciones de preferencia en la definición de juego en forma estratégica.

Ejemplo 1.10.1 (Dilema del prisionero) *Suponga que dos sospechosos de un crimen son puestos en celdas separadas y son interrogados a cerca de su culpabilidad. Para tratar de que los sospechosos digan la verdad, las autoridades deciden que si ambos confiesan el crimen, serán sentenciados a* 3 *años de prisión.*

Si sólo uno confiesa, éste será liberado y usado como testigo contra el otro, al que se le impondrá una sentencia de 5 *años. Por último, si ninguno confiesa, ambos serán sentenciados por una falta menor y serán condenados a* 1 *año de prisión.*

Podemos representar ésta situación como un juego en forma estratégica identificando las diferentes partes del problema con las componentes del juego como:

- *Si P_1, P_2, representan a los dos prisioneros, entonces $J = \{P_1, P_2\}$*
- *Representamos con C la acción confesar y con NC la no confesar. Entonces el conjunto de acciones de cada jugador está dado por $A_1 = A_2 = \{C, NC\}$*
- *El conjunto de consecuencias está dado por*

  $$C = \{(3,3), (5,0), (0,5), (1,1)\}$$

  donde $(a,b) \succeq_1^* (c,d)$ si $a \leq c$ y también $(a,b) \succeq_2^* (c,d)$ si $b \leq d$.
- *Las funciones de pago para cada jugador son*

  $$u_1 = \{(C,C,3), (C,NC,5), (NC,C,0), (NC,NC,1)\}$$

  $$u_2 = \{(C,C,3), (C,NC,0), (NC,C,5), (NC,NC,1)\}$$

Note que aquí, la combinación de acciones que nos de un pago menor será preferida a la de un pago mayor. En ésta situación, la mejor acción para ambos prisioneros sería que ninguno confesara y pasaran cada uno 1 *año en la cárcel, pero ambos tienen incentivos para confesar y esperar que el otro no confiese y de ésta forma salir libre.*

El ejemplo anterior nos ilustra una de las más usadas aplicaciones de la teoría de juegos en la economía, la obtención de información útil y verdadera de los agentes al estar bajo una situación de juego estratégico. Esto es importante ya que muchas veces podemos conocer más sobre los agentes a través de plantear una algún problema en forma de juego estratégico, y así obtener un mayor beneficio.

Algunas ramas de la economía como la Economía Pública, utilizan los juegos como una importante herramienta tanto teórica (en la obtención de resultados) como práctica, pues muchos mecanismos del estado están basados en ésta teoría.

Nota 1.10.1 *Vamos a caracterizar al siguiente producto*

$$\bar{A}_n = A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_{n+1} \times \cdots \times A_N$$

como el conjunto de $(N-1)$-uplas ordenadas de la forma

$$\bar{a}_n = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}, \ldots, a_N)$$

Definición 1.10.6 *Un **equilibrio de Nash** de un juego en forma estratégica*

$$\Gamma = \left\{ J, \{A_n\}_{n=1}^N, \{\succeq_n\}_{n=1}^N \right\}$$

es una combinación de acciones $a^* \in A$ tal que para cada jugador n-ésimo ocurre que

$$(\bar{a}_n^*, a_n^*) \succeq_n (\bar{a}_n^*, a_n), \quad \forall a_n \in A_n$$

es decir, no existe otra acción preferida a a_n^* para algún jugador n-ésimo cuando los otros jugadores eligen su acción de equilibrio a_j^*, $j \neq n$.

Cuando se pueden definir funciones de pago para los diferentes jugadores, entonces la condición para que a^* sea equilibrio de Nash cambia a que, para todo jugador n-ésimo se cumpla que:

$$u_n(a^*) \geq u_n(a_n, \bar{a}_n^*), \; \forall a_n \in A_n$$

Así, un pago mejor al elegir una acción diferente representa un incentivo para cambiar de estratégia.

Nota 1.10.2 *En el ejemplo del dilema de los prisioneros, ambos jugadores tienen incentivos para confesar, ya que si el otro confiesa, el primero sale libre, pero la mejor estrategia para ambos es el no confesar. Sin embargo, si alguno no confiesa, corre el peligro de que el otro si lo haga y pasar* 5 *años en prisión, por lo que sabiendo que el otro tiene ésta misma información, decide confesar. Así, el equilibrio de Nash de éste juego es el par (C, C) en donde ambos jugadores confiesan.*

La siguiente definición nos ayudará a ver más claramente la esencia de definir al equilibrio de Nash de la forma que lo hicimos, y nos ayudará a demostrar, a través del teorema del punto fijo de Kakutani (1.10.5), la existencia de un equilibrio de Nash en un juego dado.

Definición 1.10.7 *Sea Γ un juego en forma estratégica y sea $\bar{a}_n \in \bar{A}_n$*

- *Decimos que $\hat{a}_n$ es la* ***mejor respuesta del jugador*** *n* ***para*** *$\bar{a}_n$ si ocurre que*

$$(\hat{a}_n, \bar{a}_n) \succeq_n (a_n, \bar{a}_n), \ \forall a_n \in A_n$$

- *Definimos el* ***conjunto de mejor respuesta*** *del jugador n para $\bar{a}_n$ como*

$$MR_n(\bar{a}_n) = \{\hat{a}_n \in A_n \mid (\hat{a}_n, \bar{a}_n) \succeq_n (a_n, \bar{a}_n), \ \forall a_n \in A_n\}$$

- *Decimos que $MR : A \to A$ es la* ***correspondencia de mejor respuesta*** *de Γ si*

$$MR(a) = MR_1(\bar{a}_1) \times MR_2(\bar{a}_2) \times \cdots \times MR_N(\bar{a}_N)$$

Nota 1.10.3 *De ésta definición se observa que podemos encontrar un equilibrio de Nash en un juego en forma estratégica Γ, si y sólo si, existe una combinación de acciones a^* tal que $a_n^* \in MR_n(\bar{a}_n^*)$, para todo $n \in N$. Es decir, si existe un punto fijo a^* de la correspondencia de mejor respuesta de Γ.*

Definición 1.10.8 *Una relación de preferencias $\succeq_n$ sobre A es* ***cuasicóncava*** *en A_n si para cada $a^* \in A$, el conjunto $\{a_n \in A_n \mid (\bar{a}_n^*, a_n) \succeq_n a^*\}$ es un conjunto convexo.*

El siguiente teorema es uno de los resultados primordiales de la teoría de juegos, ya que nos garantiza que bajo ciertas circunstancias, un juego en forma estratégica tiene al menos un equilibrio, con lo cual tiene sentido el buscarlo.

Teorema 1.10.6 (Existencia de equilibrio de Nash) *El juego en forma estratégica*

$$\Gamma = \left\{ N, \{A_n\}_{n=1}^{N}, \{\succeq_n\}_{n=1}^{N} \right\}$$

tiene un Equilibrio de Nash, si y sólo si, para todo $n \in N$

- *El conjunto de acciones A_n del jugador n, es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio euclideano*

- *La relación de preferencia $\succeq_n$ es continua y cuasicóncava en A_n*

Demostración. Sea $MR : A \to A$, la correspondencia de mejor respuesta de Γ, entonces de la definición del conjunto $MR_n(\bar{a}_n)$ se sigue que es no vacío ya que $\succeq_n$ es continua y A_n es compacto, y además es convexo pues $\succeq_n$ es cuasicóncava en A_n.

También vemos que $MR(\cdot)$ tiene gráfica cerrada pues $\succeq_n$ es continua, para toda $n \in N$. Así, podemos aplicar a la correspondencia de mejor respuesta el Teorema de punto fijo de Kakutani (1.10.5), por lo que ésta tendría un punto fijo que, como hemos visto en la Nota 1.10.3, es un Equilibrio de Nash.$\square$

Éste teorema nos asegura la existencia de un Equilibrio de Nash para un juego en forma estratégica Γ, por lo que permite modelar varias situaciones de economía con la seguridad de que se podrá encontrar una solución al problema planteado al poder obtener un equilibrio de Nash.

Desde luego la Teoría de Juegos es mucho más amplia, ya que hay diferentes tipos de juegos (como los juegos en estrategias mixtas, los juegos cooperativos, los juegos repetidos, etc.) y varias de las componentes del juego se pueden hacer variar.

Capítulo 2

Fundamentos Microeconómicos

2.1. Introducción

En ésta sección trataremos la parte económica del trabajo, definiendo los conceptos fundamentales de las teorías del consumidor, del productor y del equilibrio general y mostrando sus resultados basándonos en el primer capítulo del trabajo.

Comenzaremos por dar los supuestos básicos del **modelo económico general** en el cual basamos nuestro estudio, así como haciendo una descripción de estos y sus implicaciones en nuestro estudio (a manera de justificación de su uso). Una vez definido y analizado el concepto de economía y descrito el mecanismo de asignación de recursos que usaremos, pasaremos al análisis de la **teoría del consumidor** en la cual trataremos de describir el proceso mediante el cual un individuo decide consumir ciertas cantidades de distintos bienes por sobre otras cantidades posibles a través de un criterio de elección de preferencias del agente. Definiremos los conceptos de Conjunto de Consumo, Preferencias y de Función de Utilidad, que usaremos para demostrar la existencia de ésta última dados algunos supuestos. Entonces daremos algunos axiomas adicionales para solucionar el problema del consumidor de maximización de sus preferencias sujeto a ciertas restricciones, con lo cual encontraremos la demanda y con ello la función de utilidad indirecta del consumidor.

Seguiremos nuestro estudio con la **teoría del productor**. Aquí analizaremos el proceso de elección de cantidades de producción por un agente que denominaremos empresa, dadas unas ciertas restricciones económicas y tecnológicas, la cual se hace a través del criterio de elección de maximización de los beneficios. Comenzaremos describiendo el conjunto de producción y sus supuestos, pasando al problema de maximización de beneficios y de economías de escala. Para esto usamos los conceptos de función, correspondencia y de conos principalmente.

Por último pasamos a la parte de **equilibrio general**, donde estudiaremos primero, por simplificación, una economía simple donde hay intercambio puro, en la que nos basaremos para después estudiar el equilibrio en una economía con producción. Comenzaremos describiendo brevemente el entorno de la economía de intercambio puro, dando el concepto de equilibrio y demostrando la ley de Walras y la existencia de un equilibrio Walrasiano. Después haremos esto mismo pero incorporando producción en nuestro análisis. Con esto concluimos nuestro trabajo, describiendo en forma matemática los principios de ésta economía de mercados, y sentando las bases para el estudio de cualquier otra rama de la economía.

2.2. El Modelo Básico

Para la construcción de éste Modelo Básico como representación abstracta de una economía competitiva se requiere la especificación de tres tipos de elementos:

1. Las **mercancías** y los **precios**, que son variables del problema
2. Los **agentes** que son las unidades de decisión del modelo
3. La naturaleza del **proceso de toma de decisiones** que nos proporcionará el marco de referencia en el que se mueven los agentes

Por lo que daremos las definiciones y los supuestos básicos que construyen éste modelo.

Nosotros vamos a distinguir elementos y procesos tanto espacial (dónde estarán disponibles) y temporalmente (cuándo estarán disponibles) como por sus características físicas.
El intervalo de tiempo en el que una actividad económica es llevada a cabo es dividido en un número finito de **intervalos compactos elementales** (llamados **fechas**) de igual medida (suficientemente pequeños para considerarlos de medida indistinguibles desde el punto de vista del análisis), los cuales se enumeran cronológicamente comenzando con el **momento actual** y se denotan por t.

Similarmente, el espacio donde una actividad económica es realizada es dividida en un número finito de **regiones compactas elementales** (llamadas **lugares**), elegidas suficientemente pequeñas para considerarlas indistinguibles desde el punto de vista del análisis, enumeradas arbitrariamente y denotadas por s.

Los **bienes**, en términos generales, son objetos útiles, provechosos o agradables que proporcionan a quienes los consumen un cierto valor de uso o utilidad. Los **bienes económicos**, más específicamente, son objetos que se producen para su intercambio en el mercado. Para que un objeto pueda ser considerado un bien económico es preciso que el mismo tenga una cierta demanda, es decir, que sea considerado por algunas personas como un objeto capaz de satisfacer sus necesidades, y que el bien resulte escaso en relación a esa demanda. Un bien que tenga oferta ilimitada no pasa a formar parte de los intercambios entre seres humanos y se considera un **bien libre o no económico**.

En economía resulta de suma importancia la clasificación de los bienes de acuerdo a sus características: se habla entonces de bienes de capital, bienes intermedios y bienes de consumo; de bienes privados, públicos o mixtos; de bienes complementarios o sustitutivos, etc. Pero esto no nos va a interesar en éste trabajo por formar parte de temas más específicos dentro de la economía. Los **servicios** se definen como los bienes intangibles, es decir, bienes que no se presentan en forma material, como los espectáculos o el trasporte.

Así, en nuestro modelo básico consideramos una economía en momento presente y en un contexto de ausencia de incertidumbre. En éste contexto vamos a definir una **mercancía** como un bien o servicio completamente especificado física, temporal y espacialmente. Dos bienes o servicios con las mismas propiedades físicas serán considerados mercancías distintas si resultan disponibles en fechas o lugares diferentes. Una mercancía proporcionada a un agente se llamará **insumo**, y si es proporcionada por el agente se llamará **producto**. Establecemos los siguientes supuestos básicos para las mercancías:

- **Supuesto Básico 1**: Existe un número finito de mercancías distinguibles entre sí, que denotaremos por ℓ.
- **Supuesto Básico 2**: Cualquier número real puede representar una cierta cantidad de mercancía (las mercancías resultan ser perfectamente divisibles).

Estos supuestos nos van a ayudar a simplificar nuestro análisis, aunque muchas veces no corresponda a la realidad pues algunos bienes no pueden dividirse (solo pueden representarse con número enteros), pero nos dará una idea aproximada de las decisiones a tomar. Bajo estos dos supuestos podemos tomar al espacio euclideano $\mathbb{R}^\ell$ como el **espacio de mercancías**, por lo que una **opción** para un agente vendrá dada por un vector ℓ-dimensional cuyos componentes representan las distintas cantidades de mercancías.

A toda mercancía $k = 1, 2, \ldots, \ell$, asociaremos un número real p_k que denominaremos su **precio**, el cual se interpreta como la cantidad pagada aquí y ahora por un agente por una unidad de la $k-$ésima mercancía (bien o servicio que será entregado en un lugar s en una fecha t). Los precios positivos corresponderán a aquellas mercancías que resulten **deseables** para los agentes, los precios nulos a las mercancías que posean el carácter de **bienes libres** (mercancías a las cuales es muy difícil o muy costoso poner un precio) y los precios negativos se pueden interpretar como el coste por la eliminación de una mercancía que resulte **indeseable**. Note que el carácter de los diferentes tipos de bienes es una propiedad económica y no derivan necesariamente de sus propiedades intrínsecas.

- **Supuesto Básico 3**: Un sistema de precios viene dado por un punto $p \in \mathbb{R}^\ell$.

Éste supuesto del modelo nos dice que existe un precio para cada mercancía y por lo tanto un mercado para cada bien o servicio en cualquier momento o región cubiertos por el modelo. Sin embargo los distintos valores de los precios nos definirán distintas características (como la no convexidad) en los conjuntos de elección de los agentes.

Los **agentes económicos** son los que toman las decisiones de producción y consumo en nuestro modelo. A ellos les asociamos la idea de comportamiento racional (definido más adelante) al maximizar sus funciones objetivo individuales sobre sus conjuntos de oportunidades. Consideramos que hay solo dos tipos de agentes en nuestro modelo, los **consumidores** (quienes deciden sobre planes de consumo) y las **empresas** (que deciden sobre planes de producción). Sobre los agentes tenemos dos supuestos:

- **Supuesto Básico 4**: Existe un número finito y dado de agentes económicos que pertenecen a una de las siguientes dos categorías: consumidores o empresas (supondremos que hay m consumidores y n empresas).
- **Supuesto Básico 5**: Cada agente está definido por un cierto conjunto de elección, un criterio de ordenación de alternativas (preferencias $\succeq$ o función objetivo π) y ciertas restricciones. Su comportamiento se caracteriza por la búsqueda de las opciones que resultan mejores (según su propio criterio de ordenación) entre las alcanzables.

Podemos entonces representar a los agentes de nuestra economía como: $\left[\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^m, \{Y_j, \pi_j\}_{j=1}^n\right]$ donde X_i es el conjunto de elección del i-ésimo consumidor y Y_j el conjunto de elección para la j-ésima empresa, y también $X_i, Y_j \subset \mathbb{R}^\ell, \ \forall i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n.$

- **Supuesto Básico 6**: El problema de elección de cada agente se plantea bajo condiciones de certidumbre (no hay incertidumbre de la naturaleza de las mercancías, de los objetivos de los agentes ni de sus conjuntos de elección ni de oportunidades).

Para un agente, un **plan de acción** completo constituye la especificación de una lista completa de mercancías que se hacen disponibles o puestas a disposición.

Definición 2.2.1 *Definimos una **economía** como una especificación de los agentes económicos, sus preferencias, sus conjuntos de elección, y de los recursos iniciales disponibles. Podemos describir brevemente una economía como*

$$E = \left[\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^{m} ; \{Y_j, \pi_j\}_{j=1}^{n} ; \omega\right]$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^{\ell}$ representa las cantidades de recursos inicialmente disponibles.

*Denotaremos por $\mathbb{E}$ al **espacio de las economías**, es decir el conjunto de todas las especificaciones admisibles posibles de economías.*

El funcionamiento de una economía $E \in \mathbb{E}$ puede visualizarse como un proceso mediante el cual los recursos iniciales son transformados (física, temporal, espacial o distribucionalmente), lo que se conoce como un **proceso de asignación de recursos**.

Definición 2.2.2 *Una **asignación** es una especificación de una acción para cada agente, es decir, un punto del conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i \times \prod_{j=1}^{n} Y_j \subset \mathbb{R}^{\ell(m+n)}$.*

*Al **conjunto de todas las asignaciones posibles** lo denotaremos por Ω.*

Definición 2.2.3 *Un **mecanismo de asignación de recursos** es una correspondencia*

$$M : \mathbb{E} \to \mathbb{P}(\Omega)$$

de modo que a cada economía particular le asocia el conjunto de resultados $M(E)$ que su funcionamiento le permite alcanzar.

Dada una economía $E = \left[\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^{m} ; \{Y_j, \pi_j\}_{j=1}^{n} ; \omega\right]$, el mecanismo de asignación de recursos depende de las características descritas en E y del **marco institucional** en que éste opere (en particular de los derechos de propiedad y del conjunto de reglas que definen qué tipos de actuaciones o comportamientos de los agentes son posibles). Existen muchos marcos institucionales alternativos como las economías de mercado, economías planificadas, economías mixtas, etc. Pero a lo largo de éste trabajo nos enfocaremos en la modelización de los agentes económicos haciendo hincapié en el mecanismo de asignación de recursos denominado **Mecanismo Competitivo**, el cual se caracteriza por los siguientes elementos:

1. Los mercados y los precios son las instituciones mediante las cuales se coordina el proceso de transformación y distribución de recursos.

2. Los precios son determinados en los mercados, sin que ningún agente individual tenga capacidad de influencia sobre los mismos (los agentes son **tomadores de precios**).

3. Las decisiones de consumo y producción son adoptadas por los agentes individualmente, sin que sus conjuntos de oportunidades o sus funciones objetivo dependan de las acciones de los demás agentes (salvo a través de precios).

Nota 2.2.1 *En la definición del mecanismo competitivo se excluyen muchos casos importantes de estudio en la economía como el de los Monopolios, la intervención de alguna autoridad en las decisiones de producción y consumo, la presencia de Externalidades en la economía, la colusión entre varios agentes, entre otros. Pero estos temas se pueden estudiar bajo ésta perspectiva si relajamos un poco los supuestos de partida de éste análisis, cosa que no haremos en éste trabajo pero de la cual se ocupa en gran medida la rama de la Economía Pública y la Organización Industrial.*

También es importante observar que hasta el momento no se ha hecho una formalización completa de los demás marcos institucionales desde donde se puede modelar la economía, por lo que el análisis de éste marco se hace indispensable.

- **Supuesto Básico 7**: Las acciones de los agentes en una economía dependerán únicamente de sus características individuales y de los precios de mercado que toman.

Si consideramos una economía bajo Mecanismo competitivo (**economía competitiva o walrasiana**) en la cual los consumidores poseen la propiedad tanto de los recursos iniciales como de las empresas, diremos que es una **Economía de Propiedad Privada**.

Nota 2.2.2 *En la forma que hemos definido nuestro modelo, observamos que en éste se priva de toda secuencialidad a las decisiones que se toman, ya que se están considerando todas las posibilidades de consumo hoy y en tiempos subsecuentes (pues no pusimos restricciones sobre la temporalidad de las mercancías).*

2.3. Teoría del Consumidor

En ésta sección vamos a estudiar el problema de decisión del consumidor como un problema de elección (de consumo) bajo restricciones (que pueden ser presupuestarias, institucionales o de la naturaleza de los bienes y servicios).

2.3.1. Conjunto de Consumo

Definición 2.3.1 *Un* ***consumo posible*** *(o plan de consumo) de un agente (consumidor) i, es un vector ℓ-dimensional del espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$ representado por x_i.*

Cada una de las componentes de x_i representa una cantidad de un bien o servicio, los insumos de los consumidores estarán dados por cantidades positivas y los productos por cantidades negativas.

El conjunto de todos los consumos posibles para el i-ésimo consumidor $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$, se denomina ***Conjunto de Consumo*** *del i-ésimo consumidor $(i = 1, 2, \dots, m)$.*
Dado un consumo x_i para cada consumidor $i = 1, 2, \dots, m$, el vector $x = \sum_{i=1}^m x_i$ es un ***consumo total*** *y $X = \sum_{i=1}^m X_i$ es llamado el* ***Conjunto Total de Consumo****.*

Un plan de consumo de un agente normalmente representa cantidades de bienes que quiere consumir o de bienes que posee y oferta (incluyendo su fuerza de trabajo). Para construir un modelo más practico y sencillo en nuestra economía, requerimos de ciertos supuestos (que tienen un sustento razonable de ser) sobre el conjunto de consumo.

Supuestos del Conjunto de Consumo

1. X_i es un subconjunto no vacío y cerrado de $\mathbb{R}^\ell$
2. X_i posee una cota inferior para $\leq$, es decir, $\exists b_i \in \mathbb{R}^\ell$ tal que $b_i \leq x_i$ para todo $x_i \in X_i$.
3. X_i es un conjunto convexo.

El primer supuesto es un tanto técnico y nos dice que si todos los consumos x_i^k, $\forall k \in \mathbb{N}$, son posibles para el i-ésimo consumidor y $x_i^k \to x_i^0$, entonces x_i^0 es un consumo posible para éste agente.
La factibilidad del segundo supuesto está dada por la cantidad finita de recursos iniciales que puede tener un agente en la economía, y el último de los supuestos nos dice que los promedios ponderados de consumos posibles también son posibles (éste supuesto exige la perfecta divisibilidad de los bienes), además por el Teorema 1.9.3, si cada conjunto X_i es convexo entonces X también lo es.

Nota 2.3.1 *Obsérvese que el elemento $b = \sum_{i=1}^m b_i$ es una cota inferior del conjunto X para el orden $\leq$.*

Muchas de las características de los conjuntos X_i se heredan directamente al conjunto X, ya que son propiedades que hemos demostrado se cumplen para la suma de conjuntos que cumplen con estas.
Sin embargo no siempre es así, ya que muchas otras propiedades del conjunto suma no las hereda directamente de los que lo forman, sino que debemos demostrar que lo cumplen bajo ciertas circunstancias. El siguiente lema nos muestra uno de estos casos.

Lema 2.3.1 *X es cerrado*

Demostración. Por el Teorema 1.10.3 de la parte matemática, dado que los conjuntos X_i son cerrados, basta probar que los conos asintóticos $\mathbf{A}X_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, son positivamente semi independientes.

Como cada uno de los conjuntos X_i está acotado por abajo por b_i, entonces tenemos que $x_i \geq b_i,\ \forall x_i \in X_i$, luego

$$x_i - b_i \geq 0 \implies x_i \in [b_i + \mathbb{R}^n_+] \qquad \forall x_i \in X_i$$

luego así tenemos que el conjunto X_i cumple con

$$X_i \subset [b_i + \mathbb{R}^n_+]$$

y por el Teorema 1.10.2 se cumple que

$$\mathbf{A}(X_i) \subset \mathbf{A}[b_i + \mathbb{R}^n_+] = \mathbf{A}(\mathbb{R}^n_+) = \mathbb{R}^n_+$$

es decir, los conos asintóticos $\mathbf{A}(X_i)$ de cada conjunto tienen solo cantidades no negativas de los diferentes bienes y así, dada la suma $\sum_{i=1}^m x_i = 0$ con $x_i \in \mathbf{A}X_i, \forall i = 1, 2, \ldots, m$, se tiene que los elementos $x_i = 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m$. $\square$

2.3.2. Preferencias

Ahora introduciremos un criterio de comparación entre los elementos del conjunto X_i para el i-ésimo consumidor. Supondremos que éste consumidor tiene definida cierta preferencia $\succeq_i$ sobre los elementos del conjunto X_i, la cual es una relación binaria que puede leerse como **"ser al menos tan preferida como"**, i.e., si $x_i, y_i \in X_i$ con $x_i \succeq_i y_i$, entonces el i-ésimo consumidor prefiere al plan de consumo x_i al menos tanto como a y_i.

Con respecto a ésta relación estableceremos unos axiomas que nos permitirá modelar de manera operativa las preferencias de los consumidores y están de acuerdo con la idea de que el consumidor ordena de manera consistente todas sus alternativas de consumo.

Axioma 1 (Completitud de las Preferencias) *Para cualesquiera dos $x_i, y_i \in X_i$, se tiene que $x_i \succeq_i y_i$ o bien $y_i \succeq_i x_i$.*

Éste axioma implica que el consumidor está en capacidad de comparar cualquier par de alternativas dentro del conjunto de consumo y establecer cual prefiere o si las prefiere por igual. Note que dado $x_i \in X_i$, si se cumple éste axioma de completitud entonces el consumidor puede decir $x_i \succeq_i x_i$, así la **reflexivilidad** de la relación de preferencia es consecuencia de éste axioma

Axioma 2 (Transitividad de las Preferencias) *Para todo $x_i, y_i, z_i \in X_i$, si se verifica que $x_i \succeq y_i$ y $y_i \succeq z_i$ entonces se debe cumplir que $x_i \succeq_i z_i$.*

Éste axioma nos asegura que las elecciones del consumidor son consistentes y cumplen con cierta lógica. La relación binaria $\succeq_i$ definida en X_i se denomina **Relación de Preferencia** si satisface los axiomas 1 y 2 (la cual por definición es un preorden completo).

A partir de la relación $\succeq_i$ podemos definir una nueva relación entre los elementos del conjunto X_i llamada **Relación de Indiferencia**, denotada por $\sim_i$, la cual se da si y sólo si se tiene que, dados $x_i, y_i \in X_i$ entonces $x_i \succeq_i y_i$ y $y_i \succeq_i x_i$.

Entonces $x_i \sim_i y_i$ se lee como "x_i es indiferente a y_i", indicando que estas opciones de consumo son igualmente valoradas por el consumidor i.

Lema 2.3.2 *Si la relación $\succeq_i$ es completa y transitiva entonces la relación $\sim_i$ es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Demostración.

1. Si $\succeq_i$ es completa entonces dado $x_i \in X_i$ arbitrario, se tiene que $x_i \succeq_i x_i$, luego por definición $x_i \sim_i x_i$. Así $\sim_i$ es reflexiva.

2. Sean $x_i, y_i \in X_i$ tales que $x_i \sim_i y_i \;\Leftrightarrow\; x_i \succeq_i y_i$ y $y_i \succeq_i x_i \;\Leftrightarrow\; y_i \succeq_i x_i$ y $x_i \succeq_i y_i \;\Leftrightarrow\; y_i \sim_i x_i$. Así $\sim_i$ es simétrica.

3. Sean $x_i, y_i, z_i \in X_i$ tales que $x_i \sim_i y_i$ y $y_i \sim_i z_i$.
   Por definición se debe cumplir que $x_i \succeq_i y_i,\ y_i \succeq_i x_i,\ y_i \succeq_i z_i\ y\ z_i \succeq_i y_i$. Ahora, como $\succeq_i$ es transitiva entonces $x_i \succeq_i z_i\ y\ z_i \succeq_i x_i$ luego $x_i \sim_i z_i$. Así, $\sim_i$ es transitiva. □

De la proposición anterior se tiene que la relación $\sim_i$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de X_i por la relación de indiferencia las designamos como $I_i(x_i) \subset X_i$, donde

$$I_i(x_i) = \{y_i \in X_i \mid x_i \sim_i y_i\}$$

Los conjuntos $I_i(x_i)$ se conocen como **Clases de Indiferencia**. Por ser una relación de equivalencia, las clases de indiferencia constituyen una **partición** del conjunto de elección, de modo que se verifica que $I_i(x_i) \neq \emptyset$ para todo $x_i \in X_i$ (pues $x_i \in I_i(x_i)$) y además son disjuntas a pares y cumplen

$$\bigcup_{x_i \in X_i} I_i(x_i) = X_i$$

Una clase de indiferencia definida en X_i se dice que es **gruesa** si su interior en X_i es no vacío.

Ahora, a partir de las relaciones $\succeq_i$ y $\sim_i$ podemos a su vez dar la relación de **preferencia estricta** $\succ_i$, definida en X_i como: dados $x_i, y_i \in X_i$ se tiene $x_i \succ_i y_i$ si y sólo si $x_i \succeq_i y_i$ pero no es cierto que $x_i \sim_i y_i$.

Lema 2.3.3 *Con la notación anterior se tiene que la relación $\succ_i$ no es reflexiva y cumple* ***asimetría*** *($x_i \succ_i y_i$ implica que $y_i \not\succ_i x_i$)*

Demostración.

- No es reflexiva pues $\sim_i$ es reflexiva, i.e., $x_i \sim_i x_i \ \Rightarrow \ x_i \succ_i x_i$ no ocurre.
- Ahora suponga que $x_i \succ_i y_i$, entonces por definición no ocurre que $y_i \succeq_i x_i \implies y_i \succ_i x_i$ no puede ocurrir, por lo que $\succ_i$ es asimétrica. □

Por estas propiedades, si aplicamos la relación $\succ_i$ al conjunto cociente $(X_i/\sim_i)$ [conjunto de clases de equivalencia en X_i bajo la relación $\sim_i$] obtendremos una ordenación completa de las clases de equivalencia.

Axioma 3 (Continuidad de las Preferencias) *Para todo $x_i^0 \in X_i$, los siguientes conjuntos son cerrados en X_i*

$$M_i\left(x_i^0\right) = \left\{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^0\right\}$$
$$P_i\left(x_i^0\right) = \left\{x_i \in X_i \mid x_i^0 \succeq_i x_i\right\}$$

Aquí, el conjunto $M_i\left(x_i^0\right)$ describe las opciones que son débilmente preferidas a x_i^0 y el conjunto $P_i\left(x_i^0\right)$ a las que son débilmente aborrecidas respecto a x_i^0. La continuidad en las preferencias significa que si tomamos dos planes de consumo $x_i, y_i \in X_i$ con $x_i \succ_i y_i$, entonces existen bolas abiertas $B_\epsilon(x_i)$, $B_\delta(y_i)$ tales que, para todo $z \in B_\epsilon(x_i)$ se verifica $z \succeq_i y_i$, y para todo $s \in B_\delta(y_i)$ se verifica $x_i \succeq_i s$.

Note que éste axioma nos va a ayudar a definir con claridad cuales son los planes de consumo estrictamente preferidos, los estrictamente aborrecidos y los indiferentes a x_i^0, es decir, va a impedir reversiones en las preferencias (determina que las zonas de indiferencia son conjuntos cerrados por ser intersección de dos cerrados, luego elimina zonas indiferentes abiertas que pueden provocar estas inversiones).

Nota 2.3.2 *En virtud de las definiciones anteriores, si se cumplen los axiomas 1,2 y 3, entonces se tiene que:*

- $I_i\left(x_i^0\right) = M_i\left(x_i^0\right) \cap P_i\left(x_i^0\right)$
- $X_i = M_i\left(x_i^0\right) \cup P_i\left(x_i^0\right)$

2.3.3. La Función de Utilidad

Hasta éste punto hemos visto que bajo los axiomas 1 y 2, la relación $\sim_i$ permite establecer una relación de equivalencia sobre X_i que constituye una partición del conjunto mismo cuyos elementos son las clases de indiferencia. Ahora queremos ver si dado un conjunto completamente preordenado por una relación de preferencia, existirá una función real-valuada tal que permita la representación numérica de dicha relación (i.e. si a cada clase de indiferencia le corresponda un valor ordenado de acuerdo a las preferencias).

Definición 2.3.2 *Diremos que una función $u_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$,* ***representa el preorden de preferencias*** *$\succeq_i$ si y sólo si, para todo $x_i, y_i \in X_i$ se verifica:*

$$u_i(x_i) \geq u_i(y_i) \iff x_i \succeq_i y_i$$

La función u_i se conoce como la ***función de utilidad*** *del i-ésimo consumidor.*

Nota 2.3.3 *Note que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces:*

$$f(u_i(x_i)) \geq f(u_i(y_i)) \iff u_i(x_i) \geq u_i(x_i) \iff x_i \succeq_i y_i$$

por lo que la composición $f \circ u_i$ de estas funciones representa las mismas preferencias. Así vemos que la función de utilidad es solo una forma de representar las preferencias de los individuos sin que sus valores numéricos posean algún significado (solo nos interesa la ordenación que nos proporciona).

El problema del consumidor como lo planteamos, consiste en la búsqueda de elementos maximales de su conjunto de consumo bajo un criterio llamado relación de preferencias. Entonces si podemos encontrar una función continua que represente sus preferencias, el problema se transformará en encontrar máximos de una función continua (para lo cual existen muchos resultados matemáticos). Sin embargo esto no siempre es posible aún cuando la relación de preferencias sea un preorden completo, se necesitan de más supuestos como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1 (Orden Lexicográfico) *Para el caso donde $X_i = \mathbb{R}^2$ (aunque se generaliza para $\mathbb{R}^\ell$) se define como sigue:*

Dados $x = (x_1, x_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$z \succ x \ si \begin{cases} (i) \qquad z_1 > x_1 \\ \ o \ bien \\ (ii) \qquad z_1 = x_1 \ y \ z_2 > x_2 \end{cases}$$

Ésta relación cumple con los axiomas de completitud (pues dados dos elementos en $\mathbb{R}^2$, cada una de las entradas de un elemento resultan ser mayores, menores o iguales a las del otro elemento) y transitividad (pues sus entradas también cumplen transitividad y el criterio compara primero una entrada y luego la otra), es decir es un preorden completo. Sin embargo NO puede ser representado por una función real-valuada.

Para probar esto último suponga que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una representación de estas preferencias, sea I_{x_1} el intervalo $[\text{ínf } f(x_1, \mathbb{R}), \text{ sup } f(x_1, \mathbb{R})]$, entonces claramente I_{x_1} es no degenerado para todo $x_1 \in \mathbb{R}$ y si $y_1 \neq x_1$ entonces $I_{x_1} \cap I_{y_1} = \emptyset$. Así hemos establecido *una relación uno a uno $x_1 \longleftrightarrow I_{x_1}$ entre $\mathbb{R}$ (que es infinito no numerable) y un conjunto de intervalos cerrados disjuntos a pares y no degenerados en $\mathbb{R}$ los cuales sabemos pueden ser en número a lo más numerables, lo cual es una contradicción.*

Note además la necesidad del axioma de continuidad para una relación $\succeq_i$ si se quiere encontrar una función de útlidad continua que la represente, esto dado por el segundo inciso del Teorema 1.7.3.

Teorema 2.3.1 (Existencia de una Función de Utilidad) *Suponga que $\succeq_i$ es una relación de preferencias definida sobre un conjunto conexo $X_i \subset \mathbb{R}^{\ell}$. Entonces, la relación $\succeq_i$ puede representarse mediante una función de utilidad continua si y sólo si $\succeq_i$ es continua.*

Demostración. Para ésta prueba omitiremos el índice i para los conjuntos y las relaciones que hemos estado utilizando.

Vemos que si $X = \{x\}$, definimos la función $u(x) = a \in \mathbb{R}$, la cual cumple con lo que pedimos. Si X tiene al menos 2 elementos, entonces como es conexo, tiene un número infinito de elementos, luego por el Teorema 1.6.3, tiene un subconjunto $D \subset X$ que es numerable y denso en X. La prueba la haremos en cuatro partes basándonos en éste hecho.

1. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \succ x_2$, entonces $\exists x \in D$ tal que $x_1 \succ x \succ x_2$. Para probar esto considere los conjuntos $M(x_1)$ y $P(x_2)$ los cuales son disjuntos, no vacíos y cerrados (por continuidad), luego como X es conexo entonces $M(x_1) \cup P(x_2) \neq X$.

   Ahora suponga que $\nexists x \in D$ que cumpla $x_1 \succ x \succ x_2$, entonces $D \subset M(x_1) \cup P(x_2)$ (cuando x_1 y x_2 son suficientemente cercanos), luego $X = \overline{D} = M(x_1) \cup P(x_2)$ (pues la unión es cerrado por ser unión de dos cerrados), lo cual es una contradicción al resultado que obtuvimos antes.

2. Construimos ahora una función de utilidad u' sobre D. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Si D tiene un elemento más pequeño x_α definimos $u'(x_\alpha) = a$, y si tiene un elemento más grande x_β definimos $u'(x_\beta) = b$, y quitamos de D a todos los elementos indiferentes a x_α y x_β (obteniendo al conjunto $D' = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ el cual no tiene ni elemento más grande ni más pequeño).

   Sea $Q = (a, b) \cap \mathbb{Q}$, entonces dado $x_1 \in D'$ le asociamos $q_1 \in Q$ arbitrario. Si tomamos ahora $x_2 \in D'$ y $x_2 \sim x_1$ entonces le asociamos $q_2 = q_1$, si $x_2 \succ x_1$ le asociamos $q_2 \in Q$ tal que $q_1 < q_2 < b$ (el cual siempre existe pues Q es denso en (a, b)) y si $x_1 \succ x_2$ le asociamos $a < q_2 < q_1$. Si ahora tomamos $x_3 \in D'$ y cumple $x_1 \succ x_3 \succ x_2$, le asociamos $q_3 \in Q$ tal que $q_1 > q_3 > q_2$ y así todos los casos. Así cuando tomemos el elemento $x_k \in D'$, tenemos que analizar su relación de preferencia respecto a los $k-1$ elementos que ya hemos tomado, si es indiferente a alguno de ellos, digamos a un x_p, se le asocia el número q_p, si $x_i \succ x_k \succ x_j$, para algunos $i, j \in \{1, 2, \ldots, k-1, \alpha, \beta\}$, y $\nexists x_\ell \in D'$, con $\ell < k$, tal que $x_i \succ x_\ell \succ x_j$, le asociamos $q_k \in Q$ con $q_i > q_k > q_j$ (lo cual siempre podemos hacer pues Q es denso en (a, b)). Note que si lo hacemos esto para todo $k \in \mathbb{N}$ habremos asociado un valor de Q para todo $x_i \in D'$, y eventualmente habremos tomado todos los valores de Q.

   De ésta forma definimos

$$u'(x_i) = \begin{cases} q_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \\ a \qquad \forall x \sim x_\alpha \\ b \qquad \forall x \sim x_\beta \end{cases}$$

la cual claramente es una función creciente.

3. Ahora extenderemos ésta función a X.

   Sea $x \in X$, considere ahora los conjuntos $DM(x) = D \cap M(x)$ y $DP(x) = D \cap P(x)$. Si x es un elemento más grande de X entonces definimos $u(x) = b$ y si es un elemento más pequeño definimos $u(x) = a$. Tenemos además otros resultados:

   a) Si $y_1 \in DP(x)$ y $y_2 \in DM(x)$, entonces se tiene que $y_2 \succeq y_1$, luego si además $r_1 \in u'(DP(x))$ y $r_2 \in u'(DM(x))$ entonces $r_2 \geq r_1$ pues u' es creciente.
   Así $\inf\ u'(DM(x)) \geq \sup\ u'(DP(x))$.

   b) Por la definición de supremo e ínfimo tenemos que $\inf\ u'(DM(x)) = \sup\ u'(DP(x))$ (pues podemos tomar subsucesiones de cotas inferiores que converjan al ínfimo o de cotas superiores que converjan al supremo, lo que nos daría la desigualdad que nos hace falta). De éste modo definimos

   $$u(x) = \inf\ u'(DM(x)) = \sup\ u'(DP(x))$$

   Es claro que si $x \in D$, entonces $u'(x) = u(x)$, por lo que u es una extensión de u' de D en X.

4. u es continua

   De acuerdo con el Teorema 1.7.3, para cualquier $c \in \mathbb{R}$, basta probar que las imágenes inversas de los conjuntos $(-\infty, c]$ y $[c, \infty)$ bajo u son cerrados. Más aún, basta probar esto para cualquier $c \in (a, b)$, pues podemos definir $u(x) = a$, $\forall x_\alpha \succeq x$ y definir $u(x) = b$, $\forall x \succeq x_\beta$, la cual es una función continua para estos elementos. Sea $q \in \mathbb{Q}$ entonces definimos los conjuntos $X^q = \{x \in X \mid u(x) \geq q\}$ y $X_q = \{x \in X \mid u(x) \leq q\}$.

   Entonces es claro que $\bigcap_{q \leq c} X^q = X^c$ (definido igual que para q), el cual es cerrado por ser intersección de los conjuntos cerrados X^q (por continuidad de $\succeq$). Una prueba similar se aplica para el conjunto X_c. Con lo cual concluye la demostración.

   Note que los puntos a y b pertenecen a $u(X)$ si y sólo si éste conjunto tiene elementos mínimo o máximo respectivamente.□

Nota 2.3.4 *Note que en el teorema anterior se pide que el conjunto X_i sea conexo, y en nuestro modelo nosotros tomamos cada uno de los conjuntos X_i convexo, luego por el Teorema 1.9.3 estos son conexos. Por lo que si las preferencias del consumidor i-ésimo son completas, transitivas y continuas, existirá una función de utilidad continua que las represente.*

Hasta éste punto hemos probado que bajo los supuestos de completitud, transitividad y continuidad de la relación de preferencia $\succeq_i$, existe una función de utilidad u_i continua que la representa. Pero salvo continuidad no aseguramos nada más acerca del comportamiento de u_i. En especial nos interesa la convexidad y monotonicidad de estas preferencias para establecer propiedades de u_i.

Axioma 4 (No saciedad) *Decimos que en X_i se cumple el axioma de **no saciedad** si para todo $x_i \in X_i$ existe $y_i \in X_i$ tal que $y_i \succ_i x_i$.*

*Decimos que X_i cumple **no saciedad local** si para todo $x_i \in X_i$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $y_i \in B_\epsilon(x_i) \cap X_i$ tal que $y_i \succ_i x_i$.*

Note que el axioma de no saciedad local nos permite eliminar las **zonas gruesas** de indiferencia pues nos asegura que dado $x_i \in X_i$ siempre podemos encontrar otros consumos posibles preferidos a x_i y tan cercanos a él como queramos.

Axioma 5 (Monotonicidad) *Decimos que se cumple **monotonicidad** en X_i si dados dos elementos $x_i, y_i \in X_i$, cumplen que $x_i^k \geq y_i^k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, \ell$, entonces $x_i \succeq_i y_i$; mientras que si $x_i^k > y_i^k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, \ell$ entonces $x_i \succ_i y_i$.*

*Si para preferir estrictamente un nuevo plan de consumo basta con aumentar infinitesimalmente la cantidad de algún bien del plan original, entonces se cumple **monotonicidad estricta**.*

Nota 2.3.5 *Vemos que el axioma de monotonicidad es un caso restrictivo de no saciedad local (quien a su vez es más restrictivo que no saciedad) que se viola en muchas ocasiones pues hay distintos bienes que son deseables para algunas personas y no deseables para otras (como clases de matemáticas). Sin embargo no saciedad se cumple en general.*

Hasta aqui hemos dado condiciones para que exista una función de utilidad continua que represente una relación de preferencias y que no presente zonas gruesas de indiferencia, ahora analicemos aspectos de la forma de ésta función (convexidad de las preferencias), lo cual es importante para poder encontrar puntos donde los individuos puedan tomar las decisiones de consumo dado las restricciones a las que se enfrenta. Para las siguientes definiciones **supondremos** que el conjunto X_i **es convexo**.

Axioma 6 (convexidad) *Si para todo $x_i, y_i \in X_i$ y para todo $t \in [0, 1]$,*

$$x_i \succeq_i y_i \implies [tx_i + (1-t)\, y_i] \succeq_i y_i$$

*se dice que se cumple **convexidad débil** en X_i.*

Si para todo $x_i, y_i \in X_i$ y para todo $t \in (0, 1]$,

$$x_i \succ_i y_i \implies [tx_i + (1-t)\, y_i] \succ_i y_i$$

*se dice que se cumple **convexidad** en X_i.*

Si para todo $x_i, y_i \in X_i$ y para todo $t \in (0, 1)$,

$$x_i \sim_i y_i \implies [tx_i + (1-t)\, y_i] \succ_i y_i$$

*se dice que se cumple **convexidad estricta** en X_i.*

La noción de convexidad refleja la idea de "gusto por la variedad". Un ejemplo claro de éste tipo de preferencias es la de la mayoría de los inversionistas en la bolsa de valores, quienes prefieren diversificar su portafolios de inversión en lugar de apostar por invertir en un solo tipo de acción.

Hay diferentes resultados que nos ayudarán a relacionar estas nociones con la función de utilidad que construimos y nos darán diferentes relaciones entre estos conceptos. Continuemos con las relaciones entre los axiomas de convexidad y los conjuntos débil y fuertemente preferidos a un elemento en X_i.

Lema 2.3.4 *La condición de convexidad débil es equivalente a decir que:*

- *El conjunto $M_i(y_i)$ es convexo para todo $y_i \in X_i$*
- *El conjunto $[M_i(y_i) \setminus I_i(y_i)]$ es convexo para todo $y_i \in X_i$*

Además, bajo convexidad, si $y_i \in X_i$ no es un punto de saciedad, entonces es adherente al conjunto

$$M_i(y_i) \setminus I_i(y_i) = \{x \in X_i \mid x \succ_i y_i\}$$

.

Demostración.

1. Suponga convexidad débil, sean $x_i, z_i \in M_i(y_i)$ entonces por completitud $x_i \succeq_i z_i,\ z_i \succeq_i x_i$ o ambas. Así se tiene que:

   a) Si $x_i \succeq_i z_i$, por convexidad débil $tx_i + (1-t)z_i \succeq_i z_i \succeq_i y_i,\ \forall t \in [0,1]$ y por transitividad $tx_i + (1-t)z_i \succeq_i y_i,\ \forall t \in [0,1]$.

   b) Si $z_i \succeq_i x_i$, por convexidad débil por $tx_i + (1-t)z_i \succeq_i x_i \succeq_i y_i,\ \forall t \in [0,1]$ y por transitividad $tx_i + (1-t)z_i \succeq_i y_i,\ \forall t \in [0,1]$.

   c) En el caso en que pasan ambas tomamos $tx_i + (1-t)z_i \sim_i tx_i + (1-t)x_i \sim_i x_i \succeq_i y_i,\ \forall t \in [0,1]$

2. De forma similar vemos que convexidad débil es equivalente a pedir que $[M_i(y_i) \setminus I_i(y_i)]$ sea convexo, basta con sustituir $\succeq_i$ por $\succ$.

3. Para ver que y_i es adherente al conjunto $[M_i(y_i) \setminus I_i(y_i)]$ bajo no saciedad local, tome $x_i \in [M_i(y_i) \setminus I_i(y_i)]$ (el cual existe por la no saciedad local) y forme la sucesión

$$\{t_n y_i + (1-t_n)x_i\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{con } t_n = 1 - \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

   la cual está contenida en $[M_i(y_i) \setminus I_i(y_i)]$ por convexidad, y cumple que

$$t_n y_i + (1-t_n)x_i \to y_i \ \square$$

Definición 2.3.3 *Decimos que la función real valuada $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ es cuasicóncava, si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que el conjunto definido por*

$$\{x_i \in X_i \mid u_i(x_i) \geq \alpha\}$$

es un conjunto convexo.

Una condición un poco más general a la del lema anterior (Lema 2.3.4), en el caso de que exista una función de utilidad continua u_i que represente a estas preferencias, es que ésta función sea **cuasicóncava**.

De la definición se sigue que, en éste caso, si se cumple convexidad entonces la función es cuasicóncava, pero la afirmación inversa no es cierta.

Lema 2.3.5 *Sea X_i como antes y $\succeq_i$ una relación de preferencias continua, entonces:*

1. *Convexidad estricta implica convexidad*

2. *Convexidad implica convexidad débil*

Demostración. Note que como la relación de preferencias es continua, existe una función de utilidad $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ continua que la representa. Así tenemos que:

1. Sean $x_i, y_i \in X_i$ tales que $x_i \succ_i y_i$, entonces $u_i(x_i) >_i u_i(y_i)$ y así

   a) Si existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $u_i(y_i) > u_i(z_{t_0}) = u_i(t_0 x_i + (1-t_0)y_i)$, entonces como $I_i(y_i)$ es cerrado y u_i continua, existe $t_1 > t_0$ tal que $u_i(z_{t_1}) = u_i(y_i)$ y por convexidad estricta $u_i(z_t) > u_i(y_i),\ \forall t < t_1$ (lo cual es una contradicción pues $0 < t_0 < t_1$).

   b) Si existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $u_i(z_{t_0}) = u_i(y_i)$, entonces tenemos que, por convexidad estricta $u_i(z_t) > y_i,\ \forall 0 < t < t_0$. Además por el inciso anterior, dado $1 > t_1 > t_0$ no puede ocurrir que $u_i(y_i) > u_i(z_{t_1})$ ni que $u_i(y_i) = u_i(z_{t_1})$.
   Entonces $u_i(z_{t_1}) > u_i(y_i),\ \forall t \in (0,t_0) \cup (t_0,1)$ y por continuidad de la función u_i, existen $t_2 \in (0,t_0),\ t_3 \in (t_0,1)$ tales que $u_i(z_{t_2}) > u_i(y_i),\ u_i(z_{t_3}) > u_i(y_i)$ con $u_i(z_{t_2}) = u_i(z_{t_3})$, luego $u_i(z_t) > u_i(z_{t_2}),\ \forall\ t \in (t_2,t_3)$, lo cual es una contradicción pues $t_0 \in (t_2,t_3)$.
   De estos dos incisos se sigue que $u_i(z_t) > u_i(y_i),\ \forall t \in (0,1)$

2. Vemos que si $u_i(x_i) > u_i(y_i)$ entonces por convexidad de u_i se tiene $u_i(z_t) > u_i(y_i)$, $\forall t \in (0,1)$, luego $u_i(z_t) \geq_i u_i(y_i),\ \forall t \in [0,1]$ (por continuidad).

   Ahora, si $u_i(x_i) = u_i(y_i)$ y existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $u_i(y_i) > u_i(z_{t_0})$, por continuidad de u_i existe $t_1 \in (t_0,1)$ tal que $u_i(y_i) > u_i(z_{t_1}) > u_i(z_{t_0})$ y así $u_i(z_t) > u_i(z_{t_1}),\ \forall t \in [0,t_1)$ (por convexidad), lo cual se contradice con el hecho de que $t_0 \in [0,t_1)$.

   Así, $u_i(z_t) \geq u_i(y_i),\ \forall t \in [0,1]$. □

De los resultados anteriores vemos que la condición de convexidad estricta implica convexidad y convexidad débil, por lo que es la condición más fuerte de estas tres. Sin embargo, la condición de convexidad débil es suficientemente fuerte como para asegurarnos que los conjuntos débilmente preferidos y fuertemente preferidos a un consumo posible arbitrario x_i son convexos. Sin embargo en algunos casos de interés, ésta condición no es suficiente por lo que requeriremos los conceptos de convexidad simple y estricta.

Ejemplo 2.3.2 *Para el caso en que $X_i \subset \mathbb{R}^2$, algunos ejemplos de funciones de utilidad (que se pueden generalizar naturalmente para $\mathbb{R}^\ell$) importantes por su utilidad en economía son*

- ***Función Cobb-Douglas***

$$u_i(x,y) = x^a y^b \qquad \text{donde } a > 0,\ b > 0$$

- ***Sustitutos Perfectos***

$$u_i(x,y) = ax + by \qquad \text{donde } a \geq 0,\ b \geq 0$$

- ***Complementos Perfectos***

$$u_i(x,y) = \text{mín}\{ax, by\} \qquad \text{donde } a > 0,\ b > 0$$

2.3.4. Restricciones de Riqueza

Dado ahora un sistema de precios $p \in \mathbb{R}^\ell$ y un plan de consumo $x_i \in X_i$, con entradas positivas si son bienes demandados y negativas si es trabajo ofrecido (en ésta parte solamente consideramos que el consumidor ofrece trabajo y los demás bienes que posee los puede vender pero no forma parte de la oferta del mercado), entonces el **gasto** del i-ésimo consumidor se define como

$$p \cdot x_i = \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_{ik}$$

el cual denota la diferencia entre los ingresos laborales del consumidor y los desembolsos al adquirir bienes.

Denotaremos por $w_i \in \mathbb{R}$ a la **riqueza** del i-ésimo consumidor, la cual representa su capacidad de gasto no vinculada a los ingresos laborales. Un punto $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ será denominado **vector de distribución de riqueza**.

Así, dados un vector de precios $p \in \mathbb{R}^\ell$ y un valor de la riqueza $w_i \in \mathbb{R}$, las posibilidades de consumo del i-ésimo consumidor vienen dadas por el **conjunto presupuestario** definido como:

$$\beta_i\,(p, w_i) = \{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$$

La correspondencia $\beta_i\,(p, w_i) : \mathbb{R}^{\ell+1} \to \mathcal{P}(X_i)$, definida por los conjuntos presupuestarios, se denomina **correspondencia presupuestaria**.

Note que bajo los supuestos de convexidad y por la definición del conjunto $\beta_i\,(p, w_i)$ éste resulta ser:

- Cerrado (pues se puede ver como la intersección de los cerrados X_i y $\left\{x \in \mathbb{R}^\ell \mid p \cdot x \leq w_i\right\}$)
- Convexo (por ser intersección de estos dos convexos)

Además, por la forma multiplicativa de la correspondencia, β_i resulta ser **homogénea de grado cero** en riqueza y precios (es decir $\beta_i\,(\lambda p, \lambda w_i) = \beta_i\,(p, w_i)$, para todo $\lambda > 0$).

Cuando $p \neq 0$, la restricción $p \cdot x_i \leq w_i$ geométricamente implica que x_i debe estar en el semiespacio cerrado inferior al **Hiperplano presupuestal**

$$H = \left\{a \in \mathbb{R}^\ell \mid p \cdot a = w_i\right\}$$

Note que dados $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+n}$, el conjunto $\beta_i\,(p, w_i)$ puede ser vacío. Definimos a S_i como el conjunto donde eso no pasa, es decir

$$S_i = \left\{(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+m} \mid \exists x_i \in X_i \text{ tal que } p \cdot x_i \leq w_i\right\}$$

.

El siguiente teorema nos asegura la continuidad de la correspondencia presupuestaria cuando hay por lo menos una canasta subóptima en nuestro conjunto X_i, dados los precios p^0 y la dotación inicial w^0.

Teorema 2.3.2 *Sea $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ compacto y conexo, y sea $\left(p^0, w_i^0\right)$ tal que existe $x_i \in X_i$ con $p^0 \cdot x_i < w_i^0$. Entonces la correspondencia β_i es continua en $\left(p^0, w_i^0\right)$.*

Demostración. Para probar esto, hay que demostrar que es hemicontinua tanto inferior como superiormente en dicho punto.

1. β_i es hemicontinua superiormente en $\left(p^0, w_i^0\right)$.
   Sea $\{p^q, w_i^q\}_{q=1}^\infty \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ una sucesión que converge a $\left(p^0, w_i^0\right)$, y sea $\{x_i^q\}_{q=1}^\infty \subset X_i$ una sucesión que converge a x_i^0, tal que $x_i^q \in \beta_i\left(p^q, w_i^q\right)$. Pero por hipótesis se tiene que $p^q \cdot x_i^q \leq w_i^q$ para todo $q \in \mathbb{N}$, entonces

   $$\lim_{q\to\infty} p^q \cdot x_i^q = p^0 \cdot x_i^o \leq w_i^0 = \lim_{q\to\infty} w_i^q$$

   lo que implica que $x_i^0 \in \beta_i\left(p^0, w_i^0\right)$.

2. β_i es hemicontinua inferiormente en $\left(p^0, w_i^0\right)$.
   Sea $\{p^q, w_i^q\}_{q=1}^\infty \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ una sucesión que converge a $\left(p^0, w_i^0\right)$ y sea $x_i^0 \in \beta_i\left(p^0, w_i^0\right)$ (es decir $x_i^0 \in X_i$ y además $p^0 x_i^0 \leq w_i^0$). Entonces hay dos casos:

   a) Si $p^0 \cdot x_i^0 < w_i^0$, existe $q' \in \mathbb{N}$ tal que $\forall q > q'$, $p^q \cdot x_i^0 < w_i^q$. En éste caso definimos la sucesión con los primeros q' elementos arbitrarios $x_i^q \in \beta_i\left(p^q, w_i^q\right)$, y $x_i^q = x_i^0$ para todo $q > q'$.

   b) Si $p^0 \cdot x_i^0 = w_i^0$ elegimos un punto $x_i' \in X_i$ tal que $p^0 \cdot x_i' < w_i^0$ (que existe por hipótesis). Como $\left(p^q, w_i^q\right) \to \left(p^0, w_i^0\right)$ existe $q' \in \mathbb{N}$ tal que $p^q \cdot \left(x_i' - x_i^0\right) < 0$, para todo $q > q'$.
   Construimos la recta que pasa por los puntos x_i', x_i^0 dada por $x_i = x_i^0 + \lambda\left(x_i' - x_i^0\right)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Ahora, el Hiperplano $H^q = \left\{z \in \mathbb{R}^\ell \;\; p^q \cdot z = w_i^q\right\}$ corta a ésta recta en el punto:

   $$z^q = x_i^0 + \frac{w_i^q - p^q \cdot x_i^0}{p^q \cdot \left(x_i' - x_i^0\right)}\left(x_i' - x_i^0\right) = x_i^0 + \frac{w_i^q - p^q \cdot x_i^0}{p^q}$$

   entonces $z^q \to x_i^0$. Así definimos una sucesión $\{x_i^q\}_{q=1}^\infty$ dada por:

   - Si $q < q'$ tomamos un punto arbitrario $x_i^q \in \beta_i\left(p^q, w^q\right)$
   - Si $q > q'$ y $z^q \in \left[x_i^0, x_i'\right]$ (segmento contenido en X_i y convexo), tomamos $x_i^q = z^q$
   - En otro caso tomamos $x_i^q = x_i^0$

   Note que la sucesión así definida está contenida en X_i con $x_i^q \in \beta_i\left(p^q, w_i^q\right)$ para todo $q \in \mathbb{N}$ y $x_i^q \to x_i^0$ como queríamos (adviértase que $H^q \to H^0 = \left\{z \in \mathbb{R}^\ell \mid p^0 \cdot z = w_i^0\right\}$, luego $x_i^0 \in H^0$). □

2.3.5. Satisfacción de las Preferencias

Ahora analizaremos el proceso de elección del consumidor, en el cual se supone que éste actúa de tal forma que va a elegir el mejor plan de consumo que pueda sujeto a su restricción de presupuesto y los precios del mercado. Formalmente decimos que, dado un par precio-riqueza $(p, w_i) \in S_i$, el i-ésimo consumidor elegirá un plan de consumo x_i en el conjunto no vacío $\beta_i\,(p, w_i)$, el cual es óptimo de acuerdo a sus preferencias, i.e., un elemento más grande del conjunto $\beta_i\,(p, w_i)$ para el preorden de preferencia $\succeq_i$. Éste consumo se llamará **consumo de equilibrio (demanda)** del i-ésimo consumidor respecto a (p, w_i).

Note que si existe una función de utilidad u_i que represente las preferencias $\succeq_i$, éste comportamiento del i-ésimo consumidor se convierte en resolver el problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \;\; u_i\,(p, w_i) \\ &s.a. \qquad x_i \in \beta_i\,(p, w_i) \end{aligned}$$

es decir, en un problema de maximización de la utilidad. Geométricamente, cuando $p \neq 0$ se tiene que, si x_i' es un elemento más grande de $\beta_i\,(p, w_i)$, el conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i'\}$ no tiene puntos en común con el semiespacio inferior al hiperplano presupuestal H.

Pero dados $(p, w_i) \in S_i$, puede que el conjunto $\beta_i\,(p, w_i)$ no tenga elemento más grande. Sea S_i' el conjunto de (p, w_i) para el cual no pasa esto (el cual claramente es un cono convexo con vértice 0 dada la homogeneidad de grado cero de la restricción). Podemos entonces definir una correspondencia $\xi_i : S_i' \to X_i$, llamada **correspondencia de demanda** del i-ésimo consumidor dada por:

$$\xi_i\,(p, w_i) \equiv \{x_i \in X_i \mid x_i \text{ es un elemento más grande de } \beta_i\,(p, w_i) \;\; para \;\; \succeq_i\}$$

Para cada $(p, w_i) \in S_i'$, el conjunto no vacío $\xi_i\,(p, w_i)$ es el **conjunto de posibles consumos óptimos** bajo la restricción dada por (p, w_i).

Definición 2.3.4 *Si existe una función de utilidad u_i en X_i que representa a $\succeq_i$, entonces definimos $v : S_i' \to \mathbb{R}$ como:*

$$v\,(p, w_i) = \text{máx} \;\; u_i\,[\beta_i\,(p, w_i)]$$

la cual es llamada ***función de utilidad indirecta*** *del i-ésimo consumidor.*

Note que por la linealidad del producto punto, la función $v\,(p, w_i)$ también resulta ser homogénea de grado cero bajo (p, w_i).

Lema 2.3.6 *Dado un par precio-riqueza (p, w_i), existe un elemento más grande para el conjunto $\beta_i\,(p, w_i)\,, \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, n$, si y sólo si $(p, w_i) \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i'\right)$.*

Demostración. Tenemos que $(p, w_i) \in \cap_{i=1}^{n} S_i' \Longleftrightarrow (p, w_i) \in S_i',\; \forall i = 1, 2, \ldots, n \Longleftrightarrow$ existe un elemento más grande de $\beta_i(p, w_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$.

Definición 2.3.5 *En virtud del lema anterior, uno puede definir al* ***conjunto no vacío de consumos totales posibles*** *como:*

$$\xi\,(p, w) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,(p, w_i)$$

*La correspondencia $\xi : \bigcap_{i=1}^{n} S_i' \to \mathcal{P}(X)$ es llamada la **correspondencia de demanda total** (la cuál claramente, como las demás que hemos definido, vuelve a ser homogénea de grado cero en (p, w)).*

Ahora, con la notación anterior, si x_i' es un elemento más grande de $\beta_i(p, w_i)$, entonces claramente se tiene que

$$(a) \qquad p \cdot x_i \leq w_i \implies x_i' \succeq_i x_i$$

la cual por tricotomía de $\geq$ es equivalente a

$$(a') \qquad x_i \succ_i x_i' \implies p \cdot x_i > w_i$$

Por otro lado se tiene de forma similar (bajo completitud de $\succeq_i$) que

$$(b') \qquad x_i \succeq_i x_i' \implies p \cdot x_i \geq w_i$$

la cual nos da la noción de que a su vez, x^i es minimizadora del gasto en el conjunto $M_i(x_i')$ (pues por la continuidad del producto punto se tiene que $p \cdot x_i' = w_i$). Pero por el mismo argumento de antes, ésta expresión es equivalente a

$$(b) \qquad p \cdot x_i < w_i \implies x_i' \succ_i x_i$$

Estas implicaciones son importantes pues nos dicen que si un consumidor tiene preferencias continuas y es maximizador de su utilidad, entonces va a comprar la mejor opción de gasto que pueda, es decir, va a gastar todo su ingreso en dicha opción, lo cual es una buena aproximación a las decisiones de ahorro y gasto de una persona (recuerde que bajo nuestro modelo, el ahorro es consumo futuro pues ahora se define todo el gasto del agente). De aquí se probarán las siguientes relaciones entre estas implicaciones que expusimos.

Teorema 2.3.3 *Sea X_i como antes, un conjunto convexo y el preorden $\succeq_i$ cumpliendo el axioma de continuidad, entonces si excluimos el caso $w_i = \text{mín } p \cdot X_i$, se tiene que $(b) \implies (a)$*

Demostración. Como el mínimo de $p \cdot X_i$ se excluye, entonces $\exists x_i^1 \in X_i$ tal que $p \cdot x_i^1 < w_i$. Como se cumple (b) es suficiente probar que si $x_i^2 \in X_i$ satisface $p \cdot x_i^2 = w_i$ entonces $x_i' \succeq_i x_i^2$ (recuerde que x_i' es un elemento más grande de $\beta_i(p, w_i)$). Para esto considere un punto x_i en el segmento cerrado $\left[x_i^1, x_i^2\right]$ diferente a x_i^2, entonces claramente $p \cdot x_i < w_i$ y por (b) se tiene que $x_i' \succ_i x_i$.

Así se tiene que x_i^2 es adherente al conjunto $P_i(x_i')$ (para ver esto podemos tomar la sucesión $\left\{\frac{1}{n}x_i^1 + (i - \frac{1}{n})x_2^i\right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [x_i^1, x_i^2]$, convergente a x_i^2 con puntos como x_i). Además por continuidad $x_i^2 \in P_i(x_i')$, pues éste último conjunto es cerrado. □

Corolario 2.3.1 *Con los requisitos del teorema anterior, si además $\succeq_i$ cumple convexidad débil con $(p, w_i) \in S_i'$, el conjunto $\xi_i(p, w_i)$ de consumos óptimos posibles es convexo.*

Demostración. Dado un par precio-riqueza $(p, w_i) \in S_i'$, el conjunto $\xi_i(p, w_i)$ es la intersección de los conjuntos convexos $\beta_i(p, w_i)$ y $M_i(x_i')$ (éste último por la equivalencia que dimos a cumplir convexidad débil). Por lo tanto, por el Teorema 1.9.3 el conjunto $\xi_i(p, w_i)$ es convexo. □

Es importante recalcar que, con la notación anterior, si las condiciones del corolario anterior se dan para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y si (p, w_i) está en $\bigcap_{i=1}^{n} S_i'$ (igual para todo i), entonces $\xi(p, w)$ es convexo por ser una suma de conjuntos convexos (vea el Teorema 1.9.3).

Teorema 2.3.4 *Sea X_i como antes, un conjunto convexo y el preorden $\succeq_i$ cumpliendo el axioma de convexidad, entonces si x_i' no es un punto de saciedad, se tiene que $(a') \Longrightarrow (b')$*

Demostración. Como x_i' no es un punto de saciedad, existe $x_i^1 \in X_i$ tal que $x_i^1 \succ_i x_i'$. Es suficiente probar que si $x_i^2 \sim_i x_i'$ entonces $p \cdot x_i^2 \geq w_i$.

Considere un punto x_i en el segmento cerrado $\left[x_i^1, x_i^2\right]$ diferente a x_i^2. Por convexidad $x_i \succ_i x_i^1$, luego por (a'), $p \cdot x_i > w_i$. Así por la continuidad del producto punto se tiene que $p \cdot x_i^2 \geq w_i$. □

Corolario 2.3.2 *Con las hipótesis del teorema anterior, si $\succeq_i$ cumple convexidad y x_i' no es un punto de saciedad, entonces $p \cdot x_i' = w_i$.*

Demostración. Por definición de elemento más grande se tiene que $p \cdot x_i' \leq w_i$. Ahora por (b'), como trivialmente $x_i' \succeq_i x_i'$ se tiene que $p \cdot x_i' \geq w_i$. □

En otras palabras, aunque el consumidor solo tiene que cumplir su restricción presupuestal $p \cdot x_i \leq w_i$, el consumo óptimo x_i' que él elige satisface la igualdad $p \cdot x_i' = w_i$ (su gasto igual a su ingreso). Como consecuencia de estos resultados, si $(p, w_i') \in S_i'$ con $w_i' > w_i$, entonces la riqueza w_i' se preferirá a w_i pues se puede alcanzar mejores planes de consumo.

Nota 2.3.6 *Note que si la relación de preferencia $\succeq_i$ satisface el axioma de **convexidad fuerte**, entonces dados $(p, w_i) \in S_i'$ por la linealidad de la restricción presupuestaria existe un único elemento más grande de $\beta_i(p, w_i)$. En éste caso la correspondencia de demanda ξ_i **es una función** (por definición). Así, cuando esto ocurre para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces ξ (la correspondencia de demanda total) también es una función.*

Suponga ahora que X_i es conexo y compacto, además que el preorden de preferencias $\succeq_i$ es continuo, entonces existe una función de utilidad u_i continua sobre X_i. Dada una pareja (p, w_i) en S_i, el i-ésimo consumidor maximiza la función continua u_i en el conjunto $\beta_i(p, w_i)$, el cual es no vacío (pues $(p, w_i) \in S_i$) y compacto (pues está contenido en un conjunto compacto X_i, y por definición $\beta_i(p, w_i)$ cerrado). Por el Teorema de Weierstrass, el conjunto de maximizadores de u_i es no vacío, es decir $S_i = S_i'$.

De hecho, u_i define una función continua (pues lo es en todas sus entradas) $u_i' : S_i \times X_i \to \mathbb{R}$, dada por

$$u_i'(p, w_i, x_i) = u_i(x_i)$$

Así, aplicando el Teorema 1.8.4 (donde la correspondencia ϕ de S_i a X_i es β_i) tenemos que si (p, w_i) es una pareja donde β_i es continua, entonces ξ_i (la correspondencia de demanda del i-ésimo consumidor) es hemicontinua superiormente en (p, w_i), y además v_i (la función indirecta de utilidad del i-ésimo consumidor) es continua en (p, w_i). Así hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.3.5 *Si X_i es compacto entonces $S_i' = S_i$. Además de esto, si β_i es continua en el punto $(p, w_i) \in S_i$, entonces ξ_i es hemicontinua superiormente en (p, w_i), y v_i es continua en éste punto.*

Nota 2.3.7 *Note que si las condiciones del teorema anterior ocurren para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces cada ξ_i es hemicontinua superiormente, entonces la correspondencia de demanda total ξ también lo es. Cuando ocurre que son funciones (imagen con un solo elemento), entonces son continuas.*

2.4. Teoría del Productor

En ésta parte del trabajo vamos a abordar el problema al que se enfrentan las empresas de cuánto producir de cada uno de los bienes, de manera que estas satisfagan sus restricciones de posibilidades de producción maximizando sus beneficios (la ganancia que les queda de lo que recuperan por la venta de estos bienes menos lo que invierten para producirlos) sujetos a la demanda de cada uno de ellos por parte de los consumidores.

Para lograr estos objetivos, las empresas se enfrentan a varias restricciones como la cantidad de recursos que hay en nuestra economía, la capacidad de producción de la empresa dada por su tecnología, así como las restricciones institucionales y sociales que imperen sobre su proceso de producción. Aquí no tomaremos éste último tipo de restricciones, pues éste es un tema más avanzado y se toma en consideración bajo el estudio de la economía pública y la Organización Industrial.

La idea de la **producción** se refiere al proceso de transformación mediante el cual ciertos bienes (insumos, representados con números negativos) se convierten en otros bienes diferentes (productos representados con positivos).

La unidad de decisión que lleva acabo tal transformación se llamará **empresa** (a la cual le asociaremos un conjunto de posibilidades de producción), en nuestra economía supondremos que hay n de estas unidades.

Definición 2.4.1 *Un* ***plan de producción*** *para una empresa j (denotado por $y_j \in \mathbb{R}^\ell$), consiste en una especificación de las cantidades de insumos que darán lugar a ciertas cantidades de productos. A éste plan de producción también se le conoce como la* ***oferta*** *de la j-ésima empresa.*

El conjunto de todos los planes de producción que resultan posibles para la j-ésima empresa lo denominaremos ***conjunto de producción****, y lo denotaremos por $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$.*

El que un plan de producción sea o no **posible** dependerá de los conocimientos técnicos que tenga la empresa, el que sea **alcanzable** dependerá de la cantidad de las limitaciones de recursos con que se encuentre la empresa j.

Note que si no existen limitaciones de recursos, entonces el conjunto alcanzable por la empresa j coincide con su conjunto de producción.

Dado un plan de producción y_j para cada empresa, entonces al elemento $y = \sum_{j=1}^{n} y_j$ se le llamará la **producción total** (también **oferta total**) de la economía. De la misma forma, al conjunto $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ lo denominamos el **conjunto de producción total** o también la **oferta total**.

Note que y es un resultado total de la actividad de todas las empresas o productores, mientras que Y describe las posibilidades de producción de la economía completa.

2.4.1. Supuestos del Conjunto de Producción

Con respecto a los conjuntos de producción de las diferentes empresas y de producción total establecemos los siguientes supuestos.

Supuesto 1 .- *Y_j es cerrado (**continuidad**)*

Éste supuesto nos dice que si hay una sucesión de planes posibles de producción para el j-ésimo productor que converge al plan y_0, entonces éste último también es posible para el j-ésimo productor.

Supuesto 2 .- *$Y_j - \mathbb{R}^\ell_+ \subset Y_j$, es decir, si $y_j \in Y_j$ y un vector $y \in \mathbb{R}^\ell$ verifica que $y_j \geq y$, entonces $y \in Y_j$).*

Éste supuesto (**eliminación libre**) establece que si una producción resulta posible técnicamente, entonces también lo es cualquier otra que emplee mayores o iguales cantidades de factores y menores o iguales cantidades de productos (mal gastando recursos).

Supuesto 3 .- *$Y_j \cap \mathbb{R}^\ell_+ = \{0\}$*

Éste supuesto puede entenderse como constituído por dos partes:

- La primera $Y_j \cap \mathbb{R}^\ell_+ \subset \{0\}$ (**imposibilidad de producción gratuita**) implica que no es posible producir cantidades positivas de productos sin emplear insumos.
- La segunda parte se podría escribir como $0 \in Y_j$ (**posibilidad de inacción**) nos dice que una empresa puede decidir no producir algo sin que esto implique consumir cantidad alguna de insumos y garantiza que Y_j es no vacío para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nota 2.4.1 *Si se cumplen los supuestos 2 y 3 , entonces se cumple que $-\mathbb{R}^\ell_+ \subset Y_j$, lo que significa que toda empresa puede desprenderse de cualquier cantidad de mercancías sin costo alguno.*

Note que si éste nuevo supuesto se cumple para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces también se tiene que $0 \in Y$ y que $-\mathbb{R}^\ell_+ \subset Y$.

Hay una propiedad relevante de los conjuntos de producción individuales que no hereda el conjunto de producción total (la imposibilidad de producción libre) pues resulta posible (con las restricciones establecidas hasta ahorita) producir sin gastar insumos. Para dejar de lado ésta posibilidad hacemos el siguiente supuesto.

Supuesto 4 .- *$Y \cap (-Y) \subset \{0\}$ (**irreversibilidad**)*

Éste supuesto se puede escribir como $y \in Y,\ y \neq 0$ entonces $-y \notin Y$, y nos dice que si la producción total y es posible (con $y \neq 0$), entonces la producción total $-y$ ya no es posible.

Lema 2.4.1 *Con la notación anterior, si cada conjunto Y_j es cerrado, convexo y cumple irreversibilidad, entonces Y es cerrado.*

Demostración. Por el Teorema 1.10.3, dado que los conjuntos $Y_j,\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$ son cerrados, es suficiente probar que los conos asintóticos $\mathbf{A}Y_j$ son positivamente semi-independientes.

Primero vemos que como $0 \in Y_j$ y éste último es un conjunto convexo $\forall j = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{A}Y_j \subset Y_j$ (por el Teorema 1.10.2 y el Corolario 1.10.1), luego $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}Y_j \subset Y$.

Ahora, sean $y_j \in \mathbf{A}Y_j$ tales que $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$, entonces dado uno de ellos ($y_{j'} \neq 0$ por ejemplo) se tiene que $-y_{j'} = \sum_{j\neq j'} y_j \in \sum_{j\neq j'} \mathbf{A}Y_j$, luego está en Y (pues podemos sumarles $0 \in Y_{j'}$). Pero también está en $-Y$ por definición, lo cual es una contradicción. Así, los conos asintóticos $\mathrm{A}Y_j$ son positivamente semi-independientes. □

Lema 2.4.2 *Con la notación anterior, si el conjunto de producción total Y cumple los supuestos de eliminación libre e irreversibilidad, entonces también cumple que $Y \cap \mathbb{R}_{+}^{\ell} \subset \{0\}$*

Demostración. Tenemos que si $Y \cap \mathbb{R}_{+}^{\ell} = \emptyset$, entonces se satisface trivialmente.

Ahora, suponga que esto no pasa y que $Y \cap \mathbb{R}_{+}^{\ell} \neq \{0\}$, entonces $\exists y \in \mathbb{R}_{+}^{\ell},\ y \neq 0$, tal que $y \in Y$. Como $Y - \mathbb{R}_{+}^{\ell} \subset Y$ entonces tomamos $y' = -2y \in (-\mathbb{R}_{+}^{\ell})$, luego

$$y + y' = y + (-2y) = -y \in Y \Longrightarrow y \in (-Y)$$

así, $y \neq 0$ es tal que $y \in Y \cap (-Y)$, violando el supuesto de irreversibilidad. □

Definición 2.4.2 *Dado un plan de producción para la empresa j-ésima, $y_j^0 \in Y_j$, diremos que éste es una* ***producción eficiente*** *si no existe $y_j \in Y_j$ tal que $y_j > y_j^0$. Cuando solamente podemos afirmar que no existe $y_j \in Y_j$ tal que $y_j \gg y_j^0$, diremos que éste es una* ***producción débilmente eficiente****.*

Note que una producción eficiente es un plan de producción en el que no se puede aumentar la producción de un bien sin disminuir la producción de algún otro o sin incrementar el empleo de insumos.

Teorema 2.4.1 *Sea $Y_j \subset \mathbb{R}^{\ell}$ el conjunto de producción de la empresa j, y sea $q \in \mathbb{R}^{\ell}$ tal que $q \gg 0$ (respectivamente $q > 0$). Si para un $y_j^0 \in Y_j$ se verifica que $qy_j^0 \geq qy_j$ para todo $y_j \in Y_j$, entonces y_j^0 es una producción eficiente (respectivamente débilmente eficiente).*

Demostración. Para el caso de la producción eficiente, el resultado se sigue de que si $q \gg 0$ y $y_j > y_j^0$, entonces $q \cdot y_j > q \cdot y_j^0$.

Cuando la producción es débilmente eficiente, la conclusión se sigue de que si $y_j \gg y_j^0$ y $q \geq 0$, entonces $q \cdot y_j > q \cdot y_j^0$. □

Teorema 2.4.2 *Bajo los supuestos 1 y 2, un plan de producción y_j es débilmente eficiente si y sólo si $y_j \in Fr\,(Y_j)$ (pertenece a la frontera del conjunto de producción).*

Demostración. Vemos que bajo los supuestos 1 y 2, $y_j^0 \in Y_j$ está en la frontera de producción de $Y_j \iff (y_j' \gg y_j^0 \Rightarrow y_j' \notin Y_j) \iff (\nexists y_j \in Y_j \textit{ tal que } y_j \gg y_j^0) \iff y_j^0$ es débilmente eficiente. □

2.4.2. Rendimientos de Escala

Examinemos ahora los efectos sobre la producción cuando varían proporcionalmente los insumos invertidos en éste proceso. Cuando se elabora un solo producto en una empresa es fácil identificar los tipos de rendimiento que tiene la tecnología empleada en éste trabajo.

Si se incrementan los insumos proporcionalmente y la producción crece en mayor medida que éste aumento, se dice que hay **rendimientos crecientes a escala**, si éste aumento es menor se dice que los rendimientos son **decrecientes a escala**, y si el aumento es en la medida en que aumentan los insumos, los crecimientos son **constantes a escala**.

Pero cuando se elaboran más de un producto, estos conceptos no son tan fáciles de manejar. Para hacer esto primero introducimos otros conceptos relacionados con éste tema.

Definición 2.4.3 *Dado un plan de producción de la empresa j-ésima, $y_j \in Y_j$,* ***cambiar la escala de operaciones*** *consiste en multiplicar y_i por un escalar no negativo λ.* ***Aumentar o disminuir*** *la escala consiste en hacer λ mayor o menor que uno respectivamente.*

Diremos que prevalecen **rendimientos a escala no-decrecientes** si para todo $y_j \in Y_j$ podemos aumentar arbitrariamente la escala de operaciones (es decir, para todo $\lambda \geq 1$ y para todo $y_j \in Y_j$, se verifica que $\lambda y_j \in Y_j$. Cuando esto ocurre para $0 \leq \lambda \leq 1$ diremos que prevalecen **rendimientos a escala no-crecientes**.

Por último, diremos que prevalecen **rendimientos a escala constantes** si para todo $y_j \in Y_j$ y para todo $\lambda \geq 0$ se cumple que $\lambda y_j \in Y_j$.

Estas definiciones tienen que ver directamente con la propiedad de convexidad del conjunto Y_j. Note que cuando prevalecen rendimientos no-decrecientes, el conjunto por lo general no es convexo, mientras que en el caso de rendimientos constantes a escala, el conjunto Y_j es un cono convexo (por el Supuesto 5 que enunciaremos a continuación) de vértice 0 por definición.

Supuesto 5 .- *Y_j es un conjunto convexo, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$.*

Note que por los supuestos 3 y 5, las empresas que estamos considerando en el modelo no pueden tener costos fijos, es decir, no necesitan consumir una cantidad fija de recursos para comenzar a producir.

Note además que por el Teorema 1.9.3 el conjunto de producción total Y **es convexo** por ser una suma finita de convexos.

Definición 2.4.4 *Un conjunto de producción Y_j se dice que cumple la* ***propiedad de aditividad*** *cuando para todo $y_j, y'_j \in Y_j$ se sigue que $\left(y_j + y'_j\right) \in Y_j$.*

Se dice que Y_j cumple la ***propiedad de divisibilidad*** *si para todo $y_j \in Y_j$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se cumple que $\lambda y_j \in Y_j$.*

Teorema 2.4.3 *Bajo los supuestos 1,2 y 3, un conjunto de producción* Y_j *satisface las propiedades de Aditividad y Divisibilidad si y sólo si es un cono convexo cerrado de vértice* 0.

Demostración. La prueba consta de 2 partes.

- Suponga que el conjunto Y_j cumple los supuestos de divisibilidad y aditividad, entonces dado $y_j \in Y_j$, si tomamos $0 \leq \lambda \leq 1$, por la propiedad de divisibilidad $\lambda y_j \in Y_j$. Además, si $\lambda > 1$, lo podemos expresar como $\lambda = n + \lambda_0$, con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \lambda_0 < 1$, luego por aditividad $ny_j \in Y_j$, mientras que por divisibilidad $\lambda_0 y_j \in Y_j$, por lo que $\lambda y_j = ny_j + \lambda_0 y_j \in Y_j$, lo que muestra que Y_j es un cono cerrado.

  Para ver que es convexo tomamos $x_j, y_j \in Y_j$, entonces dado $0 \leq \beta \leq 1$, por divisibilidad $\beta x_j \in Y_j$ y $(1-\beta)y_j \in Y_j$, así $\beta x_j + (1-\beta)y_j \in Y_j$ por aditividad.

- Si ahora Y_j es un cono convexo cerrado, entonces por definición cumple divisibilidad. Además, dados $x_j, y_j \in Y_j$ por convexidad $\frac{1}{2}x_j + \frac{1}{2}y_j \in Y_j$, y por definición de cono $2(\frac{1}{2}x_j + \frac{1}{2}y_j) = x_j + y_j \in Y_j$. Así, Y_j cumple también con aditividad. $\square$

2.4.3. Maximización de Beneficios

La noción neoclásica de competencia se basa en los siguientes dos **supuestos relativos a la producción**:

1. Cada empresa toma como dados los precios del mercado y considera que a dichos precios podrá adquirir y vender cualquier cantidad de insumos y productos. ésta simplificación del modelo hace que la empresa identifique su conjunto alcanzable con su conjunto de producción.

2. El comportamiento de la empresa se caracteriza por la maximización de beneficios. Esto define el criterio de elección de la economía individual que implica que ésta seleccionará combinaciones de producción eficientes siempre que los precios sean positivos.

Definición 2.4.5 *Dado un sistema de precios $p \in \mathbb{R}^{\ell}$ y un plan de producción $y_j \in Y_j$ posible para la empresa j-ésima, entonces el producto escalar dado por*

$$p \cdot y_j = \sum_{k=1}^{\ell} p_k y_j^k$$

determinará el ***beneficio*** *asociado a la producción y_j cuando prevalecen los precios p. La empresa buscará un plan de producción y_j^* que maximice su beneficio. Dicho plan de producción será una* ***producción de equilibrio*** *para la empresa j-ésima y se verificará que*

$$p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j \qquad \forall y_j \in Y_j$$

Note que si el vector de precios p tiene alguna componente $p_k < 0$, entonces bajo los supuestos 1,2 y 3, como $-\mathbb{R}^{\ell} \subset Y_j$ entonces siempre podrá aumentar sus beneficios tomando valores más negativos para el bien k y cero las demás entradas (lo cual siempre es posible). Así que si hay precios negativos no existirán producciones de equilibrio. De aquí en adelante, consideraremos que **existen solo precios positivos** en éstas sección.

Sin embargo, la condición de precios positivos no es suficiente. Si hay rendimientos crecientes a escala (por ejemplo en una empresa que produce un solo bien), a medida que ésta empresa aumente su producción, sus beneficios aumentarán (bajo el supuesto de que siempre podrá vender cualquier cantidad de producto). Solo hay una producción que maximiza los beneficios en éste caso, cuando los precios son tales que hacen que los beneficios sean nulos.

Definición 2.4.6 *Podemos definir la* ***correspondencia de oferta de la empresa j-ésima*** *como $\eta_j : \mathbb{R}^{\ell}_{+} \to \mathcal{P}(Y_j)$, donde a cada p le asociamos el conjunto*

$$\eta_j (p) \equiv \{y_j \in Y_j \mid p \cdot y_j \text{ es máximo}\}$$

Análogamente podemos definir la ***función de beneficio de la empresa j-ésima*** *como una función $\pi_j : \mathbb{R}^{\ell}_{+} \to \mathbb{R}$ tal que a cada precio p le asocia el valor*

$$\pi_j (p) = \text{máx}\{p \cdot y_j \mid y_j \in Y_j\}$$

Así, dado un vector de precios $p \in \mathbb{R}^{\ell}$, definimos los **hiperplanos de isobeneficio** como

$$B(k) = \{y_j \in Y_j \mid p \cdot y_j = k\}$$

los cuales tienen, por definición, normal p. Entonces $p \cdot y_j^* = \pi_j (p^*)$ define el **hiperplano de beneficio máximo**.

Teorema 2.4.4 *La correspondencia de oferta $\eta_j(p)$ de la empresa j-ésima es homogénea de grado cero en precios. La función de beneficios $\pi_j(p)$ es homogénea de grado 1 en precios (i.e. $\forall \lambda > 0,\ \eta_j(\lambda p) = \eta_j(p)$ y además $\pi_j(\lambda p) = \lambda \pi_j(p)$).*

Demostración. Dado $p \in \mathbb{R}^\ell$, entonces si $y \in \eta_j(p)$ se tiene que

$$p \cdot y \geq p \cdot y_j, \qquad \forall y_j \in Y_j$$

luego dado $\lambda > 0$ tenemos que

$$\lambda p \cdot y \geq \lambda p \cdot y_j, \qquad \forall y_j \in Y_j$$

es decir, $\lambda y \in \eta_j(\lambda p)$ con $\pi(\lambda p) = \lambda(p \cdot y) = \lambda \pi(p)$. $\square$

Nota 2.4.2 *Podemos definir la* ***correspondencia de oferta agregada****, $\eta : \mathbb{R}^\ell \to \mathcal{P}(Y)$, donde a cada $p \in \mathbb{R}^\ell$ le asociamos el conjunto*

$$\eta(p) \equiv \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p)$$

la cual, por el teorema precedente y su definición, es homogénea de grado cero en p.

Teorema 2.4.5 *Bajo los supuestos del 1 al 5, se verifica que:*

1. *$\eta(p)$ es cerrado y convexo para todo $p \in \mathbb{R}^\ell_+$*
2. *Sea $p \in \mathbb{R}^\ell_+$ tal que $\eta(p)$ es no vacío. Entonces η es hemicontinua superiormente en p.*

Demostración. Hagamos la prueba por partes.

1. Veamos que $\eta_j(p)$ es cerrado, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$. Dada una sucesión $\left\{y_j^k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \eta_j(p)$ tal que $y_j^k \longrightarrow y_j^0$ para algún $y_j^0 \in \mathbb{R}^\ell$, entonces se tiene que

$$m_j = p \cdot y_j^k \geq p \cdot y_j, \qquad \forall y_j \in Y_j$$

Por continuidad del producto punto $p \cdot y_j^k \longrightarrow p \cdot y_j^0$ y como $y_j^k \in \eta_j(p), \forall k \in \mathbb{N}$, entonces $p \cdot y_j^k = m_j = p \cdot y_j^0, \forall k \in \mathbb{N}$, lo que implica que $y_j^0 \in \eta_j(p)$ y por lo tanto $\eta_j(p)$ es cerrado, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Además, sean $y_j^1, y_j^2 \in \eta_j(p)$, como Y_j es convexo entonces, dado $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que $[z_\lambda = \lambda y_j^1 + (1-\lambda) y_j^2] \in Y_j$ y cumple que

$$p \cdot z_\lambda = \lambda p \cdot y_j^1 + (1-\lambda) p \cdot y_j^2 = \lambda m_j + (1-\lambda) m_j = m_j$$

así, $z_\lambda \in \eta_j(p)$, por lo que afirmamos que $\eta_j(p)$ es convexo, y por el Teorema 1.9.3 se sigue que $\eta(p)$ es convexo.

Ahora, por el Teorema 1.10.2, $\mathbf{A}(\eta_j(p)) \subset \mathbf{A}(Y_j)$, por lo que, siguiendo el resultado y el razonamiento del Lema 2.4.1, los conos asintóticos de los conjuntos cerrados y convexos $\eta_j(p)$, para $j = 1, 2, \ldots, n$, son positivamente semi-independientes, luego por el Teorema 1.10.3 se sigue que $\eta(p) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p)$ es cerrado.

2. Sea $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$ tal que $p_k \longrightarrow p$, entonces como $\eta(p) \neq \emptyset$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $\eta_j(p) \neq \emptyset,\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$, y que $\eta_j(p_k) \neq \emptyset,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

   Así, formamos la sucesión $\left\{y_j^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $y_j^k \in \eta_j(p_k),\ \forall k \in \mathbb{N}$, y tal que $y_j^k \to y_j^0$. Suponga que $y_j^0 \notin \eta_j(p)$, luego existe un $y_j' \in Y_j$ tal que $p \cdot y_j' > p \cdot y_j^0$ con lo cual $p \cdot y_j' - p \cdot y_j^0 = q > 0$.

   Por la continuidad del producto interno, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p_k \cdot y_j' - p_k \cdot y_j^0 > \frac{2}{3}q$, para todo $k > k_1$, y también existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|p_k \cdot y_j^k - p_k \cdot y_j^0\right| < \frac{q}{3},\ \forall k > k_2$.

   Así, tomando $k_3 > \text{máx}\{k_1, k_2\}$ tenemos que:

$$p_{k_3} \cdot y_j^1 - p_{k_3} \cdot y_j^{k_3} = (p_{k_3} \cdot y_j^1 - p_{k_3} \cdot y_j^0) + (p_{k_3} \cdot y_j^0 - p_{k_3} \cdot y_j^{k_3}) > \frac{q}{3} > 0$$

   lo que contradice que $y_j^{k_3} \in \eta_j(p_{k_3})$. Entonces $y_j^0 \in \eta_j(p)$ y η_j es hemicontinua superiormente en $p,\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$.

   Por el segundo inciso del Teorema 1.9.2, la correspondencia $\eta(p)$ es hemicontinua superiormente. □

Teorema 2.4.6 *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ puntos en $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ respectivamente. Dado p^* un precio tal que $\eta(p^*)$ es no vacío. Entonces $p^* \cdot y = \text{máx}\ p^* \cdot Y$ si y sólo si $p^* \cdot y_j = \text{máx}\ p^* \cdot Y_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Demostración. Probemos la doble implicación.

- Primero, sea $y^* \in \eta(p^*)$, entonces por definición $y_j^* \in \eta_j(p^*),\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, $p^* \cdot y_j^* \geq p^* \cdot y_j,\ \forall y_j \in Y_j$. Consecuentemente $p^* \cdot y^* \geq p^* \cdot y,\ \forall y \in Y$.

- Suponga ahora que $p^* \cdot y^* \geq p^* \cdot y,\ \forall y \in Y$, pero que $y^* \notin \eta(p^*)$. Entonces podemos encontrar algún $y_k' \in Y_k$ tal que $p^* \cdot y_k' > p^* \cdot y_k^*$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pero entonces tenemos que

$$p^* \cdot \left(\sum_{j\neq k} y_j^* + y_k'\right) > p^* \cdot y^*$$

  con $\left(\sum_{j\neq k} y_j^* + y_k'\right) \in Y$, contradiciendo la hipótesis. □

2.5. Equilibrio General

Ahora nuestro objetivo va a ser construir un modelo para analizar el comportamiento de los agentes de una economía al interactuar entre sí a través de la producción, el consumo y del intercambio voluntario de bienes y servicios. Vamos a analizar bajo dos esquemas distintos, el cómo deciden las cantidades de bienes que consume cada individuo, así como la cantidad de insumos que emplean para producir y las cantidades de productos que va a elaborar bajo un modelo de competencia.

El enfoque neoclásico considera que el individuo busca maximizar sus preferencias individuales de forma egoísta, es decir, cada individuo busca maximizar su utilidad sin importar la de los demás. Esto permite que, en condiciones de competencia de mercado y en caso de la existencia de un equilibrio competitivo, las asignaciones a las que llega cada individuo en éste equilibrio sean las óptimas.

Analizaremos primero condiciones de equilibrio general en una economía donde no hay producción, es decir, una economía de intercambio puro donde los individuos poseen ciertos bienes iniciales que van a tratar de intercambiar con los demás agentes para poder mejorar su bienestar (medido a través de su función de utilidad). El intercambio final de bienes entre los individuos dependerá de sus dotaciones iniciales y de los precios de equilibrio que establezca nuestro mecanismo. Éste resultado se obtendrá como una consecuencia directa de nuestros supuestos de maximización para los agentes implicados en nuestra economía y de la ley de Walras, auxiliados por los teoremas de punto fijo.

Después, apoyados en un mecanismo basado en la Teoría de Juegos y el de Economía Abstracta, daremos una versión más general de ésta economía donde ya se toma en cuenta la producción de bienes y el comportamiento de los individuos es en forma estratégica, basándonos en una estructura de mercado similar a la anterior. De ésta forma los individuos (quienes también son dueños de las empresas) van a decidir no solo sobre cuánto consumir de cada bien, sino también sobre cuánto producir.

Demostraremos en cada caso (Equilibrio General sin y con producción) la existencia de un equilibrio en las respectivas situaciones económicas, llamado el **equilibrio Walrasiano**, el cual es de suma importancia teórica para la microeconomía moderna, ya que nos aporta una directríz importante y una fundamentación teórica para la toma de decisiones las políticas económicas publicas y privadas, y nos permite el desarrollo de muchas otras ramas de la economía, como la Economía Pública, la Organización Industrial, la Regulación Económica, modelos macroeconómicos micro fundamentados, entre otras.

2.5.1. Modelo Sin Producción (Intercambio Puro)

Nos ubicamos ahora en una economía sin producción donde tenemos un número finito m de individuos que poseen dotaciones iniciales exógenas y preferencias bien portadas ($\succeq_i$ es una relación de preferencias continua y convexa para todo $i = 1, 2, \ldots, m$). Además consideraremos que nuestros individuos son tomadores de precios.

Definición 2.5.1 *Definimos la **dotación inicial del individuo** i en una economía de m agentes y ℓ bienes, como la cantidad total de cada bien con la que éste llega a la economía denotada por:*

$$\omega^i = \left(\omega_k^i\right) \qquad \text{donde } k = 1, 2, \ldots, \ell.$$

*donde $\omega = \sum_{i=1}^m \omega^i$ es la **cantidad total de recursos inicialmente disponibles**.*

Así, un **agente** de ésta economía esta representado por el par $\left(\omega^i, \succeq_i\right)$. Como supondremos que las preferencias del agente son bien portadas, les podemos asociar una función de utilidad $u_i : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ tal que represente sus preferencias.

Definición 2.5.2 *Una **asignación** en ésta economía es un vector $x = \left(x^i\right) \in \mathbb{R}^m$ donde $x^i = \left(x_k^i\right),\ k = 1, 2, \ldots, \ell$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Note que, dado un precio $p \in \mathbb{R}_+^\ell$, el **ingreso inicial del individuo** i, dado por

$$I_i^0 = p \cdot \omega = \sum_{k=1}^{\ell} p_k \omega_k$$

es endógeno (se determina dentro del modelo al resolverlo) pues está dado dependiendo de la determinación que hagamos de los precios (que son variables a determinar en el modelo). Vea también la analogía entre ésta definición y la de **riqueza inicial** descrita en el Capítulo de Teoría del Consumidor.

Ejemplo 2.5.1 *El caso más sencillo para ésta economía es cuado tenemos a 2 individuos ($A = \left[\left(\omega_1^A, \omega_2^A\right), \succeq_A\right]$ y $B = \left[\left(\omega_1^B, \omega_2^B\right), \succeq_B\right]$) con dotaciones iniciales y dos bienes a intercambiar.*

*Para el análisis de equilibrio entre estos dos individuos dibujamos la gráfica de intercambio, llamada la **caja de Edgeworth** la cual se compone sobreponiendo la gráfica de consumos posibles del agente B en sentido inverso a los del agente A (i.e., suponiendo que los bienes son deseados por los individuos, la utilidad del individuo A crece hacia arriba y a la derecha, mientras que la del individuo B hacia abajo y a la izquierda) y las dimensiones de la caja son la suma de sus dotaciones iniciales del bien 1 en un eje de coordenadas y del bien 2 respectivamente en el otro eje.*

Note que dados los precios $p = (p_1, p_2)$, el hiperplano presupuestario (la recta con pendiente $m = -\frac{p_1}{p_2}$) pasa por la dotación inicial $\omega^A = \omega^B$. Gráficamente vemos que cualquier punto dentro de la caja determina una asignación factible para los individuos, pero si los individuos eligen puntos diferentes en la caja o fuera de ella, puede haber excesos de demanda o de oferta de uno de los bienes.

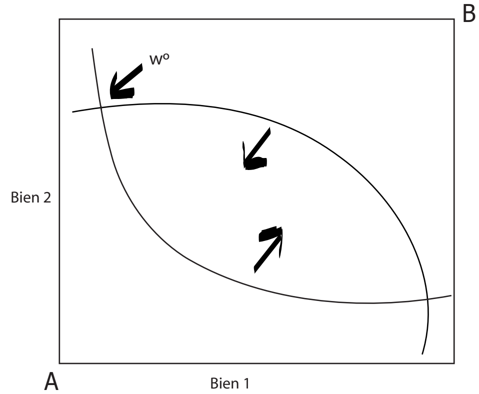

Figura 2.1: Caja de Edgeworth

Definición 2.5.3 *Sea $p \in \mathbb{R}^{\ell}$ un vector de precios arbitrario. Definimos la* ***demanda bruta del agente*** *i por el bien $k = 1, 2, \ldots, \ell$, como*

$$x_k^i = x_k^i \left(p, \omega^i\right) = x_k^i \left(p\right)$$

donde x_k^i es la función de demanda (derivada de las correspondencias de demanda) del individuo i.

Definición 2.5.4 *Sea $p \in \mathbb{R}^{\ell}$ un vector de precios arbitrarios. El* ***exceso de demanda*** *(o demanda neta) del agente $i = 1, 2, \ldots, m$, por el bien $k = 1, 2, \ldots, \ell$, se define por*

$$e_k^i \left(p\right) = x_k^i \left(p\right) - \omega_k^i$$

así, el ***exceso de demanda*** *del agente $i = 1, 2, \ldots, m$ es:*

$$e^i \left(p\right) = \left(e_k^i \left[p\right]\right), \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, \ell$$

Definición 2.5.5 *Sea $p \in \mathbb{R}^{\ell}$ un vector de precios arbitrario. Definimos el* ***exceso de demanda agregada del bien k*** *como:*

$$e_k \left(p\right) = \sum_{i=1}^{m} e_k^i \left(p\right)$$

así, el ***exceso de demanda agregada de la economía*** *está dado por:*

$$e \left(p\right) = \left(e_k \left[p\right]\right) \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, \ell$$

Definición 2.5.6 *El par asignación-precio $\left(x\left[p\right], p\right)$ es un* ***equilibrio de mercado*** *(o equilibrio* ***competitivo o Walrasiano****) si* $\quad e\left(p\right) \leq 0$

Note que, para encontrar el equilibrio de mercado en una economía, solo importarán los precios relativos de los bienes pues todos los individuos enfrentan los mismos precios que afectan linealmente a los bienes y sus correspondencias de demanda son homogéneas de grado cero. Así, podemos dividir a todos los precios entre un precio no nulo y se conservarán sus funciones de demanda.

Queremos ahora construir un mecanismo que lleve a los individuos a tomar decisiones de intercambio que sean Equilibrios de Mercado, pues esto es congruente con que todos los individuos puedan satisfacer sus demandas por los bienes (en caso contrario habría excesos de demanda) y con ello tener un comportamiento maximizador de su utilidad obteniendo la mejor canasta que puede de acuerdo a sus preferencias y a su dotación inicial. Para esto daremos las condiciones para las cuales existe éste equilibrio buscado por nosotros.

Definición 2.5.7 *Definimos el **simplex de dimensión** ℓ como* $S_\ell = \left\{ p \in \mathbb{R}^\ell_+ \mid \sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1 \right\}$

En las siguientes proposiciones identificaremos a los precios posibles para nuestro individuo estando en el simplex S_ℓ (tomando el valor $p' = p / \left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \right)$), lo que nos permitirá aplicar el Teorema de punto fijo de Brouwer. Esto lo podemos hacer gracias a que a nuestros individuos solo les interesan los precios relativos entre bienes para tomar sus decisiones de consumo.

Lema 2.5.1 (Ley de Walras) *Sea $p \in S_\ell$ arbitrario, entonces* $p \cdot e(p) = 0$

Demostración. Sea $p \in S_\ell$ arbitrario, como todos los agentes maximizan su utilidad, por el Corolario 2.3.2, deben de satisfacer su restricción de presupuesto $p \cdot \omega^i = p \cdot x^i(p)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Sumando tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} p \cdot \omega^i = \sum_{i=1}^{m} p \cdot x^i(p) \implies \sum_{i=1}^{m} p \cdot x^i(p) - \sum_{i=1}^{m} p \cdot \omega^i = 0$$

luego, por definición tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} p \cdot x^i(p) - \sum_{i=1}^{m} p \cdot \omega^i = p \cdot e(p)$$

por lo que

$$p \cdot e(p) = p \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} e^i[p] \right) = p \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} (x^i(p) - \omega^i) \right] = 0. \ \square$$

Note que éste teorema nos dice que cuando los individuos se comportan maximizando su utilidad, el exceso en demanda de una economía tiene valor nulo. El siguiente lema es una propiedad similar a ésta pero a nivel de mercados.

Lema 2.5.2 (Limpieza de mercados) *Sea $p \in S_\ell$ con $p \gg 0$ y tal que $e_k(p) = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, \ell - 1$, entonces $e_\ell(p) = 0$*

Demostración. Sea $p \in S_\ell$ tal que $e_k(p) = 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, \ell - 1$. Por la ley de Walras sabemos que $p \cdot e(p) = 0$, es decir $\sum_{k=1}^{\ell} p_k \; e_k(p) = 0$. Pero note que todos los términos de ésta expresión, excepto tal vez el último, son cero, luego $p \cdot e_\ell = 0$, y como $p_\ell > 0$, entonces $e_\ell = 0$. $\square$

Ésta es la condición conocida como vaciado de mercados, y plantea que si en una economía de ℓ mercados, $\ell - 1$ están en equilibrio, entonces el último también está en equilibrio.

Lema 2.5.3 *Sea $p^* \in S_\ell$ un vector de precios de equilibrio. Si $e_{k_0}(p^*) < 0$ entonces $p^*_{k_0} = 0$*

Demostración. Suponga que $p^*_{k_0} > 0$, entonces por la ley de Walras $p^* \cdot e(p^*) = 0$. Además como $e(p^*)$ es un equilibrio se tiene que $e(p^*_k) \leq 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, \ell$, y como se tiene que $p^*_k \geq 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, \ell$, entonces $p^*_k e_k(p^*) \leq 0, \forall k = 1, 2, \ldots, \ell$, con $p^*_{k_0} e_{k_0}(p^*) < 0$.

Así, $p^* \cdot e(p^*) < 0$, lo que contradice la ley de Walras. $\square$

Nota 2.5.1 *Suponga que $p_k > 0$ implica que $e_k(p) \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, \ell$ (todo bien con valor positivo es deseable). Entonces considere $p \in S_\ell$ con $p_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, \ell$, el cual es un vector de precios de equilibrio. Así $p \cdot e(p) \leq 0 \implies e(p) \leq 0$.*

Por lo tanto $e(p) = 0$ en equilibrio bajo éste supuesto.

Teorema 2.5.1 (Existencia del equilibrio Walrasiano) *Sea $e : S_\ell \to \mathbb{R}^\ell$ la función de exceso de demanda agregada. Supongamos que $e(p)$ es una función continua que satisface la ley de Walras. Entonces $\exists p^* \in S_\ell$ tal que $e(p^*) \leq 0$ (es un equilibrio Walrasiano).*

Demostración. Para demostrar esto definamos la función $e^+_k(p) = \text{máx} \; \{0, e_k(p)\}$. Note que, por definición de las funciones, $e^+_k(p) \, e_k(p) = 0$ si y sólo si $e_k(p) \leq 0$.

Por otro lado sea $\alpha(p) = \sum_{k=1}^{\ell} \left[p_k + e^+_k(p)\right]$ (note que $\alpha(p) \geq 1$, $\forall p \in S_\ell$, pues se tiene que $\sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1$), entonces definimos:

$$f(p) = \frac{1}{\alpha(p)} \left[p + e^+(p)\right]$$

Así $f : S_\ell \to S_\ell$ es continua pues $\alpha(p)$, p, $e^+(p)$ son continuas y además

$$\sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\alpha(p)} \left[p_k + e^+_k(p)\right] = \frac{1}{\alpha(p)} \sum_{k=1}^{\ell} \left[p_k + e^+_k(p)\right] = \frac{\alpha(p)}{\alpha(p)} = 1$$

Por lo que podemos aplicar el Teorema de punto fijo de Brouwer a ésta función, luego $\exists p^* \in S_\ell$ tal que $p^* = f(p^*)$. Por la ley de Walras

$$0 = p^* \cdot e(p^*) = \left[\frac{1}{\alpha(p^*)}\right] e^+\left(p^+\right) \cdot e(p^*)$$

Por lo que $[e^+(p^*) \, e(p^*)] = 0 \Longrightarrow e(p^*) \leq 0$ por la nota de arriba. $\square$

En la prueba anterior, la función $f(p) = \frac{1}{\alpha(p)} [p + e^+(p)]$ que definimos del simplex S_ℓ en si mismo, además de ser continua y servirnos para nuestra demostración, tiene significado económico ya que, al haber exceso de demanda de algún bien, su precio relativo aumenta hasta equilibrar el modelo, igualando la demanda con la oferta de dicho bien.

2.5.2. Equilibrio General con Producción

Ahora vamos a considerar una economía con producción en donde tenemos un número finito m de individuos que poseen dotaciones iniciales exógenas y preferencias bien portadas y además son dueños (en forma cooperativa) de las n empresas de nuestra economía con $\alpha^i = \left(\alpha_j^i\right),\ j = 1, 2, \ldots, n$, su **participación accionaria** en la empresa j, con $\alpha_j^i \in [0, 1]$. Note que debe cumplirse que $\sum_{i=1}^m \alpha_j^i = 1$, para toda $j = 1, 2, \ldots, n$.

Esto es lo que se conoce como **economía de bienes privados**, pues los individuos son propietarios tanto de los insumos como de las empresas. Consideramos como antes que nuestros individuos son tomadores de precios.

Definición 2.5.8 *Definimos la **dotación inicial del individuo** i en una economía de m agentes y ℓ bienes, como la pareja:*

$$\left(\omega^i, \alpha^i\right) = \left(\omega^i, (\alpha_j^i)\right) \qquad \textit{donde } j = 1, 2, \ldots, n$$

Así, un **agente** de ésta economía esta representado por $\left(\omega^i, \alpha^i, \succeq_i\right)$. Como supondremos que las preferencias del agente son bien portadas, a cada uno le asociamos una función de utilidad $u_i : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$.

Definición 2.5.9 *Una **asignación** es una especificación de una acción para cada agente, es decir, un punto (x, y) del conjunto $\prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{j=1}^n Y_j \subset \mathbb{R}^{\ell(m+n)}$.*

*Decimos que la asignación (x, y) es **factible** si*

$$\sum_{i=1}^m x_k^i \le \sum_{i=1}^m \omega_k^i + \sum_{j=1}^n y_k^j, \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, \ell$$

En ésta parte del trabajo supondremos que hay 3 tipos de agentes que participan en las decisiones de consumo y producción (los cuales suman $n + m + 1$ participantes). Estos participantes toman decisiones sobre consumo, producción y los niveles de precios de manera conjunta e instantánea al mismo tiempo entre sí. Por un lado están las **empresas** las cuales maximizan su beneficio $p^* \cdot y^j$ en sus respectivos conjuntos $Y_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ (en éste caso y^{*j} representa al plan de producción que maximiza los beneficios y se conoce como la **oferta bruta de la empresa** j dados los precios p^*). Aquí, los supuestos que hicimos en la parte de teoría de la producción se mantienen vigentes.

Por otra parte, otro tipo de agente que consideramos son los **consumidores**, los cuales maximizan su respectiva función de utilidad $u_i(x^i),\ i = 1, 2, \ldots, m$, en el conjunto

$$\left\{ x^i \in X_i \mid p^* \cdot x^i \le p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^n \alpha_j^i p^* \cdot y^{*j} \right\}$$

Al elemento x^{*i} que maximiza la utilidad del consumidor i lo denominamos la **demanda bruta del agente** i. En el caso de los consumidores adoptaremos los mismos axiomas que, en la Sección 2.3, nos permitían asegurar la existencia de funciones de utilidad continuas para cada uno de los agentes, y además supondremos que se cumple la no saciedad y la convexidad en las preferencias.

Definición 2.5.10 *Sea $p \in \mathbb{R}^{\ell}$ un vector de precios arbitrarios. El* ***exceso de demanda*** *(o demanda neta) del agente $i = 1, 2, \ldots, m$, por el bien $k = 1, 2, \ldots, \ell$, se define por*

$$e_k^i(p) = x_k^i(p) - \omega_k^i$$

así, el ***exceso de demanda*** *del agente $i = 1, 2, \ldots, m$ es:*

$$e^i(p) = \left(e_k^i[p]\right)$$

Definición 2.5.11 *Sea $p \in \mathbb{R}^{\ell}$ un vector de precios arbitrario. Definimos el* ***exceso de demanda agregada del bien k*** *como:*

$$e_k(p) = \sum_{i=1}^{m} e_k^i(p) - \sum_{j=1}^{n} y_k^j(p) = \sum_{i=1}^{m} x_k^i(p) - \sum_{i=1}^{m} \omega_k^i - \sum_{j=1}^{n} y_k^j(p)$$

así, el ***exceso de demanda agregado de la economía*** *está dado por:*

$$e(p) = (e_k[p]) \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, \ell$$

Por último, consideramos un tipo de agente que llamaremos **mercado**, el cual elige el vector de precios $p^* \in S_{\ell}$ y recibe el pago $p \cdot e(p)$ (con $e(p)$ establecido en definición 2.5.11). Supondremos que el mercado se comporta de tal forma que maximiza su pago, pero como no elige ni consumo ni producción, su maximización dependerá únicamente del incremento o decremento de los precios.

Lema 2.5.4 (Ley de Walras con Producción) *Sea $p \in S_{\ell}$ un precio arbitrario, entonces se cumple que $p \cdot e(p) = 0$*

Demostración. Dado un vector $p \in S_{\ell}$, cada uno de los consumidores al maximizar su utilidad sujetos a su restricción presupuestal, por el Corolario 2.3.2 y la definición de su conjunto presupuestario satisfacen que

$$p \cdot x^i(p) = p \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j$$

luego tenemos que

$$p \cdot e^i(p) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j = p \cdot x^i(p) - p \cdot \omega^i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j = 0$$

sumando sobre todos los consumidores i tenemos que

$$p \cdot e(p) = p \cdot [\sum_{i=1}^{m} x^i(p) - \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y^j(p)] = p \cdot \sum_{i=1}^{m} x^i(p) - p \cdot \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j(p)] = 0 \ \square$$

Note que éste teorema nos dice que cuando los individuos se comportan como maximizadores de su utilidad, el exceso de demanda de lo que consume el individuo tomando en cuenta los beneficios que obtiene por su participación en la producción, tiene valor nulo.

Definición 2.5.12 *Similarmente a la parte de Equilibrio sin producción, tenemos que una asignación* (x^*, y^*) *y un vector de precios* $p^* \in \mathbb{R}^\ell$ *constituyen un* ***Equilibrio Walrasiano Competitivo*** *si todos los agentes participantes hacen una elección en base a la maximización de su criterio de elección, es decir:*

1. *Para cada* j, $y^{*j} \in Y_j$ *maximiza los beneficios en* Y_j*, es decir*
$$p^* \cdot y^j \leq p^* \cdot y^{*j} \qquad \text{para todo } y^j \in Y_j$$
2. *Para cada* i, $x^{*i} \in X_i$ *es maximal para* $\succeq_i$ *en su conjunto de restricciones*
$$\left\{ x^i \in X_i \mid p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p^* \cdot y^{*j} \right\}$$
3. $\sum_{i=1}^{m} x^{*i} = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \sum_{j=1}^{n} y^{*j}$
4. *Se cumple la ley de Walras* $p \cdot e(p) = 0$ *para cualquier* $p \in S_\ell$

Hasta aqui nuestro modelo se ha comportado de tal forma que los diferentes dominios de maximización tanto de los productores como del mercado no se ven afectados por las decisiones de los otros agentes, pero en el caso de los consumidores, los dominios sobre los cuales pueden elegir su consumo se ven afectados por las decisiones de producción que toman los demás agentes. Ésta es la diferencia fundamental entre el concepto de Economía Abstracta (que definiremos a continuación) y el Equilibrio Walrasiano Competitivo modelado como un juego en forma estratégica.

Definición 2.5.13 *Sean* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_r$ *subconjuntos de* $\mathbb{R}^\ell$*, formamos al conjunto*
$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_r$$
y suponga que para cada $i = 1, 2, \ldots, r$*, existe una función real-valuada* f_i *definida sobre* $\mathcal{U}$*.*

Ahora, definimos al siguiente producto
$$\bar{\mathcal{U}_i} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_{i-1} \times \mathcal{U}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{U}_r$$
como el conjunto de (r-1)-úplas ordenadas de la forma $\bar{a}_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r)$ *en donde* $a_j \in \mathcal{U}_j$, $\forall j \neq i$*. Sea también* $A_i(\bar{a}_i)$ *una correspondencia definida sobre* $\bar{\mathcal{U}_i}$ *en* $\mathcal{U}_i$ *(asociando a cada* $\bar{a}_i \in \bar{\mathcal{U}_i}$ *un subconjunto de* $\mathcal{U}_i$*). Entonces a la secuencia dada por*
$$[\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_r; f_1, \ldots, f_r; A_1(\bar{a_1}), \ldots, A_r(\bar{a_r})]$$
la denominaremos como una ***Economía Abstracta****.*

Note que la definición anterior es muy parecida a la de un juego en forma estratégica (definición 1.10.5), solo que es un poco más general, ya que los dominios sobre los cuales pueden decidir los agentes, se ven alterados por las decisiones de los demás participantes (en un juego se toma $A_i(\bar{a}_i) = \mathcal{U}_i$, $\forall \bar{a}_i \in \bar{\mathcal{U}_i}$). Aquí las funciones f_i toman el papel de los pagos y los conjuntos $\mathcal{U}_i$ representan todas las posibles acciones de los agentes, pero en éste caso, estas se ven delimitadas por las funciones $A_i(\bar{a}_i)$ (que dependen de las decisiones de los demás agentes).

Así, una Economía Abstracta la podemos caracterizar como una generalización de un juego en forma estratégica, en donde las elecciones de los demás agentes afectan tanto los pagos como el dominio de las acciones de los agentes.

Definición 2.5.14 *Un punto $a^* \in \mathcal{U}$ es un **Punto de Equilibrio** de la economía abstracta $[\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_r; f_1, \ldots, f_r; A_1(\bar{a_1}), \ldots, A_r(\bar{a_r})]$ si para todo $i = 1, 2, \ldots, r$, ocurre que $a_i^* \in A_i(\bar{a_i}^*)$ y además*

$$f_i(\bar{a_i}^*, a_i^*) = \max_{a_i \in A_i(\bar{a_i}^*)} f_i(\bar{a_i}^*, a_i)$$

Entonces, un punto de equilibrio cumple la propiedad de que cada individuo maximiza su propio pago, dadas las acciones de los demás agentes, sobre el conjunto de acciones que le son permitidas en vista de las acciones tomadas por los demás agentes. A continuación definiremos una Economía Abstracta cuyos puntos de equilibrio tienen todas las propiedades de un equilibrio competitivo.

En nuestro caso, en el Equilibrio General con Producción, tenemos $(m+n+1)$ participantes, las n empresas, los m consumidores y el mercado (participante ficticio que elige los precios). Para el consumidor i-ésimo, el siguiente símbolo, $\bar{x}^i$, representa un punto en el conjunto dado por $X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_m \times Y_1 \times \cdots \times Y_n \times S_\ell$, y definimos la correspondencia

$$A_i(\bar{x}^i) = \left\{ x^i \in X_i \mid p \cdot x^i \leq p \cdot \omega^i + \max[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j] \right\}$$

Así, nosotros estudiaremos la Economía Abstracta dada por

$$E_{abs} = [X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n, S_\ell, u_1(x^1), \ldots, u_m(x^m), p \cdot y^1, \ldots, p \cdot y^m, p \cdot e(p),$$
$$A_1(\bar{x^1}), \ldots, A_m(\bar{x^m}), Y_1, \ldots, Y_n, S_\ell]$$

en donde el i-ésimo consumidor elige una acción $x^i \in X_i$, sujeto a la restricción $x^i \in A_i(\bar{x}^i)$, y recibe el pago $u_i(x^i)$; la j-ésima industria elegirá un vector $y^j \in Y_j$ y recibirá un pago $p \cdot y^j$; y el agente ficticio, el mercado, elige un vector de precios $p \in S_\ell$ y recibe el pago $p \cdot e(p)$ definido anteriormente.

Vemos que en ésta definición reemplazamos al término $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j$ de la definición de Equilibrio competitivo, por la expresión $\max[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j]$. Esto nos permite eliminar la posibilidad de que el conjunto

$$\left\{ x^i \in X_i \mid p^* \cdot \omega^i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i p^* \cdot y^j \right\}$$

sea vacío, pues note que como para algún $x^i \in X_i$ se cumple que $\omega^i \geq x^i$, entonces

$$p \cdot \omega^i + \max[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j] \geq p \cdot \omega^i \geq p \cdot x^i$$

por lo que $A_i(\bar{x}^{*i})$ no es vacío, y además ésta nueva expresión no cambia al punto de equilibrio, ya que por el supuesto de posibilidad de inacción, $0 \in Y_j$, y luego

$$p^* \cdot y^{*j} \geq p^* \cdot 0 = 0$$

luego $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p^* \cdot y^{*j} \geq 0$, por lo que

$$\max[0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p \cdot y^j$$

Nota 2.5.2 *Note que un Punto de Equilibrio de nuestra Economía Abstracta (E_{abs}) es un punto de Equilibrio Competitivo.*

Para ver esto notamos que en presencia de un Punto de Equilibrio de E_{abs}, por definición, se cumplen las condiciones de maximización de los beneficios de las empresas y de que el vector de precios de equilibrio esté en S_ℓ (pues sus dominios son independientes de las decisiones de los otros agentes), solo resta probar la maximización de la utilidad de cada consumidor dentro de sus conjuntos restringidos $A_i(\bar{x}^i)$.

Dado un precio de equilibrio p^*, entonces si (x^*, y^*, p^*) es un punto de equilibrio se tiene que cumplir que, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$p^* \cdot x^{*i} = p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p^* \cdot y^{*j}$$

pues en caso que se diera la desigualdad estricta, por el supuesto de no saciedad existe otro vector de consumo $x^{i'} \in X_i$ tal que $u_i(x^{i'}) > u_i(x^{*i})$, y por el supuesto de convexidad, si tomamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño entonces

$$u_i[(1-\epsilon)x^{*i} + \epsilon x^{i'}] > u_i(x^{*i})$$

cumpliéndose que

$$p^* \cdot [(1-\epsilon)x^{*i} + \epsilon x^{i'}] < p^* \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i p^* \cdot y^{*j}$$

y contradiciendo la elección de x^{*i}. Así, de la definición de exceso de demanda se tiene que

$$p^* \cdot e(p^*) = 0$$

Además, como $e_k \in S_\ell$ (vector de entradas cero, excepto la k-ésima que es 1), de la definición de equilibrio

$$0 = p^* \cdot e^*(p^*) \geq e_k \cdot e^*(p^*) = e_k(p^*)$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, \ell$, luego $e^*(p^*) \leq 0$. Entonces, estos dos últimos resultados junto con la maximización de beneficios y el hecho de que $p^* \in S_\ell$, nos muestran que un punto de equilibrio de E_{abs} es un Equilibrio Competitivo. La conclusión inversa es obvia.

A continuación vamos a enunciar un lema que nos servirá para probar la existencia de un punto de equilibrio en nuestra Economía E_{abs}, del cuál omitimos la demostración, pues ésta, como los teoremas de Punto Fijo que dimos en el capítulo anterior, resulta ser muy técnica y necesita de herramienta matemática que no hemos siquiera definido en la parte correspondiente del trabajo.

Lema 2.5.5 *Dada una Economía Abstracta E_{abs}, si para cada i, los conjuntos $\mathcal{U}_i$ son compactos y convexos, las funciones $f_i(\bar{a}_i, a_i)$ son continuas en $\mathcal{U}_i$ y cuasicóncavas en a_i para todo i, y además para todo $\bar{a}_i$, $A_i(\bar{a}_i)$ como correspondencia es continua y como conjunto es convexo y no vacío, entonces la economía abstracta E_{abs} tiene un punto de equilibrio.*

El siguiente teorema es uno de los principales resultados en éste trabajo y nos asegura la existencia de un Equilibrio Competitivo para cualquier sistema económico que cumpla los requerimientos normales que pedimos a una economía.

Éste resultado es consecuencia directa (aunque un poco trabajada) de nuestras definiciones en Economía Abstracta y del Lema 2.5.5 que acabamos de enunciar.

Teorema 2.5.2 (Existencia del equilibrio Walrasiano) *Sea $e : S_\ell \to \mathbb{R}^\ell$ la función de exceso de demanda agregada. Supongamos que $e(p)$ es una función continua que satisface la ley de Walras. Entonces existe un punto tal que es un Equilibrio Walrasiano Competitivo.*

Demostración. Primero note que el Teorema 2.5.5 no se puede aplicar de forma directa, ya que (por definición), los espacios de acciones de los agentes no son compactos (con excepción de S_ℓ). Definimos los siguientes conjuntos

$$\hat{X}_i = \left\{ x^i \in X_i \mid \exists x^{i'} \in X_{i'}, \forall i' \neq i,\ \exists y^j \in Y_j, \forall j = 1, 2, \ldots, n,\ \textit{tales que}\ \ e(p) \leq 0 \right\}$$

$$\hat{Y}_j = \left\{ y^j \in Y_j \mid \exists y^{j'} \in Y_{j'}, \forall j' \neq j,\ \exists x^i \in X_i, \forall i = 1, 2, \ldots, m,\ \textit{tales que}\ \ e(p) \leq 0 \right\}$$

Los $\hat{X}_i$ son los conjuntos de vectores factibles de consumo para el individuo i, si éste tuviera control completo de la economía y tuviera que cumplir con una restricción de recursos. Los conjuntos $\hat{Y}_j$ tienen una interpretación similar. Observe que, por definición, un Equilibrio $(x^{*i},\ y^{*j},\ p^*)$ de la Economía Abstracta E_{abs} debe cumplir que $x^{*i} \in \hat{X}_i,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m$, y que $y^{*j} \in \hat{Y}_j,\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$. Probemos que estos conjuntos están acotados.

Suponga que $\hat{Y}_1$ no está acotado, entonces existen sucesiones $\left\{ y_k^j \right\}_{k=1}^{\infty},\ \left\{ x_k^i \right\}_{k=1}^{\infty}$, tales que

$$\lim_{k\to\infty} \left| y_k^1 \right| = \infty, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_k^j \geq \sum_{i=1}^{m} (x_k^i - \omega^i), \qquad y_k^j \in Y_j,\ \ x_k^i \in X_i$$

Definimos $\mu^k = \text{máx}_j \left| y_k^j \right|$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$ se cumple que $\mu^k \geq 1$, por lo que tenemos que:

$$\mu^k \longrightarrow \infty, \qquad \left| \frac{y_k^j}{\mu^k} \right| \leq 1, \ \ \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Note que como Y_j es convexo y $0 \in Y_j$, entonces

$$(\frac{1}{\mu^k}) y_k^j + (1 - \frac{1}{\mu^k}) 0 = (\frac{y_k^j}{\mu^k}) \in Y_j,\ \forall j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall k \geq k_0$$

Ahora, como todo X_i es acotado por abajo, existen $b_i \in \mathbb{R}^\ell,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m$, tales que $x^i \geq b_i,\ \forall x^i \in X_i$. Entonces podemos reescribir la desigualdad de arriba como

$$\sum_{j=1}^{n} (\frac{y_k^j}{\mu^k}) \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_k^i - \omega^i)}{\mu^k} = \sum_{i=1}^{m} (\frac{b_i - \omega^i}{\mu^k}), \ \ \forall k \geq k_0$$

Como toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente y dado que Y_j es cerrado, podemos tomar una subsucesión $\{k_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{q\to\infty} (\frac{y_{k_q}^j}{\mu^k}) = y_0^j \in Y_j \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Tomando el límite cuando $q \to \infty$, dado que Y es cerrado, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} (y_0^j) \in Y \qquad \textit{con} \qquad \sum_{j=1}^{n} (y_0^j) \geq 0$$

por el supuesto de imposibilidad de producción gratuita se cumple la igualdad $\sum_{j=1}^{n} y_0^j = 0$, luego dado $1 \geq j' \geq n$ arbitrario, podemos reescribir esto como

$$\sum_{j \neq j'} y_0^j = -y_0^{j'}$$

y como $0 \in Y_j,\ \forall j$, entonces $y_0^{j'} \in Y$ (pues $y_0^{j'} = \sum_{j \neq j'} 0 + y_0^{j'}$) y además $-y_0^{j'} \in Y$ (pues $[\sum_{j \neq j'} y_0^j + 0] \in Y$). Así se cumple que $y_0^{j'} = 0,\ \forall j' = 1, 2, \ldots, n$.

Pero entonces hemos probado que la igualdad $\left| y_{k_q}^j \right| = \mu^{k_q}$ se da solamente para un número finito de índices k_q, lo cual contradice el hecho de que, por la definición de los μ^k, la igualdad se debe cumplir para al menos un j para cada k_q. Así probamos que $\hat{Y}_1$ está acotado, y por argumentos similares, el conjunto $\hat{Y}_j$ **está acotado, para todo** $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora, sea $x^i \in \hat{X}_i$, entonces por definición se cumple que

$$b_i \leq x^i \leq \sum_{j=1}^{n} y^j - \sum_{i' \neq i} x^{i'} + \sum_{i=1}^{m} \omega^i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

y nuevamente por definición se tiene que

$$b_i \leq x^i \leq \sum_{j=1}^{n} y^j - \sum_{i' \neq i} b_{i'} + \sum_{i=1}^{m} \omega^i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

ésta última expresión esta acotada (por la prueba anterior, dado que los $b_{i'}$ y los ω^i son fijos). Así, tenemos que $\hat{X}_i$ **está acotado, para todo** $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ahora, introducimos una nueva economía abstracta $\hat{E}_{abs}$, igual a la anterior excepto porque sustituimos X_i por $\hat{X}_i$ y también Y_j por $\hat{Y}_j$. Sea $\hat{A}_i(\bar{x}^i)$ la modificación resultante de $A_i(\bar{x}^i)$, entonces verificamos que todas las condiciones del Lema 2.5.5 se cumplen para ésta nueva Economía Abstracta.

- Por definición de estos nuevos conjuntos, $\hat{X}_i$ y también $\hat{Y}_j$ son conjuntos compactos y convexos, así como el conjunto S_ℓ cumple esto obviamente.

- La continuidad y convexidad de la función $u_i(x^i)$ están garantizadas por el supuesto de no saciedad y por el Teorema 2.3.1. Mientras que para el productor o el mercado, la continuidad y cuasiconvexidad de sus funciones de pago está garantizada por la linealidad de estas.

- La cerradura de la gráfica de las funciones, es simplemente la clausura del conjunto

$$\hat{U} = \hat{X}_1 \times \cdots \times \hat{X}_m \times \hat{Y}_1 \times \cdots \times \hat{Y}_n \times S_\ell$$

- El conjunto $\hat{A}_i(\bar{x}^i)$ está definido por una desigualdad lineal en x^i, y es por tanto convexo y no vacío

- La gráfica de $\hat{A}_i(\bar{x}^i)$ es cerrada pues la restricción presupuestal es una desigualdad no estricta entre dos funciones

- Ahora probaremos que $\hat{A}_i(\bar{x}^i)$ **es continua** en el punto

$$\bar{x}^i = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n, p)$$

siempre que $p \cdot \omega^i > \text{mín}_{x^i \in \hat{X}_i} p \cdot x^i$.

Sea $r^i = p \cdot \omega^i + \text{máx}\left\{0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j p \cdot y^j\right\}$, cuando $\bar{x}_k^i \to \bar{x}^i,\ p_k \to p,\ r_k^i \to r^i$. Considere un punto $x^i \in \hat{A}_i(\bar{x}^i)$, entonces

$$x^i \in X_i \qquad\qquad p \cdot x^i \leq r^i$$

Entonces hay 2 casos que considerar

1. Si $p \cdot x^i < r^i$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_k \cdot x^i < r_k^i, \quad \forall k \geq k_0$. Entonces elegimos $x_k^i = x^i,\ \textit{para}\ k > k_0$
2. Si $p \cdot x^i = r^i$, por hipótesis podemos elegir $x_0^i \in \hat{X}_i$ tal que $p \cdot x_0^i < p \cdot \omega^i \leq r^i$, y entonces $p \cdot x_k^i < r_k^i$ para toda k suficientemente grande. Definimos

   $$x^i(\lambda) = \lambda x^i + (1-\lambda)x_0^i \qquad\qquad \textit{para} \ \ 0 \leq \lambda \leq 1$$

   entonces $x^i(\lambda) \in X_i$ (pues éste es un conjunto convexo) y tenemos que

   $$p_k[\lambda x^i + (1-\lambda)x_0^i] \leq r_k^i \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \leq \frac{r_k^i - p_k \cdot x_0^i}{p_k \cdot x^i - p_k \cdot x_0^i}$$

   además, el denominador es positivo para toda k suficientemente grande. Así, el valor más grande de λ satisfaciendo estas condiciones es

   $$\lambda_k = \text{mín}[1, (r_k^i - p_k \cdot x_0^i)/(p_k \cdot x^i - p_k \cdot x_0^i)]$$

   Para todo k suficientemente grande, $\lambda_k > 0$, y así $x^i(\lambda) \in \hat{A}_i(\bar{x}_k^i)$, pero además se tiene que

   $$r_k^i \to r^i = \lim_{k \to \infty} p_k \cdot x^i \qquad \textit{con} \qquad \lambda_k \to 1 \ \ y \ \ x^i(\lambda) \to x^i$$

   Así, establecemos la continuidad de $\hat{A}_i(\bar{x}^i)$.

Por último, resaltamos el hecho de que por definición, un punto de equilibrio de la economía abstracta E_{abs} es un punto de equilibrio para la nueva economía abstracta $\hat{E}_{abs}$. Así probamos lo que queríamos.□

Note que éste teorema nos pide los mismos supuestos que el de sin producción y solo nos solicita, adicionalmente, que existan funciones de oferta continuas para todo Y_j para poder definir correctamente a la función $e\,(p)$ y que ésta a su vez sea continua. Éste es un supuesto muy natural que, como vimos en el Capítulo de Teoría del Productor, requiere de que los conjuntos Y_j sean cerrados y convexos.

2.5.3. Dos Ejemplos Ilustrativos

El objetivo de incluir los siguientes ejemplos en esta parte del trabajo, es el ilustrar a cerca de cómo se ocupan los conceptos y resultados que hemos desarrollado en el mismo para modelar proclames reales de la economía. Aunque las situaciones siguientes son una simplificación, muy obvia, de la realidad, estos son buenos referentes y puntos de partida para análisis más elaborados.

Problema 1

Suponga primero una economía donde interactúan únicamente 2 individuos (A y B) intercambiando dos bienes (x y y) y partiendo de **dotaciones iniciales** dadas por:

$$w_A = (w_x^A, w_y^A) \qquad y \qquad w_B = (w_x^B, w_y^B)$$

Suponga además (para simplificar) que ambos individuos tienen preferencias bien portadas, estrictamente monótonas y estrictamente convexas. Una función de utilidad típica que representa a éste tipo de preferencias es la Cobb-Douglas, por lo que vamos a suponer además que los individuos de ésta economía tienen las siguientes **funciones de utilidad**

$$u_A(x,y) = x^a y^b \qquad y \qquad u_B(x,y) = x^\alpha y^\beta$$

Así, de la primera observación de la Sección 2.3.5, al ser tomadores de precios, nuestros individuos se enfrentan al problema de maximización de la utilidad dado por

$$\begin{aligned} &\text{máx } \; u_I(p, w_I) = u_I(x,y) = x^n y^m \\ &s.a. \qquad (x_I, y_I) \in \beta_I(p, w_I) \qquad\qquad I = A, B. \end{aligned}$$

Para resolver esto, observe que por la convexidad estricta de las preferencias, las curvas de nivel de las funciones de utilidad, más conocidas como **Curvas de Indiferencia**, dadas por $u_I(p, w_I) = C$, para $C \in \mathbb{R}$, son estrictamente cóncavas, y al ser estríctamente monótonas, éstas curvas resultan ser líneas de grosor nulo. Además, al movernos sobre estas curvas consideramos que y_I es una función implícita de x_I, por lo que derivando la expresión respecto a x tenemos que

$$\frac{du_i(x,y)}{dx} = 0$$

en nuestro caso esta derivada resulta ser

$$nx^{n-1}y^m + x^n m y^{m-1}\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{n}{m}\frac{y}{x}$$

Ahora, dado que las preferencias son bien portadas y nuestra restricción presupuestal es lineal y dada por el plano

$$p_x x + p_y y = p_x w_x^I + p_y w_y^I$$

donde p_x y p_y son los precios de los bienes x y y respectivamente, ésta intersecta al plano (x,y) en la recta

$$y = -\frac{p_x}{p_y}x + \frac{p_x w_x^I + p_y w_y^I}{p_x}$$

vemos entonces que el mayor nivel de utilidad que puede alcanzar el individuo I es cuando la curva de indiferencia y la recta presupuestal son tangentes en un punto, es decir, cuando tienen la misma pendiente.

Igualando las pendientes de estas curvas tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p_x}{p_y} \implies \frac{n}{m}\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

Despejando a y de esta expresión y sustituyendo en la restricción presupuestaria original, tenemos que

$$p_x x + p_y[\frac{m}{n}\frac{p_x}{p_y}x] = p_x w_x^I + p_y w_y^I$$

resolviendo para x y luego haciendo el ejercicio análogo para y, obtenemos las demandas del individuo I por los bienes x y y, las cuales se conocen como **Demandas Marshalianas**, y en nuestro caso quedan de la forma

$$x_I^M = \frac{n}{n+m}\frac{p_x w_x^I + p_y w_y^I}{p_x}$$

$$y_I^M = \frac{m}{n+m}\frac{p_x w_x^I + p_y w_y^I}{p_y}$$

Note que para conocer las Demandas Marshalianas de los individuos con los que empezamos este análisis, basta con sustituir los diferentes parámetros que teníamos inicialmente.

Una vez que ambos consumidores han maximizado su utilidad tomando los precios de los bienes como dados, estamos interesados en establecer el precio de equilibrio para ambos bienes a través del mecanismo de Libre Mercado. Para este propósito encontramos las funciones de exceso de demanda para ambos bienes, las cuales están dadas por

$$e_x(p_x, p_y) = x_A^M + x_B^M - (w_x^A + w_x^B) = \frac{a}{a+b}\frac{p_x w_x^A + p_y w_y^A}{p_x} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{p_x w_x^B + p_y w_y^B}{p_x} - (w_x^A + w_x^B)$$

$$e_y(p_x, p_y) = y_A^M + y_B^M - (w_y^A + w_y^B) = \frac{b}{a+b}\frac{p_x w_x^A + p_y w_y^A}{p_y} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{p_x w_x^B + p_y w_y^B}{p_y} - (w_y^A + w_y^B)$$

Al combinar esto con las condiciones de equilibrio dadas por:

$$e_x(p_x, p_y) \leq 0 \qquad y \qquad e_y(p_x, p_y) \leq 0$$

Obtenemos los precios de equilibrio, que en este caso resultan ser

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{a(\alpha+\beta)w_y^A + \alpha(a+b)w_y^B}{b(\alpha+\beta)w_x^A + \beta(a+b)w_x^B}$$

Recordemos que los precios absolutos no nos dicen en sí mucho sobre el estado de la Economía sino los precios relativos, que nos brindan información de qué tan caro es un bien respecto al otro. En este caso, cualquier nivel de precios que mantenga esta proporción será un precio de equilibrio.

Problema 2

Considere una economía donde sólo está un individuo. Suponga que la utilidad de éste está dada por

$$U(c, O) = aLn(c) + (1 - a)Ln(O)$$

donde c es la cantidad de cocos y O es el Ocio. La dotación inicial del individuo es de 1 unidad de tiempo y su función de producción está dada por $c = aL$, con $L = 1 - O$ (la cantidad de trabajo).

En esta situación vemos que el individuo como consumidor quiere

$$\text{máx}[aLn(c) + (1 - a)Ln(O)]$$

$$s.a. \;\; pc = \omega(1 - O) + \pi$$

donde π son los beneficios de la producción donde emplea L, ω es el salario competitivo que obtiene por su trabajo y p es el nivel de precios de la Economía.

Por otra parte el problema de maximización de beneficios de la empresa está dado por

$$\text{máx}[pc - \omega(1 - O)] \qquad con \; c = a(1 - O)$$

De aquí se tiene que cumplir que $\text{máx}[pa(1 - O) - \omega(1 - O)]$.

Aplicando Condiciones de primer orden ($\frac{\partial \pi}{\partial O} = 0$) para la empresa se llega a que

$$pa = \omega$$

(Salario igualado a la Productividad Marginal) y sustituyendo este nivel óptimo de beneficios en el problema del individuo como consumidor se tiene que

$$O = 1 - a \qquad y \qquad c = a^2$$

Los cuales son los niveles de Ocio y consumo que debe llevar a cabo para maximizar su utilidad.

Reiteramos la simplificación que estos pequeños modelos hacen de la economía, pero este tipo de análisis nos va abrir la brecha para hacer modelaciones más complejas.

Conclusiones

En éste trabajo construimos un modelo económico (como era uno de nuestros objetivos iniciales) donde un número finito de agentes, divididos entre consumidores y empresas deciden, a través de un mecanismo competitivo congruentemente axiomatizado, las cantidades de producción y consumo de nuestra economía, basándose en un criterio propio de ordenación de alternativas sobre los conjuntos $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ y $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$, y apoyándose en un sistema de mercados regidos por precios que se precisan dentro del modelo. Podemos conocer cómo actúa este mecanismo en a través de el análisis de ordenes y preordenes definidos en conjuntos, y también gracias a la teoría de juegos. Así nuestra economía a estudiar se puede representar mediante

$$E = [\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^m ; \{Y_j, \pi_j\}_{j=1}^n ; \omega]$$

en donde $\succeq_i$ nos da el criterio de ordenación del i-ésimo consumidor y π_j el de la j-ésima empresa. Ésta es una economía de propiedad privada, ya que los consumidores poseen tanto los recursos iniciales como las empresas.

Definimos el que una función $u_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ representa las preferencias del i-ésimo consumidor como

$$u_i(x_i) \geq u_i(y_i) \Longleftrightarrow x_i \succeq_i y_i$$

y demostramos que, dadas las preferencias del i-ésimo consumidor que cumplen los axiomas de Completitud, Transitividad y Continuidad sobre el conjunto convexo X_i, existe una función continua de éste estilo. Esto último se puede garantizar utilizando resultados sobre densidad y numerabilidad de conjuntos, así como continuidad de funciones, que nos proporciona el análisis matemático.

Dado éste último resultado económico, podemos modelar el proceso de elección de alternativas de consumo, al tener una riqueza inicial w_i del consumidor, como el problema

$$\text{máx } \ u_i(p, x_i) \qquad s.a. \ x_i \in \beta_i(p, w_i)$$

donde $\beta_i(p, w_i) = \{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$ es el conjunto presupuestario del consumidor. Esto nos permite aplicar las diferentes herramientas del cálculo diferencial e integral, así como la teoría del control y la optimización dinámica para obtener diversos resultados.

Además, utilizando el análisis funcional y la topología, podemos concluir que, excluyendo el caso donde $w_i = \text{mín } p \cdot X_i$ y de que x_i' sea punto de saciedad, el consumidor va a gastar todo su ingreso para comprar la mejor opción de consumo que puede y de ésta forma maximizar su utilidad, es decir, $p \cdot x_i' = w_i$. Esto nos daba de manera alternativa y empleando lenguaje de la optimización dinámica, la noción de minimización del gasto sobre el conjunto $M_i(x_i')$.

Además, bajo el supuesto de convexidad fuerte, el conjunto presupuestario tiene un único elemento más grande, definiendo entonces una función presupuestaria (en lugar de correspondencia). Si a esto le agregamos el que X_i sea compacto y conexo, existe al menos una solución al problema del consumidor.

Ahora, el criterio de decisión entre alternativas para el **productor**, basándonos en el análisis funcional, es la maximización de su función de beneficios $\pi_j : \mathbb{R}^{\ell}_{+} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\pi_j(p) = \text{máx}\,\{p \cdot y_j \mid y_j \in Y_j\}$$

donde Y_j es el conjunto de posibilidades de producción del j-ésimo productor y suponemos que cumple los axiomas topológicos de continuidad, eliminación libre, posibilidad de inacción e imposibilidad de eliminación gratuita, irreversibilidad y convexidad, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. También vimos que Y_j cumple con las propiedades de divisibilidad y aditividad si y sólo si éste es un cono convexo cerrado de vértice en 0, y en éste caso prevalecen rendimientos constantes a escala. Estas propiedades le son heredadas al conjunto de producción total.

Además, usando la topología y el análisis funcional, vemos que si una posibilidad de producción está en la frontera de Y_j, entonces ésta es una producción eficiente y maximiza el beneficio dentro del conjunto Y_j. La **correspondencia de oferta de la empresa j-ésima** $\eta_j : \mathbb{R}^{\ell}_{+} \rightarrow \mathcal{P}(Y_j)$, donde a cada p le asociamos el conjunto

$$\eta_j\,(p) \equiv \{y_j \in Y_j \mid p \cdot y_j \text{ es máximo}\}$$

resulta ser homogénea de grado cero como función de los precios, y el conjunto de **oferta total de la economía** $\eta(p) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p)$ es cerrado y convexo, y si es distinto al conjunto vacío, es hemicontinua superiormente en p.

Aplicando directamente los teoremas de continuidad de una función, vemos que la **función de beneficio de la empresa j-ésima** $\pi_j : \mathbb{R}^{\ell}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada precio p le asocia el valor

$$\pi_j\,(p) = \text{máx}\,\{p \cdot y_j \mid y_j \in Y_j\}$$

es una homogénea de grado 1, por lo que se ve directamente afectada por cualquier variación de los precios.

En el caso de **Equilibrio General** consideramos 2 casos. El primero es un modelo de **intercambio puro** donde no hay producción y los agentes llegan a la economía con una dotación inicial que intercambian con los demás para mejorar su nivel de utilidad. Este comportamiento es modelado a través de la teoría de juegos, suponiendo que los agentes actúan de manera racional y maximizadora. Aquí pudimos ver que, como consecuencia inmediata de aplicar la optimización dinámica, se cumple la **ley de Walras**

$$p \cdot e(p) = 0$$

donde $e\,(p) = (e_k\,[p])$ es el exceso de demanda de la economía. Además, aplicando los teoremas de punto fijo a través del equilibrio de Nash, sabemos que existe un punto de equilibrio donde los agentes pueden mejorar su nivel de utilidad con respecto al que le proporcionaba su dotación inicial.

Para el caso de **Equilibrio General con Producción** suponemos que los consumidores son dueños de la empresa (por lo que tienen una participación accionaria en cada una de ellas) y en su ingreso total tenemos que tomar en cuenta las ganancias al maximizar nuestros beneficios, y también verificamos que cumpliera la ley de Walras. Nuestro objetivo aquí es encontrar un vector de precios tal que cada consumidor maximice su utilidad y cada productor maximice sus beneficios dándonos una repartición factible de los bienes iniciales. Debido a que los conjuntos de posibles acciones de cada uno de los agentes se ve afectado por las decisiones que toman los demás, para poder demostrar la existencia de un equilibrio competitivo en ésta economía, es necesario introducir a la **economía abstracta** dada por

$$E_{abs} = [\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_r; f_1, \ldots, f_r; A_1(\bar{a_1}), \ldots, A_r(\bar{a_r})]$$

la cual generaliza a los juegos en forma estratégica, y nos ayuda a probar que existe un punto de equilibrio bajo este nuevo esquema, el cual equivale a un equilibrio competitivo de la economía anterior.

La importancia de que haya un punto de equilibrio en nuestra economía, es que así se garantiza que existe una repartición de las dotaciones iniciales y las ganancias por producir un bien, en la cual todos los agentes de nuestra economía maximizan su criterio de definición entre alternativas, lo cual es deseable pues todos alcanzan su máximo nivel de satisfacción dadas sus restricciones, y esto constituye un equilibrio estable de la economía, pues no tienen incentivos a moverse a otro punto cuando estos llegan al equilibrio.

Notamos también la activa participación de los distintos resultados matemáticos que demostramos en la primera parte del trabajo, para poder concluir cada uno de los resultados de la microeconomía que enunciamos, así como para la correcta interpretación de los mismos (dado que estos son precisos y comprobables), permitiendo así el profundo análisis (bajo este esquema) de los diferentes fenómenos derivados de la economía real en la que vivimos, y entendiendo además, los alcances y las limitaciones de la herramienta analítica que hemos desarrollado.

Bibliografía

[1] Debreu, G.; *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economics.*; A Cowles Fundation Monograph; London, 1973.

[2] Varian, Hal R.; *Análisis Microeconómico.*; Ed. Antoni Bosch; Barcelona, 2003.

[3] Villar, Antonio.; *Curso de Microeconomía Avanzada.*; Ed. Antoni Bosch; Barcelona, 1996.

[4] Mas-Colell, A.; Whinston,M. y Green,J. *Microeconomic Theory*; Oxford University Press; New York, 1995.

[5] Debreu,G. y Arrow, K.; *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economic.*; Econometrica, Vol. 22, No. 3.; Chicago, 1954.

[6] Debreu,G.; *A Social Equilibrium Existence Theorem.*; Cowles Commission for Research in Economics, paper 69; 1952.

[7] Osborne, M.J. y Rubinstein, A.; *A Course in Game Theory.*; The MIT Press; 1994.