

# CAPÍTULO

## 3. MARCO TEÓRICO

---

En este capítulo se presentan los conceptos principales que se abordan en este trabajo. La mayoría de estos conceptos y técnicas fueron obtenidos de libros y artículos cuyos autores son pioneros en el tema.

### 3.1 Reconocimiento y clasificación de patrones

#### 3.1.1 El concepto de patrón

El concepto de *patrón* es algo universal dentro del área del reconocimiento de patrones. Por ejemplo, los patrones en datos biológicos contienen conocimiento pero sólo si se pueden reconocer. La discriminación de patrones en señales permite una identificación personal por voz, escritura, huellas dactilares, imágenes de rostros y más. Esto mismo se aplica al reconocimiento del habla, caracteres escritos y escenas en imágenes.

Los seres humanos somos capaces de reconocer, sin prácticamente ningún problema, el rostro de nuestros amigos, la forma de los caracteres y el texto escrito por otros, nuestras melodías favoritas, el olor de frutas frescas, las texturas del tronco de un árbol, los patrones ondulares en la ropa, la forma de las hojas, el significado contextual en algunas frases, y mucho más. Todo esto gracias a los respectivos patrones. Otros mamíferos son también muy hábiles en lo que al reconocimiento de patrones se refiere. Los sentidos pre-procesan señales tales como sonidos u ondas luminosas moduladas.

### 3.1.2 Clasificación de patrones

Cuando se determina que un objeto de una población dada pertenece a una única clase simple (de un solo elemento), se dice que se ha realizado el *reconocimiento de un objeto*. La *clasificación* es el proceso de agrupar objetos en una clase de acuerdo a sus diferencias o similitudes percibidas. Por ejemplo en la Figura 1, la imagen  $O^{10}$ , de esa población, de acuerdo a sus características es “la princesa Naussicaä”<sup>1</sup> (reconocimiento) y, también por sus características, pertenece a la clase “chicas” (clasificación).

El aprendizaje se realiza por un sistema cuando éste *graba* su experiencia dentro de cambios sistemáticos internos que causan que su comportamiento se modifique. Es un proceso que acumula y concentra experiencia dentro de las modificaciones internas del sistema. Los seres humanos aprenden de la experiencia acumulando reglas en varias formas. Por otra parte, el razonamiento es un proceso de aplicar ciertas reglas, ecuaciones, relaciones y demás, a una colección inicial de datos, hechos, etc. para deducir un resultado o una decisión. Mientras que el reconocimiento es una forma de razonamiento, la clasificación es una forma de aprendizaje.

**Definición 1.** *El problema de la clasificación consiste en decidir si un patrón pertenece o no a una clase de equivalencia dada.*

**Definición 2.** *El problema del reconocimiento consiste en decidir si algún patrón es equivalente a un patrón prototipo, o a un conjunto de esos patrones prototipos que podrían representar una clase.*

Cuando se aplica el reconocimiento a un patrón, éste podría estar alterado con ruido. En este caso, es más preciso hablar de una *restauración del patrón*. La restauración es importante para recuperar patrones originales a partir de patrones alterados o a partir de partes del patrón original.

---

<sup>1</sup> “*Nausicaä of the valley of the wind*”, escrita por Hayao Miyazaki; editorial Tokuma Shoten, 1982 (traducción al inglés por Viz Media Ed.).



**Figura 1.** Ejemplos de objetos de una población específica.

Sea  $a$  un patrón,  $\tilde{a}$  una versión alterada de  $a$ ; tal que  $\tilde{a} = a + c$ , donde  $c$  es el ruido. Dependiendo de la naturaleza de  $c$ , el ruido puede ser de tres tipos (para los fines de este trabajo):

- a) *Ruido aditivo*, en este caso todas las componentes de  $c$  son números positivos.
- b) *Ruido sustractivo*, cuando todas las componentes de  $c$  son números negativos.
- c) *Ruido mezclado*, en este caso, las componentes de  $c$  son números tanto positivos como negativos.

Por ejemplo, en la imagen de la Figura 2a se observa una imagen sin ruido. La imagen de la Figura 2b es la misma imagen pero afectada con un porcentaje de ruido aditivo, nótese que se ha agregado información a la imagen original. La imagen de la Figura 2c, por su parte, presenta ruido sustractivo y se observa que se ha quitado información a la imagen original. Por otro lado, en la imagen de la Figura 2d se ha eliminado y agregado información de la imagen original, por lo tanto presenta ruido mixto.



**Figura 2.** Ejemplo de ruido. a) Imagen original, b) imagen afectada con ruido aditivo, c) imagen afectada con ruido sustractivo, d) imagen afectada con ruido mezclado o mixto.

Un *sistema de reconocimiento o clasificación de patrones* es un sistema operacional que consta al menos de dos fases: a) el *entrenamiento*, aquí el sistema es alimentado por patrones muestra, generalmente en forma de vectores; y b) la *decisión*, donde el sistema reconoce o decide a que clase pertenece un patrón de entrada.

Existen dos modos de entrenamiento, el *entrenamiento supervisado* y el *no supervisado*. Cuando el sistema se alimenta con cada uno de los ejemplares de los patrones de entrada junto a su *identificador de clase* como la salida deseada y el sistema aprende a mapear los patrones de entrada con el *identificador de clase* deseado, entonces se está hablando del *aprendizaje supervisado*.

En el *entrenamiento no supervisado*, los ejemplares de entrada alimentan al sistema en alguna *secuencia*, y en ningún momento una entrada es mapeada a un *identificador de clase*, sino que el sistema mismo establece una nueva clase, asigna un *identificador único* a esa clase y ajusta sus *parámetros* para mapear el patrón de entrada con ese *identificador*.

### 3.1.3 Separabilidad lineal

La mayoría de sistemas de clasificación, como el *clasificador lineal*, requieren que los patrones a clasificar sean *linealmente separables*.

**Definición 3.** *Si existe un hiper-plano  $H$  en un espacio de rasgos tal que, todos los patrones (en forma de vectores) de una clase están a un lado de  $H$ , mientras que todos los patrones de la otra clase están del otro lado; entonces se dice que ambas clases son linealmente separables por  $H$  (Figura 3a).*

En tal caso sólo es necesario evaluar la ecuación del hiper-plano en un vector de entrada para determinar en qué parte del hiper-plano se encuentra dicho vector y asignarlo a la clase correspondiente.

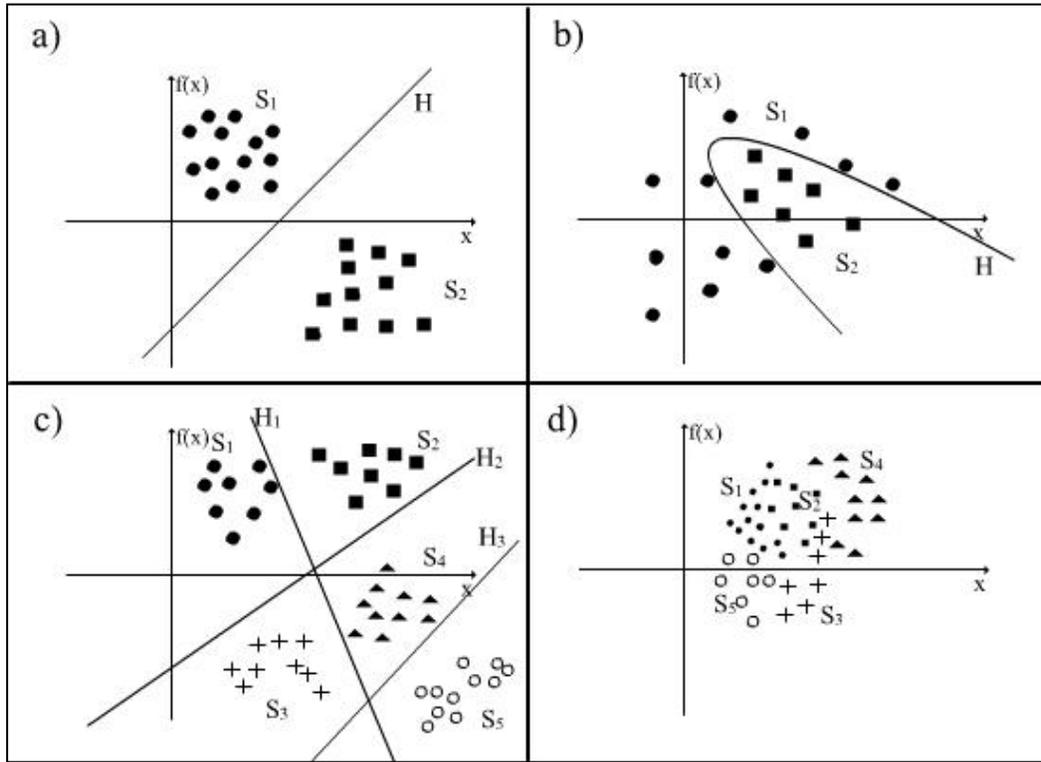
**Definición 4.** *Si varias clases pueden ser separadas de dos en dos por hiper-planos, entonces son llamadas linealmente separables por pares, y la decisión se toma al determinar en qué lado de cada hiper-plano de separación se encuentra cada vector de entrada (Figura 3c).*

**Definición 5.** *Cuando dos clases no pueden ser separadas por un hiper-plano, se dice que dichas clases son no linealmente separables (Figura 3b y Figura 3d).*

En este caso se requiere de una superficie de separación de orden mayor para lograr tal objetivo. Este es el caso, por ejemplo, de las clases de la Figura 3b.

Sea  $Z$  un conjunto de clases en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $Z^i \subset Z$  un subconjunto de patrones similares que pertenecen a la clase  $i$ , donde  $i = 1, \dots, q$  y  $q$  es el número total de clases. Dado un patrón  $x \in Z$ , el problema de la clasificación consiste en decidir a cuál clase pertenece. La clase asignada será la que tenga patrones similares a  $x$ .

Existen muchas técnicas que resuelven este problema, una de ellas es la regla de decisión por el vecino más cercano (Cover y Hart 1967). Esta regla asigna un punto muestra no clasificado al conjunto más cercano de puntos clasificados. La principal desventaja de este método es la cantidad de tiempo que toma calcular todas las distancias.



**Figura 3.** Ejemplos de clases linealmente y no linealmente separables: a) son linealmente separables, c) son linealmente separables por pares, b) y d) son no linealmente separables.

### 3.1.4 Regiones de soporte

Partiendo del hecho de que los patrones de una misma clase se encuentran agrupados, generalmente, cercanos unos a otros dentro del espacio de rasgos se puede utilizar otra aproximación: agrupar (*clusterizar*) el espacio de trabajo con las llamadas *regiones* o *vecindades de soporte*. En cada región hay solamente patrones de la misma clase. La clasificación se realiza cuando un patrón no entrenado cae dentro de una de las regiones de soporte, el patrón se asigna a la clase asociada a esa región.

Una primera solución es por medio del conocido *perceptrón morfológico* (Ritter 2004) donde las regiones de soporte son hiper-rectángulos. La finalidad es clasificar un patrón dentro de la llamada *región de encendido*. Durante la fase de entrenamiento se construyen las regiones de soporte de la memoria como hiper-cubos de tamaño  $\alpha$ , donde  $\alpha$  es la distancia mínima entre todos los patrones representantes. Una

desventaja de las regiones construidas de esta manera es que si dos de ellas están muy cerca, el tamaño de todas las demás vecindades se reduce drásticamente.

En (Barrón 2006) se presentó una mejora a este algoritmo. Se desarrolla un algoritmo con vecindades de soporte máximas, donde se calcula el promedio de variabilidad por patrón para obtener un umbral, de esta manera se supera la desventaja del modelo original, pero el método permite oclusiones entre las vecindades

Las regiones de soporte en ambos algoritmos son hiper-rectángulos, las memorias asociativas geométricas utilizan hiper-esferas en lugar de hiper-rectángulos. La discusión sobre si las vecindades hiper-esféricas son mejores que las hiper-rectangulares es un tema para futuras investigaciones.

Generalmente, las vecindades hiper-esféricas son difíciles de manejar, pero en el contexto del álgebra geométrica (más específicamente en el contexto del álgebra geométrica conforme), esto no ocurre. Un método para construir neuronas hiper-esféricas de forma iterativa se describe de forma detallada en (Banarier, Perwass y Sommer 2003).

### **3.1.5 Restauración de patrones**

El problema de la clasificación, según la Definición 1, consiste en decidir si un patrón dado pertenece o no a una clase específica. Por su parte, el problema de la restauración de patrones es, básicamente, similar al problema de la clasificación.

**Definición 6.** El problema de la restauración de patrones consiste en decidir si un patrón, afectado por algún tipo de ruido, es, en algún sentido, igual a un patrón prototipo.

En otro sentido, la restauración de patrones consiste en compensar o deshacer, de alguna manera, los defectos que podrían degradar un patrón.

La restauración de patrones es un parte esencial de muchas aplicaciones en procesamiento digital de señales e imágenes. Actualmente, existe una gran necesidad de desarrollar algoritmo prácticos que permitan restaurar patrones afectados por ruido.

Durante los últimos años se han propuesto muchos modelos cuya finalidad sea resolver este problema. En la mayoría de los casos (sobre todo al utilizar imágenes, sonido o vídeo afectados por ruido), el problema se puede resolver aplicando ciertos filtros al objeto de entrada, con el fin de eliminar el ruido que podría contener. Los filtros pueden resolver, en cierto sentido, el problema de la restauración de patrones; los objetos restaurados con este tipo de métodos son, en la mayoría de los casos, diferentes de sus respectivos objetos originales. Esto se debe a que los filtros operan sobre el objeto en sí.

Por ejemplo, la imagen de la Figura 4B es una versión afectada con ruido de la imagen de la Figura 4A. En la Figura 4C y la Figura 4D se observa una imagen restaurada por medio de un filtro de promedio y un filtro morfológico (Gonzalez and Woods 2008), respectivamente.



**Figura 4.** Restauración de una imagen alterada con ruido. A) Imagen original, B) Imagen afectada con ruido, C) e D) Imágenes recuperadas.

Como se puede observar, la restauración no fue perfecta pero se pudo recuperar a cierta calidad. Sin embargo, en un objeto muy afectado con ruido, como el de la Figura 5, no es posible recuperar la información perdida utilizando los métodos tradicionales. Para ello es necesario contar con la información del objeto original codificada de

alguna manera. En estos casos surge la necesidad de recurrir a otros modelos de reconocimiento de patrones.

En particular, las redes neuronales se pueden usar para resolver este problema, por ejemplo los trabajos de (Chinarov y Menzinger 2003) y (Fukushima 2005). En dichos trabajos, se utiliza una red neuronal que converge, precisamente, en el patrón original.



**Figura 5.** Imagen muy afectada con ruido. No se puede recuperar con los filtros tradicionales.

Junto a las redes neuronales, las memorias asociativas, de las cuales se hablará en la sección 3.2, proveen una solución al problema de la restauración de patrones a partir de versiones distorsionadas de los mismos, refiérase por ejemplo a (Barrón 2006), (Sossa y Barrón 2003), (Ritter, Li y Wilson 1989), o (Anderson and Rosenfeld 1988).

Es importante mencionar que, a diferencia de los filtros, en las memorias asociativas utilizadas en la restauración de patrones, en general, el patrón restaurado resulta ser el patrón original. Ya que el patrón original se encuentra, en alguna manera, codificado dentro de la memoria, lo cual no ocurre con los filtros que toman el objeto original como entrada y tratan de reducir o eliminar, en algún sentido, el ruido añadido al objeto.

Las memorias asociativas geométricas, presentadas en este trabajo, no son la excepción.

### 3.1.6 Clasificación no supervisada

Generalmente, se tiene una clara distinción entre problemas de reconocimiento de patrones que son supervisados (clasificación) o no supervisados (agrupamiento), mientras que en los primeros solo se involucran datos con una etiqueta (clase), en los segundos solamente se utilizan datos no etiquetados (Duda, Hart y Stork 2001).

En general, los problemas de agrupamiento son más difíciles y presentan más retos que los problemas de clasificación (Jain 2008). El objetivo principal de la clasificación no supervisada es encontrar el agrupamiento natural en un conjunto de patrones, puntos u objetos sin conocer su respectiva etiqueta de clase. En otras palabras, consiste en desarrollar un algoritmo automático que descubra el agrupamiento natural en un conjunto de datos no etiquetados.

En la literatura existen muchos algoritmos que resuelven este problema. Uno de los más simples, pero muy efectivos, que desde su propuesta se sigue usando para resolver problemas de agrupamiento es el algoritmo *k*-medias (*k-means*) desarrollado por McQueen (McQueen 1967). La idea básica es definir *k* centros aleatorios, uno por cada agrupamiento. Después, tomar cada punto del conjunto de entrada y asociarlo al centro más cercano usando una distancia euclidiana. Se re-calculan los nuevos centros como el promedio de los agrupamientos formados. Entonces, con estos nuevos centros se repite el proceso hasta que el sistema se estabilice, o sea, hasta que los centros ya no cambien.

El algoritmo ISODATA es una variación del algoritmo *k*-medias, donde se separan y mezclan las agrupaciones (Jensen 1996). Las agrupaciones se mezclan si el número de patrones en una agrupación es menor que un cierto umbral o, si los centro de dos agrupaciones están lo suficientemente cerca de acuerdo a otro umbral establecido. Por otro lado, las agrupaciones se van a separar en dos agrupaciones diferentes si la desviación estándar excede un valor predefinido y el número de patrones es el doble de un umbral para el número mínimo de patrones en una agrupación.

Ambos algoritmos son muy sensibles a los valores de inicio generados. Para resolver este problema se podría escoger la clasificación con el menor error cuadrático medio; sin embargo, para dos valores de inicio diferentes, las diferencias con respecto al error cuadrático medio son, usualmente, muy pequeñas mientras que las clasificaciones son muy diferentes (Center for Earth Observation 2007). En general, visualmente no está muy claro que la clasificación con el menor error cuadrático medio es la mejor clasificación.

Entre los modelos de redes neuronales, que funcionan para clasificación no supervisada, los más comúnmente utilizados son los llamados *mapas auto-organizados* (Kohonen 2001) y *la teoría de resonancia adaptativa* (Carpenter y Grosberg 2003). Los mapas auto-organizados se basan en una organización topográfica en la cual las localidades más cercanas en el mapa representan entradas con propiedades o atributos similares. Por otra parte, la teoría de resonancia adaptativa permite variar el número de agrupaciones de acuerdo al tamaño del problema y, también, permite al usuario controlar el grado de similitud entre los miembros de la misma agrupación.

Existen otros métodos que resuelven el problema de la clasificación no supervisada que son similares a los anteriores, como los que utilizan clasificación difusa en lugar de una clasificación dura (Kaymak y Setnes 2000). En este caso, los patrones poseen un grado de pertenencia a las agrupaciones, en lugar de una pertenencia completamente a una agrupación. Esto es, los patrones en la frontera de una agrupación en particular, podrían pertenecer a esa agrupación en menor grado que los patrones ubicados en el centro de la agrupación.

En la literatura se pueden encontrar, también, los métodos basados en la teoría de grafos (Jardine y Sibson 1968). También hay que mencionar los métodos basados en análisis conceptual (Biswas, Weinberg y Fisher 1998). Y, por último, los métodos de agrupación espectral que hacen uso del espectro de la matriz de similitud de los patrones para reducir un poco la dimensión de las agrupaciones como el algoritmo de Shi-Malik (Shi y Malik 2000).

## 3.2 Memorias asociativas

### 3.2.1 Redes neuronales

Recientemente se ha demostrado que existen los ensambles neuronales, postulados como el rastro de la memoria en el cerebro (Carrillo-Reid, y otros 2008). Un rastro de memoria estaría dado por los pesos o fuerzas relativas que las conexiones van adquiriendo en el cerebro con el paso del tiempo. Las *redes neuronales artificiales* son un modelo matemático para representar información, basado en algunas características de las redes neuronales biológicas (Kishan, Chilukuri y Sanjay 1997). Consisten de un conjunto de elementos de procesamiento simples conectados entre sí y que envían la información a través de las conexiones.

En 1943 Warren McCulloch y Walter Pitts desarrollaban el primer modelo matemático de elementos binarios, conocido como *neurona* (McCulloch y Pitts 1943). Años más tarde, Donald Hebb postula un principio para un proceso de aprendizaje a nivel celular, *el aprendizaje Hebbiano* (Hebb 1949), indispensable para el desarrollo de los modelos de redes neuronales artificiales actuales. Casi una década después Frank Rosenblatt define el *perceptrón* como una máquina capaz de aprender con ejemplos (Rosenblatt 1958).

El no poder entrenar y clasificar la función lógica XOR por una capa de perceptrones, problema propuesto por Minsky y Papert en 1969 (Minsky y Papert 1988), disminuyó el interés sobre los perceptrones y otras neuronas artificiales durante casi dos décadas. La adición de otra capa de perceptrones llamada capa oculta forma una red que funciona como un poderoso modelo de clasificación no-lineal. Este perceptrón multicapa es también llamado red neuronal artificial hacia adelante (*feed-forward*).

El algoritmo más usado para entrenar una red neuronal es, sin duda, el de *retro-propagación* (*backpropagation*), basado en el método del gradiente descendente. Fue propuesto por primera vez en la tesis doctoral de Paul Werbos (Werbos 1974), pero fue hasta 1986 (Rumelhart, Hinton y Williams 1986) que el algoritmo fue reconocido e hizo renacer el área de las redes neuronales. En este algoritmo, el aprendizaje es de alguna forma independiente del orden en el cual los ejemplares son presentados;

además, su arquitectura puede ser manipulada para obtener mejores resultados y el modo de operación puede mejorarse con procesamiento paralelo. Sin embargo, también tiene algunas desventajas, por ejemplo, el entrenamiento puede converger a un mínimo local, lo cual podría dar resultados menos robustos; además, la tasa de aprendizaje no puede predecir el avance y podría ser o muy pequeña, en cuyo caso se necesitan muchos pasos para converger, o muy grande y entonces oscilaría en lugar de converger, entre otras.

En la práctica, la convergencia generalmente ocurre, particularmente con pequeños a moderados tamaños de perceptrones multicapa. Cuando no ocurre, podría converger en otra corrida ajustando los pesos de inicio, o requeriría modificar la arquitectura.

A finales de la década de los noventa, el área de las redes neuronales artificiales dio un cambio repentino debido a los trabajos de (Ritter, Li y Wilson 1989), quienes presentan un nuevo tipo de redes neuronales llamadas *redes neuronales morfológicas*. En ellas las operaciones clásicas de multiplicación y adición son reemplazadas por sumas y máximos (o mínimos), respectivamente. Este nuevo tipo de redes neuronales dieron lugar a una nueva herramienta en el área de reconocimiento de patrones, las memorias asociativas morfológicas.

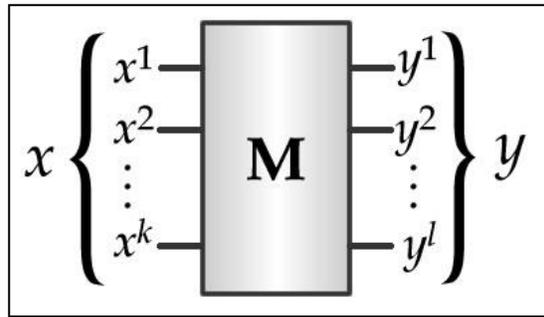
### **3.2.2 Conceptos sobre memorias asociativas**

El concepto de memoria puede ser entendido de diferentes maneras. Generalmente, involucra un *mecanismo de almacenamiento* el cual utiliza un *medio* de almacenamiento. Esta operación es llamada la *función memoria*, la cual coopera con las demás funciones del organismo. Gracias a estas operaciones, la memoria puede generar fenómenos muy complejos, desde simples ideas mentales hasta complejas secuencias de pensamiento.

Las operaciones de procesamiento de información dentro del cerebro pueden ser expresadas en términos de *funciones de filtros adaptativos*. La idea general es que el cerebro está organizado en un número de *unidades funcionales*. Una de estas unidades funcionales, que es una parte de las tantas redes neuronales en el cerebro, es un

sistema bien definido de *entradas* y *salidas* conocido como filtro para reconocimiento o recuperación asociativo (Figura 6).

La operación básica de dicho filtro es transformar un conjunto de valores de señales de entrada, denotado como  $x$ , en otro conjunto de señales de salida denotado como  $y$ .



**Figura 6.** Modelo del filtro para reconocimiento asociativo

En las redes neuronales artificiales que juegan el papel de memorias asociativas, un dato de entrada es almacenado conjuntamente en forma de una matriz de pesos, la cual es usada para generar la salida que correspondería con la entrada correspondiente.

Asociación es el proceso de mapear patrones de entrada con patrones de salida, incluso si los patrones de entrada fueran alterados. Por ejemplo, una palabra y su significado deben ser asociados correctamente al leer una oración a pesar de que la palabra haya sido escrita incorrectamente.

**Definición 7.** Una memoria asociativa  $\mathbf{M}$  es un dispositivo que asocia patrones de entrada con patrones de salida.

Esto es, al presentarle a  $\mathbf{M}$  un patrón de entrada  $x$  (en forma de vector), ésta responde con el correspondiente patrón (vector) de salida  $y$ . En este sentido, podría decirse que una memoria asociativa es una red neuronal de una sola capa.

La notación para una asociación entre dos vectores  $x$  e  $y$  puede verse como la de un par ordenado  $(x, y)$ . El conjunto de todas las asociaciones que servirá para formar la memoria asociativa es conocido como *conjunto fundamental* y se representa como:

$$x^k, y^k \quad | k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.1)$$

donde  $m$  es el número total de asociaciones. A los patrones que forman las asociaciones del conjunto fundamental se les conoce como *patrones fundamentales*.

Las asociaciones son almacenadas conjuntamente en una matriz de pesos, la cual es usada para generar el patrón de salida que corresponde con el patrón de entrada asociado. Esta matriz de pesos es precisamente la memoria asociativa.

El proceso de construir dicha matriz es llamado *aprendizaje* o *entrenamiento*, mientras que el obtener un patrón de salida cuando un patrón de entrada es presentado a la memoria es llamado *recuperación* o *clasificación* (dependiendo del uso que se le dé a la memoria).

En la mayoría de los modelos de memorias asociativas, las conexiones entre los patrones de entrada y los de salida se ajustan únicamente en la fase de entrenamiento, después de esta fase no se pueden volver a ajustar. En (Vázquez y Sossa 2008) se presenta un nuevo modelo dinámico, en el cual la sinapsis de una memoria asociativa se puede ajustar aún después de la fase de entrenamiento como respuesta a un estímulo de entrada.

**Definición 8.** *Cuando al presentar a una memoria  $\mathbf{M}$  un patrón fundamental como entrada, si ésta responde con su correspondiente patrón de salida, se dice que la recuperación para ese patrón fue perfecta. Una memoria que haga recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales se dice que es una memoria con recuperación perfecta.*

**Definición 9.** *Por otra parte, si una memoria asociativa  $\mathbf{M}$  puede recuperar o clasificar patrones del conjunto fundamental pero afectados con ruido, se dice que  $\mathbf{M}$  es una memoria con recuperación robusta.*

La robustez de una memoria asociativa depende de dos factores: del tipo de ruido al que se sometió el patrón fundamental y, en mayor medida, a la cantidad de ruido con que se afectó dicho patrón.

### 3.2.3 Modelos de memorias asociativas

En las últimas cinco décadas han aparecido varios modelos de memorias asociativas, comenzando con la *Lernmatrix* de Steinbuch (Steinbuch 1961) el primer modelo de memoria asociativa. Años después el *Linear Associator* tuvo su origen en los trabajos de Anderson (Anderson 1972) y Kohonen (Kohonen 1972), en el mismo año Kaoru Nakano presenta su *Associatron* (Nakano 1972). La siguiente contribución importante fue realizada por Hopfield, con la *Memoria Hopfield* (Hopfield 1982) y posteriormente la *Memoria Asociativa Bidireccional* de Kosko (Kosko 1988), una mejora de este modelo se puede encontrar en (Vázquez y Sossa 2008).

En la actualidad, por medio de la llamada *programación genética* se han desarrollado otras memorias asociativas que ofrecen resultados, si no mejores muy similares a los modelos desarrollados hasta la fecha (Villegas-Cortez, y otros 2009).

Casi 20 años después del gran éxito que tuvo la memoria Hopfield, hicieron su aparición un nuevo tipo de memorias asociativas basadas en el álgebra de rejillas (*lattices*), las *Memorias Asociativas Morfológicas* (Ritter, Li y Wilson 1989). En estas memorias se usan máximos o mínimos de sumas para sus operaciones, en contraste con la suma de productos usada en los modelos clásicos. Una variante de estas memorias apareció algunos años después, las *memorias asociativas  $\alpha\beta$  (alfa-beta)* (Yáñez y Díaz de León 2003) cuyas operaciones se basan en dos nuevos operadores:  $\alpha$  (*alfa*) y  $\beta$  (*beta*).

Existen dos tipos de memorias asociativas morfológicas (y alfa-beta): las memorias *min*, que son capaces de responder ante patrones alterados con ruido sustractivo y las memorias *max* que funcionan muy bien frente al ruido aditivo. Sin embargo, contra lo que se podría pensar, su funcionamiento se ve frenado frente al ruido mezclado, el cual es el más común.

Intuitivamente, este problema podría resolverse realizando una combinación de una memoria asociativa *min* con una *max*; pero, como se muestra en (Sussner 2000), esto no es posible. Hay tres formas de resolver el problema del ruido mezclado. La primera es por medio de los llamados *núcleos (kernels)* propuestos en (Sussner 2000).

Las memorias tipo *mediana* (Sossa y Barrón 2003) que utilizan para su operación el operador mediana (*med*) son otra alternativa al problema del ruido mezclado, una ventaja significativa que poseen es que a diferencia de los otros tipos de memorias, éstas pueden ser usadas con patrones reales (Sossa, Barrón y Vázquez 2004), lo cual es sumamente útil.

En (Cruz, Sossa y Barrón 2007) se describe un nuevo método para atacar el problema del ruido mezclado sin usar núcleos o el operador mediana, basado en la localidad del ruido. Mediante los llamados sub-patrones. La idea básica es dividir al objeto original en partes, a cada parte hay que obtener su patrón correspondiente (sub-patrón); con cada uno de los sub-patrones del objeto se entrena una memoria asociativa. Debido al carácter local del ruido, algunos sub-patrones no se verán afectados por él.

Claro está, estas tres alternativas tienen sus desventajas. Encontrar un buen *núcleo* es difícil, además de que su uso está muy restringido. Si al conjunto fundamental se le agrega dinámicamente un nuevo patrón parecido a uno existente, hay que re-calcular todos los núcleos de los demás patrones para evitar repeticiones. El operador mediana en la práctica es muy costoso de implementar y es difícil cumplir las condiciones para recuperación perfecta. Por otro lado, el uso de los sub-patrones puede consumir mucho tiempo de cómputo a menos que se use procesamiento paralelo.

Se puede observar que, los primeros modelos de memorias asociativas utilizaban, para sus operaciones, el álgebra convencional; es decir, sumas y productos entre vectores y/o matrices. Los modelos morfológicos utilizaban por su parte, operadores de la morfología matemática; es decir, máximos, mínimos y mediana de sumas y restas. En la presente tesis se presenta un nuevo modelo de memorias asociativas que, para su funcionamiento utilizan operadores y operaciones del álgebra geométrica.

### 3.3 Álgebra Geométrica

A finales del siglo XIX el matemático inglés William K. Clifford presentó lo que ahora se conoce como *Álgebra geométrica* o *Álgebra de Clifford*, en un artículo titulado Aplicaciones del álgebra exterior de Grassmann (Clifford 1878). Él pensaba (al igual que Grassmann) que las álgebras de Grassmann y los cuaterniones de Hamilton se

podían unir en un mismo sistema algebraico, haciendo un ligero cambio en el producto exterior.

Pero fue hasta los años sesenta cuando álgebra geométrica tuvo un gran impulso en muchas áreas de la ciencia, gracias a los trabajos de David Hestenes. Hestenes mostró las ventajas que se podrían obtener al usar el álgebra geométrica en muchas áreas de la física y la geometría (Hestenes y Sobczyk 1984). Posteriormente muchos otros investigadores siguieron sus pasos y mostraron las ventajas de utilizar el álgebra geométrica en sus respectivas áreas de investigación.

### **3.3.1 Propiedades del álgebra geométrica**

El álgebra geométrica es un enfoque libre de coordenadas de la geometría que, a diferencia del álgebra vectorial convencional, tiene un producto entre vectores asociativo e invertible. Además permite la adición de objetos de diferente tipo, como escalares y vectores, muy parecido a la forma en que se construye un número complejo a partir de una parte real y una parte imaginaria.

En el álgebra geométrica los objetos geométricos y los operadores de estos objetos son tratados en una sola álgebra. En otras palabras, es sencilla, compacta, es libre de coordenadas y permite formulaciones dimensionalmente fluidas. Algunas propiedades del álgebra geométrica se enuncian a continuación.

- **Geoméricamente intuitiva**

Una característica muy especial del álgebra geométrica es que es geoméricamente su intuitiva. Por ejemplo las esferas y los círculos son objetos algebraicos con significado geométrico. Se puede representar un círculo tomando dos esferas y realizando la intersección entre ellas.

- **Unificación**

El álgebra geométrica incluye también muchos otros sistemas matemáticos como el álgebra vectorial, el álgebra de Grassmann, los números complejos y los cuaterniones, entre otros.

- **Poca complejidad simbólica**

Las expresiones en álgebra geométrica normalmente tienen poca complejidad.

En el álgebra geométrica es posible la división entre elementos (no nulos), algo que el análisis vectorial de Gibbs y Heaviside no puede hacer. Lo cual es muy importante en el cálculo geométrico al calcular las derivadas inversas.

Al manejar los números complejos como cierta sub-álgebra del álgebra geométrica, la unidad imaginaria recibe interpretaciones geométricas concretas. Además, el producto exterior de Grassmann se define para cualquier dimensión, a diferencia del análisis vectorial convencional que no se puede extender tan fácilmente a otras dimensiones. La *electrodinámica de Maxwell* se puede formular en una ecuación usando el álgebra geométrica. La mecánica cuántica relativista se ha reformulado en términos del álgebra geométrica reemplazando las matrices de Dirac por vectores base reales. Finalmente, existen muchas implementaciones de la *relatividad general* usando el álgebra geométrica (Hitzer 2003).

El *cálculo geométrico* (Hestenes y Sobczyk 1984) (junto con el análisis de Clifford) es un lenguaje para expresar y analizar todos los conceptos geométricos en matemáticas. El álgebra de Clifford provee la gramática (Hitzer 2003). Los números complejos, cuaterniones, el álgebra de matrices, los vectores, los tensores, el cálculo de *spinors* y las formas diferenciales se pueden integrar en un sistema sencillo y entendible.

Algunas áreas en las que se ha trabajado con álgebra geométrica son: visión por computadora, gráficos y reconstrucción, robótica, procesamiento de imágenes y señales, investigación aeroespacial, teoría de control, computación cuántica, bioingeniería y diseño molecular, electromagnetismo y propagación de ondas, álgebra simbólica y algoritmos numéricos.

Un álgebra geométrica se construye sobre un espacio vectorial usando un producto específico. Los principales productos del álgebra geométrica son: *el producto geométrico* o *producto de Clifford*, *el producto exterior* y *el producto interior*. Los tres se explican brevemente a continuación.

### 3.3.2 El producto exterior

En el álgebra vectorial convencional existen dos productos entre vectores: el producto *escalar* (producto *interno* o producto *punto*) que produce un escalar y el producto *vectorial* (producto *cruz*) que produce otro vector.

Sea un espacio vectorial euclidiano  $n$ -dimensional. El producto escalar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  es un escalar con magnitud  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ . El producto vectorial ( $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ) es un tercer vector con magnitud  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$  en la dirección perpendicular al plano que contiene a los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Donde  $|\mathbf{a}|$  y  $|\mathbf{b}|$  son las longitudes de los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  respectivamente y  $\theta$  es el ángulo entre ellos.

En el álgebra geométrica el producto interior es particularmente útil y puede coincidir con el producto escalar tradicional, pero en general representa una operación algebraica que no resulta en un escalar, ya que no depende de una métrica.

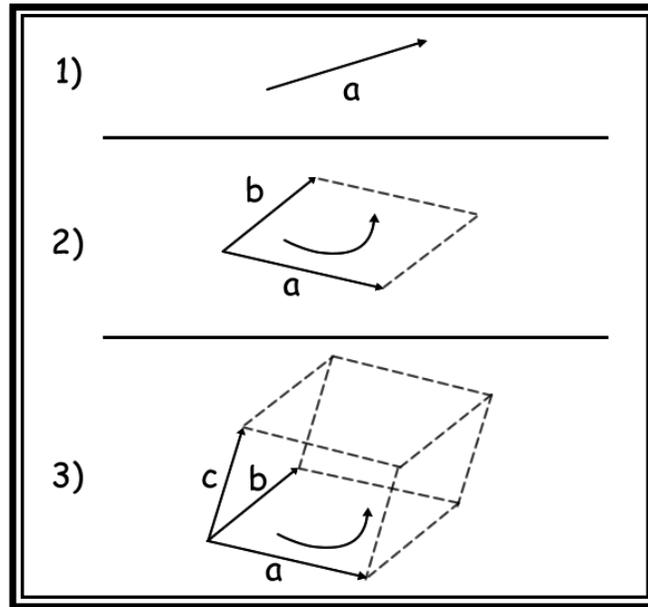
Sin embargo, el producto vectorial es particularmente deficiente. Por ejemplo, en dos dimensiones un vector perpendicular a los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  no tiene significado y en cuatro o más dimensiones no está definido (Perwass and Hildebrand 2004). Evidentemente, es necesario un producto más general que contenga información direccional y sea generalizable a todas las dimensiones. En este caso se está hablando de un nuevo producto: el *producto exterior* (o producto *externo*). Éste se presentó por primera vez en 1844 en los trabajos de Grassmann (Grassmann 1844).

Sin explicar a grandes rasgos lo que es, se definirá un álgebra geométrica sobre los reales  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}$   $\mathbb{R}^n$  ó  $\mathbb{C}_n$ ); el producto exterior de dos vectores está definido en esta álgebra (Perwass y Hildebrand 2004) y se denota por el símbolo  $\wedge$ . De acuerdo a su definición, éste permite obtener todas las propiedades geométricas del plano (Dorst, Fontijne y Mann 2007).

Sean  $\mathbf{a}$ , y  $\mathbf{b}$  vectores en un espacio euclidiano  $n$ -dimensional. El producto exterior se escribe como en la expresión (3.2) y tiene magnitud  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ . El resultado no es un escalar o un vector, sino más bien un *bivector*.

$$a \wedge b. \tag{3.2}$$

El resultado de aplicar el producto exterior entre ellos es un área dirigida en el segmento del plano que contiene a los dos vectores  $a$  y  $b$ , esta cantidad es el bivector propiamente dicho (ver la Figura 7-2).



**Figura 7.** Ejemplos de multi-vectores. (1) Multi-vector de grado 1. (2) Multi-vector de grado 2. (3) Multi-vector de grado 3.

Una característica de la interpretación geométrica del producto exterior es que es generalizable a dimensiones superiores. Si  $c$  es, también un vector, la interpretación de  $a \wedge b \wedge c$  se puede ver como un volumen tridimensional dirigido, al cual se le llama *trivector*, como se observa en la Figura 7-3.

Sean  $a$  y  $b$  los dos vectores mostrados en la Figura 7-2, la orientación de  $a$  y  $b$  está definida por el sentido contrario a las manecillas del reloj y la orientación de  $b \wedge a$  es la dirección contraria, es decir en el sentido de las manecillas del reloj. Por lo tanto el producto exterior es *anti simétrico* como se observa en la expresión (3.3).

$$a \wedge b = - b \wedge a . \tag{3.3}$$

Cuando  $\mathbf{b}$  es igual al vector  $\mathbf{a}$  se obtiene un resultado algebraico inusual, éste se muestra en (3.4), sugiere que el cuadrado de  $\mathbf{a}$  con este producto debe ser cero (Dorst, Fontijne y Mann 2007). Razonablemente suena correcto, pues no se puede codificar un segmento del plano con el mismo vector.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0. \quad (3.4)$$

El producto exterior es asociativo, distributivo con respecto a la suma y saca escalares. Sean  $e_1, e_2$  las bases en el plano bidimensional y sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  dos vectores en este plano, ambos se pueden expresar como en la expresión (3.5).

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1 e_1 + a_2 e_2 \\ \mathbf{b} &= b_1 e_1 + b_2 e_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Con base en esto se puede reducir el producto exterior entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  a:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 e_1 \wedge e_2. \quad (3.6)$$

De la misma forma, en el espacio tridimensional con bases  $e_1, e_2, e_3$  el producto exterior se reduce a:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 e_1 \wedge e_2 + a_2 b_3 - a_3 b_2 e_2 \wedge e_3 \\ &+ a_3 b_1 - a_1 b_3 e_3 \wedge e_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

El producto exterior de dos vectores en el plano o en el espacio se puede escribir como la suma escalada de la combinación de sus elementos bases. El valor de la suma se puede calcular usando los determinantes de los elementos que conforman cada vector (Dorst, Fontijne y Mann 2007).

Sea  $\mathcal{C}_n$  un álgebra geométrica, ésta contiene las bases mostradas en (3.8), al elemento base de más alto grado se le conoce como el *pseudoescalar* y se representa por el símbolo  $I$ .

$$1 \quad e_1 \quad e_1 \wedge e_2 \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \quad \dots \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \quad (3.8)$$

**Definición 10.** En cualquier dimensión  $n$ , el producto exterior de  $k$  vectores o  $A_{\langle k \rangle}$  se define como en (3.9), para  $k \geq n$ . A  $A_{\langle k \rangle}$  se le conoce como  $k$ -vector o multi-vector. Los multi-vectores son los elementos básicos del álgebra geométrica.

$$A_{\langle k \rangle} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_k = \bigwedge_{i=1}^k \mathbf{a}_i \quad (3.9)$$

Cualquier multi-vector de  $\mathcal{C}_n$  se puede expresar en términos de las bases mostradas en (3.8).

A la dimensión de cualquier multi-vector también se lo conoce como su *grado*; es decir, un escalar tiene grado 0, un vector tiene grado 1, un bivector tiene grado 2 y así sucesivamente (ver Figura 7). Dentro del álgebra geométrica es posible manipular expresiones que contengan multi-vectores de cualquier grado; esto es, la suma de un escalar y un bivector está perfectamente definida.

### 3.3.3 El producto interior

Otra operación importante en el álgebra geométrica es el *producto interior* (producto interno), se denota por el símbolo  $\cdot$ . Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son multi-vectores, el producto interior se representa:

$$B \cdot A. \quad (3.10)$$

El producto interior reduce el grado del vector  $B$  por  $\lambda$ , y el producto exterior aumenta el grado de  $B$  por  $\lambda$ , donde  $\lambda$  es el grado del vector  $A$ . Si  $A$  y  $B$  son vectores de grado uno, el producto interior es el mismo que el producto escalar tradicional, cuyo resultado es un escalar.

El producto interior es conmutativo y es distributivo bajo la suma, es decir se cumplen las expresiones mostradas en (3.11).

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= B \cdot A \\
A + B \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C .
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Para dos multi-vectores cualesquiera, la definición de producto interno y externo está dada por (3.12) y (3.13) respectivamente.

$$A \wedge B = \sum_r A_r \wedge B = \sum_s A \wedge B_s = \sum_{r,s} A_r \wedge B_s \tag{3.12}$$

$$A \cdot B = \sum_r A_r \cdot B = \sum_s A \cdot B_s = \sum_{r,s} A_r \cdot B_s. \tag{3.13}$$

### 3.3.4 El producto geométrico

Los productos interior y exterior, proporcionan información sobre la magnitud y dirección de los vectores. Sería deseable combinar la información proporcionada por ambos productos en un simple producto. Esto es lo que hace, precisamente, el *producto geométrico* (o *producto de Clifford*) de dos multi-vectores  $A$  y  $B$ ; éste se define de la siguiente manera:

$$AB = A \cdot B + A \wedge B. \tag{3.14}$$

Si  $A$  y  $B$  son paralelos, entonces su producto exterior es cero y el producto geométrico  $AB$  es igual al producto interior. Si  $A$  y  $B$  son perpendiculares entonces su producto interno es cero y el producto geométrico  $AB$  es igual al producto exterior. Es decir se cumplen las expresiones (3.15) y (3.16).

$$AB = A \cdot B \leftrightarrow A \parallel B, \tag{3.15}$$

$$AB = A \wedge B \leftrightarrow A \perp B. \tag{3.16}$$

De acuerdo con estas expresiones, con el producto geométrico los vectores ortogonales anti conmutan y los vectores paralelos conmutan. Por lo tanto, este producto codifica las relaciones geométricas básicas entre vectores (Doran 2003).

El producto geométrico es asociativo y distributivo con respecto a la suma, como se observa en las expresiones (3.17). Además la multiplicación por un escalar  $\lambda$  está definida, como en la expresión (3.18).

$$\begin{aligned} A \cdot BC &= AB \cdot C, \\ A \cdot (B+C) &= AB + AC, \\ (B+C) \cdot A &= BA + CA. \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\lambda A = A\lambda. \tag{3.18}$$

Una propiedad que hay que tener en cuenta es que el producto geométrico no es conmutativo, como se observa en las expresiones (3.19). Mientras que el producto interior es simétrico, el producto exterior no lo es, como se mostró en (3.3). Por lo tanto, el producto geométrico tampoco lo es; es decir se cumple la expresión (3.20).

$$\begin{aligned} AB &= A \cdot B + A \wedge B \\ BA &= A \cdot B - A \wedge B \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$AB \neq BA \tag{3.20}$$

A partir de las expresiones (3.19) se definen los productos interior y exterior en función de las partes simétricas y anti simétricas del producto geométrico, como se observa en (3.21).

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{1}{2} (AB + BA) \\ A \wedge B &= \frac{1}{2} (AB - BA) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Una de las propiedades del álgebra geométrica, en particular de sus dos productos, es que pueden elevar (producto externo) o bajar (producto interno) de grado según las necesidades, con esto es posible moverse entre sub-espacios de diferente dimensión.

## 3.4 Álgebra Geométrica Conforme

### 3.4.1 Geometría Conforme y el espacio euclidiano

Sea un espacio vectorial euclidiano  $n$ -dimensional. El grupo conforme es el conjunto de todas las transformaciones en  $\mathbb{R}^n$  que dejan los ángulos invariantes pero pueden alterar las distancias. Para especificar un punto en este espacio de dos dimensiones más, son necesarias dos restricciones (Doran 2003).

La primera es que la representación es homogénea, por lo tanto  $X$  y  $\lambda X$  representan el mismo punto en el espacio euclidiano, donde  $\lambda$  es un escalar. La segunda restricción es que el vector  $X$  es nulo, es decir se cumple (3.22).

$$X^2 = 0 \tag{3.22}$$

Sean  $e_1, e_2, e_3$  tres vectores bases en el espacio euclidiano tridimensional, en el espacio conforme se agregan dos vectores bases más  $e_0, e_4$  que satisfacen las expresiones mostradas en (3.23). En este caso, los cinco vectores son ortogonales.

$$e_0^2 = -1, \quad e_4^2 = +1 \tag{3.23}$$

A partir de los dos nuevos vectores se definen los vectores nulos  $v$  y  $\bar{v}$ :

$$v = e_4 + e_0, \quad \bar{v} = e_4 - e_0 \tag{3.24}$$

En este punto es necesario escoger un vector para representar el origen. Convencionalmente se toma  $-\frac{1}{2}\bar{v}$ . Entonces, el vector  $X$  se puede escribir como en (3.25), donde  $x$  es la representación del punto en el espacio euclidiano y  $\alpha$  se elige tal que  $X$  sea nulo, lo cual se alcanza cuando  $\alpha = x^2$ .

$$X = 2x - \bar{v} + \alpha v \tag{3.25}$$

La representación de un punto en el espacio conforme se observa en (3.26).

$$X = 2x + x^2v - \bar{v} \quad (3.26)$$

En esta ecuación  $v$  representa el punto al infinito. El poder de las representaciones en un espacio conforme se observa más claramente cuando se considera el producto interior de los puntos. El producto interior en el espacio conforme codifica la distancia entre puntos en el espacio euclidiano (Dorst y Fontijne 2005). Cualquier transformación de dos puntos que deje invariante este producto debe representar una simetría de un espacio euclidiano. Debido a esto, una transformación que deja invariante el producto interior, debe ser una transformación ortogonal en el espacio conforme.

Las transformaciones conformes dejan invariantes los ángulos pero pueden alterar distancias (Doran 2003). Las transformaciones euclidianas son un subconjunto de las transformaciones conformes. En esta geometría, las líneas rectas son círculos de radio infinito. Y en tres dimensiones, los planos y las esferas se tratan como un mismo objeto.

### 3.4.2 Representación de objetos

Además de ser un modelo muy conveniente para representar la geometría euclidiana (Dorst y Fontijne 2005), el Álgebra Geométrica Conforme es un esquema geométrico libre de coordenadas de 5 dimensiones. Se construye a partir de una representación de puntos e híper-esferas (internamente estos objetos se representan como vectores). Además, las operaciones no dependen de un origen y no necesitan ser especificadas en términos de coordenadas relativas a un origen, de ahí que sea libre de coordenadas.

En esta tesis, el álgebra trabaja en el dominio conforme y la semántica geométrica lo hace en el dominio euclidiano.

El álgebra geométrica conforme es una extensión de la geometría proyectiva de cuatro dimensiones. Los puntos, las esferas y los planos se pueden representar fácilmente como objetos algebraicos (vectores). Por ejemplo, un círculo se puede

representar con la intersección de dos esferas (o una esfera y un plano), la cual se realiza con una operación algebraica básica. Por otro lado, al combinar tres puntos (usando otro producto del álgebra) se obtiene el círculo que pasa por ellos.

Esta álgebra trata a las líneas y a los círculos de una manera unificada como tri-vectores. Las mismas consideraciones se aplican al multi-vector  $S$  que se define usando cuatro puntos  $X^1, X^2, X^3, X^4$ . El objeto definido por  $S$  es una hiper-esfera única que pasa por los cuatro puntos.

Las intersecciones entre líneas, círculos, hiper-planos e hiper-esferas se generan directamente. En la geometría básica se utilizan los puntos y los vectores mientras que en esta álgebra se tienen una gran variedad de objetos geométricos básicos con los cuales se puede trabajar (Hildenbrand 2005).

Existen dos formas de representar objetos en el álgebra geométrica conforme. La representación *IPNS* (*Inner Product Null Space*) y la representación *OPNS* (*Outer Product Null Space*), ambas representaciones son *duales* una a la otra. Dependiendo de la aplicación se puede utilizar una u otra representación.

Dadas las siguientes bases del Álgebra Geométrica Conforme:

$$e_0, e_1, \dots, e_n, e_\infty, \quad (3.27)$$

donde  $e_0$  representa el origen euclidiano y  $e_\infty$  es el punto al infinito. Estas bases cumplen las propiedades (3.28), (3.29), (3.30) y (3.31); donde  $e_i^2 = e_i \cdot e_i$  y  $\cdot$  es el producto interior.

$$e_i^2 = 1, \forall_{i=1, \dots, n}. \quad (3.28)$$

$$e_\infty^2 = e_0^2 = 0. \quad (3.29)$$

$$e_\infty \cdot e_0 = -1. \quad (3.30)$$

$$e_i \cdot e_\infty = e_i \cdot e_0 = 0, \forall_{i=1, \dots, n}. \quad (3.31)$$

Un vector en álgebra geométrica conforme se denota como una combinación lineal entre las bases:

$$S = S'_1 e_1 + \dots + S'_n e_n + S'_{n+1} e_\infty + S'_{n+2} e_0. \quad (3.32)$$

Si la ecuación (3.32) se multiplica por una constante  $\lambda \neq 0$ , siempre se obtiene el mismo objeto geométrico. El significado de los valores en las dos nuevas coordenadas  $e_0$  y  $e_\infty$  se observa en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Significado del vector conforme  $S$  de acuerdo a los valores de las componentes  $e_0$  y  $e_\infty$

	$S'_{n+2} = 0$	$S'_{n+2} \neq 0$
$S'_{n+1} = 0$	Plano que pasa por el origen	Híper-esfera/punto que pasa por el origen
$S'_{n+1} \neq 0$	Plano	Híper-esfera/punto

### 3.4.3 Objetos del Álgebra Geométrica Conforme

En general, dado un punto euclidiano en  $p \in \mathbb{R}^n$ , este se puede representar en un punto  $P$  del álgebra geométrica conforme como (Li, Hestenes y Rockwood 2001):

$$P = p + \frac{1}{2} p^2 e_\infty + e_0, \quad (3.33)$$

donde  $p^2$  es la norma cuadrada o  $p^2 = p \cdot p$ .

La ecuación (3.33) expresa una relación homogénea entre ambos dominios, el euclidiano y el conforme. Cuando el coeficiente de  $e_0$  es igual a 1, entonces se dice que  $P$  tiene una representación canónica.

De la misma forma, una híper-esfera en la representación IPNS toma la siguiente forma canónica (Hitzer 2004):

$$S = C - \frac{1}{2} \gamma^2 e_\infty = c - \frac{1}{2} c^2 - \gamma^2 e_\infty + e_0, \quad (3.34)$$

donde  $C$  es el punto central de la hiper-esfera en su representación conforme como en (3.33), y  $\gamma$  es su radio. También se puede representar en OPNS utilizando cuatro puntos que están situados sobre ella (Hitzer 2004):

$$S = X^1 \wedge X^2 \wedge X^3 \wedge X^4. \quad (3.35)$$

Por otra parte, un hiper-plano se define (en notación IPNS) por:

$$T = t + \delta e_\infty, \quad (3.36)$$

donde  $t$  es el vector euclidiano normal al hiper-plano  $T$ , y  $\delta$  es la distancia de éste al origen. También se puede definir (en notación OPNS) utilizando los tres puntos que están dentro del hiper-plano y el punto al infinito (Hitzer 2004):

$$T = X^1 \wedge X^2 \wedge X^3 \wedge e_\infty. \quad (3.37)$$

De (3.35) y (3.37) se puede observar que un hiper-plano es una hiper-esfera con radio infinito (Hestenes 2001).

Un círculo se define, al usar la representación IPNS, por la intersección de dos hiper-esferas:

$$Z = S^1 \wedge S^2, \quad (3.38)$$

o, al usar la representación OPNS, con los tres puntos que caen sobre su circunferencia:

$$Z = X^1 \wedge X^2 \wedge X^3. \quad (3.39)$$

De la misma forma, una línea se define, con la representación IPNS, por la intersección de dos hiper-planos:

$$L = T^1 \wedge T^2. \quad (3.40)$$

En la representación OPNS se define usando dos puntos que pasan por ella y el punto al infinito:

$$L = X^1 \wedge X^2 \wedge e_\infty. \quad (3.41)$$

Al igual que con la hiper-esfera y el hiper-plano, se puede observar que una línea es un círculo con radio infinito (Hestenes 2001).

En la Tabla 2 se observan todos los objetos que se pueden utilizar en el álgebra geométrica conforme.

**Tabla 2.** Lista de entidades del álgebra geométrica conforme

Entidad	Representación IPNS	Representación OPNS
Híper-esfera	$S = P - \frac{1}{2} \gamma^2 e_\infty$	$S = P^1 \wedge P^2 \wedge P^3 \wedge P^4$
Híper-plano	$T = t + \delta e_\infty$	$T = P^1 \wedge P^2 \wedge P^3 \wedge e_\infty$
Círculo	$Z = S^1 \wedge S^2$	$Z = P^1 \wedge P^2 \wedge P^3$
Línea	$L = T^1 \wedge T^2$	$L = P^1 \wedge P^2 \wedge e_\infty$
Punto par	$Pp = S^1 \wedge S^2 \wedge S^3$	$Pp = P^1 \wedge P^2$
Punto	$P = S^1 \wedge S^2 \wedge S^3 \wedge S^4$	$P = p + \frac{1}{2} p^2 e_\infty + e_0$

### 3.4.4 La distancia y el producto interior

El producto interior de dos vectores de grado uno, es similar al ya conocido producto escalar. El cuadrado del producto interior de los vectores base euclidianos es 1, como se vio en (3.28).

Mediante en producto interior, es posible conocer el ángulo  $\theta$  entre dos objetos  $A^1$  y  $A^2$  (ya sean dos líneas o dos planos):

$$\cos \theta = \frac{A^1 \cdot A^2}{|A^1| |A^2|}. \quad (3.42)$$

El producto interior de dos objetos en el álgebra geométrica conforme se puede usar como una forma para calcular la distancia. Dados dos puntos en el marco del álgebra geométrica conforme  $P^1$  y  $P^2$ , cuando se aplica el producto interior entre ellos se obtiene la siguiente expresión:

$$P^1 \cdot P^2 = \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{p}^1{}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{p}^2{}^2. \quad (3.43)$$

O, lo que es igual:

$$P^1 \cdot P^2 = -\frac{1}{2} \mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2{}^2, \quad (3.44)$$

Una medida de distancia entre un punto conforme  $P$  y una hiper-esfera  $S$ , se obtiene al usar el producto interior (Hildenbrand 2005), como sigue:

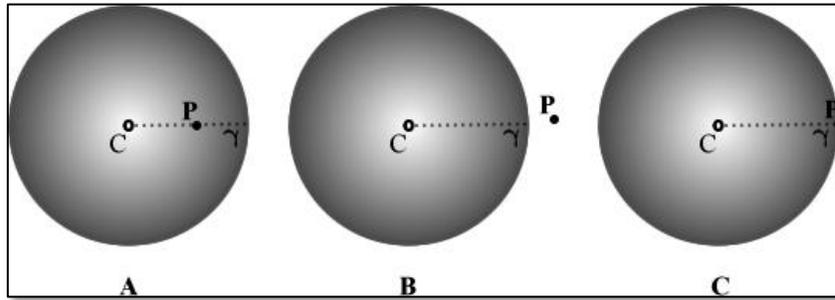
$$P \cdot S = \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}{}^2 - \gamma^2 - \frac{1}{2} \mathbf{p}{}^2 = \frac{1}{2} \gamma^2 - \mathbf{c} - \mathbf{p}{}^2. \quad (3.45)$$

En forma simplificada:

$$2 P \cdot S = \gamma^2 - \mathbf{c} - \mathbf{p}{}^2. \quad (3.46)$$

De acuerdo a (3.46):

- Si  $P \cdot S > 0$ , entonces  $P$  está dentro de la hiper-esfera (Figura 8A).
- Si  $P \cdot S < 0$ , entonces  $P$  está fuera de la hiper-esfera (Figura 8B).
- Si  $P \cdot S = 0$ , entonces  $P$  está sobre la superficie de la hiper-esfera (Figura 8C).



**Figura 8.** Tres posibles posiciones de un punto con respecto a una hiper-esfera.

Por lo tanto, cuando se utiliza una vecindad esférica, el producto interior hace posible la clasificación de un patrón; ya que permite determinar si el patrón está dentro o fuera de la hiper-esfera.