INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

“Estrategias generales y estrategias aritméticas en la solución de problemas combinatorios”

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Matemático

Presenta:

Karla Paola Hernández Lomelí

Directores:

Dr. Antonio Nieves Hurtado
M. en C. Miguel Hesiquio Garduño

México, 2008

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Escuela Superior de Física y Matemáticas

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

SEP

"2008, Año de la Educación Física y el Deporte"
"75 Aniversario de la Escuela Superior de Ingeniería Textil"
"60 Aniversario de la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas"
"30 Aniversario del CECyT 15 Diódoro Antúnez Echegaray"

FECHA DE CLASIFICACIÓN	07 de marzo de 2008
UNIDAD RESPONSABLE	Escuela Superior de Física y Matemáticas
CARÁCTER	Público
PARTES CLASIFICADAS	
FUNDAMENTO LEGAL	
PERIODO DE RESERVA	

Oficio No. ESFM.SAT/114.3/2008
México, D. F., a 07 de marzo de 2008
Asunto: Se autoriza impresión de tesis

Doctor
José Luis Castro Quilantán
Subdirector Académico
Presente

Los que suscribimos, Miembros del Jurado de Examen Profesional de la C. **Karla Paola Hernández Lomelí,** Pasante de la carrera de **Ingeniería Matemática** que se imparte en esta Escuela, después de haber revisado y hecho las correcciones pertinentes de la tesis y tomando en consideración los artículos 5 (inciso II), 7, 17, 28 y 32 del Reglamento de Titulación Profesional y artículos 103 y 104 del Reglamento Interno del IPN., aprobamos la tesis profesional con el título:

"Estrategias generales y estrategias aritméticas en la solución de problemas combinatorios"

Asimismo, de acuerdo con los artículos 39, 40 y 41 del mencionado Reglamento de Titulación, acordamos que se imprima la tesis respectiva y se fije la fecha de Examen Profesional.

ATENTAMENTE.

DR. EDMUNDO DEL VALLE GALLEGOS
Presidente

DR. JOSÉ ARMANDO DE LEÓN SOLÓRZANO
Secretario

ING. VIANEY URDAPILLETA INCHAURREGUI
Vocal

M. en C. MIGUEL HESIQUIO GARDUÑO
Vocal

DR. ANTONIO NIEVES HURTADO
Vocal

Av. Instituto Politécnico Nacional s/n, Edificio 9, U.P. Adolfo López Mateos
Col. San Pedro Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, México, D.F.
C.P. 07738, Tel 5729 6000, Fax: 55051, www.esfm.ipn.mx

Agradecimientos:

A Dios por la vida y la oportunidad que me brindó de culminar una carrera profesional.

A mis Padres por su apoyo y por la mejor herencia que puedo tener: culminación de mis estudios

A la Escuela Superior de Física y Matemáticas por la preparación adquirida en el transcurso de la carrera.

A mi asesor y Maestro en Ciencias: Miguel Hesiquio Garduño por su comprensión y consejos que me brindaron experiencia para entender situaciones que son clave para enfrentar temores.

A mi asesor: Dr. Antonio Nieves Hurtado por su tiempo y conocimientos para el desarrollo de esta tesis.

A mis amistades por la paciencia y ayuda para seguir adelante a pesar de las circunstancias.

ÍNDICE DE CONTENIDO:

ÍNDICE DE TABLAS:

ÍNDICE DE TABLAS:

ÍNDICE DE FIGURAS:

ANÁLISIS ESTUDIANTES: ESIQIE

ANÁLISIS ESTUDIANTES: ESFM

INTRODUCCIÓN GENERAL

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA:

El análisis combinatorio es parte fundamental del campo de las Matemáticas Discretas; asimismo, desempeña un componente necesario en el desarrollo del pensamiento formal de un estudiante que requiere de una formación matemática sólida, por ejemplo, estudiantes de ingeniería y ciencias físico matemáticas. El acercamiento típico a este tema, sin embargo, considera la combinatoria más bien como una *herramienta* de cálculo para la probabilidad (Navarro-Pelayo 1996) y generalmente su enseñanza se centra en la *definición* de las operaciones combinatorias y su *identificación directa* en problemas verbales. La hipótesis de esta tesis es mostrar que los estudiantes expuestos a este acercamiento, ante la dificultad de identificar y aplicar la fórmula de la operación que resuelve el problema, recurren espontáneamente a estrategias generales de resolución de problemas como traducir el problema en otro equivalente, descomponer el problema en partes, fijar los valores de algunas de las variables y, al uso de reglas combinatorias básicas de carácter aritmético que son la de la suma, el producto y el cociente.

La combinatoria no es sólo un instrumento matemático sino que constituye un razonamiento lógico: ¡útil para el desarrollo de habilidades mentales!

Creemos en la necesidad de que el estudiante se involucre en el razonamiento combinatorio de una manera más profunda, para que sea capaz de manejar experimentos aleatorios de cierto grado de dificultad (no elementales). Existe, sin embargo una problemática generalizada en los estudiantes de nivel medio superior (bachillerato) y superior (licenciatura) para establecer estrategias de solución en los problemas de combinatoria elemental (Navarro –Pelayo 1994, Roa Guzmán 2003). Estos hechos requieren de una investigación que podría incidir en la enseñanza de la combinatoria.

OBJETIVOS:

- Analizar las estrategias generales y aritméticas que utilizan los estudiantes de ingeniería y ciencias físico matemáticas de forma espontánea en la solución de problemas combinatorios.

- Identificar las dificultades generales (errores comunes a los modelos combinatorios) que cometen los estudiantes de ingeniería y ciencias físico matemáticas en la solución de problemas combinatorios.

METODOLOGÍA:

- *Fase 1: “Cuestionario para la evaluación del razonamiento combinatorio”*

Para la obtención de los datos experimentales seleccionamos 9 problemas (8 problemas simples y 1 problema compuesto) del cuestionario de Roa Guzmán (2003). Esta selección se hizo con el fin de que el cuestionario integrara las dos distintas operaciones combinatorias (combinaciones y permutaciones con o sin repetición) y los modelos básicos de los problemas combinatorios: selección, colocación y partición (Roa Guzmán 2003).

Teniendo los problemas seleccionados se enumeraron de acuerdo al grado de dificultad (comenzando del más fácil al que requería de mayor complejidad).

- *Fase 2: “Aplicación del cuestionario para la evaluación del razonamiento combinatorio en alumnos de ingeniería”*

Con el fin de aplicar el cuestionario a estudiantes de ingeniería, se organizó el CUARTO TORNEO DE MATEMÁTICAS en la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas del IPN. Acudieron al torneo un total de seis estudiantes: 3 de tercer semestre, 2 de cuarto y 1 de octavo. Así mismo realizamos un formulario básico de combinatoria (Apéndice).

Para la realización de este cuestionario se les dio tiempo abierto, siendo el menor tiempo de entrega 1 hora y el de mayor tiempo 3 horas.

- *Fase 3:”Aplicación del cuestionario para la evaluación del razonamiento combinatorio en alumnos de ciencias físico-matemáticas”*

La segunda aplicación del cuestionario fue a un grupo de 17 estudiantes del cuarto semestre de la carrera de Ingeniería Matemática de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) del IPN. El cuestionario se aplicó en la modalidad de trabajo individual y de parejas con el fin de contrastar los resultados.

- *Fase 5: “Evaluación y análisis de datos experimentales”*

Para la evaluación primeramente se realizó una interpretación de los resultados, identificando técnicas empleadas por los alumnos, así como errores cometidos y finalmente se estratificó la información en tablas.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

1. INTRODUCCIÓN:

En este capítulo presentamos la clasificación de las configuraciones combinatorias, según Dubois (1984), esta clasificación refiere a dos modelos combinatorios: simples (conformados por solo una operación combinatoria) y compuestos (abarcan dos o más operaciones combinatorias). En este apartado hacemos una descripción del Principio fundamental del conteo, herramienta útil para la cuantificación de sucesos aleatorios. Para el análisis de esta investigación se tomaron las estrategias generales y aritméticas de solución, descritas por Roa R., B. Bernabeu y Godino J. (2003). Las estrategias generales son: traducción del problema a otro equivalente, fijación de variables, descomposición en subproblemas, mientras que, la regla de la suma, del producto y del cociente, representan estrategias aritméticas. Algunos estudiantes dan solución a problemas, usando directamente la fórmula combinatoria, se apoyan de un diagrama de árbol o enumeran los posibles resultados, describimos estas situaciones refiriéndolas como Procesos generales de solución. Al emplear estrategias (generales y/o aritméticas) o procesos de solución, se cometen errores comunes de los diferentes modelos combinatorios. Para analizar este tipo de errores tomamos la categorización descrita por Navarro Pelayo, Batanero C. y Godino J. (1996). El estudio de la investigación se ha centrado en el análisis del cuestionario usado en las investigaciones de Navarro Pelayo y Godino, el cual lo describimos en este capítulo, mostrando la estructura del mismo, así como posibles soluciones a cada problema.

1.1 MODELOS COMBINATORIOS SIMPLES:

Según Dubois (1984), es posible clasificar las configuraciones combinatorias simples en tres modelos:

1) **Selección*:*** este modelo se centra básicamente en la idea de muestreo. Se considera un conjunto de m objetos (generalmente distintos), de los cuales se extrae una muestra de n de ellos. Otros verbos para identificar este modelo son: “tomar”, “extraer” y “sacar”. Al realizar la selección podemos tener que los objetos se repitan o que el orden de selección sea relevante, esto nos da las cuatro operaciones de combinatoria básicas:

Permutaciones:

Disposición ordenada de un conjunto de objetos diferentes. El número de permutaciones que pueden obtenerse usando *r* objetos distintos, seleccionados de un conjunto de *n* objetos diferentes es:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutaciones con repetición:

El número de permutaciones de n elementos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales,. . ., n_r son iguales está dada por.

$$_nP_{n(n_1,n_2,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!} \quad , \; n_1 + n_1 + \cdots + n_r \leq n$$

Combinaciones:

Conjunto de objetos distintos sin importar una disposición o un orden. El número de combinaciones de *r* objetos que pueden seleccionarse de un conjunto de *n* objetos distintos es:

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

2) **Colocación:** en este tipo de modelo consideramos la colocación de una serie de n objetos en m celdas. Otros verbos relacionados para este modelo son: "introducir", "asignar", "guardar", etcétera. La solución a este modelo depende de las características siguientes:

- Si los objetos a colocar son idénticos o no.
- Si las celdas son idénticas o no.
- Si deben ordenarse los objetos colocados dentro de las celdas
- Disponibilidad de celdas vacías.

Hay que considerar que no hay una operación combinatoria para cada tipo de característica, ésta dependerá de la forma de interpretar el problema combinatorio.

3) **Partición:** la idea central en la partición consiste en dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos, es decir, realizar una partición del conjunto. Algunos verbos claves asociados a la partición son: "partir", "descomponer", "separar", etcétera.

En los tres modelos cabe destacar que no se puede suponer que sean equivalentes en dificultad, aunque algunos de ellos incluso tengan la misma operación combinatoria.

1.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO:

Si un suceso aleatorio da lugar a n_1 resultados distintos e, independientemente del resultado, un segundo suceso puede dar lugar a n_2 resultados diferentes y así sucesivamente hasta un último suceso que da lugar a n_k resultados distintos; para el suceso compuesto por los k sucesos descritos se tendrán $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ resultados distintos. (Probabilidad condicional, Dr. Antonio Nieves Hurtado)

Las siguientes acotaciones permitirán un manejo más eficiente del principio enunciado.

- El principio fundamental del conteo nos permite encontrar directamente el número de resultados posibles de un suceso compuesto; sin embargo, no nos dice cuáles son tales resultados.
- En el caso particular $n_1 = n_2 = ... = n_k$, se tendrían n^k resultados posibles.
- El resultado de cualquiera de los sucesos sencillos no depende del resultado del suceso anterior ni influencia el resultado del suceso siguiente; es decir, son sucesos independientes.

1.3 ESTRATEGIAS GENERALES EMPLEADAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS:

Para el análisis de esta investigación se tomaron las estrategias generales descritas por Roa R., B. Bernabeu y Godino J. (2003) las cuales mencionan que no son específicas de los problemas combinatorios, pero que son útiles para este tipo de problemas. Estas son: *traducción del problema a otro equivalente, fijación de variables, descomposición en subproblemas.* Estas estrategias las presentamos especificando cuando es correcto o incorrecto su uso.

1.3.1 Traducción del problema a otro equivalente

Para que los estudiantes hagan uso del tipo de operación combinatoria que resuelve un problema, deben primeramente visualizar la situación que describe el enunciado, considerando si existe repetición o no en las muestras, asimismo si el orden es importante. En los problemas de selección, dado que las operaciones fueron definidas, los estudiantes pueden percibir directamente la solución. En los problemas de colocación y partición los alumnos necesitan traducir el problema formulándolo en términos de muestreo, el alumno lo puede comparar con otro parecido que cuya solución conoce y resolver el problema.
En esta estrategia se considera correcto si el estudiante: reformula el problema cambiando el contexto, convirtiéndolo en otro problema con idéntica estructura combinatoria.
Ahora se considera que el uso es incorrecto si, al reformular el problema, se llega a otro cuya solución difiere de la que se tenía originalmente.

1.3.2 Fijación de variables

Esta estrategia consiste en fijar una o más variables del problema combinatorio para obtener un método coherente en la enumeración.
Se considera un uso correcto cuando el estudiante da valores concretos a una o más variables del problema para convertirlo en otro del mismo tipo, pero con valores menores que los parámetros. Luego resuelve este problema más sencillo y, a partir de él, generaliza para resolver el problema inicial, correctamente, utilizando la recursión.
El uso es incorrecto si el alumno fija una o más variables para reducir el problema a otro más sencillo, pero, o bien generaliza incorrectamente, o no tiene en cuenta los caos ya fijados.

1.3.3 Descomposición en subproblemas

El alumno puede dividir el problema dado en una serie de subproblemas, resolverlos independientemente y combinar las soluciones para resolver el problema combinatorio. Se considera un uso correcto de este tipo de estrategia cuando el estudiante descompone el problema en otros varios, de estructura combinatoria más sencilla y parámetros de menor tamaño, que abarquen todos los casos del problema inicial. Combinando adecuadamente las soluciones parciales, resuelve el problema inicial.
El uso es incorrecto si se descompone el problema en otros varios más sencillos, pero que no abarcan en su totalidad los casos del problema inicial.

1.4 ESTRATEGIAS ARITMÉTICAS EMPLEADAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS:

Este tipo de estrategias son importantes ya que si el alumno no reconoce la operación combinatoria y trata de generar un modelo combinatorio deberá emplear las tres reglas básicas de carácter aritmético que son: *suma, producto y cociente,* las cuales puede combinar dependiendo del problema a resolver.

1.4.1 Regla de la suma

La regla de la suma se usa cuando un conjunto de configuraciones combinatorias se determina como la unión de un número de subconjuntos mutuamente excluyentes.
Se considera un uso correcto al aplicar esta estrategia, cuando el alumno divide el conjunto de configuraciones en subconjuntos mutuamente excluyentes de manera adecuada.
El uso es incorrecto cuando el alumno al dividir en subconjuntos, lo hace de manera que éstos no sean excluyentes o que no abarquen en su totalidad al conjunto que describe el problema.

1.4.2 Regla del producto

En esta estrategia se construyen productos cartesianos de conjuntos de elementos un número dado de veces.
El uso es correcto si el alumno no sale del contexto adecuado: calcular el número de elementos del conjunto producto cartesiano.
Se considera incorrecto si el alumno aplica la regla en un contexto inadecuado: el producto cartesiano no es el adecuado o los conjuntos que se multiplican no son los que justifican la solución del problema.

1.4.3 Regla del cociente

Este tipo de estrategia se usa para relacionar entre si las operaciones combinatorias. Esto implica establecer una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias.
El uso correcto de esta regla se da cuando el alumno establece una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias identificando el número de elementos en cada clase de equivalencia.
Cuando el alumno no establece la relación de equivalencia adecuada o, el número de elementos en cada clase de equivalencia, se tiene un uso inadecuado de la regla.

1.5 PROCESOS GENERALES DE SOLUCIÓN:

Los estudiantes, al resolver los problemas combinatorios, utilizan generalmente, la aplicación directa de fórmulas o hacen uso de la representación de las posibles soluciones, mediante un diagrama de árbol. Estos procesos, requieren de un manejo adecuado por parte del estudiante, para evitar errores de aplicación y representación, en el caso del diagrama de árbol.

- **Uso de fórmulas combinatorias**

Los estudiantes identifican los parámetros de la fórmula correspondiente, considerando la importancia del orden en el contexto del problema, ya que esto determina la fórmula a utilizar (combinación o permutación con o sin repetición).

- **Empleo de diagrama de árbol**

El diagrama de árbol es un recurso que permite organizar los sucesos simples que constituyen el suceso compuesto, desplegar los resultados distintos (*S*) y contarlos: Recorra de izquierda a derecha cada una de las ramas del diagrama de árbol anotando secuencialmente, al final de cada recorrido, los elementos encontrados. (Probabilidad condicional, Dr. Antonio Nieves Hurtado).

- **Enumeración de eventos**

El estudiante realiza una lista de los posibles resultados para dar respuesta al problema.

1.6 ERRORES COMUNES A LOS DIFERENTES MODELOS DE SELECCIÓN, COLOCACIÓN Y PARTICIÓN:

Para la evaluación del razonamiento combinatorio, algo fundamental es la identificación de errores en la solución de los problemas. Para analizar este tipo de errores tomamos la categorización descrita por Navarro-Pelayo, Batanero C. y Godino J. (1996).
Algunos de los errores, los explicados con un problema y un ejemplo, para una descripción adecuada.

- **Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema:**

Consiste en cambiar de modelo combinatorio, por ejemplo, uno de selección, por uno de colocación, la modificación es valida solo si ésta, no sale del contexto del problema.

- **Error de orden:**

Este tipo de error (Fischbein y Gazit 1988), se refiere a convertir los criterios de combinaciones y permutaciones, es decir, considerar la importancia del orden de los objetos, cuando es irrelevante o, no tomar en cuenta el orden, cuando es esencial.

Problema: Un departamento consta de 30 miembros y se requiere un comité de cinco personas

Ejemplo: Consideremos un comité integrado por las personas: A, B, C, D y F. Hay un error de orden, el tomar en cuenta, el comité integrado por: B, C, A, F y E (intercambio de objetos), no forma parte de las posibilidades.

- **Error de repetición:**

El estudiante no considera, la posibilidad de repetir arreglos formados, o repite cuando no tiene que hacerlo.

Problema: Seleccionar tres cifras de cuatro posibles (1, 2, 3 y 4).

Ejemplo: Formemos el número: 124. Tenemos un error de repetición cuando el alumno, no considera la posibilidad de tener: 142, 124, 412, 421, 214, 241, estos posibles arreglos.

- **Confundir el tipo de objeto:**

Consiste en considerar objetos iguales, cuando son distinguibles, o por el contrario, objetos diferentes, cuando son indistinguibles.

Problema: Seleccionar dos fichas azules, que se encuentran en una urna donde hay en total cuatro: dos azules, una blanca y una verde.

Ejemplo: Consideramos un error de confusión de objetos, cuando el estudiante considera las fichas azules distintas, es decir los arreglos: (*azu*l, blanca, verde y azul) y (azul, blanca, verde y *azul*), para él son distintos.

- **Enumeración no sistemática:**

Este tipo de error (Fischbein y Gazit 1988) refiere, a resolver los problemas, mediante ensayo y error, sin un procedimiento recursivo, que lleve a la formación de todas las posibilidades.

Problema: Elegir tres personas de cinco posibles: A, B, C, D y E, para la premiación de tres lugares.

Ejemplo: El estudiante comete un error de enumeración no sistemática, cuando está incompleta la enumeración, por ejemplo:

ABC
ACB
ACD
ADC
ADE
AED
BAC
BCA
...

Aquí el estudiante, sólo considera las posibilidades que resultan de que primero fije A, luego para B, etc., pero no analiza el procedimiento que lo lleve a todas las posibilidades (intercambiar orden de arreglos ya formados)

- **Respuesta intuitiva errónea:**

Los alumnos sólo dan una respuesta numérica errónea, no justifican el resultado.

- **No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente:**

El alumno identifica el problema y la fórmula correspondiente, pero no recuerda la sintaxis de la misma, para sustituir los datos correspondientes.

- **No recordar el significado de los valores en los parámetros en la fórmula combinatoria:**

El alumno da una interpretación incorrecta, en los valores de los parámetros en la fórmula.

Problema: Repartir tres premios: A, B y C, a cinco competidores.

Ejemplo: Tenemos un error en la interpretación, cuando el estudiante especifica: “Permutación con repetición de cinco elementos, tomados de tres en tres”

- **Interpretación errónea del diagrama de árbol:**

Las ramificaciones del diagrama no son correctas.

- **Errores específicos en los problemas de colocación y partición:**

La clasificación siguiente, se considerada en los modelos de colocación y partición:

- **Confusión en el tipo de celdas**

Consiste en distinguir celdas (subconjuntos) idénticas o que no es posible diferenciar, celdas distinguibles.

Problema: Asignar dos tareas diferentes a 4 personas

Ejemplo: El estudiante sólo considera, las formas de elegir dos personas de cuatro (para la división de los grupos), pero no toma en cuenta, que grupo realizará la primer y segunda tarea respectivamente.

- **Error en las particiones formadas:**

a) La unión de las particiones formadas, no contiene a todos los elementos del conjunto total.
b) Olvidar algunas posibles particiones.

1.7 DESCRIPCIÓN Y ESTRUCTURA DEL CUESTIONARIO:

El cuestionario se compone de problemas combinatorios simples, es decir, cuya solución se puede encontrar mediante la aplicación de una única operación combinatoria. El problema 9 consiste en un modelo combinatorio compuesto: cuya solución viene dada por dos operaciones combinatorias (combinación y permutación).

El diseño del cuestionario tiene en cuenta la siguiente característica, que creemos influye en la dificultad del problema o el tipo de error presentado por los estudiantes:

- **Modelo Combinatorio Simple**: el cuestionario incluye problemas de selección, colocación y partición. Esto es de gran importancia ya que usualmente en la definición de las operaciones de combinatoria, los profesores utilizan el modelo de selección.

A continuación presentamos la descripción del enunciado de cada problema, indicando un proceso de solución, del mismo modo, especificamos la fórmula que da solución al mismo.

- ***Problema 1. "Seleccionar 3 alumnos de 5"***

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar el pizarrón. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María ¿De cuántas maneras puede elegir tres de estos alumnos?

Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Se trata de un problema de selección: seleccionar tres objetos (estudiantes) de un total de cinco. La idea básica de este problema consiste en elegir tres objetos, de los cuales al realizar la elección no importa en que orden lo hacemos, por ejemplo, si seleccionamos a: Elisa, Fernando y Jorge, resulta lo mismo si intercambiamos el orden: es decir, Elisa, Jorge y Fernando. Esto nos da pauta a utilizar combinaciones: determinar el número de ternas posibles de una muestra de cinco objetos. Cuya fórmula queda expresada de la siguiente manera:

$$n = 5$$
$$r = 3$$
$${}_5C_3 = 10$$

Respuesta: La maestra tiene 10 formas posibles de seleccionar a tres alumnos, de un total de cinco, para borrar el pizarrón.

- ***Problema 2. " Extraer 3 bolas de un total de 4"***

En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos al azar una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se regresa a la urna. Se elige de nuevo al azar una bola y se anota su número y se regresa a la urna. Se repite la misma operación una tercera vez ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?

Ejemplo: se puede obtener el número 222.

Tenemos básicamente un problema de selección: elegir tres objetos (bolas) de un total de cuatro. Específicamente tenemos que ir sacando una bola detrás de la otra, las cuales al ir eligiéndolas, se vuelven a introducir en la urna. En este problema, para obtener una solución, hacemos uso del principio fundamental del conteo: para la primera extracción, tenemos cuatro posibilidades (2, 4, 7 y 9), en la segunda extracción las posibilidades son las mismas (dado que la bola se regresó) y para la tercera selección de igual forma tenemos las mismas posibilidades. Estas elecciones son independientes. Así tenemos:

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

Respuesta: En total hay 64 formas posibles de obtener números de tres cifras.

- ***Problema 3. "Seleccionar 4 fichas de 4"***

En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta manera hasta que se han seleccionado una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección de las fichas?

Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden: blanca, azul, roja y azul.

En este problema tenemos un modelo de selección: elegir cuatro objetos (fichas), una de tras de la otra, las cuales se van devolviendo a la caja, y se anota el color correspondiente, por ejemplo, la selección: blanca, azul, roja y azul, es distinta de la selección: roja, azul, blanca y azul (sólo intercambiamos el orden de las fichas roja y blanca). Esto determina la necesidad de usar permutaciones, pero, existen dos objetos repetidos: el enunciado no especifica distinción de fichas azules, por lo que se trata de obtener las diferentes permutaciones de cuatro objetos de una muestra de cuatro, considerando que de estos objetos por permutar, dos se repiten. La fórmula correspondiente queda expresada de la siguiente manera:

$$n = 4$$
$$n_1 = 2$$
$${}_4P_{4(2)} = 12$$

Respuesta: Tenemos 12 maneras de realizar la selección de las fichas.

- ***Problema 4. "Colocar 3 coches en 5 plazas"***

El garaje de la casa de Ángel tiene cinco plazas. Sólo tienen, sin embargo, tres coches: el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Éste es el esquema de la cochera:

1	***2***	***3***	***4***	***5***

¿De cuántas maneras posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus coches en el garaje?

Ejemplo: Ángel puede estacionar su coche en la plaza 1, Beatriz en la plaza 2 y Carmen en la número 4.

Se trata de un problema de colocación: introducir tres coches en cinco plazas disponibles (uno por plaza). Consideremos un caso:

Ángel	***2***	***Beatriz***	***Carmen***	***5***

Si ahora intercambiamos el orden de la forma siguiente:

Beatriz	***2***	***Ángel***	***Carmen***	***5***

Esto nos da una forma diferente de estacionar los coches, por lo que, es un problema típico de permutaciones: necesitamos permutar tres objetos (coches) de un total de cinco. Sustituyendo los valores en la fórmula correspondiente tenemos:

$$n = 5$$
$$r = 3$$
$${}_5P_3 = 60$$

Respuesta: Hay 60 formas de estacionar los tres coches en las cinco plazas disponibles.

- ***Problema 5. "Colocar 3 cartas iguales en 4 sobres diferentes"***

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta, ¿de cuántas maneras podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes?

> *Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, una en el blanco y una en el sobre crema.*

Se trata de un problema de colocación: guardar tres cartas iguales en cuatro sobres diferentes (una carta por sobre). Si las tres cartas son guardadas en el sobre amarillo, blanco y crema respectivamente, resulta lo mismo elegir: blanco, amarillo y crema (intercambió el orden del sobre amarillo y blanco). Esto nos determina la misma forma de colocar las cartas, ya que éstas son iguales. Dado lo anterior usaremos combinaciones: determinando el número total de maneras de colocar tres objetos (cartas) en cuatro posibles casillas (sobres). Así sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$n = 4$$
$$r = 3$$
$${}_4C_3 = 4$$

Respuesta: Hay 4 formas de colocar las tres cartas iguales, en cuatro diferentes sobres.

- ***Problema 6. “Colocar 4 niños en 2 recámaras diferentes”***

Cuatro niños, Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos recámaras diferentes (azul y verde) donde poder colocar a los niños para dormir ¿De cuántas maneras diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos recámaras? (Puede quedar alguna recámara vacía).

Ejemplo: Alicia, Berta, y Carlos en la azul y Diana en la verde.

Se trata de un problema de colocación: colocar cuatro objetos (niños) en dos casillas distintas (recámaras azul y verde), este tipo de problemas puede ser resuelto utilizando el principio fundamental del conteo: para la primera recámara tenemos cuatro posibles colocaciones (Alicia. Berta, Carlos y Diana), dado que una recámara puede quedar vacía. En la recámara restante de igual forma consideramos cuatro posibles colocaciones. Así llegamos al resultado siguiente:

$$4 \times 4 = 16$$

Respuesta: La abuela tiene 16 formas de colocar a los niños para dormir, en las dos recámaras.

- ***Problema 7. “Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2”***

Un grupo de cuatro amigos: Andrés, Benito, Clara y Daniel tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Química y otro de Física. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas maneras pueden dividirse para realizar los trabajos?

Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Química y Clara-Daniel el trabajo de Física.

Se tiene un problema de partición: dividir el grupo de cuatro amigos, en dos grupos, de dos integrantes cada uno. Si por ejemplo, Andrés y Benito realizan el trabajo de Física, obtenemos lo mismo si lo hacen Benito y Andrés, por lo tanto, el orden es irrelevante en este problema. Analizando lo anterior haremos uso de combinaciones: determinando el número de agrupaciones posibles de dos grupos, de dos amigos cada uno, para las cuales tenemos cuatro posibles amigos.

La fórmula correspondiente queda determinada como:

$$n = 4$$
$$r = 2$$
$${}_4C_2 = 6$$

Respuesta: Hay 6 formas de dividir el grupo de cuatro amigos, para realizar los dos trabajos diferentes.

- ***Problema 8. “Repartir 4 coches a 3 hermanos”***

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos: Fernando, Luís y Paco. ¿De cuántas maneras diferentes puede regalar los coches a sus hermanos?

Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luís.

Tenemos un problema de partición: repartir cuatro coches diferentes, a tres hermanos. Para obtener la solución al problema emplearemos el principio fundamental del conteo: como el niño le puede dar los cuatro coches a cualquiera de sus tres hermanos, tenemos que el coche azul puede tener tres propietarios (Fernando, Luis y Paco), lo mismo tenemos para los coches restantes (blanco, verde y rojo), además son resultados independientes. Así el resultado final es:

$$\underbrace{3}_{\text{posibles hermanos para el coche azul}} \times \underbrace{3}_{\text{coche blanco}} \times \underbrace{3}_{\text{coche verde}} \times \underbrace{3}_{\text{coche rojo}} \times = 81$$

Respuesta: Tenemos 81 maneras diferentes de que el niño regale los cuatro coches a sus hermanos.

- ***Problema 9. "Formar números de 5 cifras"***

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos: $1, 2, 4, 6, 8$*, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?*

Ejemplo: 81824.

Específicamente tenemos un modelo de selección: formar números de 5 cifras cada uno, con la condición que dos cifras se repitan (el número 8). Si por ejemplo formamos el número: 81842 y 81824 (sólo intercambiamos el 2 y 4) resultando otro ordenamiento, entonces, se trata de permutaciones: permutar 5 objetos (cifras) de un total de 5, de los cuales 2, de esos que vamos a permutan, se repiten. Ahora ya cada uno de los ordenamientos anteriores contienen dos 8, es decir, una estructura de la selección está dada por la forma siguiente:

8		8		

Observemos que quedan tres espacios para colocar los posibles números: 1, 2, 4 y 6, entonces ahora determinamos de cuántas maneras puedo elegir tres números de los cuatro, utilizando combinaciones: seleccionar tres objetos (cifras) de un total de cuatro. El análisis anterior nos muestra que este problema es compuesto: producto de dos operaciones combinatorias: permutaciones y combinaciones. El resultado final que es:

$$\begin{aligned}&\text{permutaciones:}\\&n = 5\\&n_1 = 2\\&{}_5P_{5(2)} = 60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{combinaciones:}\\&n = 4\\&r = 3\\&{}_4C_3 = 4\end{aligned}$$

Así el resultado es el producto de las operaciones:

$${}_5P_{5(2)} \times {}_4C_3 = 60 \times 4 = 240$$

Respuesta: Hay 240 números de cinco cifras que contienen exactamente dos 8.

La estructura final del cuestionario aplicado a los estudiantes se presenta a continuación:

Tabla: 1
Diseño final del cuestionario: Modelo y Operación Combinatoria.

Problema	***Modelo Combinatorio Simple***	***Operación combinatoria***
1	Selección	Combinación
2	Selección	Principio fundamental del conteo
3	Selección	Permutación
4	Colocación	Permutación
5	Colocación	Combinación
6	Colocación	Principio fundamental del conteo
7	Partición	Combinación
8	Partición	Principio fundamental del conteo
	Modelo Combinatorio Compuesto	Combinación y Permutación
9	Colocación	

La tabla de abajo indica que el 33% de los problemas del cuestionario refieren al modelo de selección, el 44% de los problemas son de colocación y finalmente el 22% restante son referentes al modelo de partición.

Tabla: 1.1
Porcentaje de cada Modelo Combinatorio en el cuestionario.

Modelo Combinatorio	***Porcentaje***
Selección	33 %
Colocación	44 %
Partición	22 %

Los tipos de objetos, que describen el contexto de cada problema, quedan resumidos a continuación:

Tabla: 1.2
Tipo de objetos por cada problema

Problema	***Tipo de Objetos***
1	Estudiantes: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María
2	Bolas numeradas: 2, 4, 7 y 9
3	Fichas de colores: 2 azules, 1 blanca y 1 roja.
4	Hermanos (Ángel, Beatriz y Carmen)
5	Sobres (amarillo, blanco, crema y dorado)
6	Niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana)
7	Amigos (Andrés, Benito, Clara y Daniel)
8	Coches (azul, blanco, verde y rojo)
9	Dígitos (1, 2, 4, 6, y 8)

Para calificar las respuestas de los estudiantes en cada uno de los problemas, consideramos la importancia de elaborar una tabla que represente los arreglos correctos resultantes, a los que los estudiantes deben llegar en sus respuestas:

Tabla: 1.3
Arreglos resultantes correctos en cada problema

Problema	***Número de arreglos resultantes***
1	10
2	64
3	12
4	60
5	4
6	16
7	6
8	81
9	240

CAPÍTULO II

ANALISIS DE RESULTADOS EXPERIMENTALES

2. INTRODUCCIÓN:

En este capítulo presentamos el análisis de los cuestionarios aplicados, con el objetivo de identificar Estrategias generales de solución (*Traducción del problema a otro equivalente, Fijación de variables, Descomposición en subproblemas)* y las Estrategias aritméticas *(Regla de la suma, Regla del producto y Regla del cociente*), empleadas por los estudiantes, así mismo, mostramos el uso de los Procesos generales de solución (*empleo de diagrama de árbol, uso de las operaciones combinatorias y enumeración de los eventos)*, los análisis anteriores los presentamos en tablas que resumen los resultados obtenidos. Al final de este capítulo (sección 2.3), describimos los errores que los estudiantes cometen al dar respuesta a los problemas combinatorios, presentando tabla de resultados.
La sección 2.1 corresponde a los resultados de los estudiantes de ESIQIE, mientras que en la sección 2.2 analizamos los cuestionarios aplicados a la muestra de estudiantes de ESFM.

2.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS: ESTUDIANTES DE ESIQIE

El proceso de análisis de resultados lo efectuamos de la siguiente manera: indicamos el enunciado del problema, posteriormente realizamos la descripción del mismo, hacemos referencias importantes de algunos estudiantes, presentando imágenes de los resultados. La tabla que mostramos enseguida, indica las referencias de los estudiantes, de acuerdo a la cantidad de respuestas correctas:

Tabla: 2.1 a)
Referencias de estudiantes: ESIQIE

Estudiante: Referencia	*Respuestas correctas*
Roberto Rivero: **A**	7
Jorge Lugo: **B**	7
Nares Cuauhtemoc: **C**	7
Orlando Martínez: **D**	4
Cristóbal Jiménez: **E**	3
Claudia Cuellar: **F**	3

Enseguida comenzamos con la descripción del análisis:

Problema 1. "Seleccionar 3 estudiantes de 5"

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar el pizarrón. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María ¿De cuántas maneras puede elegir tres de estos alumnos?

Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

En este problema, el proceso de solución que presenta el estudiante F, lo hace en dos formas: la primera utiliza el principio fundamental del conteo y la segunda la regla del producto, pero estas dos las emplea de manera incorrecta, traduciéndolo a uno de colocación, donde los objetos colocados en cada casilla son incorrectos (hay arreglos repetidos):

$$\boxed{5 \mid 4 \mid 3} = \underline{60}$$

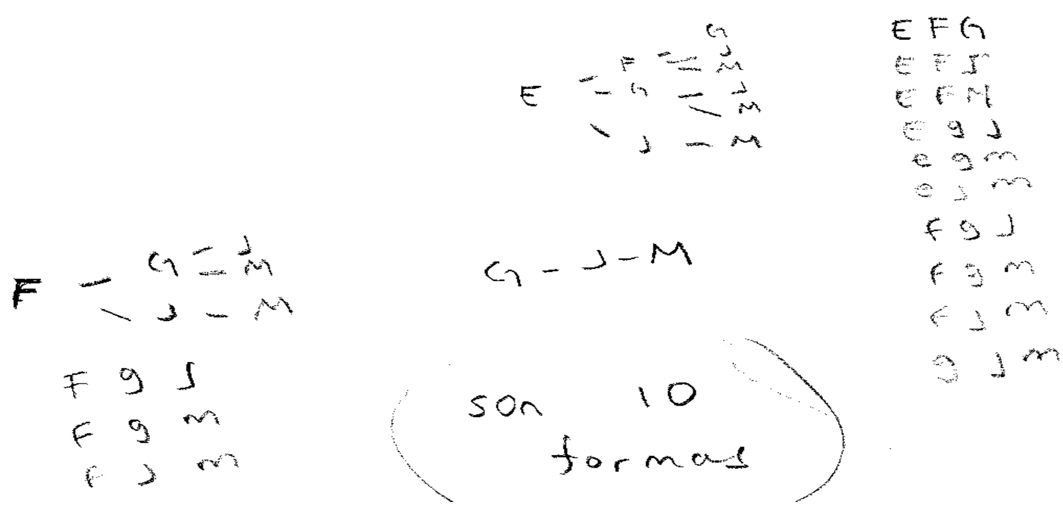
El error encontrado fue que no usó correctamente la fórmula, es decir considera relevante el orden de selección, por lo que consideramos que es un error de orden. Analizando las respuestas nos dimos cuenta que los estudiantes: A, B, D y E, se limitaron a la aplicación directa de la fórmula de combinación, solamente el estudiante B, interpreta el resultado:

Es una combinatoria directa

$$m = C_{5,3} = C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

formas diferentes en que la maestra puede elejir de los 5 voluntarios

Cabe destacar que el estudiante C, primeramente utiliza un diagrama de árbol para encontrar la solución, enseguida enumera los eventos posibles y corrobora aplicando la fórmula:



Aplicación de la fórmula:

$$ {}_{n}C_{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 10 $$

El proceso general de solución en este problema lo mostramos en la siguiente tabla representativa:

Tabla: 2.1 b)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 1

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Principio fundamental del conteo, Regla del producto y Traducción del problema a otro equivalente		1
• Uso de fórmulas combinatorias	4	
• Diagrama de árbol, Enumeración de eventos, Uso de fórmulas combinatorias, Regla de la suma y Fijación de variables	1	
Total	5	1

En donde observamos, que la mayoría de los estudiantes (4 de un total de 6) en este problema, utilizaron fórmulas combinatorias directas, sustituyendo datos correctos. Una sola aplicación de: diagrama de árbol, enumeración de eventos y uso de fórmulas combinatorias, esta aplicación consideramos es la que mayor sustenta el resultado correcto en este problema, debido a la descripción detallada del estudiante, así mismo, creemos que este tipo de respuesta contempla: símbolos, descripción de eventos y aplicación de fórmula, para corroborar los resultados.

El porcentaje de alumnos que respondieron correctamente fue de 83 %.

Problema 2. “Extraer 3 bolas numeradas de 4”

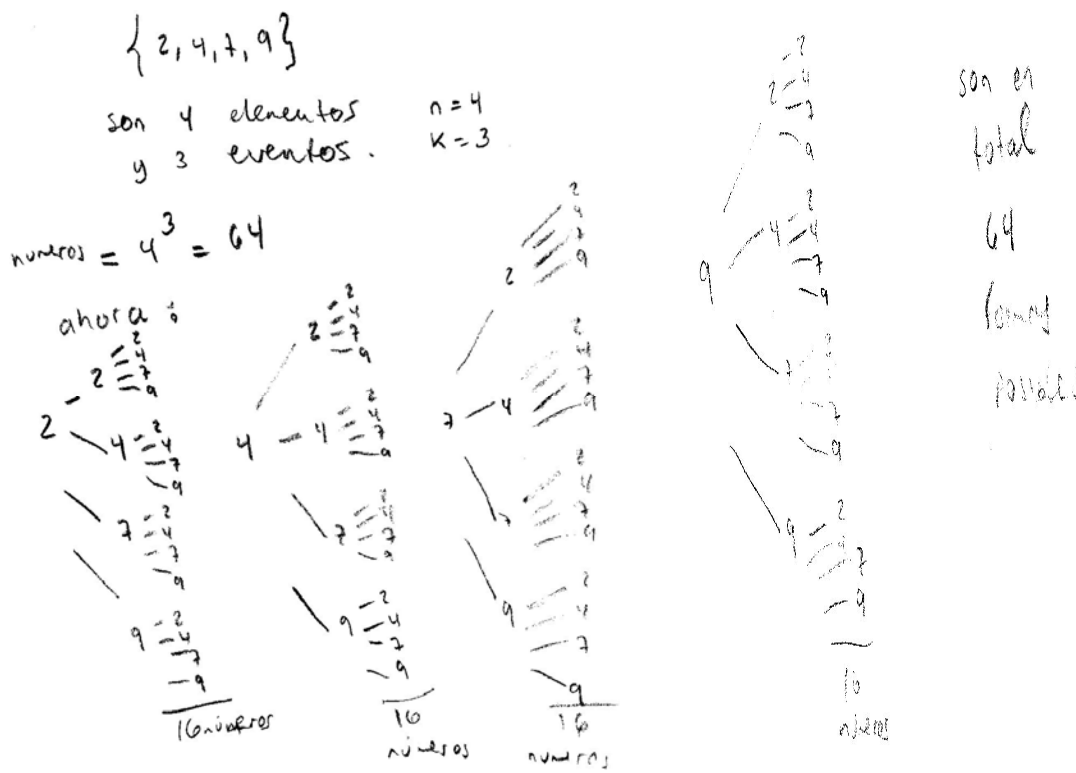
En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos al azar una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se regresa a la urna. Se elige de nuevo al azar una bola y se anota su número y se regresa a la urna. Se repite la misma operación una tercera vez ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?

Ejemplo: se puede obtener el número 222.

En este problema, los estudiantes: A, D, E y F, aplican el principio fundamental del conteo: sólo se limitan a presentar las posibles colocaciones en casillas, al hacer uso de este tipo de arreglos, transforman el problema a otro equivalente: colocan las cuatro posibles bolas numeradas, en cada casilla:

$$\boxed{4}\boxed{4}\boxed{4} : 64$$

Es importante hacer énfasis en que el estudiante C, realiza un diagrama de árbol: escribiendo los posibles números de tres cifras y posteriormente suma las soluciones; aplicando aquí la regla de la suma*:*



El estudiante B, aplica en forma correcta la regla del producto, indicando los posibles eventos en cada operación:

Sea 1ra sacada y anotada = evento A $\Rightarrow C(4,1)=4$

Sea 2da sacada y anotada = evento B $\Rightarrow C(4,1)=4$

Sea 3ra sacada y anotada = evento C $\Rightarrow C(4,1)=4$

Por lo tanto

$N = A\cdot B\cdot C = \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$ números se pueden obtener

En este problema observamos las situaciones siguientes:

Tabla: 2.1 c)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 2

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Principio fundamental del conteo y Traducción del problema a otro equivalente	4	
• Regla del producto y Fijación de variables	1	
• Diagrama de árbol, y Regla de la suma	1	
Total	6	0

La estrategia y proceso de solución, más utilizada por los estudiantes, es el Principio fundamental del conteo y Traducción del problema a otro equivalente. Consideramos que para los estudiantes, el traducir el problema de selección a uno de colocación, resultó ser sencillo y de esta forma poder aplicar el Principio fundamental del conteo. De igual forma observamos una aplicación del diagrama de árbol, este proceso de solución, creemos que describe en una forma más específica el resultado del estudiante.

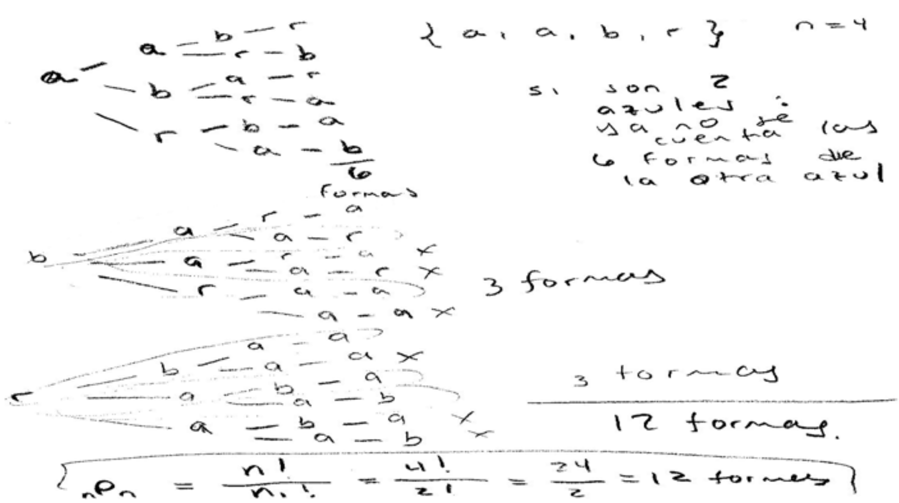
El porcentaje de respuestas correctas fue de un 100%, consideramos que el ejemplo (número 222) no confundió a los alumnos, es decir la aparición de un número distinto, pudo llevar a los estudiantes a no tomar en cuenta, la posibilidad de que los números no se repitieran.

Problema 3. “Seleccionar 4 fichas de 4”

En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta manera hasta que se han seleccionado una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección de las fichas?

Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden: blanca, azul, roja y azul.

En este problema, el estudiante C, se percata que al realizar un diagrama de árbol, tiene arreglos repetidos, realiza la aclaración de que la ficha azul se repite y finalmente aplica regla de la suma:



El estudiante E, realiza la enumeración de los eventos posibles, en forma correcta. Los estudiantes D y F, cometen un error de orden, ya que las fichas colocadas en las casillas, determinan más arreglos, por lo que, al traducir el problema a un modelo de colocación (originalmente es un modelo de selección), lo hacen en forma incorrecta: Imagen estudiante D:

$$\boxed{4 \mid 3 \mid 2 \mid 1} = \underline{24}$$

Así, el principio fundamental del conteo, es aplicado incorrectamente.

Por otra parte, el estudiante B, hace uso incorrecto de la fórmula de permutaciones, no considerando la repetición de las fichas azules:

$$N = P_{4,4} = P(4,4) = \frac{4!}{0!} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ formas de selección}$$

Caso contrario sucede con el estudiante A, identifica la importancia del orden: permutación, y además hay dos elementos repetidos:

$$P = \frac{4!}{2!} = 12$$

se considera que el orden si importa y que hay elementos repetidos.

Identificamos en este problema los casos siguientes:

Tabla: 2.1 d)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes ESIQIE: problema 3

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Principio fundamental del conteo y Traducción del problema a otro equivalente		2
• Uso de fórmulas combinatorias	1	1
• Diagrama de árbol, y Regla de la suma	1	
• Enumeración de eventos y Fijación de variables	1	
Total	3	3

En los tres resultados correctos de este problema, los estudiantes utilizaron diferente estrategia y proceso de solución. La forma que creemos más directa de dar resultado al problema, consiste en el uso de fórmulas combinatorias, este proceso sólo da una respuesta numérica correcta. Por otro lado, observamos que de nueva cuenta un estudiante se auxilia del diagrama de árbol, creemos que de esta forma, el estudiante describe mejor el problema. La enumeración de los eventos, de igual forma presenta una aplicación.

El 50% de los estudiantes obtuvieron correctamente la respuesta al problema.

Problema 4. “Colocar 3 coches en 5 plazas”

El garaje de la casa de Ángel tiene cinco plazas. Sólo tienen, sin embargo, tres coches: el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Éste es el esquema de la cochera:

1	*2*	*3*	*4*	*5*

¿De cuántas maneras posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus coches en el garaje?

> *Ejemplo: Ángel puede estacionar su coche en la plaza 1, Beatriz en la número 2 y Carmen en la número 4.*

Los estudiantes A y B, para este problema usan la fórmula combinatoria correctamente: permutación, describen la importancia del orden, identifican objetos y aplican dicha fórmula. Imagen estudiante A:

Sol. Este problema se puede resumir sencillamente a que tengo 5 lugares en línea recta, y quiero "ordenar" solo 3 carros, dado que aquí el orden importa ya que puedo acomodar los carros indistintamente en los lugares, podiendo estar un carro en los 5 lugares, claro que en un lugar por ordenamiento, entonces se tendrá

$n = P_{5,3} = P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$ formas de ordenar los carros

El estudiante C, no contestó correctamente el problema, primero realiza un diagrama de árbol, con los números de las casillas, aplicando la regla de la suma, al parecer hasta esta parte, el estudiante da una respuesta correcta, pero continúa con ordenamientos de los coches, los cuales son un error, ya que los había incluido anteriormente. Teniendo estos ordenamientos, determina por la regla del producto, las posibles soluciones, incorrectas:

60	$\cdot$	6	= 360
# de formas de estacionarse		# formas de acomodarse	formas totales

o sea

$\frac{5!}{2!} \cdot \frac{3!}{1!} = 360$ formas

Los estudiantes E y F, dan una respuesta intuitiva, el estudiante E aplica la fórmula incorrecta, mientras que el estudiante F, hace uso del principio fundamental del conteo. El estudiante D, aplica la regla del producto, desarrollando subconjuntos correctos.

Las consideraciones importantes en este problema son:

Tabla: 2.1 e)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 4

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Principio fundamental del conteo		1
• Uso de fórmulas combinatorias	2	1
• Diagrama de árbol, Regla del producto, Regla de la suma y Fijación de variables		1
• Regla del producto y Fijación de variables	1	
Total	3	3

Este problema solamente presenta una aplicación de la Regla del producto, mientras que, tenemos con mayor frecuencia el uso de fórmulas combinatorias, consideramos esta situación debido a que este tipo de problema se explica regularmente para describir las fórmulas de combinaciones y permutaciones.

El 50% de los estudiantes realizaron correctamente el problema.

Problema 5. “Colocar 3 cartas en 4 sobres”

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta, ¿de cuántas maneras podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes?

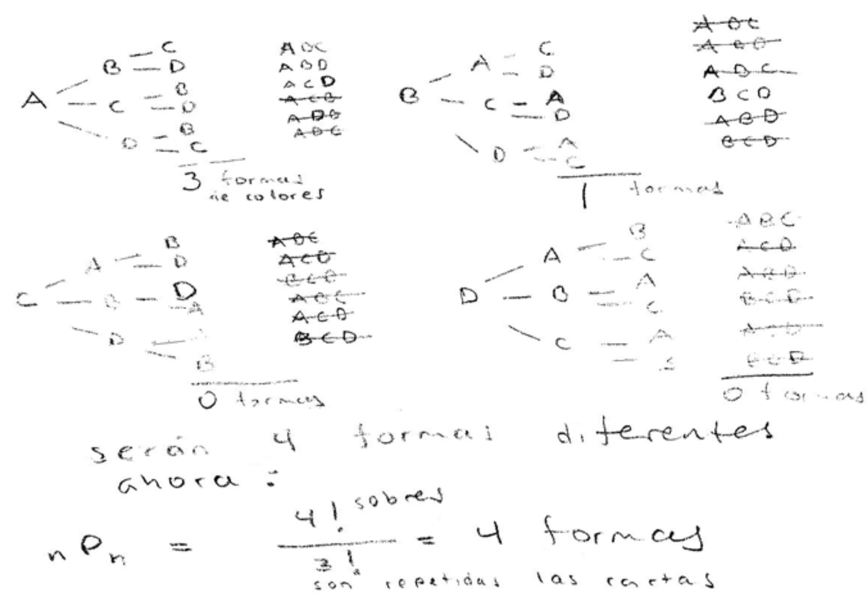
> *Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, una en el blanco y una en el crema*.

En los resultados de este problema sólo el estudiante B, traduce el problema a otro equivalente*:* tomar (selección) tres objetos (sobres) de un total de cuatro, cabe mencionar, que al momento de interpretar su resultado, el problema lo volvió a traducir al modelo original (colocación), por lo que consideramos que hizo un uso correcto de la estrategia de solución:

Sol. Dado que los sobres son iguales, el orden no importa, y simplemente se prodría decir que de 4 objetos voy a tomar 3 a la vez, dado que es que a lo maximo sea una carta por objeto, uno no tendrá nada, entonces se tiene que:

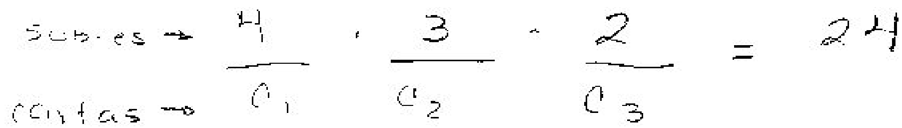
$$m = C_{4,3} = C(4,3) = \binom{4}{3} = \binom{4}{1} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = 4$$ posibles colocaciones diferentes

El estudiante C, hace uso de diagramas de árbol para la solución, determina las ramificaciones para el sobre A, posteriormente lo hace para B, C y D; el uso de esta estrategia es correcto, ya que fue eliminando triadas que se repetían.



Esta imagen presenta su resultado correcto en cuanto al diagrama, pero el estudiante corrobora su solución, aplicando una formula incorrecta: permutación, tal vez pudo confundirse, ya que la fórmula de combinación da el mismo resultado, cuando se presenta este caso (n=4 y r=3).

El estudiante E, aplica una fórmula incorrecta. El estudiante F, intenta aplicar la regla del producto, pero no justifica los subconjuntos a multiplicar. Los estudiantes A y D, hacen uso del principio fundamental del conteo incorrectamente, ya que consideran las cartas distintas, confundiendo el tipo de objetos: estudiante A



Las situaciones que observamos en este problema son:

Tabla: 2.1 f)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 5

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Principio fundamental del conteo		2
• Uso de fórmulas combinatorias		1
• Diagrama de árbol y Regla de la suma	1	
• Regla del producto y Fijación de variables		1
• Uso de fórmulas combinatorias y Traducción del problema a otro equivalente	1	
Total	2	4

En este problema, los dos estudiantes que presentan el resultado correcto, se auxilian usando diagrama de árbol, y uso de fórmulas combinatorias (traduciendo el problema). El diagrama de árbol, creemos la importante utilidad que tiene para este problema (evita errores de repetición). Consideramos que la aplicación de la fórmula combinatoria, no describe tan específicamente, los arreglos resultantes.

El 67% de los estudiantes tuvieron incorrecta la respuesta de este problema.

Problema 6. “Colocar 4 niños en 2 recamaras”

Cuatro niños, Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos recámaras diferentes (azul y verde) donde poder colocar a los niños para dormir ¿De cuántas maneras diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos recámaras? (Puede quedar alguna recámara vacía).

Ejemplo: Alicia, Berta, y Carlos en la azul y Diana en la verde.

Para la solución de este problema, el estudiante B, aplica el principio fundamental del conteo, identifica dos variables (n y m), pero al realizar las sustituciones se equivoca en los parámetros, a pesar de ello, llega a un “resultado correcto”:

Sea $n = 4$ $\{A, B, C, D\}$
$m = 2$ $\{a, v\}$

Sol. Dado que la abuelita tiene 2 recamaras para los 4 niños, y no se enuncia cuantos n_x son por recamara (se pueden permitir), y si se permite reposición en las 2 recamaras, se tendrá:

$N = n \cdot n \cdot n \cdot n = n^m = 4^2 = 16$ formas de acomodarlos en las dos recamaras, considerando que en algún ordenamiento si queda vacía.

Metodo alternativo

$N = 2! \cdot 4 \cdot 2 = 16$ formas

Por otro lado los estudiantes A y F, hacen uso de la estrategia de fijación de variables: primero determinan las posibilidades de acomodar (sin importar el orden) a los cuatro niños en la habitación azul o verde, enseguida el número de colocaciones de tres niños en la azul o verde y un niño en la restante, finalmente la posibilidad de acomodar dos niños ya sea en la azul o verde. Estos estudiantes hicieron uso correcto de la estrategia, no confundiendo los objetos del problema. Finalmente aplican la regla de la suma.

El estudiante C, para llegar a la solución, enumera cada una de las posibilidades, para posteriormente aplicar la regla de la suma:

ordenando en estricto orden:

Recámara verde	Recámara Azul
A	BCD
AB	CD
AC	BD
AD	BC
B	ACD
BC	AD
BD	AC
C	ABD
CD	AB
D	ABC

sigue

Recamara verde	Recámara Azul
ABC	D
ABD	C
ACD	B
BCD	A
ABCD	nadie
nadie	ABCD
16 formas	16 formas

Finalmente:

son 16 formas posibles para acomodar a los niños

Caso contrario al anterior, sucede con el estudiante D, enumera las posibilidades, no incluyendo algunos casos, también utiliza la fórmula de permutación para corroborar, pero en los dos casos le sale una solución diferente. El estudiante E, da una respuesta intuitiva.

La tabla siguiente, muestra el resumen de la descripción anterior:

Tabla: 2.1 g)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 6

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Principio fundamental del conteo	1	
• Fijación de variables y Regla de la suma	2	
• Enumeración de eventos, Regla de la suma y Fijación de variables	1	
• Enumeración, Uso de fórmulas combinatorias y Fijación de variables		1
Total	4	1

La fijación de variables en este problema, es la estrategia más utilizada por los estudiantes, mientras que la enumeración de los eventos y regla del producto, sólo presentan una aplicación. Consideramos que la enumeración de los eventos, describe el resultado de una manera más detallada, para un análisis de los arreglos.

El 67 % de los estudiantes contestaron correctamente al problema.

<u>Problema 7. “Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2”</u>

Un grupo de cuatro amigos: Andrés, Benito, Clara y Daniel tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Química y otro de Física. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas maneras pueden dividirse para realizar los trabajos?

> *Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Química y Clara-Daniel el trabajo de Física.*

El estudiante B, transforma el problema en otro equivalente: elegir dos elementos (amigos distintos) de un total de cuatro. Aquí el estudiante transforma el modelo de partición a uno de selección, donde la estructura combinatoria es la misma (cabe mencionar que la descripción del resultado es un poco confusa):

$n = 4 \quad \{A, B, C, D\}$

$m = 2 \quad \{Q, F\}$

Sol. La forma de escojer 2 de 4 esta dada por $C(4,2) = 6$ combinaciones posibles, que equivalen a las parejas (equipos formados) que dividido entre las 2 materias dan 3 posibles maneras para realizar los 2 trabajos a la vez y dado que se tienen que intercalar ahora los de Química, hacen los de Física se tendrá:

$N = 3 \cdot 2 = 6$ formas en que se pueden realizar los trabajos al mismo tiempo

Otra forma

Se podría combinar, dado que son equipos de 2, las 2 materias para los $n = 4$ estudiantes, entonces

$N = \binom{4}{2} = 6$ formas posibles

Los estudiantes A, D y E, primero hacen uso de la fórmula correctamente, enseguida realizan una lista de las posibles combinaciones (suponemos que para corroborar la aplicación de la fórmula), en esta parte los estudiantes dividen el problema en subproblemas, primero tomando en cuenta las posibles situaciones para el trabajo de física, ya teniendo las combinaciones, después consideran las posibilidades para el trabajo de química; finalmente aplican la regla de la suma*:* teniendo las combinaciones de dos grupos de dos chicos cada uno, las suman y determinan el total, así justifican el uso correcto de la fórmula. La imagen siguiente nos muestra, la descripción anterior (estudiante A):

$_4C_2 = 6$

Trabajo física	Trabajo Química
A B	C D
A C	B D
A D	B C
B C	A D
B D	A C
C D	A C

El estudiante C, divide el problema en subproblemas: dibujando un diagrama de árbol, especificando las posibilidades para el trabajo de química, lo mismo hace para el trabajo de física, enseguida realiza una lista de parejas que formó para cada una de las materias, finalmente con las combinaciones que obtuvo, forma dos grupos de dos chicos cada uno, llegando así al resultado final, el estudiante, ya teniendo aclarado el problema, hace uso de la fórmula de combinaciones, llegando al mismo resultado. El estudiante E, intenta aplicar la regla del producto, interpretando incorrectamente, ya que los subconjuntos que multiplica (parejas formadas de un total de cuatro personas) salen del contexto del problema.

En este problema encontramos las situaciones siguientes:

Tabla: 2.1 h)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 7

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Traducción del problema a otro equivalente y Uso de fórmulas combinatorias	1	
• Uso de fórmulas combinatorias, Enumeración de eventos y Fijación de variables	3	
• Diagrama de árbol, división del problema en subproblemas, Uso de fórmulas combinatorias y Regla de la suma	1	
• Regla del producto y Fijación de variables		1
Total	5	1

Para este problema la estrategia y proceso de solución más aplicado por los estudiantes consiste en uso de fórmulas combinatorias y enumeración de los eventos. En estas soluciones los estudiantes al aplicar la fórmula corroboran su resultado realizando una lista de los arreglos obtenidos, consideramos que para dar una mejor explicación al problema.

El 83% de los estudiantes tuvieron la respuesta correcta al problema.

Problema 8. "Repartir 4 coches a 3 hermanos"

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos: Fernando, Luís y Paco. ¿De cuántas maneras diferentes puede regalar los coches a sus hermanos?

Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luís.

Los estudiantes B y F, aplican el principio fundamental del conteo, de una manera incorrecta, ya que los subconjuntos que multiplican salen del contexto del problema, dichos estudiantes, primero toman en cuenta repartir los cuatro coches a cualquiera de los hermanos, teniendo así cuatro posibilidades, para los dos hermanos restantes de nueva cuenta reparten los coches, pero, vuelven a tener cuatro posibilidades, porque, no consideran que ya habían repartido. Así los subconjuntos que ellos multiplican son: 4x4x4= 64 posibilidades de repartir los coches a sus tres hermanos, lo cual es incorrecto. Imagen estudiante B.

Sol $n=4 \ \{A, B, V, R\}$
$m=3 \ \{F, L, P\}$

El resultado viene dado por, dado que es con reposición por:

$N = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ posibles formas de regalar los juguetes

Los estudiantes D y E, hacen uso de la regla del producto multiplicando subconjuntos incorrectos, solamente consideran la forma de repartir uno, dos y tres coches de un total de cuatro, haciendo el producto de los resultados: Imagen estudiante D.

$$\binom{4}{3}\binom{3}{2}\binom{2}{1} = \left(\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}\right)\left(\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$= \left(\frac{24}{6}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(2)$$

$$= (4)(3)(2) = \underline{24}$$

El estudiante C, comienza enumerando las posibilidades de repartir los coches a Fernando (repartiendo 1, 2 ,3 4, y ningún coche), obteniendo correctamente estos resultados, pero al continuar, el estudiante, no justifica su respuesta, enseguida realiza una lista tratando de dar las posibles situaciones de que todos los hermanos tengan coche, cometiendo un error de enumeración, de esta forma llega a un resultado incorrecto.

Finalmente el estudiante A, sale del contexto del problema considerando la posibilidad de que el niño se quede con un coche y reparta los restantes a los hermanos, es decir, no entendió el problema, por lo que no aplica algún proceso o estrategias de solución.

Las situaciones que encontramos en este problema son mostradas a continuación:

Tabla: 2.1 i)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 8

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Regla del producto y Fijación de variables		2
• Principio fundamental del conteo		2
• Enumeración de eventos y Fijación de variables		1
Total	0	5

En donde observamos que no existen aplicaciones correctas de estrategias y procesos de solución.

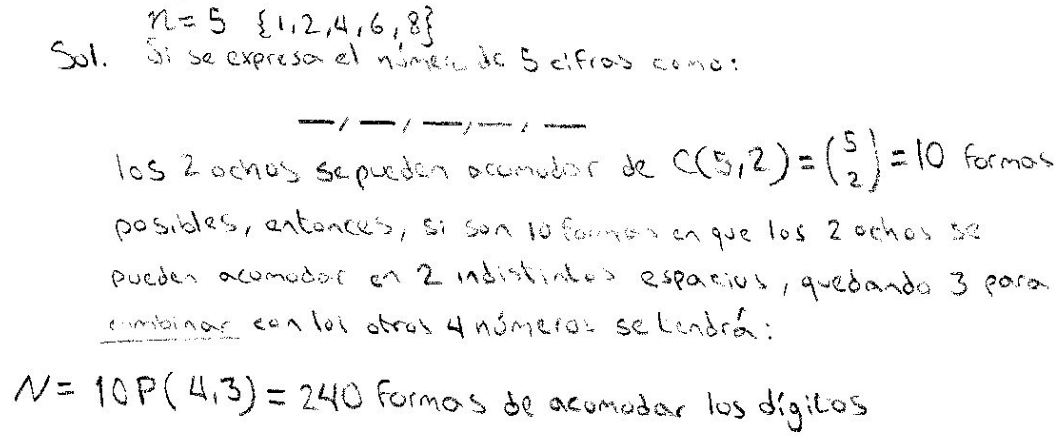
El 100% de los resultados de este problema fueron incorrectos.

Problema 9. “Formar números de 5 cifras”

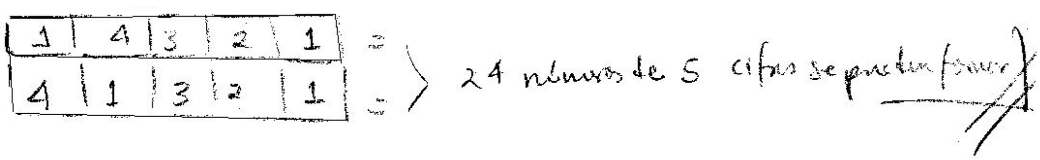
¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos: $1, 2, 4, 6, 8$*, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?*

Ejemplo: 81824.

El estudiante B, primero determina la forma de acomodar los 2 ochos, usando combinaciones, posteriormente dado que quedan 3 espacios para formar los números de 5 cifras, ahora lo que hace es obtener las posibles permutaciones de 3 cifras, de un total de 4 (cifras 1, 2, 4, 6). Finalmente realiza el producto correspondiente. A pesar de que su resultado es correcto utiliza la palabra combinar en la fórmula de permutación:



Los estudiantes D, E y F, dan una respuesta intuitiva errónea, no justifican el resultado obtenido. Imagen estudiante O:



El estudiante A realiza una lista de las formas posibles de acomodar dos cifras iguales en cinco espacios diferentes. Enseguida, como observa que quedan tres espacios, obtiene las distintas formas de permutar 3 cifras de un total de 4 (solo son las cifras 1, 2, 4, 6). Esta lista la hace sólo con un ejemplo, para no especificar todas las posibilidades (ver imagen), para finalizar aplica la regla de suma, obteniendo correctamente el resultado final:

El estudiante C, utiliza un diagrama de árbol para obtener las distintas formas de acomodar las cifras (1, 2, 4 y 6) en los cinco espacios, obtiene 24 formas posibles, pero este diagrama lo hace fijando en los dos primeros espacios las cifras iguales (el número 8). Posteriormente determina cómo pueden ir acomodadas las cifras iguales en los cinco espacios distintos, esto lo hace ubicando las cifras en un cuadro (ver figura), obtiene de esto 10 formas posibles, así llega a la respuesta correcta aplicando la regla del producto: 24x10 =240.

En el análisis de este problema encontramos los casos siguientes:

Tabla: 2.1 j)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESIQIE: problema 9

Estrategia y Proceso general de solución	***Aplicación***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Regla del producto y Fijación de variables	1	
• Enumeración de eventos, Regla de la suma y Fijación de variables	1	
• Diagrama de árbol, Regla del producto y Fijación de variables	1	
Total	3	0

El 50% de los estudiantes contestó de manera correcta el problema.

2.1.1 RESULTADOS GLOBALES: ESTUDIANTES DE ESIQIE

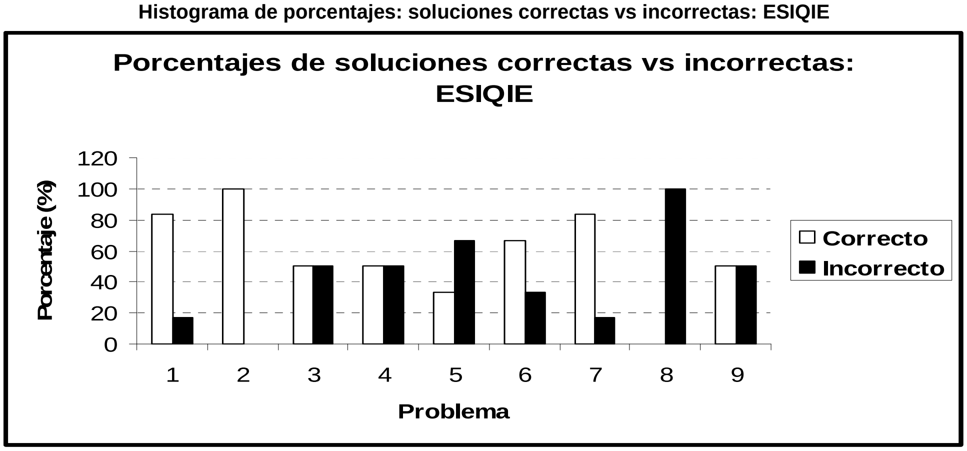
Para un mejor análisis de nuestra investigación, los resultados que anteriormente presentamos, los describimos mediante el uso de tablas e histogramas, indicando porcentajes importantes, de los cuales mostramos la descripción correspondiente:

Al realizar la evaluación de los cuestionarios, tabulamos las respuestas correctas e incorrectas. Es importante aclarar, que para determinar la cantidad de aciertos y errores de los problemas, consideramos el resultado final del alumno, es decir, el número de arreglos que el estudiante da al final del problema. La tabla y el histograma siguiente muestran los porcentajes que corresponden a dichas evaluaciones:

Tabla: 2.1.1 a)
Porcentaje de soluciones correctas e incorrectas en la aplicación del cuestionario: ESIQIE

Problema	Correcto	Incorrecto
1	83 %	17 %
2	100 %	0 %
3	50 %	50 %
4	50 %	50 %
5	33 %	67 %
6	67 %	33 %
7	83 %	17 %
8	0 %	100 %
9	50 %	50 %

Figura: 2.1.1 a)
Histograma de porcentajes: soluciones correctas vs incorrectas: ESIQIE



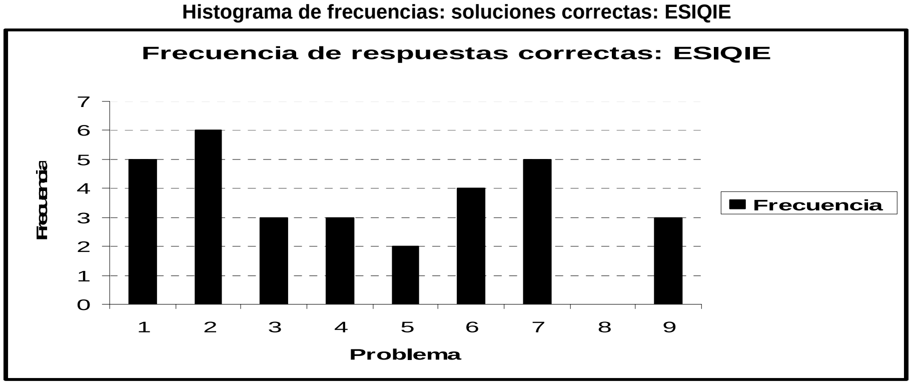
Donde observamos que el problema 2: *"Extraer 3 bolas numeradas de 4"*, fue el que todos los estudiantes contestaron correctamente, esto pudo suceder debido a que, algunos Profesores utilizan este tipo de contextos (selección), para plantear un problema y explicar las operaciones de combinatoria, es decir, son problemas más frecuentes. Caso contrario sucede en el problema 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos",* ninguno de los estudiantes dio la respuesta correcta, este puede ser por el tipo de objetos que maneja, son colores que describen coches, a diferencia del problema 2, que son números, consideramos que esto, generó confusión en los estudiantes. Cabe destacar que el problema combinatorio compuesto: problema 9: *"Formar números de 5 cifras",* el 50 % de los estudiantes lo contestó correctamente, esto creemos que puede ser, debido a que en general los problemas combinatorios que presentan en las asignaturas de probabilidad, se limitan a ser de combinaciones o permutaciones (problemas simples de combinatoria).

La tabla de abajo representa las frecuencias de los resultados obtenidos en la evaluación de los cuestionarios. De acuerdo a los datos, el problema 2: "*Extraer 3 bolas numeradas de 4"*, resultó ser el más sencillo para los estudiantes (este tipo de problema es común en la enseñanza tradicional de la combinatoria) y el problema 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos"* consideramos, que fue el de mayor dificultad ya que no observamos resultados correctos. En general los problemas de selección presentan las frecuencias más altas de respuestas correctas proporcionadas por los estudiantes, mientras que en los problemas referentes al modelo de partición observamos las frecuencias menores de respuestas correctas. Los problemas de colocación tienen frecuencia media de respuestas correctas.

Tabla: 2.1.1 b)
Frecuencia de respuestas correctas en la aplicación del cuestionario: ESIQIE (muestra n=6)

Problema	***Frecuencia Absoluta***
1	5
2	6
3	3
4	3
5	2
6	4
7	5
8	0
9	3

Figura: 2.1.1 b)
Histograma de frecuencias: soluciones correctas: ESIQIE

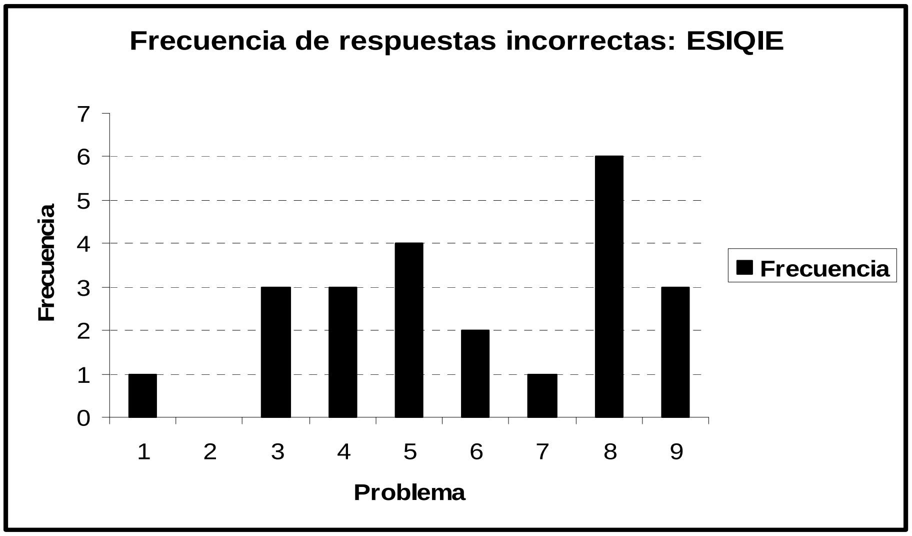


Así mismo, presentamos la tabla y el histograma correspondiente a las frecuencias de respuestas incorrectas del cuestionario.

Tabla: 2.1.1 c)
Frecuencia de respuestas incorrectas en la aplicación del cuestionario: ESIQIE (muestra n=6)

Problema	***Frecuencia Absoluta***
1	1
2	0
3	3
4	3
5	4
6	2
7	1
8	6
9	3

Figura: 2.1.1 c)
Histograma de frecuencias: soluciones incorrectas: ESIQIE



Para observar en términos porcentuales, las respuestas de los estudiantes, de acuerdo al modelo combinatorio, construimos la siguiente tabla:

Tabla: 2.1.1 d)
Porcentaje de respuestas correctas según el modelo combinatorio: ESIQIE

Modelo Combinatorio	***Porcentaje***
Selección	78 %
Colocación	50 %
Partición	42 %

Observemos que los problemas referentes al modelo de selección, presentaron el mayor porcentaje de respuestas correctas: 78%, y el modelo de partición solamente de un 100% de los problemas, fue contestado correctamente el 42%. El modelo de colocación, presentó un 50% de respuestas correctas.

El porcentaje de respuestas incorrectas de acuerdo al modelo combinatorio es:

Tabla: 2.1.1 e)
Porcentaje de respuestas incorrectas según el modelo combinatorio: ESIQIE

Modelo Combinatorio	***Porcentaje***
Selección	22 %
Colocación	50 %
Partición	58 %

Consideramos que de acuerdo al modelo combinatorio, el que resultó con mayor dificultad para los estudiantes, es el de partición, los cuales corresponden a los problemas 7: *"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2"* y problema 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos".*

2.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS: ESTUDIANTES DE ESFM:

Los resultados de la segunda muestra de estudiantes (ESFM) los presentamos a continuación, con las estrategias y procesos de solución de cada problema, así como, las imágenes correspondientes. Los estudiantes de esta muestra, están identificados de la manera siguiente:

Tabla: 2.2
Referencias de estudiantes: ESFM

Estudiante	***Referencia***
Juan López	A
Mónica Hernández	B
Alberto Ramírez	C
Edith Trejo	D
Francisco Espinosa	E
Mariana López	F
Dora Lara	G
Manuel Gutiérrez	H
Belén Cruz	I
Ernesto Monroy	J
Gabriela Zepeda	K
Juan Mendiola	L
Dafne Morlan	M
Edgar Crisanto	N
José Samqui	O
Jonathan Suárez	P
Brenda Jiménez	Q

Enseguida comenzamos con la descripción y análisis de cada problema:

<u>Problema 1. “Seleccionar 3 estudiantes de 5”</u>

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar el pizarrón. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María ¿De cuántas maneras puede elegir tres de estos alumnos?

Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

En los resultados analizados en este problema, todos los estudiantes respondieron. Enseguida mostramos los casos que se presentaron y algunas imágenes representativas.

- Uso de fórmula combinatoria:

Este caso fue el más presentado por parte de los estudiantes (14 aplicaciones), en general se tiene un manejo adecuado de la fórmula de combinaciones, sustituyen valores y mencionan el resultado obtenido. Estudiante D:

$n=5$ y $r=3$

${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ para $n \geq r \geq 1$

${}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} =$

$= \frac{120}{2\times 6} = \frac{120}{12} = 10$ ∴ hay 10 maneras de elegir 3 elemen del grupo.

Donde n = numero de voluntarios
r = numero de voluntarios a elegir del grupo.

El estudiante I, hace uso incorrecto de la fórmula, considera que el orden es importante en los diferentes casos, por lo que utiliza permutaciones (permutar tres objetos de un total de cinco). El estudiante A llega al resultado correcto, pero confunde la descripción de la fórmula, escribe el símbolo de permutación y aplica combinaciones:

Elisa, Fernando, Germán, Jorge y Mario
tenemos
n = 5

$$P_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2.6} = 10$$

$P_r = 10$

- Uso de fórmulas combinatorias y Enumeración de eventos:

Para una forma más descriptiva, los estudiantes E y Q, emplean correctamente la fórmula indicada, además enumeran los eventos posibles, esto consideramos para corroborar la aplicación directa de la fórmula. Estudiante E:

$$C = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{1.2.3.4.5}{(1.2)(1.2.3)} = 10$$

E F G
E F J
E F M
E G J
E G M
E J M
F G J
F G M
F J M
G J M

- Principio fundamental del conteo:

Los estudiantes restantes, utilizan el principio fundamental del conteo, el cual es incorrecto, ya que al tener estos arreglos, hay casos repetidos. Estudiante P:

EN EL PRIMER LUGAR SE PUEDEN PONER A 5 ALUMNOS, EN EL SEGUNDO PUEDEN ESTAR 4, PUES YA HAY UNO EN EL PRIMERO, EN EL TERCERO PUEDEN ESTAR 3, PUES YA HAY DOS EN PRIMER Y SEGUNDO LUGAR RESPECTIVAMENTE

ENTONCES PUEDE HABER

5X4X3 COMBINACIONES

60 COMBINACIONES.

La tabla que presentamos abajo, describe en forma general las situaciones mencionadas:

Tabla: 2.2 a)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 1

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Uso de fórmulas combinatorias	11	1
• Uso de fórmulas combinatoria, Enumeración de eventos y Fijación de variables	2	
• Principio fundamental del conteo		3
Total	13	4

En los resultados de este problema (13 resultados de un total de 17), encontramos que los estudiantes aplican la fórmula directamente. En dos aplicaciones los estudiantes se apoyan enumerando los posibles arreglos resultantes, esto consideramos que especifica con mayor claridad las respuestas correctas.

El 76% de los estudiantes respondieron correctamente al problema.

<u>Problema 2. "Extraer 3 bolas numeradas 4"</u>

En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos al azar una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se regresa a la urna. Se elige de nuevo al azar una bola y se anota su número y se regresa a la urna. Se repite la misma operación una tercera vez ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?

Ejemplo: se puede obtener el número 222.

Las estrategias que encontramos en este problema son descritas a continuación, cabe destacar que 1 estudiante no contestó el problema:

- Principio fundamental del conteo:

Los estudiantes que aplicaron esta estrategia (5 estudiantes), lo hicieron de manera correcta, identificando los posibles eventos independientes, para posteriormente multiplicar y dar respuesta al problema. Estudiante J:

$\boxed{4}\boxed{4}\boxed{4} = 64$ distintos cifras de 3 números.

- Uso de fórmulas combinatorias y Principio fundamental del conteo:

Los estudiantes M y N, primero determinan las posibles permutaciones de un objeto (bolas numeradas), tomado de un total de 4, obteniendo 4 arreglos, enseguida describen la repetición de eventos, y aplican el principio fundamental del conteo, determinando la respuesta correcta. Estudiante M:

Datos
r = 1 bola
n = 4 bolas
2, 4, 7 y 9 Dígitos
3 veces

$$_4P_1 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

Estas posibles opciones se dan en las 3 veces que se repite el procedimiento.

$$\therefore\ 4^3 = 64$$

- Uso de fórmulas combinatorias

De los estudiantes que presentaron este proceso de solución (7 casos en total), 5 emplean permutaciones: 3 estudiantes: G, H y Q, permutan tres objetos (bolas numeradas), de un total de 4, llegando a un resultado incorrecto. Estudiante G:

$$_4P_3 = 24$$

2 estudiantes: C y D, utilizan permutación con repetición. Los 2 casos restantes: estudiantes E y M, usan combinaciones, al utilizar esta estrategia no están considerando repetición de elementos y la importancia del orden de las cifras.

El error que encontramos en este problema, lo describimos a continuación:

- Respuesta intuitiva errónea:

Los estudiantes: B e I, describen su respuesta de una manera, que consideramos confusa, por lo que creemos, no entendieron el problema. Estudiante B:

$$P = \frac{(4^3)!}{2!\,4!\,7!\,9!}$$

Los resultados globales los mostramos en la tabla siguiente:

Tabla: 2.2 b)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 2

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Principio fundamental del conteo	5	
• Uso de fórmulas combinatoria y Principio fundamental del conteo	2	
• Uso de fórmulas combinatorias		7
Total	7	7

Hay que destacar la cantidad de respuestas incorrectas en la aplicación de la fórmula, consideramos que los estudiantes se confunden en la repetición de los objetos.

El 41 % de los estudiantes respondieron satisfactoriamente la respuesta.

<u>Problema 3. “Seleccionar 4 fichas de 4”</u>

En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta manera hasta que se han seleccionado una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección de las fichas?

Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden: blanca, azul, roja y azul.

Los resultados evaluados en este problema, los mencionamos enseguida, con su correspondiente descripción, sólo un estudiante no responde al problema:

- Regla del producto:

El estudiante I, hace uso de la regla del producto, identifica los subconjuntos a multiplicar: seleccionar una ficha de las cuatro, seleccionar dos fichas de las tres restantes, seleccionar la ficha restante, estos posibles eventos son incorrectos:

$n = 4$ fichas   2 azules 1 blancas y rojas

$n_1 = \binom{4}{1}$ $n_2 = \binom{3}{2}$ $n_3 = \binom{1}{1}$

$n_T = 4 \times 6 \times 1 = 24$ maneras

- Principio fundamental del conteo:

Los estudiantes: J, N y O identifican los posibles eventos, al ir seleccionando las fichas correspondientes. La multiplicación de estos eventos es incorrecta (consideran arreglos repetidos).

- Uso de fórmulas combinatorias

De los 16 estudiantes que respondieron este problema, 12 hacen uso de este proceso de solución, 9 utilizan de forma incorrecta la fórmula de permutación, consideraron distintas las fichas azules (estas fichas son iguales, de acuerdo al problema), uno de estos estudiantes (estudiante E), realiza una lista de los eventos posibles (eventos correctos), pero a pesar de esto, aplica fórmula directa y falla en su respuesta:

$$P = \frac{(4)!}{(4-4)!} = 24$$

A R B A   A R B A
A B R A   A B R A
A A B R   A A B R
A A R B   A A R B
A B A R   A B A R
A B A B   A R A B

Los 3 estudiantes restantes: D, G y H, aplican de forma correcta la fórmula: permutación con repetición, presentando así el resultado. Estudiante D:

$n = 4$
$n_1 = 2$ fichas azules
$n_2 = 1$ ficha blanca
$n_3 = 1$ ficha roja

$$nP_{n(n_1, n_2, \ldots, n_r)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

$$= \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{24}{2} = 12$$

hay 12 formas diferentes de seleccion de las fichas.

En la tabla de abajo, presentamos los resultados finales:

Tabla: 2.2 c)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 3

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Regla del producto y Fijación de variables		1
• Principio fundamental del conteo		3
• Uso de fórmulas combinatorias	3	9
Total	3	13

Tres resultados correctos de este problema, presentan la aplicación directa de fórmulas combinatorias, mientras que nueve aplicaciones cometen el error de no identificar los valores correctos para sustituir en dicha fórmula.

El 18 % de los estudiantes contestaron en forma correcta a este problema.

Problema 4. “Colocar 3 coches en 5 plazas”

El garaje de la casa de Ángel tiene cinco plazas. Sólo tienen, sin embargo, tres coches: el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Éste es el esquema de la cochera:

1	***2***	***3***	***4***	***5***

¿De cuántas maneras posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus coches en el garaje?

Ejemplo: Ángel puede estacionar su coche en la plaza 1, Beatriz en la número 2 y Carmen en la número 4.

Las estrategias que describen los resultados de este problema son:

- Uso de fórmulas combinatorias:

De los 17 estudiantes, 14 utilizaron este proceso de solución, 10 de ellos lo hacen en forma correcta, toman en cuenta la importancia del orden en los arreglos y aplican la fórmula directa de permutación, enseguida describen el resultado. Estudiante D:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

n=5 espacios a ocupar
r=3 coches

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

posibles maneras de estacionar los cohes

Los 4 estudiantes restantes: A, B, J y Q, emplean combinaciones, es decir, no consideran que el orden es importante, y que esto determina mayor cantidad de arreglos.

- Principio fundamental del conteo:

Los estudiantes: N y O, identifican eventos independientes, los cuales son correctos y aplican el Principio fundamental del conteo en forma satisfactoria. Estudiante O:

$$\boxed{5}\,\boxed{4}\,\boxed{3} = 60$$

- Regla del producto:

El estudiante I, determina subconjuntos incorrectos: determina combinaciones, que consideramos confusas:

$n=5$
$r=3$

$$\binom{5}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{3}{3}$$

$${}_1C_5 =$$

$${}_5C_1 = 5 \times 6 \times 1 = \underline{30}$$

$$5! \times 12 \times 6 =$$

La tabla que resume los datos anteriores es la que mostramos a continuación:

Tabla: 2.2 d)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 4

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Uso de fórmulas combinatorias	10	4
• Principio fundamental del conteo	2	
• Regla del producto y Fijación de variables		1
Total	12	5

En este problema, el proceso de solución con mayor frecuencia de aplicación, consiste en que los estudiantes utilizan directamente fórmulas combinatorias, solamente dos casos describen la aplicación del principio fundamental del conteo.

El 71 % de las respuestas, fueron correctas.

Problema 5. "Colocar 3 cartas iguales en 4 sobres diferentes"

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta, ¿de cuántas maneras podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes?

> *Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, una en el blanco y una en el crema.*

El estudiante I, no contestó este problema, las respuestas del resto de ellos, las describimos en el análisis siguiente:

- Uso de fórmulas combinatorias:

De los 17 estudiantes que respondieron el cuestionario, 15 de ellos utilizaron este proceso de solución, 7 estudiantes lo hacen en forma correcta, identifican la igualdad de las cartas, y por tanto, que el orden de los arreglos no importa, por lo que, aplican la fórmula directa de combinaciones, mostrando su resultado. Estudiante N:

Con Combinaciones. tenemos $n = 4$ y $r = 3$

$$ {}_nC_r = {}_4C_3 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4!}{1!\,3!} = \boxed{4 \text{ maneras}} $$

Los 8 estudiantes restantes, por el contrario, hacen distinción de las cartas y aplican permutaciones, por lo que, consideramos que no entendieron el problema, llegando así a un resultado incorrecto.

- Enumeración de eventos:

El estudiante P, realiza una lista de los eventos, describiendo dichos eventos, de otra forma, es decir, el tipo de objetos lo confunden y así reescribe la lista, obteniendo un resultado correcto:

PASEMOS AL PROBLEMA A CEROS Y UNOS
0 ES EL SOBRE VACIO
1 ES UN SOBRE CON CARTA
SOLO HAY 4 ESPACIOS
LAS UNICAS COMBINACIONES

0111
1011
1101
1100

SON 4 FORMAS

La tabla de resumen la mostramos enseguida:

Tabla: 2.2 e)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 5

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Uso de fórmulas combinatorias	7	8
• Enumeración de eventos y Fijación de variables	1	
Total	8	8

De los ocho resultados correctos, siete de ellos hacen uso directo de fórmulas combinatorias, el estudiante que enumera los posibles arreglos resultantes, consideramos que describe claramente el resultado.

El 47% de los resultados analizados, fueron correctos.

Problema 6. "Colocar 4 niños en 2 recámaras"

Cuatro niños, Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos recámaras diferentes (azul y verde) dónde poder colocar a los niños para dormir ¿De cuántas maneras diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos recámaras? (Puede quedar alguna recámara vacía).

Ejemplo: Alicia, Berta, y Carlos en la azul y Diana en la verde.

En este problema el estudiante Gabriela, no da respuesta al problema. En las respuestas de los estudiantes restantes, observamos las características siguientes situaciones:

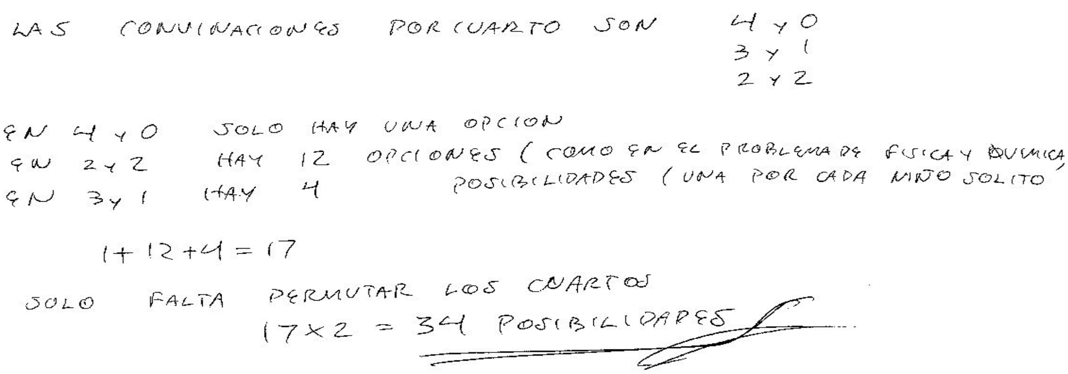
- Uso de fórmulas combinatorias y Regla de la suma:

El estudiante O, determina combinaciones incorrectas: para la primer operación, obtiene las formas posibles de seleccionan dos niños de los cuatro, y para la segunda, las formas de seleccionar un niño de dos, este estudiante no justifica este procedimiento, que lo lleva a un resultado incorrecto:

$${}_4C_2 + {}_2C_1 = \frac{4!}{2\cdot 2} = 6 + \frac{2!}{1}$$

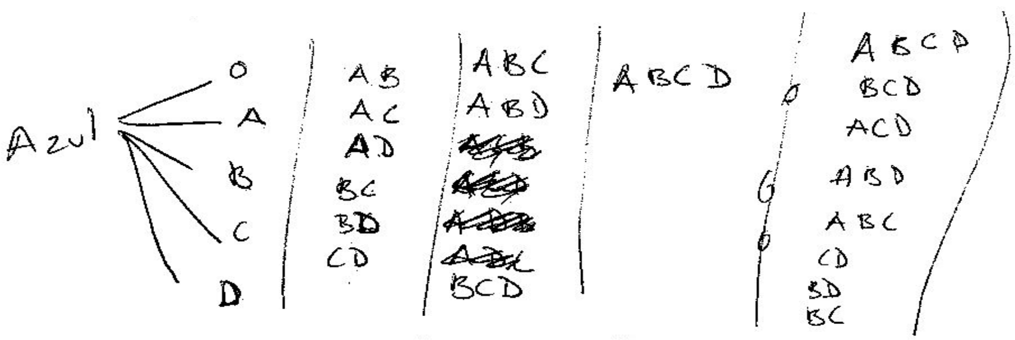
- Regla de la suma y Regla del producto:

El estudiante P, determina algunas combinaciones (especificadas en la imagen), suma dichas combinaciones y posteriormente dado que son dos recámaras, las permutas obteniendo un resultado incorrecto:



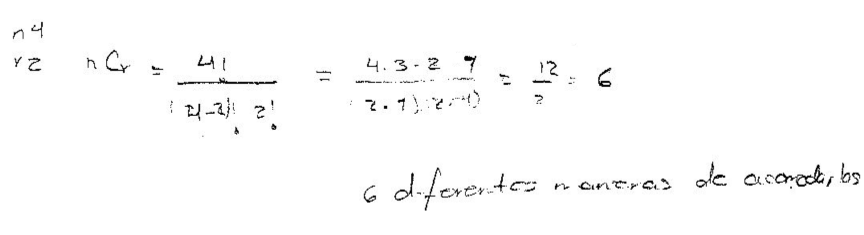
- Enumeración de eventos:

Los estudiantes L y M realizan una enumeración de los posibles eventos, la cual es incorrecta, no toman en cuenta algunos casos y otros los repiten. Estudiante L:



- Uso de fórmulas combinatorias:

De los 17 estudiantes, 9 aplicaron fórmula combinatoria directa. Los estudiantes: A, B y Q, utilizan combinaciones (arreglos formados por dos objetos, de un total de cuatro). Los estudiantes restantes (C, D, E, F, G y H), consideran que el orden de los arreglos importa y hacen uso de permutación. Estos resultados son incorrectos. Estudiante Q:

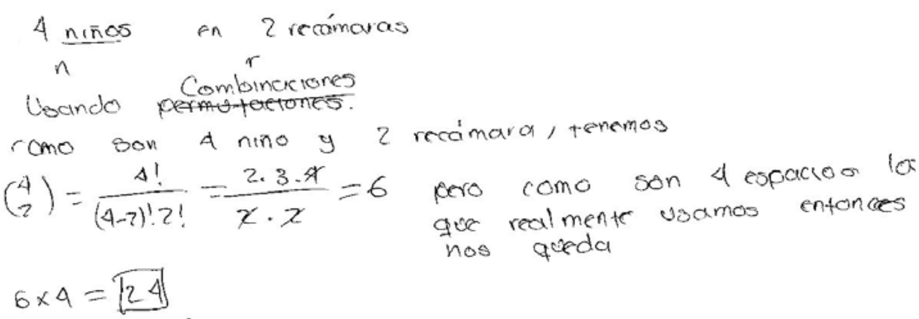


- Enumeración de eventos y Regla del producto:

El estudiante J, enumera las posibilidades de colocar a los niños en las dos recámaras, como considera que se tiene lo mismo para la azul y la verde, multiplica por dos, sus resultados anteriores, obteniendo un resultado incorrecto.

- Uso de fórmulas combinatorias y Regla del producto:

El estudiante N, primero determina las formas de seleccionar dos niños de los cuatro, aplicando combinación, enseguida consideramos que la descripción es confusa y este resultado lo multiplica por las combinaciones anteriores:


4 niños en 2 recámaras
n r
Usando ~~permutaciones~~ Combinaciones
como son 4 niño y 2 recámara, tenemos
$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{2\cdot 3\cdot \cancel{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 6$ pero como son 4 espacios los que realmente usamos entonces nos queda
$6 \times 4 = \boxed{24}$

La tabla de abajo, resume los datos descritos anteriormente:

Tabla: 2.2 f)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 6

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	**Incorrecta**
• Uso de fórmulas combinatorias y Regla de la suma		1
• Regla de la suma, regla del producto y Fijación de variables		1
• Enumeración de eventos y Fijación de variables		2
• Uso de fórmulas combinatorias		9
• Enumeración de eventos, Regla del producto y Fijación de variables		1
• Uso de fórmulas combinatorias, Regla del producto y Fijación de variables		1
Total	0	15

Los resultados de este problema, no presentan estrategias y procesos de solución correctos (ningún estudiante contestó correctamente al problema).

El 100% de los estudiantes respondieron en forma incorrecta al problema.

Problema 7. “Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2”

Un grupo de cuatro amigos: Andrés, Benito, Clara y Daniel tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Química y otro de Física. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas maneras pueden dividirse para realizar los trabajos?

> *Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Química y Clara-Daniel el trabajo de Física.*

El análisis de los resultados nos proporcionó la información posterior:

- Uso de fórmulas combinatorias:

Del total de los estudiantes, 15 de ellos aplicaron fórmula directa, 8 hacen uso de permutaciones, consideramos que consideran relevante el orden de los objetos (amigos), por ello, determinan sustituir los datos, en la misma. Estos resultados son incorrectos. Estudiante G:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2}$$

Los estudiantes: M y N, utilizan combinaciones: determinan las combinaciones de dos objetos (amigos), de un total de cuatro, pero, describen que, dado que son dos trabajos, estas combinaciones, se multiplican por 2, llegando a un resultado incorrecto. Estudiante M:

4 amigos
2 trabajos

$$_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6 \text{ formas de agrupar a?}$$

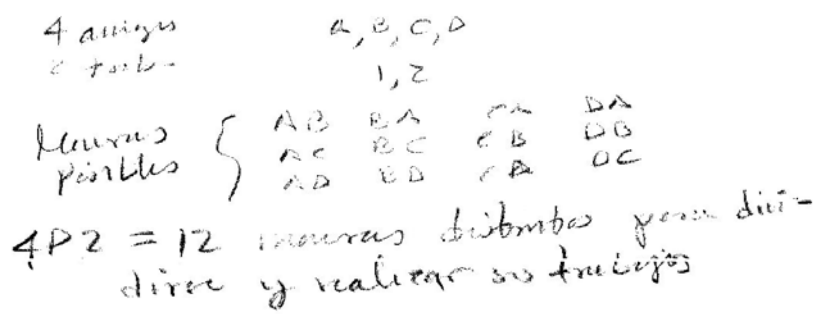
$$6\times 2 = 12 \text{ de los 2 trabajos}$$

Los estudiantes restantes (B, K, L, O y P), que usan este proceso de solución, se percatan de que el orden de los integrantes, para los grupos no importa, y determinan usar combinaciones, sustituyendo los datos correctos. Estudiante L:

$$\frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{4\cdot 3}{2!} = \underline{6 \text{ maneras}}$$

- Uso de fórmulas combinatoria y Enumeración de eventos:

Para dar respuesta a este problema, los estudiantes: E y J, realizan una lista de las posibles parejas a formar, pero la enumeración de J, contiene parejas repetidas, el estudiante no se percata de esta consideración y posteriormente, calcula las permutaciones de dos objetos de un total de cuatro, para lo cual, este uso es incorrecto. El estudiante E, primero aplica la fórmula de permutación, y trata de hacer la lista de los eventos, pero no termina el proceso de solución. Estudiante J:



Los resultados de este problema, los presentamos enseguida:

Tabla: 2.2 g)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 7

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	Incorrecta
• Uso de fórmulas combinatorias	5	10
• Uso de fórmulas combinatorias, Enumeración de eventos y Fijación de variables		2
Total	5	12

Los cinco estudiantes que respondieron correctamente al problema, aplican fórmulas combinatorias directamente.

El 29 % de los estudiantes respondió acertadamente al problema.

Problema 8. “Repartir 4 coches a 3 hermanos”

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos: Fernando, Luís y Paco. ¿De cuántas maneras diferentes puede regalar los coches a sus hermanos?

Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luís.

Tres estudiantes (K, L y P), no responden al problema planteado.

- Uso de fórmulas combinatorias:

Los estudiantes (A, B, C, D, F y Q), consideran determinar, los arreglos posibles, de tres objetos (colores) de un total de cuatro, considerando que el orden importa ya así aplican permutaciones. Estos resultados son incorrectos. Estudiante D:

$n = 4$ coches
$r = 3$ hermanos.

$$4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Caso contrario sucede con los estudiantes: G, H y N, ellos consideran que el orden no es importante y deciden usar combinaciones (arreglos de tres objetos (colores) de un total de cuatro). El estudiante Edgar, aplica de igual forma combinaciones, pero describe que como son tres hermanos, se tiene que multiplicar por 3. Los resultados de estos 3 estudiantes son incorrectos. Estudiante N:

4 coches (A, B, V, R), Fer, Luis, Paco.
Usando

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)\,3!} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 4$$ pero son 3 y es

igual a $4\times 3 = \boxed{12}$

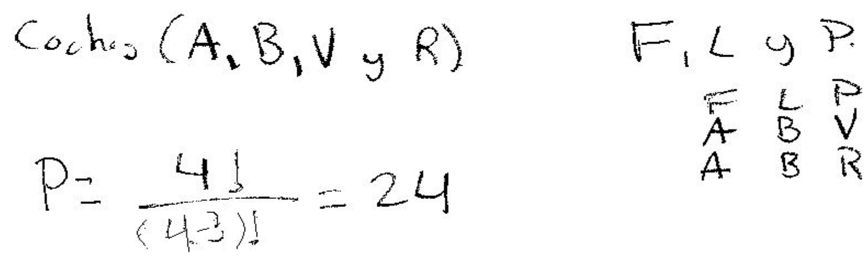
- Enumeración de eventos y Principio fundamental del conteo:

El estudiante J, realiza una lista de los eventos posibles del problema, observa que al seguir con la enumeración, el resultado que obtendrá, será de aplicar el Principio fundamental del conteo, lo cual consideramos correcto, debido a la independencia de eventos:

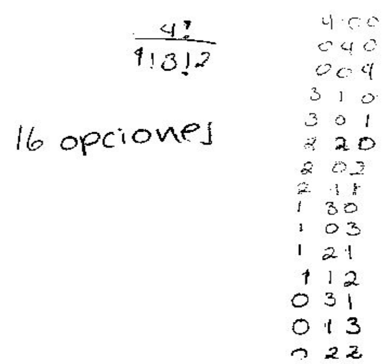
$3^4 = 81$ formas distintas de regalar su carros a sus hermanos

- Uso de fórmulas combinatorias y Enumeración de eventos:

El estudiante E, emplea permutación directa (n=4, r=3), suponemos que para corroborar intenta realizar una enumeración de los posibles arreglos de los colores, pero no continua la misma:



Los estudiantes: I, M y O, dan resultados confusos, el primero, sólo da una respuesta en el enunciado, la cual es correcta, pero no consideramos un resultado satisfactorio para nuestra evaluación. El estudiante O, realiza combinaciones que no justifica. El otro estudiante, realiza una lista de los posibles casos, pero ésta la describe con números, creemos que las letras lo confunden, el resultado numérico que da no corresponde a la lista, además la formula que realiza no es entendible. Estudiante M:



Los datos que anteriormente analizamos, los resumimos en la tabla siguiente:|

Tabla: 2.2 h)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 8

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	Incorrecta
• Uso de fórmulas combinatorias		9
• Uso de fórmulas combinatorias, Enumeración de eventos y Fijación de variables		1
• Enumeración de eventos, Principio fundamental del conteo y Fijación de variables	1	
Total	1	10

El único resultado correcto de este problema es resuelto mediante el principio fundamental del conteo y para verificar la respuesta el estudiante enumera los posibles arreglos resultantes, lo cual consideramos importante, para una mejor descripción.

El 6 % de los estudiantes contestó correctamente al problema planteado.

Problema 9. "Formar números de 5 cifras"

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos: $1, 2, 4, 6, 8$*, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?*

Ejemplo: 81824.

De los 17 estudiantes, tres de ellos no dieron respuesta al problema (A, L y N).

Las situaciones siguientes, forman parte de la evaluación de este problema:

- Principio fundamental del conteo:

Los estudiantes K y L, consideran formar los números de tres cifras, tomando en cuenta las cifras (1, 2, 4 y 6), es decir, no consideran los dos ochos. Para la elección de estas tres cifras, determinan cuatro posibilidades para cada una y aplican el Principio fundamental del conteo, llegando a un resultado incorrecto. Estudiante K:

$4^3 = 4.4.4 =$ 64 números de 3 cifras

El estudiante J, de igual forma no considera los dos ochos, a diferencia, de los anteriores, este estudiante, para la elección de las tres cifras, las posibilidades son: cuatro para la primera, tres para la segunda y dos para la tercera, teniendo esto aplica el Principio fundamental del conteo, su resultado es incorrecto.

- Principio fundamental del conteo, Uso de fórmulas combinatorias y Regla del producto:

El estudiante P, primero determina la forma de acomodar cuatro cifras (1, 2,4 y 6), en tres espacios disponibles, esto lo hace utilizando Principio fundamental del conteo. Enseguida describe, la colocación de los ochos, utilizando permutaciones, lo cual es incorrecto. Teniendo los arreglos anteriores aplica regla del producto:

SI DEBE HABER 2 OCHOS EXACTAMENTE HAY 3 ESPACIOS LIBRES PARA 4 CIFRAS Y HAY

$4^3 = 64$ POSIBILIDADES

AHORA BIEN, DADAS LA 3 CIFRAS HAY 4 ESPACIOS PARA PONER LOS 8

_ A _ B _ C _

ENTONCES

$\frac{4!}{(4-2)!} = 12$

12 CONBINACIONES DE 8 X 64 POSICIONES DE NUMEROS DE 3 CIFRAS

$12 \times 64 = 768$ NUMEROS DISTINTOS

- Uso de fórmulas combinatorias:

Los resultados de 8 estudiantes en este problema, coincidieron en cuanto a la aplicación directa de la fórmula de permutación. Los estudiantes: B y Q, determinaron las posibles permutaciones de tres cifras, de un total de cuatro (1, 2, 4 y 6), por lo que, no consideraron la colocación de los ochos. Los estudiantes restantes (C, D, E, F, G, y H), determinaron las permutaciones de los dos ochos, en cinco espacios distintos, es decir, permutación con repetición. Estos resultados son incorrectos, ya que falta considerar la combinación de las tres cifras restantes. Estudiante D:

$$
{}_{n}P_{n(n_1,n_2,n_r)} = \frac{5!}{2!,\ 1!,\ 1!\ 1!\ 1!} = 60
$$

Los estudiantes O e I, presentan resultados confusos de analizar.

Los resultados los mostramos en la tabla siguiente:

Tabla: 2.2 i)
Estrategias y Procesos de solución utilizadas por los estudiantes de ESFM: problema 9

Estrategia	***Utilizada en forma:***	
	Correcta	Incorrecta
• Principio fundamental del conteo		3
• Principio fundamental del conteo, Uso de fórmulas combinatorias, Regla del producto y Fijación de variables		1
• Uso de fórmulas combinatorias		8
Total	0	12

El 100% de los estudiantes contestaron incorrectamente al problema.

2.2.1 RESULTADOS GLOBALES: ESTUDIANTES DE ESFM

Los resultados que anteriormente presentamos, los representamos en tablas e histogramas, para una mejor descripción, de nuestra investigación. Las evaluaciones de estos cuestionarios, resultaron diferentes a la primera muestra de estudiantes (ESIQIE), ya que aquí se presentaron casos de respuestas en blanco.

Tabla: 2.2.1 a)
Porcentaje de soluciones: aplicación del cuestionario "ESFM" (n=17)

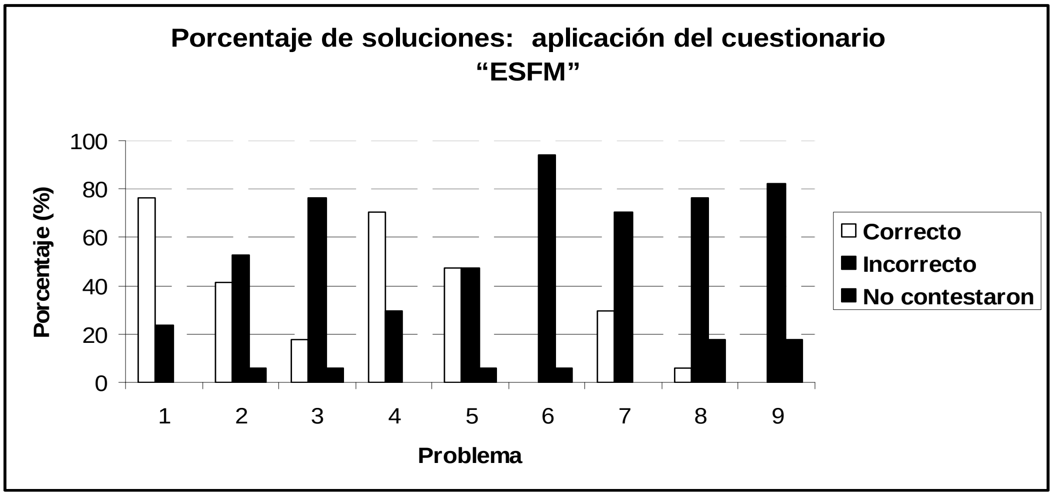
Problema	Correcto	Incorrecto	No contestaron
1	76 %	24 %	0 %
2	41 %	53 %	6 %
3	18 %	76 %	6 %
4	71 %	29 %	0 %
5	47 %	47 %	6 %
6	0 %	94 %	6 %
7	29 %	71 %	0 %
8	6 %	76 %	18 %
9	0 %	82 %	18 %

Los datos importantes que observamos en la tabla anterior, los describimos a continuación:

- De acuerdo a los datos, el problema 1: *"Seleccionar 3 estudiantes de 5*", fue el que más respuestas correctas obtuvo (76 %), por parte de los estudiantes, consideramos entonces, que resultó ser el más sencillo, para esta segunda muestra. Además todos los estudiantes intentaron dar una respuesta al problema. No tan alejado, del porcentaje anterior, quedó el problema 4: *"Colocar 3 coches en 5 plazas",* con un 71% de respuestas correctas. Cabe mencionar, que estos dos problemas, presentan diferentes modelos combinatorios: el problema 1, es de selección y el problema 4 de colocación. Algo en que coinciden estos problemas, es en el uso directo de fórmula: el problema 1, se resuelve por combinación y el número 4 por permutación, en los dos se determinan los arreglos, de tres objetos de un total de cinco. Lo anterior puede sustentar que los porcentajes, no estén tan separados en cuanto a respuestas correctas.
- El problema 2: *"Extraer 3 bolas numeradas de 4",* tiene mayor porcentaje de respuestas incorrectas (53 %), que correctas (41 %), cabe destacar, que el 6 % de los estudiantes, no intentan dar una respuesta al problema, consideramos que de acuerdo a los datos, los estudiantes hacen uso más frecuente de fórmulas.
- El problema 5: *"Colocar 3 cartas en 4 sobres",* resultó con igualdad de respuestas correctas e incorrectas, la diferencia de los resultados, consistió en el orden de los arreglos, considerados por los estudiantes. Este problema no fue resuelto por el 6 % de los alumnos, al igual que el problema 3: *"Seleccionar 4 fichas de 4",* solamente, que de los estudiantes que contestaron este problema, el 76 % dieron una respuesta incorrecta, debido al error de repetición de los arreglos.
- El problema 7: *"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2"*, a pesar de que todos los estudiantes, responden el 71 % de ellos lo hace en forma incorrecta, por lo que, consideramos que este problema fue uno de los de mayor dificultad para los alumnos. De igual forma el problema 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos"*, presentó un porcentaje alto de respuestas incorrectas (76 %), el 18 % de los estudiantes ni siquiera, intentan responderlo, aquí predominó el manejo de fórmulas, este problema consideramos, requería de un análisis más profundo, para poder dar la respuesta correcta.
- El problema 9: *"Formar números de 3 cifras",* ninguno de los estudiantes, respondió correctamente, al problema, además el 18 % de los estudiantes no da algún tipo de resultado, por lo que consideramos, que este problema fue uno de los más confusos para el alumno. Lo anterior consideramos puede ser por que los estudiantes, no analizan problemas de este tipo en sus cursos de Matemáticas Discretas.

El histograma correspondiente a la tabla de resultados lo podemos ver a continuación:

Figura: 2.2.1 a)
Histograma de porcentajes: aplicación del cuestionario "ESFM"

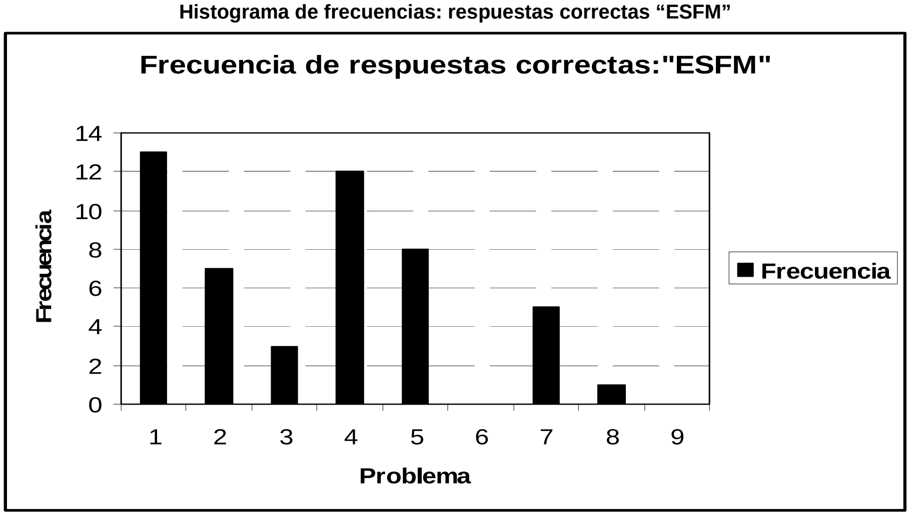


La tabla y el histograma que siguen representan la frecuencia de resultados correctos, para esta muestra de estudiantes analizada:

Tabla: 2.2.1 b)
Frecuencia de respuestas correctas en la aplicación del cuestionario: ESFM (muestra n=17)

Problema	*Frecuencia Absoluta*
1	13
2	7
3	3
4	12
5	8
6	0
7	5
8	1
9	0

Figura: 2.2.1 b)
Histograma de frecuencias: respuestas correctas "ESFM"



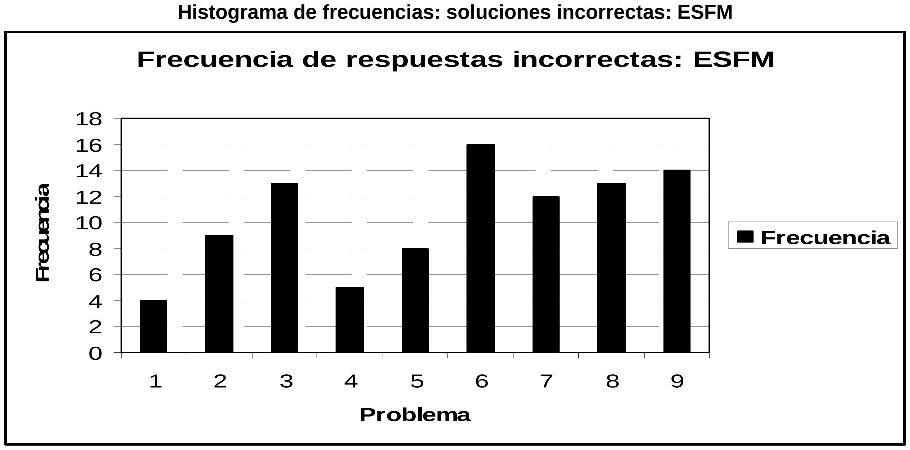
De acuerdo a los datos anteriores, consideramos, que el problema 1: *"Seleccionar 3 estudiantes de 5*, fue el de mayor respuestas correctas y los problemas 6 y 9, *"Colocar 4 niños en 2 recámaras", "Formar números de 3 cifras",* respectivamente, los de ninguna respuesta correcta.

Referente a respuestas incorrectas presentamos lo siguiente:

Tabla: 2.2.1 c)
Frecuencia de respuestas incorrectas en la aplicación del cuestionario: ESFM (muestra n=17)

Problema	*Frecuencia Absoluta*
1	4
2	9
3	13
4	5
5	8
6	16
7	12
8	13
9	14

Figura: 2.2.1 c)
Histograma de frecuencias: soluciones incorrectas: ESFM

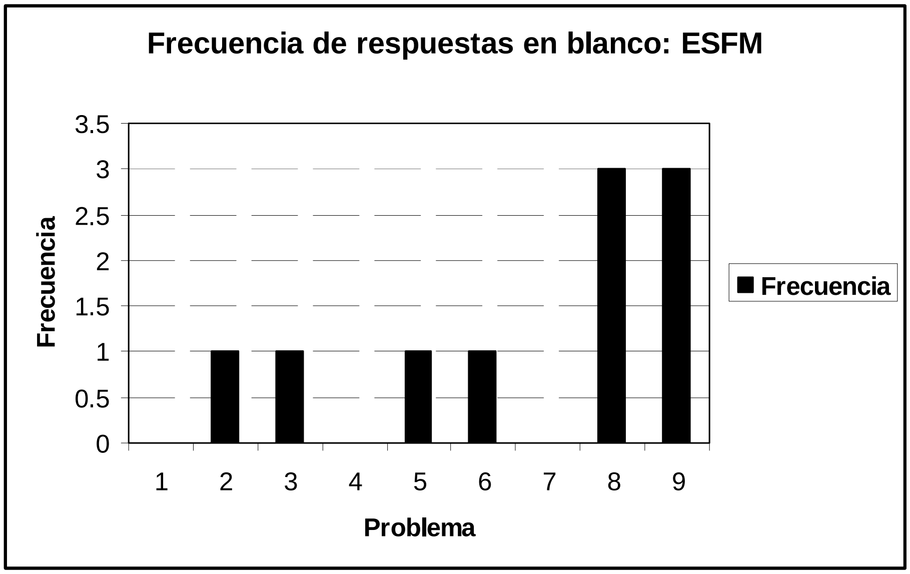


Consideramos importante mostrar la tabla e histograma, de la frecuencia de estudiantes, que dejaron en blanco algunas de las respuestas del cuestionario:

Tabla: 2.2.1 d)
Frecuencia de respuestas en blanco en la aplicación del cuestionario: ESFM (muestra n=17)

Problema	*Frecuencia Absoluta*
1	0
2	1
3	1
4	0
5	1
6	1
7	0
8	3
9	3

Figura: 2.2.1 d)
Histograma de frecuencias: respuestas en blanco "ESFM"



En términos porcentuales, presentamos las respuestas correctas de acuerdo al modelo combinatorio:

Tabla: 2.2..1 e)
Porcentaje de respuestas correctas según el modelo combinatorio: ESFM

Modelo Combinatorio	*Porcentaje*
Selección	45 %
Colocación	30 %
Partición	18 %

Donde de acuerdo a los datos anteriores, el modelo de selección (problemas: *"Seleccionar 3 estudiantes de 5", "Extraer 3 bolas de 4" y "Seleccionar 4 fichas de 4"*), de un 100% sólo fue contestado el 45 %, este porcentaje resultó ser el mas alto en cuanto a respuestas correctas. El modelo que consideramos, más complicado para los estudiantes, es el de partición, ya que sólo el 18 % de los problemas referentes a este modelo (problemas: *"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2" y "Repartir 4 coches a 3 hermanos"*), fue resuelto acertadamente, mientras que los problemas, referentes al modelo de colocación (problemas: *"Colocar 3 coches en 5 plazas", "Colocar 3 cartas en 4 sobres", "Colocar 4 niños en 2 recamaras", "Formar números de 3 cifras"*) , solamente un 29 % de ellos, fueron resueltos correctamente.

El porcentaje de respuestas incorrectas de acuerdo al modelo combinatorio es:

Tabla: 2.2.1 f)
Porcentaje de respuestas incorrectas según el modelo combinatorio: ESFM

Modelo Combinatorio	*Porcentaje*
Selección	51 %
Colocación	63 %
Partición	73 %

Por lo que los problemas de mayor dificultad, de esta muestra de estudiantes, fueron los de partición: problema 7: *"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2"* y problema 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos".* Estas consideraciones son de acuerdo a los porcentajes de la evaluación.

El porcentaje de respuestas que no son contestadas por los estudiantes, de acuerdo al modelo combinatorio son:

Tabla: 2.2.2.1 g)
Porcentaje de respuestas en blanco según el modelo combinatorio: ESFM

Modelo Combinatorio	*Porcentaje*
Selección	4 %
Colocación	7 %
Partición	9 %

Donde observamos que de acuerdo a los datos, los problemas de partición son los que presentan el mayor porcentaje de respuestas, que los estudiantes no contestan.

2.3 TIPOS DE ERRORES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS:

En los resultados analizados, nos encontramos con algunos tipos de errores, que los estudiantes cometen, al dar respuesta a los problemas aplicados. Estos tipos de errores los describimos en dos partes: la primer parte corresponde a la muestra de estudiantes de ESIQIE y la segunda correspondiente a estudiantes de ESFM.

2.3.1 TIPOS DE ERRORES: ESTUDIANTES DE ESIQIE

Los errores que observamos en cada uno de los problemas, los describimos a continuación, al final de la descripción mostramos una tabla de resumen: tipos de errores y frecuencia relativa.

- **Problema 1: “Seleccionar 3 alumnos de 5”**

En este problema observamos, errores de orden**.** El estudiante F, cree importante el orden en las ternas seleccionadas, considera seleccionar de cinco posibilidades, al primer voluntario, de cuatro posibles, para el segundo voluntario y de tres posibles, para el último voluntario, pero en lo anterior se tienen arreglos repetidos (en el contexto del problema). Esto lo consideramos como un error de repetición.

- **Problema 2: “Extraer 3 bolas de un total de 4”**

En este problema no encontramos errores por parte de los estudiantes.

- **Problema 3: “Seleccionar 4 fichas de 4”**

Los estudiantes B, D y F, confundieron los objetos, es decir, consideran que las fichas azules, son distintas, cuando en realidad no lo son. Esto conduce a un error de repetición, en donde se tienen arreglos que no se deben considerar.

- **Problema 4: “Colocar 3 coches en 5 plazas”**

En este problema, nos percatamos con errores de orden, el estudiante E confunde el utilizar combinaciones, cuando en realidad son permutaciones. Otro error observado, consiste en la distinción de los objetos, el estudiante C determina las posibles ternas seleccionadas de las cinco plazas (lo hace mediante un diagrama, utilizando números: 1, 2, 3, 4 y 5), después considera la forma de acomodar los coches (utiliza las letras A, B y C), pero estos objetos son iguales para el contexto del problema, por lo que, obtiene arreglos que no son posibles.
El estudiante F, sólo da una respuesta intuitiva errónea.

- **Problema 5: “Colocar 3 cartas iguales en 4 sobres diferentes”**

Los estudiantes: A, E y F, confunden el tipo de objetos, es decir, consideran que las cartas son iguales, entonces esto los conduce a cometer errores de repetición, ya que tienen arreglos, que para la naturaleza del problema son iguales.

- **Problema 6: “Colocar 4 niños en 2 recámaras diferentes”**

En este problema, el estudiante D, realiza una lista de los posibles arreglos, pero no la hace de forma completa, por lo que, comete un error de repetición. El estudiante E, sólo da una respuesta numérica, la cual es errónea.

- **Problema 7: “Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2”**

En este problema, sólo encontramos un error por parte del estudiante E, proporciona una respuesta intuitiva errónea, no justifica la misma.

- **Problema 8. “Repartir 4 coches a 3 hermanos”**

Los errores observados en este problema, consisten en errores de partición y respuesta intuitiva errónea. Los estudiantes: D, E y F, en las particiones que obtienen, no toman en cuenta algunas posibles, la unión de las mismas, no contempla el conjunto total. Los estudiantes restantes (A, B y C), sólo dan una respuesta numérica, pero no justifican el proceso que llevan acabo.

- **Problema 9: “Formar números de 5 cifras”**

El error observado para este problema, consiste en que los estudiantes: D, E y F, solamente dan una respuesta numérica, la cual es errónea, esto lo determinamos como una respuesta intuitiva errónea.

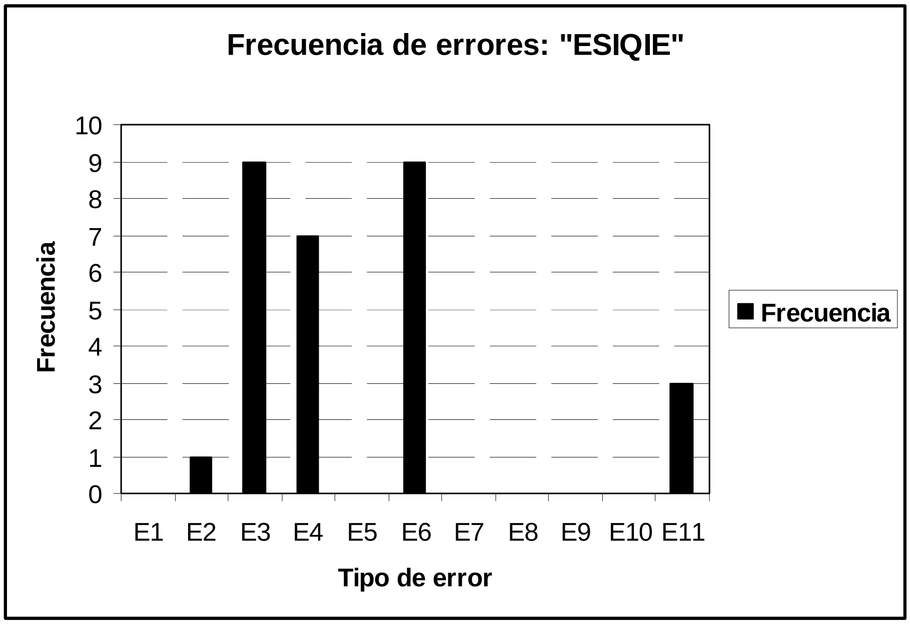
Los errores anteriores, los mostramos a continuación, en donde obtenemos el total de cada uno de los errores:

Tabla 2.3.1 a)
Frecuencia: Tipos de errores: ESIQIE

Tipo de error	***Frecuencia relativa***
E1: Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema	0
E2: Error de orden	1
E3: Error de repetición	9
E4: Confundir el tipo de objeto	7
E5: Enumeración no sistemática	0
E6: Respuesta intuitiva errónea	9
E7: No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente	0
E8: No recordar el significado de los valores en los parámetros en la fórmula combinatoria	0
E9: Interpretación errónea del diagrama de árbol	0
E10: Confusión en el tipo de celdas (error de los problemas de colocación y partición)	0
E11: Error en las particiones formadas (error de los problemas de colocación y partición)	3

Los datos anteriores, los representamos en un histograma de frecuencias, con el objetivo de analizar gráficamente los resultados:

Figura 2.3.1 a)
Histograma de frecuencias: Tipos de errores: ESIQIE



De acuerdo a los datos anteriores, consideramos que los errores que más cometen los estudiantes, son errores de repetición y respuestas intuitivas erróneas. Los errores de repetición creemos que la alta frecuencia se debe, a que los estudiantes no entienden la naturaleza del problema, es decir, hay poco entendimiento del enunciado que describe el problema, esto es de gran importancia ya que los estudiantes, no distinguen entre los arreglos formados, entonces los resultados son incorrectos.

Las respuestas intuitivas erróneas, de igual forma, son errores cometidos regularmente por los estudiantes, sólo intentan dar respuestas intuitivas, es decir, identifican alguna fórmula y la aplican sin entender lo que estaban realizando.

2.3.2 TIPOS DE ERRORES: ESTUDIANTES DE ESFM

Para la segunda muestra de estudiantes, de igual forma, describimos los errores presentados en cada uno de los problemas, y al final presentamos la tabla que resume los errores totales del cuestionario.

- **Problema 1: “Seleccionar 3 alumnos de 5”**

Los estudiantes: I, J, O y P, cometen errores de repetición, contabilizan ternas de estudiantes, que no se deben tomar en cuenta, debido a la naturaleza del problema. Estos errores son consecuencia de que los estudiantes, consideran la importancia del orden, es decir, observamos errores de orden.

- **Problema 2: “Extraer 3 bolas de un total de 4”**

Este problema los estudiantes: C, D, G, H y Q, utilizan permutaciones, es decir, no identifican los valores de los parámetros en esta fórmula, consideran arreglos de cuatro objetos, tomados de tres en tres, lo cual es un error. Por otra parte, los estudiantes: B e I, sólo dan una respuesta intuitiva errónea.

- **Problema 3: “Seleccionar 4 fichas de 4”**

Los estudiantes: B, E, F, K, L, M y Q, confundieron los objetos, estos estudiantes toman en cuenta que las fichas azules son distintas, cuando estas no lo son, al tener esta consideración utilizan la fórmula combinatoria correspondiente (permutaciones), cometiendo un error de repetición, ya que obtienen el doble de arreglos como resultado, por lo tanto también tenemos errores de orden. Los estudiantes: A e I, realizan lo mismo pero con combinaciones. Los estudiantes: J, N y O, utilizan el Principio fundamental del conteo, pero esto de igual forma conduce a errores de repetición. El estudiante C, no recuerda lo fórmula combinatoria correcta, realiza sustituciones incorrectas.

- **Problema 4: “Colocar 3 coches en 5 plazas”**

En los resultados que observamos en este problema, los estudiantes: A, B, J y Q, no identifican que el orden de la selección de las plazas, para colocar los coches, es importante, es decir cometen errores de orden, esto los lleva a no consideran posibles arreglos para el problema, entonces tenemos errores de repetición. El estudiante I, describe productos de combinaciones, pero no justifica la respuesta.

- **Problema 5: “Colocar 3 cartas iguales en 4 sobres diferentes”**

Los estudiantes: A, B, E, F, J, K, L y M, consideran que las cartas son iguales, es decir, confunden el tipo de objetos, entonces utilizan permutaciones y así obtienen consideran arreglos, que son iguales, para el contexto del problema, esto los consideramos como errores de repetición.

- **Problema 6: “Colocar 4 niños en 2 recámaras diferentes”**

Los estudiantes L y M, cometen errores en las particiones formadas, éstas no contemplan el conjunto total. Los estudiantes que utilizan fórmulas combinatorias, con alguna estrategia de solución (A, B, C, D, E, F, G, H, N, P y Q), cometen errores de repetición, es decir al tener estos arreglos no consideran los de las habitaciones vacías. Los estudiantes J y O, solamente dan una respuesta intuitiva, no justifican el resultado que describen.

- **Problema 7: “Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2”**

Los estudiantes: A, C, D, E, F, G, H, J y Q, consideran que el orden de los grupos es importante, por lo que esto los lleva a utilizar permutaciones, entonces, cometen errores de repetición y de orden. Los estudiantes: M y N, consideran productos incorrectos, por lo tanto, obtienen mayor cantidad de arreglos, cometiendo de igual forma errores de repetición, así como errores en las particiones formadas. Los estudiantes I y Q, dan una respuesta errónea, las cuales no son justificadas.

- **Problema 8. “Repartir 4 coches a 3 hermanos”**

En este problema el error que más predominó fue, que los estudiantes (A, B, C, D, E, F, G, H, N, O y Q), no recordaron el valor de los parámetros de la fórmula (permutaciones y combinaciones), es decir, determinan los posibles arreglos de cuatro objetos, tomados de tres en tres, lo cual es incorrecto. El estudiante M, las posibles particiones que describen son incorrectas, la unión de ellas no contempla el conjunto total, por lo tanto, tenemos un error de partición. Finalmente el estudiante I, da una respuesta intuitiva errónea, no justificando el resultado obtenido.

- **Problema 9: “Formar números de 5 cifras”**

En este último problema, las respuestas de los estudiantes J, K y L, son incompletas, por lo que los arreglos no son los correctos, así cometen errores de repetición, Los estudiantes: B, C, D, E, F, G, B y Q, determinan permutaciones incorrectas, cometiendo errores de repetición. En los casos anteriores, consideramos que los estudiantes al cometer este tipo de error, son debido a que no recuerdan los valores de los parámetros en las fórmulas correspondientes. Los estudiantes O e I, sólo dan una respuesta numérica, las cuales son incorrectas.

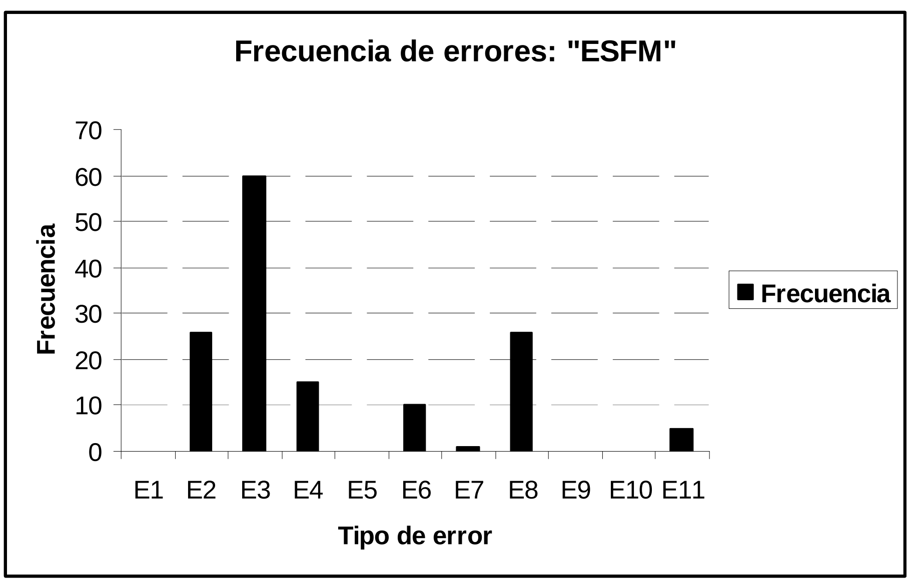
La descripción de los tipos de errores, en cada uno de los problemas, los mostramos en la siguiente tabla de resumen:

Tabla 2.3.2 a)
Frecuencia: Tipos de errores: ESFM

Tipo de error	***Frecuencia relativa***
E1: Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema	0
E2: Error de orden	26
E3: Error de repetición	60
E4: Confundir el tipo de objeto	15
E5: Enumeración no sistemática	0
E6: Respuesta intuitiva errónea	10
E7: No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente	1
E8: No recordar el significado de los valores en los parámetros en la fórmula combinatoria	26
E9: Interpretación errónea del diagrama de árbol	0
E10: Confusión en el tipo de celdas (error de los problemas de colocación y partición)	0
E11: Error en las particiones formadas (error de los problemas de colocación y partición)	5

Enseguida mostramos el histograma correspondiente a la tabla anterior:

Figura 2.3.2 a)
Histograma de frecuencias: Tipos de errores: ESFM



De acuerdo a los datos anteriores, el error que los estudiantes cometieron con mayor frecuencia (60 errores de este tipo en todos los resultados analizados), corresponde a errores de repetición, consideramos que a los estudiantes no les queda claro el contexto del problema, por lo que hay confusión en la determinación de los arreglos. No recordar el significado de los valores de los parámetros en la formula combinatoria y errores de orden, presentan la misma frecuencia del total del cuestionario aplicado. Estos errores consideramos, que los pudieron haber cometido, debido a que los estudiantes regularmente, no toman tiempo para profundizar el objetivo del problema. En esta muestra algunos estudiantes confunden el tipo de objetos, con los cuales tienen que determinar los arreglos, esto se presentó con baja frecuencia (15 errores de este tipo en todos los resultados del cuestionario). Sólo un estudiante no recordó la fórmula correcta de la operación combinatoria, realizando sustituciones incorrectas. Este tipo de error presenta la menor frecuencia.

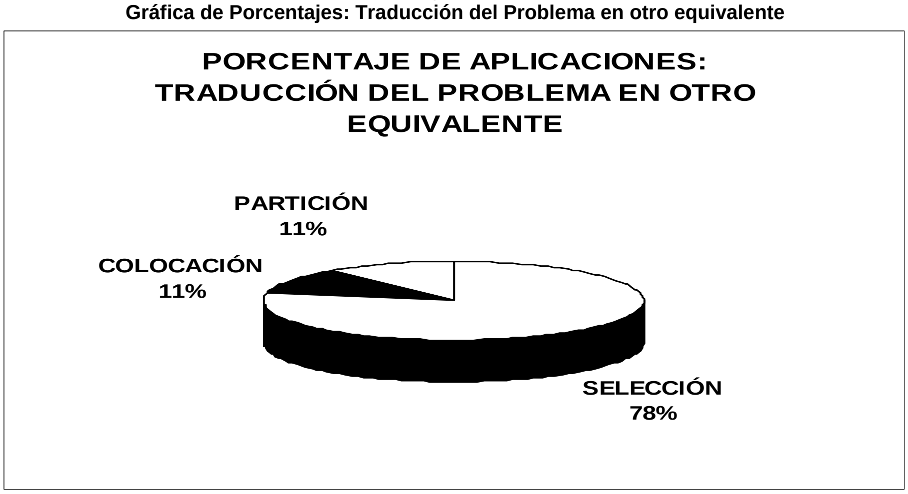
CONCLUSIONES DE ANÁLISIS: ESIQIE

En el desarrollo de esta tesis hemos presentado, una investigación sobre las estrategias generales y procesos de solución que emplean espontáneamente los estudiantes con preparación matemática, para resolver problemas referentes a razonamiento combinatorio, así como las dificultades que estos tienen al dar algún tipo de solución. En nuestro trabajo obtuvimos resultados que aportan consideraciones importantes a los objetivos que planteamos en la parte introductoria. A continuación presentamos las conclusiones de cada estrategia y proceso general de solución, así como de los tipos de errores analizados en las dos muestras de estudiantes (ESIQIE y ESFM). Lo anterior es presentado con gráficas de porcentajes.

- **TRADUCCIÓN DEL PROBLEMA EN OTRO EQUIVALENTE:**

En esta estrategia general de solución observamos 9 aplicaciones (6 correctas y 3 incorrectas), 7 estudiantes transforman el modelo de selección a modelo de colocación y 2 aplicaciones son transformaciones de modelo de colocación y partición a modelo de selección. El porcentaje de estudiantes que utiliza este tipo de estrategia es mínimo (9.6% de las aplicaciones totales), de los cuales el 66.7% lo hace en forma correcta. En los problemas 4: *"Colocar 3 coches en 5 plazas"*, 6:*"Colocar 4 niños en 2 recámaras diferentes"*, 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos"* y 9: *"Formar números de 5 cifras"* (3 de colocación y 1 de partición), los estudiantes no hacen uso de la traducción del problema en otro equivalente, creemos que esto se debe a que el alumno esta acostumbrado a problemas comunes y no intentan hacer algún tipo de relación en los diferentes problemas. Los problemas de selección presentan el mayor porcentaje de aplicaciones de esta estrategia (78%), la mayoría de estas son correctas (57.2% de las aplicaciones), mientras que en los modelos de colocación y partición tenemos el mismo número de porcentajes de aplicación (11%), los estudiantes que utilizan esta estrategia en estos dos modelos lo hacen en forma correcta. Hay que destacar que el mayor número de aplicaciones corresponden al problema 2: *"Extraer 3 bolas de un total de 4"*, donde los estudiantes transforman el modelo de selección a uno de colocación (colocan las bolas numeras en tres distintas casillas), que para ellos es más común. En consecuencia creemos que la estrategia de traducir el problema en otro equivalente debe ser destacada en la enseñanza de la combinatoria.

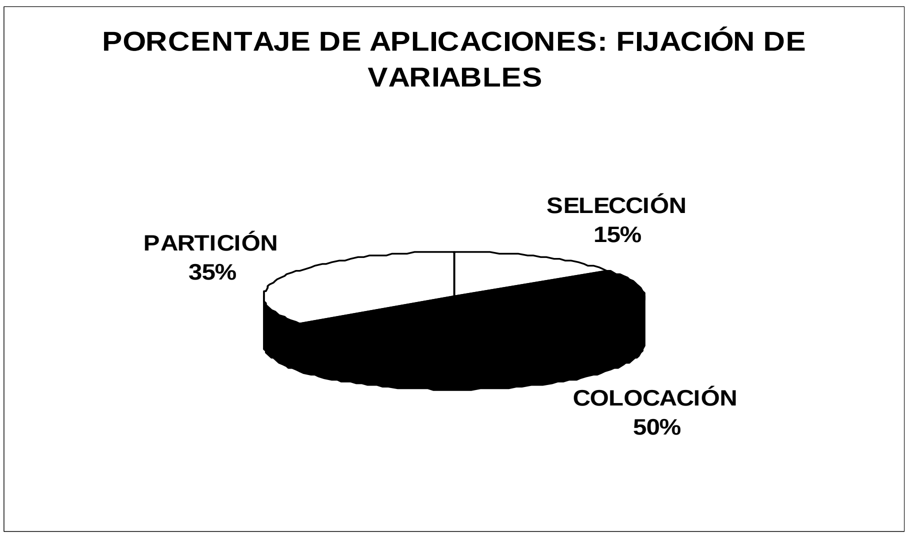
Figura A:
Gráfica de Porcentajes: Traducción del Problema en otro equivalente



- **FIJACIÓN DE VARIABLES:**

La Fijación de variables presentó 20 aplicaciones (13 correctas y 7 incorrectas). Esta estrategia de solución fue la más utilizada por los estudiantes (21.3% de las aplicaciones totales), presentando en la mayoría de los casos resultados satisfactorios (65% aplicaciones correctas). Observamos que el 50% de las aplicaciones se tienen en los problemas de colocación la gran mayoría de éstas correctas (70%), mientras que en los modelos de selección tenemos sólo un 15% de las aplicaciones, utilizadas todas en forma correcta. Especialmente en los problemas de partición los estudiantes aplican en la mayoría de los casos (57.2%) la fijación de variables en forma incorrecta, esto consideramos que se tiene debido a que los estudiantes fijan una o más variables para reducir el problema pero generalizan en forma incorrecta, tomando en cuenta casos ya fijados. Por lo que dado lo anterior, pensamos en la importancia de la enseñanza de este tipo de estrategia en el tema de combinatoria.

Figura B:
Gráfica de Porcentajes: Fijación de variables



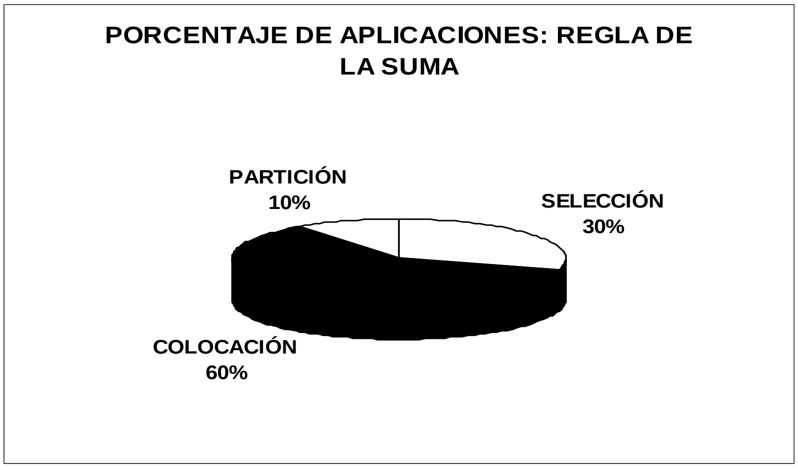
- **DESCOMPOSICIÓN DEL PROBLEMA EN SUBPROBLEMAS:**

Esta estrategia resultó ser una de las de menor porcentaje de aplicación (1.1% del total), sin embargo no presentó aplicaciones incorrectas, para los estudiantes el descomponer el problema es de gran dificultad, solamente en el problema 7: *"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2"* se presentó una aplicación además en forma incorrecta. Por lo tanto, consideramos la relevancia de esta estrategia en la enseñanza de la combinatoria por parte de los Profesores.

- **REGLA DE LA SUMA:**

La regla de la suma fue aplicada en 10 ocasiones (9 correctas y 1 incorrecta). Esta estrategia aritmética representa un 10.6% del total de las aplicaciones de los estudiantes donde destacamos que el 90% de ellas son correctas, consideramos que el uso de la regla de la suma para los estudiantes no implica complejidad, es la segunda aplicación que tiene el menor porcentaje de resultados incorrectos,. Referente a los modelos combinatorios, el 60% de las aplicaciones se da en los problemas de colocación la mayoría de ellos arrojan resultados satisfactorios (85.3%). Cabe destacar el bajo porcentaje (10%) de esta estrategia en los problemas 7*:"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2"* y 8*:"Repartir 4 coches a 3 hermanos"*, este resultado es de interés ya que consideramos que debido a la complejidad de estos dos problemas los estudiantes no aplicaron con facilidad esta estrategia, creemos que si los problemas de partición hubieran sido mas sencillos los alumnos hubiesen aplicado la estrategia en forma satisfactoria.

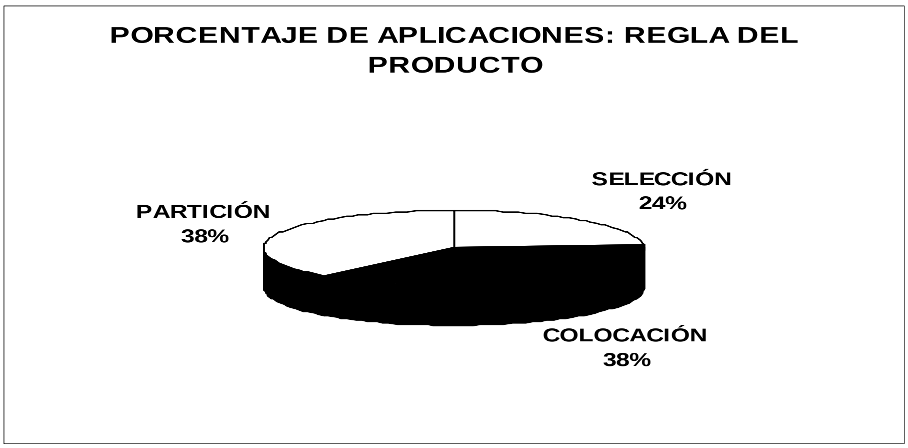
Figura C:
Gráfica de Porcentajes: Regla de la suma



- **REGLA DEL PRODUCTO:**

La regla del producto es una de las estrategias menos utilizada (3 aplicaciones correctas y 5 incorrectas). El 8.5% de las aplicaciones totales corresponden a la regla del producto, destacando que es la estrategia de resolución con mayor porcentaje de aplicaciones incorrectas (62.5%). En los modelos de colocación y partición tenemos el mismo porcentaje de aplicaciones (37.5%), pero en los problemas de partición todas las aplicaciones fueron incorrectas. En el problema 9*:"Formar números de 5 cifras"* (problema compuesto), existe sólo una aplicación y es correcta, este resultado es interesante ya que la regla del producto se tendría que aplicar mas en los problemas compuestos, por lo que pensamos en la importancia de esta estrategia en el análisis combinatorio.

Figura D:
Gráfica de Porcentajes: Regla del producto



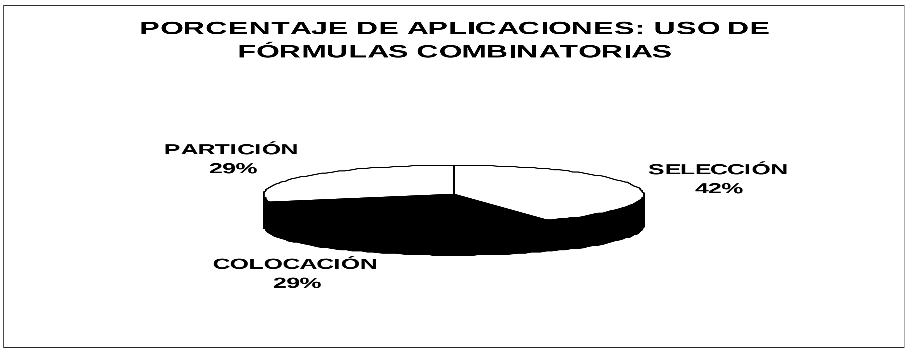
- **REGLA DEL COCIENTE:**

La regla del cociente es una de las estrategias aritméticas que no es utilizada por los estudiantes por lo que no contribuyó a la resolución de problemas combinatorios. Por lo que consideramos que los Profesores deben poner énfasis en la enseñanza de la regla del cociente en cada modelo combinatorio (selección, colocación y partición).

- **USO DE FÓRMULAS COMBINATORIAS:**

Este proceso de solución es el segundo que utilizan los estudiantes (14 aplicaciones correctas y 3 incorrectas), presentó el mayor porcentaje de aplicaciones (18.1%), la mayoría de estas son correctas (82.4%). En los problemas de selección los estudiantes utilizan la sustitución directa de fórmulas, la mayoría de ellos lo hace en forma correcta (85.7%). En general los estudiantes en los resultados incorrectos no toman en cuenta el orden de los arreglos y confunden combinaciones con permutaciones. Consideramos que el uso de este proceso de solución se debe a que los Profesores enseñan la definición de las fórmulas combinatorias con este tipo de modelo, por lo que consideramos la importancia de las estrategias generales y aritméticas, para que los estudiantes analicen desde otro perspectiva los problemas combinatorios y no se limiten a la simple aplicación directa de la formula.

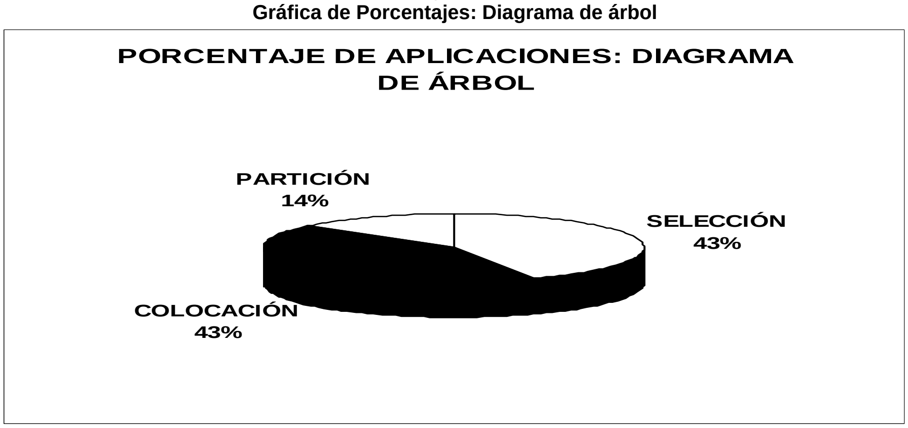
Figura E:
Gráfica de Porcentajes: Uso de fórmulas combinatorias



- **DIAGRAMA DE ÁRBOL:**

El 7.4% de las aplicaciones corresponden al empleo del diagrama de árbol (6 correctas y 1 incorrecta). El 85.7% de las aplicaciones son correctas. En los modelos de selección y partición las aplicaciones son correctas, creemos que dada la estructura de este tipo de modelo los estudiantes no tienen dificultad en ir construyendo las ramificaciones del diagrama de árbol, caso contrario sucede el los modelos de colocación donde el 33.3% de las aplicaciones son incorrectas. El empleo del diagrama de árbol en los problemas que constituyen varias configuraciones creemos resulta inadecuado para el estudiante, es por ello la relevancia que creemos importante hacer énfasis en la explicación de cada una de las estrategias de resolución, tanto generales como aritméticas, en la descripción del tema de combinatoria.

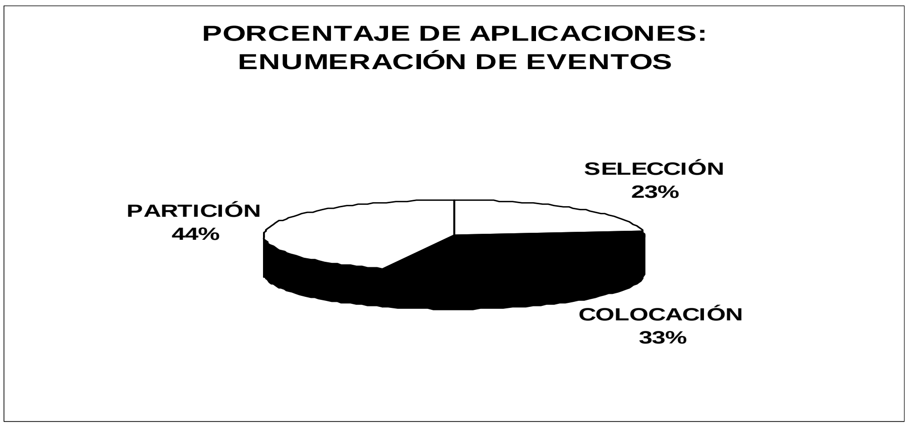
Figura F:
Gráfica de Porcentajes: Diagrama de árbol



- **ENUMERACIÓN DE EVENTOS:**

En este proceso de solución se presentaron 7 aplicaciones correctas y 2 incorrectas. El porcentaje de aplicaciones de este proceso es relativamente bajo (9.6% del total), pero cabe destacar que la mayoría de los resultados son correctos (77.8%). Consideramos que para los estudiantes el uso de este proceso resulta sencillo en problemas que determinan como resultados pocos arreglos. En los problemas de partición se utiliza con mayor frecuencia la enumeración de los eventos (44.4% de las aplicaciones), mientras que en el modelo de selección todas las aplicaciones de este proceso son correctas. Este proceso de resolución al igual que el diagrama de árbol, creemos que resulta inadecuado en problemas cuyo resultados constituyen gran cantidad de arreglos.

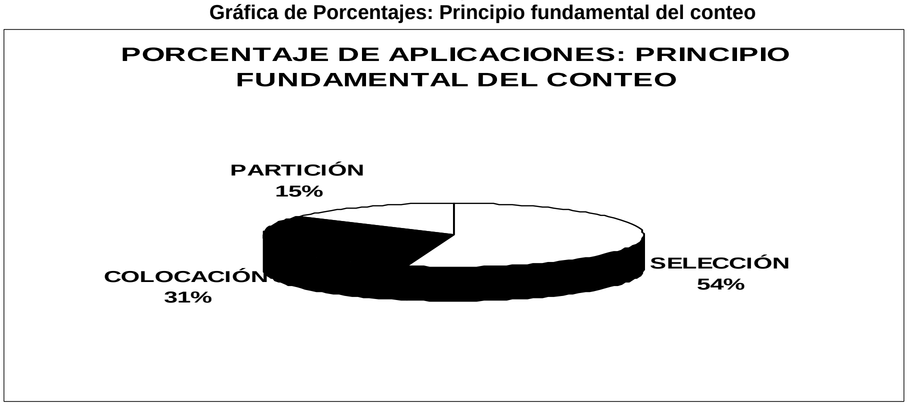
Figura G:
Gráfica de Porcentajes: Enumeración de eventos



- **PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO:**

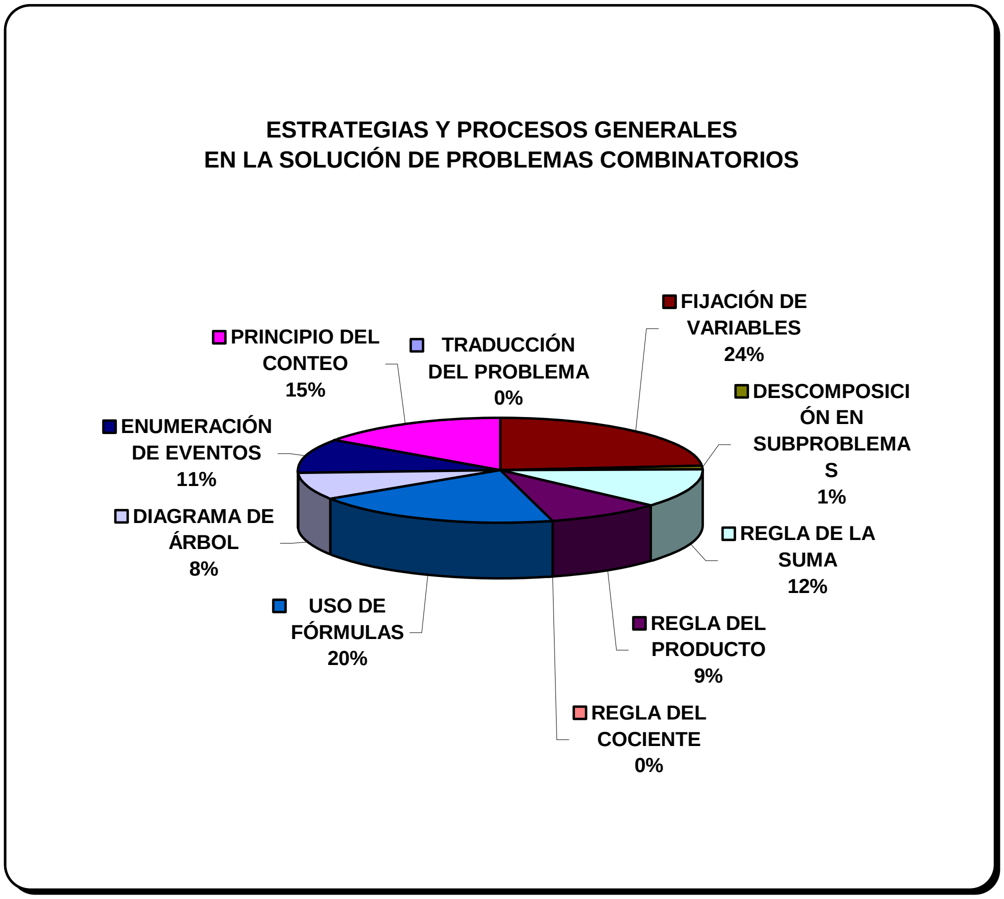
Los estudiantes utilizan el Principio fundamental del conteo en un 13.8% es la tercera alternativa de resolución (5 resultados correctos de 13), sin embargo el 61.5% de las aplicaciones son incorrectas. En los modelos de colocación y partición se presenta la mayor frecuencia de las aplicaciones incorrectas, mas aun, en los problemas 7:*"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2"* y 8:*"Repartir 4 coches a 3 hermanos"* todos los resultados son incorrectos, en el modelo de selección es en donde los estudiantes aplican con mayor frecuencia el principio (53.8% del total de las aplicaciones), siendo la mayoría de estas correctas.

Figura H:
Gráfica de Porcentajes: Principio fundamental del conteo



La figura siguiente resume el porcentaje total de aplicaciones de las estrategias generales de solución empleadas en los problemas combinatorios: *Traducción del problema en otro equivalente, Fijación de variables y Descomposición en subproblemas,* estrategias aritméticas: *Regla de la suma, Regla del producto y Regla del cociente* y los procesos generales de solución: *Uso de fórmulas combinatorias, Empleo del diagrama de árbol y Enumeración de eventos.*

Figura I:
Gráfica de Porcentajes: Estrategias y Procesos generales en la solución De problemas combinatorios



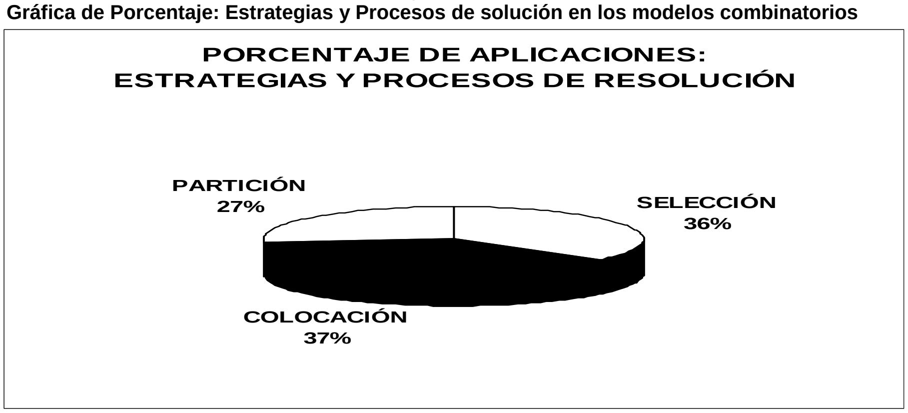
- **MODELOS COMBINATORIOS:**

- ✓ El 36% de las aplicaciones de las estrategias y procesos de solución de se dan en los modelos de selección, en donde la traducción del problema a otro equivalente, fijación de variables y el uso de fórmulas combinatorias representan el mayor porcentaje de las aplicaciones, más aún, con el mismo porcentaje (20.6%). Cabe destacar que para los estudiantes la sustitución directa de la fórmula resulta sencilla en el modelo de selección ya que con este tipo de problemas los Profesores enseñan la combinatoria. La fijación de variables, regla de la suma y el diagrama de árbol presentan el mismo porcentaje de aplicación (8.8%), cabe mencionar que en los problemas de selección no se tiene ninguna aplicación de la regla del cociente y la descomposición del problema en subproblemas, creemos que estas formas de resolución en los problemas de selección resultan inadecuas para los estudiantes.

- ✓ El 37% del total de las aplicaciones se presentan en los problemas de colocación, la fijación de variables es la estrategia más utilizada (28.6%), la regla del producto, diagrama de árbol y la enumeración de eventos tienen el mismo porcentaje de aplicación (8.6%). La segunda estrategia que los estudiantes utilizan para la resolución de los problemas en los modelos de colocación es la regla de la suma con un 17.1% de las aplicaciones. En tercer lugar los estudiantes hacen uso directo de las fórmulas, en los problemas de colocación (especialmente en el problema 9: *"Formar números de 5 cifras"*) no resulta para los estudiantes sencillo identificar los parámetros de la formula, como en los modelos de selección.

- ✓ El 27% de las aplicaciones se dan específicamente en los problemas de partición, la fijación de variables es la estrategia mas utilizada (28%), mientras que la traducción del problema en otro equivalente, la descomposición del problema en subproblemas, la regla de asuma y el diagrama de árbol representan poco porcentaje de aplicación (4%). El uso de fórmulas combinatoria s es el segundo proceso de resolución que aplican los estudiantes (20%), en general pocos estudiantes en estos problemas especialmente en el 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos"*, utilizan el diagrama de árbol ya que consideramos que para ellos resulta inadecuado debido a la configuración de los arreglos. La enumeración de los eventos se presentó con mayor frecuencia (16%) en el problema 7: *"Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2"*, consideramos que a los estudiantes les fue sencillo enlistar los arreglos posibles. Cabe mencionar que la regla del cociente no es aplicada en general en ningún modelo combinatorio.

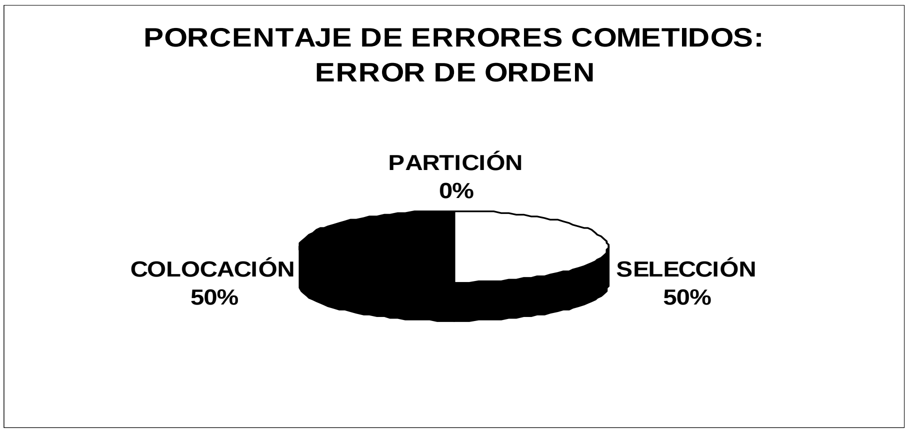
Figura J:
Gráfica de Porcentaje: Estrategias y Procesos de solución en los modelos combinatorios



- **ERROR DE ORDEN:**

Este es el error que se presentó con menor frecuencia (6.7% del total de los errores), específicamente encontramos 1 error en el problema 1:*"Seleccionar 3 estudiantes de 5"* y 1 error en el problema 4:*"Colocar 3 coches en 5 plazas"*, cabe destacar que estos dos problemas (el primero de selección y el segundo de colocación) son parecidos en la identificación de los parámetros, solo que el primero corresponde a combinaciones y el segundo a permutaciones, en los problemas de partición no encontramos este tipo de error, tenemos que el 50% de los errores de orden se dan en el modelo de selección y el 50% restante en los problemas de colocación.. De lo anterior consideramos en general los estudiantes no confunden combinaciones con permutaciones, la mayoría de ellos identifica la importancia del orden.

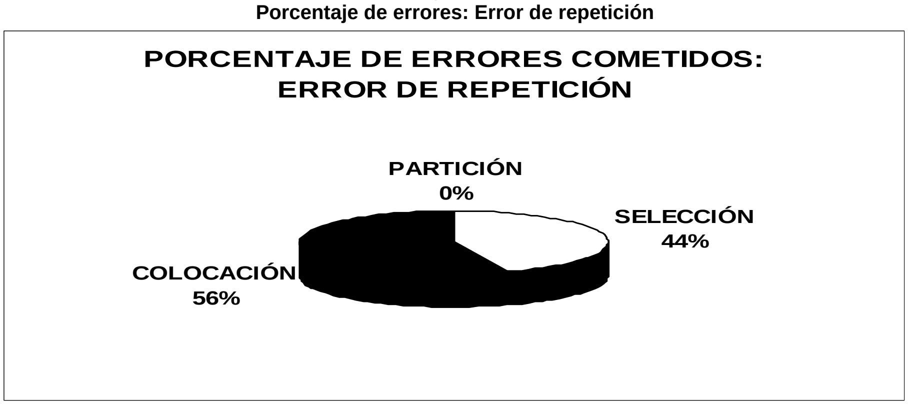
Figura K:
Porcentaje de errores: Error de Orden



- **ERROR DE REPETICIÓN:**

Este error es el que más se presenta en los modelos combinatorios (30% del total), en los problemas de partición no encontramos este tipo de error, el 55.6% de los errores corresponde a los modelos de colocación, consideramos que lo estudiantes no logran identificar la naturaleza del problema y toman en cuenta arreglos que son iguales. En los problemas de selección se presenta el menor porcentaje de errores (44.6%), por lo que consideramos que para los estudiantes son mas sencillos los problemas de selección que los de colocación.

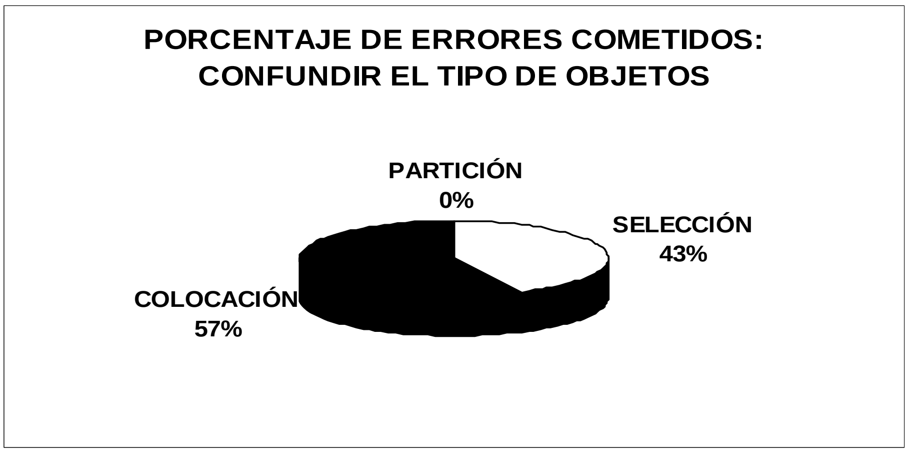
Figura L:
Porcentaje de errores: Error de repetición



- **CONFUNDIR EL TIPO DE OBJETOS:**

Es el segundo error más cometido por los estudiantes (23.3%), en donde observamos que en el modeló de colocación (especialmente en los problemas 4:*"Colocar 3 coches en 5 plazas"* y 5: *"Colocar 3 cartas iguales en 4 sobres diferentes"*), se comete el mayor porcentaje (57.2%), mientras que en el problema 3: *"Seleccionar 4 fichas de 4"* se presentó el 42.8% de los errores restantes. Cabe destacar que en los problemas 3 y 5 se presentaron la mayor cantidad de errores, observemos que en el problema 5 los estudiantes a pesar de la aclaración de que las cartas son iguales cometen este tipo de error.

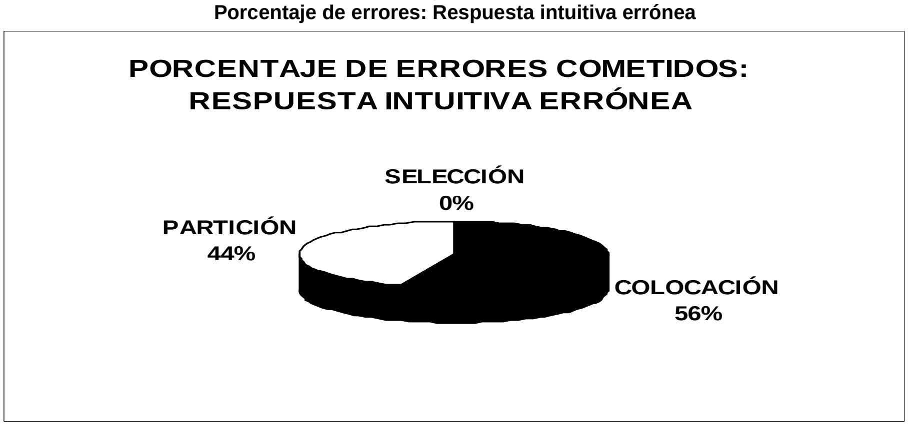
Figura M:
Porcentaje de errores: Confundir el tipo de objetos



- **RESPUESTA INTUITIVA ERRÓNEA:**

Este tipo de error es uno de los más cometidos por los estudiantes (30%), el mayor porcentaje de respuestas erróneas se presentan en los problemas de colocación (55.6%), mientras que en el modelo de partición tenemos el 44.6% restante, la frecuencia nula de respuestas erróneas en los problemas de selección consideramos que es debido a que para los estudiantes son problemas más comunes. En los problemas 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos"* y 9: *"Formar números de 5 cifras"* se presentan la mayor cantidad de los errores, consideramos esto debido a la dificultad de los mismos.

Figura N:
Porcentaje de errores: Respuesta intuitiva errónea

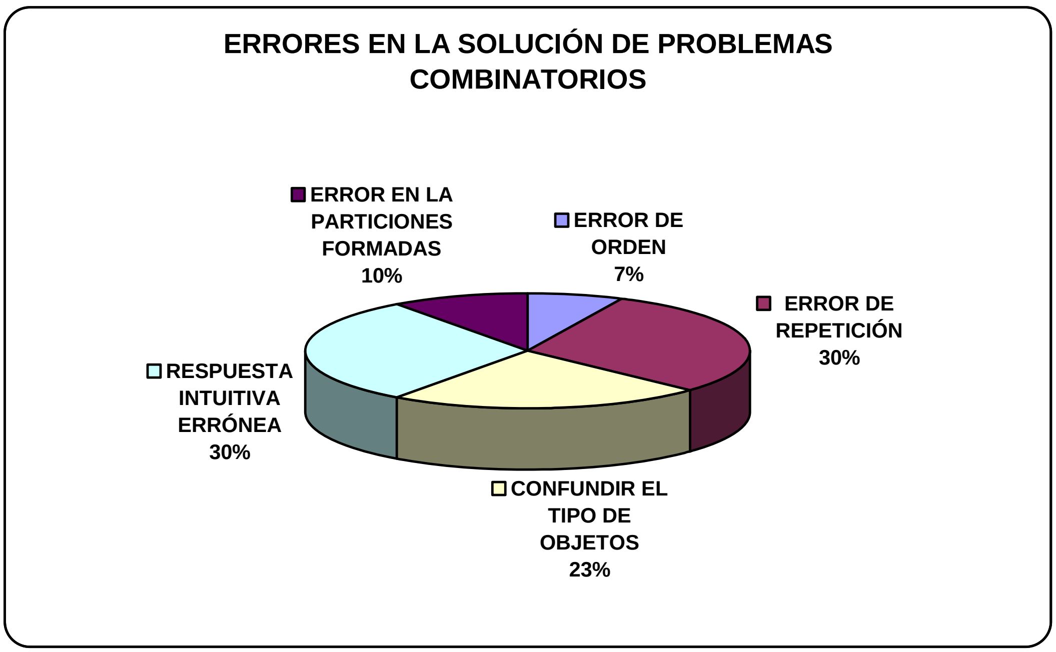


- **ERROR EN LAS PARTICIONES FORMADAS:**

Este error solamente se cometió en 3 ocasiones en el problema 8: *"Repartir 4 coches a 3 hermanos"*, correspondiéndole uno de los menores porcentajes de errores cometidos (10%), consideramos el porcentaje aceptable ya que este problema es uno de los de mayor dificultad.

La figura de abajo indica los porcentajes totales de los errores observados en las respuestas de los estudiantes de ESIQIE:

Figura O:
Gráfica de porcentajes: Errores en la solución de problemas combinatorios



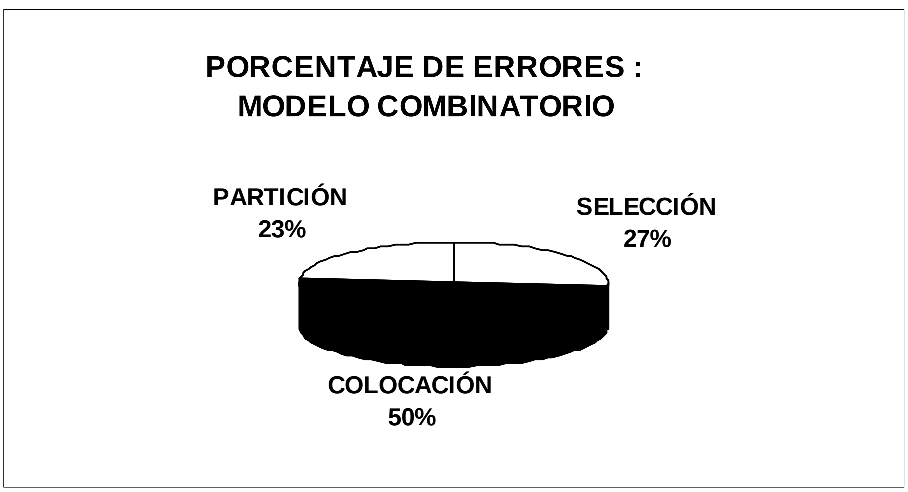
- **MODELOS COMBINATORIOS:**

  - El 27% de los errores cometidos se presentan en los problemas de selección, donde el 50% de ellos corresponde a errores de repetición. Los errores de orden son los menos cometidos por los estudiantes (12.5%). El modelo de selección a pesar de que es más común para los estudiantes, consideramos que es en donde se deberían de cometer la menor frecuencia de errores, pero no es así.

  - El 50% de los errores de este tipo se dan en problemas de colocación, errores de repetición y respuestas intuitivas erróneas presentan el mismo porcentaje de frecuencia (33.3%), el segundo error que mas cometen lo estudiantes en los problemas de colocación es la confusión de los objetos, por otro lado son pocos los estudiantes que cometen errores de orden (6.7%).

  - Especialmente en los problemas referentes al modelo de partición se presenta el menor porcentaje (23%) de errores cometidos, específicamente los estudiantes dan respuestas intuitivas erróneas en la mayoría de estos problemas (57%), creemos que los alumnos en general no entienden el contexto del problema, dado que los Profesores no enseñan combinatoria con este tipo de problemas.

Figura P:
Porcentaje de errores: Modelo combinatorio



CONCLUSIONES DE ANÁLISIS: ESFM

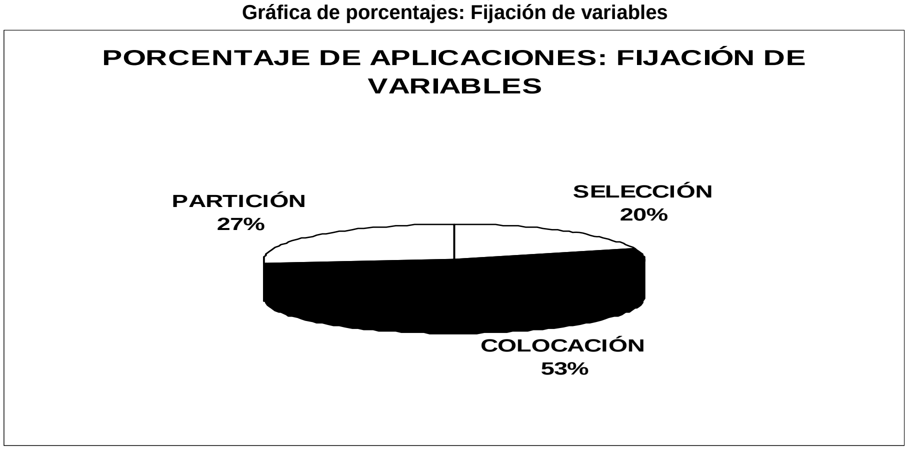
- **TRADUCCIÓN DEL PROBLEMA EN OTRO EQUIVALENTE:**

En su totalidad los estudiantes no intentan traducir el problema a otro que pudiera ser común para ellos. Pensamos que apara el estudiante le es claro el contexto del problema o bien prefiere emplear otro tipo de estrategia de resolución, por lo que, la enseñanza de esta estrategia serviría como una alternativa importante de resolución para el estudiante en problemas combinatorios.

- **FIJACIÓN DE VARIABLES:**

Para los estudiantes la fijación de variables es una de las tres estrategias de resolución más empleada (9.2% del total de las aplicaciones: 4 correctas y 11 incorrectas), destacando que la mayoría de los resultados son incorrectos (73.3%). En los problemas de colocación que es en donde consideramos el uso pertinente de esta estrategia, efectivamente tenemos el mayor porcentaje, sin embargo la gran mayoría son resultados insatisfactorios (87.5%). En los problemas de selección se presentó el menor porcentaje de estudiantes que utilizan la fijación de variables, en cambio aquí observamos que el 66.7% fueron correctos. Específicamente en le problema 5: *"Colocar 3 cartas iguales en 4 sobres diferentes"* se tienen la mayoría de las aplicaciones todas estas incorrectas, creemos que los estudiantes fijan correctamente las cartas, pero esto funcionaría si se trataran de cartas distintas.

Figura Q:
Gráfica de porcentajes: Fijación de variables



- **DESCOMPOSICIÓN DEL PROBLEMA EN SUBPROBLEMAS:**

Corresponde a la segunda estrategia que no presenta aplicaciones, los estudiantes al intentar dar solución a los diferentes modelos combinatorios prefieren utilizar otro tipo de estrategia o proceso, creemos que es por que los estudiantes no tienen clara la descripción de esta resolución, en consecuencia la descomposición del problema en subproblemas representará una alternativa para el estudiante si se les enseña en forma pertinente en cada modelo combinatorio.

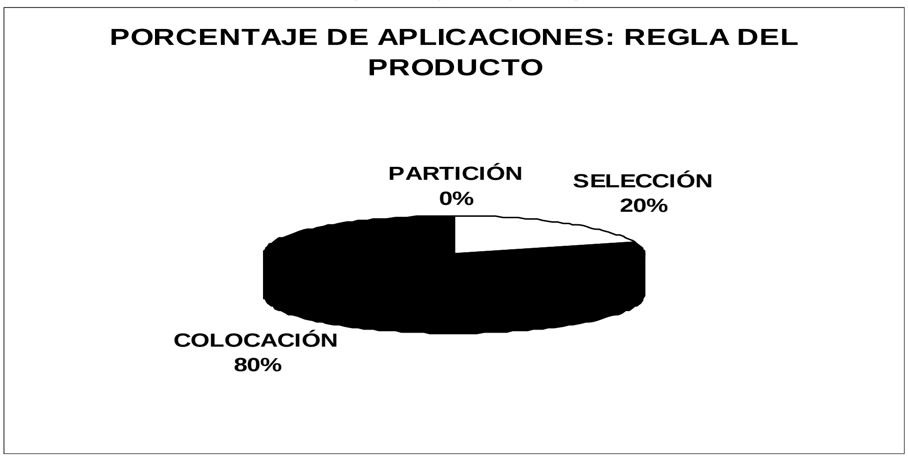
- **REGLA DE LA SUMA:**

De las estrategias utilizadas por los estudiantes le corresponde el menor porcentaje de aplicación (1.2%) específicamente son 2 resultados incorrectos que se dan en el problema 6: *“Colocar 4 niños en 2 recámaras”*, por lo que consideramos la importancia de la enseñanza de la regla de la suma en los tres modelos combinatorios.

- **REGLA DEL PRODUCTO:**

El porcentaje de estudiantes que aplica esta estrategia de resolución es relativamente poco (3.1% del total), todos estos resultados son incorrectos (5 aplicaciones). Hay que destacar que los alumnos intentan usar la regla del producto pero no la tienen bien definida y hacen uso incorrecto de la misma, en consecuencia la explicación de la estrategia en cada un de los modelo combinatorios sería relevante en la resolución de los problemas de combinatoria.

Figura R:
Gráfica de porcentajes: Regla del producto



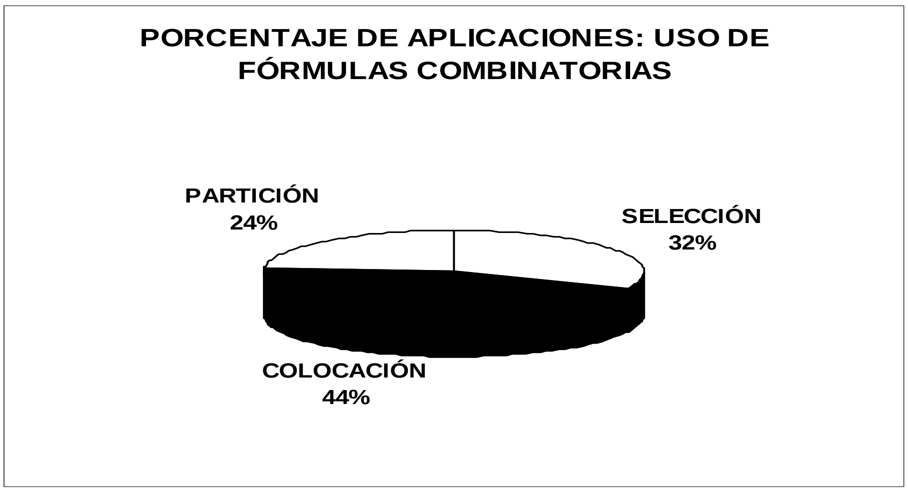
- **REGLA DEL COCIENTE:**

Representa 1 de las 4 estrategias que el alumno no manipula en la resolución de los problemas o bien no es sencillo para ellos utilizarla (no hay una enseñanza de la regla) o prefieren otro tipo de estrategia que es más común. Sin embargo pensamos que la enseñanza de la regla del cociente sería útil para que el alumno tenga formas de dar respuesta a problemas del análisis combinatorio.

- **USO DE FÓRMULAS COMBINATORIAS:**

El 68% de todas las aplicaciones (40 correctas y 70 incorrectas) corresponde al uso directo de las fórmulas combinatorias (permutación o combinación), consideramos que estos resultados se deben a la enseñanza tradicional de los Profesores, más aún, creemos que los estudiantes no tienen bien definidas las operaciones combinatorias, ya que esto se refleja en los resultados observados, los cuales la mayoría de ellos son incorrectos (63.6%). Pensamos que es importante que los alumnos manipulen correctamente la fórmula, sin embargo creemos que el uso de estrategias enriquece la resolución de los problemas y que el manejo de las fórmulas sea como una forma de corroborar el resultado obtenido, es por ello en general la gran relevancia que tiene la enseñanza de las estrategias generales y aritméticas de resolución en los problemas combinatorios.

Figura S:
Gráfica de porcentajes: Uso de fórmulas combinatorias



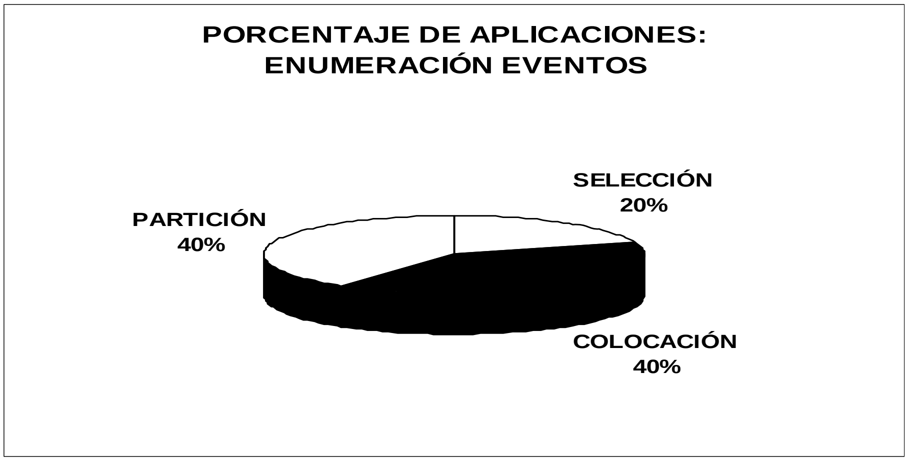
- **DIAGRAMA DE ÁRBOL:**

Los estudiantes no hacen uso de diagramas de árbol que representen los posibles resultados. Consideramos que el uso de estrategias y procesos de resolución resultó ser más adecuado para ellos.

- **ENUMERACIÓN DE EVENTOS:**

Este proceso de resolución es poco aplicado (4 resultados correctos y 6 incorrectos) por los alumnos (6.2% del total de las aplicaciones), pensamos que la enumeración de los eventos les es para los estudiantes poco práctica emplearla al igual que el diagrama de árbol y no toman en cuenta la relevancia del orden en las pocas aplicaciones ya que la mayoría de ellas son incorrectas (60%).

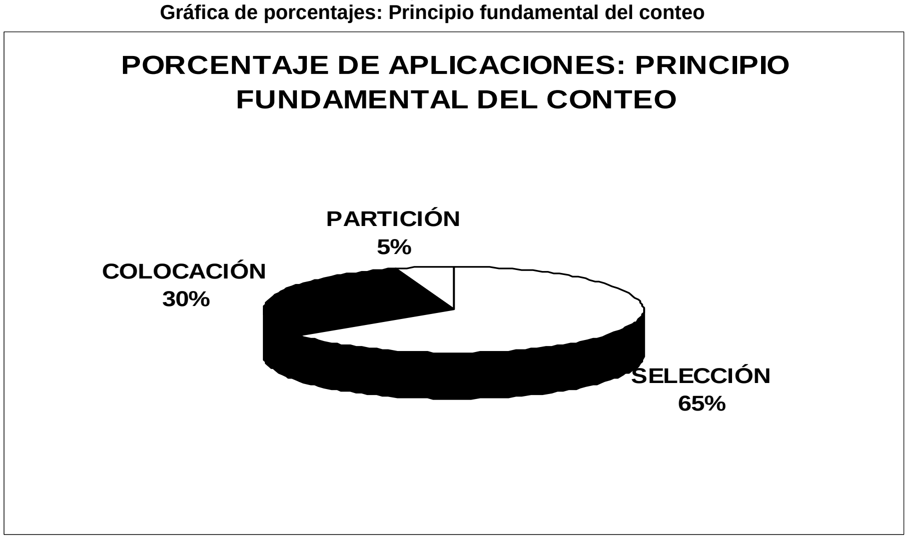
Figura T:
Gráfica de porcentajes: Enumeración de eventos



- **PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO:**

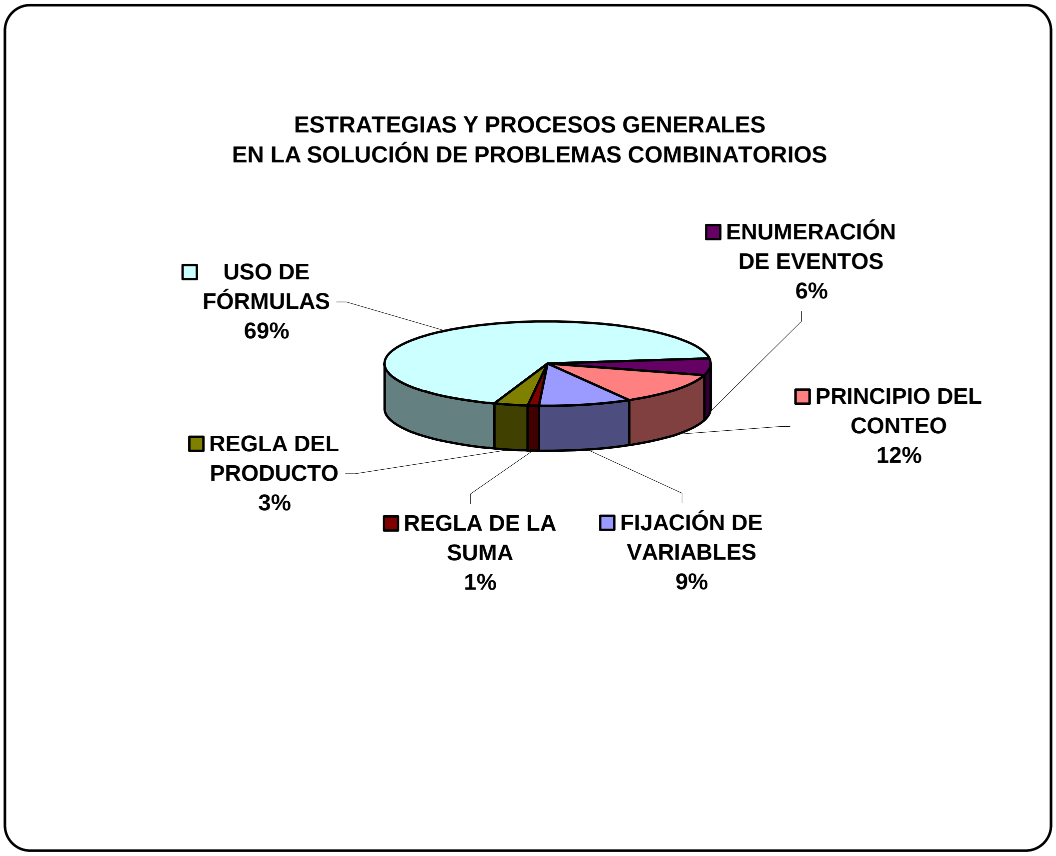
Corresponde a la segunda forma que tienen los estudiantes de dar respuesta a los problemas (12.3% del total). Específicamente en el problema 2: *“Extraer 3 bolas numeradas de 4”* se tienen la mayor cantidad de aplicaciones todas son correctas. En los problemas de selección es en donde se presenta el mayor porcentaje de aplicación del proceso (65%), la mayoría de ellas correctas (53.8), en donde más se cometen errores de aplicaciones es el los problemas de colocación y en los problemas de partición la única aplicación es correcta (10 aplicaciones correctas y 10 incorrectas).

Figura U:
Gráfica de porcentajes: Principio fundamental del conteo



La gráfica que nos representa los porcentajes correspondientes a las estrategias y procesos generales en la solución de problemas combinatorios la mostramos a continuación:

Figura V:
Gráfica de Porcentajes: Estrategias y Procesos generales en la solución De problemas combinatorios



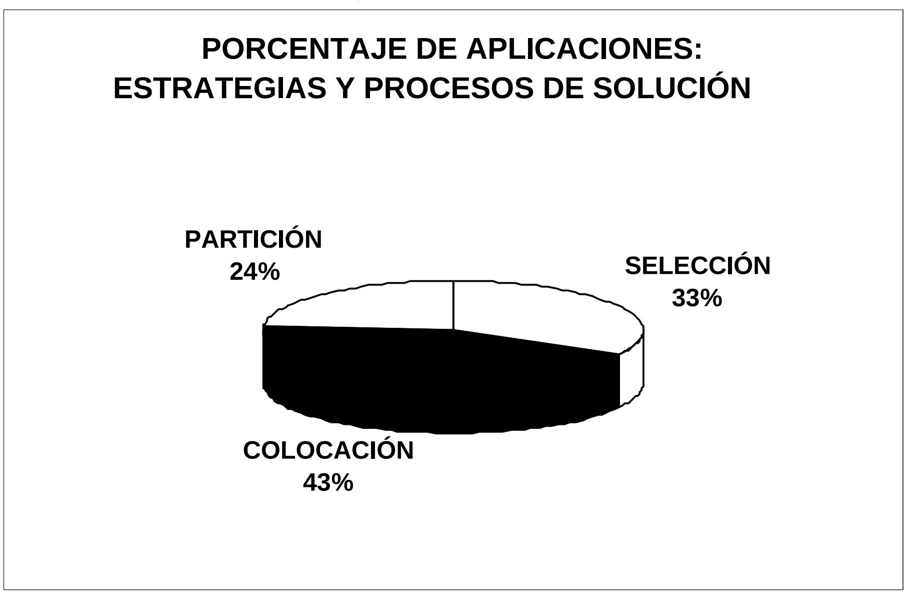
- **MODELOS COMBINATORIOS:**

✓ El 33% de las aplicaciones tanto de estrategias como de procesos de solución de dan en los problemas de selección, en donde la aplicación de fórmulas es lo mas relevante en este tipo de modelo (64.2%), en segundo lugar (24.5%) el principio fundamental del conteo es lo que mas utilizan los estudiantes en los problemas de selección, la fijación de variable y la enumeración de eventos constituyen un porcentaje bajo de las aplicaciones. Consideramos el alto índice de uso de formulas ya que la enseñanza combinatoria en general es explicada con este tipo de problemas.

✓ El 43% del total de las aplicaciones corresponde a los problemas de colocación, además es en donde los estudiantes hacen mayor uso de estrategias y procesos. Al igual que en los problemas de selección los estudiantes utilizan como primer proceso de solución la sustitución directa de la fórmula, aquí tenemos un porcentaje considerable de la aplicación de fijación de variables (11.6), por otro lado la regla de la suma y la enumeración de eventos es poco aplicada (2.9% y 8.7% respectivamente), los estudiantes al hacer uso de las fórmulas se limitan a no considerar realizar una lista de los posibles arreglos, esto consideramos que enriquece los resultados de los tres modelos combinatorios.

✓ El 24% de las aplicaciones corresponden a los problemas de partición, en este tipo de problemas es en donde tenemos el menor porcentaje de empleo por parte de los estudiantes al intentar resolver los problemas, cabe mencionar que al igual que los modelos de selección y colocación destaca el alto índice de manejo de formulas combinatorias (67.5%), sin embargo pocos estudiantes intentaron enumerar los resultados posibles (10% del total).

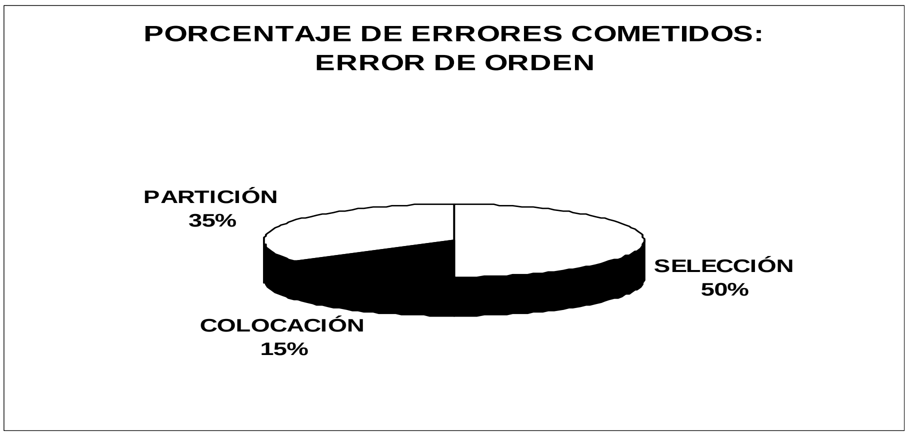
Figura W:
Porcentaje de errores: Modelo combinatorio



- **ERROR DE ORDEN:**

Este es el tercer error que se presentó con mayor frecuencia (17.7% del total de errores cometidos) en los modelos combinatorios. Específicamente en los problemas de selección tenemos la mayor cantidad de estos errores (50%), cabe destacar que en el problema 3: *"Seleccionar 4 fichas de 4"* y 9: *"Formar números de 5 cifras"* observamos la mayoría de los errores (problemas parecidos en la identificación de los parámetros, tenemos permutación con repetición, los estudiantes confunden con combinación). En los problemas de partición hay un porcentaje considerable de errores de orden (34.6%). En los problemas de colocación observamos el menor `porcentaje de errores (15.4%), específicamente todos estos errores se tienen en el problema 4: *"Colocar 3 coches en 5 plazas"*, los estudiantes utilizan combinaciones en lugar de permutaciones.

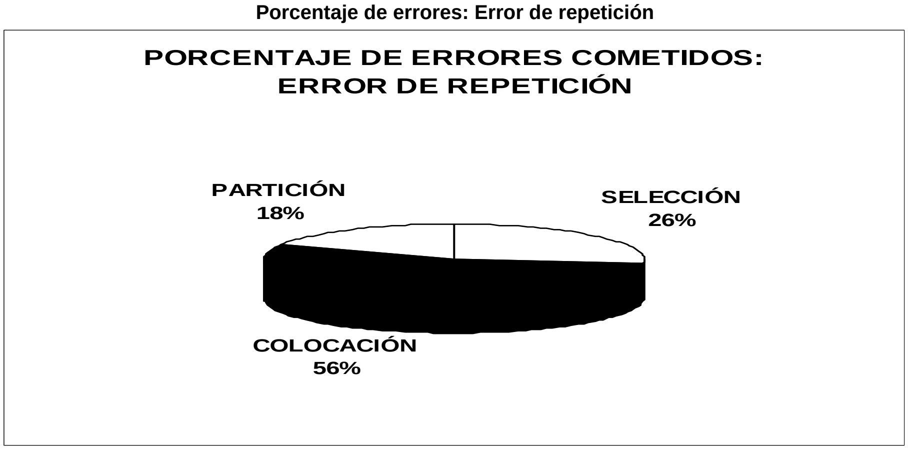
Figura X:
Porcentaje de errores: Error de orden



- **ERROR DE REPETICIÓN:**

El mayor porcentaje de errores (41.4%) en la resolución de los problemas combinatorios, corresponde a la repetición de algunos de los arreglos resultantes, donde la mayoría de éstos son observados en los problemas de colocación (55.7%), en los modelos de selección los estudiantes cometen errores de repetición en un porcentaje mínimo (26.3%), esto consideramos de interés ya que los problemas de este tipo de modelo son los que creemos en donde los estudiantes se tendrían que haber equivocado menos.

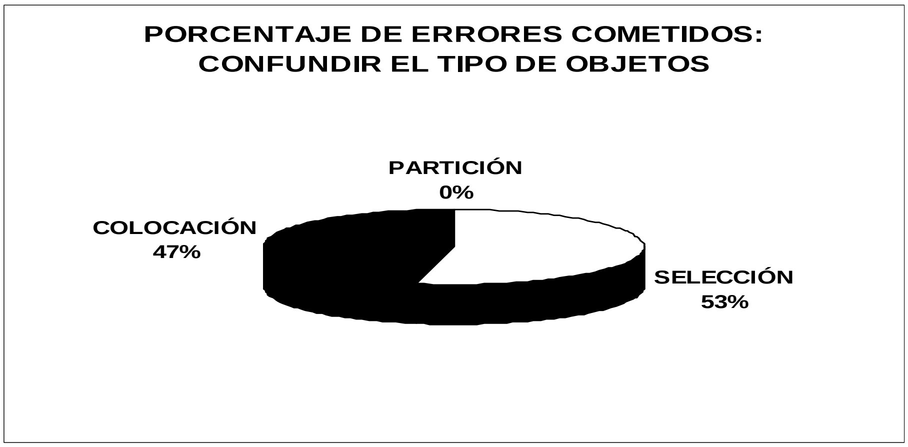
Figura Y:
Porcentaje de errores: Error de repetición



- **CONFUNDIR EL TIPO DE OBJETOS:**

Los estudiantes confunden los objetos en los distintos problemas en un porcentaje relativamente mínimo (11.6%), específicamente en los problemas de partición no encontramos errores de este tipo. En el problema 3: *“Seleccionar 4 fichas de 4”*, observamos 9 errores, aquí los estudiantes no interpreten la naturaleza del problema consideran las fichas azules como distintas, mientras que en el problema 5: “Colocar 3 cartas iguales en 5 sobres diferentes” consideran las cartas distintas. El 53% de los errores se cometen en los problemas de selección y el resto en los modelos de colocación.

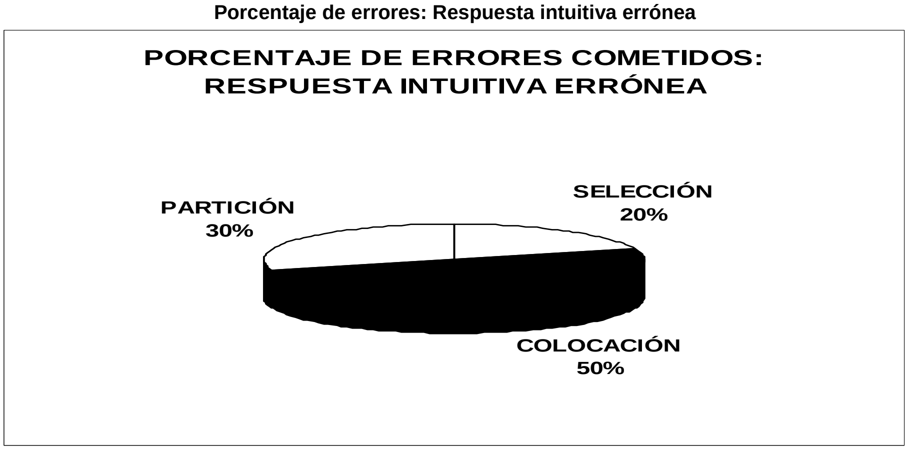
Figura Z:
Porcentaje de errores: Confundir el tipo de objetos



- **RESPUESTA INTUITIVA ERRÓNEA:**

Hay poco porcentaje de respuestas intuitivas por parte de los estudiantes (6.7% del total de los errores cometidos), la mayoría de estas se presentan en los problemas de colocación (50%). El menor porcentaje lo observamos en los problemas de selección (típicos en la enseñanza de la combinatoria), consideramos que en este tipo de resultados los estudiantes no intentan resolver los problema o por falta de interés o bien no entienden el contexto.

Figura A1:
Porcentaje de errores: Respuesta intuitiva errónea



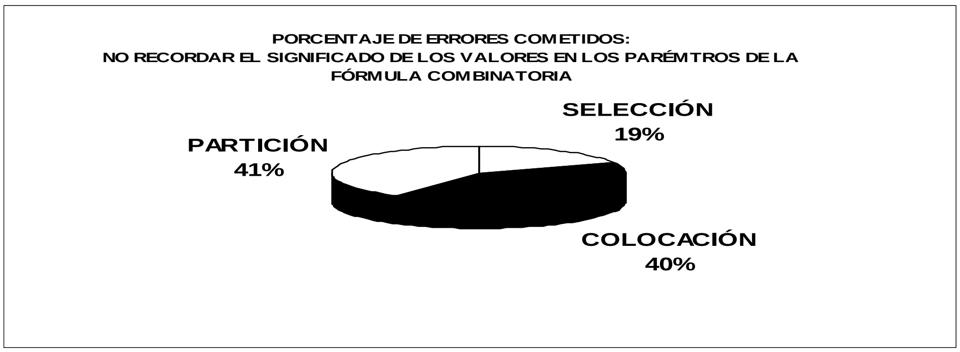
- **NO RECORDAR LA FÓRMULA CORRECTA DE LA OPERACIÓN COMBINATORIA QUE HA SIDO IDENTIFICADA CORRECTAMENTE:**

Es el error menos cometido por los estudiantes (0.7%), específicamente es 1 error en el problema 3: *"Seleccionar 4 fichas de 4"*, el estudiante identificó que fórmula emplear (permutación con repetición) pero no recordó la sintaxis de la misma.

- **NO RECORDAR EL SIGNIFICADO DE LOS VALORES EN LOS PARÁMETROS EN LA FÓRMULA COMBINATORIA:**

Es el segundo que más cometen los estudiantes, especialmente en el problema se presenta el 18.6%. En los problemas de mayor dificultad (8:*"Repartir 4 coches a 3 hermanos"* y 9: *"Formar números de 5 cifras"*), observamos la misma cantidad de errores (40. 7%, estos errores consideramos comunes en estos problemas ya que los estudiantes no entienden el contexto de los mismos y así no identifican los parámetros correctos.

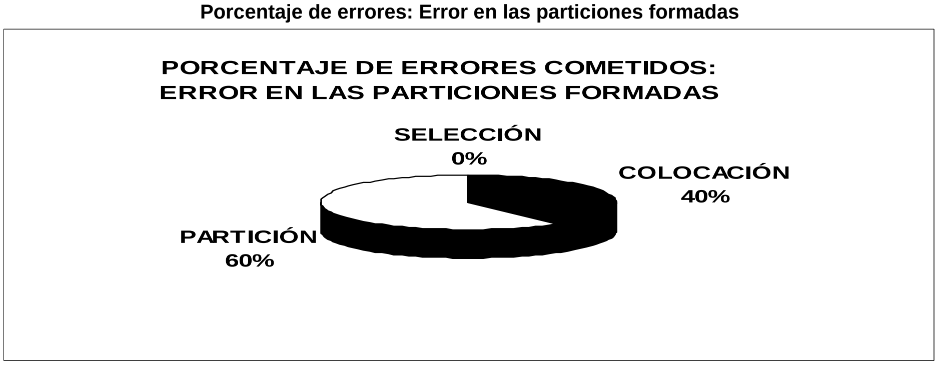
Figura B1:
Porcentaje de errores: No recordar los parámetros de la fórmula



- **ERROR EN LAS PARTICIONES FORMADAS:**

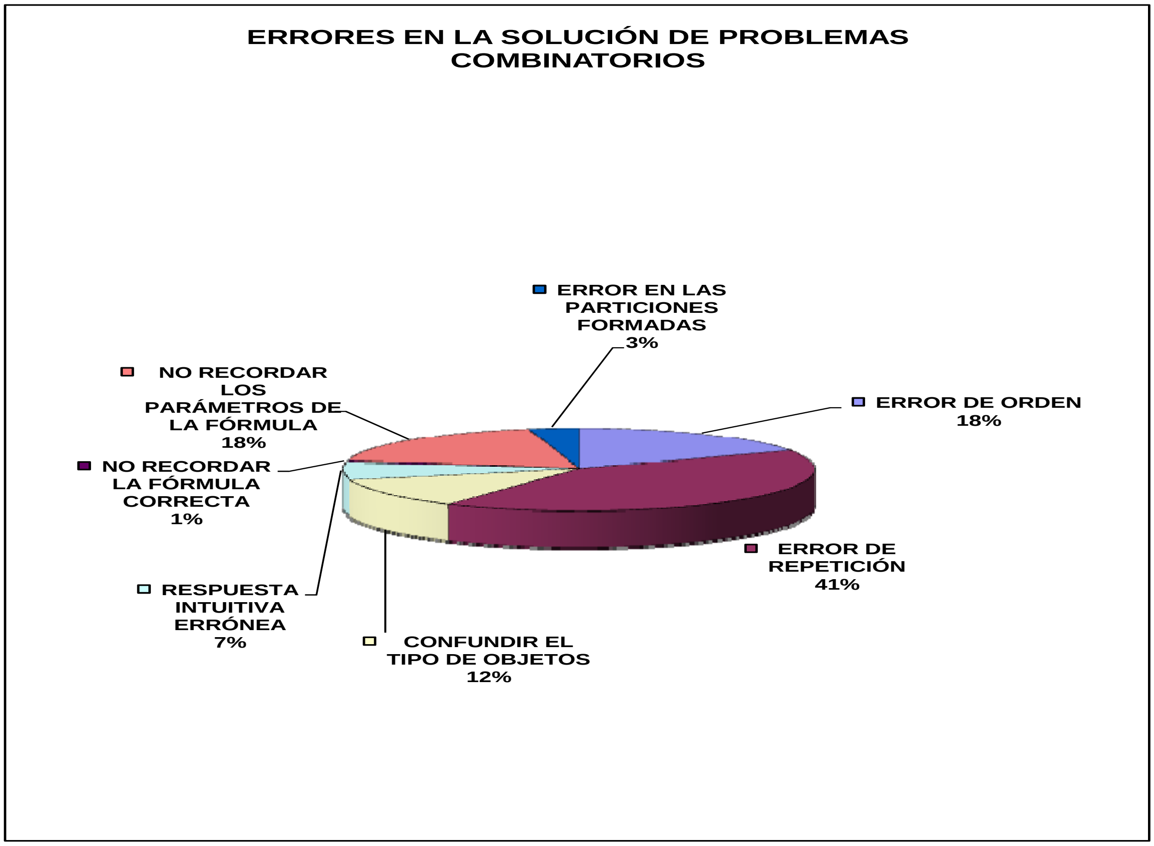
Es el segundo error menos cometido (3.4%) y efectivamente la mayoría de ellos se da en los problemas de partición (60%), en los problemas de selección dada la estructura de los mismos no hay frecuencia de errores.

Figura C1:
Porcentaje de errores: Error en las particiones formadas



La gráfica de abajo resume los porcentajes de errores cometidos por los estudiantes de ESFM en la solución de los problemas combinatorios:

Figura D1:
Gráfica de porcentajes: Errores en la solución de problemas combinatorios



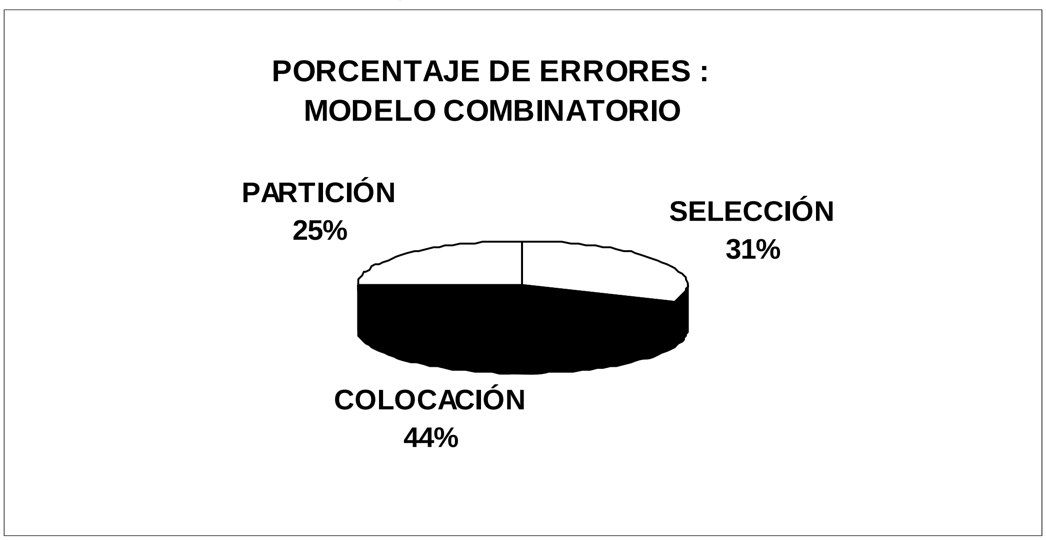
- **MODELOS COMBINATORIOS:**

  - En los problemas de selección se presenta el 31% de la totalidad de los errores, predominando en este tipo de modelo los errores de repetición (34.8%) y con un porcentaje considerable peno menor, los errores de orden (28.3%), consideramos que la confusión de objetos en este tipo de problemas es alta (19.6%), debido a a estructura de los mismos. El error menos cometido en los problemas de selección consiste en que los estudiantes no recuerdan la fórmula correcta del problema.

  - El 44% de los errores se observan en los problemas de colocación, específicamente la mayoría de ellos son errores de repetición (53%), mientras que errores de orden, respuestas intuitivas erróneas y errores en las particiones formadas se presentan en porcentajes mínimos. El 17.2% de los errores refieren a que los estudiantes no identifican los valores de los parámetros en la formula correspondiente.

  - El 25% de los errores corresponde a los problemas 7 y 8 (partición), la repetición de los arreglos y el no recordar los valores de los parámetros en las fórmulas presentan el mismo porcentaje (29.7%), los errores de orden representan el 24% del total. Hay porcentaje mínimo (8.1%) de respuestas intuitivas erróneas, en general en los problemas de partición los estudiantes no describen en forma correcta las particiones y esto interfiere en los resultados.

Figura E1:
Porcentaje de errores: Modelo combinatorio



CONCLUSIONES GENERALES:

Como hemos mostrado en nuestro trabajo, los alumnos presentan una dificultad generalizada en la solución de los problemas combinatorios.

Las estrategias generales y aritméticas que emplean los estudiantes espontáneamente en la solución de problemas son:

- La traducción del problema en otro equivalente es más frecuente en los problemas de selección, para el alumno es más común ordenar los objetos en casillas y determinar así los arreglos resultantes.
- La fijación de variables se presentó con mayor frecuencia en los problemas de colocación, los estudiantes no fijan variables en problemas cuyo tamaño de solución es grande (problemas de partición).
- En los problemas de partición los estudiantes descomponen el problema en subproblemas ya que se les dificulta aplicar alguna fórmula combinatoria.
- La regla de la suma es común en los problemas de colocación donde los estudiantes por lo general emplearon diagrama de árbol o enumeración sistemática.
- La regla del producto es empleada por los estudiantes en problemas de colocación pero en forma incorrecta.
- No hay uso en la regla del cociente.

En general los tipos de error dependen del modelo combinatorio, errores de repetición, errores de orden y respuestas intuitivas erróneas son los más frecuentes en la solución de los problemas combinatorios.

Entonces esto sugiere la enseñanza explícita de estrategias generales de solución de problemas: traducción del problema en otro equivalente, descomposición en subproblemas, fijación de variables, regla de la suma, regla del producto y regla del cociente en el razonamiento combinatorio, cubriendo posiblemente de esta manera, la necesidad de los estudiantes de recurrir a la identificación y aplicación directa de fórmulas combinatorias, así mismo, modificando de una manera importante los métodos tradicionales de enseñanza – aprendizaje.

SUGERENCIAS:

En nuestro trabajo de investigación consideramos la importancia de las siguientes sugerencias para trabajos futuros:

- Realizar un análisis de la aplicación conjunta de las estrategias generales, estrategias aritméticas y procesos de solución que utilizan los estudiantes en la solución de problemas combinatorios.

- Comparar resultados de estudiantes que siguen una enseñanza tradicional con estudiantes que aplican estrategias generales y aritméticas en la solución de problemas combinatorios.

Para Docencia:

- Implementar en los cursos de Matemáticas Discretas las estrategias generales y estrategias aritméticas para ejemplificar los problemas de razonamiento combinatorio.

- Enseñar el razonamiento combinatorio mediante los tres tipos de modelos: selección, colocación y partición.

- Ejemplificar cada modelo combinatorio con las distintas estrategias y así analizar las aplicaciones para determinar cuando el uso es incorrecto o incorrecto.

- Hacer uso de fórmulas combinatorias sólo como una herramienta para corroborar resultados de los problemas combinatorios, después de haber utilizado las diferentes estrategias generales y aritméticas.

APÉNDICE:

CUESTIONARIO PARA LA EVALUACIÓN DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO

1. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar el pizarrón. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María ¿De cuántas maneras puede elegir tres de estos alumnos?
Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

2. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos al azar una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se regresa a la urna. Se elige de nuevo al azar una bola y se anota su número y se regresa a la urna. Se repite la misma operación una tercera vez ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?
Ejemplo: se puede obtener el número 222.

3. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta manera hasta que se han seleccionado una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección de las fichas?
Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden: blanca, azul, roja y azul.

4. El garaje de la casa de Ángel tiene cinco plazas. Sólo tienen, sin embargo, tres coches: el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Éste es el esquema de la cochera:

1	**2**	**3**	**4**	**5**

¿De cuántas maneras posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus coches en el garaje?
Ejemplo: Ángel puede estacionar su coche en la plaza 1, Beatriz en la número 2 y Carmen en la número 4.

5. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta, ¿de cuántas maneras podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes?
Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

6. Cuatro niños, Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos recámaras diferentes (azul y verde) donde poder colocar a los niños para dormir ¿De cuántas maneras diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos recámaras? (Puede quedar alguna recámara vacía).
Ejemplo: Alicia, Berta, y Carlos en la azul y Diana en la verde.

7. Un grupo de cuatro amigos: Andrés, Benito, Clara y Daniel tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Química y otro de Física. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas maneras pueden dividirse para realizar los trabajos?
Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Química y Clara-Daniel el trabajo de Física.

8. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos: Fernando, Luís y Paco. ¿De cuántas maneras diferentes puede regalar los coches a sus hermanos?
Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luís.

9. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos: $1, 2, 4, 6, 8$, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?
Ejemplo: 81824.

MATERIAL BÁSICO PARA EL IV TORNEO

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO:

Si un suceso aleatorio da lugar a n_1 resultados distintos e, independientemente del resultado, un segundo suceso puede dar lugar a n_2 resultados diferentes y así sucesivamente hasta un último suceso que da lugar a n_k resultados distintos; para el suceso compuesto por los k sucesos descritos se tendrán $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ resultados distintos.

PERMUTACIONES.

El número de arreglos o permutaciones que se puede obtener empleando r elementos de un grupo de n elementos, viene dado como:

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{para} \qquad 1 \le r \le n $$

COMBINACIONES.

El número de arreglos o combinaciones que se puede obtener empleando r elementos de un grupo de n elementos, viene dado como:

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad \text{para} \qquad n \ge r \ge 1 $$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN.

El número de permutaciones de r elementos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales,…, n_r son iguales está dado por:

$$ {}_nP_{n(n_1,n_2,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!} \ ,\ n_1 + n_1 + \cdots + n_r \le n $$

REFERENCIAS:

DR. ANTONIO NIEVES HURTADO. ***Apuntes de Probabilidad Condicional***

FISCHBEIN, E., GAZIT, A. (1988). ***The combinatorial solving capacity in children and adolescents****.* Vol. 5.

NAVARRO-PELAYO, V. (1994). ***Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Tesis Doctora****l.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada**.**

NAVARRO-PELAYO, V., BATANERO C., GODINO DIAZ J. (1996). ***Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.*** Educación Matemática, Vol. 8, No. 1.

ROA GUZMÁN R., BATANERO C., GODINO DIAZ J. (2003). ***Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios****.* Educación Matemática, Vol. 15, No. 2