# CAPÍTULO

## 1. INTRODUCCIÓN

En 1844 el profesor de preparatoria Hermann Grassmann publicó un trabajo ambicioso titulado *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (La Teoría de la Extensión, una nueva rama de las matemáticas) más conocido como *Ausdehnungslehre* (Grassmann 1844). Según Grassmann ésta era, en efecto, *La rama* de las matemáticas que según sus propias palabras s*uperaba* a las demás.

Usando las ideas de su padre, Grassmann definió también *el producto exterior* o *producto combinatorio* (*äußeres Produkt* o *kombinatorisches Produkt*), el cual es la operación básica de lo que hoy se conoce como *álgebra exterior*. Su trabajo contiene las leyes de los espacios vectoriales pero, como contenía una multiplicación definida, sus estructuras satisfacen las propiedades de lo que ahora se conoce como álgebras. Los conjuntos de elementos linealmente independientes y dependientes están claramente contendidos en su trabajo como la idea de la dimensión.

En 1846 Grassmann ganó un premio de 45 ducados de oro por resolver uno de los problemas planteados por Leibniz: idear un cálculo geométrico desprovisto de coordenadas y propiedades métricas (lo que Leibniz llamó *analysis situ*). Sin embargo, sus métodos formales fueron duramente criticados y objetados por muchos matemáticos. Grassmann se justificó diciendo que estaba creando una teoría axiomática, lo que demostró que estaba muy adelantado para su tiempo.

Años más tarde, influenciado por los trabajos de Grassmann, el matemático inglés William K. Clifford presentó lo que ahora se conoce como *álgebra geométrica* o *álgebra* *de Clifford*, en un artículo titulado: "Aplicaciones del álgebra exterior de Grassmann" (Clifford 1878). Él pensaba, al igual que Grassmann, que las álgebras de Grassmann y los cuaterniones de Hamilton se podían unir en un mismo sistema algebraico, haciendo un ligero cambio en el producto exterior.

Clifford admiraba el *Ausdehnungslehre* de Grassmann y estaba convencido que sus principios ejercerían una gran influencia en el futuro de las ciencias matemáticas. Pero debido a su temprana muerte, el análisis vectorial de Gibbs y Heaviside predominó en casi todo el siglo XIX y no el álgebra geométrica.

Al comienzo del siglo XX algunos investigadores, pensaban que si se combinan los trabajos de Clifford y Grassmann, casi todas las matemáticas podrían ser formuladas en un cálculo geométrico sencillo y universal, con fundamentos concretamente geométricos (Hestenes 2003).

Uno de ellos fue David Hestenes. Él, en particular, quería encontrar un lenguaje unificado para las matemáticas y la física (Hestenes 1986). Hestenes pensaba que con el álgebra geométrica se podrían resolver muchos de los problemas En otras palabras, quería encontrar un sistema algebraico *universal* para las matemáticas y la física (Hestenes 1988). Mostró las ventajas que se podrían obtener al usar el álgebra geométrica en muchas áreas de la física y la geometría (Hestenes y Sobczyk 1984).

A partir de las publicaciones de Hestenes, muchos investigadores han obtenido buenos resultados al aplicar el álgebra geométrica en varias otras áreas. En ese sentido surge la pregunta de ¿por qué no usarla también en las ciencias de la computación?

Ya se han aplicado en algunas áreas, como las gráficas computacionales (Doran 2003), donde se han obtenido muy buenos resultados. Inclusive, hay algunos trabajos en el área del reconocimiento de patrones, como los que se presentarán en el capítulo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**. En el presente trabajo se explorará una rama muy importante del reconocimiento de patrones: las memorias asociativas. En este caso, en el marco de trabajo del álgebra geométrica.

## 1.1 Objetivo general

El objetivo de este trabajo es desarrollar un nuevo modelo de memorias asociativas, las *memorias asociativas geométricas*. Estas memorias utilizarán operadores y operaciones del álgebra geométrica para su funcionamiento.

Se desarrollarán, a su vez, tres modos de operación para estas memorias: clasificación supervisada, clasificación no supervisada y restauración de patrones.

### 1.1.1 Objetivos específicos

- Estudiar el estado del arte para modelos de reconocimiento de patrones que utilicen álgebra geométrica.
- Desarrollar un nuevo modelo de memorias asociativas utilizando operadores del álgebra geométrica.
    - Adecuar el modelo para que opere en el modo de operación para clasificación supervisada.
        - Plantear las fases de entrenamiento y clasificación usando operaciones y operadores del álgebra geométrica.
        - Desarrollar las condiciones bajo las cuales este modelo funcionará correctamente.
    - Adecuar el modelo para que opere en el modo de operación para restauración de patrones.
        - Plantear las fases de entrenamiento y restauración usando operaciones y operadores del álgebra geométrica.
        - Desarrollar las condiciones bajo las cuales este modelo funcionará correctamente.
    - Adecuar el modelo para que opere en el modo de operación para clasificación no supervisada.
        - Modificar el algoritmo de *k*-medias para que funcione en el marco del álgebra geométrica.
        - Mejorar la complejidad del algoritmo original de *k*-medias.
    - Aplicar los modelos desarrollados en ejemplos numéricos y con patrones reales para mostrar su funcionamiento.
- Comparar los modelos desarrollados con otros modelos ya existentes.

- Presentar los resultados obtenidos en revistas y/o congresos internacionales de reconocimiento de patrones.
- Integrar a cada uno de los modelos sus respectivas condiciones para recuperación perfecta y robusta.

## 1.2 Justificación

Con este trabajo se pretenden resolver algunos de los problemas más importantes en los campos del tratamiento digital de patrones y el reconocimiento de patrones, usando, para ello, el álgebra geométrica.

De esta forma se estará dando un paso importante a la universalidad del álgebra geométrica, no solo para resolver problemas en matemáticas o física, sino también en el área de reconocimiento de patrones.

También se pretende abrir una nueva línea de investigación al combinar técnicas de la inteligencia artificial junto con el álgebra geométrica.

## 1.3 Aportaciones

El trabajo de tesis aporta las siguientes contribuciones a la ciencia, en particular en el área de la inteligencia artificial.

- Un nuevo modelo de memorias asociativas.
- Un algoritmo de clasificación que utiliza superficies de separación esféricas.
- Un nuevo modelo de clasificación supervisada de patrones en el marco del álgebra geométrica.
- Un nuevo modelo de clasificación no supervisada de patrones en el marco del álgebra geométrica.
- Un nuevo modelo de restauración de patrones en el marco del álgebra geométrica.
- Un modelo de memorias asociativas que funcionan ante ruido mezclado.
- Una mejora significativa al algoritmo de k-medias.

Un algoritmo para resolver un problema de optimización por mínimos cuadrados con álgebra geométrica en el álgebra convencional.

## 1.4 Estructura de la tesis

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera:

El presente capítulo: Introducción, presenta el objetivo general y los objetivos específicos del trabajo. También se presenta la justificación de la tesis y las aportaciones a la ciencia. Además se resume la estructura general de este escrito.

El segundo capítulo: Estado del arte, se presentan algunos trabajos que tienen relación con el tema de este trabajo. En particular, clasificadores como redes neuronales o máquinas de soporte vectorial modelados con álgebra geométrica.

En el capítulo 3: Marco teórico, se presentan los conceptos teóricos que se utilizan en este trabajo, una breve introducción al reconocimiento de patrones y algunos conceptos sobre memorias asociativas. También se introducen conceptos sobre álgebra geométrica y el modelo conforme.

El capítulo 4: Memorias asociativas geométricas, presenta el nuevo modelo desarrollado, se divide a su vez en tres secciones, cada una describiendo un modo de operación de las memorias, se describen las fases que componen cada modelo así como las condiciones para que dichos modos de operación funcionen correctamente.

El siguiente capítulo: Experimentación, como su nombre lo indica muestra algunos ejemplos de operación, con valores numéricos y con patrones reales, de los modos de operación de las memorias asociativas geométricas descritas en el capítulo 4.

En el capítulo final: Conclusiones y trabajo futuro, se presentan las conclusiones finales de este trabajo, dando algunas ventajas de las memorias asociativas presentadas. También se describen, brevemente, algunas ideas sobre posibles trabajos futuros sobre el tema. Al final de este capítulo se enlistan las publicaciones que este trabajo de tesis generó.