INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Las representaciones gráfica, numérica y algebraica de la solución de una ecuación diferencial

TESIS

Que para obtener el título de

Licenciatura en Física y Matemáticas

(Opción Matemática Educativa)

Presenta:

Maribel Serrato Duarte

Asesor de tesis:

Dr. Ramón Sebastián Salat Figols

México, D. F., Mayo 2008

A mi mamá Ma. Elena Duarte Martínez que me motivo hasta sus últimos momentos.

A mis hermanos Ramón, Gustavo y Araceli por su confianza, motivación y apoyo.

Al Dr. Ramón Salat Figols por su paciencia, entusiasmo y optimismo.

Índice

Introducción.

Este trabajo tiene como finalidad mostrar la importancia de emplear varios registros de representación en la obtención y exploración de la solución de una ecuación diferencial con ayuda del programa WinPlot. Así se facilita la conversión entre registros de representación en los estudiantes. Considerando que los alumnos presentan problemas de conversión entre el registro algebraico al gráfico.

Para la elaboración de este trabajo, se contó con el apoyo de los estudiantes de la Escuela Superior de Física y Matemáticas, de la licenciatura en Física y Matemáticas, de segundo semestre en la materia de Ecuaciones Diferenciales. Se iniciaron las actividades con 12 estudiantes, sin embargo, solo 3 lograron finalizarlas. Se utilizó la sala de cómputo, que se ubica en el tercer piso del edificio Z, de la escuela.

Las actividades presentadas en este trabajo, fueron elaboradas con la finalidad de que los alumnos lograran la conversión entre los registros de representación algebraico, gráfico y numérico; a través de papel y lápiz, así como con el uso del *software* como herramienta didáctica para efectuar dicha conversión. Considerando a la tecnología a manera de apoyo a la enseñanza y aprendizaje en el alumno. Durante la aplicación de las actividades los estudiantes tuvieron interesantes cambios en la conversión de registros.

El WinPlot permite al alumno graficar la solución particular y general, así como a la ecuación diferencial de manera directa, mostrando el campo de las pendientes. También, permite verificar la solución obtenida con respecto a la ecuación diferencial. Además, el alumno puede manipular los parámetros que se tienen de la solución en un cierto intervalo, como de la ecuación diferencial.

Para la realización de las actividades, los registros a considerar son: algebraico, gráfico y numérico. La conversión entre el registro del algebraico al gráfico, del gráfico al numérico, del algebraico al numérico y viceversa, proporcionando al alumno un mejor entendimiento, comprensión y visualización acerca de la solución de una ecuación diferencial, así como de la propia ecuación. Antes de iniciar con las actividades se les solicitó a los alumnos definir los conceptos, ecuación diferencial, orden, grado, linealidad, solución de una ecuación diferencial y condiciones iniciales; con la finalidad de saber qué tan presente tienen estos conceptos. Posteriormente cada actividad se conforma de preguntas que sirven como guía al alumno para lograr la conversión entre los registros de representación ya mencionados, enfocadas a un aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal. Del mismo modo, para que el alumno se apoye en WinPlot en el momento que sea factible, se le presenta una descripción del uso del *software*, guiándolo durante el uso de la herramienta didáctica en el aprendizaje para obtener una mejor visualización de la solución. Estas actividades facilitan a los alumnos que logren la conversión entre los registros.

Se ha considerado este *software*, por ser un programa de uso libre que se encuentra en http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html, es un programa que se puede graficar funciones de manera explícita e implícita, representando a la solución obtenida y así como a la misma ecuación diferencial, representadas en un mismo gráfico. Para el alumno, contar con un *software* como WinPlot, le permite verificar si en realidad lo que ha realizado es correcto.

El marco teórico se basa fundamentalmente en el trabajo de Raymond Duval con respecto a las operaciones con los registros de representación. Para tener un registro de representación semiótica deben estar presentes las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión. Este trabajo se enfocó a la actividad cognitiva de *conversión*, considerando de antemano que es el paso crucial en los alumnos de ecuaciones diferenciales.

En la metodología, se describen las fases según las cuales fue elaborado este trabajo, desde la consulta bibliográfica, la participación de los estudiantes, la elaboración de las actividades, así como la aplicación, y sobre todo el análisis de resultados que se realizaron de manera individual.

Este trabajo se apoya de la lista de cotejo para la evaluación del aprendizaje del alumno respecto a las actividades planteadas. Indicando en éstas, los elementos relevantes que permiten evaluar el desempeño de los estudiantes, vinculados a la conversión de registro, retomando indicadores de los estándares curriculares por la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics).

Por último, se muestra una lista de ventajas que se tienen al emplear WinPlot, y la importancia que tiene el emplear varios registros de representación en ecuaciones diferenciales para lograr la conversión de registros. Reiterando que el *software* es una herramienta didáctica que permite verificar los resultados obtenidos en papel y lápiz por el alumno.

I. Objetivo de la investigación.

Dentro de la actividad matemática, es importante el uso de diferentes representaciones para comprender los conceptos. En este trabajo se estudian las diferentes formas de representar la solución de una ecuación diferencial. Se consideraran los registros algebraico, gráfico y numérico. Se usará WinPlot para trabajar con las diferentes representaciones.

La tecnología en la actualidad ha sido de gran importancia en la escuela, pues existen *software* que permiten manipular al objeto de estudio, analizar, experimentar y conjeturar los conceptos matemáticos, como es el caso de WinPlot, además es un *software* gratuito como herramienta de apoyo al aprendizaje.

En la comprensión y entendimiento de conceptos matemáticos se requiere una coordinación de varios registros de representación, generando un tratamiento en cada registro, así como en cada conversión, buscando resultados favorables en el aprendizaje del estudiante.

En esta investigación se busca desarrollar en los estudiantes la habilidad de visualización y al mismo tiempo la comprensión e interiorización de los conceptos fundamentales en las ecuaciones diferenciales, tomando en cuenta los diferentes registros de representación.

En su artículo de representaciones semióticas y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Duval muestra que con frecuencia existe una falta de coordinación entre las representaciones en detrimento de la comprensión del concepto. Y propone que se desarrollen actividades que promuevan el tratamiento dentro de los registros y la conversión entre los registros de representación. Es por ello que, la estructura de las actividades propuestas se enfocan en el tratamiento de los registros y la conversión entre ellos.

El objetivo de la investigación es:

Describir las ventajas que se tienen al realizar la conversión entre los registros algebraico, gráfico y numérico, en la obtención de la solución de una ecuación diferencial ordinaria a través de WinPlot.

Hipótesis:

WinPlot es una herramienta didáctica que favorece al alumno en la exploración de la solución de una ecuación diferencial a través de la conversión entre los registros de representación.

De este objetivo se derivan las dos siguientes preguntas de investigación:

¿Cuáles son las ventajas de usar varios registros en ecuaciones diferenciales?

¿El uso de *software* facilita la conversión de registros en ecuaciones diferenciales?

II. Marco teórico

La investigación en matemática educativa ha proliferado en los últimos años con la finalidad de apoyar la enseñanza y aprendizaje en matemáticas, por las grandes dificultades que enfrenta el alumno en la comprensión de conceptos matemáticos. En la mayoría de las ocasiones se presentan estos problemas por la falta de visualización; el alumno tiene dificultades para realizar los cambios de registro de representación. En donde un registro de representación lo entendemos como un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro, y por último, permite la conversión, que consiste en la transformación total o parcial en otro registro.

Es por ello que (Duval, 1999) que el uso variado de representaciones semióticas en una actividad matemática facilita la enseñanza y aprendizaje en el alumno, que contribuye a un desarrollo de capacidades en razonamiento y visualización. Duval da una clasificación de los diferentes registros en el proceso de pensamiento matemático, como se muestra en la tabla 1:

Tabla 1. Diferentes tipos de registros

	Representación discursiva	**Representación no-discursiva**
Registro Multifuncional: **El proceso no es algorítmico**	Lenguaje natural Asociaciones verbales Razonamiento -argumentos de observación, opinión,… Deducciones validas de teoremas y definiciones	Plano o figuras geométricas (configuraciones de 0, 1, 2 y 3 dimensiones) Operatoria y no solo aprehensión perceptiva Construcción por regla y compás
Registro Monofuncional: **En la mayoría los procesos son algorítmicos.**	Sistemas de notación: Numérico (binaria, decimal, fraccional,…) Algebraica Simbólica (lenguaje formal)	Plano cartesiano Cambio de sistema de coordenadas Interpolación y extrapolación

Las representaciones semióticas son aquellas producciones que están constituidas por el empleo de signos que pertenecen a una representación, donde estos signos son significativos para el entendimiento de un concepto matemático, en el caso de una ecuación diferencial, el grado, el orden, la linealidad y las condiciones iniciales, son ejemplos de signos significativos. Las representaciones semióticas permiten mostrar las representaciones mentales, a través de una figura geométrica, una ecuación, una gráfica, el lenguaje natural pues son un medio para exteriorizar un conocimiento y mostrarlo hacia los demás.

Las representaciones juegan un papel primordial:

- Las representaciones mentales dependen de la interiorización de las representaciones semióticas.

- Las diferentes funciones cognitivas se muestran independientes, así como la de objetivación y tratamiento con la de comunicación y las representaciones mentales, respectivamente.
- Se puede producir conocimiento a través de las representaciones semióticas en donde las representaciones sean totalmente diferentes.
- La producción de conocimientos en las representaciones semióticas permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida en que hacen surgir sistemas semióticos totalmente diferentes.

Con ello hace notar que la noésis y la semiósis son inseparables, es decir, no hay semiósis sin noésis y viceversa; donde la noesis es la aprehensión conceptual de un objeto y la semiósis son los signos o símbolos empleados para representar un objeto (concepto) matemático, a todo ello se le conoce como la paradoja cognitiva del pensamiento humano. No olvidemos que en matemáticas se requieren varios registros de representación semiótica, aunque en la mayoría de las ocasiones el alumno no está consciente o no reconoce las posibles representaciones.,

Un sistema semiótico es un registro de representación al considerar tres actividades cognitivas las cuales son inseparables de la sémiosis, que ya se han mencionado anteriormente:

a) La **formación** de una representación involucra ciertos rasgos y reglas, donde estas reglas aseguran una identificación y reconocimiento de la representación. Además estas reglas permiten reconocer la formación de representaciones.
b) El **tratamiento** de una representación es una transformación de la representación que se da únicamente dentro del registro que se está trabajando.
c) La **conversión** de una representación es una transformación de representación, un cambio de registro, conservando al objeto mismo, se buscan otras alternativas para apreciar al objeto en diferentes perspectivas de representaciones.

Es por ello que, la conversión entre registros es una actividad cognitiva diferente e independiente a la del tratamiento, la conversión es el paso crucial donde las expectativas del alumno se confunden, pues le es difícil cambiar de un registro a otro, su enfoque es más algebraico y pocos alumnos manejan tanto el grafico como el numérico. La figura 1 muestra que cada actividad conlleva a una transformación de una representación ya sea en el mismo registro o en otro.

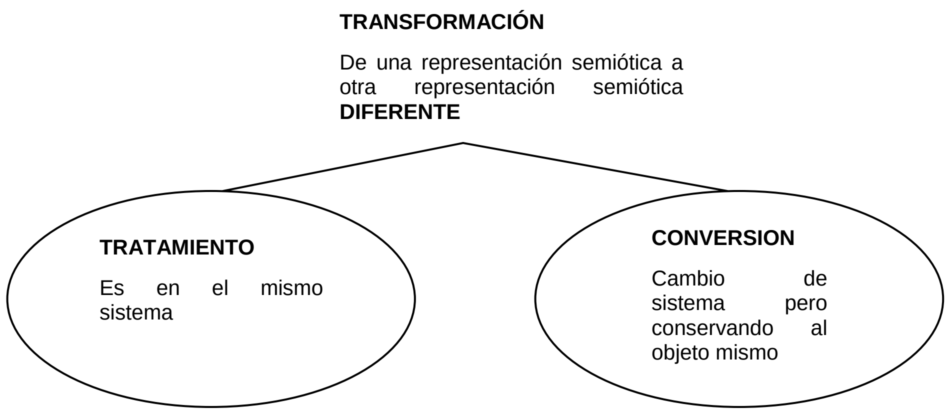


Figura 1

Dentro de la conversión de registros se suele confundir la “interpretación” y la “codificación” como un registro más, es decir, esto se presenta aún más cuando se está en el registro gráfico, donde se busca una interpretación de los datos, y que posteriormente se va a la expresión cuando sea factible, a la gráfica o la propia ecuación dada. Sin embargo tanto la interpretación, codificación, traducción, ilustración, descripción son operaciones que permiten corresponder a una representación con otra en la conversión.

La interpretación en los registros es muy importante, pues requiere de un cambio de contexto en el que se desenvuelve. Mientras que la codificación es la reproducción de una representación en otro sistema semiótico diferente al que está dado, a través de sustituciones directamente sobre los significantes. La descripción es la conversión de una representación gráfica, esquemas en una representación lingüística. Mientras que la ilustración es una conversión que va de una representación lingüística a una representación figural.

La actividad cognitiva de conversión de una representación como ya se ha mencionado es el paso crucial en el cambio de registro; en esta actividad no se aplican reglas de ordenamiento o codificación.

La conversión de registros puede ser o no congruente, es decir, si resulta congruente la conversión de registro, está indicando que el alumno es monofuncional, es decir, que se está trabajando en un solo registro y que no llega totalmente a la conversión, como se esperaría; ejemplo, gran parte de los alumnos en matemáticas desarrollan bien en el registro algebraico y no tienen ningún problema en resolver una ecuación diferencial, pues recurren a un método dado, y logran encontrar la solución de dicha ecuación, verificando que se cumpla, y hasta ahí se queda, no va más allá de saber que sucede si busca otra registro en este caso, para interiorizar y exteriorizar la solución encontrada. Sin embargo, el estudiante tiene la inquietud de saber si en realidad la solución encontrada sea correcta y busca otras representaciones, entonces aquí es donde comienza el hecho de que una conversión no sea congruente.

Para que una representación sea congruente es necesario que estén presente tres criterios, el primero es la correspondencia semántica (significado de la palabra) entre las unidades significantes (gráfico, algebraico, expresión lingüística, etc.) que pertenecen al registro de representación utilizado. Segundo la univocidad (mismo significado) semántica terminal entre las representaciones y por último el orden entre las unidades significativas cuando se trata de comparar por ejemplo un enunciado con su expresión algebraica.

En ello se busca el uso de varios registros de representación, que permita detectar los cambios en la concepción del conocimiento que se busca incorporar, es decir, interiorizar y exteriorizar los conceptos dados.

La existencia de varios registros de representación conlleva a una coordinación para el funcionamiento del pensamiento matemático, estén puede ser a través de la economía del tratamiento de acuerdo a las manipulaciones que se requieran para trabajar en el registro a trabajar. Otra manera es por la complementariedad de los registros, pues imponen una serie de elementos que son significativos o informativos del objeto, así como del concepto que se representa, y en diferentes registros no son los mismos aspectos del contenido de representación. Y uno que es de suma importancia es la conceptualización que conlleva a una coordinación de registros de representación.

En la mayoría de las ocasiones la coordinación entre los diferentes registros de representación no es suficiente para que se dé la conversión, esto sucede si no se tiene comprendido el concepto.

Es por ello, que en el momento que el alumno intenta buscar una nueva interpretación de un problema matemático, ésta conlleva a la conversión, conservando al objeto mismo, en el momento de comenzar con nuevas condiciones, dándose la no congruencia. Posteriormente en ocasiones logra identificar cierto orden y comportamiento en el problema.

Para Duval, cada representación aporta un conocimiento parcial del objeto que representa. Esto es, cada sistema de representación permite manipular y procesar cada una de las representaciones de diferentes formas tal que los distintos modos de representación expresen sus propiedades y relaciones entre los conceptos, cada representación permite una faceta diferente del objeto a estudiar y manifiesta algunas propiedades relevantes.

Duval (Duval, 1988) en su artículo de “gráficas y ecuaciones” genera un tratamiento en las representaciones gráficas, que la razón profunda de estas dificultades no debe buscarse en los conceptos matemáticos ligados a las funciones afines, sino al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre los registros de representaciones gráficas y algebraicas. Con apoyo en este artículo ingresaremos también la parte numérica como otro registro de representación semiótica. Indica que las representaciones gráficas quedan como representaciones ciegas para los alumnos.

Por estas razones, daremos la importancia que merece al registro gráfico para una mejor comprensión en el aprendizaje del alumno.

Plantea tres tratamientos de las representaciones gráficas:

1. La vía del punteo.

Es a través de esta vía que se introduce y se definen las representaciones gráficas, cuando se trata de trazar la gráfica de una ecuación o de leer las coordenadas de un punto interesante. Donde está vía presenta la agilidad de que el alumno pueda visualizar una gráfica y recabar información sobre lo que sucede con los puntos de las gráficas al hacerlos variar.

2. Una vía de extensión

Con esta vía lo que se busca es el desarrollo de actividades de interpolación y extrapolación, las cuales se apoyan con los aspectos productores y los aspectos redactores, que permanecen en un plano mental, las cuales no dan lugar a trazos complementarios y explicativos como un cambio local de la graduación de los ejes para "agrandar" una parte del trazo. En este tratamiento se ampliara con el uso del *software* y dar un mayor contexto, pues ya no se limitaría esta vía.

3. Una vía de interpretación global de las propiedades de las figuras.

El conjunto trazos/ejes forman una imagen que representa un "objeto" descrito por una expresión algebraica, toda modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica. Esto se desprende de un análisis de congruencia entre dos registros de representación de un objeto o de una información. Podemos señalar que para que haya un análisis con los registros, el alumno a través del *software* observará que sucede al hacer variar los parámetros dados en la actividad matemática, a través de las diferentes representaciones.

Reiterando que no hay que confundir el objeto (concepto) matemático con sus representaciones, pues si sucede lo contrario esto lleva a una perdida en la comprensión de dicho objeto, es por ello que la utilización de varios registros permite una mejor comprensión del objeto estudiado.

La tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje en matemáticas.

Es importante señalar las ventajas que se tienen al usar *software* en matemáticas para impulsar el proceso de enseñanza y aprendizaje en los alumnos, algunos autores mencionan que no es muy correcto hacer uso de ellos para la enseñanza, sin embargo, muchos otros con sus experiencia demuestran que se requiere.

De acuerdo a Acelajado (Acelajado, 2001) el uso de *software* aumenta y facilita el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas, mejora su reacción, su actitud y reduce el miedo hacia las matemáticas.

Al usar *software* en matemática educativa se mantiene un apoyo en la enseñanza y aprendizaje hacia el alumno; como señala Balderas (Balderas, 1998**)**, el uso de la computadora no es solo un instrumento para crear una actividad para el alumno, sino que promueve una nueva comunicación con los estudiantes.

La investigación en matemática educativa requiere profesores expertos en el uso de *software* para regular las clases, las cuales requieren de un nivel de competencia como lo señala Balderas por parte del profesor, y que además se adquiere a través de la experiencia.

Es importante mencionar que el aprendizaje se da en tres ámbitos (Díaz, Rojas), los cuales son: conceptual, procedimental y actitudinal. El aprendizaje conceptual es la incorporación de datos, conceptos y principios a la estructura mental de comprensión que permite describir, entender, explicar, fundamenta y proyectar la acción.

El aprendizaje procedimental se define como un conjunto de acciones ordenadas y orientadas al logro de una meta. Requieren de reiteración de acciones que lleven a los alumnos a dominar la técnica, habilidad, estrategia, métodos, etc.

Mientras que un aprendizaje actitudinal consiste en la modificación o adquisición de actitudes por parte del alumno en su proceso de enseñanza-aprendizaje, a través de actitudes, valores, ética personal y profesional.

Por lo tanto, estos tres aprendizajes interviene en la evaluación del estudiantes, para determinar que tan apropiada son las actividades de enseñanza y como es su desempeño no sólo del estudiante sino también del profesor. La evaluación es constante desde observar las reacciones que tiene los alumnos ante las actividades indicadas y de la manera en cómo se desenvuelven. Por lo tanto, la evaluación cualitativa es aquella donde se juzga o valora la calidad del proceso de nivel de aprovechamiento de los estudiantes, que resulta dinámica en su proceso de enseñanza- aprendizaje y analiza la actividad, empleados en el salón de clase.

La evaluación es una manera de retroalimentar la enseñanza y aprendizaje del estudiante favoreciéndolo en determinar una calificación adecuada a su desempeño en las actividades encomendadas. Hay varias formas de evaluar (Flores y otros, 2004), como la escala de actitudes, historia y experiencia de vida, V heurística de Gowin, el informe de KPSI, la rúbrica, lista de cotejo, matriz de resultados, bitácora de Col y portafolios.

Sin embargo, se retoma en este trabajo la lista de cotejo, en ella se da la relación de los elementos relevantes para el desarrollo de una actividad, la cual puede ser de tipo exploratoria, de resolución de problemas u otro. Donde el objetivo de la lista, es cotejar el desempeño de los estudiantes durante la actividad aplicada. Esta evaluación es cualitativa, pero también permite indicar una calificación si se requiere. En la NCTM, se señalan indicadores para la evaluación del alumno, los cuales van enfocados respecto al nivel y el objetivo y aprendizaje, que se quiere desarrollar. Estos indicadores se retoman para la lista de cotejo, vinculadas a demás en los diferentes tipos de aprendizaje.

III. Metodología de la investigación

La realización de esta investigación hace referencia a artículos de Duval; de acuerdo a las dificultades que los alumnos se enfrentan, es la conversión de registros (algebraico, gráfico, y numérico). En ecuaciones diferenciales, esto se traduce en una dificultad al indicar que representen gráficamente a la solución obtenida. Con las actividades planteadas se busca que los estudiantes logren realizar la conversión de registros y sean conscientes de esta conversión de una manera significativa con apoyo de WinPlot.

La metodología de esta investigación, está dada en las siguientes fases:

a) Consulta Bibliográfica:
Se hizo una consulta a artículos de Duval enfocados a la conversión de registros de representación semiótica y el uso de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje en el aula, teniendo presente la problemática de aprendizaje de esta investigación.

b) Participantes:
Los alumnos que contribuyeron a la realización de esta investigación fueron alumnos de la licenciatura en Física y matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional que cursaban la materia de Ecuaciones Diferenciales.

Tabla 2. Alumnos participantes en las actividades.

Alumnos	1ra. Sesión	2da. Sesión	3ra. Sesión	4ta. Sección	5ta. Sesión	6ta. Sesión
1. Andrés	✓	✓	✓	✓		
2. Bárbara	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. Jonathan	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4. Ignacio	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5. Karina	✓	✓				
6. Lizbeth	✓	✓				
7. Berenice	✓	✓				
8. Alejandra	✓	✓				
9. Itzel	✓		✓			
10. Fernando	✓	✓				
11. Omar	✓					
12. Claudia	✓					

De los doce alumnos que iniciaron las actividades sólo 3 fueron los que terminaron las cuatro actividades, donde su desempeño en el transcurso de las sesiones fue progresando, como se observa en la tabla 2 la participación de los alumnos.

Se trabajó con este número de personas ya que la investigación es no probabilística, pues, la elección de los participantes fue de manera voluntaria. Los resultados obtenidos a partir de esta muestra son validos para la muestra en sí, sin embargo, esto no implica que no se pueda aplicar a una población mayor.

c) Elaboración de las actividades:

En esta fase se realizaron cuatro actividades todas enfocadas a la conversión de registro (algebraico, gráfico y numérico) en la obtención de la solución de la ecuación diferencial, considerando que los alumnos estaban finalizando el curso tradicional de Ecuaciones Diferenciales, con ayuda del *software* y las actividades dan lugar a un contexto para la conversión de registros. Haciendo mención, antes de la aplicación los alumnos indicaban que duarte el curso no se les dio la representación gráfica de la solución de la ecuación diferencial.

Se les pidió a los alumnos definir los siguientes conceptos:

- Ecuación diferencial
- Orden
- Grado
- Linealidad
- Solución de una ecuación diferencial
- Condiciones iniciales

Con la finalidad de saber que tan presente tiene estos conceptos, y que tanto influyen en el avance de las aplicaciones de las actividades con respecto a la coordinación entre los registros de representación, en esta parte se busca un aprendizaje conceptual por parte del alumno.

Las actividades fueron las siguientes:

<u>Actividad 1</u>

Resuelve la siguiente ecuación diferencial con el método que te sea conveniente y justifica cada paso que realizas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1$$

Pregunta 1

"Determina la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ "

Esta pregunta, formulada en el registro algebraico, permite que el alumno logre identificar qué tipo de ecuación diferencial es, orden y grado, apoyándose en otros registros para un mejor entendimiento al determinar su solución.

Pregunta 2.

"Determina una solución particular de la ecuación diferencial, si $y(1) = 1$"

Pregunta 3.
“Bosqueja la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial”

En esta pregunta se busca la conversión de registros, se pasa del registro algebraico al gráfico, del gráfico al verbal y del gráfico al numérico, pues permite al alumno razonar y visualizar al concepto de solución de una ecuación diferencial.

La *pregunta 4*, se enfocó a las preguntas que siguen, usando el *software*, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, especialmente de la solución general.

Pregunta 5
¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de WinPlot?

Con esta pregunta se busca la conversión de registros, y que el alumno logre interpretar de manera audaz y razonable.

Pregunta 6.
¿Qué puedes decir acerca de WinPlot y de esta ecuación diferencial?
Esta pregunta permite que el alumno opine acerca del uso de *software* en el aprendizaje y enseñanza de las ecuaciones diferenciales en obtención de la solución.

Pregunta 7.
¿En qué aspectos te ayudó WinPlot para comprender la ecuación dada, tanto en la forma implícita de tu solución como la misma ecuación diferencial?
Permite al alumno hacer mayor énfasis en la solución de la ecuación diferencial y en los parámetros presentes en la solución, permite al alumno visualizar, comprender y razonar la ecuación diferencial y la solución encontrada.

Pregunta 8
¿Crees que tenga ventajas el usar WinPlot para resolver ecuaciones diferenciales? ¿Por qué lo crees?
Lo que se pretende con WinPlot es que sea un instrumento o herramienta para el cambio de registro.

En esta actividad, cabe mencionar que las preguntas elaboradas enfatizaron los tres tipos de aprendizaje, como el aprendizaje conceptual, las preguntas 1,2,3,7 y 8 están vinculadas a este tipo de aprendizaje; así mismo las preguntas 1, 2 y 5 están en el aprendizaje procedimental de; y por último las preguntas 3, 5, 6, 7 y 8 están enfocadas en el aprendizaje actitudinal.

<u>Actividad 2</u>
Resuelve la ecuación y justifica cada paso que realizas:

$$y' + ax^2 y = x^2, \quad y(0) = 1$$

Pregunta 1
“Encontrar el factor integrante”
Esta pregunta se realiza dentro del registro algebraico.

Pregunta 2
“Encuentra la solución general en su forma implícita”
Nuevamente esta pregunta va formulada dentro del registro algebraico.

Pregunta 3
“Encuentra su solución particular, si $y(0)=1$”

Pregunta 4
“Bosqueja la gráfica para las dos soluciones”
En esta pregunta se busca la conversión entre los registro algebraico, gráfico y numérico. Además, que distinga el concepto de solución de una ecuación diferencial.

La *pregunta 5*, se enfocó a las siguientes preguntas, usando el *software*, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencia, especialmente de la solución general.

Realiza en WinPlot las siguientes acciones. Al ir avanzando puedes ir comentando con tus compañeros y no olvidando ir realizando anotaciones de lo que realizaste en WinPlot.

a. Abrir WinPlot, en ventana seleccionar “2-dim.”
b. Aparece la ventana sinnombre.wp2
c. En “Ecua” seleccionas “3. Implícita” y das clic.
d. Aparece de inmediato una pequeña ventana que dice “curva implícita” y escribes la solución que tienes y das clic en el comando OK.
e. Aparece de inmediato una pequeña ventana que dice “curva implícita” y escribes la solución que tienes y das OK.
f. Recuerda que en la solución implícita manejas una constante de integración que viene siendo en si un parámetro, WinPlot lo reconoce.
g. Para tener hacer variar el parámetro es necesario ir a “Anim” y seleccionar “individual” y dar clic.
h. Aparece una ventana que dice “valor actual de A”, con una barra deslizadora con ello puedes variar al parámetro.
i. También puedes definir el intervalo en que esta ese parámetro, puedes elegirlo.
j. Para definir el intervalo, para el extremo izquierdo indicas es numero y das clic en el comando “def I” y para el derecho nuevamente eliges y das clic en el comando “def D”. Ahora ya puedes variar al parámetro ya sea deslizando la barra con el ratón o con las flechas de los extremos de la barra.
k. Ahora con la solución particular grafícala, recurre a la ventana de “inventario sinnombre.wp2” y das clic en el comando de “editar” y te manda a la ventana de “curva implícita” indicas el valor del parámetro dado y das clic.

Pregunta 6

¿Qué diferencias observas con tu gráfica bosquejada y con la de WinPlot?
En esta pregunta está enfocada a la vía de la interpretación en la gráfica de la solución y el conceto solución de una ecuación diferencial.

Pregunta 7
¿Qué sucede cuando utilizas la solución general, al variar la constante de integración?

Se busca en alumno que mencione que solo se observa las curvas solución y al variar el parámetro de la constante de integración, y al manejar el parámetro a fijo, la gráfica varia y se mantiene fija en el eje de las *y*. Esta pregunta esta dentro del último punto de tratamiento gráfico el cual es la interpretación global de las propiedades en este caso de la solución obtenida.

Pregunta 8
¿Qué opinas al resolver la ecuación diferencial y tener a la mano el programa WinPlot?

Pregunta 9
Del inciso anterior ¿Cómo consideras a la tecnología como apoyo hacia la enseñanza?

Para la actividad 2, las preguntas 2, 3, 4, 6, 7 y 8 están enfocadas al aprendizaje conceptual, pues lo que se busca es representar la solución de la ecuación diferencial en diferentes registros. Mientras que las preguntas 1 – 3,5 y 8 hacen énfasis a un aprendizaje procedimental. Por último las preguntas 4- 9 son preguntas enfocadas al aprendizaje actitudinal.

<u>Actividad 3</u>
En un modelo demográfico de la población $P(t)$ de una comunidad, se supone que $\frac{dP}{dt}=\frac{dB}{dt}-\frac{dD}{dt}$, en donde $\frac{dB}{dt}$ y $\frac{dD}{dt}$ son las tasas de natalidad y mortalidad, respectivamente.

Determinar con ayuda de los registros algebraico, gráfico y numérico la población $P(t)$, sí $\frac{dB}{dt}=k_1P$ y $\frac{dD}{dt}=k_2P$, con $P(0)=P_0$.

Instrucciones. Esta actividad tiene puntos donde el alumno participa de forma individual, pero también en equipo conforme avanza la actividad.

Pregunta 1
“Del problema planteado indica ¿Cuál es la ecuación diferencial ya simplificada a resolver y la condición inicial?”
Esta pregunta se hace dentro del registro algebraico.

Pregunta 2
“Encuentra de manera algebraica la solución general de la ecuación diferencial.”
En esta pregunta se trabajara en el registro algebraico.

Pregunta 3
"De la pregunta anterior ¿Cuál es el valor de la constante de integración con ayuda de la condición inicial para la solución particular?"
Esta pregunta busca la conversión de registro del algebraico al numérico.

Pregunta 4
"Bosquejar la gráfica de la solución de la ecuación diferencial."
Se busca en esta pregunta la conversión de registro, tanto del algebraico al numérico, como el numérico al gráfico, como del algebraico al gráfico y al verbal. Esta pregunta está en la vía del punteo.

En la *pregunta 5*, se derivan lo siguiente, con apoyo de WinPlot para determinar la familia de curvas soluciones, se le pidió al alumno indicar, ¿Que al observar el campo se puede intuir los valores de los parámetros? ¿Por qué?
Esta presente la vía de la extensión al considerar los casos.

Ahora con ayuda de WinPlot determina la familia de soluciones.

a. Abrir WinPlot, en ventana seleccionar "2-dim."
b. Aparece la ventana sinnombre.wp2
c. En "Ecua" se elige "Ecua Dif", y posteriormente darle clic en "$\frac{dy}{dx}$"
d. Aparece una ventana "ecuación diferencial" escribimos la ecuación que se tiene, con un ligero cambio de $\frac{dP}{dt} = P(k_1 - k_2)$ por $\frac{dy}{dx} = y(a-b)$ y seleccionar pendientes darle "aceptar".
e. De inmediato aparece la gráfica de la familia de curva solución

Comenta con tu compañero de al lado ¿A qué se debe esta gráfica?

Pregunta 6
"Ahora consideras los casos cuando $a > b$, $a < b$ y $a = b$, realízalo de manera algebraica con ayuda de la solución obtenida. Bosquejar la gráfica de los casos. ¿Qué puedes decir acerca de estos casos?

Después de hacer los casos de manera algebraica, ahora regresemos con WinPlot veamos que sucede con los parámetros.
La *pregunta 7*, se enfocó a los siguientes incisos, los cuales se trabajaron en WinPlot.

Elegimos en "Anim" a "Parámetros A-W" y seleccionamos tanto a A como a B, uno por uno. Dentro de un intervalo $(0,10)$

1) Si $a > b$, elige valores para a y b variándolos ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica? Explícalo
2) ¿Qué pasa con la población si $a = 5$ y $b = 2$, si se tiene una población de 2.5 mil personas en $t = 0$?

Esta pregunta permite la conversión de registro del algebraico al numérico, del numérico al grafico, así como del algebraico al gráfico.

3) ¿Consideras factible usar un *software* en esta materia para entender el problema planteado?
4) ¿Te facilita el aprendizaje este *software* para entender que es una ecuación diferencial, orden, linealidad, solución y condiciones iniciales?
5) ¿Qué importancia tiene para ti al usar las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para solucionar una ecuación diferencial?

En esta actividad las preguntas 1, 4, 6 y los incisos 4) y 5) están enfocados al aprendizaje conceptual. Por lo tanto, las preguntas1-3, 5 y los incisos 1) y 2) son preguntas realizadas en el aprendizaje procedimental, y para concluir las preguntas 4, 6 y los incisos 3) y 4) son preguntas que están en el aprendizaje actitudinal.

<u>Actividad 4</u>

La población de peces de uno de los lagos grandes. ¿Qué tasa de pesca se conserva en cantidades aceptables la población de peces y la industria pesquera?

Con la ayuda del *software* podrá determinar cómo cambia la población de peces a lo largo del tiempo con base en las tasas de nacimiento, muerte y captura.

Con la ayuda del *software* podremos determinar cómo cambia la población de peces a lo largo del tiempo con base en las tasas de nacimiento, muerte y captura.

Si $y(t)$ indica la población de peces vivos en el instante t, considerando el tiempo en meses.

Como se habla de la tasa de cambio total de la población de peces por meses denotemos por

$\frac{dy(t)}{dt}$ ó y'.

Se expresar a la tasa total de cambio como:

y' = *tasa de nacimiento – tasa de muerte – tasa de captura* (*)

Como las tasas de nacimiento y de mortalidad son proporcionales al tamaño de la población, entonces:

Tasa de nacimiento en el instante t : $a \; y(t)$

Tasa de mortalidad en el instante t : $(by(t)+c)\, y(t)$

Tasa de captura: K

Donde a, b y c son constantes de proporcionalidad y positivas. Donde *c* indica la mortalidad natural y *b* indica la sobrepoblación.

La ecuación diferencial es:

$$y' = a \; y(t) - \; (by(t)+c)\, y(t) - K$$

Pregunta 1

¿Qué entiendes por tasa de cambio?

El alumno recurrirá al lenguaje formal.

Pregunta 2
Simplifica la ecuación diferencial:

Pregunta 3
¿Qué sucede si no hay captura, es decir, $K = 0$? ¿Cómo es la ecuación diferencial? Resuélvela y explícalo de manera clara, tanto su orden, grado, linealidad. ¿Por qué?
Esta pregunta, se busca trabajar dentro del mismo registro algebraico, recurriendo el alumno a sus conocimientos previos.

Pregunta 4
Usando la condición inicial determina su solución particular.

Pregunta 5
Bosquejar la gráfica de la solución encontrada. ¿Qué pasa con la población?
En esta pregunta se busca la conversión de registros del algebraico al grafico, del algebraico al numérico y numérico al algebraico. Usando la vía del punteo para iniciar el trazo de la gráfica.

En la *pregunta 6*, se apoyo en WinPlot, en la cual se le pidió al alumno hacer variar los parámetros de la ecuación diferencial dada.
Realízalo ahora en WinPlot

a. Abrir WinPlot y seleccionar ventana y elegir 2-dimensiones:
b. Ahora seleccionar en ecuación, ecuación diferencial
c. Aparece otra ventana donde escribiremos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y(A - By)$, darle clic y se observan el campo de pendientes
d. Para variar los parámetros irse a “Anim”, “parámetros A-W”, dale un intervalo y observa que sucede al variarlo. Anota tus observaciones.
e. Con la solución general de la ecuación diferencial, eliges “Ecua” y das clic en “Implícita” escribes la solución das clic, y varias también los parámetros, eligiendo “Anim” y das clic en “Parámetros A-W”. Anota tus observaciones ¿Qué sucede con la población?

Pregunta 7
Si ahora consideramos que no hay sobrepoblación pero si hay captura, ¿Cuál es la ecuación diferencial? Determina su solución y bosqueja su gráfica con la solución encontrada. Explica de manera clara ¿Qué le sucede a la población?

En la *pregunta 8*, se enfoca a la solución general de la ecuación diferencial, permitiéndole al alumno hacer variar sus parámetros, al realizar lo anterior se le pregunta ¿Qué sucede con la población?
Se busca trabajar con el registro gráfico-numérico como algebraico.

A través de WinPlot.

a. Abrir WinPlot y seleccionar ventana y elegir 2-dimensiones:
b. Ahora seleccionar en ecuación, ecuación diferencial
c. Aparece otra ventana donde escribiremos la ecuación diferencial
d. Para variar los parámetros irse a “Anim”, “parámetros A-W”, dale un intervalo y observa que sucede al variarlo. Anota tus observaciones.
e. Con la solución general de la ecuación diferencial, eliges “Ecua” y das clic en “Implícita” escribes la solución das clic, y varias también los parámetros, eligiendo “Anim” y das clic en “Parámetros A-W”. Anota tus observaciones ¿Qué sucede con la población?

Pregunta 9
Se tiene en el tiempo $t_0 = 0$ y $y = 1.5$ toneladas, los parámetros $A = 3.4$ y $B = 0.4$ ¿Para que la población de peces permanezca constante qué valor debe tener la captura K? Realiza tus anotaciones.
Esta pregunta hace uso de los registros algebraico y numérico.

Pregunta 10
¿Cómo se debe mantener la captura de los peces para que la población se encuentre en equilibrio es decir $\frac{dY}{dt} = 0$? Realícelo algebraicamente tomando en cuenta que $t_0 = 3$ y $y = 3.5$ toneladas además con $A = 5.2$ y $B = 1$.
Esta pregunta está enfocada al registro algebraico y numérico.

Pegunta 11
Con el inciso anterior ¿Para qué valores de K captura asegura que no se extinguirán los peces?

Pregunta 12
Si A, B y K son tales que la población permanece constante y se dobla el valor de A, ¿en cuánto debe cambiar K para que la población siga permaneciendo constante?

Buscando en ello la conversión de registro, con ayuda del *software*, guiándolos para lograr el objetivo y las preguntas planteadas. En esta última actividad las preguntas 1, 3-8, 10-12 están realizadas en el aprendizaje conceptual, mientras las preguntas 2- 4, 6-12 están en el aprendizaje procedimental, y por último las preguntas 5-8 son de aprendizaje actitudinal.

d) Aplicación de las actividades:

Las actividades realizadas se aplicaron a los alumnos de segundo semestre de la Licenciatura en Física y Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, en la sala de computó con el *software* instalado, durante 6 sesiones, cada sesión de hora y media.

Posteriormente dentro de cada actividad se plantean varias preguntas siguiendo una secuencia, guiando al alumno a la conversión de registro y motivándolo a que lo haga sin temor a equivocarse. Además, se le dio el procedimiento para el uso del *software*.

Durante la aplicación de cada actividad los alumnos comparaban y discutían con respecto a la solución obtenida. Cada una de estas actividades está enfocada a la conversión de registros, ya sea del algebraico al numérico, del algebraico al gráfico, así como del numérico al gráfico y viceversa.

e) Análisis de resultados:

El análisis de resultados se realizó de manera cualitativa para cada alumno, teniendo presente al objetivo de la investigación y las preguntas formuladas para la misma, usando como sustento la teoría de Duval. El objetivo de esta investigación es, describir las ventajas que se tienen al realizar la conversión entre los registros algebraico, gráfico y numérico, en la obtención de la solución de una ecuación diferencial ordinaria a través del *software*. La hipótesis es, WinPlot es una herramienta didáctica que favorece al alumno en la conversión entre los registros de representación facilitando la comprensión de conceptos en ecuaciones diferenciales.

Así como las preguntas:

¿Cuáles son las ventajas de usar varios registros en ecuaciones diferenciales?

¿El uso de *software* facilita la conversión de registros en ecuaciones diferenciales?

f) Evaluación del Aprendizaje

La evaluación del aprendizaje en el alumno se llevó a cabo por medio de lista de cotejo, en las cuales se realizaron con apoyo a los estándares curriculares de la NCTM, tomando en cuenta los indicadores de los niveles de 9-12 y los de evaluación, orientados a la conversión de registro con el apoyo de WinPlot, así como al los tipos de aprendizaje. La elaboración de las tablas que se presentan al término de cada actividad, se elaboraron con la finalidad de mostrar si el aprendizaje que el alumno adquiere es de tipo conceptual, procedimental o actitudinal.

Para la tabla 2 está enfocada al aprendizaje conceptual. Sin embargo, en las tablas 3, 4, 5 y 6 se busca que el alumno adquiera estos tres aprendizajes ya mencionados anteriormente. Con respecto a las preguntas que se encuentran en la tabla 1.1, se indicara que tipo de aprendizaje se busca en cada una de estas.

Tabla 1.1 Las preguntas se realizaron dentro de un enfoque conceptual, procedimental ó actitudinal.

	Aprendizaje Conceptual	Aprendizaje Procedimental	Aprendizaje Actitudinal
Tabla 3	Preguntas 3, 4, 7-12-18, 20-22	Preguntas 1, 2, 3, 5, 6, 9, 13, 14, 22	Preguntas 7-9, 12, 15-22

Tabla 4	Preguntas 3, 4, 7-22	Preguntas 1, 2, 5, 6, 12, 20	Preguntas 7-11, 13, 16-19, 21, 22
Tabla 5	Preguntas 2, 3, 6-12, 14, 17-19, 21 y 24	Preguntas 1, 4, 5, y 13	Preguntas 6-8, 1516, 18, 1920, 22, 23
Tabla 6	Preguntas 2, 3, 6-20, 22, y 23	Preguntas 1, 4, 5, 12	Preguntas 6-11, 13-19, 21-23

Con el apoyo de las tablas facilitará la evaluación de los estudiantes en la aplicación de la actividad, empleará en cada una de las actividades para evaluar el desempeño que tendrá el alumno, y que en conclusiones se retomará estas tablas de cotejo para la confiabilidad y validez de este trabajo.

IV. Análisis de datos

Se diseñó la aplicación de la actividad de tal forma que permita describir las ventajas que se tienen al usar el *software* en la conversión de registro (algebraico, gráfico y numérico) durante la obtención de la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Para la aplicación de las actividades, se eligió un grupo de Ecuaciones Diferenciales, donde el número de alumnos varió en las cuatro actividades, en la primer sesión asistieron 12 alumnos, de los cuales 7 eran mujeres y 5 hombres, finalmente en la cuarta actividad se aplicaron las actividades a solo tres alumnos, dos hombres y una mujer. Considerando que el tamaño de la muestra facilita el estudio de cada uno de los integrantes de una manera cualitativa.

a) Primera sesión.
La primer sesión consistió en definir los conceptos de manera clara y concisa, enfocados a la conversión de registros, es decir, permite saber qué tipo de registro el alumno utiliza para hacer referencia al definir el concepto matemático señalado, con una duración de una hora.

Antes de que iniciaran a definir los conceptos los alumnos mostraban interés para realizar la actividad.

Se les pidió definir los conceptos: ecuación diferencial, orden, grado, linealidad, solución de una ecuación diferencial y condiciones iniciales, con lo cual se desea conocer que tan consciente esta el alumno en el tipo de registro que utiliza, para poder definir el concepto referido.

Los alumnos definieron "*ecuación diferencial*":

Andrés: es una ecuación en la que se ven involucradas derivadas de funciones. Puede verse de la forma $f(x, y, y\acute{},)=0$ y $f(x, y, y\acute{},\ldots, y^{(n)})=0$ si es de orden n.

Bárbara: es una ecuación de la forma $f(x, y, y\acute{},\ldots, y^{(n)})=0.$

Jonathan: es una ecuación de la forma $f(x, y)y^{(n)}+\ldots+\Phi(x, y)y^{(n)}=\varphi(x, y)$

Ignacio: es una ecuación que depende de una función y su(s) derivada(s)

Karina: se define como una ecuación "ordinaria", lo que la distingue entre otras es que es en algunos términos incluyen derivadas.

Lizbeth: es una que se puede resolver de diferentes formas, contiene variables y constantes y están compuestas por polinomios con grado y orden, se pueden encontrar su solución o sus soluciones.

Berenice: es una ecuación que depende de una variable (o más en el caso de las derivas parciales) y que está en función de otra $f(x, y)=\frac{dy}{dx}$.

Alejandra: son soluciones que se resuelven diferencialmente, y que nos ayudan a resolver.

Itzel: es una ecuación en la que, en primer instancia la incógnita que se quiere conocer es la derivada de la variable implicada, la cual se obtiene después de integrar (resolver) la incógnita (derivada)

Fernando: es una ecuación, que en sus elementos cuenta con variables derivables.

Omar: es una expresión matemática de la forma $a_n\Phi^{(n)} + a_{n-1}\Phi^{(n-1)} + ... + a_2\Phi'' + a_1\Phi' + a_0\Phi = b(x)$ donde $a_i \in K$, (K es un campo), $\forall i = 1,...,n$, $\Phi = \Phi(x)$

Claudia: es una ecuación de la forma $y'' + a(x)y' = b(x)$, donde a(x), b(x) son constantes que dependen de x. y´´, y´ son variables que nos van a ayudar a encontrar la solución

Los alumnos Andrés, Bárbara, Jonathan, Berenice, Omar y Claudia recurren a la representación algebraica y al lenguaje natural para definir una ecuación diferencial, mientras Andrés y Berenice tienen claro lo que es una ecuación diferencial y lo expresan de manera algebraica y dentro del lenguaje natural. Bárbara da la expresión algebraica de la ecuación diferencial e Ignacio da su definición en forma clara en lenguaje natural. Jonathan, Karina, Lizbeth, Alejandra, Itzel, Fernando, Omar y Claudia tienen dudas para definirla y algunos recurren a la búsqueda de la representación algebraica de una ecuación diferencial, con ciertas características que ellos recuerdan para poder definirla, o simplemente el lenguaje natural.

Para definir el concepto de "*orden*"

Andrés: es una medida de la mayor derivada que aparece en la ecuación. Así *f(x, y, y´)=0* es de orden 1, y *f(x, y, y´,…,* $y^{(n)}$*)=0* es de orden n

Bárbara: se define como un número que define la ecuación diferencial y tiene que ver con el orden de la derivada, de la misma.

Jonathan: si sustituimos *x* por *tx* y *y* por *ty* y factorizamos t^{α} α indica el orden de la ecuación diferencial

Ignacio: el índice de la derivada.

Karina: es aquel con el cual denotamos las derivadas.

Lizbeth: se refiere a como este acomodado el polinomio

Berenice: es el grado o el mayor grado que tiene una ecuación diferencial $y'' + 3xy + y = 0$ es de 2º. Orden o en si también puede verse como la derivada de mayor orden. (Grado)

Alejandra: nos indica a qué tipo de ecuación se refiere, es decir, si es de primer orden, segundo, etc.

Itzel: es el número de veces que se haya derivado una función (3 veces *f´´´)*

Fernando: es el mayor número de derivadas que tiene una ecuación diferencial.

Omar: es el número máximo de veces que aparece derivada la función $\Phi(x)$ en $a_n\Phi^{(n)} + a_{n-1}\Phi^{(n-1)} + ... + a_2\Phi'' + a_1\Phi' + a_0\Phi = b(x)$

Claudia: este va a depender del y:

$y + a(x) = b(x)$ Es de orden uno

$y'' + a(x)y = b(x)$ Es de orden dos

$y''' + a(x)y'' + d(x)y = b(x)$ Es de orden tres

Los alumnos Andrés, Itzel, Fernando y Omar tienen claro lo que es el orden; Andrés, Itzel y Omar recurren tanto a la representación algebraica, así como el lenguaje natural.

Bárbara y Alejandra emplean el lenguaje natural pero su repuesta es confusa. Mientras que Jonathan recurre a ecuaciones homogéneas exactas para poder decir de qué orden es una ecuación diferencial usa tanto el registro algebraico como el lenguaje natural.

Se le pide al alumno definir el concepto "*grado*", y esto fue lo que contestaron:

Andrés: ….

Bárbara: ….

Jonathan: es el superíndice más grande que acompaña a alguna y (*y´=0* es de grado 1)

Ignacio: el grado del término independiente

Karina: es la máxima potencia a la cual esta elevada un término de la ecuación

Lizbeth: es con el que está compuesto el polinomio

Berenice: es el grado o el mayor grado que tiene una ecuación diferencial $y''+3xy+y=0$ es de 2º. Orden o en si también puede verse como la derivada de mayor orden. (Grado)

Alejandra: nos indica las veces que satisface, por decir una raíz a la ecuación

Itzel: es el máximo orden de las derivadas implicadas en la ecuación diferencial

Fernando: es la mayor potencia que presenta la ecuación diferencial

Omar: se refiere en general a polinomios o a funciones polinomiales. Es el máximo número al que se halla elevada la indeterminada o variable, sea un polinomio o una función polinomial.

Claudia: este va a depender del exponente mayor de la variable. Es decir:

$y+a(x)=b(x)$ de grado uno

$y''+a(x)y=b(x)$ de grado dos

.

.

.

$y^n+y^{n-1}a(x)+...+y''+y=b(x)$ de grado n

Los alumnos Andrés y Bárbara omitieron su respuesta. Sin embargo, los alumnos Jonathan, Karina y Fernando usan el lenguaje natural, solo el alumno Ignacio emplea la representación algebraica. Los alumnos Lizbeth y Omar lo relacionaron con los polinomios para poder definir el concepto de grado, pero no logran concretar el concepto mismo. La alumna Alejandra considera las veces que la raíz debe satisfacer a la ecuación; su noción está alejada de lo que se quiere. Itzel lo ve como el máximo orden de las derivadas implicadas, esta definición que da Itzel es de orden, tiene problemas de confusión con el concepto. Claudia se apoya en la representación algebraica, sin embargo, al explicarlo indica lo contrario, pues no distingue el grado con el orden de una ecuación diferencial.

También se les pidió definir la "*linealidad*" de una ecuación diferencial:

Andrés: en ecuaciones diferenciales se relaciona con la linealidad algebraica. Las ecuaciones lineales "separan sumas y sacan constantes". Para ello es necesario que toda derivada tenga exponente 1. En general las ecuaciones lineales de grado *n* son de la forma: $a_n(x)y^{(n)}+...+a_2(x)y''+a_{\cdot 1}(x)y+a_0(x)y=b(x)$

Bárbara: es una ecuación de la forma $y' + a(x)y = b(x)$
Jonathan: …..
Ignacio: una ecuación que es de grado y orden (1)
Karina: ….
Lizbeth: ….
Berenice: es que la ecuación tenga funciones lineales por ejemplo: $y' + sen(x) = 0$
Alejandra: nos dice que una ecuación es lineal, es decir, que es de primer orden
Itzel: es la característica en la que las ecuaciones diferenciales están dados solo por derivadas de orden continuo (*f´, f´´, f´´´)* de una sola variable
Fernando: …
Omar: decimos que hay linealidad en una ecuación con respecto a la variable *t* si dicha variable sólo se encuentra elevada a la potencia 1.
Claudia: se dice que una ecuación es lineal cuando la ecuación diferencial es semejante a la de una recta, es decir, $y + a(x) = b$

Los alumnos Jonathan, Karina, Lizbeth y Fernando no contestaron. Andrés se basa en las ecuaciones lineales para definir una ecuación diferencial lineal, sin embargo, se confunde con el concepto orden y grado, a pesar de ello en su expresión algebraica es correcta, aunque no inicial qué condiciones se deben de cumplir para que sea una ecuación diferencial lineal. Bárbara en la representación algebraica recurre a una ecuación diferencial lineal conocida, no obstante, no indica las condiciones que deben de cumplirse para ser una ecuación diferencial lineal. Berenice intenta dar un ejemplo que en realidad es un contraejemplo. Omar menciona literales que no considero al en sus respuestas dadas en los conceptos mencionados anteriormente, sin embargo, indica una condición para que se cumpla la ecuación diferencial lineal. Claudia realiza una relación con una recta, quedando en planteamiento y sin más explicación. Como se tiene, algunos alumnos confunden los conceptos orden y grado, cuando son totalmente diferentes.

Par la *"solución de una ecuación diferencial*" respondió lo siguiente:
Andrés: una solución de una ecuación diferencial es de la forma *y=y(x)* que satisface la ecuación $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$
Bárbara: es una función que satisface los problemas de valor inicial, es decir, si ϕ es solución de la ecuación diferencial, entonces, $f(x, \phi, \phi', \ldots, \phi^{(n)})=0$
Jonathan: las soluciones de una ecuación diferencial son aquellas funciones que satisfacen dicha ecuación; gráficamente representan una familia de curvas
Ignacio: es una función la que satisface a las condiciones de la ecuación diferencial
Karina: después de una serie de cálculos realizados a la ecuación, encontramos su solución, en algunos casos encontramos el valor de alguna letra, al sustituir en la ecuación tiene que dar el resultado que se da en la ecuación en caso de tenerlo.
Lizbeth: es el resultado de una serie de operaciones realizada a la ecuación diferencial.
Berenice: es una función que cumple con las condiciones, para poder resolver esa ecuación al evaluarla.
Alejandra: nos determinan el dato que satisface una ecuación diferencial.

Itzel: es la función(es) que satisfacen la ecuación diferencial. Dicha(s) función(es) también representan curvas en el plano.

Fernando: es una función que depende de una variable, que se obtiene al resolver una ecuación diferencial.

Omar: bajo la notación en $a_n\Phi^{(n)}+a_{n-1}\Phi^{(n-1)}+...+a_2\Phi''+a_1\Phi'+a_0\Phi=b(x)$, decimos que *y=y(x)* es una solución de la ecuación diferencial si se cumple que $a_n y^{(n)}+...+a_{\cdot 1}y'+a_0 y=b(x)$, donde *b(x)* es una función continua en I, para $I\subseteq R$

Claudia: es cuando encontramos el valor de *y*, y satisface las condiciones iniciales.

La respuesta que da Andrés es de forma algebraica, indicando que dicha solución satisface a la ecuación diferencial. Bárbara considera a una función que satisface las condiciones iniciales para la ecuación diferencial en su forma algebraica, esto indica que dicha solución encontrada es particular. Jonathan emplea la representación verbal e intrínsecamente tiene presente la representación gráfica de la solución. Ignacio emplea solo el lenguaje natural apoyándose de las condiciones iniciales, nuevamente esto indica que es una solución particular. De manera similar, Karina, comenta que al encontrar la solución y que en algunos casos se encuentra el valor de algunas letras, en ello quiere decir encontrar el valor de la constante de integración, que también resulta de una solución particular se cumple en la ecuación diferencial. Lizbeth considera a la solución como el resultado de un procedimiento a la ecuación diferencial, no profundiza en ello.

Berenice, indica que se deben de cumplir las condiciones pero no indica que condiciones para resolver la ecuación. Itzel da su respuesta de manera clara y concisa en el lenguaje natural y visualiza lo que representa la solución. Fernando emplea el lenguaje natural para indicar que es una función, la cual es obtenida al resolver la ecuación diferencial. Omar, indica a través de la representación algebraica la de la solución, siempre y cuando la notación sea la misma, pues está confundido conforme a sus respuestas dadas anteriormente. Claudia lo ve como solución particular al satisfacer la condición inicial. Algunos alumnos recurren a ciertas características que recuerdan acerca del concepto para poderlo definir.

Por último las “*condiciones iniciales*”:

Andrés: son de la forma $y(x_0)=a$, $y'(x_0)=b$

Bárbara: son restricciones que se le ponen a la ecuación diferencial de modo que podemos obtener una cantidad finita de soluciones para la misma

Jonathan: gráficamente cuando se pide una solución de una ecuación diferencial, que cumpla ciertas condiciones iniciales, esta representa a aquellas curvas que pasan por un punto en especifico (la condición inicial) o más puntos.

Ignacio: valores para los cuales está dado cierto valor de la ecuación.

Karina: son aquellas que se dan cuando se tiene una ecuación, al terminar de resolverla, debemos ver que se cumpla la condición

Lizbeth: …

Berenice: es la solución o evaluación de la ecuación en un punto especifico

Alejandra: son como los datos que te dan inicialmente para resolver tu ecuación diferencial
Itzel: son condiciones que se le imponen a la solución muy particular. Son valores que debe tomar la función solución evaluada en puntos particulares.
Fernando: son los valores que necesita una ecuación diferencial para saber bajo qué condiciones aplicarla
Omar: como el nombre lo indica, son condiciones que se brindan al problema, tales como el valor de la función en algún punto dado, de la derivada en otro punto, etc. Ejemplos de condiciones iniciales son: $f(0)=2$, $f'(1)=0$, $f''(0)=-1$.
Claudia: Es cuando calculamos el valor de la ecuación diferencial en un determinado punto.

Como se puede observar Andrés y Omar recurren a la representación algebraica para indicar de qué forma son las condiciones iniciales, además, Omar se apoya también en el lenguaje natural para definir las condiciones iniciales, indicando ejemplos. Jonathan expresa en el lenguaje natural que representan las condiciones iniciales, menciona que representa aquella curva que pasa por un punto específico, esto indica que sabe representar las condiciones iniciales gráficamente. Lizbeth no contestó y los demás se apoyan en el lenguaje natural para expresar de manera intuitiva.

A continuación se tiene la tabla 2, en la cual se analiza si lograron definir los conceptos indicados, en ella se observan algunas dificultades que el alumno se enfrentó para definir los conceptos mencionados, a que recurrieron para poderlo definir y el registro que recurren de forma inconsciente, para su logro. En esta tabla se busca un aprendizaje conceptual.

Tabla 2. Definición de los conceptos ecuación diferencial, orden y grado, los alumnos suelen confundir el orden con el grado.

		Andrés	**Bárbara**	**Jonathan**	**Ignacio**	**Karina**	**Lizbeth**	**Berenice**	**Alejandra**	**Itzel**	**Fernando**	**Omar**	**Claudia**
ECUACIÓN DIFERENCIAL	La definición es clara	✓			✓		✓						
	Recurre a la representación algebraica	✓	✓	✓			✓					✓	
	Intentó una justificación							✓	✓	✓	✓	✓	✓
	La definición incluye algunas características acerca del concepto					✓					✓	✓	
	La definición no tiene redundancia							✓	✓	✓			
ORD	La definición es clara	✓								✓	✓		
	Recurre a la representación algebraica	✓		✓						✓		✓	✓
	Intento una justificación		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓

EN	La definición incluye algunas características			✓		✓							✓
	Da ejemplos	✓						✓		✓			✓
	La definición no tiene redundancia		✓				✓	✓					
GRADO	La definición es clara												
	Recurre a la representación algebraica			✓				✓					
	Intento una justificación			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	La definición incluye algunas características			✓	✓						✓		✓
	Da ejemplos			✓				✓					
	La definición no tiene redundancia					✓	✓	✓	✓	✓		✓	
SOLUCIÓN	La definición es clara	✓		✓						✓	✓		
	Recurre a la representación algebraica	✓	✓									✓	
	Intento una justificación					✓		✓	✓				
	La definición incluye algunas características				✓		✓					✓	✓
	La definición no tiene redundancia					✓		✓	✓				
	Visualiza gráficamente		✓	✓						✓			
		Andrés	**Bárbara**	**Jonathan**	**Ignacio**	**Karina**	**Lizbeth**	**Berenice**	**Alejandra**	**Itzel**	**Fernando**	**Omar**	**Claudia**
LINEALIDAD	La definición es clara	✓										✓	
	Recurre a la representación algebraica	✓	✓									✓	✓
	Intentó una justificación							✓	✓				✓
	La definición incluye algunas características acerca del concepto				✓					✓			
	La definición no tiene redundancia								✓				
CONDICIONES INICIALES	La definición es clara												
	Recurre a la representación algebraica	✓											
	Intento una justificación		✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
	La definición incluye algunas características		✓	✓	✓	✓		✓				✓	✓
	Da ejemplos	✓											

	La definición no tiene redundancia								✓				
	Visualiza a la solución			✓						✓			

En tabla 2 se indican algunas dificultades que tienen los alumnos en cuanto a los conceptos a definir, solo Andrés es uno de los alumnos que tiene presente los conceptos de manera clara, excepto el concepto de grado que no lo definió.. Bárbara, Jonathan y Lizbeth recurren a la representación algebraica para poder dar la definición, con ello indica que los alumnos acuden a la representación algebraica para expresar el concepto, los conceptos corresponden a las representaciones internas que pertenecen al sujeto y para comunicarlas se requiere de un representación semiótica, es decir, el alumno entiende el concepto recurriendo a la representación algebraica como lo es en este caso de estos alumnos. Los alumnos suelen confundir los conceptos orden y grado, no logran diferenciarlos, como el caso de Berenice y Claudia, los confunden. Para otros tiene el mismo significado.

Los alumnos para alcanzar a definir los conceptos indicados recurren a algunas representaciones de manera inconsciente, como la algebraica y pocos visualizan gráficamente, pues al emplearlas los alumnos manifiestan algo significativo para entender el concepto. Esto nos indica que los alumnos necesitan apoyarse de los registros de representación para comprender un concepto matemático en diferentes representaciones, pero que estas sean dadas en forma consciente.

b) Segunda Sesión

Esta actividad 1, correspondió a dos sesiones de una hora y media respectivamente, en esta sesión asistieron 12 alumnos, de los cuales 6 lograron concluir la actividad los restantes tuvieron la dificultad para plantear el método para resolver la ecuación diferencial. Los 6 alumnos que lograron concluir la actividad, presentaron un desenvolvimiento importante. Antes de iniciar con la actividad, los alumnos mencionaban que en su curso de ecuaciones diferenciales fue teórico y que no realizaron ninguna gráfica de alguna ecuación diferencial.

Para ello se analizarán las respuestas de cada alumno, a través de los registros de algebraico, gráfico y numérico. Mostrando al final de cada actividad una lista de cotejo, que sirven como indicadores a que dificultades se enfrenaron los estudiantes y si en verdad lograron dicha conversión entre los registros, y que tan conscientes están de ellos. Antes de iniciar la actividad, los alumnos mencionaban que no habían graficado ecuaciones diferenciales durante el curso, pero aun así mostraron interés por saber.
El análisis se realizará por actividad y en términos de los registros involucrados para cada actividad.

Empezando con la actividad 1, el alumno **Andrés** contestó lo siguiente:
Pregunta 1.

"Determina la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 1$ "

Para determinar el tipo de ecuación diferencial, el alumno sólo señala que es homogénea sin dar más explicación. Como se observa: 

Dentro de este registro no señala el alumno qué debe cumplir para que sea una ecuación diferencial homogénea, solo da de una manera abierta.

Posteriormente comienza a resolver la ecuación diferencial, emplea el cambio de variable $y = ux$ de manera correcta y deriva; sin embargo, comienza a resolver la ecuación diferencial, pero se da cuenta que la solución a la que ha llegado no es correcta, pues cometió un error al derivar $y = ux$,como se ve en la figura 2.

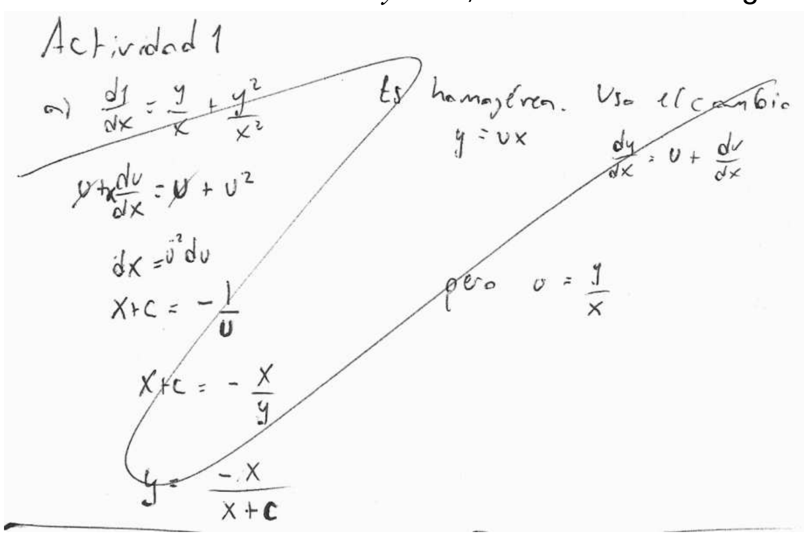


Figura 2.

Regresa nuevamente al cambio de variable y realiza nuevamente la derivada y llega a la solución correcta, como se tiene en la figura 3.

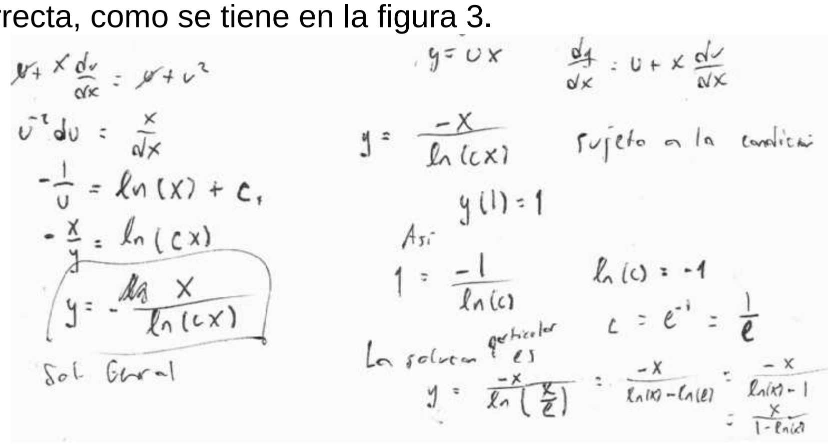


Figura 3.

Andrés, trabajó bien el registro algebraico sin problema alguno, y analizaba cada avance que realizaba, el tratamiento que le da a este registro es el algebraico.

Pregunta 2.
“Determina una solución particular de la ecuación diferencial”

Para la respuesta a esta pregunta el alumno responde inmediatamente a ella, como se muestra en la figura 3, para esto tiene presente la condición inicial de la ecuación diferencial, apoyado en el registro algebraico realizando transformaciones intencionales pues el alumno, toma su tiempo para dar la respuesta solicitada.

Pregunta 3.
"Bosqueja la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial"
El alumno dio la siguiente respuesta:

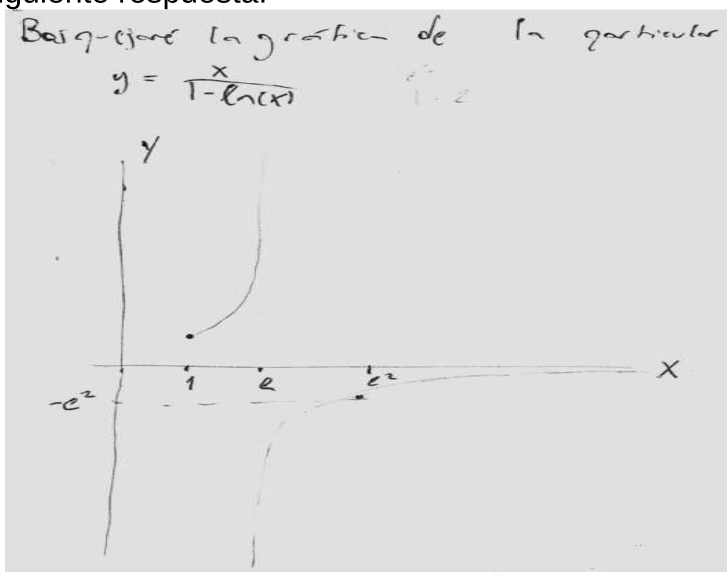


Figura 4.

Identifica los parámetros, para realizar el bosquejo de la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial, es más sencillo tomar solo la solución particular, dando valores como se muestran en la figura, de manera espontánea, y que además, observando la figura 4, al parecer la gráfica del 4to cuadrante va a ir creciendo, pero estará acotada por el eje de las "x". En la función cognitiva de conversión, es decir, al cambiar del registro algébrico al grafico, el alumno se apoya de la condición inicial para trazar la curva del primer cuadrante, hace una manipulación de las variables en la solución particular. El alumno realiza la conversión del registro algebraico al grafico en el momento de transforma espontáneamente a la solución.

La *pregunta 4*, se enfocó a las preguntas que siguen, usando el *software*, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, especialmente de la solución general.

Pregunta 5
¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de WinPlot?

Andrés contesta:

¿Qué sucede con tu bosquejo, difiere? Luna Gar

No demasiado. Yo grafiqué mas que Win Plot

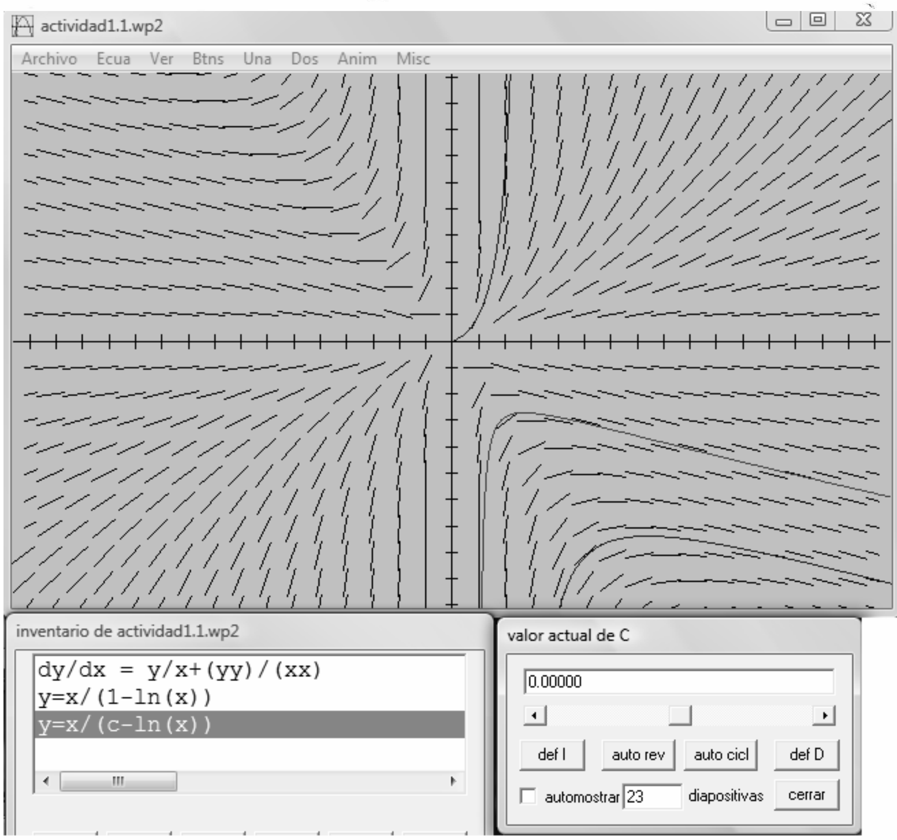


Figura 5.

WinPlot permite verificar si en realidad es correcto lo que bosquejó, tanto para la solución particular, como la general, y graficar directamente la ecuación diferencial; pero aún así, el alumno no se percató que su bosquejo es erróneo como se muestra en la figura 5.

Pregunta 6.
¿Qué puedes decir acerca de WinPlot y de esta ecuación diferencial?
El alumno dio la siguiente repuesta:

Nada, salvo que es muy útil como permite variar un parámetro

Figura 6.

Pregunta 7.
¿En qué aspectos te ayudó WinPlot para comprender la ecuación dada, tanto en la forma implícita de tu solución como la misma ecuación diferencial?
Para el alumno le fue útil solo para

Solo visualizándola

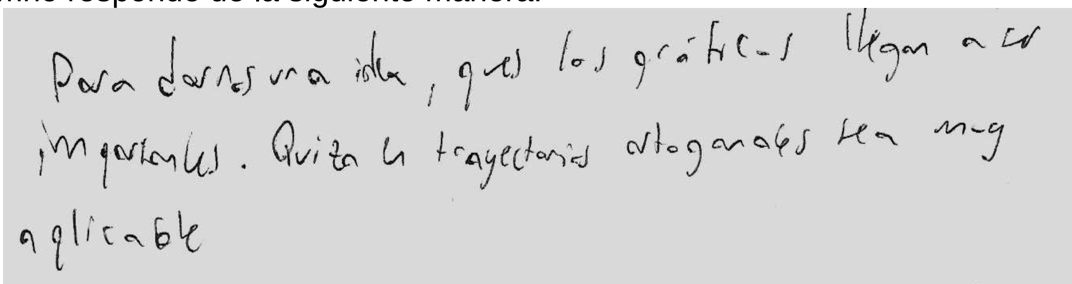
Figura 7.

Esto permite mencionar que para el alumno, el registro gráfico es importante para su aprendizaje y le permite analizar a mayor profundidad su solución.

Pregunta 8

¿Crees que tenga ventajas el usar WinPlot para resolver ecuaciones diferenciales? ¿Por qué lo crees?

El alumno responde de la siguiente manera:



Para darnos una idea, que los gráficos llegan a ser importantes. Quiza la trayectorias ortogonales sea muy aplicable

Figura 8.

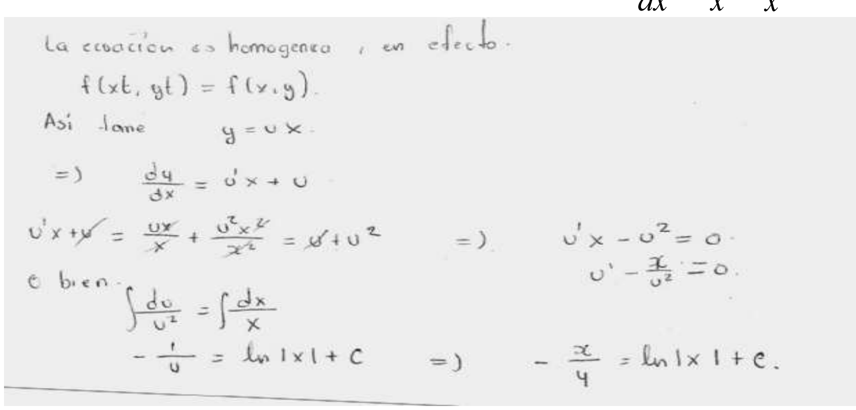
Menciona qué para trayectorias ortogonales sería muy aplicable, con ello permite al alumno vincular otros conceptos con WinPlot, esto indica que el apoyo del *software* es significativo para algunos conceptos matemáticos.

Para el alumno Andrés, la conversión de registros no le es tan difícil, ir del algebraico al gráfico aunque no indico los parámetros y los valores a considera de las variables realizó su bosquejo en forma implícita tal y como se tiene, y del numérico al gráfico se realizó de manera implícita con el apoyo del mismo y la manipulación de los parámetros; el uso del *software* lo ve aplicable a otros conceptos, como el de trayectorias ortogonales.

La alumna **Bárbara**, da las siguientes repuestas a las preguntas planteadas:

Pregunta 1.

"Determina la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ *,* $y(1) = 1$ *"*



La ecuación es homogenea, en efecto.

$f(xt, yt) = f(x, y)$.

Así done $y = ux$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u'x + u$

$u'x + \cancel{u} = \frac{u\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{u^2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \cancel{u} + u^2 \Rightarrow u'x - u^2 = 0.$

$u' - \frac{x}{u^2} = 0.$

o bien.

$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$

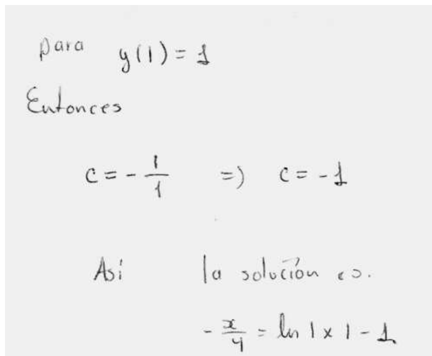
$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C \Rightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + C.$

Figura 9.

Bárbara logra identificar el tipo de ecuación diferencial, pero no menciona el grado ni el orden de la misma. Plantea el cambio de variable y, posteriormente la deriva, sustituye en la ecuación dada, reduce términos e iguala a cero, posteriormente integra. Y llega a la solución, dejando a la solución en su forma implícita; como se observa en la figura 9, con ello se muestra como la formación del problema está en el registro algebraico, por lo tanto el tratamiento que se le da es algebraico, tal y como se esperaba.

Pregunta 2

"Determina una solución particular de la ecuación diferencial, si $y(1)=1$*"*


para $y(1)=1$

Entonces

$$c = -\frac{1}{1} \Rightarrow c = -1$$

Así la solución es:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| - 1$$

Figura 10.

Sin ningún problema obtiene la solución particular, a partir de la solución general obtenida anteriormente y haciendo uso de la condición inicial, la encuentra apoyándose en el registro algebraico.

Pregunta 3.

"Bosqueja la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial"

La alumna dio la siguiente respuesta:

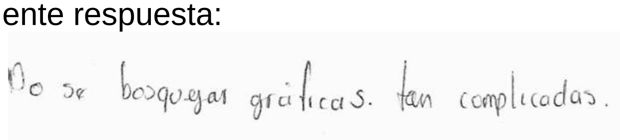

No se bosquejar gráficas tan complicadas.

Figura 11.

Con ello nos permite decir que la alumna tiene dificultad para pasar de un registro a otro, y no logra discriminar la información que tiene a su alcance, es decir, la solución particular da pauta a trazar la curva solución de la ecuación diferencial y permite obtener una generalización de la familia de soluciones de la misma.

La *pregunta 4*, se enfocó a las siguientes preguntas, usando el *software*, el alumno puede manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, especialmente de la solución general.

Pregunta 5

¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de WinPlot?

La alumna contesta:

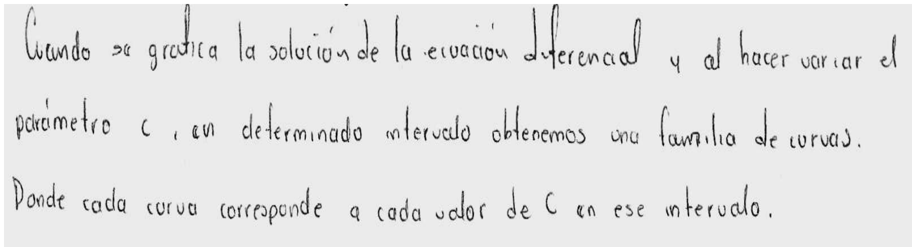

Cuando se grafica la solución de la ecuación diferencial y al hacer variar el parámetro c, en determinado intervalo obtenemos una familia de curvas.
Donde cada curva corresponde a cada valor de C en ese intervalo.

Figura 12.

Aunque la alumna no realizó el bosquejo de la familia de soluciones de la ecuación diferencial pues menciona que no puede trazar gráficas tan complicadas, con el apoyo de WinPlot puede visualizar la gráfica, tanto el campo de pendientes, como la solución encontrada de la ecuación diferencial, tienen problemas de transformar la expresión algebraica a la gráfica.

Pregunta 6
¿Qué puedes decir acerca de WinPlot y de esta ecuación diferencial?

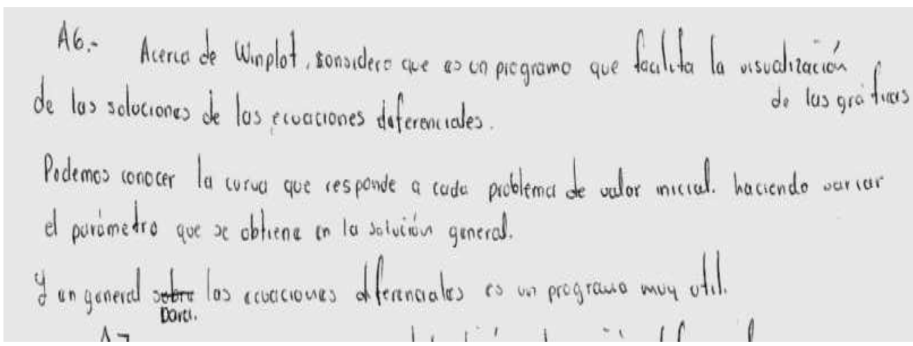

A6.- Acerca de Winplot, considero que es un programa que facilita la visualización de las gráficas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.
Podemos conocer la curva que responde a cada problema de valor inicial. haciendo variar el parámetro que se obtiene en la solución general.
Y en general ~~sobre~~ para las ecuaciones diferenciales es un programa muy útil.

Figura 13.

Para Bárbara WinPlot facilita la visualización en las gráficas que le permite visualizar la gráfica de la solución obtenida.

Pregunta 7
¿En qué aspectos te ayudó WinPlot para comprender la ecuación dada, tanto en la forma implícita de tu solución como la misma ecuación diferencial?

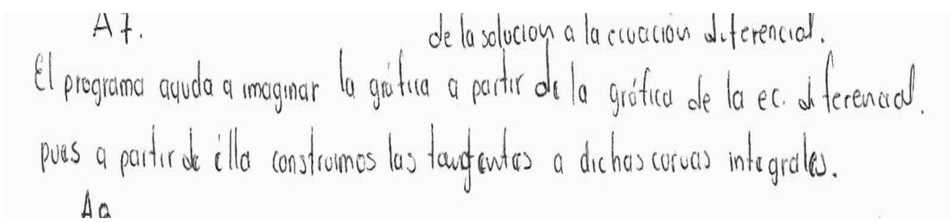
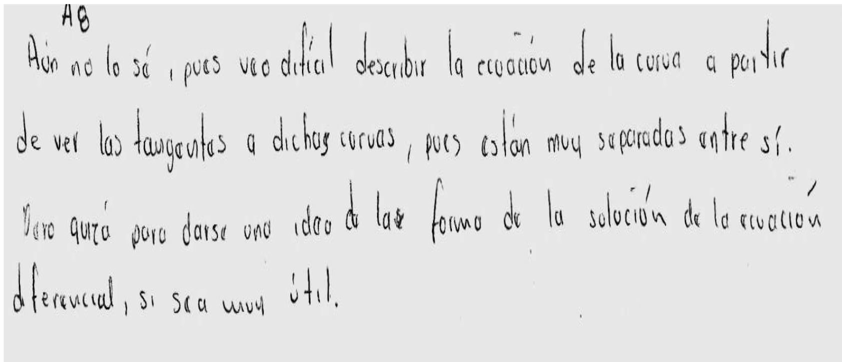

A7.
El programa ayuda a imaginar la gráfica de la solución a la ecuación diferencial a partir de la gráfica de la ec. diferencial.
pues a partir de ella construimos las tangentes a dichas curvas integrales.

Figura 14.

A Bárbara, WinPlot permite la conversión de registro a partir del gráfico al algebraico, es decir, a partir de la gráfica de la ecuación diferencial en la cual se muestran las pendientes se puede imaginar la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.

Pregunta 8

¿Crees que tenga ventajas el usar WinPlot para resolver ecuaciones diferenciales? ¿Por qué lo crees?



AB

Aún no lo sé, pues veo difícil describir la ecuación de la curva a partir de ver las tangentes a dichas curvas, pues están muy separadas entre sí. Pero quizá para darse una idea de la forma de la solución de la ecuación diferencial, si sea muy útil.

Figura 15.

Para la alumna Bárbara, la conversión de registro del algebraico al gráfico es difícil, pues comenta que no puede bosquejar gráficas tan complicadas; del registro gráfico al verbal como al numérico, no le es tan complicado, en WinPlot le permite variar la constante de integración de la solución general de la ecuación diferencial.

El alumno **Jonathan** responde a las preguntas de la siguiente manera:

Pregunta 1

"Determina la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 1$ "

El alumno indica el porqué es una ecuación homogénea, pero no señala el orden ni el grado, además realiza de manera correcta el cambio de variable, y llega a la solución, en la figura 16 se muestra a la solución en su forma explícita; para el alumno trabajar dentro del mismo registro algebraico no presenta dificultad.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ $\quad y(1)=1$

Notemos que $F(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ es homogenea

ya que $F(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \frac{t^2y^2}{t^2x^2} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = F(x,y)$

por lo tanto la ec. a) es homogenea. y el método que seguiremos es para llevarla a una de variables separables;

$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$

$y' = u + u'x$

sustituyendo:

$u + \frac{du}{dx}x = \frac{ux}{x} + \frac{u^2x^2}{x^2}$

$u + \frac{du}{dx}x = \cancel{u} + u^2$

$\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{x}$ la cual es de var. separables;

$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$ $\qquad -u^{-1} = \ln x + c$

$-\frac{1}{u} + c = \ln x$

$e^{-\frac{1}{u} + c} = x$

$K e^{-\frac{1}{u}} = x$

$K e^{-\frac{1}{y/x}} = x$

$K e^{-\frac{x}{y}} = x$ ó $-\frac{x}{y} + c = \ln x$

$-\frac{x}{y} = \ln x - c$

$y = \frac{-x}{\ln x - c} = \frac{x}{c - \ln x}$

las 3 son equivalentes, sust. la condicion inicial; $\leftarrow$ sol. general.

Figura 16.

Pregunta 2

“Determina una solución particular de la ecuación diferencial”

las 3 son equivalentes, sust. la condicion inicial;

$1 = \frac{1}{c - \ln(1)} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 1$

$y = \frac{x}{1 - \ln x}$ $\leftarrow$ sol. que satisface la condición inicial

Figura 17.

Llegando así a una solución satisfactoria a través de la condición inicial.

Pregunta 3.

“Puedes bosquejar la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial”

El alumno dio la siguiente respuesta:

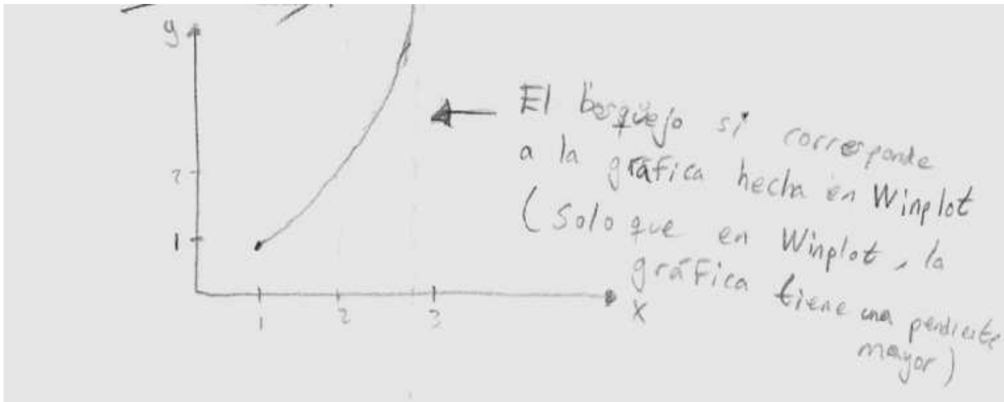


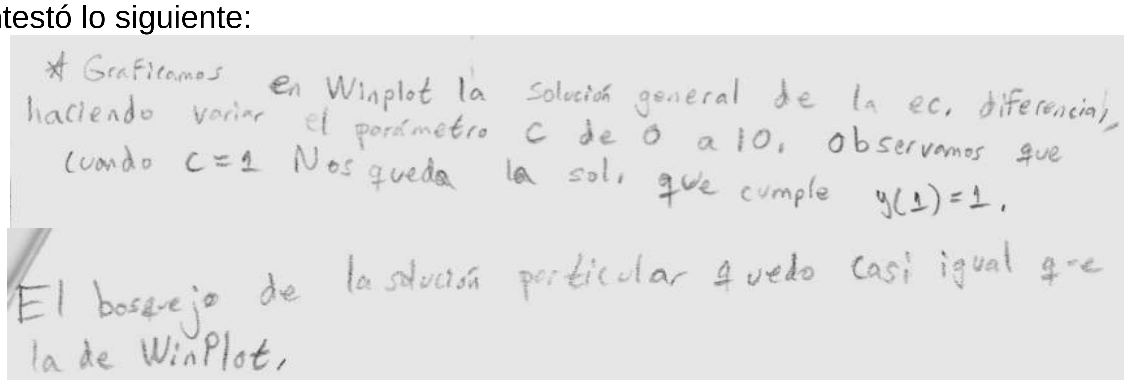
Figura 18.

El alumno realiza la conversión del registro algebraico al grafico, apoyándose de la solución particular pues le es más fácil, ya que si usa la solución general se le complicaría pues tendría que graficar toda la familia de soluciones lo cual no le es posible, la conversión del registro algebraico al gráfico, lo logra, sin embargo, Jonathan analizo la función de la solución de manera implícita, a través de ello traza el bosquejo, apoyándose de la condición inicial y por su puesto de la solución particular.

Para Jonathan la conversión de registro no es difícil, pues su trazo es correcto ya comparándolo con WinPlot, pues hace uso de las condiciones iniciales y la solución encontrada, y identifica la pendiente en el *software*, esto muestra que el alumno reconoce el concepto de ecuación diferencial de manera idónea.

Dentro de la *pregunta 4*, se enfocó a las siguientes preguntas, usando el *software*, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencia, especialmente de la solución general.

Pregunta 5
¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de WinPlot?
Contestó lo siguiente:


* Graficamos en Winplot la solución general de la ec. diferencial, haciendo variar el parámetro C de 0 a 10, observamos que cuando C=1 Nos queda la sol. que cumple y(1)=1.

El bosquejo de la solución particular quedo casi igual que la de WinPlot,

Figura 19.
Jonathan, indica que su bosquejo es casi igual al que WinPlot, apoyándose de la condición inicial y la variación del parámetro de la solución general en el intervalo indicado.

Pregunta 6
¿Qué puedes decir acerca de WinPlot y de esta ecuación diferencial?

El programa nos da, obviamente, un bosquejo más exacto de la gráfica de la solución particular, además podemos obtener varias soluciones solo variando el parámetro.

Figura 20.

Para Jonathan, con WinPlot se obtiene las gráficas con mayor exactitud, variando el parámetro de la constante de integración puede obtener varias soluciones.

Pregunta 7
¿En qué aspectos te ayudo WinPlot para comprender la ecuación dada, tanto su forma implícita de tú solución como la misma ecuación diferencial?
Jonathan contesta:

Me dió una idea de la forma de las soluciones de la ec. diferencial.

Figura 21.

Para Jonathan, le facilita la forma de la solución de la ecuación, y puede visualizarla.

Pregunta 8
¿Crees que tenga ventajas al usar WinPlot para resolver ecuaciones diferenciales? ¿Por qué lo crees?

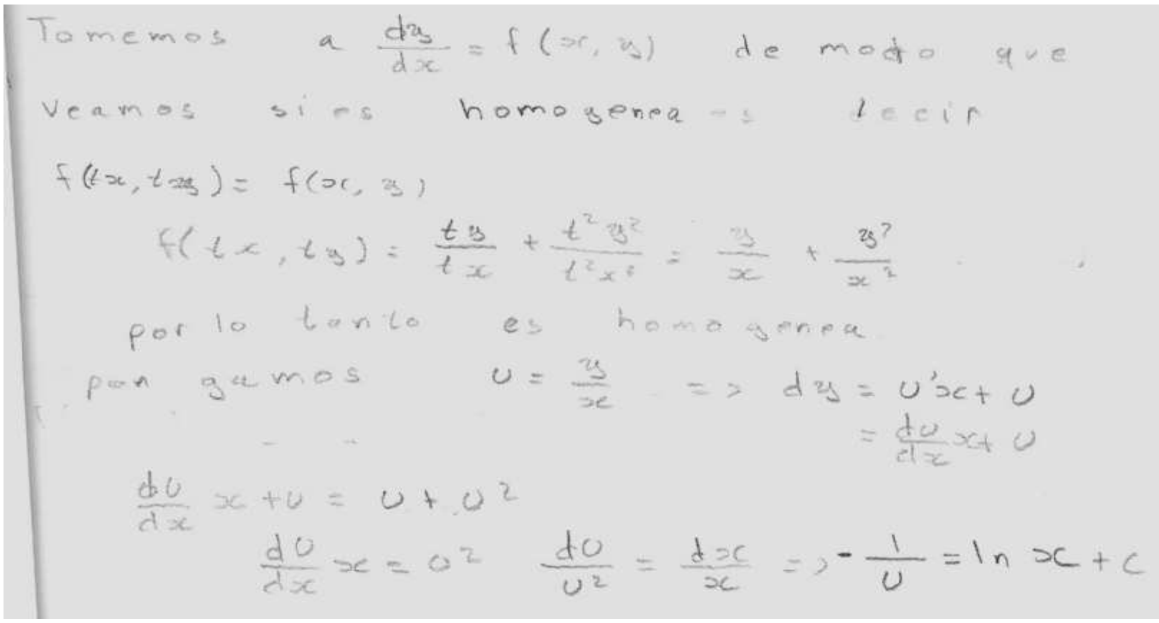
Para el alumno Jonathan, la conversión de registros no le es difícil, además es consciente de lo que va realizando, y apoyándose de WinPlot le da una mejor visualización de lo que está sucediendo con la solución particular en el momento en que manipula el parámetro, comenta que el *software* le da una idea de la forma de las soluciones antes de resolver la ecuación diferencial y le permite comprobar si la solución encontrada es correcta, como se indica en la figura 22.

Sí, Además de ser rápido, tiene la ventaja de darnos una idea de la forma de las soluciones de la ecuación, antes de resolver la ec. diferencial,
Y podemos comprobar si nuestra solución corresponde a lo que vemos en WinPlot.
Además de ser más didáctico ayudarse de WinPlot.

Figura 22.

El alumno **Ignacio**, respondió lo siguiente:
Pregunta 1

"Determina la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 1$ "



Tomemos a $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ de modo que

Veamos si es homogenea es decir

$f(tx, ty) = f(x, y)$

$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \frac{t^2y^2}{t^2x^2} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

por lo tanto es homogenea

pongamos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow dy = u'x + u$

$= \frac{du}{dx}x + u$

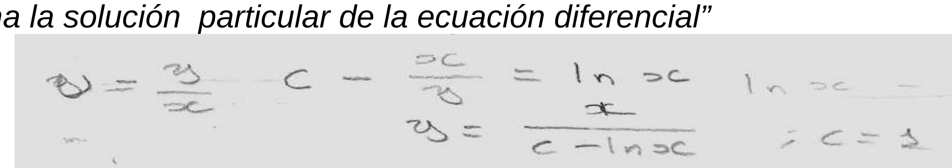
$\frac{du}{dx}x + u = u + u^2$

$\frac{du}{dx}x = u^2 \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln x + c$

Figura 23.

El alumno verifica si es una ecuación diferencial homogénea, es decir si la función es homogénea y ve que se cumple, pero aun así no indica que para que sea homogénea su grado debe ser cero, propone el cambio de variable y llega a la solución.

Pregunta 2
"Determina la solución particular de la ecuación diferencial"



$u = \frac{y}{x} \quad c - \frac{x}{y} = \ln x \quad \ln x$

$y = \frac{x}{c - \ln x} \quad ; c = 1$

Figura 24.

Ignacio, a partir de la solución general, en seguida coloca el valor de la contante de integración sin efectuar el procedimiento algebraico, fue solo mental.

Pregunta 3.
"Bosqueja la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial"
Ignacio dio la siguiente respuesta:

Figura 25.

Ignacio traza la gráfica, e indica un punto que al parecer es la condición inicial aunque no lo señala, y también indica que es creciente como se observa en la figura 25.

La *pregunta 4*, se enfocó a las preguntas que siguen, usando el *software* WinPlot, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, especialmente de la solución general.

Pregunta 5
¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de WinPlot?
Contesta lo siguiente:

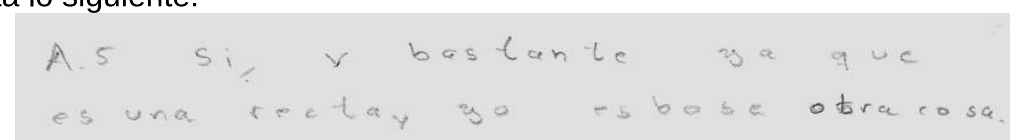

A.5 Si, y bastante ya que
es una recta y yo esbose otra cosa.

Figura 26.

El alumno compara su bosquejo con la de WinPlot, señala que es una recta, pero no lo es, pues introduce los datos de manera equivoca al *software*.

Pregunta 6
¿Qué puedes decir acerca de WinPlot y de esta ecuación diferencial?

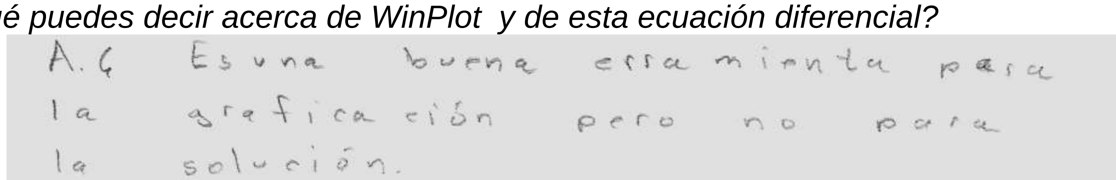

A.6 Es una buena erramienta para
la graficación pero no para
la solución.

Figura 27.

Para Ignacio, es una herramienta para trazar gráficas, sin embargo, para la solución no lo es, considerando que al graficar la ecuación diferencial muestra las pendientes y la solución representa la curva solución, ello indica que al concepto le es difícil distinguir entre las diferentes formas de representación el concepto de solución, pues no le es significativo.

Pregunta 7
¿En qué aspectos te ayudo WinPlot para comprender la ecuación dada, tanto su forma implícita de tu solución como la misma ecuación diferencial?

La grafica varia su ~~forma~~. punto de indeterminacion y por tanto cambia su forma y concabidad

Figura 28.

Para Ignacio, en la gráfica obtenida por WinPlot, al variar los parámetros cambia la forma, así como la concavidad de la misma.

Pregunta 8
¿Crees que tenga ventajas al usar WinPlot para resolver ecuaciones diferenciales? ¿Por qué lo crees?

Puedo observar como se hace el cambio dela grafica por sierta constante.

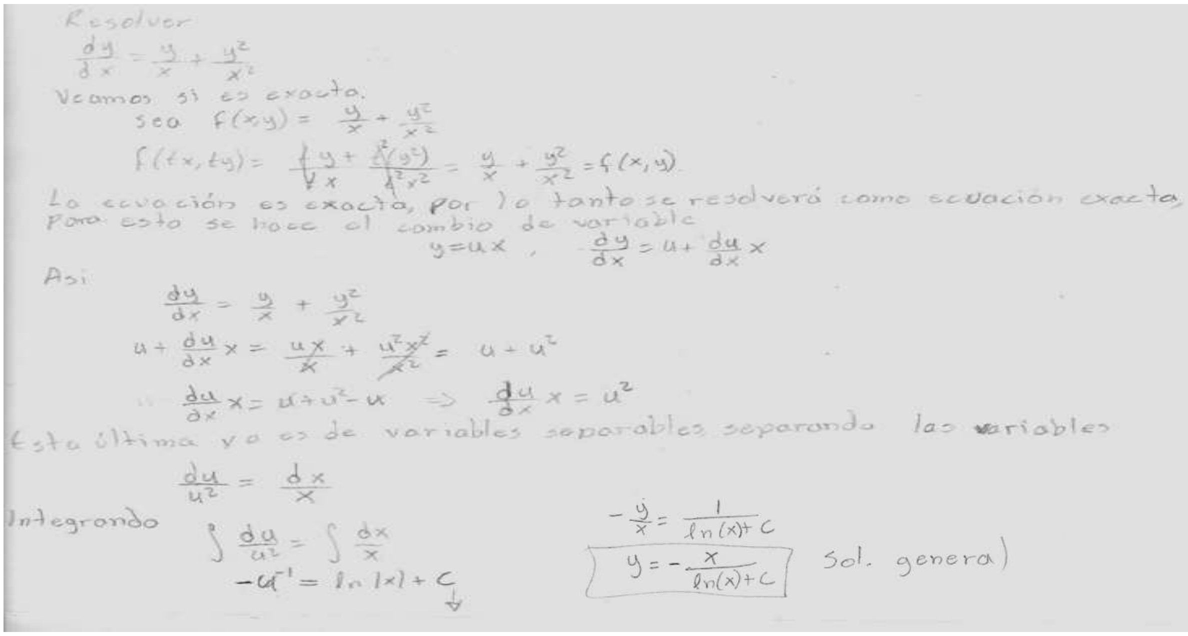
Figura 29.

Para el alumno WinPlot le es importante solo para la variación del parámetro y el tener mejor visualización del comportamiento de la gráfica, mientras que para la solución no es bueno, además, con todo ello logra identificar los cambios que sufren los parámetros al variarlos.

La alumna **Itzel**, respondió lo siguiente:
Pregunta 1

"Determina la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 1$ "

La alumna está confundida con los conceptos de ecuación diferencial homogénea y ecuación diferencial exacta, menciona que es "exacta", cuando en realidad lo que realiza se cumple para ecuaciones diferenciales homogénea de primer orden, además no indica el orden, ni grado. Sin embargo, realiza el cambio de variable que la lleva a variables separables y resuelve la ecuación, llegando a la solución correcta como se muestra en la figura 30.



Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

Veamos si es exacta.

sea $f(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

$$f(tx,ty) = \frac{\cancel{t}y}{\cancel{t}x} + \frac{\cancel{t^2}(y^2)}{\cancel{t^2}x^2} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = f(x,y)$$

La ecuación es exacta, por lo tanto se resolverá como ecuación exacta

Para esto se hace el cambio de variable

$$y = ux \,, \quad \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$$

Así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$u + \frac{du}{dx}x = \frac{u\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{u^2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = u + u^2$$

$$\therefore \frac{du}{dx}x = u + u^2 - u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = u^2$$

Esta última ya es de variables separables separando las variables

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

Integrando

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-u^{-1} = \ln|x| + C$$

$$-\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln(x) + C}$$

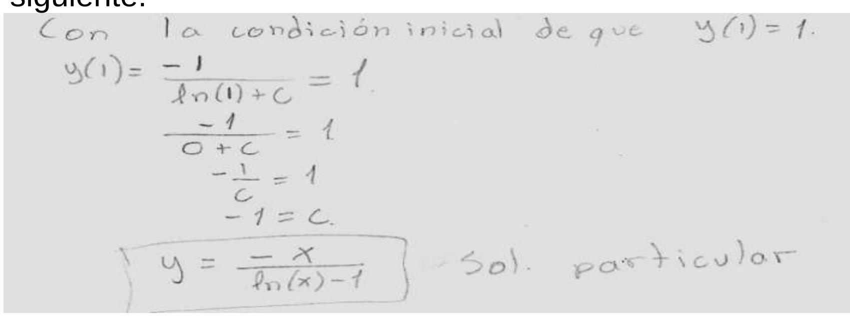
$$\boxed{y = -\frac{x}{\ln(x)+C}} \quad \text{Sol. general)}$$

Figura 30.

Pregunta 2

“Determina una solución particular de la ecuación diferencial”

Itzel realizó lo siguiente:



Con la condición inicial de que $y(1) = 1$.

$$y(1) = \frac{-1}{\ln(1) + C} = 1$$

$$\frac{-1}{0 + C} = 1$$

$$-\frac{1}{C} = 1$$

$$-1 = C.$$

$$\boxed{y = \frac{-x}{\ln(x) - 1}} \quad \text{Sol. particular}$$

Figura 31.

Itzel, se apoya de la condición inicial y la solución general, a través del registro algebraico y numérico, para llegar a la solución particular como se muestra en la figura 31.

Pregunta 3.

“Bosqueja la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial”

La alumna dio la siguiente respuesta:

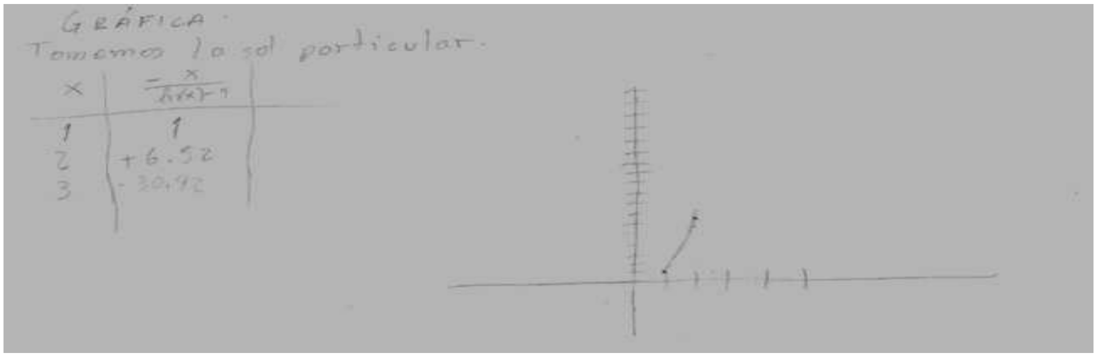


Figura 32.

La alumna realiza la conversión de registro del algebraico al gráfico sin ningún problema a través de la solución particular, tabulando solo algunos valores de *x,* en esta parte, la alumna se apoya en un registro mas, el de tabulación, realizando así la conversión del registro algebraico al tabular. Posteriormente del tabular al gráfico, sin duda no logra identificar estos registros de manera consciente, pero si para construir la curva solución como se muestra en la figura 32, llevando a cabo la conversión de registros entre el algebraico al gráfico y al tabular.

La *pregunta 4*, se enfocó a las preguntas que siguen, usando el *software*, le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencia, especialmente de la solución general.

Pregunta 5
¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de WinPlot?
Itzel contesta:

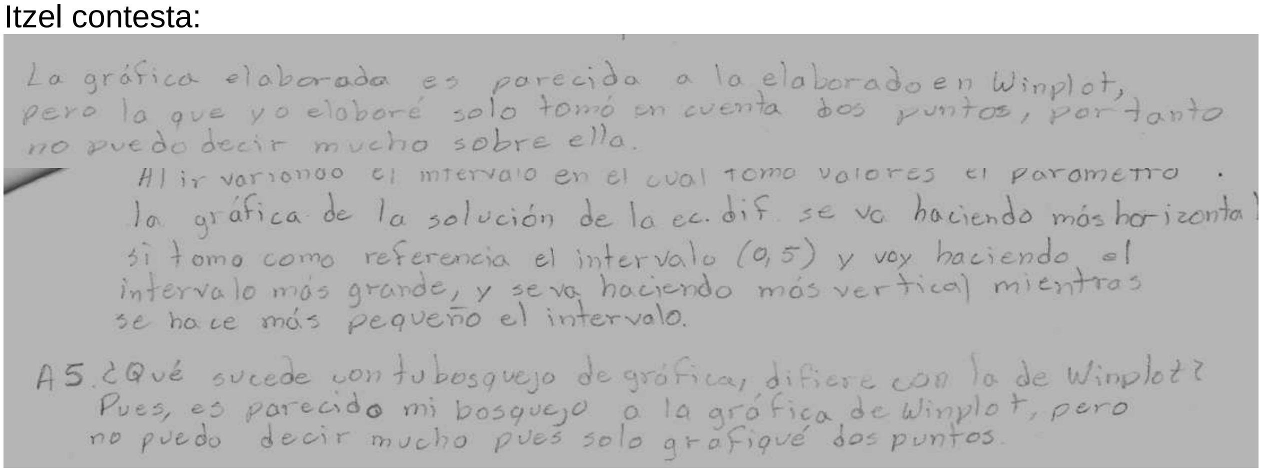
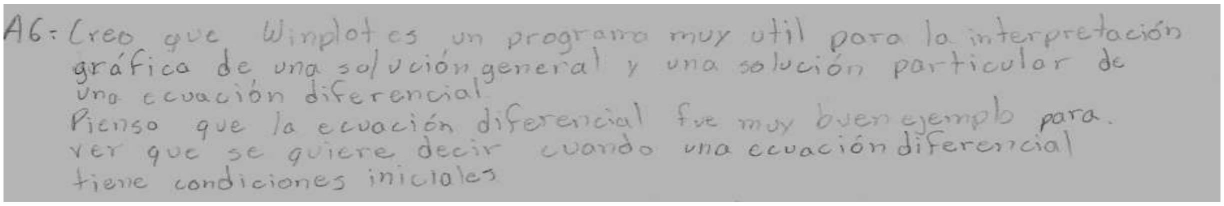

La gráfica elaborada es parecida a la elaborado en Winplot, pero lo que yo elaboré solo tomó en cuenta dos puntos, por tanto no puedo decir mucho sobre ella.
Al ir variando el intervalo en el cual tomo valores el parametro. la gráfica de la solución de la ec. dif. se va haciendo más horizontal si tomo como referencia el intervalo (0,5) y voy haciendo el intervalo más grande, y se va haciendo más vertical mientras se hace más pequeño el intervalo.
A5. ¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de Winplot?
Pues, es parecido mi bosquejo a la gráfica de Winplot, pero no puedo decir mucho pues solo grafiqué dos puntos.

Figura 33.

La alumna al comparar su bosquejo con la de WinPlot menciona que es parecido, aunque solo graficó dos puntos, que son correctos, y WinPlot le permitió verificar, si estaba en lo correcto, efectivamente estaba en lo correcto.

Pregunta 6
¿Qué puedes decir acerca de WinPlot y de esta ecuación diferencial?

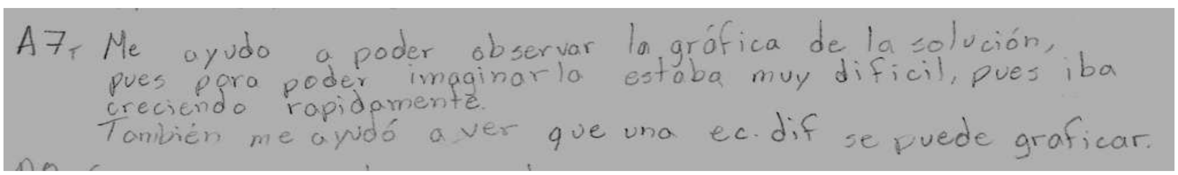


A6: Creo que Winplot es un programa muy útil para la interpretación gráfica de una solución general y una solución particular de una ecuación diferencial.
Pienso que la ecuación diferencial fue muy buen ejemplo para ver que se quiere decir cuando una ecuación diferencial tiene condiciones iniciales

Figura 34.

Para Itzel, WinPlot resulta muy útil en la interpretación gráfica de la solución, teniendo en cuenta que una interpretación es un cambio de contexto, que se da a través de analogías, mientras que para una representación se requieren tres actividades ya mencionadas anteriormente, de las cuales resulta más importante la conversión, tal y como Itzel realizó, como se muestra en la figura 34, dándole importancia a la ecuación diferencial planteada.

Pregunta 7
¿En qué aspectos te ayudó WinPlot para comprender la ecuación dada, tanto su forma implícita de tu solución como la misma ecuación diferencial?



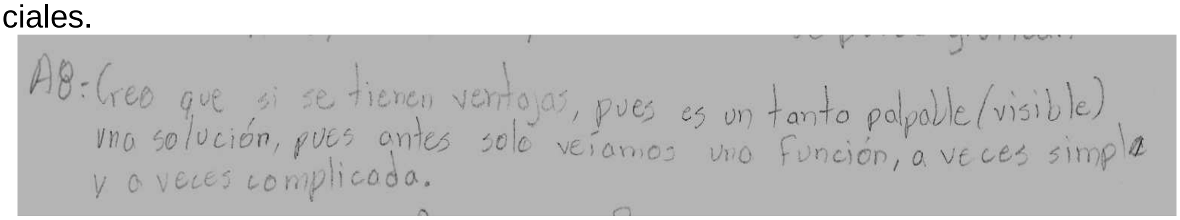
A7: Me ayudo a poder observar la gráfica de la solución, pues para poder imaginarla estaba muy dificil, pues iba creciendo rapidamente.
También me ayudó a ver que una ec. dif se puede graficar.

Figura 35.

Para la alumna, WinPlot ha resultado un buen apoyo, ya que menciona que se puede observar la gráfica de la solución obtenida, y una ecuación diferencial se puede graficar.

Pregunta 8
¿Crees que tenga ventajas el usar WinPlot para resolver ecuaciones diferenciales? ¿Por qué lo crees?

Para la alumna la conversión de registro no es complicado, pues se apoyó en el registro tabular, tomando solo dos valores para la solución particular y los graficó, menciona que fue poco lo que realizó, tan solo dos puntos, sin embargo, WinPlot le permitió comparar con su bosquejo y la motivó a construir la gráfica de la solución de cualquier ecuación diferencial. Para ella una de las ventajas que se tiene con este *software* es graficar la ecuación diferencial directamente y también graficar la solución obtenida de la propia ecuación, que a veces es complicada como indica en la figura 36. Además señala que la ecuación planteada es un buen ejemplo para interpretar gráficamente las condiciones iniciales.



A8: Creo que si se tienen ventajas, pues es un tanto palpable (visible) una solución, pues antes solo veiamos una función, a veces simple y a veces complicada.

Figura 36.

Para Itzel, su desenvolvimiento en la actividad le permitió mostrar sus habilidades, aunque el inicio presento confusión entre los conceptos señalados, sin embargo, mostro un paso importante en su aprendizaje, es decir, una forma de que ella construye sus gráficas es necesario de apoyarse en un registro mas como es el tabular, facilitando así la tarea solicitada. De esta manera, WinPlot fue motivador hacia ella, para atreverse a graficar cualquier ecuación diferencial.

La alumna **Karina**, respondió lo siguiente:
Pregunta 1

"Determina la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 1$ "

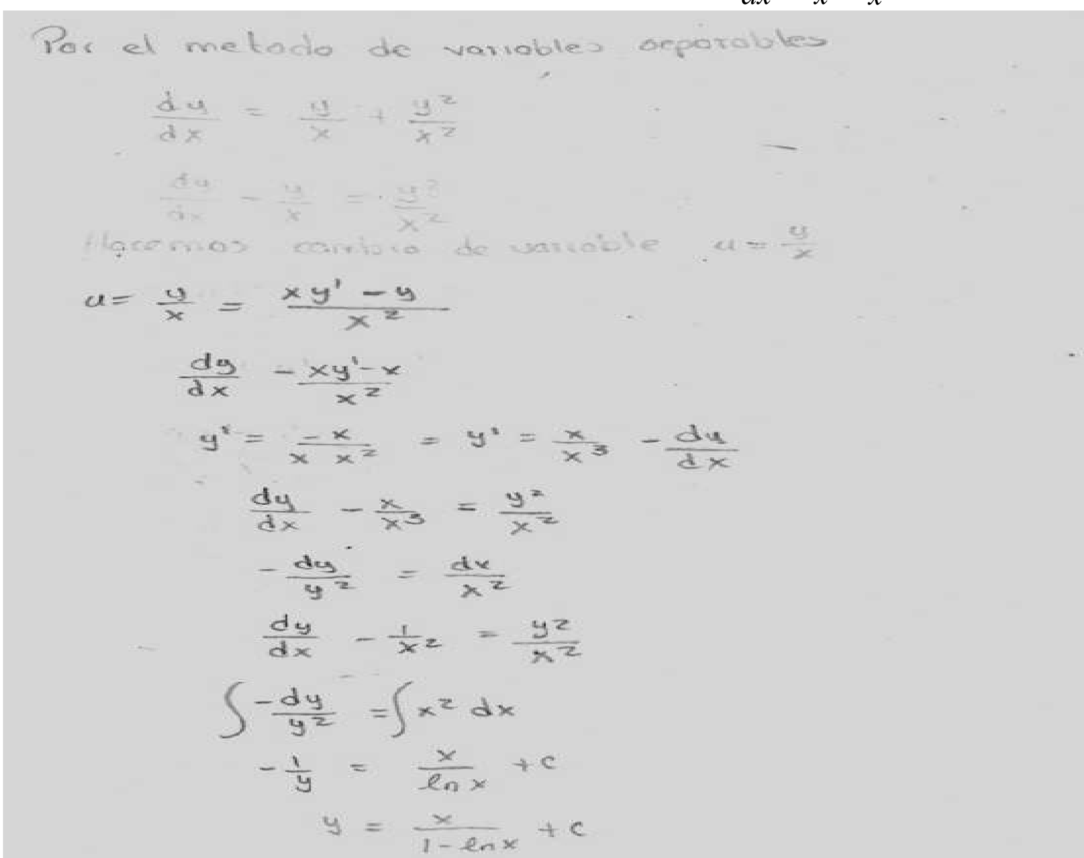


Figura 37.

La alumna se enfocó solamente a resolver la ecuación diferencial, sin considerar si es una ecuación homogénea, aun así su proceso para llegar a la solución es incorrecto pues al hacer el cambio de variable y al derivar a *u* respecto a *x*, realiza una serie de cambios, y de igualdades que para ella se cumplen pero que no son válidos, llega a la solución sin darse cuenta que es incorrecto el proceso.

Pregunta 2
"Determina la solución particular de la ecuación diferencial"

Karina no le fue posible determinar la solución particular, esto indica que para el registro algebraico, como numérico tiene dificultades.

Pregunta 3.
“Bosqueja la gráfica de la familia de soluciones de la ecuación diferencial”

La alumna no realizó el bosquejó.

La *pregunta 4*, se enfocó a las siguientes preguntas, usando el *software*, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, especialmente de la solución general.

Pregunta 5
¿Qué sucede con tu bosquejo de gráfica, difiere con la de WinPlot?

No contestó, ya que no realizó el bosquejo.

Pregunta 6
¿Qué puedes decir acerca de WinPlot y de esta ecuación diferencial?

Creo que al tener ya la solución de la ecuación diferencial y meterla al programa fue mas facil obtener su grafica

Figura 38.

Para Karina, resolver una ecuación diferencial y encontrar la solución, es muy fácil usando WinPlot para graficar, recordando que no le fue posible realizar el bosquejo.

Pregunta 7
¿En qué aspectos te ayudó WinPlot para comprender la ecuación dada, tanto tu solución, como la misma ecuación diferencial?

Bueno creo que este programa nos ayudo a ver como era nuestra grafica ya que podiamos darle cualquier intervalo a esta y nos mostraba como es

Figura 39.

A Karina le fue útil para representar gráficamente la solución y manipular la constante de integración, en un determinado intervalo.

Pregunta 8
¿Crees que tenga ventajas el usar WinPlot para resolver ecuaciones diferenciales? ¿Por qué lo crees?

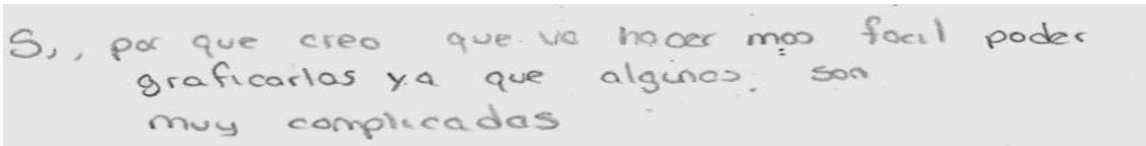

S., por que creo que va hacer mas facil poder
graficarlas ya que algunos son
muy complicadas

Figura 40.

Para la alumna el cambio de registro, es complicado, al pasar del algebraico al gráfico, no logró realizar el bosquejo de la solución, mientras que del registro gráfico al verbal como al numérico se le facilitó con el apoyo del *software*, manipulando los parámetros de la solución encontrada.

En esta actividad los alumnos, en el transcurso de las actividades mostraban una actitud positiva y entusiasta, pues algunos que no lograron bosquejar la gráfica que esto conlleva a una dificultad de conversión de registro, en no saber identificar los parámetros de las variables visuales e indicar si el trazo el sentido de inclinación es curvo o recto, dar valores a las variables para general el trazo y así lograr representar dicha solución. Tanto los alumnos que lograban el bosquejo y lo que no lo realizaron, al graficarlo a través de WinPlot se sorprendían al visualizar dichas solución obtenida.

En la tabla 3 se tiene una lista de cotejo en la cual se recaba información acerca de los alumnos si lograron un aprendizaje de tipo conceptual, procedimental ó actitudinal, que van enfocados a la conversión entre los registro de representación, tomando en cuenta algunos indicadores de la NCTM.

Para esta actividad, se considera la siguiente tabla que se describen las dificultades que tiene los alumnos, a través de los siguientes indicadores, todo referente a la conversión de registros (algebraico y gráfico).

Tabla 3.conversión de registro, entre el algebraico, grafico y numérico.

Alumnos	Andrés	Bárbara	Jonathan	Ignacio	Itzel	Karina
1. Plantea el método a resolver la ecuación diferencial	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2. Realiza cambio de variable	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. Identifica que es una función homogénea de grado cero		✓	✓	✓		
4. Indica el orden, grado y linealidad de la ecuación diferencial						
5. Resuelve la ecuación diferencial en el registro algebraico	✓	✓	✓	✓	✓	✓
6. Justifica la solución encontrada	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7. Identifica que la solución general representa la familia de las curvas solución	✓		✓		✓	
8. Observa los parámetros y los valores de las variables para realizar el bosquejo de la solución particular	✓		✓		✓	

9. Identifica a los parámetros y realiza la manipulación dentro del registro algebraico						
10. Realizó el bosquejo de la solución particular de manera correcta	✓		✓		✓	
11. Identifica que la pendiente es positiva en el primer cuadrante	✓		✓		✓	
12. Representa y analiza a la solución utilizando tablas como un registro mas					✓	
13. Considera los diferentes casos cuando la constante de integración $c>0$, $c<0$ y $c=0$	✓		✓		✓	
14. Analiza los efectos que ocasiona la gráfica de la solución cuando cambian los parámetros	✓	✓	✓	✓	✓	✓
15. Identifica en WinPlot los parámetros, al manipularlos y se da cuenta de sus errores en el bosquejo realizado a papel y lápiz	✓	✓	✓	✓	✓	
16. Analiza los efectos que ocasiona en la gráfica en los cambios de los parámetros	✓		✓	✓	✓	
17. Se enfrenta a la no-congruencia cuando intenta regresar del registro grafico al algebraico	✓		✓	✓	✓	
18. Percibe diferencias entre la gráfica y la representación algebraica			✓	✓	✓	
19. Identifica las diferencias entre su gráfica bosquejada y la de WinPlot			✓	✓	✓	
20. Utiliza y valora las conexiones entre las matemáticas y otras materias	✓		✓	✓	✓	
21. Hace traducciones entre representaciones tabulares, gráficos y algebraicos			✓	✓	✓	
22. verifica que la solución obtenida corresponde al campo de las pendientes de la propia ecuación con la gráfica de la solución encontrada	✓			✓	✓	

Como se muestra en la tabla 3, los alumnos tiene problemas de coordinación de registros, pues recordando que algunos de ellos como Karina no tiene claro el concepto de solución de una ecuación diferencial por lo tanto es un factor que no trazará el bosquejo, así como a Ignacio. Mientras Barbará aunque no realizó el bosquejo pero tiene claro el concepto de solución, sin embargo, tiene temor a realizar el bosquejo de manera errónea. Al ir del registro gráfico al algebraico, recordemos que Duval menciona, que para lograr la conversión esta puede ser congruente o no-congruente, si es congruente entonces hay semántica (significado del concepto) entre los dos registro, es decir, sobre los elementos significantes en este caso de los variables y los parámetros presentes en la gráfica, univocidad que se presenta en el registro a trabajar, esta consiste en que cada unidad de significante de salida le corresponderá una sola representación de llegada, y por ultimo orden del arreglo de estas unidades.

Andes, Jonathan e Itzel, tiene claro el concepto y además realizan satisfactoriamente la conversión del entre los registros algebraico al gráfico. En esta conversión que se quiere no se cumplen estos criterios de congruencia, pues no son obvios en la conversión, pues para guiar se necesita graficar el campo de las pendientes y observar detalladamente su comportamiento, haciendo variar los parámetros dados, para lograr de manera significativa dicha solución, aunque ello se debe de analizar muy detalladamente, realizando las anotaciones correspondientes.

c) Tercera sesión

En la actividad 2, de los 12 alumnos solo asistieron 9, de los cuales no todos la concluyeron, se analizaron de la misma manera que la actividad 1, sus respuestas de forma individual y solo 5 alumnos lograron concluir la actividad 2; los otros restantes no lograron resolver la ecuación diferencial con una duración de dos sesiones de hora y media cada una.

Problema:
Resuelve la ecuación y justifica cada paso que realizas:

$$y' + ax^2 y = x^2 , \quad y(0) = 1$$

El Alumno **Andrés**, contestó lo siguiente:

Pregunta 1
"Encontrar el factor integrante"

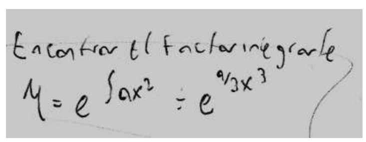


Figura 41.

Para ello es evidente que solo se requiere trabajar en un solo registro, así como lo realizó Andrés para encontrar el factor integrando como se ve en la figura 41.

Pregunta 2
"Encuentra la solución general en su forma implícita"
Andrés realizó lo siguiente:

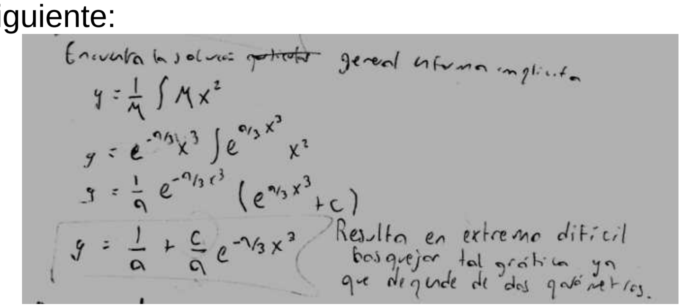


Figura 42

Andrés recurre a recordar, cómo encontrar la solución de una ecuación diferencial a través del factor integrante por formula, lográndola de manera satisfactoria.

Pregunta 3
"Encuentra una solución particular"

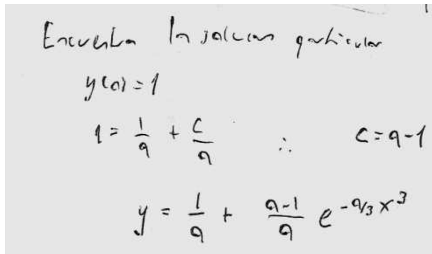


Figura 43.

Emplea la condición inicial en la solución general, para determinar la solución particular en el registro algebraico, así como en el registro numérico.

Pregunta 4
“Bosqueja la gráfica para las dos soluciones”

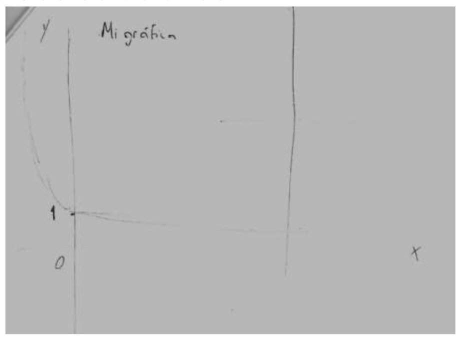


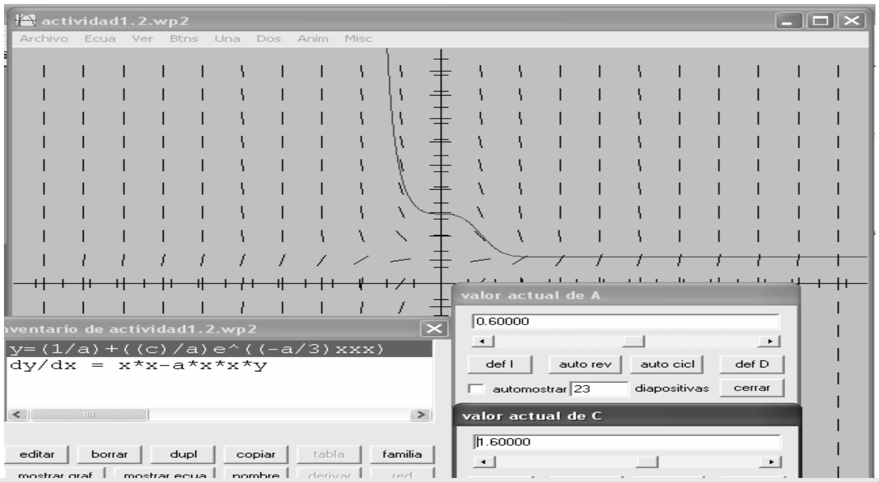
Figura 44.

Para trazar la gráfica el alumno se apoya en la condición inicial e indica que va decreciendo la gráfica trazada, como la de una exponencial, con exponente negativo. Retomando que al encontrar la solución de la ecuación diferencial señala que es de extremo difícil graficar dicha solución, sin embargo lo intento considerando a la función exponencial tomando en cuenta el signo de la exponencial, el valor del parámetro *a* sin indicar en qué valores no está definida y la condición inicial.

La *pregunta 5*, se enfocó a las siguientes preguntas, usando el *software*, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencia, especialmente de la solución general.

Pregunta 6
¿Qué diferencias observas con tu gráfica bosquejada y con la de WinPlot?

El bosquejo del alumno al parecer es correcto pues gráfica la función exponencial con exponente negativo, le faltó señalar el término constante que acompaña a la solución, es decir $\frac{1}{a}$, comparándola con la de WinPlot, muestra parte de su bosquejo, haciendo variar los parámetros en un cierto intervalo, como se muestra en la figura 45, permite visualizar al alumno donde la grafica no está definida.



A6. La de WinPlot está mas bonita

Figura 45.

Pregunta 7
¿Qué sucede cuando utilizas la solución general implícita, al variar la constante de integración?

A7. Va dibujando la familia de curvas

Figura 46.

Andrés, indica que al variar la constante de integración, va dibujando la familia de curvas solución, esto a través del campo de pendientes.

Pregunta 8
¿Qué opinas al resolver la ecuación diferencial y tener a la mano el programa WinPlot?

A8. Puede resultar útil, por ejemplo al checar si el campo coincide con las soluciones.

Figura 47.

Para Andrés, WinPlot es útil para comparar la solución obtenida con el campo de las pendientes de la ecuación diferencial.

Pregunta 9
Del inciso anterior ¿Cómo consideras a la tecnología como apoyo hacia la enseñanza?

A9. Útil, pero no indispensable

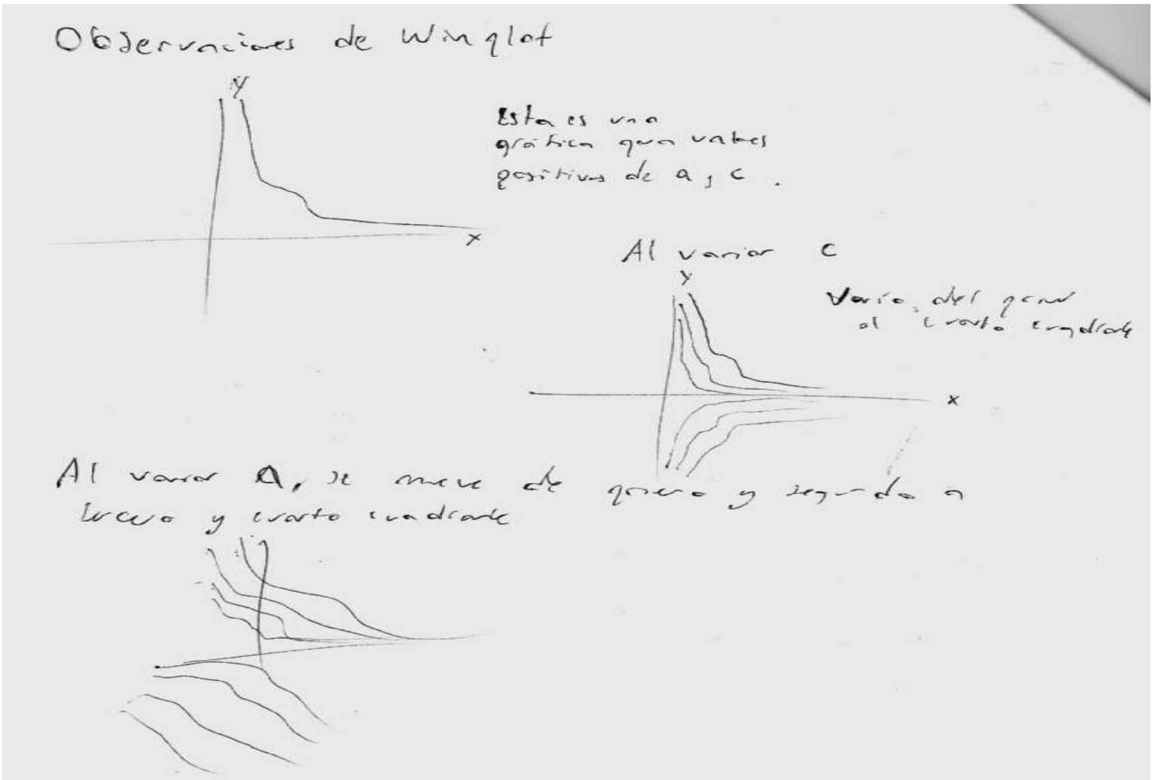


Figura 48.

Para Andrés, WinPlot resulta ser útil pero no indispensable, en la conversión de registros del algebraico al gráfico, se enfrentó a bosquejar la gráfica de la solución, pues para él resulta en extremo difícil bosquejar tal gráfica ya que depende de dos parámetros, ante todo se dispone a bosquejarla y al compararla con la de WinPlot, se percata que difiere bastante, en esta ocasión le fue difícil realizarla; sin embargo, con el apoyo de WinPlot se le facilito la conversión de registro del gráfico al numérico y viceversa, como se muestra en la figura 48. Promoviendo todo esto WinPlot resultó un apoyo para verificar si en realidad la solución obtenida fue la correcta y así realizar una buena retroalimentación respecto a la solución de una ecuación diferencia.

La alumna **Bárbara**, contestó lo siguiente:

Pregunta 1
"Encontrar el factor integrante."
Bárbara realiza lo siguiente:

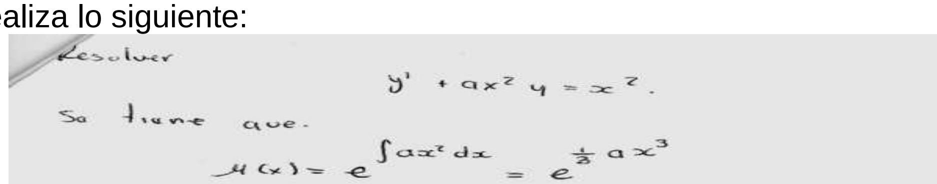


Figura 49.

Encuentra el factor integrante, apoyada del registro algebraico.
Pregunta 2

“Encuentra la solución general en su forma explícita.”

Así

$$\frac{d}{dx}\mu(x)y = x^2 e^{\frac{1}{3}ax^3}$$

$$\Rightarrow \mu(x)y = \int x^2 e^{\frac{1}{3}ax^3}dx = \frac{1}{a}e^{\frac{1}{3}ax^3} + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{\cancel{e^{\frac{1}{3}ax^3}}}{a\cancel{e^{\frac{1}{3}ax^3}}} + ce^{-\frac{1}{3}ax^3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{a} + ce^{-\frac{1}{3}ax^3} \leftarrow \text{Sol. gral.}$$

Figura 50.

Para Bárbara, trabajar en el registro algebraico no es difícil, obteniendo la solución correcta.

Pregunta 3
“Encuentra su solución particular.”

Luego.

$$y(0) = \frac{1}{a} + c = 1$$

$$\Rightarrow c = 1 - \frac{1}{a}$$

La sol. particular es.

$$y = \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{1}{3}ax^3}$$

Figura 51.

Haciendo uso de la condición inicial y apoyada en la solución general, Bárbara logra determinar la solución particular sin problema alguno, apoyándose en el registro algebraico y numérico.

Pregunta 4
“Bosqueja la gráfica para las dos soluciones.”
La alumna *no realizó el bosquejo*, por lo tanto no logró la conversión de registro.

De la *pregunta 5*, se derivan las consecuentes preguntas que siguen, el uso del *software*, le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, especialmente de la solución general.

Pregunta 6
¿Qué diferencias observas con tu gráfica bosquejada y con la de WinPlot?

La alumna no realizó el bosquejo de la gráfica de la solución tanto para la solución general como la particular en WinPlot, como se muestra en la figura 52, indicando en la misma figura que la curva de la derecha es la curva de la solución general mientras la de la izquierda es la particular, al manipular los parámetros indicados, ejecutándola de manera correcta.

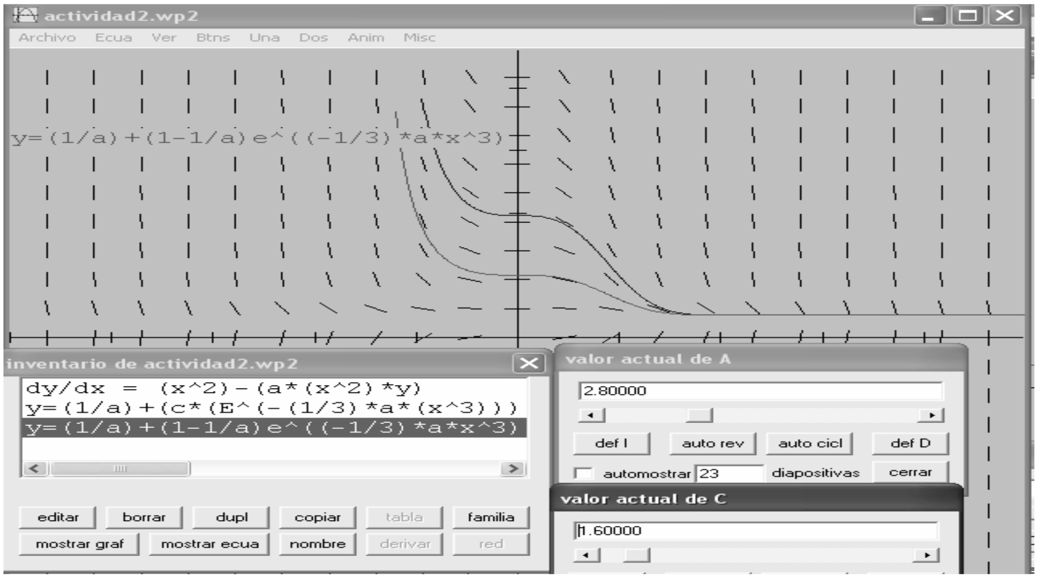


Figura 52.

Pregunta 7
¿Qué sucede cuando utilizas la solución general, al variar la constante de integración?

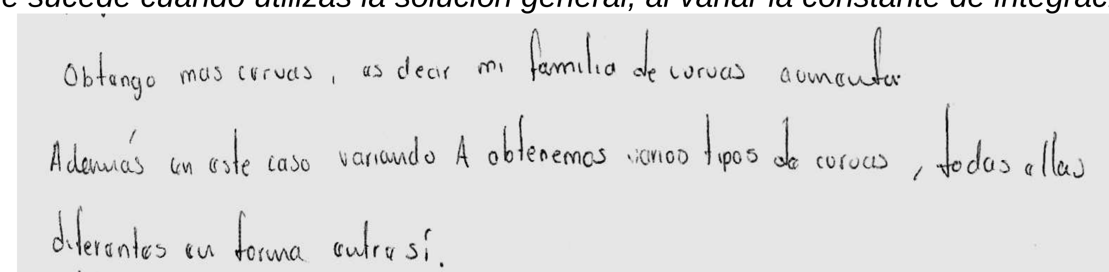

Obtengo mas curvas, es decir mi familia de curvas aumenta
Además en este caso variando A obtenemos varios tipos de curvas, todas ellas diferentes en forma entre sí.

Figura 53.

La alumna determina que se obtienen más curvas, es decir, la familia de curvas solución y al variar el parámetro indica varios tipos de curvas. La alumna trata de explicar que al variar el parámetro se obtiene una curva solución determinada.

Pregunta 8
¿Qué opinas al resolver la ecuación diferencial y tener a la mano el programa WinPlot?

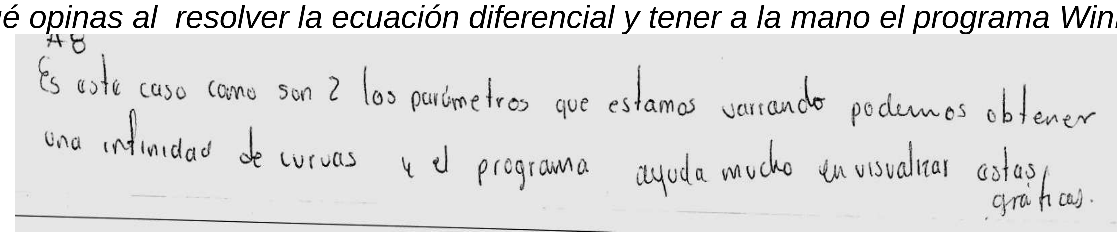

A8
Es este caso como son 2 los parámetros que estamos variando podemos obtener una infinidad de curvas y el programa ayuda mucho en visualizar estas gráficas.

Figura 54.

Para ella WinPlot, permite graficar directamente la ecuación diferencial como la solución encontrada, Bárbara comenta que al variar los parámetros de la ecuación diferencial, se observa una gran infinidad de curvas a través del campo de pendientes que muestra el programa, como lo señala en la figura 54.

Pregunta 9
Del inciso anterior ¿Cómo consideras a la tecnología como apoyo hacia la enseñanza?

La tecnología es una herramienta muy útil que facilita el aprendizaje en muchas
ramas de la ciencia.
Usándola de manera adecuada podemos obtener información que pueda enriquecer lo
ya obtenida

Figura 55.

Así como lo menciona Bárbara la tecnología facilita el aprendizaje, en esta materia, en ecuaciones diferenciales.

Con todo ello, Bárbara ha mostrado dificultades en la conversión del registro algebraico al gráfico, pues no realizó el bosquejo nuevamente en esta actividad. El uso de WinPlot le permitió manipular los parámetros dados en la solución encontrada y le facilitó la conversión de registro, en este caso del gráfico al algebraico. Por lo tanto, la tecnología facilita el aprendizaje no solo en matemáticas, sino que también en otras ramas de la ciencia, así WinPlot es una herramienta de apoyo para la conversión de registros.

Jonathan, contestó lo siguiente.
Pregunta 1
"Encontrar el factor integrante."

$y' + ax^2y = x^2$, $y(0)=1$

A 1 , Factor integrante.

$$\mu = e^{\int ax^2dx} = e^{a\frac{x^3}{3}}$$

Figura 56.

Se realizó tal y como se esperaba, reiterando que trabajó solo en el registro algebraico.

Pregunta 2
"Encuentra la solución general en su forma explícita."
Jonathan realizó lo siguiente, como se muestra en la figura 57:

A2. Multiplicamos por μ ambos miembros de la ecuación:

$$e^{a\frac{x^3}{3}}\left(y' + ax^2 y\right) = e^{a\frac{x^3}{3}} x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{a\frac{x^3}{3}} y\right) = x^2 e^{a\frac{x^3}{3}}$$

$$y e^{a\frac{x^3}{3}} = \frac{1}{a}\int a x^2 e^{a\frac{x^3}{3}} dx = \frac{1}{a} e^{a\frac{x^3}{3}} + c$$

así $y = \frac{1}{a} + c e^{a\frac{x^3}{3}}$

Figura 57.

Para el alumno no resulta ningún problema el encontrar la solución general, cada paso a realizar lo efectúa de manera correcta, apoyado del factor integrante, específicamente en el registro algebraico.

Pregunta 3
"Encuentra su solución particular."
Jonathan realizó lo siguiente:

A3.

$$1 = \frac{1}{a} + c$$

$$\Rightarrow \quad c = 1 - \frac{1}{a}$$

$$y = \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{1}{a}\right) e^{a\frac{x^3}{3}}$$

Figura 58.

Jonathan, se apoya en la condición inicial para llegar a la solución, manipulando el registro algebraico y numérico, como se muestra en la figura 58.

Pregunta 4
"Bosqueja la gráfica para las dos soluciones."

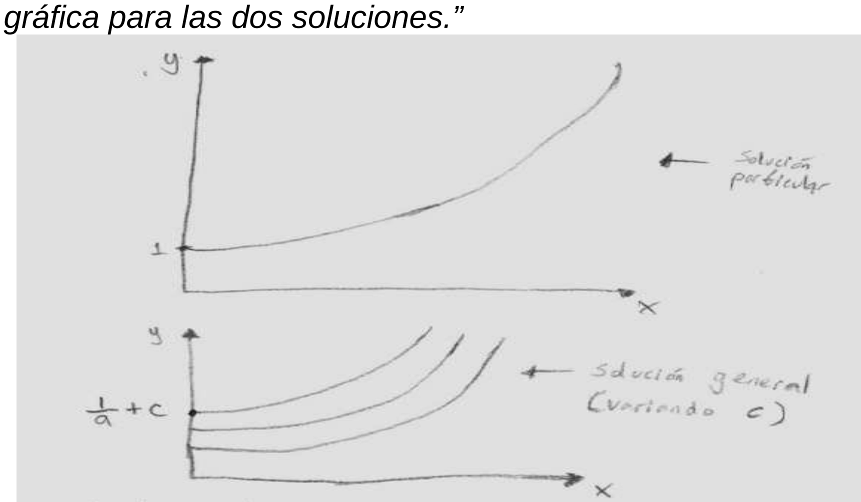


Figura 59.

Jonathan, trazó las gráficas tanto para la solución particular como para la solución general. La solución particular depende de un sólo parámetro en este caso a, para trazar la gráfica considera al parámetro $a=1$, como se muestra en la figura 59; para la solución general hace variar los parámetros a y c, describiendo la familia de curvas solución.

La *pregunta 5*, se enfocó a las siguientes preguntas, usando el *software*, para que le permita al alumno manipular los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, especialmente de la solución general.

Pregunta 6

¿Qué diferencias observas con tu gráfica bosquejada y con la de WinPlot?

Al comparar las gráficas, Jonathan, comenta que son muy distintas; sin embargo, si se compara detalladamente a ambas, el bosquejo se aproxima a la realizada en WinPlot como se muestra en la figura 60 y no difieren mucho en el primer cuadrante tal y como la realizó.

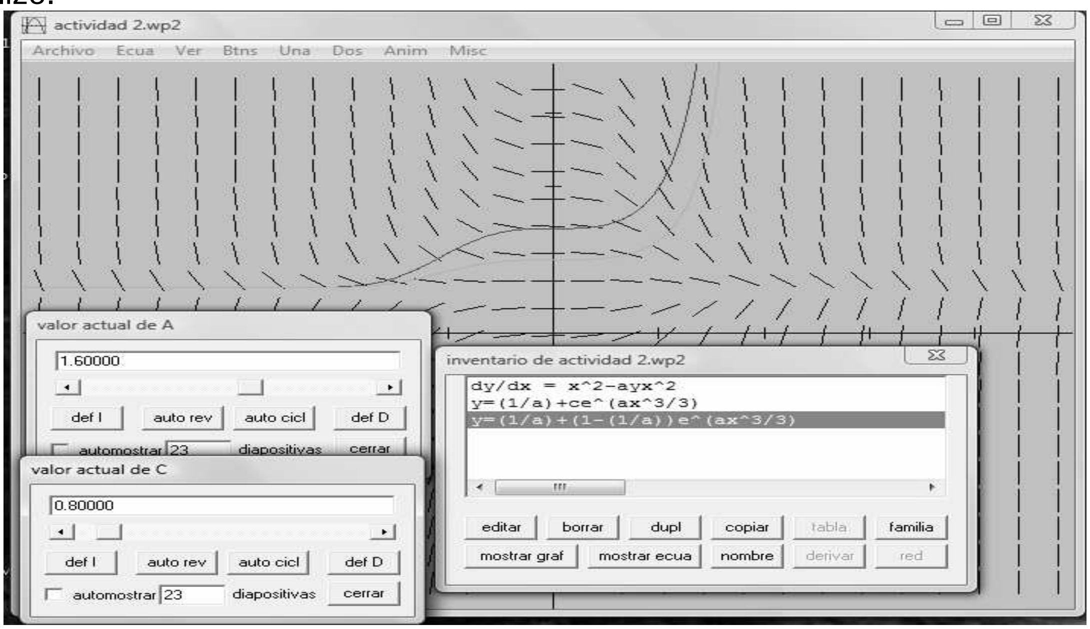


Figura 60.

Pregunta 7

¿Qué sucede cuando utilizas la solución general, al variar la constante de integración?

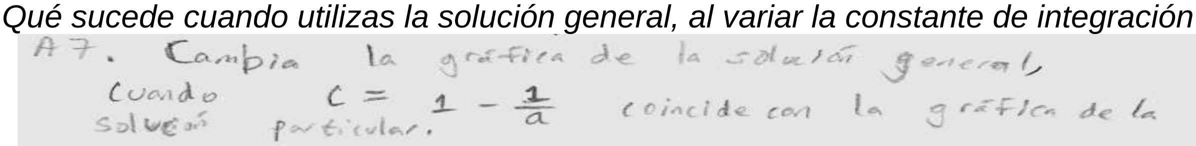


Figura 61.

Menciona que la gráfica cambia, al variar los parámetros y coinciden cuando $c = 1 - \frac{1}{a}$, con todo esto Jonathan efectúa la conversión de registro entre el numérico, grafico y algebraico.

Pregunta 8
¿Qué opinas al resolver la ecuación diferencial y tener a la mano el programa WinPlot?

A8. Creo que se hace más interesante y didáctico el aprendizaje.

Figura 62.

Para Jonathan, WinPlot lo motiva a resolver ecuaciones diferenciales, pues menciona que el aprendizaje sería didáctico y más interesante. Reiterando, la tecnología es una herramienta en el aprendizaje en ecuaciones diferenciales.

Pregunta 9
Del inciso anterior ¿Cómo consideras a la tecnología como apoyo hacia la enseñanza?

A9. Creo que la tecnología puede colaborar con la enseñanza, por ejemplo: para gráficar funciones (la velocidad y la eficacia de los programas es mayor que el nuestro, aveces).

Figura 63.

Para el alumno Jonathan, el uso del *software* resulta de apoyo en otras áreas, además es interesante y didáctico para su aprendizaje, en la conversión de registro para ir del algebraico al gráfico, el alumno intentó trazar la gráfica, al mismo tiempo WinPlot permite verificar si en realidad lo que había trazado es correcto, y sin dudarlo el alumno indica que es muy diferente a lo que había trazado.

Ignacio, contestó lo siguiente:
Pregunta 1
¿Puedes encontrar el factor integrante?

1.- $\mu(x) = e^{\int a x^2 dx} = e^{a\frac{x^3}{3}}$

Figura 64.

Al alumno no se le dificulta trabajar en el mismo registro algebraico.

Pregunta 2
“Encuentra la solución general en su forma explícita.”
Ignacio realizó lo siguiente:

A2.- $e^{a\frac{x^2}{2}} y = \int x^2 dx$

$y = e^{-a\frac{x^3}{3}}\left(\frac{x^3}{3} + c\right)$

Figura 65.

El alumno no tuvo al parecer ninguna dificultad en trabajar en el registro algebraico, como se muestra en la figura 65; sin embargo, es errónea la solución, ya que antes de resolver la integral, faltó multiplicar por el factor integrante para proceder a integrar.

Pregunta 3
“Encuentra la solución particular.”
Ignacio realizó lo siguiente:

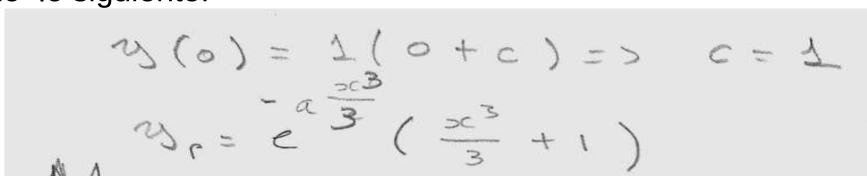


Figura 66.

Recordemos que la solución es errónea, por lo tanto para la conversión de registro del algebraico al numérico, en el algebraico tiene dificultades, aun que en el numérico al parecer no la tiene, como se muestra en la figura 66.

Pregunta 4
“Bosqueja la gráfica para ambas soluciones.”
El alumno traza lo siguiente:

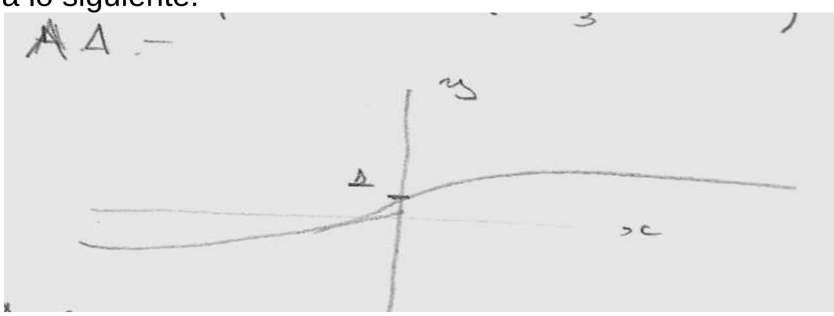


Figura 67.

Ignacio, no relacionó la gráfica con la solución obtenida, no se percató que la solución depende de una exponencial, reiterando que la solución obtenido es errónea, por lo tanto, altera a todo lo subsecuente; sin embargo, intento trazar la gráfica como se muestra en la figura 67.

Pregunta 5
“Ahora usa WinPlot para graficar ambas soluciones.”

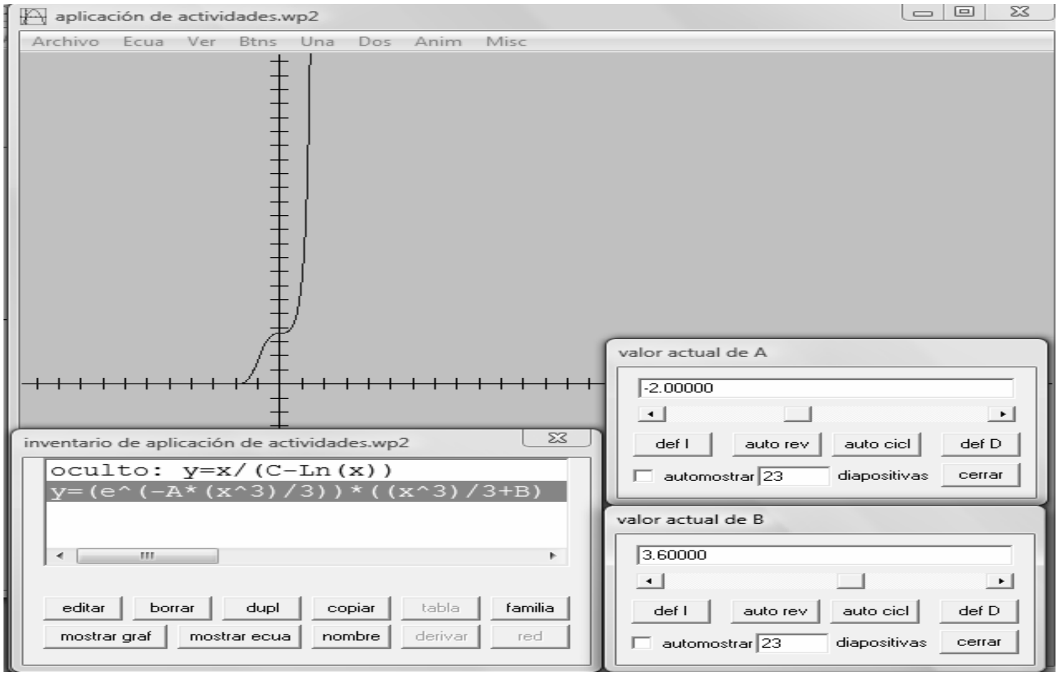


Figura 68

Como se observa en la figura 69, la solución es incorrecta y además introduce mal los datos, aunque la gráfica como se observa en la figura 68, es algo semejante a lo que se busca.

Pregunta 6
¿Qué diferencias observas con tu gráfica bosquejada y con la de WinPlot?
Identificar algunas ventajas que se tiene al usar el *software*:

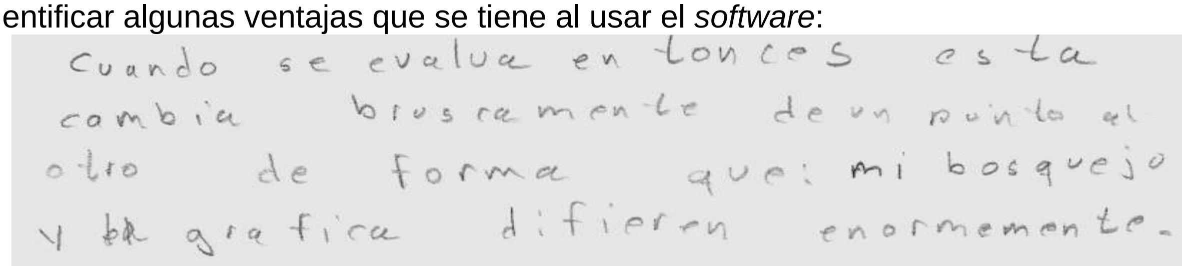

Cuando se evalua entonces esta cambia bruscamente de un punto al otro de forma que: mi bosquejo y la grafica difieren enormemente.

Figura 69.

Lo que se esperaba de la pregunta es que el alumno comparara las ventajas de usar un *software* con respecto a una forma manual de cómo trazar la gráfica de la solución particular.

En el registro algebraico tuvo errores que conllevaron a una solución equivocada; sin embargo, se busca remediar a dichas soluciones.

Pregunta 7
¿Qué sucede cuando utilizas la solución general implícita, al variar la constante de integración?

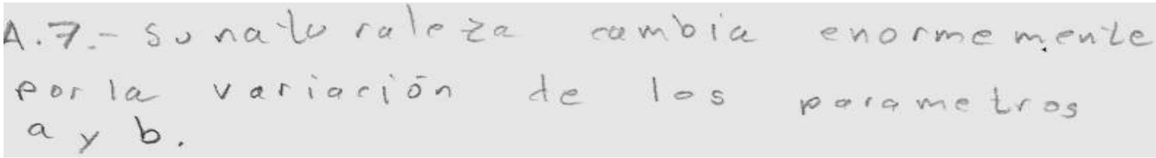

A.7.- su naturaleza cambia enormemente por la variación de los parametros a y b.

Figura 70.

A pesar de que Ignacio llegó a una solución errónea, con WinPlot observó qué sucede cuando se varía el parámetro de la solución obtenida, como se puede notar el alumno no se da cuenta de su error.

Pregunta 8

¿Qué opinas al resolver la ecuación diferencial y tener a la mano el programa WinPlot?

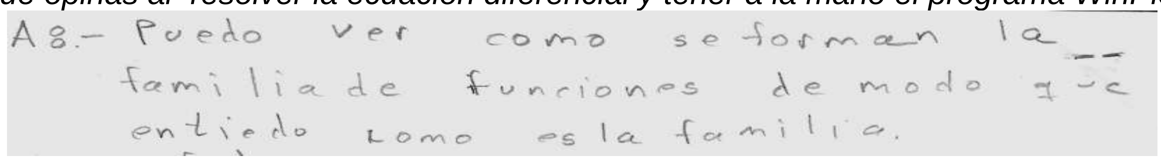

A8.- Puedo ver como se forman la familia de funciones de modo que entiedo como es la familia.

Figura 71.

Permite guiar al alumno el ver como se forman la familia de las curvas solución. En este caso el alumno no graficó directamente la ecuación diferencial, es por ello que no se percató de su error.

Pregunta 9

Del inciso anterior ¿cómo consideras a la tecnología como apoyo hacia la enseñanza?

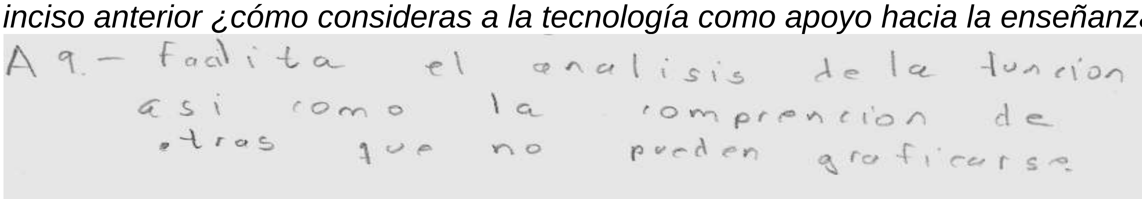

A9.- Facilita el analisis de la funcion asi como la comprencion de otras que no pueden graficarse

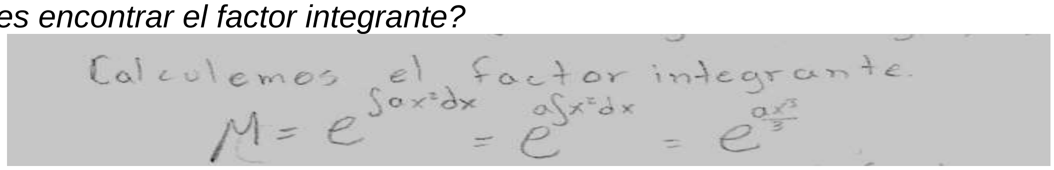
Figura 72.

Para Ignacio, el *software* es importante para graficar aquellas funciones que en ocasiones son difíciles de representar gráficamente.

Itzel, contestó lo siguiente.

Pregunta 1

¿Puedes encontrar el factor integrante?


Calculemos el factor integrante.

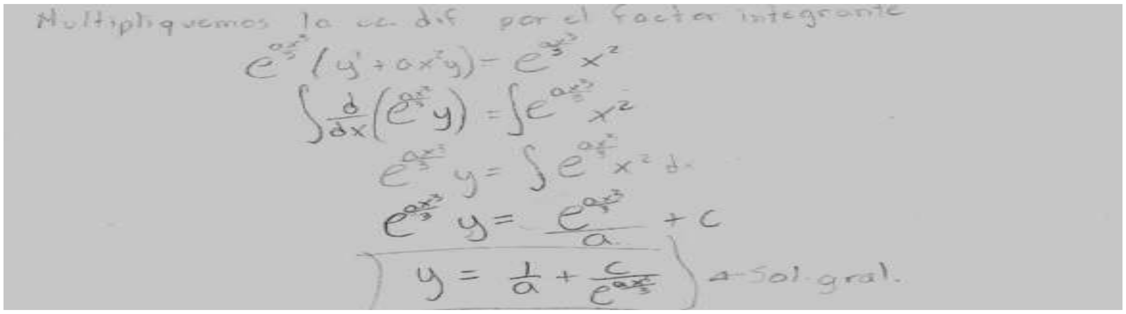
$$\mu = e^{\int a x^2 dx} = e^{a\int x^2 dx} = e^{\frac{a x^3}{3}}$$

Figura 73.

Trabajó en el registro algebraico, sin problema como se muestra en la figura 73, indicando el factor integrante.

Pregunta 2

"Encuentra la solución general en su forma implícita."


Multipliquemos la ec. dif por el factor integrante

$$e^{\frac{ax^3}{3}}(y'+ax^2y)=e^{\frac{ax^3}{3}}x^2$$

$$\int\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{ax^3}{3}}y\right)=\int e^{\frac{ax^3}{3}}x^2$$

$$e^{\frac{ax^3}{3}}y=\int e^{\frac{ax^3}{3}}x^2\,dx$$

$$e^{\frac{ax^3}{3}}y=\frac{e^{\frac{ax^3}{3}}}{a}+c$$

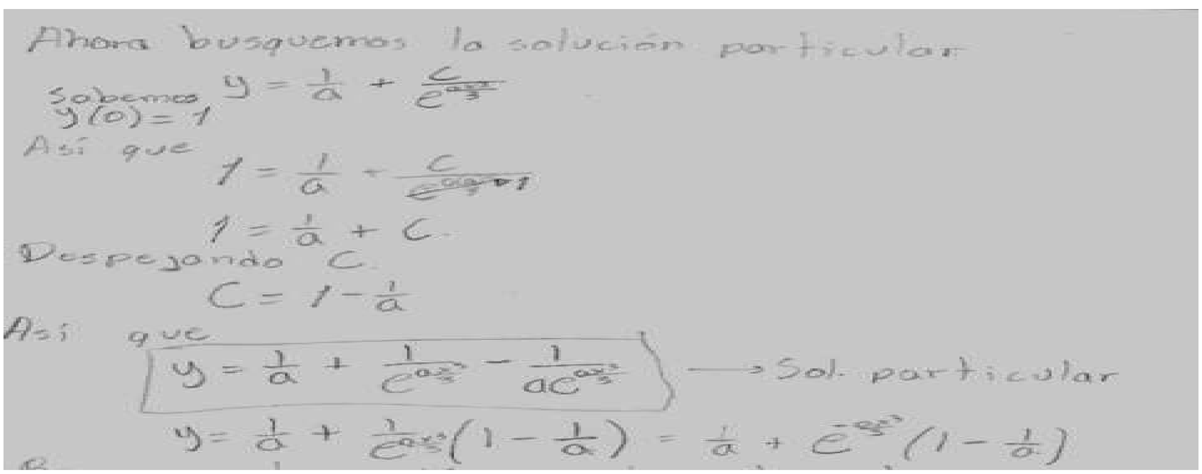
$$y=\frac{1}{a}+\frac{c}{e^{\frac{ax^3}{3}}} \leftarrow \text{Sol. gral.}$$

Figura 74.

La alumna no tiene dificultad para trabajar en el registro algebraico, en este caso realiza los procesos de manera correcta, llegando a la solución general, tal y como lo indica en la figura 74.

Pregunta 3
“Encuentra la solución particular.”

Con ayuda de la condición inicial y la solución general, logra encontrar la solución particular, ya simplificada tal y como se muestra en la figura 75. Con esto llevó a cabo la conversión de registro.


Ahora busquemos la solución particular

Sabemos $y=\frac{1}{a}+\frac{c}{e^{\frac{ax^3}{3}}}$

$y(0)=1$

Así que

$$1=\frac{1}{a}+\frac{c}{e^{\frac{a\cdot 0}{3}}}$$

$$1=\frac{1}{a}+c$$

Despejando C

$$C=1-\frac{1}{a}$$

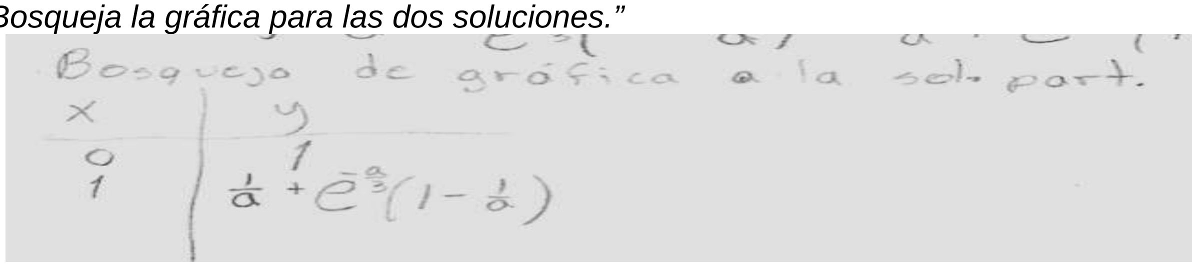
Así que

$$\boxed{y=\frac{1}{a}+\frac{1}{e^{\frac{ax^3}{3}}}-\frac{1}{ae^{\frac{ax^3}{3}}}} \longrightarrow \text{Sol. particular}$$

$$y=\frac{1}{a}+\frac{1}{e^{\frac{ax^3}{3}}}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+e^{-\frac{ax^3}{3}}\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

Figura 75.

Pregunta 4
“Bosqueja la gráfica para las dos soluciones.”


Bosquejo de gráfica a la sol. part.

x	y
0	1
1	$\frac{1}{a}+e^{-\frac{a}{3}}\left(1-\frac{1}{a}\right)$

Figura 76.

Itzel, no bosquejó la gráfica, sin embargo, tenía como propósito efectuarla apoyándose en tabular algunos valores de dicha solución, para que posteriormente se le facilitara representar gráficamente dicha solución, como se muestra la figura 76. Con esto, la alumna efectuó la conversión de registro de manera espontánea, es decir, del algebraico al numérico, como lo menciona Duval.

Pregunta 5
"Ahora usa WinPlot para graficar ambas soluciones."

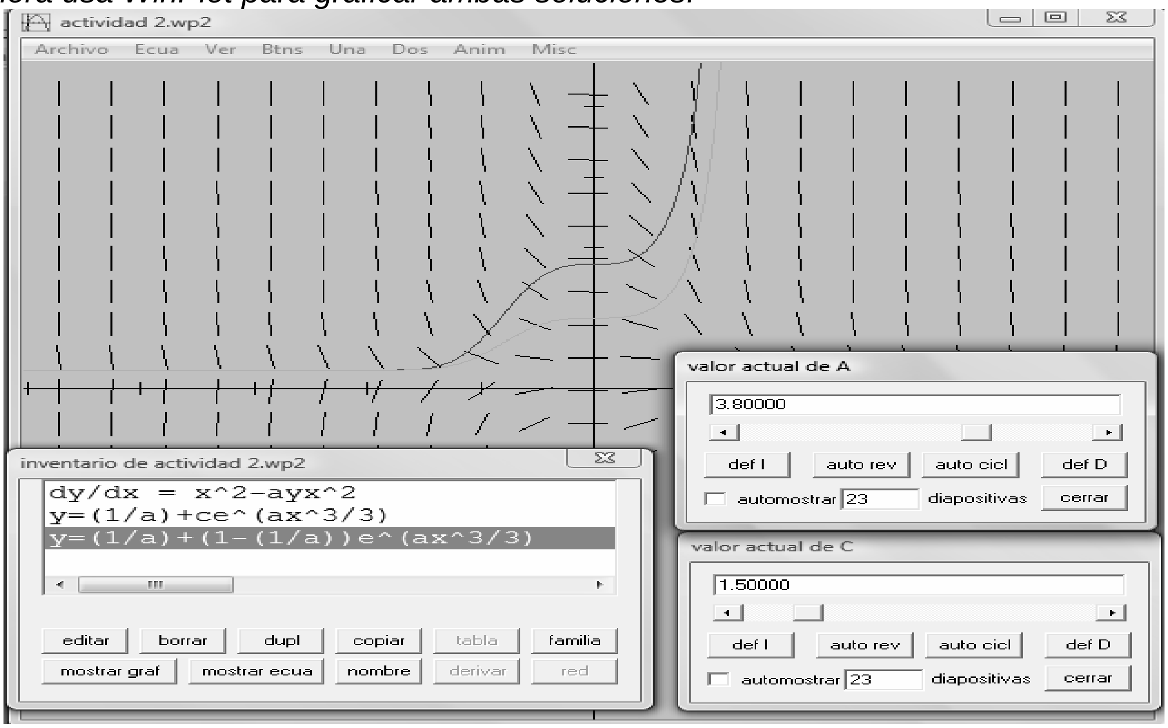
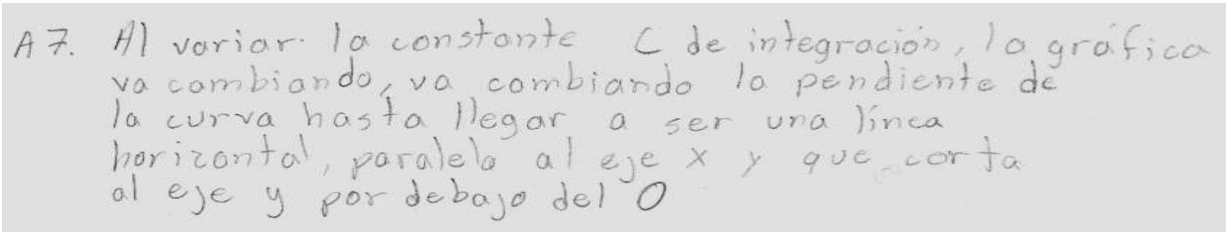


Figura 77.

La alumna realiza ambas gráficas, pero se le ha olvidado un gran detalle, el signo de la solución general como de la particular, como se observa en la figura 77 en el cuadro de "inventario de actividad2.wp2" que se encuentra en la parte inferior izquierda de la gráfica.

Pregunta 6
¿Qué diferencias observas con tu gráfica bosquejada y la de WinPlot?
Itzel no efectuó comentario alguno, no realizó el bosquejo, solo las ejecutadas en WinPlot.

Pregunta 7
¿Qué sucede cuando utilizas la solución general implícita, al variar la constante de integración?

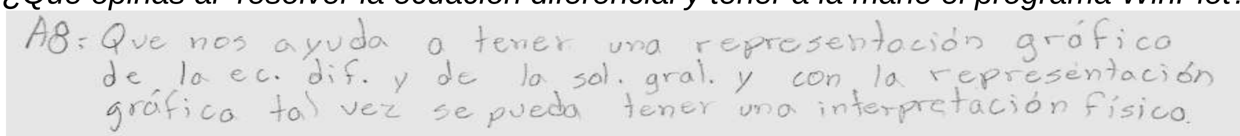


A7. Al variar la constante C de integración, la gráfica va cambiando, va cambiando la pendiente de la curva hasta llegar a ser una línea horizontal, paralela al eje x y que corta al eje y por debajo del 0

Figura 78.

Comenta que al variar la constante de integración, y en determinado valor la pendiente tiene el valor cero, con ello emplea el lenguaje verbal como una representación mas, es decir, la conversión de registro va del gráfico al verbal y del numérico al verbal.

Pregunta 8
¿Qué opinas al resolver la ecuación diferencial y tener a la mano el programa WinPlot?

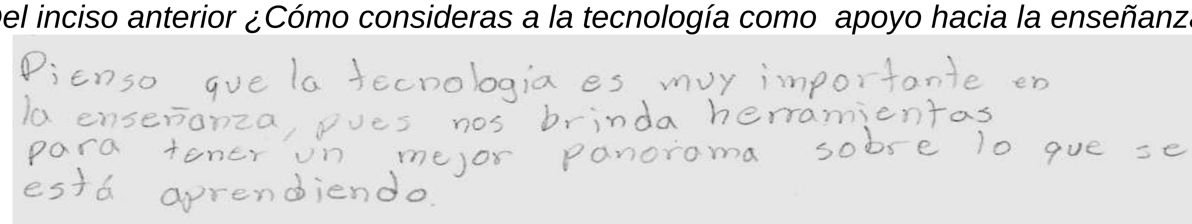


A8: Que nos ayuda a tener una representación gráfico de la ec. dif. y de la sol. gral. y con la representación gráfica tal vez se pueda tener una interpretación física.

Figura 79.

Para Itzel, el *software* le ayuda a formar una representación gráfica de la ecuación diferencial, así como de la solución general, menciona además que esta representación puede tener una interpretación física. Itzel ha diferenciado una representación a la de una interpretación gráfica.

Pregunta 9
Del inciso anterior ¿Cómo consideras a la tecnología como apoyo hacia la enseñanza?



Pienso que la tecnología es muy importante en la enseñanza, pues nos brinda herramientas para tener un mejor panorama sobre lo que se está aprendiendo.

Figura 80.

Itzel, ha sido la única alumna en señalar la importancia de una representación, así como de una interpretación, y lo mejor de todo es que ha tenido importancia en su aprendizaje. Reiterando que la tecnología es una herramienta en apoyo a la enseñanza.

Después de que los alumnos concluyeron la actividad 2, con apoyo de los indicadores de la NCTM y los tipos de aprendizajes, se aprecia en la tabla 4 muestra algunas dificultades que se enfrenta el alumno para la adquisición de conceptos en su aprendizaje y la conversión entre los registros.

Tabla 4. El desarrollo de los alumnos considerando el tipo de aprendizaje y la conversión de registros.

	Andrés	Bárbara	Jonathan	Ignacio	Itzel

1. Plantea el método a resolver la ecuación diferencial	✓	✓	✓	✓	✓
2. Encuentra el factor integrante	✓	✓	✓	✓	✓
3. Identifica parámetros en la representación algebraica	✓	✓	✓	✓	✓
4. Indica el orden, grado y linealidad de la ecuación diferencial					
5. Resuelve la ecuación diferencial en el registro algebraico dando el tratamiento algebraico	✓	✓	✓	✓	✓
6. Justifica la solución encontrada	✓	✓	✓	✓	✓
7. Identifica que solución general representa la familia de curvas solución	✓	✓	✓		✓
8. Realizó el bosquejo de la solución particular de manera correcta	✓		✓	✓	
9. La pendiente es negativa en el primer cuadrante, si a>0 y c<0 donde a y c son parámetros	✓				
10. Representa y analiza las relaciones de la solución utilizando tablas y gráfica	✓		✓		
11. Observa los parámetros y los valores de los parámetros para realizar el bosquejo de la solución particular			✓		
12. Identifica a los parámetros y realiza la manipulación dentro del registro algebraico			✓		✓
13. Construyó correctamente el bosquejo			✓		
14. Considera el comportamiento de cada variable para la construcción de dicha gráfica			✓		
15. Identifica que la función solución es creciente en el primer cuadrante si a<0 y c>0			✓		✓
16. Identifica en WinPlot los parámetros, al manipularlos y se da cuenta de sus errores en el bosquejo realizado a papel y lápiz	✓	✓	✓		
17. Analiza los efectos que ocasiona en la gráfica en los cambios de los parámetros, con respecto a la familia de curvas solución	✓	✓	✓		✓
18. Se enfrenta a la no congruencia cuando intenta regresar del registro grafico al algebraico	✓	✓	✓		
19. Observa diferencias entre la gráfica y la representación algebraica	✓		✓		
20. Percibe diferencias entre la gráfica y la representación algebraica	✓		✓	✓	✓
21. verifica que la solución obtenida corresponde al campo de las pendientes de la propia ecuación con la gráfica de la solución encontrada, a través de WinPlot			✓	✓	✓

De la tabla 4, se muestra que en esta segunda actividad los alumnos presentan el problema de conversión, partiendo de la expresión algebraica a la representación gráfica, considerando que no se arriesgan a manipular los parámetros que se tiene tanto en la misma ecuación diferencial, así como a la solución encontrada debido a la falta de no-congruencia.

Sin embargo, con el uso de WinPlot permite a los estudiantes a observar el comportamiento de dicha gráfica, a través de la manipulación de los parámetros y el comportamiento de la gráfica, con ello conlleva a una contribución a su aprendizaje, a través de la operación de descripción esta operación pertenece a la conversión de registros. Andrés y Jonathan lograron representar esta difícil solución, Itzel queda sólo en el intento, pues recurre a tabular, iba por buen camino aun que ya no realizó su bosquejo; estos tres alumnos la definición de solución de una ecuación diferencial es clara, así como sus bosquejos. No olvidemos que el tabular es un registro semiótico más, para representar la solución de dicha ecuación diferencial.

d) Cuarta Sesión

La actividad 3, tuvo una duración de hora y media, donde solo 4 alumnos participaron de los 12 que iniciaron las actividades. Se analizaron las respuestas de la misma forma que en las dos primeras actividades.

Problema:

En un modelo demográfico de la población $P(t)$ de una comunidad, se supone que $\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$, en donde $\frac{dB}{dt}$ y $\frac{dD}{dt}$ son las tasas de natalidad y mortalidad, respectivamente.

Determinar con ayuda de los registros algebraico, gráfico y numérico la población $P(t)$, sí $\frac{dB}{dt} = k_1 P$ y $\frac{dD}{dt} = k_2 P$, con $P(0) = P_0$.

Instrucciones. Esta actividad tiene puntos donde el alumno participa de forma individual, pero también en equipo conforme avanza la actividad.

Andrés, respondió lo siguiente:

Pregunta 1

Del problema planteado indica ¿Cuál es la ecuación diferencial ya simplificada a resolver y la condición inicial?

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = a\,y(t) - 6\,y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = (a - 6)\,y(t)$$

Figura 81.

Para lograrlo, el alumno trabajó exclusivamente en el registro algebraico, como se muestra en la figura 81.

Pregunta 2

Encuentra de manera algebraica la solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{(a-6)} = y(t)\,dt$$

$$\frac{dy}{y} = (a-b)\,dt$$

$$\ln(y) = (a-6)t + c \qquad A = e^{c}$$

$$y = e^{(a-6)t}\, e^{c} \qquad y = A\, e^{(a-6)t}$$

Figura 82.

Como se observa en la figura 82, Andrés no tiene problema alguno en el tratamiento algebraica, tal y como se esperaba, llegando a la solución correcta.

Pregunta 3

De la pregunta anterior ¿Cuál es el valor de la constante de integración con ayuda de la condición inicial para la solución particular?

$$y(0) = y_0 \qquad y(0) = A = y_0$$

$$y_0 = e^{c} \qquad y =$$

$$c = \ln(y_0)$$

$$\ln(y) = (a-6)t + \ln(y_0)$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = (a-6)t}$$

$$y = y_0\, e^{(a-6)t}$$

Figura 83.

Se apoyó en el registro algebraico, para pasar al registro numérico y regresando al registro de partida, realizando el álgebra necesaria para llegar a la solución particular, a través de la condición inicial, tal y como se muestra en la figura 83.

Pregunta 4

Bosquejar la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.

Andrés, menciona que para bosquejar la gráfica "resulta más sencillo usar la solución particular, ya que la solución general es una familia de curvas", de esta manera bosqueja los tres casos como se observa en la figura 84, logrando así la conversión del registro del algebraico al gráfico.

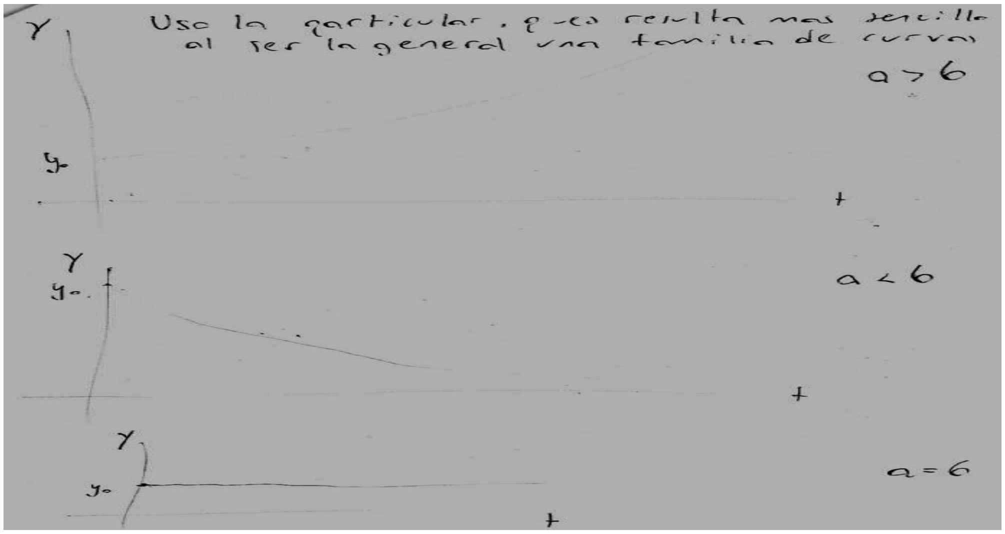


Figura 84.

En la pregunta 5, se derivan las siguientes preguntas, con apoyo de WinPlot para determinar la familia de curvas soluciones, se le pidió al alumno indicar, ¿Que al observar el campo de se puede intuir los valores de los parámetros? ¿Por qué?

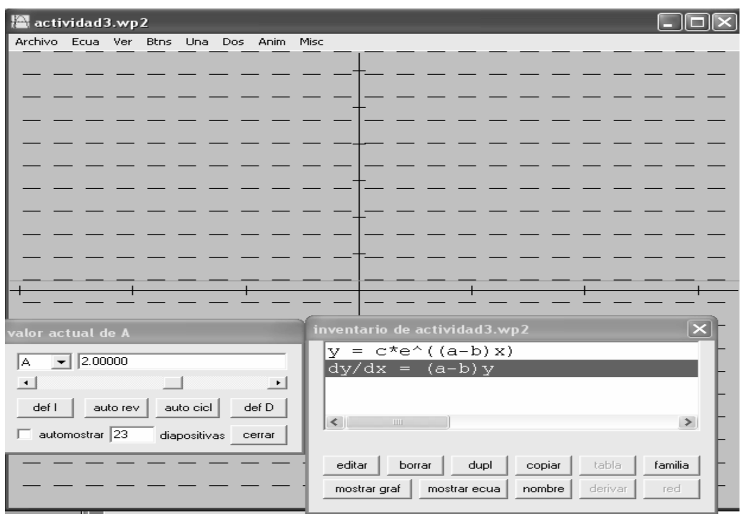


Figura 85.

Señala, que en el caso de que $a-b=0$, *entonces* $a=b$ las pendientes tienen valor cero, como se observa en la figura 85.

Pregunta 6
Ahora consideras los casos cuando a > b, a = b y a < b, realízalo de manera algebraica con ayuda de la solución obtenida. Bosquejar la gráfica de los casos. ¿Qué puedes decir acerca de estos casos?

El alumno desarrolla los casos de manera algebraica a partir de la *pregunta 4*, como se observa en el bosquejo, se apoya con la condición inicial, aunque no lo escribió, pero representa en la primera gráfica de la función solución; la función solución aumenta si *a* > *b*; y en la segunda decrece si *a*< *b* y por lo tanto en la tercera permanece constante. Aunque el alumno no da una explicación escrita, representa de manera correcta a la solución encontrada, así como cada caso. Logrando de esta manera la conversión de registro del algebraico al gráfico.

La *pregunta 7*, se enfocó a los siguientes incisos, los cuales se trabajaron en WinPlot.

1) *Si* $a > b$*, elige valores para* a *y* b *variándolos ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica? Explícalo*

Andrés comenta que si a > b, la población aumenta exponencialmente como se muestra la figura 86, así como se muestra en la gráfica.

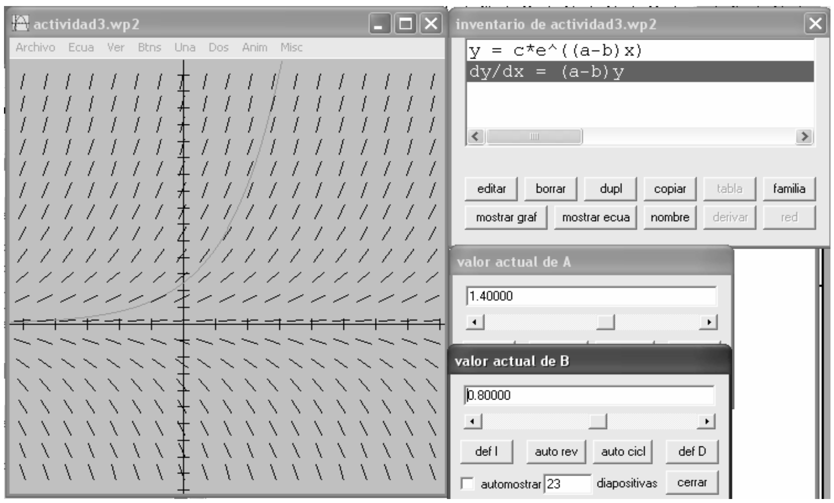


Figura 86.

La población decrece exponencialmente, si a < b, las pendientes son negativas en este caso y la curva solución se aproxima a dichas pendientes, como se muestra en la figura 87.

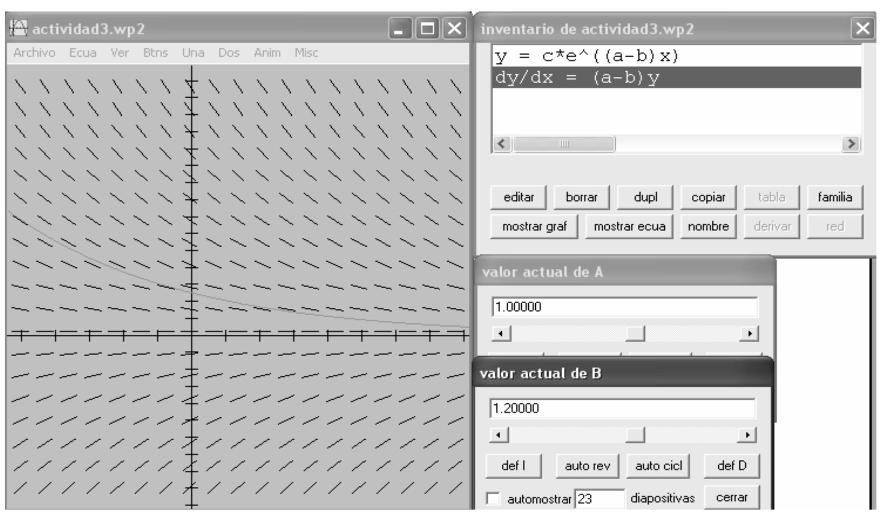


Figura 87.

Si a = b, la población se mantiene constante, indicando que la pendiente tienen un valor cero, así como se tiene en la gráfica de la figura 88.

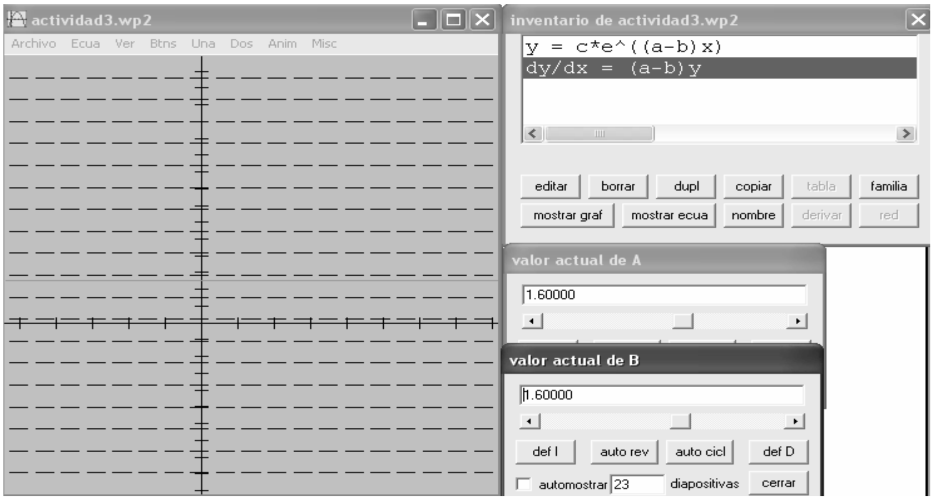


Figura 88.

2) *¿Qué pasa con la población si $a = 5$ y $b = 2$, si se tiene una población de 2.5 mil personas en $t = 0$?*

El alumno realizó lo siguiente como se muestra en la figura 89:

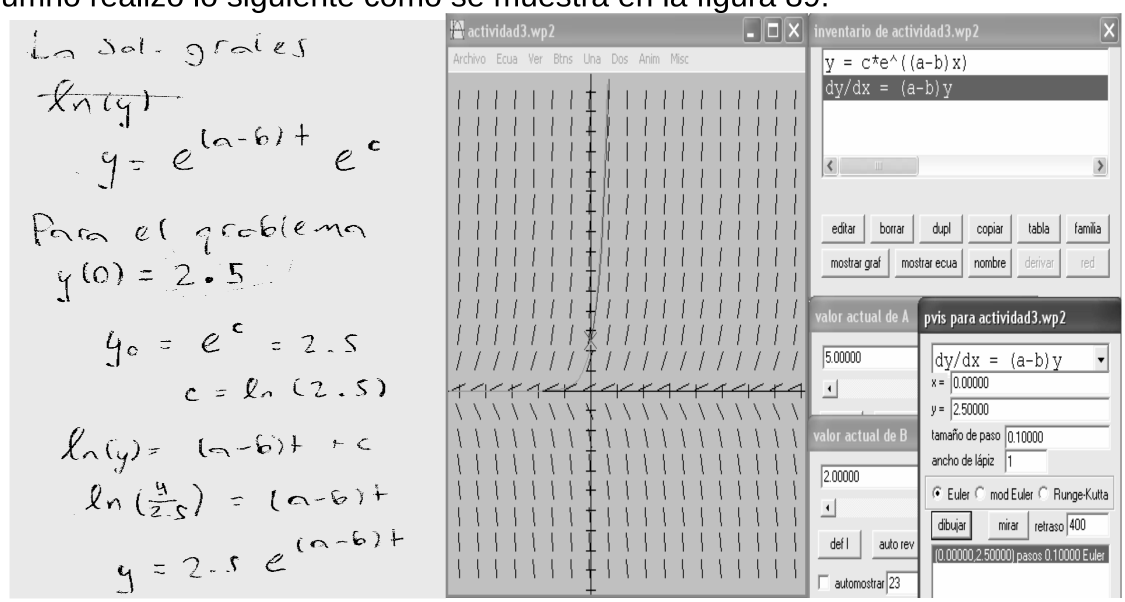


Figura 89.

El alumno parte del registro algebraico, es decir, hace uso de la solución general obtenida, realiza cálculos numéricos con papel y lápiz, posteriormente se apoya en WinPlot como se observa en la figura 89, logrando así la conversión entre los registro algebraico y gráfico, tal y como se esperaba. Manipulando los parámetros tanto de la solución de la ecuación, así como de la ecuación diferencial de forma directa como se muestra en la figura 89, en la que la curva representa a la solución general; con ello se logra también la conversión del registro numérico al gráfico y viceversa.

3) *¿Consideras factible usar un* software *en esta materia para entender el problema planteado?*

Sí, para este problema resulta particular-
mente útil.
Yo creo que gana utilidad en los problemas de
aplicaciones.

Figura 90.

El alumno considera que para este tipo de problema contar con un *software* es de gran utilidad, permitiendo una mejor visualización.

4) *¿Te facilita el aprendizaje este software para entender que es una ecuación diferencial, orden, linealidad, curva solución y condiciones iniciales?*

Te facilita el aprendizaje - - .
No tanto, supongo que donde tiene mayor
utilidad es al aplicarlo a problemas de
física y otras disciplinas.

Figura 91.

Para Andrés, no le permitió entender los conceptos, sin embargo, expresa que es de utilidad en otras disciplinas, por ejemplo física.

5) *¿Qué importancia tiene para ti al usar las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para solucionar una ecuación diferencial?*

Las gráficas resultan útiles, pero si algo
se tiene que resolver es bueno poder usar
varias representaciones.

Figura 92.

Por lo tanto, el alumno no tiene problemas en pasar de un registro a otro, menciona que las ventajas que se tiene con WinPlot, son de gran utilidad en los problemas de aplicaciones, en física y otras disciplinas, se tendrá mayor utilidad, pero no le facilita el aprendizaje en los conceptos. Además comenta que las gráficas resultan útiles, pero si algo se tiene que resolver es bueno poder usar varias representaciones.

Bárbara, respondió lo siguiente:

Pregunta 1

Del problema planteado indica ¿Cuál es la ecuación diferencial ya simplificada a resolver y la condición inicial?

$$\frac{du}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$$

$$\text{pero} \quad \frac{dB}{dt} = ay \quad y \quad \frac{dD}{dt} = by$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = ay - by \quad , \quad \text{con} \quad y(0) = y_0 .$$

Figura 93.

La alumna no tiene problema en trabajar en un solo registro, en este caso en el registro algebraico, a través de la sustitución de las derivadas y tiene presente la condición inicial.

Pregunta 2

Encuentra de manera algebraica la solución general de la ecuación diferencial.

$$\Rightarrow \frac{du}{(a-b)y} = dt$$

$$\frac{1}{a-b} \ln y = t + c. \quad \Rightarrow \quad y = e^{(a-b)(t+c)}$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{(a-b)t} K$$

Figura 94.

La alumna trabajó dentro del registro algebraico, de manera cuidadosa, tal y como se muestra en la figura 94.

Pregunta 3

De la pregunta anterior ¿Cuál es el valor de la constante de integración con ayuda de la condición inicial para la solución particular?

$$\text{Si} \quad y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y = e^{(a-b)t} y_0 .$$

Figura 95.

La alumna recurre a la solución general, posteriormente hace uso de la condición inicial para trabajar en el registro numérico, manipulando la representación algebraica a través de papel y lápiz, obtiene la solución particular.

Pregunta 4

Bosquejar la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.

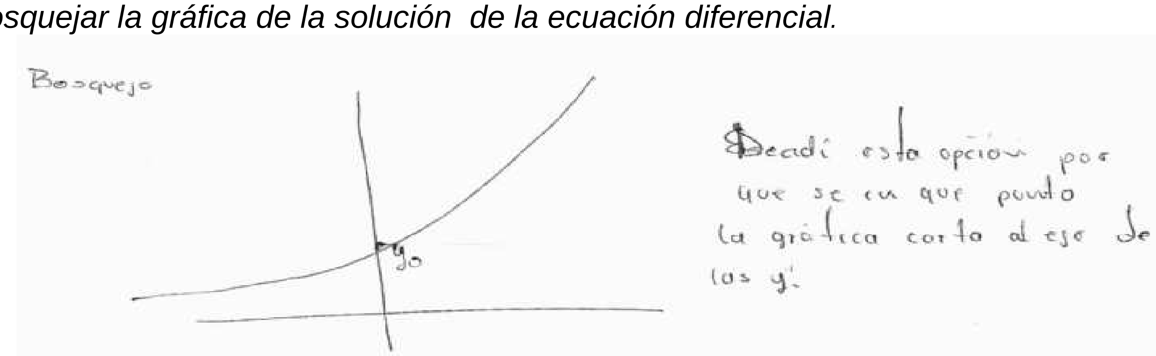


Figura 96.

La alumna comenta que se decidió por esta opción por que “en ese punto la gráfica corta al eje de las y”, hace uso de la condición inicial dada en el problema, además considerando que la solución es una exponencial tal y como la representa en la figura 96.

En la pregunta 5, se derivan las siguientes preguntas, con apoyo de WinPlot para determinar la familia de curvas soluciones, se le pidió al alumno indicar, ¿Que al observar el campo de se puede intuir los valores de los parámetros? ¿Por qué?

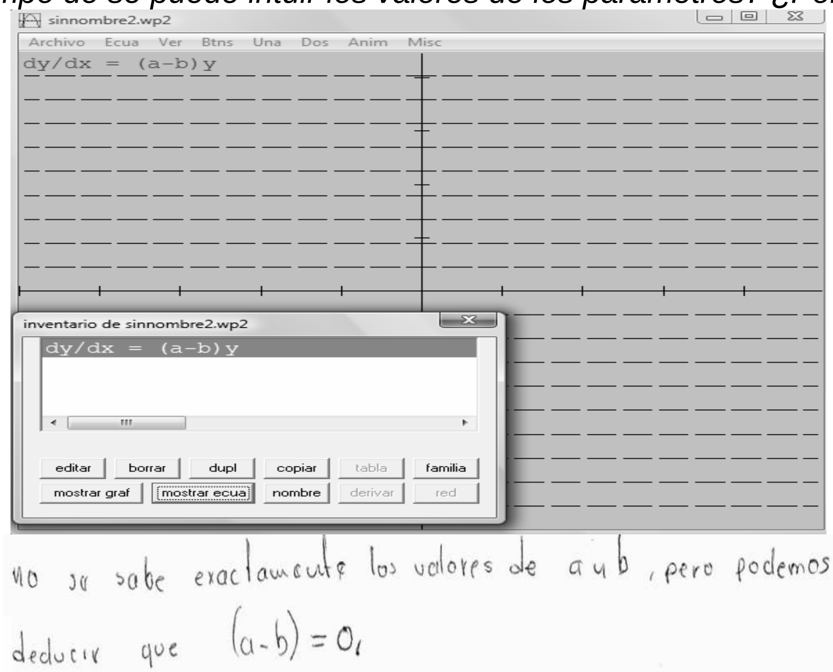


Figura 97.

La alumna indica intuitivamente que, $a-b=0$ guiándose por la gráfica mostrada en la figura 97. La alumna realiza la conversión del registro gráfico al algebraico.

Pregunta 6
Ahora consideras los casos cuando a > b, a = b y a < b, realízalo de manera algebraica con ayuda de la solución obtenida. Bosquejar la gráfica de los casos. ¿Qué puedes decir acerca de estos casos?

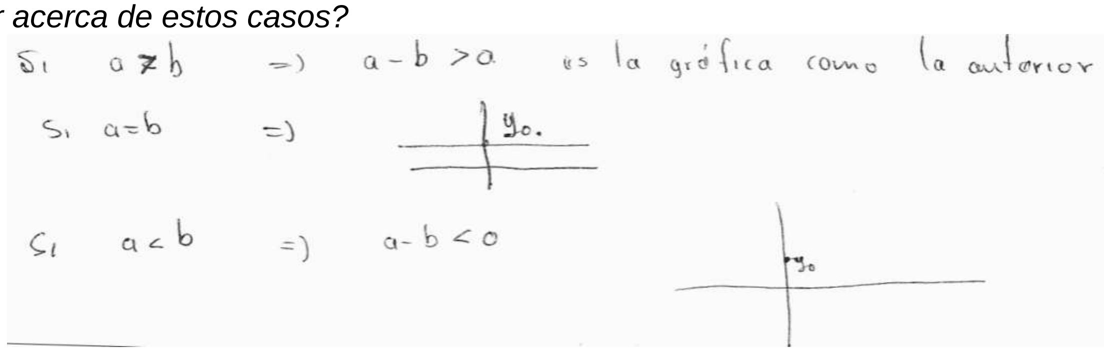


Figura 98.

Bárbara, menciona que en el caso de *a>b*, la gráfica es como en la figura 96, mientras que en el caso de que $a = b$ tiene un comportamiento de un función constante como se tiene en la figura 98, sin embargo no trazó la gráfica para el caso *a<b*, sólo representa la condición inicial, esto indica que no tomó en cuenta el signo de la exponencial, muestra aun dificultad para dicha conversión.

La *pregunta 7*, se enfocó a los siguientes incisos, los cuales se trabajaron con WinPlot.

1) *Si $a > b$, elige valores para a y b variándolos ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica? Explícalo*

Cuando la tasa de natalidad es mayor que la de mortalidad, la
población crece de manera exponencial.
En el caso en que la tasa de natalidad y de mortalidad tienen el
mismo valor, la población permanece constante.
Cuando la tasa de natalidad es menor que la de mortalidad, entonces
la población disminuye al pasar el tiempo.

Figura 99.

Bárbara, da la explicación de manera idónea, podremos mencionar que para esta respuesta la alumna recurre al lenguaje verbal, tal y como señala Duval, que esta representación es generada por instinto, y sus observaciones realizadas a través de la manipulación de los parámetros de la solución.

2) *¿Qué pasa con la población si $a = 5$ y $b = 2$, si se tiene una población de 2.5 mil personas en t = 0?*

3) Se puede observar que cerca del valor en $t=-e$ la gráfica
coincide con el eje x.
Además se observa que la gráfica corta al eje y en $y_o = 2.5$.

Figura 100.

Comentó que la gráfica corta al eje de las "y" en $y_o = 2.5$, además la manipulación de los parámetros en la gráfica, muestra una función creciente.

3) *¿Consideras factible usar un software en esta materia para entender el problema planteado?*

4) Si, ya que uno puede modelar cualquier tipo de ecuación que represente
algún fenómeno físico y de esta manera poder predecir lo que pasará
en algún tiempo determinado.

Figura 101.

Para Bárbara, el *software* sirve para predecir lo que sucederá en un determinado momento, considera a la representación como interpretación, recordemos que son totalmente diferentes, la interpretación es una operación de la conversión.

4) *¿Te facilita el aprendizaje este software para entender qué es una ecuación diferencial, orden, linealidad, curva solución y condiciones iniciales?*

Bárbara, menciona que “si” es factible, aunque no da más explicaciones.

5) *¿Qué importancia tiene para ti al usar las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para solucionar una ecuación diferencial?*

6) Considero importante el hecho de tener una representación fisica que me describa un fenómeno, ya que de esta manera la comprensión del mismo se hace mas viable.

Figura 102.

Para **Bárbara**, el *software* es importante para su aprendizaje, aunque señala que es factible para predecir lo que pasará en algún tiempo determinado. No ha logrado hasta el momento diferenciar entre representación de interpretación.

Jonathan, respondió lo siguiente:

Pregunta 1

“Del problema planteado indica ¿Cuál es la ecuación diferencial ya simplificada a resolver y la condición inicial?”

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{dB}{dt}}_{\text{tasa de natalidad}} - \underbrace{\frac{dD}{dt}}_{\text{tasa de mortalidad.}}$$

$$\frac{dB}{dt} = ay \; ; \; \frac{dD}{dt} = by$$

con $y(0) = y_0$

I 1.- la ec. dif a resolver es:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by \qquad y(0) = y_0$$

simplificando:

$$y' = (a-b)\,y \qquad y(0) = y_0$$

I 2,-

Figura 103.

La obtiene sin problema alguno, señalando en la ecuación original las tasas de natalidad y mortandad, trabajando dentro del registro algebraico y teniendo presente la condición inicial, da la ecuación simplificada, como se muestra en la figura 103.

Pregunta 2
“Encuentra de manera algebraica la solución general de la ecuación diferencial”

$$\frac{dy}{dt} = (a-b)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (a-b)\,dt$$

$$\ln(y) = (a-b)t + C \quad \leftarrow \text{sol. gral.}$$

Figura 104.

El alumno trabajó dentro del registro algebraico y obtuvo la solución de manera correcta e implícita como se observa en la figura 104.

Pregunta 3
“De la pregunta anterior ¿Cuál es el valor de la constante de integración con ayuda de la condición inicial para la solución particular?”

$$\ln(y_0) = (a-b)(0) + C$$

$$\Rightarrow \quad C = \ln y_0$$

Así la sol. particular es:

$$\ln y = (a-b)t + \ln y_0$$

$$y = e^{(a-b)t} e^{\ln y_0} = y_0\, e^{(a-b)t}$$

$$y = y_0\, e^{(a-b)t} \quad \leftarrow \text{sol. part.}$$

Figura 105.

El alumno lleva a cabo la conversión como se esperaba, y obtiene sin problema alguno la solución, recurriendo al registro algebraico, como se tiene en la figura 105.

Pregunta 4
“Bosquejar la gráfica de la solución de la ecuación diferencial”

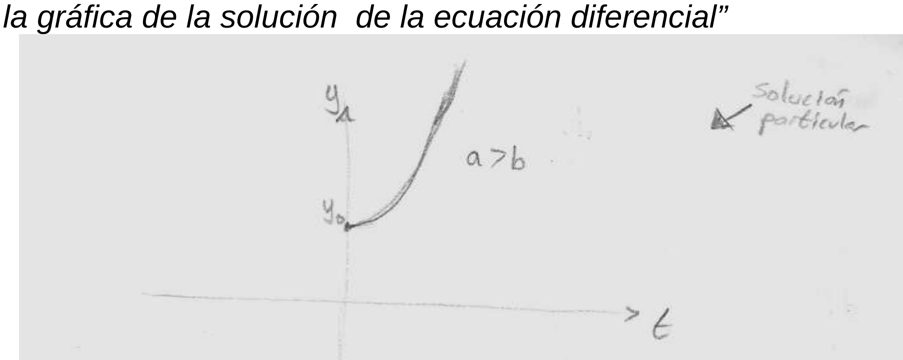


Figura 106.

El alumno logra la conversión de registro de manera espontánea, del algebraico al gráfico, hace uso de la condición inicial, así como de la solución particular, considerando el caso cuando *a>b*, como se observa en la figura 106.

La pregunta 5, se realizó con el apoyo de WinPlot la determinación de la familia de curvas solución. Con el campo de pendientes se puede intuir los valores de los parámetros ¿Por qué?, contesta lo siguiente:

Para Jonathan, la pendiente tiene el valor de cero, así como se muestra en la gráfica elaborada en WinPlot de la figura 107.

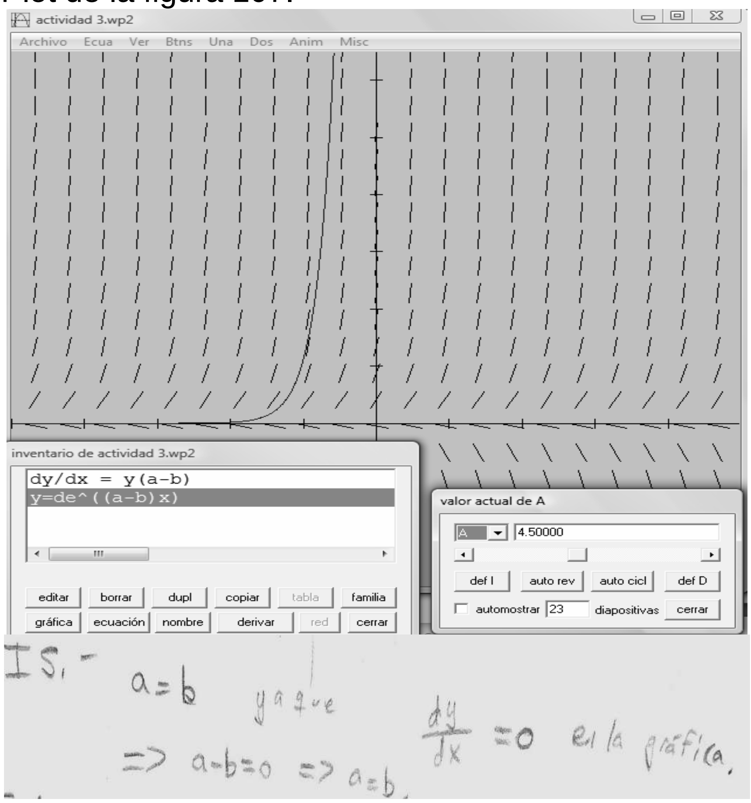


Figura 107.

Pregunta 6

"Ahora considera los casos cuando a > b, a = b y a < b, realízalo de manera algebraica con ayuda de la solución general obtenida. Bosquejar la gráfica de los casos. ¿Qué puedes decir acerca de estos casos?

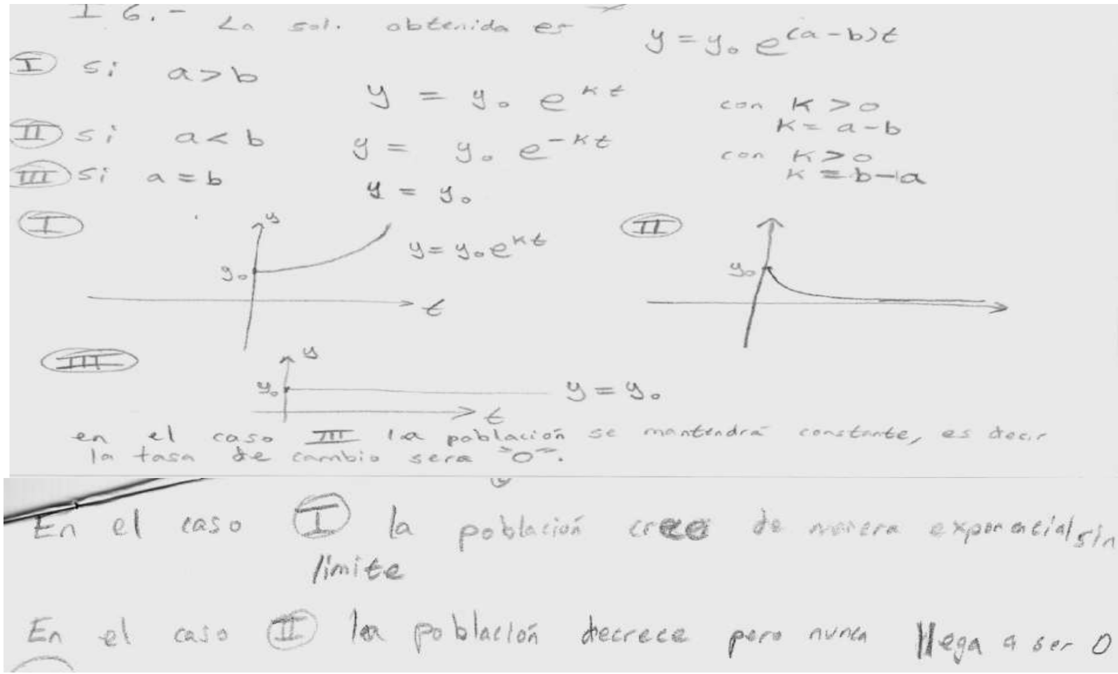


Figura 108.

El alumno al bosquejar la solución de los tres casos, indica que son tres registros de representación totalmente distintos para dicha solución; explica la solución obtenida apoyándose en la condición inicial de manera correcta, donde la condición inicial es un parámetro más.

En la *pregunta 7*, se enfocó a los siguientes incisos, los cuales se trabajaron en WinPlot.

1) *Si $a > b$, elige valores para a y b variándolos ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica? Explícalo*

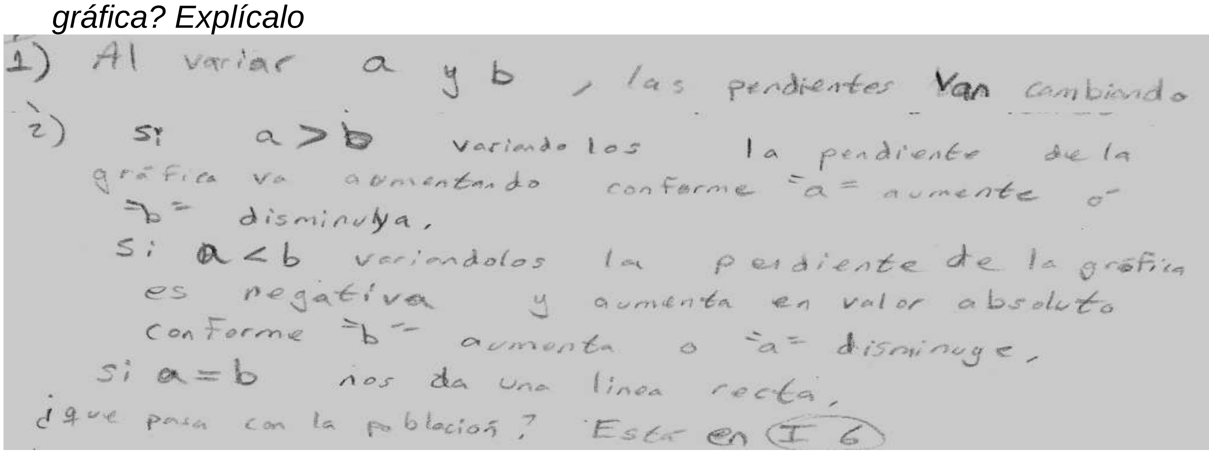


Figura 109.

Así como van cambiando las pendientes en la gráfica, sin embargo, en este caso la pendiente es positiva.

2) *¿Qué pasa con la población si $a = 5$ y $b = 2$, si se tiene una población de 2.5 mil personas en t = 0?*

La población se mantiene; sin problema trabajó en el registro numérico. Sigue siendo creciente como la representada en la figura 107.

3) *¿Consideras factible usar un software en esta materia para entender el problema planteado?*

En esta pregunta el alumno solo contesta que sí es factible, no da más explicación.

4) *¿Te facilita el aprendizaje este software para entender que es una ecuación diferencial, orden, linealidad, curva solución y condiciones iniciales?*

El alumno solo contesta que "si ", aunque no especifica el por qué, considerando que durante el uso de WinPlot manipulaba los parámetros y observaba con atención que tan cierta era su solución del campo de las pendientes de la ecuación diferencial, recordando que esta se obtiene si gráfica directamente la ecuación diferencial.

5) *¿Qué importancia tiene para ti al usar las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para solucionar una ecuación diferencial?*

Me voy dado una idea de la solución y puedo interpretarla mejor junto con la gráfica,

Figura 110.

El alumno llevó a cabo la conversión de registro, sin problema alguno, menciona que al usar varias representaciones le da una idea de la solución de la ecuación diferencial y que puede interpretar mejor junto con la gráfica y la solución obtenida.

Ignacio, respondió lo siguiente:

Pregunta 1

"Del problema planteado indica ¿Cuál es la ecuación diferencial ya simplificada a resolver y la condición inicial?"

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$$

sabemos que:

$$\frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt} = (a - b)y$$

Figura 111.

No tiene problema alguno en trabajar en el registro algebraico, como se tiene en la figura 111.

Pregunta 2

Encuentra de manera algebraica la solución general de la ecuación diferencial.

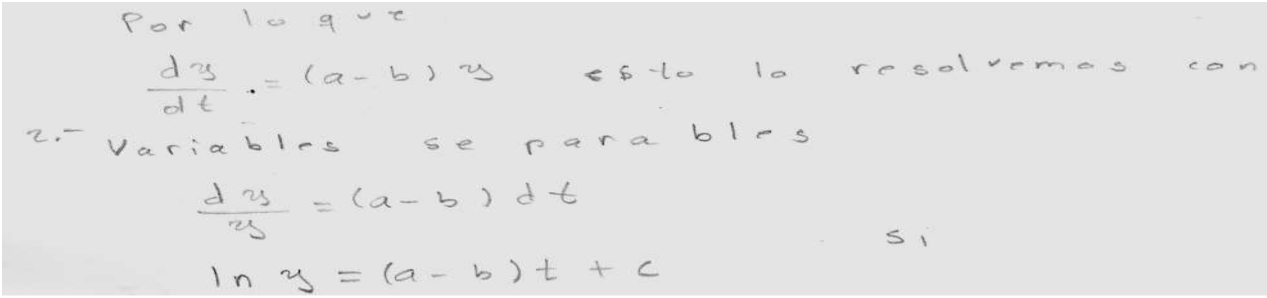


Figura 112.

Llega a la solución en la forma implícita de manera correcta, realizando la manipulación algebraica tal y como se muestra en la figura 112.

Pregunta 3

De la pregunta anterior ¿Cuál es el valor de la constante de integración con ayuda de la condición inicial para la solución particular?

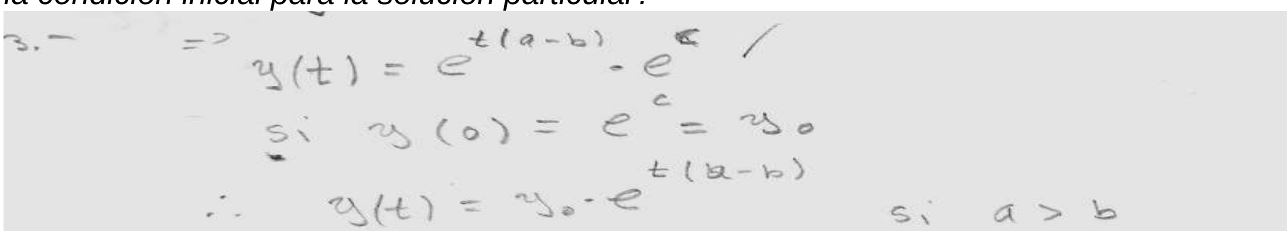


Figura 113

Como se muestra en la figura 113, Ignacio indica el valor de la constante de integración como un parámetro más para la solución particular para el caso de a>b.

Pregunta 4

Bosquejar la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.

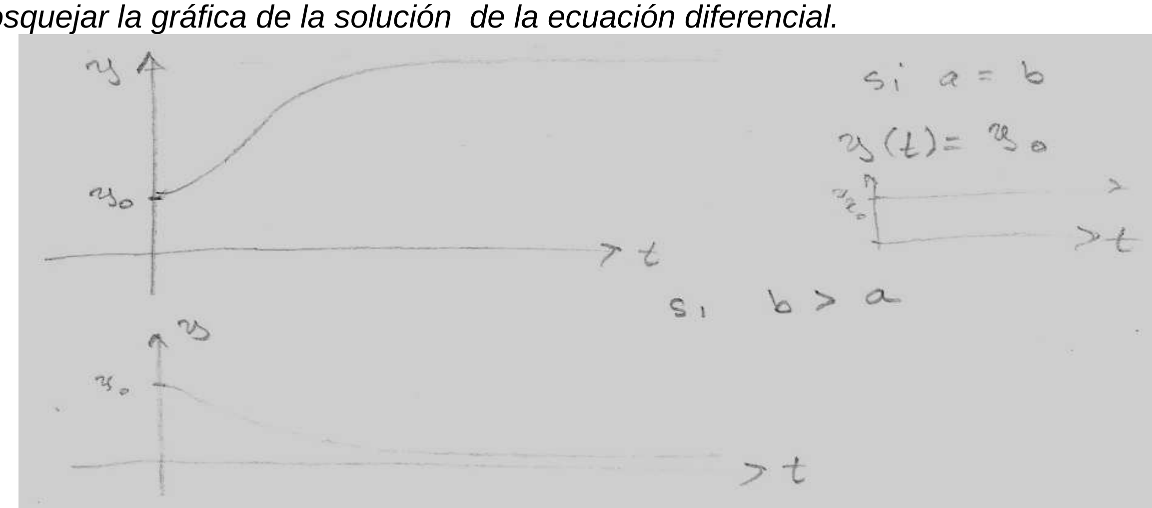


Figura 114.

En su bosquejo consideró los tres casos, es decir, tres representaciones diferentes para la solución encontrada, apoyándose en la condición inicial para trazar la gráfica, para el caso de *a*>*b* la gráfica es creciente y al parecer se acota, aunque no indica en que valores, como se muestra en la figura 114; sin embargo, para el caso *a*<*b* se puede apreciar en la segunda gráfica de la misma figura que la gráfica estará acotada inferiormente.

La pregunta 5, se realizó con el apoyo de WinPlot para determinar la familia de curvas solución, con el campo de pendientes se puede intuir los valores de los parámetros ¿Por qué?, contestó lo siguiente:

El alumno contesta que no puede intuir los valores, esto indica que no logró realizar la conversión entre del registro gráfico al algebraico.

Pregunta 6
“Ahora consideras los casos cuando a > b, a = b y a < b, realízalo de manera algebraica con ayuda de la solución obtenida. Bosquejar la gráfica de los casos. ¿Qué puedes decir acerca de estos casos?
Apoyándose de la pregunta 4, el alumno contesta lo siguiente:

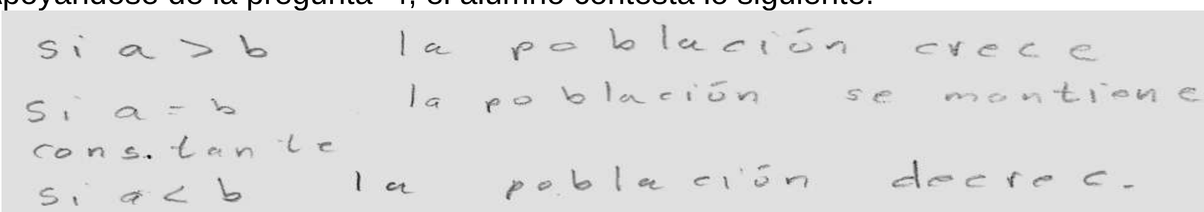


Figura 115.

El alumno recurre al lenguaje verbal, para describir qué sucede en los bosquejos como se muestra en la figura 115, llevando a cabo la conversión.

En la *pregunta 7*, se enfocó a los siguientes incisos, los cuales se trabajaron en WinPlot.

1) *Si $a > b$, elige valores para a y b variándolos ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica? Explícalo*

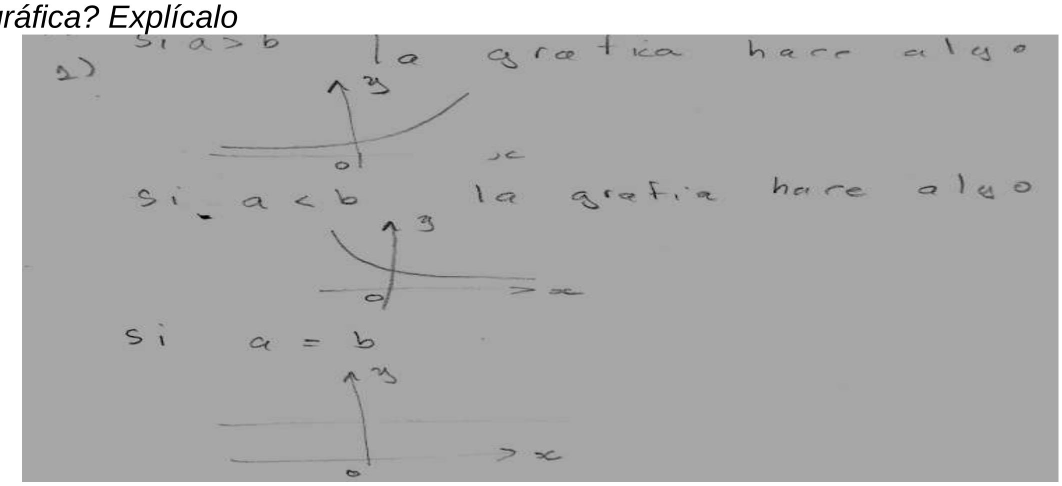


Figura 116.

Al usar WinPlot, Ignacio observa y dibuja el comportamiento de cada caso, así como se tiene en la figura 116, esto indica que ha sido de apoyo para verificar los resultados obtenidos.

2) *¿Qué pasa con la población si* $a = 5$ *y* $b = 2$*, si se tiene una población de 2.5 mil personas?*

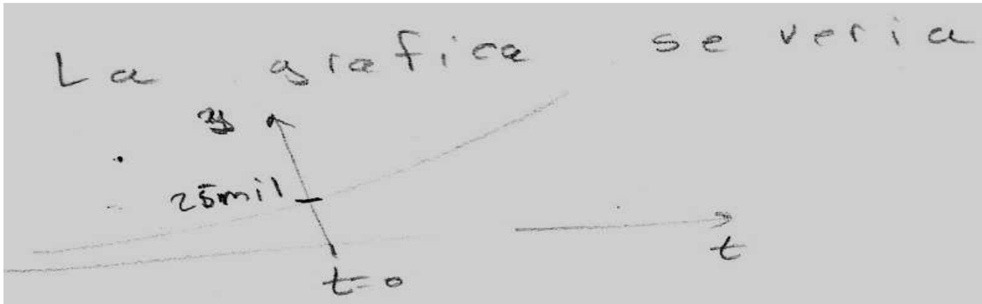


Figura 117.

Muestra lo que sucede cuando se tiene este número de población pues recordemos que en la intersección de la gráfica con el eje de las “*y*” indica la condición inicial, por lo tanto conforme pasa el tiempo la población va en aumento.

3) *¿Consideras factible usar un software en esta materia para entender el problema planteado?*

El alumno comenta que si, más no da una explicación más profunda.

4) *¿Te facilita el aprendizaje este software para entender que es una ecuación diferencial, orden, linealidad, curva solución y condiciones iniciales?*

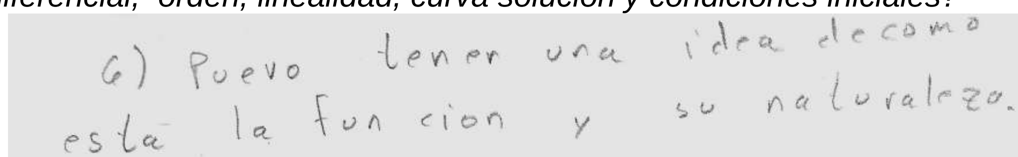


Figura 118.

Para Ignacio el *software* no le facilita mucho entender los conceptos, sin embargo, le da una idea de cómo es la función, lo motivó a resolver ecuaciones diferenciales y verificar sus resultados.

5) *¿Qué importancia tiene para ti al usar las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para la solución de una ecuación diferencial?*

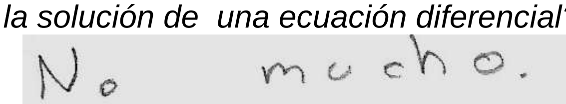


Figura 119.

El alumno considera que el *software* es factible para entender el problema, pero en cuestión de aprendizaje, aunque inicialmente el alumno no consideraba a WinPlot de ayuda; posteriormente lo utilizó para verificar resultados.

Para determinar si los alumnos con la actividad aplicada lograron la conversión de registros, tanto del algebraico, gráfico y numérico, a través de los indicadores y qué tipo de aprendizaje se desenvuelven, se tiene la tabla 5.

Tabla 5. La evaluación del aprendizaje del alumno y el logro de los alumnos en la conversión de registros.

	Andrés	Bárbara	Jonathan	Ignacio
1. Plantea el método a resolver la ecuación diferencial	✓	✓	✓	✓
2. Identifica los parámetros en la representación algebraica	✓	✓	✓	✓
3. Indica el orden, grado y linealidad de la ecuación diferencial				
4. Resuelve la ecuación diferencial en el registro algebraico dando el tratamiento algebraico	✓	✓	✓	✓
5. Justifica la solución encontrada	✓	✓	✓	✓
6. Identifica que la familia de curvas solución está dado por la solución general	✓	✓	✓	✓
7. Observa los parámetros y los valores de las variables para realizar el bosquejo de la solución particular	✓	✓	✓	✓
8. Realizó el bosquejo de la solución particular de manera correcta	✓	✓	✓	✓
9. La pendiente es positiva en el primer cuadrante, si a>b donde a y b son parámetros, la población permanece	✓	✓	✓	✓
10. La pendiente es cero, cuando a=b, la población permanece constante	✓	✓	✓	✓
11. La pendiente es negativa, si a<b, la población disminuye	✓	✓	✓	✓
12. Representa y analiza a la solución utilizando tablas para tabular				
13. Identifica a los parámetros y realiza la manipulación dentro del registro algebraico	✓	✓	✓	✓
14. Identifica que la gráfica corta al eje de las "y" donde se indica la condición inicial	✓	✓	✓	✓
15. Considera el comportamiento de cada variable para la construcción de dicha gráfica	✓	✓	✓	✓
16. Identifica en WinPlot a los parámetros, al manipularlos y se da cuenta de sus errores en el bosquejo realizado a papel y lápiz	✓	✓	✓	✓
17. Analiza los efectos que ocasiona en la gráfica en los cambios de los parámetros, con respecto a la familia de curvas solución	✓	✓	✓	✓
18. Se enfrenta a la conversión cuando intenta explicar el registro grafico al algebraico	✓	✓	✓	✓
19. Observa diferencias entre la gráfica y la representación algebraica	✓	✓	✓	✓
20. Identifico las diferencias entre su gráfica bosquejada y la de WinPlot	✓	✓	✓	✓

21. Identifica a través de WinPlot la tasa de cambio		✓	✓	✓
22. Utiliza y valora las conexiones entre las matemáticas y otras materias	✓	✓	✓	✓
23. Hace traducciones entre representaciones tabulares, gráficos y algebraicos	✓	✓	✓	✓
24. verifica que la solución obtenida corresponde al campo de las pendientes de la propia ecuación con la gráfica de la solución encontrada	✓	✓	✓	✓

Con este problema práctico, se muestra en la tabla 5, las actitudes de los estudiantes, cambiaron, es decir, mostraron mayor interés en la resolución de una ecuación diferencial, con respecto a los parámetros dados tanto en la ecuación diferencial, así como en la solución obtenida. Para ello la conversión del registro algebraico al gráfico es más viable, en las cuestiones que el alumno tiene que vincular en los sucesos de que va a acontecer con la población; esto conlleva, a la solución representada en diferentes representaciones semióticas permiten de alguna u otra manera su comprensión de los conceptos estudiados, es decir, la solución de la ecuación diferencial y tasa de cambio, sin perder el objetivo. Cuando el alumno va del registro gráfico al algebraico se da cuenta del comportamiento de los parámetros como de la propia función, al considerar los caso a>b, a<b y a=c, son parte importante para esta conversión, de un forma muy similar, analiza en la grafica os parámetros para regresar al registro algébrico. De los cuatro alumnos, solo Andrés no hace inferencia acerca de la tasa de cambio, con ello el concepto de tasa de cambio lo captaron de manera más factible a través de la representación algebraica y gráfica, con respecto a un problema práctico, como debe de ser.

e) Quinta sesión

En esta sesión se aplicó la última actividad, en ello, solo tres alumnos lograron concluirla, mencionando que fueron los que trabajaron de manera animada, además se puede ver cambios de la primera actividad a la última, WinPlot, ha resultado ser un instrumento de apoyo hacia la enseñanza-aprendizaje en ecuaciones diferenciales, con una duración de 3 horas.

Las respuestas que dan los alumnos se analizaran de manera cualitativa para la actividad 4, así como se analizaron las anteriores, de forma individual.

La población de peces de uno de los lagos grandes. ¿Qué tasa de pesca se conserva en cantidades aceptables la población de peces y la industria pesquera?

y(t) *a la población de peces vivos en el instante t, considerando el tiempo en meses.*
Como se habla de la tasa de cambio total de la población de peces por meses denotemos por

$\frac{dy(t)}{dt}$ *ó y´.*

Podemos expresar a la tasa total de cambio como:

y´= tasa de nacimiento – tasa de muerte – tasa de captura (*)

Como la tasa de nacimiento y de mortalidad son proporcionales al tamaño de la población, entonces:

Tasa de nacimiento en el instante t: a Y (t)
Tasa de mortalidad en el instante t: (b Y (t) + c) Y(t)
Tasa de captura: K

Donde a, b y c son constantes de proporcionalidad y positivas. Donde c indica la mortalidad natural y b indica la sobrepoblación.

La ecuación diferencial está dada por:

$$Y' = aY(t) - (bY(t) + c)Y(t) - K$$

Bárbara, realizó lo siguiente:
Pregunta 1
¿Qué entiendes por tasa de cambio?

La variación con respecto a un parámetro de una magnitud determinada

Figura 120.

Bárbara da el concepto de tasa de cambio en forma intuitiva, como se muestra en la figura 120.

Pregunta 2
Simplifica la ecuación diferencial.

2.- $y' = aY(t) - (bY(t) + c)Y(t) - K$ —(1),

Figura 121.

Bárbara indica la ecuación diferencial, de manera correcta como se tiene en la figura 121, apoyada en el registro algebraico.
Pregunta 3
¿Qué sucede si no hay captura, es decir, K=0? ¿Cómo es la ecuación diferencial? Resuélvela y explícalo de manera clara, tanto su orden, grado, linealidad. ¿Por qué?

La alumna se dedicó a resolver la ecuación diferencial, empleando fracciones parciales, llegando así a la solución correcta tal y como se observa en la figura 122, trabajó en el registro algebraico sin problemas.

En las últimas preguntas la alumna no las concluyó. Finalizando así su participación en la elaboración de este trabajo, Bárbara, en las dos primeras actividades comentaba que no podía realizar gráficas tan complejas, sin embargo, en la actividad 3, se atrevió a trazar el bosquejo, favoreciendo así, las actividades como una manera de motivar a la alumna a esforzarse en representar dicha solución. Además, WinPlot ha sido una herramienta que facilita representar gráficamente la solución de una ecuación diferencial, así como graficar directamente la ecuación, indicando que WinPlot permite una mejor visualización y comprensión de dicha solución.

Si $k=0$. $y' = ay - by^2 + cy$

$y' = (a+c)y - by^2$

$-y' = by^2 - (a+c)y$

Se tiene que:

$$\frac{dy}{by^2-(a-c)y} = -dt.$$

$$\frac{y'}{-b} = \left(\frac{c-a}{b}\right)y + y^2.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2+\left(\frac{c-a}{b}\right)y} = -b\,dx.$$

$$\int \frac{du}{y^2+\left(\frac{c-a}{b}\right)y+\left(\frac{c-a}{2b}\right)^2-\left(\frac{c-a}{2b}\right)^2} = \int \frac{du}{\left(y+\left(\frac{c-a}{2b}\right)\right)^2-\left(\frac{c-a}{2b}\right)^2} = -t+c.$$

$$\frac{1}{y(by-(a-c))} = \frac{A}{y} + \frac{B}{by+c-a}$$

$$\Rightarrow A(by+c-a) + B(y) = 1$$

$$\Rightarrow Ab+B = 0.$$

$$\therefore A(c-a) = 1$$

$$A = \frac{1}{c-a} \Rightarrow \frac{1}{c-a}b + B = 0 \Rightarrow B = \frac{b}{a-c}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{y(by-(a-c))} = \frac{1}{c-a}\ln y + \frac{1}{a-c}\ln(by+c-a)$$

$$= \frac{1}{c-a}\ln y - \frac{1}{c-a}\ln(by+c-a) = \frac{1}{c-a}\ln\left(\frac{y}{by+c-a}\right).$$

$$\Rightarrow y = e^{-t(c-a)}(by+c-a)K. \quad \text{Si } t=0: \ \frac{y_0}{by_0+c-a} = K.$$

así pues

$$y_0 = e^{-t(c-a)}(by+c-a)\frac{y_0}{by_0+c-a} = e^{-t(c-a)}\,y_0\,(by+c-a)\,/\,(by_0+c-a)$$

Figura 122.

Jonathan, respondió lo siguiente:

Pregunta 1

¿Qué entiendes por tasa de cambio?

El alumno recurrió al registro verbal como se tiene en la figura 127.

la rapidez con la que aumenta una cantidad (en este caso población),

Figura 123.

Aunque sólo se refiere en su definición para aumento de cantidades en un tiempo determinado, Jonathan tiene presente el concepto de tasa de cambio expresado en el registro de lenguaje verbal.

Pregunta 2

Simplifica la ecuación diferencial:

$$y' = (a - c)y - by^2$$

Figura 124.

El alumno recurrió al registro algebraico para simplificar la ecuación diferencial, tal y como se muestra en respuesta dada.

Pregunta 3

¿Qué sucede si no hay captura, es decir, C=0? ¿Cómo es la ecuación diferencial? Resuélvela y explícalo de manera clara, tanto su orden, grado, linealidad. ¿Por qué?

Jonathan, trabajó en el registro algebraico, recurriendo así a resolver la ecuación empleando fracciones parciales para resolver dicha integral, además como se muestra en la figura 125 indica el orden y grado de la ecuación diferencial a resolver. A Ignacio el tener presente los conceptos le permite una mejor comprensión y coordinación entre los registro, para que de esta manera logre la conversión entre registro algebraico y numérico, en esta ocasión no logró realizar el bosquejo. Llegando así a la solución en su forma implícita.

3.- $y' = \overset{\text{si } K=0}{a\,y(t) - (b(y(t)) + c)\,y(t)}$

$$y' = (a-c)y - by^2 \qquad y(0) = y_0$$

$$\int \frac{dy}{(a-c)y - by^2} = \int dt$$ — es de var. separables de orden 1, grado 2,

$$\frac{1}{(y)[(a-c) - by]} = \frac{A}{y} + \frac{B}{((a-c) - by)}$$

así

$$A[(a-c) - by] + By = 1$$

$$(a-c)A + (B - Ab)y = 1$$

$$B - Ab = 0$$

$$A = \frac{1}{a-c}$$

$$B = Ab = \frac{b}{a-c}$$

Así

$$\int \frac{dy}{(a-c)y - by^2} = \int \frac{dy}{(a-c)y} + \int \frac{b\,dy}{(a-c)[a-c-by]}$$

$$= \frac{1}{a-c}\ln y + \left(-\frac{1}{a-c}\right)\ln(a-c-by)$$

así

$$\frac{1}{a-c}\left[\ln y - \ln(a-c-by)\right] = t + c$$

$$\frac{1}{a-c}\ln\frac{y}{a-c-by} = t + c$$ — — — Sol. gral.

si $y(0) = y_0$

$$c = \frac{1}{a-c}\ln\frac{y_0}{a-c-by_0}$$

Figura 125.

Pregunta 4
Usando la condición inicia determina su solución particular.

Sol. part.:

$$\frac{1}{a-c}\ln\frac{y}{a-c-by} = t + \frac{1}{a-c}\ln\frac{y_0}{a-c-by_0}$$

$$\frac{1}{a-c}\ln\left[\frac{y(a-c-by_0)}{y_0(a-c-by)}\right] = t$$

$$\frac{y(a-c-by_0)}{y_0(a-c-by)} = e^{(a-c)t} \quad \text{---- sol. part.}$$

Figura 126.

El alumno encuentra la solución y la da en su forma implícita como se muestra en la figura 126, llevando a cabo la conversión entre el registro algebraico y numérico, de manera espontánea.

Pregunta 5
Bosquejar la gráfica de la solución encontrada. ¿Qué pasa con la población?

No tengo idea,

Figura 127.

No logró en esta actividad representar la solución, sin embargo, mostró un buen desempeño y constancia en el desarrollo de esta actividad, ya que en las actividades anteriores en todas las logró representar.

En la *pregunta 6*, se apoyó en WinPlot, en la cual se le pidió al alumno hacer variar los parámetros de la ecuación diferencial dada.

Pregunta 7
Si ahora consideramos que no hay sobrepoblación pero si hay captura, ¿Cuál es la ecuación diferencial? Determina su solución y bosqueja su gráfica con la solución encontrada. Explica de manera clara ¿Qué le sucede a la población?

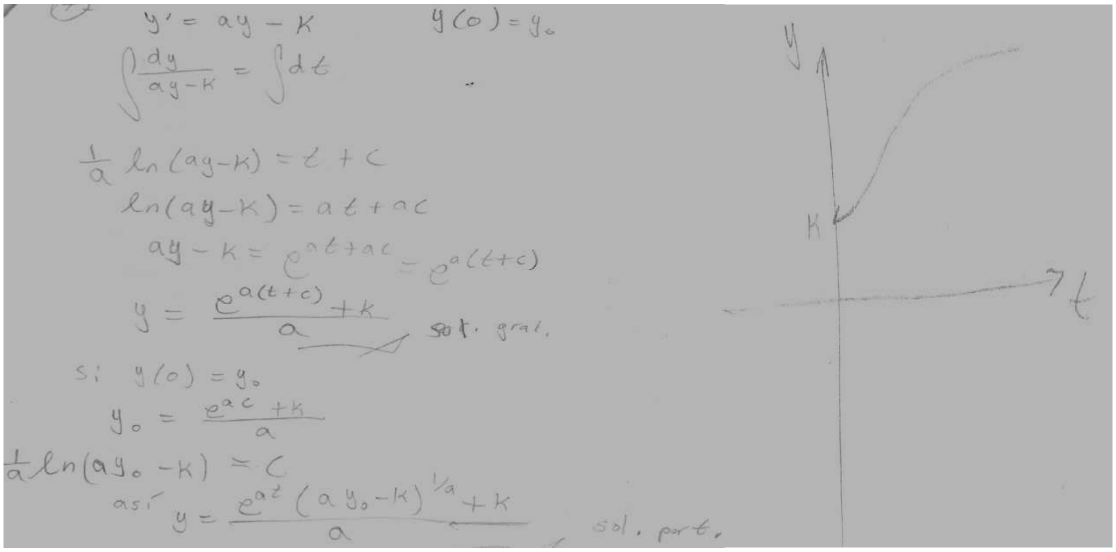


Figura 128.

Con el apoyo de WinPlot, observa cómo es la gráfica de la solución encontrada, recordando que no logró realizar el bosquejo, graficando en primera instancia la solución particular y la representa en la figura 128. El alumno logró la conversión entre el registro algebraico al numérico, y para llevar a cabo la conversión entre el registro grafico y el numérico fue de gran utilidad el *software*, como se muestra en la figura, la conversión entre estos registro la realizó de manera espontánea.

En la pregunta 8, se enfoca a la solución general de la ecuación diferencial, permitiéndole al alumno hacer variar sus parámetros, al realizar lo anterior se le pregunta ¿Qué sucede con la población?

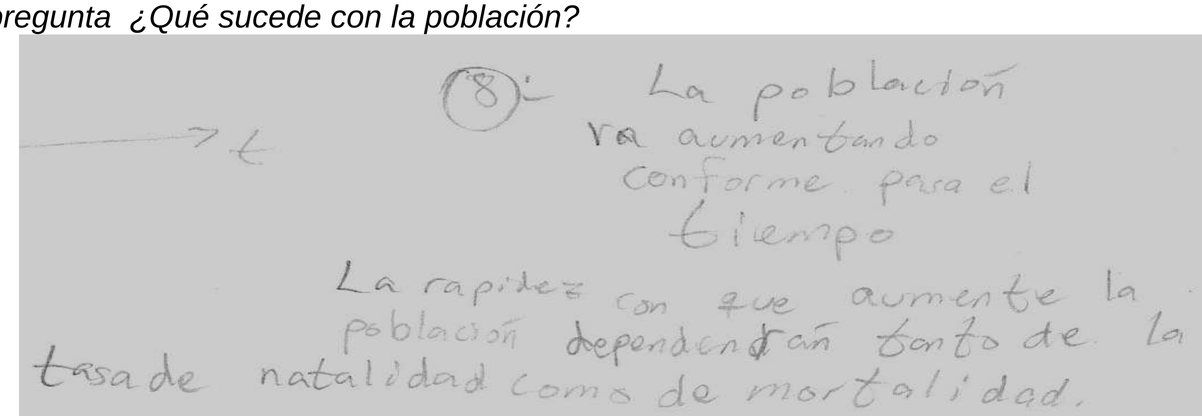
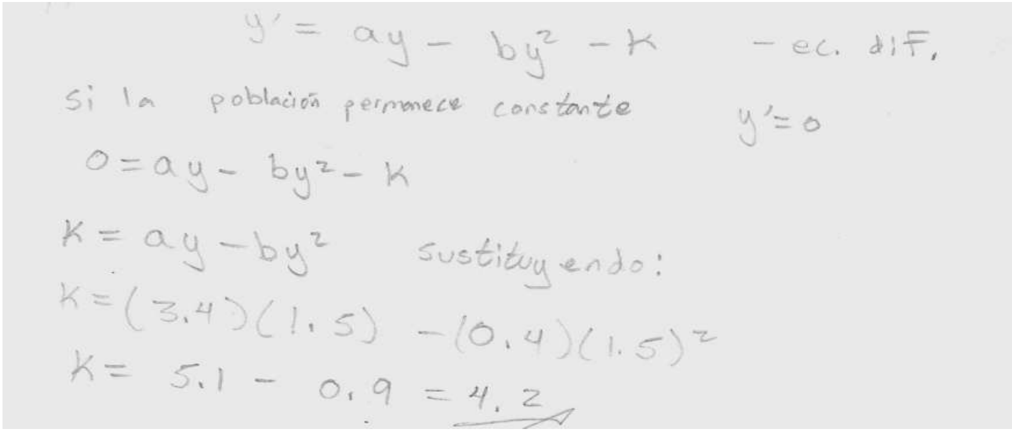


Figura 129.

A través de las observaciones realizadas por el alumno, comenta que la población aumentará conforme pasa el tiempo, y dependerá de la tasa de natalidad como de mortalidad, como se muestra en la figura 129.

Pregunta 9

Se tiene en el tiempo t_0=0   Y=1.5 toneladas y A= 3.4 y B=0.4, ¿Para que la población de peces permanezca constante qué valor debe tener la captura K? Realiza tus anotaciones.



$y' = ay - by^2 - K$ — ec. dif.

si la población permanece constante $y' = 0$

$0 = ay - by^2 - K$

$K = ay - by^2$ sustituyendo:

$K = (3.4)(1.5) - (0.4)(1.5)^2$

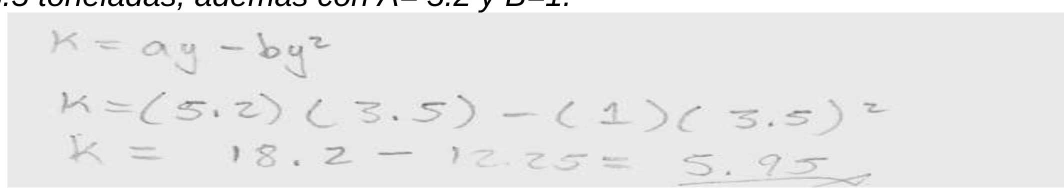
$K = 5.1 - 0.9 = 4.2$

Figura 130.

Efectivamente, el alumno se apoyó en el registró algebraico a partir de la ecuación diferencial realizando los cálculos en papel y lápiz indicando el valor de la captura como se muestra en la figura 130 y también en WinPlot, logrando así la conversión de registros del algebraico al numérico, y del gráfico al numérico para encontrar la captura.

Pregunta 10

¿Cómo se debe mantener la captura de los peces para que la población se encuentre en equilibrio es decir $\frac{dY}{dt} = 0$ *? Realícelo algebraicamente tomando en cuenta que* $t_0 = 3$ *& Y=3.5 toneladas, además con A= 5.2 y B=1.*



$K = ay - by^2$

$K = (5.2)(3.5) - (1)(3.5)^2$

$K = 18.2 - 12.25 = 5.95$

Figura 131.

El alumno realiza los calculo a tráves de papel y lapiz, encontrando así el valor de la captura denotado por K, llevando a cabo la conversión del registro algebraico al nemérico.

Pegunta 11

Con el inciso anterior ¿Para qué valores de K captura, asegura que no se extinguirán los peces?

Para $K < 5.95$

Figura 132.

El alumno india el valor de la captura apoyado en el registro numérico, como se tiene en la figura 132.

Pregunta 12

Si A, B y K son tales que la población permanece constante y se dobla el valor de A, ¿en cuánto debe cambiar K para que la población siga permaneciendo constante?

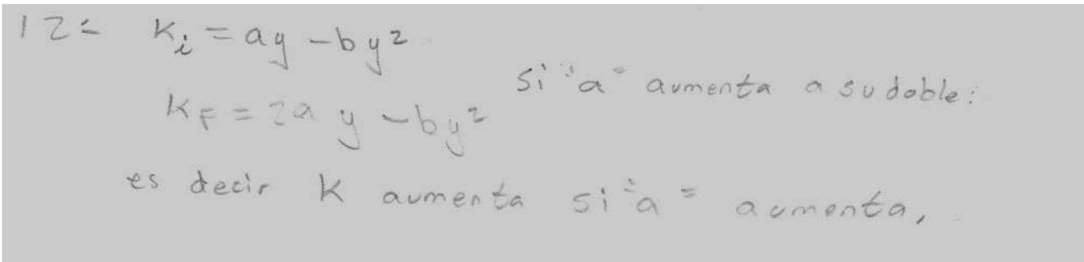


Figura 133.

Al alumno, no le es difícil cambiar de un registro a otro, pues dentro del registro algebraico lo domina, de la misma manera para la conversión del algebraico al numérico, como del numérico al gráfico y viceversa, lo realiza de manera muy decisiva.

Ignacio, respondió lo siguiente:
Pregunta 1
¿Qué entiendes por tasa de cambio?
El alumno no contestó a esta pregunta.

Pregunta 2
Simplifica la ecuación diferencial:

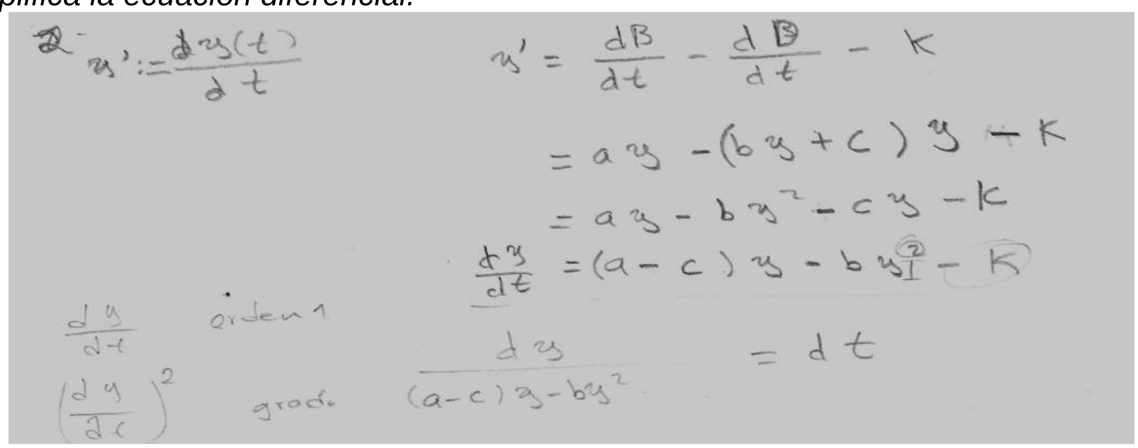


Figura 134.

El alumno recurrió al registro algebraico para simplificar dicha ecuación diferencial, como se ve en la figura 134.
Pregunta 3
¿Qué sucede si no hay captura, es decir, K=0? ¿Cómo es la ecuación diferencial? Resuélvela y explícalo de manera clara, tanto su orden, grado, linealidad. ¿Por qué?
El alumno llega a la solución en su forma implícita como se muestra en la figura 135, además indica el orden y grado de la misma, como se tiene en la figura 134.

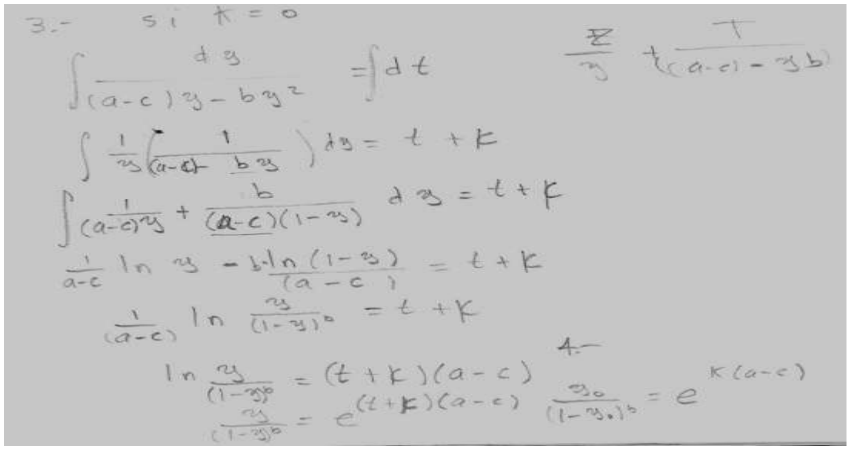


Figura 135.

Las *preguntas 4 y 5* no las respondió.

Para la *pregunta 6*, se apoyó en WinPlot. En esta pregunta se le pidió al alumno hacer variar los parámetros de la ecuación diferencial dada.

Pregunta 7

Si ahora consideramos que no hay sobrepoblación pero si hay captura, ¿Cuál es la ecuación diferencial? Determina su solución y bosqueja su gráfica con la solución encontrada. Explica de manera clara ¿Qué le sucede a la población?

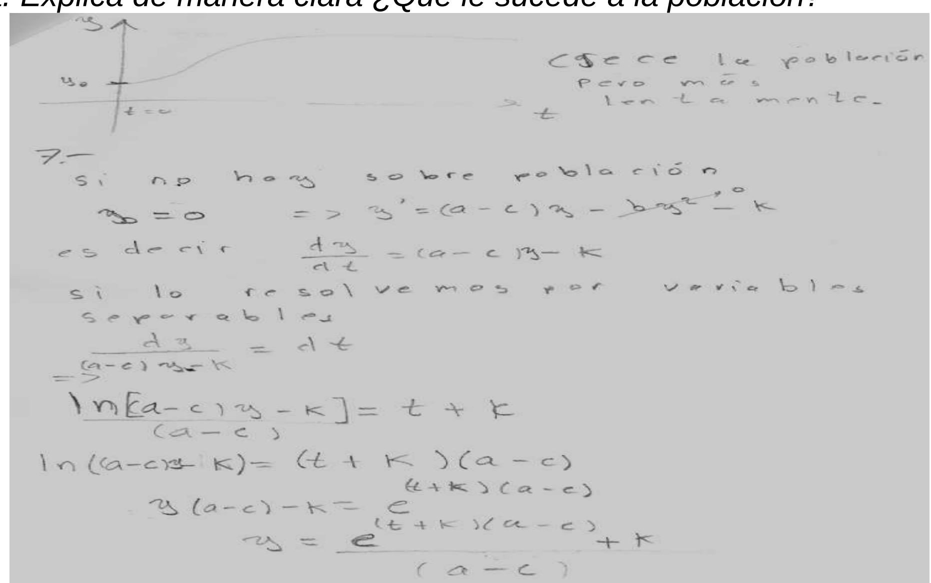


Figura 136.

Para resolver la integral, observa que es de variables separables, llegando a la solución como se muestra en la figura 136, aunque la solución obtenida es incorrecta, además comenta que la población crece de manera lenta.

La pregunta 8, se enfoca a la solución general de la ecuación diferencial, permitiéndole al alumno hacer variar sus parámetros, al realizar lo anterior se le pregunta ¿Qué sucede con la población?

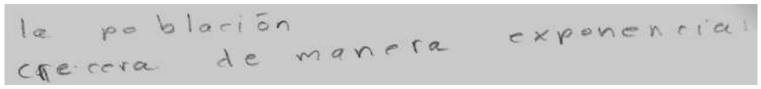

la población
crecera de manera exponencial

Figura 137.

La población crecerá de manera exponencial, esto es lo que menciona Jonathan.

Pregunta 9

Se tiene en el tiempo t_0=0   Y=1.5 toneladas y A= 3.4 y B=0.4, ¿Para que la población de peces permanezca constante qué valor debe tener la captura K? Realiza tus anotaciones.

Esta pregunta hace uso de los registros algebraico y numérico.

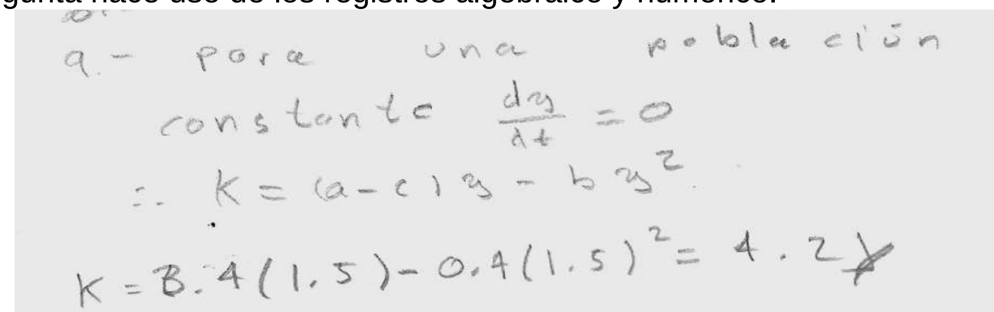

9.- para una población
constante $\frac{dy}{dt} = 0$
$\therefore K = (a-c)y - by^2$
$K = 3.4(1.5) - 0.4(1.5)^2 = 4.2$

Figura 138.

Efectivamente, el alumno se apoyó con el registro algebraico a partir de la ecuación diferencial, así como del registro numérico para encontrar el valor de la captura realizándolo con papel y lápiz, como se muestra en la figura 138.

Pregunta 10

¿Cómo se debe mantener la captura de los peces para que la población se encuentre en equilibrio es decir $\frac{dY}{dt} = 0$? Realícelo algebraicamente tomando en cuenta que t_0=3 & Y=3.5 toneladas, además con A= 5.2 y B=1.

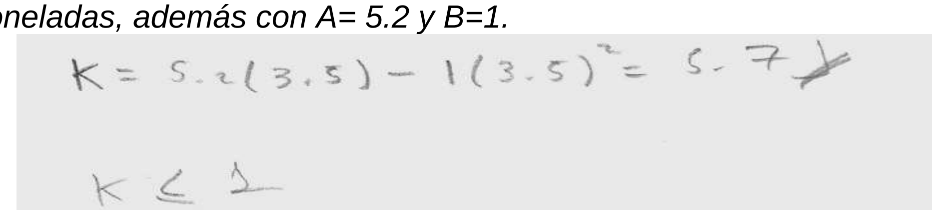

$K = 5.2(3.5) - 1(3.5)^2 = 5.7$
$K \leq 1$

Figura 139.

Para encontrar el valor de la captura, partiendo de la ecuación simplificada y realizando los cálculos a través de papel y lápiz, el alumno trabajó en el registro algebraico y a la vez en el numérico.

El alumno no contestó las dos últimas preguntas.

El alumno al realizar la conversión de registros, del algebraico al numérico, no tiene problemas, de la misma forma para el registro algebraico al gráfico; lo realiza sin problema alguno, sirviéndose así de WinPlot para comprobar si en realidad lo que ha bosquejado es correcto.

En la tabla 6, se muestra una evaluación llevada a cabo por lista de cotejo, indicadores importantes que se plantearon para lograr la conversión entre los registro grafico, algebraico y numérico, que en ocasiones se suelen presentar de manera espontanea e intermediaria, es decir, si se parte del registro algebraico al grafico muchas de las ocasiones se termina en el registro de partida. Sin embargo, con el apoyo del *software* permite al alumno lograr dicha conversión, pues teniendo un apoyo visual, algebraico, geométrico u otros, las representaciones semióticas facilitan una mejor comprensión en los conceptos estudiados representándolos en diferentes registros.

Para concluir en esta última actividad los alumnos han considerado a la solución obtenida como de alto grado de dificultad para llevar a cabo su bosquejo, sin embargo, su actitud cambio de las dos primeras actividades a estas últimas, considerando que son problemas aplicativos, y que en el cual permite a los alumnos visualizar mejor a la solución obtenida y relacionar mejor el concepto en cada representación, esto resulta ser más significativo.

Tabla 6. La conversión de registros y el grado de dificultad que se enfrentaron los alumnos.

Alumnos	**Bárbara**	**Jonathan**	**Ignacio**
1. Plantea el método a resolver la ecuación diferencial	✓	✓	✓
2. Identifica los parámetros en la representación algebraica	✓	✓	✓
3. Indica el orden, grado y linealidad de la ecuación diferencial	✓	✓	✓
4. Resuelve la ecuación diferencial en el registro algebraico	✓	✓	✓
5. Justifica la solución encontrada	✓	✓	✓
6. Identifica que la familia de curvas solución está dado por la solución general		✓	✓
7. Observa los parámetros y los valores de las variables para realizar el bosquejo de la solución particular		✓	✓
8. Realizó el bosquejo de la solución particular de manera correcta			✓
9. La pendiente es positiva en el primer cuadrante, si $a>b$ donde a y b son parámetros, la población se conserva			✓
10. La pendiente es cero, cuando a=b, la población permanece constante			
11. La pendiente es negativa, si a<b, la población disminuye			
12. Identifica a los parámetros y realiza la manipulación dentro del registro algebraico	✓		
13. Identifica que la gráfica corta al eje de las “y”, dada por la condición inicial			✓
14. Considera el comportamiento de cada variable para la construcción de dicha gráfica		✓	✓
15. Identifica en WinPlot los parámetros, al manipularlos y se da cuenta de sus errores en el bosquejo realizado a papel y lápiz	✓	✓	✓

16. Analiza los efectos que ocasiona en la gráfica en los cambios de los parámetros, con respecto a la familia de curvas solución	✓	✓	✓
17. Lleva acabo la conversión de registro del grafico al algebraico y viceversa, a través de la visualización de las variables que influyen la gráfica	✓	✓	✓
18. Observa diferencias entre la gráfica y la representación algebraica, con WinPlot	✓	✓	✓
19. Identifica las diferencias entre su gráfica bosquejada y la de WinPlot	✓		✓
20. Comprende los conceptos de solución de una ecuación diferencial y tasa de cambio	✓	✓	✓
21. Utiliza y valora las conexiones entre las matemáticas y otras materias	✓	✓	✓
22. Hace traducciones entre representaciones tabulares, gráficos y algebraicos	✓	✓	✓
23. verifica que la solución obtenida corresponde al campo de pendientes de la propia ecuación con la gráfica de la solución encontrada	✓	✓	✓

En esta tabla los alumno que lograron concluir las actividades, son los que mostraron mayor interés y entusiasmo por lograr representar la solución a través de papel y lápiz, así como el empleo de WinPlot para representarla, de esta manera los alumnos lograron dicha conversión de registros del gráfico al algebraico a través de las dos actividades practicas, pues lo logran a través de la expresión lingüística a la representación algebraica. No olvidemos que los registros se presentan de manera intermediaria durante la conversión, pero el alumno no los identifica, pues aparecen de manera espontanea.

Además en esta última actividad los alumnos lograron identificar el orden, el grado de la ecuación diferencial y además menciona que es una ecuación diferencial no lineal, sabiendo ante mano que una ecuación diferencial lineal es aquella donde los el exponente de las derivadas y de la variable dependiente tienen exponente uno. Es importante señalar que los alumnos reconocen el concepto de tasa de cambio a través del software, esto es favorable para su entendimiento y aprendizaje en distinguir entre la representación y el concepto.

V. CONCLUSIONES

De acuerdo a la definición de los conceptos que se le solicitaron a los alumnos antes de iniciar las actividades, se realizó con la finalidad de saber que tan presente tiene estos conceptos. Se determinó que la falta de compresión en los conceptos influyen de manera directa a que los alumnos concluyan o no las actividades propuesta.

Es importante hacer notar, que la comprensión de los conceptos matemáticos requiere de diferentes registros representación, de tal manera que se le proporcione de forma consciente al alumno. Por parte del profesor, debe especificar el concepto a estudiar sin que este sea confundido con su representación que utilizará, así el alumno le dará la importancia de emplear varios registros de representación a los conceptos matemáticos y los distinguirá.

Con base a las actividades aplicadas a los estudiantes, se encontró que algunos alumnos tienen dificultad en plantear el método para resolver la ecuación diferencial, y quienes lo intentaron mostraban estar indecisos al trabajar en el registro algebraico, esto se debió a que solo la mitad de los alumnos que participaron lograron resolver la ecuación diferencial en la primer actividad.

Se encontró que algunos alumnos tienen problemas en la conversión entre el registro algebraico al gráfico, ya que para bosquejar la gráfica los alumnos no consideran los valores de las variables, así como el de los parámetros en sus diferentes casos de la solución encontrada, algunos los manejan de manera implícita otro los dan por hecho.

Sin embargo, para lograr deducir la solución algebraica a través de la gráfica, apoyada del campo de pendientes y de la curva solución trazada por WinPlot, es recomendable que el profesor apoye a los alumnos, a través de explicaciones que no pueden mostrarse a simple vista, logrando así dicha conversión, reiterando que en ocasiones para lograr la conversión es necesario incorporar otras variables que lo conlleven de manera objetiva.

Además, no consideran a la tabulación como una representación más en la conversión de registros, que sirve como apoyo para el bosquejo de la gráfica para aquellos que no alcanzan a visualizar a la solución encontrada. Se notó que en la conversión del registro gráfico al numérico, se llevó a cabo al usar el software, manipulando tanto la curva solución general asimismo como la ecuación diferencial.

Las actividades propuestas permiten al alumno promover el bosquejo de la gráfica de la solución encontrada, guiándolo para la conversión de registros apoyadas en WinPlot, donde este *software* como un recurso didáctico favorece al alumno de manera positiva, pues permite al alumno en confiar en su conocimiento y retarse él mismo, para verificar si en realidad lo que bosquejo es correcto. Además permite darle confianza para mostrar sus inquietudes para vincularlo con otros conceptos que son de su importancia, así como en otras áreas de su interés.

Con base en las actividades aplicadas a los estudiantes y la lista de cotejo que se empleo para cada actividad, se determinó que el aprendizaje en los alumnos es procedimental y pocos son los que manifiestan un aprendizaje conceptual.

El desenvolvimiento de los alumnos durante la aplicación de las actividades se analizó de una manera cualitativa, apoyándose al término de cada actividad por una lista de cotejo que incluyen los aprendizajes conceptual, procedimental y actitudinal.

Sin embargo, con el apoyo de WinPlot los alumnos se sorprendían al ver la gráfica de su solución y compararla con la gráfica de la ecuación diferencial, mostraban interés y emoción al comparar. Realizando comentarios como "*la gráfica si corresponde a lo que realicé, aunque en WinPlot la pendiente es mayor*", otros solo comentan "*yo solo grafique en WinPlot", "si, bastante ya que es una recta, yo esboce otra cosa*" y "*el bosquejo si corresponde a la gráfica hecha en WinPlot sólo que en WinPlot la pendiente es mayor*"; sin embargo, varios de los alumnos no lograron resolver la ecuación, por lo tanto no pudieron bosquejar la gráfica de la solución y WinPlot les facilitó visualizarla, no obstante, para los alumnos que no lograron encontrar la solución, el *software* es una herramienta importante para conocer la gráfica de cualquier ecuación diferencial ordinaria, permitiendo así visualizar la familia de curvas solución.

Se observó que las expectativas de los estudiantes cambian, con el uso de *software*. Esto indica que los factores que se le atribuyen a la iniciativa por bosquejar la gráfica, es el identificar los parámetros, el tipo de función, su comportamiento y el grado de dificultad para trazarla. Además, señala que a través de WinPlot le permite visualizar la gráfica de la solución encontrada y verificar si es la correcta o no, cerciorándose con el campo de las pendientes de la ecuación diferencial dada, teniendo así un mayor contacto visual con la solución encontrada y la manipulación de los parámetros.

Se observa que el uso de diferentes registros de representación apoyados con la tecnología, facilita la comprensión de los conceptos por parte del alumno, aunque pocos son los alumnos que logran identificar el concepto en las distintas representaciones, el alumno lo aprecia de manera espontánea, generando así la conversión entre los registro gráfico, algebraico y numérico. Mientras que pocos estudiantes logran representar gráficamente la solución obtenida de la ecuación diferencial.

Los avances que lograron los alumnos en la aplicación de las actividades, tomando en cuenta su entusiasmo y disponibilidad, antes, durante y después de la aplicación, los tres alumnos fueron los más sobresalientes. Como se obtuvo, los alumnos Ignacio y Jonathan en cuestión de cambio de registro, no tiene problemas, considerando que ambos en el bosquejo de la gráfica de la solución de la ecuación diferencial la realizan de manera espontánea, en ello se resalta que dependiendo de la solución obtenida y su grado de dificultad, los alumnos realizarán o no el bosquejo. Los alumnos que terminaron esta última actividad señalan el orden, grado de la ecuación diferencial a resolver, cosa que en las anteriores no lo hicieron.

Ventajas que se tienen al hacer uso de WinPlot en la conversión de registros (algebraico, gráfico y numérico) en la obtención de la solución de una ecuación diferencial ordinaria, por medio de las actividades propuestas:

1. Facilita al alumno tener mayor visualización de la solución de una ecuación dada, y por lo tanto, enriquece el significado de la misma.
2. Facilita visualizar el campo de pendientes de la ecuación diferencial dada.
3. Facilita variar los parámetros que tiene la solución encontrada y ver el comportamiento del campo de las pendientes como de la solución dada.
4. WinPlot conlleva a la conversión de registro, del gráfico al numérico, del gráfico al algebraico, en el momento de variar los parámetros, también esto se realiza a papel y lápiz, considerando que los alumnos lo realizan de manera espontanea.
5. Facilita las interpretaciones cualitativas en el análisis de problemas físicos con respecto a las variables y los parámetros en el problema planteado.
6. Se puede interpretar mejor *la solución* de una ecuación diferencial teniendo presente la gráfica de dicha solución.
7. Facilita el comprobar si la solución encontrada es la correcta a través de del campo de pendientes de la ecuación diferencial dada.
8. Facilita al alumno analizar la complejidad de la solución encontrada y tener su representación gráfica.
9. Facilita al alumno trabajar en diferentes registros de la solución de una ecuación diferencial dada.

Se recomienda que al emplear el *software* en el aula de clase, es preferible que cada alumno trabaje de forma individual al inicio, y posteriormente en equipo para que discuta sus dudas o conjeturas acerca de los conceptos estudiados entre sus compañeros. Para que el alumno logre captar la importancia de emplear varios registros de representación, es necesario que el profesor indique que cada representación es una manera más de representar el concepto estudiado, de esta manera evitar que el alumno los confunda.

Es recomendable hacer mención, que antes de aplicar las actividades sea conveniente realizar una prueba piloto tanto de las actividades, así como de la evaluación de las mismas, para realizar las modificaciones necesarias, posteriormente aplicar las actividades en la muestra seleccionada. La evaluación cualitativa el profesor puede apoyarse de una bitácora o diario del docente con la finalidad de anotar el desempeño de los estudiantes antes, durante y después de la aplicación de la actividad, llevando un seguimiento que servirá de apoyo en la evaluación del aprendizaje del alumno, si se requiere determinar una calificación cuantitativa.

Para la aplicación de estas actividades, es necesario que el profesor que retome estas actividades tenga los conocimientos acerca del tema desarrollado, para que sea un facilitador del aprendizaje, impulsando a los alumnos a que se animen a explorar, formular, comprobar, a generalizar, discutir y a explicar los resultados obtenidos. Es importante señalar que el alumno debe cambiar en función de su preparación como señala la NCTM, para que logre construir, simbolizar, aplicar y generalizar las ideas matemáticas.

VI. Bibliografía

Acelajado, M. J. (2002). The impact of using technology on students' achievement, attitude, and anxiety in mathematics. De La Salle University. Manila, Philippines.

Álvarez, F. J. y J. Casado (1998). Estandares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. National Council of Theachers of Mathematics (NCTM). Estados Unidos: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

Balderas, P. A. (1998). The influence of information technology in the daily work of mathematics teachers. Departamento de Educación Matemática, Universidad de Querétaro, México.

Borelli, R. y C. Courtney (2002). Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación. Traducción: Juárez Parra Jazmín. México: Oxford

Carmona, J. I. (1998). Ecuaciones diferenciales. Cuarta Edición. México: Addison Wesley Longman.

Díaz Barriga, F. y G. Rojas Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México: Mc Graw-Hill, 2ª. Edición

Duval, R. (1988). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. Traducción del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Colombia

Flores, A. y Otros. (2008). Producción de materiales didácticos que atiendan los aprendizas de los Alumnos. CCH-UNAM

Hernández, S. y Otros. (2004). Metodología de la Investigación. Tercera Edición. México: Mac Graw-Hill

Santos, T. M. (2005). The use of technology as a Means to explore Mathematics Qualities in Proposed Problems. Cinvestav México.

Spiegel, Seymour (1998). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. México: Mc Graw-Hill.

WinPlot. Diseñado por Richard Parris. Phillips Exeter Academy. http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html