



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"**



**MODELACIÓN COMPUTACIONAL DE LA  
PROBABILIDAD DE FALLA  
DEL UN ANCLAJE SUPERIOR EN UN PUENTE**

**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
CON ESPECIALIDAD  
EN DISEÑO MECÁNICO**

**PRESENTA  
ING. BAUTISTA GONZÁLEZ ERICK JUAN**

**DIRECTORES  
DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA**

**Y**

**DR. ANDRIY KRYVKO**

**México, Distrito Federal, Junio de 2011**



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14 BIS

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 12:00 horas del día 6 del mes de Junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis titulada:

**“MODELACIÓN COMPUTACIONAL DE LA PROBABILIDAD DE FALLA DEL ANCLAJE SUPERIOR DE UN PUENTE”.**

Presentada por el alumno:

**BAUTISTA**

Apellido paterno

**GONZÁLEZ**

Apellido materno

**ERIK JUAN**

Nombre (s)

Con registro:

B	0	9	1	8	2	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

Presidente

DR. ANDRIY KRYVKO

Segundo Vocal

DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

Tercer Vocal

DR. ANDRIY KRYVKO

Secretario

DR. ERNESTO PINEDA LEÓN

DR. MIGUEL PATIÑO ORTIZ

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCIA



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

**CARTA DE CESION DE DERECHOS**

En la Ciudad de México. Distrito Federal, el día 10 del mes de Junio del año 2011, el que suscribe Bautista González Erick Juan, alumno del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Diseño Mecánico con un número de registro B091826, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis, bajo la dirección de Dr. Didier Samayoa Ochoa y Dr. Andriy Kryvko, y cede los derechos del trabajo de tesis "MODELACIÓN COMPUTACIONAL DE LA PROBABILIDAD DE FALLA DEL ANCLAJE SUPERIOR DE UN PUENTE", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: [ek\\_jbg@hotmail.com](mailto:ek_jbg@hotmail.com)

Si el permiso se le otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar a la fuente del mismo.



---

Ing. Erick Juan Bautista González

## **AGRADECIMIENTOS INSTITUCIONALES**

Al Instituto Politécnico Nacional y a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, el haberme brindado la oportunidad de instruirme académicamente en sus aulas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por apoyarme con una beca económica para mi formación como Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica.

Al Instituto Mexicano del Transporte.

De manera especial quiero expresar mi agradecimiento a la Secretaría de Investigación y Posgrado, quien a través del proyecto SIP-20110031 "Dinámica de desplazamiento de fluidos en medios porosos para la recuperación de hidrocarburos" hizo posible la investigación de la presente tesis.

# ÍNDICE GENERAL

<b>RESUMEN</b>	8
<b>ABSTRACT</b>	9
<b>OBJETIVOS, METAS Y ALCANCES</b>	10
<b>JUSTIFICACIÓN</b>	11

## CAPITULO 1. CONCEPTOS BASICOS DEL ELEMENTO FINITO

1.1 Generalidades del análisis numérico	12
1.1.1 Simulación numérica	12
1.2 Método de elementos finitos	13
1.2.1 Antecedentes	14
1.2.2 Fundamentos	15
1.2.3 Descripción del método de elemento finito.	17
1.2.4 Discretización de elementos	18
1.2.4.1 Nodos	19
1.2.4.2 Elementos	20
1.2.5 Pasos esenciales para un Análisis de Elemento Finito (FEA)	22
1.2.4.1 Pre-procesamiento	22
1.2.4.2 Procesamiento	23
1.2.4.3 Post-procesamiento	23
1.2.6 Los doce pasos de Champion	24
1.2.7 Ventajas y desventajas del método	27
1.3 Generalidades del programa ANSYS®	27
1.3.1 Sistemas de unidades	28
1.3.2 Modelado de un sólido	28
1.3.3 Sistemas de coordenadas	29
1.3.4 Entidades de un modelo sólido	29
1.3.5 Entidades primitivas	30
1.3.6 Operaciones booleanas	31
1.3.7 Organización del programa ANSYS®	31
1.3.8 Base de datos y archivos de ANSYS®	32
1.3.9 Archivos Log	33

## CAPITULO 2. VARIABLES ALEATORIAS Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

2.1 Breve descripción de las fallas en los puentes atirantados	34
--	----

2.2 Descripción del ancla superior . . . . .	37
2.3 Conceptos básicos de probabilidad . . . . .	41
2.3.1 Variable aleatoria . . . . .	41
2.3.2 Variable aleatoria discreta y continua . . . . .	42
2.3.3 Función de distribución de probabilidad . . . . .	42
2.3.4 Distribución normal . . . . .	45
2.3.5 Distribución Weibull . . . . .	47
2.3.6 Teorema del límite central. . . . .	47
2.3.7 Prueba Chi-cuadrada . . . . .	48
2.4 Variables que intervienen en el análisis . . . . .	51
2.4.1 Propiedades mecánicas del ancla . . . . .	52
2.4.2 Cargas externas en el ancla . . . . .	52
2.4.3 Defectos internos en el ancla . . . . .	53

### **CAPITULO 3. ANÁLISIS DE UN ANCLAJE SUPERIOR**

3.1 Formulación del ancla por el método del elemento finito . . . . .	55
3.2 Variables que intervienen en el análisis sin defectos . . . . .	62
3.2.1 Propiedades mecánicas del ancla . . . . .	62
3.2.2 Cargas externas en el ancla . . . . .	63
3.3 Variables que intervienen en el análisis con defectos . . . . .	68
3.3.1 Defectos internos en el ancla . . . . .	69
3.3.1.1 Tamaño del defecto (probabilístico) . . . . .	69
3.3.1.2 Ubicación del (probabilístico) . . . . .	70

### **CAPITULO 4. MODELACION NUMERICA DEL ANCLAJE SUPERIOR**

4.1 Modelado geométrico . . . . .	78
4.2 Análisis sin defectos . . . . .	80
4.2.1 Discretización del modelo sin defectos . . . . .	80
4.2.2 Condiciones de frontera sin defectos . . . . .	81
4.3.3 Resultados de un análisis sin defectos . . . . .	82
4.3 Análisis con defectos . . . . .	84
4.2.1 Discretización del modelo con defectos . . . . .	84
4.2.2 Condiciones de frontera con defectos . . . . .	86
4.3.3 Resultados de un análisis con defectos . . . . .	86

### **CAPITULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS**

5.1 Introducción . . . . .	89
5.2 Análisis del ancla sin defectos . . . . .	90
5.2.1 Muestra con 50 pruebas . . . . .	90
5.2.2 Muestra con 100 pruebas . . . . .	92
5.2.3 Muestra con 250 pruebas . . . . .	94
5.3 Análisis del ancla con defectos . . . . .	96

5.3.1 Muestra con 50 pruebas . . . . .	96
5.3.2 Muestra con 100 pruebas . . . . .	97
5.3.3 Muestra con 250 pruebas . . . . .	99
5.4 Análisis Probabilístico . . . . .	102
5.4.1 Análisis de las curvas de densidad de probabilidad para las muestras con 50 pruebas . . . . .	102
5.4.2 Análisis de las curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 100 muestras . . . . .	105
5.4.3 Análisis de las curvas de densidad de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 250 muestras . . . . .	108
5.4.4 Análisis de las curvas de densidad sin defectos . . . . .	111
5.4.5 Análisis de las curvas de densidad para el análisis con defectos . . . . .	112
5.5 Análisis de las medidas y las desviaciones estándar para las muestras de 250 pruebas . . . . .	113
<b>CONCLUSIONES . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>BIBLIOGRAFIA . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>ANEXO A. RESULTADOS DE LOS ESFUERZOS MÁXIMOS EN LOS ANÁLISIS</b>	
<b>Tabla A.1</b> Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis sin defectos . . . . .	<b>118</b>
<b>Tabla A.2</b> Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis sin defectos . . . . .	<b>119</b>
<b>Tabla A.3</b> Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis con defectos . . . . .	<b>120</b>
<b>Tabla A.4</b> Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis con defectos . . . . .	<b>120</b>
<b>Tabla A.5</b> Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis con defectos . . . . .	<b>121</b>
<b>ANEXO B. ALGORITMOS <i>Log File</i> DESARROLLADOS</b>	
<b>Algoritmo B.1</b> Análisis del anclaje superior sin defectos internos . . . . .	<b>122</b>
<b>Algoritmo B.2</b> Análisis del anclaje superior con defectos internos . . . . .	<b>125</b>
<b>ANEXO C. DIAGRAMA DE FLUJO PARA UBICACIÓN DE DEFECTOS</b>	
<b>Diagrama C.1</b> Diagrama de flujo para ubicación de defectos en la zona de empotramiento . . . . .	<b>130</b>
<b>Diagrama C.2</b> Diagrama de flujo para ubicación de defectos en la zona de transición . . . . .	<b>131</b>
<b>Diagrama C.3</b> Diagrama de flujo para ubicación de defectos en la zona cilíndrica . . . . .	<b>132</b>

## ÍNDICE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> Analogía en sistemas mecánicos . . . . .	<b>15</b>
<b>Figura 1.2</b> Representación de un sólido bidimensional como un ensamblaje de un elemento finito triangular. . . . .	<b>17</b>
<b>Figura 1.3</b> División de un dominio en subdominios llamados elementos . . . . .	<b>20</b>
<b>Figura 1.4</b> Descripción de los elementos de línea, área y volumen con su numeración nodal a nivel del elemento . . . . .	<b>21</b>
<b>Figura 1.5</b> Discretización del dominio con numeración de los elementos y de los nodos . . . . .	<b>22</b>
<b>Figura 1.6</b> Tabulación de colores . . . . .	<b>23</b>
<b>Figura 1.7</b> Sistemas coordenados globales . . . . .	<b>29</b>
<b>Figura 1.8</b> Entidades básicas de un cubo . . . . .	<b>30</b>
<b>Figura 1.9</b> Creación de primitivas en dos dimensiones . . . . .	<b>30</b>
<b>Figura 1.10</b> Organización del programa . . . . .	<b>31</b>
<b>Figura 2.1</b> Puente río Papaloapan . . . . .	<b>35</b>
<b>Figura 2.2</b> Prueba no destructiva con líquidos penetrantes para determinar defectos y porosidades . . . . .	<b>36</b>
<b>Figura 2.3</b> Prueba no destructiva con resonancia magnética . . . . .	<b>37</b>
<b>Figura 2.4</b> Arreglo de anclas – cables en una columna principal del puente río Papaloapan . . . . .	<b>38</b>
<b>Figura 2.5</b> Dibujos normalizados ancla superior del río Papaloapan . . . . .	<b>39</b>
<b>Figura 2.6</b> Dibujos normalizados ancla superior del río Papaloapan . . . . .	<b>40</b>
<b>Figura 2.7</b> Ejemplo de grafico de frecuencias . . . . .	<b>45</b>
<b>Figura 2.8</b> Distribución normal . . . . .	<b>46</b>
<b>Figura 2.9</b> Presencia y ubicación de defectos internos después de realizar pruebas destructivas . . . . .	<b>54</b>
<b>Figura 3.1</b> Modelo analógico para el ancla superior . . . . .	<b>56</b>
<b>Figura 3.2</b> Modelo analógico para el ancla superior . . . . .	<b>57</b>
<b>Figura 3.3</b> Curva de distribución de probabilidad para el módulo de Young en	

análisis sin defectos . . . . .	63
<b>Figura 3.4</b> Ubicación de Fuerza de axial o de tracción . . . . .	64
<b>Figura 3.5</b> Curva de densidad de probabilidad para la fuerza de tracción en análisis sin defectos . . . . .	65
<b>Figura 3.6</b> Ubicación de Fuerza de axial o de tracción . . . . .	67
<b>Figura 3.7</b> Curva de densidad de probabilidad para la fuerza del viento en análisis sin defectos . . . . .	68
<b>Figura 3.8</b> Curva de densidad de probabilidad para la fuerza del viento en análisis con defectos . . . . .	69
<b>Figura 3.9</b> Curva de densidad de probabilidad para la fuerza del viento en análisis con defectos . . . . .	69
<b>Figura 3.10</b> Zonas de ubicación de defectos . . . . .	70
<b>Figura 3.11</b> Zonas de empotramiento . . . . .	71
<b>Figura 3.12</b> Zona de Transición . . . . .	74
<b>Figura 3.13</b> Zona Cilíndrica . . . . .	76
<b>Figura 4.1</b> Sección lateral del anclaje por líneas . . . . .	78
<b>Figura 4.2</b> Volumen de perfil principal . . . . .	79
<b>Figura 4.3</b> Elementos a substraer del perfil general el ancla . . . . .	79
<b>Figura 4.4</b> Modelado geométrico del en el programa ANSYS® . . . . .	80
<b>Figura 4.5</b> Discretización del anclaje para análisis sin defectos . . . . .	81
<b>Figura 4.6</b> Condiciones de frontera en el anclaje para análisis sin defectos . . . . .	81
<b>Figura 4.7</b> Distribución de esfuerzos en el anclaje . . . . .	82
<b>Figura 4.8</b> Corte transversal lateral sobre el ancla . . . . .	83
<b>Figura 4.9</b> Corte transversal superior sobre el ancla . . . . .	83
<b>Figura 4.9</b> Ubicación de 50 defectos en el interior del anclaje . . . . .	85
<b>Figura 4.10</b> Discretización del anclaje para análisis con defectos . . . . .	86
<b>Figura 4.11</b> Corte transversal lateral sobre el ancla . . . . .	87
<b>Figura 4.12</b> Corte transversal superior sobre el ancla . . . . .	88
<b>Figura 5.1</b> Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis sin defectos . . . . .	91
<b>Figura 5.2</b> Densidad de probabilidad para el análisis con 50 pruebas sin defectos . . . . .	92

<b>Figura 5.3</b> Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis sin defectos . . . . .	<b>93</b>
<b>Figura 5.4</b> Densidad de probabilidad para el análisis con 100 pruebas sin defectos . . . . .	<b>93</b>
<b>Figura 5.5</b> Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis sin defectos . . . . .	<b>94</b>
<b>Figura 5.6</b> Densidad de probabilidad para el análisis con 250 pruebas sin defectos . . . . .	<b>95</b>
<b>Figura 5.7</b> Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis con defectos . . . . .	<b>96</b>
<b>Figura 5.8</b> Densidad de probabilidad para análisis con 50 pruebas con defectos . . . . .	<b>97</b>
<b>Figura 5.9</b> Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis con defectos . . . . .	<b>98</b>
<b>Figura 5.10</b> Densidad de probabilidad para el análisis con 100 pruebas con defectos . . . . .	<b>99</b>
<b>Figura 5.11</b> Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis con defectos . . . . .	<b>100</b>
<b>Figura 5.112</b> Densidad de probabilidad para el análisis con 100 pruebas con defectos . . . . .	<b>101</b>
<b>Figura 5.123</b> Densidades de probabilidad para los análisis con y sin defectos, $TM=50$ . . . . .	<b>103</b>
<b>Figura 5.134</b> Las curvas de densidad para las muestras con 50 pruebas, con las probabilidades acumuladas en el intervalo (175,300) . . . . .	<b>104</b>
<b>Figura 5.15</b> Las medias $\mu_{sd}$ , $\mu_{cd}$ de las funciones de densidad y $\mu_{sd} \pm \sigma_{sd}$ , $\mu_{cd} \pm \sigma_{cd}$ para las muestras con 50 pruebas . . . . .	<b>105</b>
<b>Figura 5.146</b> Curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 100 muestras . . . . .	<b>106</b>
<b>Figura 5.157</b> Probabilidad de las curvas en su sección final y sin defectos, para el con 100 muestras . . . . .	<b>107</b>
<b>Figura 5.168</b> Curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 250 muestras . . . . .	<b>108</b>
<b>Figura 5.179</b> Curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos	

y sin defectos, con 250 muestras . . . . .	<b>110</b>
<b>Figura 5.20</b> Curvas de densidad de probabilidad para los análisis sin defectos con 50, 100 y 250 pruebas . . . . .	<b>111</b>
<b>Figura 5.181</b> Curvas de densidad de probabilidad para los análisis con defectos con 50, 100 y 250 pruebas . . . . .	<b>112</b>

## ÍNDICE TABLAS

<b>Tabla 2.1</b> Frecuencias observadas y esperadas . . . . .	<b>48</b>
<b>Tabla 2.2</b> Bebidas consumidas . . . . .	<b>50</b>
<b>Tabla 2.3</b> Pesos de vehículos en el puente de acuerdo a los ejes que contienen . . . . .	<b>53</b>
<b>Tabla 3.1</b> Pesos de vehículos en el puente de acuerdo a los ejes que contiene . . . . .	<b>62</b>
<b>Tabla 5.1</b> Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis sin defectos . . . . .	<b>90</b>
<b>Tabla 5.2</b> Media y desviación estándar correspondientes a las muestras . . . . .	<b>95</b>
<b>Tabla 5.3</b> Media y desviación estándar correspondientes a las muestras . . . . .	<b>101</b>
<b>Tabla 5.4</b> Desviación relativa para un tamaño de muestra de 250 pruebas . . . . .	<b>114</b>

## SIGLAS

<b>IMT</b>	Instituto Mexicano del Transporte
<b>FZAT</b>	Fuerza de tracción
<b>FZAV</b>	Fuerza de viento
<b>ND_ZE</b>	Número de nodos en zona de empotramiento
<b>ND_ZT</b>	Número de nodos en zona de transición
<b>YOUNG</b>	Módulo de Young
<b>DSY</b>	Desviación estándar del módulo de Young
<b>DSFT</b>	Desviación estándar del módulo de la fuerza de tracción
<b>DSFV</b>	Desviación estándar del módulo de la fuerza del viento
<b>RAD_V</b>	Radio variable

## **RESUMEN**

En el presente trabajo se realizaron una serie de pruebas experimentales en los anclajes superiores del puente atirantado Río Papaloapan en México a fin de determinar los tipos, tamaños, cantidades y ubicaciones de defectos internos que contienen ya sea originado por defectos de fabricación o por los años de servicio de los mismos.

Con base en los experimentos se determinaron los parámetros para la distribución de los defectos en el anclaje. Posteriormente se desarrollaron los modelos matemáticos con estos parámetros para ser finalmente aplicados en un software comercial. Se simularon dos modelos geométricos de las anclas, uno sin defectos y el otro incluyendo los defectos. Dichos modelos fueron sometidos a cargas externas a las que está sujeto el anclaje como son el viento y tráfico vehicular; obteniendo de esta manera el comportamiento de las anclas. Los resultados numéricos nos arrojan la probabilidad de falla del anclaje superior lo que redundará en la seguridad estructural del puente atirantado.

## **ABSTRACT**

In the present work several experiments for the upper anchorage of "Río Papaloapan" cable-stayed bridge in order to determine the types, sizes, quantities and locations of the internal defects of the anchorages, generated during the fabrication process or due to the usage time, were performed.

The parameters and the type of probability distribution function of the anchorage defects were obtained as the results of the experimental tests. Models of anchorages with and without internal defects were constructed according to the obtained parameters. These models were tested using commercial software taking into account the external forces, which affect the bridge, such as the wind and the traffic. As the result of the above mentioned simulations the behavior of the upper anchorage was obtained. The obtained numerical results provided the probability of failure of the anchorage, which allowed to determine the safety level of the cable-stayed bridge.

## **OBJETIVO**

Desarrollo y aplicación de un modelo computacional de los anclajes superiores de puentes atirantados tomando en cuenta los pequeños defectos internos existentes a fin de determinar su influencia en el desempeño estructural mediante un análisis probabilístico.

## **METAS Y ALCANCES**

Desarrollar un modelo numérico de vigas metálicas en cantiléver que contengan defectos internos, basados en el análisis experimental de estructuras reales. Realizar el análisis probabilístico de falla de vigas con defectos internos aplicado al modelo numérico desarrollado.

Establecer una metodología práctica de análisis de integridad y diseño estructural para que ingenieros e investigadores que se ocupan de este rubro puedan utilizarlo cuando se presenta la influencia de diminutos defectos en los metales.

## JUSTIFICACIÓN

En esta tesis se proponen alternativas de análisis y diseño para solucionar problemas reales que se presentan en componentes estructurales de puentes atirantados e impactan directamente en el sector de comunicaciones del país, debido a que da una aproximación de la vida útil de los sistemas de anclajes de puentes atirantados -que son tipo viga en cantiléver sujetos a cargas externas-.

Los métodos tradicionales de análisis se realizan a través de pruebas no destructivas de los anclajes, con líquidos penetrantes y resonancia magnética para detectar la presencia de diversas formas de daños ya sean mecánicas, o inducidas por el ambiente o los esfuerzos externos a que están sujetas las vigas de acero que soportan los puentes atirantados. Una vez conocidas las cantidades, geometría y ubicación de los defectos se determina la posibilidad de que el elemento estructural siga en funcionamiento o si es necesario reemplazarlos con elementos nuevos. Para ello es necesario detener el tráfico vehicular a fin de tener las condiciones necesarias para realizar las pruebas experimentales; la mayoría de las veces se tienen que “bajar” todas las anclas; lo que redundaría en un alto costo económico, pues al detenerse el tráfico vehicular se cancela el transporte de productos, mercancías y fletes en general que circula vía terrestre por las autopistas y carreteras mexicanas.

La presente tesis, da una propuesta alterna al hecho de detener el tráfico vehicular, ya que se pretende conocer la influencia de los pequeños defectos en las anclas, mediante un análisis numérico usando elementos finitos, creando un modelo de análisis probabilístico computacional en donde se involucran los parámetros encontrados experimentalmente con las pruebas no destructivas, para determinar la probabilidad de falla sin tener que quitar los elementos del puente, salvo a aquellos que después del análisis computacional así sean requeridos. Además el modelo computacional propuesto en la presente tesis, puede ser utilizado también en otras áreas, como por ejemplo en el sector energético, para analizar y predecir la vida útil de las tuberías de oleoductos, para analizar también elementos estructurales de estructuras marinas y diversas obras de infraestructura civil.

# Capítulo 1

## CONCEPTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

### 1.1 Generalidades del análisis numérico

El análisis o cálculo numérico es la rama de la matemática que se encarga de diseñar algoritmos, a través de números y reglas matemáticas simples simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real. De una forma rigurosa, se puede definir como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos, en los que estén involucradas cantidades numéricas, con una precisión determinada.

Un motivo que ha propiciado el auge del análisis numérico ha sido el desarrollo de las computadoras. El aumento brutal de la potencia de cálculo ha convertido en posibles y en eficientes a algoritmos poco dados a su realización a mano. Los problemas de esta disciplina se pueden dividir en dos grupos fundamentales:

**Problemas de dimensión finita:** aquellos cuya respuesta son un conjunto finito de números, como las ecuaciones algebraicas, los determinantes, los problemas de valores propios, etc...

**Problemas de dimensión infinita:** problemas en cuya solución o planteamiento intervienen elementos descritos por una cantidad infinita de números, como integración y derivación numéricas, cálculo de ecuaciones diferenciales, interpolación, etc...

#### 1.1.1 Simulación numérica

Basados en el concepto de análisis numérico podemos definir que una simulación numérica es una recreación matemática de un proceso natural. Mediante esta herramienta se estudian procesos físicos, de ingeniería, económicos e incluso biológicos. Este campo constituye por lo tanto un nutrido esquema de posibilidades dentro de la investigación interdisciplinaria. Algunos

problemas científicos son estudiados primariamente mediante el uso de simulaciones como los problemas de caos, fractalidad o de complejidad y en general todos aquellos campos de la naturaleza gobernados por sistemas de ecuaciones no lineales o no reproducibles fácilmente en el laboratorio.

En términos más sencillos la simulación de procesos, es la herramienta más grande de la ingeniería, la cual se utiliza para representar un proceso mediante otro que lo hace mucho más simple y comprensible.

En este sentido el desarrollo tecnológico aplicado en la industria ha generado herramientas fundamentales para su desarrollo, tal es el caso de paquetes computacionales que nos permiten agilizar los procesos de producción, la introducción del C.A.D. (ComputerAidedDesign) está ya representando un gran avance en la etapa del diseño conceptual de nuevos productos. Por contra, el C.A.E (ComputerAidedEngineering).

Mediante la simulación numérica es posible generar sólidos de aspectos casi reales, comprobar su comportamiento bajo diversas condiciones de trabajo, estudiar el movimiento conjunto de grupos de sólidos, etc. Esto permite un conocimiento mucho mas profundo de un producto antes de que exista físicamente, siendo posible detectar muchos de los problemas que de otro modo se hubieran detectado en el servicio real.

## **1.2 Método de elementos finitos**

Un método de análisis numérico que se ha desarrollado en las últimas décadas es el método del elemento finito que es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales parciales, primero, discretizando las ecuaciones al describir el problema en sus dimensiones espaciales. Esta discretización se lleva a cabo sobre las pequeñas regiones de formas arbitrarias. Estos resultados, en matrices relacionan la entrada de puntos específicos a la salida de todos los puntos en el dominio. Para resolver las ecuaciones sobre grandes regiones, las ecuaciones en matrices para regiones más pequeñas son sumadas nodo por nodo. Esto resultará en el desarrollo de ecuaciones de matriz globales.

### 1.2.1 Antecedentes

El método de elementos finitos ha tenido un largo trayecto a lo largo de la historia, pero con el creciente avance tecnológico que se ha desarrollado con la aparición de las computadoras en los años 50's se han obtenido mejores resultados en tiempos de ejecución menores en cálculos de los que se podrían haber hecho con cálculos manuales. Los geómetras antiguos ya habían empleado los "elementos finitos" para determinar un valor aproximado de  $\pi$ .

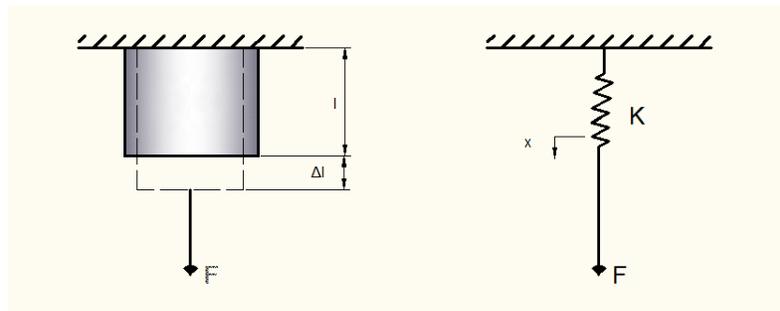
Arquímedes usó ideas parecidas para determinar el área de figuras planas. Pero no es sino con el desarrollo del cálculo integral dos mil años después con Newton y Leibniz, que se añaden nuevas herramientas, permitiendo nuevos análisis de métodos numéricos para resolver problemas complejos. Poco después Walter Ritz (1878–1909), físico suizo fue el primero en formalizar el método de elementos finitos. Él propuso que las frecuencias de las líneas espectrales de los átomos podían ser expresadas por diferencias entre un relativamente pequeño número de "elementos". Ritz desarrolló la formulación del método numérico del MEF, con base en el cálculo variacional y es por eso que el método de Ritz es también conocido como variacional o formulación clásica.

Sin embargo más adelante se incorporó el cálculo matricial al método de elementos finitos, con la proposición del ingeniero ruso Boris G. Galerkin (1871- 1945). Galerkin publicó sus primeros trabajos en base al método clásico durante su prisión en 1906 por orden del zar en la Rusia prerrevolucionaria. En muchos textos rusos el método de elementos finitos de Galerkin se conoce como método de Bubnov- Galerkin. Él publicó un trabajo usando esta idea en 1915. El método también fue atribuido a Bubnov en 1913. Y más recientemente en adición a las formulaciones de Ritz y Galerkin, otros métodos han venido a emplearse.

Los más conocidos son el método de los mínimos cuadrados y un método conocido como método directo, método de balance global o método de Oden. Pero es ahora cuando el uso moderno de los elementos finitos se inició en el campo de ingeniería de estructuras a mitad del siglo veinte, para que luego los conceptos básicos fueran reconocidos para una amplia aplicabilidad y prontamente empleados en muchas otras áreas tales como mecánica de sólidos, mecánicas de fluidos, flujo magnético, etc.

## 1.2.2 Fundamentos

La solución de problemas estructurales bidimensionales por medio del elemento finito se lleva a cabo estableciendo una analogía entre sistemas mecánicos, para explicar esto consideremos que tenemos un elemento estructural hecho de un material elástico sometido a tensión tal y como se muestra en la figura, en esta podemos observar que el elemento al ser cargado sufre una deformación debida a la naturaleza elástica del material.



**Figura 1.1** Analogía en sistemas mecánicos

La deformación que sufre el elemento estructural se puede establecer como:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.1)$$

Dónde:  $\Delta l$  = Elongación que sufre el elemento [m]

$l$  = Longitud original del elemento [m]

Las bases para el análisis de elemento finito para análisis estructural, se fundamentan en la ley que en siglo 17, Robert Hooke dio a conocer, la "Ley de Hooke". Esta establece que un cuerpo elástico se deforma en proporción al esfuerzo aplicado sobre este.

$$F = kx \quad (2.2)$$

Dónde:  $F$  = Fuerza [N]

$k$  = Constante de proporcionalidad [N/m]

$x$  = Deformación [m]

La cual establece que la deformación “ $x$ ” del cuerpo, respecto a su longitud sin carga, es directamente proporcional a la fuerza deformadora  $F$ . La constante  $K$ , o relación entre la fuerza y la deformación, se denomina constante de fuerza y se expresa en Newtons por metro. En el método de elemento finito, se establece la “formulación de la rigidez del elemento”, que consiste en crear una  $K$  en relación entre cada nodo de cada elemento.

De esta forma cada nodo queda en relación con otro por medio de un resorte, el cual se comporta como  $F = KX$ , donde  $F$  y  $X$  son vectores que tienen un vector y una dirección.

La ley de Hookees utilizada en la análogamente en la mecánica de materiales para establecer que el esfuerzo que sufre el elemento estructural se define como:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.3)$$

Dónde:  $\sigma$  = Esfuerzo [Pa]  
 $E$  = Módulo de elasticidad [Pa]  
 $\epsilon$  = Deformación unitaria [adimensional]

El esfuerzo sobre un área se define como:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.4)$$

Dónde:  $F$  = Fuerza [N]  
 $A$  = Área [m<sup>2</sup>]

Si sustituimos las dos expresiones anteriores de en la ley de Hooke tenemos lo siguiente:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

Despejando  $F$  de la expresión anterior se tiene lo siguiente

$$F = E \frac{A\Delta l}{l} = \left(\frac{EA}{l}\right) \Delta l$$

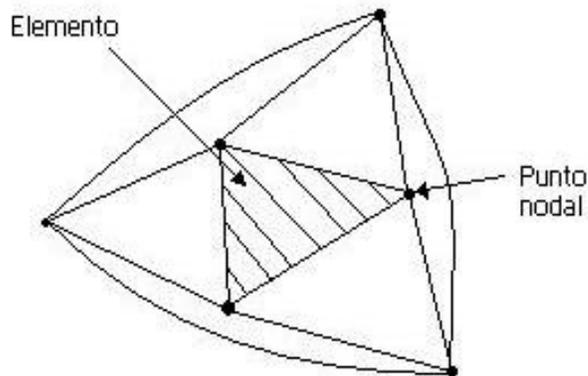
Si hacemos la analogía entre sistemas tenemos que  $K$  es análoga a  $\left(\frac{EA}{l}\right)$  donde a esta  $K$  la llamaremos rigidez del elemento, que como se observa depende de las propiedades geométricas y mecánicas del elemento.

$$K = \frac{EA}{l} \quad (2.5)$$

Ahora a cada elemento dentro de un análisis por elementos finitos podremos asignar módulos de rigidez a cada elemento. Y establecer los sistemas de ecuaciones que lo fundamentaran.

### 1.2.3 Descripción del método de elementos finitos

Las bases del método de elementos finitos es la representación de una estructura por un ensamblaje de subdivisiones o elementos finitos (véase figura 1.2). Estos elementos se consideran estar interconectados en uniones llamados nodos o puntos nodales, en los cuales, los valores de las incógnitas (usualmente los desplazamientos) son aproximados. Si sucesivamente se hace una discretización más fina de la estructura de la estructura esta provee soluciones la cual converge a una solución más exacta.



**Figura 1.2** Representación de un sólido bidimensional como un ensamblaje de un elemento finito triangular.

El método de elementos finitos opera sobre la suposición de que cualquier función continua en un dominio global puede ser aproximada por una serie de funciones operando sobre un número finito de pequeños subdominios o elementos. Estas series de funciones deben ser continuas y deben aproximarse a la solución exacta conforme el número de subdominios tiendan al infinito.

**1.-**El dominio global es dividido en subdominios llamados elementos.

**2.-**Los puntos definidos y conectados de los elementos son llamados nodos o puntos nodales.

**3.-**La función que existe sobre el dominio es explícitamente resuelto, por los puntos nodales, por ejemplo, las variables nodales. Y se asume que el valor de la función en cualquier punto interno para un elemento puede ser definido en términos de esos elementos en variables nodales. Las variables nodales son referidas como grados de libertad. Este término se aplica específicamente para el análisis de esfuerzo en los cuales las variables nodales son las deflexiones de la estructura en los puntos nodales; sin embargo, el término es a veces usado genéricamente refiriéndose para todas las variables nodales.

#### **1.2.4 Discretización de elementos**

La región donde interesa la solución se divide en un número determinado de elementos. Dependiendo si el problema es en una, dos o tres dimensiones la región puede dividirse en segmentos, triángulos, rectángulos o paralelepípedos. Los vértices de cada elemento se denominan nodos. Entre más elementos haya, se obtendrá un resultado más exacto, pero el análisis será más tardado, así que se recomienda realizar esta discretización dependiendo la calidad en la que se quieren los resultados y dependiendo de las posibilidades con las que se cuentan para realizar el análisis.

Al hacer la discretización de la pieza, se contará con elementos y estos estarán unidos entre si con puntos, a los que se les llama nodos. Estos nodos unidos entre si conforman una malla y son los encargados de mantener la continuidad en la pieza, como se mostró en la Figura 1.2.

Las ecuaciones del sistema serán resueltas en cada uno de estos elementos y cada ecuación será llamada ecuación de discretización. Después estas ecuaciones serán conjuntadas y formulando un sistema de ecuaciones algebraicas se obtendrá una solución para el sistema.

Como solución se podrán observar los desplazamientos que sufren los nodos de acuerdo a las fuerzas externas y las condiciones de frontera, posteriormente mediante una interpretación de cada área física de aplicación se podrá observar como resultados:

- Esfuerzos Mecánicos
- Flujo de fluidos
- Transferencia de calor (conducción, convección, radiación)
- Varios fenómenos eléctricos y magnéticos
- Vibraciones Mecánicas

Para comprender mejor los términos anteriores abordaremos las siguientes definiciones:

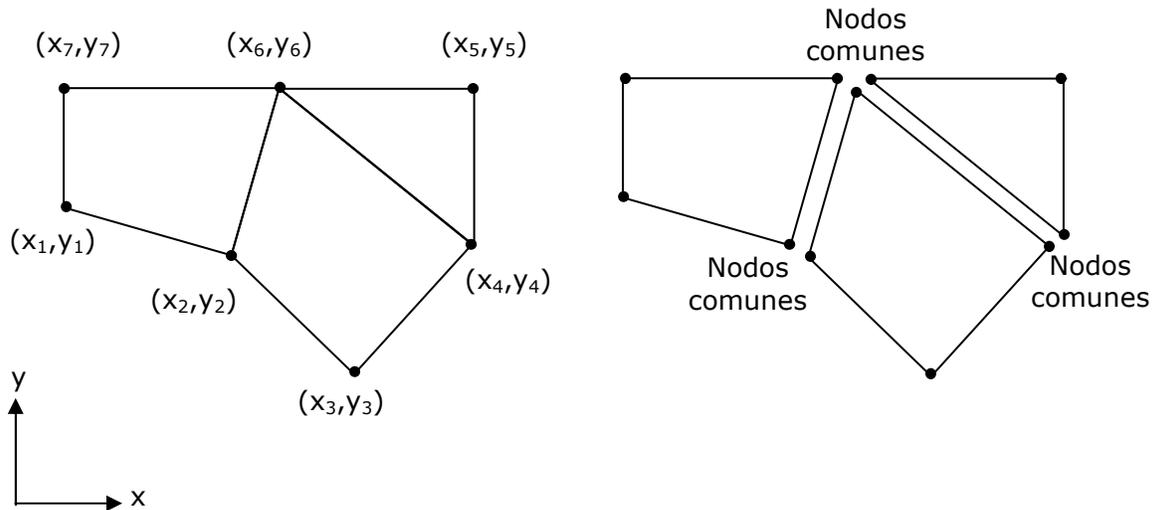
#### **1.2.4.1 Nodos**

Se entiende por nodo a un punto en el espacio en donde se definen  $n$  grados de libertad. Esos grados de libertad son también conocidos por sus siglas en inglés como "DOF" (Degrees of freedom).

Los DOF representan los posibles movimientos del nodo debido a una fuerza aplicada en la estructura. Estos transfieren sus propiedades desde un elemento a otro. En un análisis de elemento finito estos puntos juegan un rol muy importante ya que ellos contendrán los esfuerzos y deflexiones.

Un nodo especifica la localización de la coordenada en el espacio donde existen las acciones y los grados de libertad del problema físico [1-7]. Las incógnitas nodales del sistema matricial de ecuaciones representan una o más variables de campo primarias. Las variables nodales asignadas a un elemento son denominadas los DOF. Los nodos comunes mostrados en la Figura 1.3, proveen la continuidad a las variables nodales (DOF).

Los DOF de un nodo están regidos por la naturaleza física del problema en un tipo de elemento. Para problemas estructurales son DOF, son los desplazamientos; en el vector de fuerzas están representadas las fuerzas mecánicas.

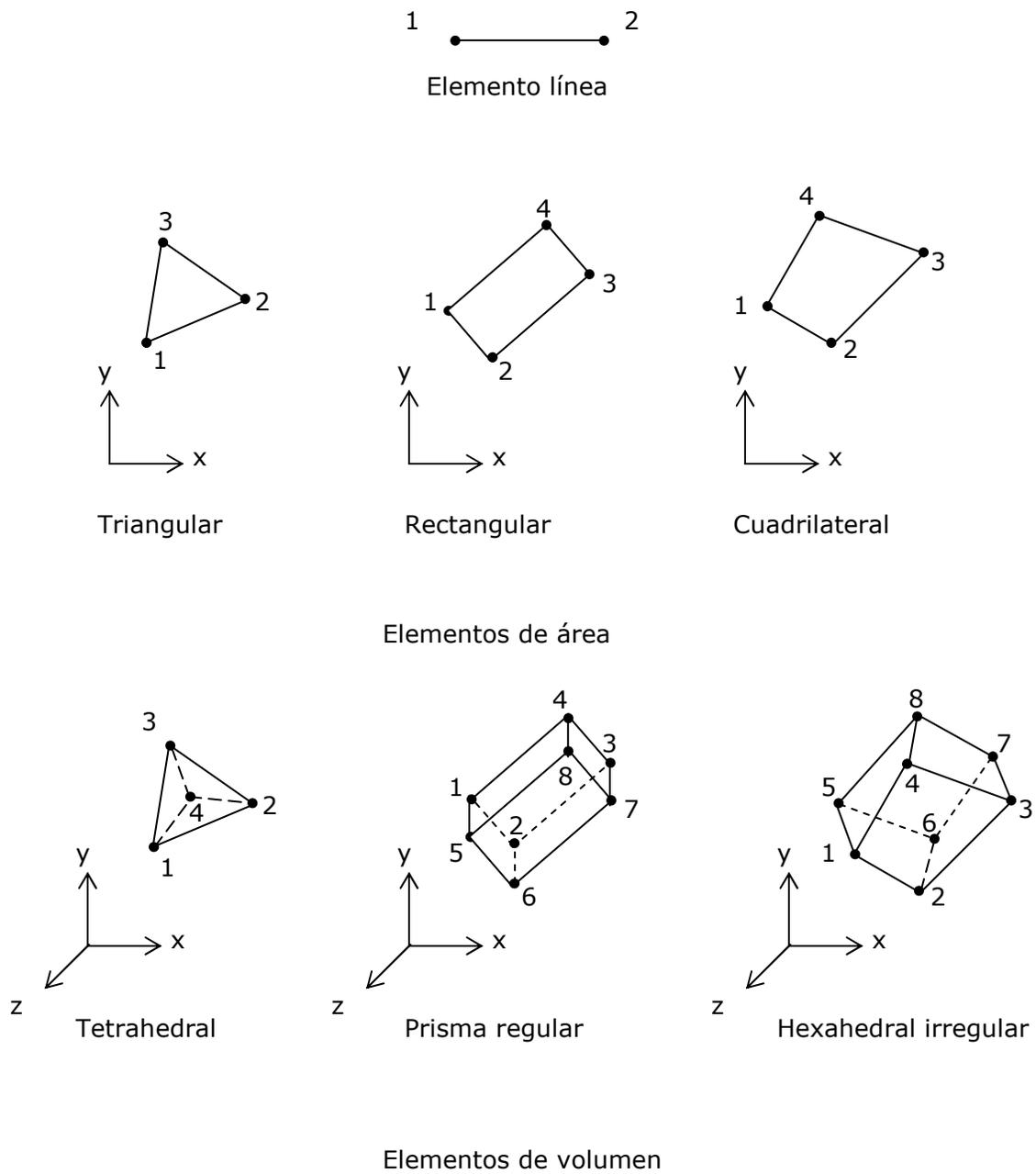


**Figura 1.3** División de un dominio en subdominios llamados elementos

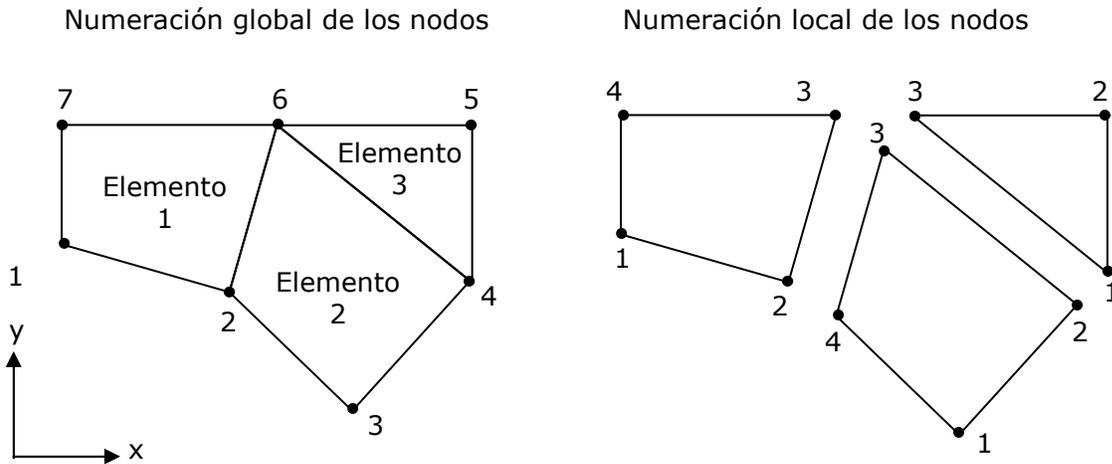
### 1.2.4.2 Elementos

El dominio de interés puede ser discretizado empleando elementos tipo línea, área o volumen; que dependen básicamente de la geometría y naturaleza física del problema [1-7] los elementos más comunes en un análisis de elementos finitos se ilustran en la Figura 1.4.

Donde cada elemento es identificado por un número y éste se define por una secuencia específica de números de nodos global; esta secuencia (usualmente en sentido anti-horario) está basada en la numeración del nodo a nivel del elemento, la secuencia numérica del nodo para los elementos se muestra en la Figura 1.5.



**Figura 1.4** Descripción de los elementos de línea, área y Volumen con su numeración nodal a nivel del elemento



**Figura 1.5.** Discretización del dominio  
con numeración de los elementos y de los nodos

## 1.2.5 Pasos esenciales para un Análisis de Elemento Finito (FEA)

Los pasos para realizar un Análisis de Elemento Finito (FEA, por sus siglas en inglés) son muy variados y entre autores varían, según el programa y hardware que utilicen. Pero se puede resumir, que para realizar un FEA se necesitan tres pasos indispensables, pre-procesamiento, procesamiento y post-proceso.

### 1.2.5.1 Pre-procesamiento

Se llama pre-procesamiento a la preparación del modelo a analizar. En este proceso normalmente se inicia en un programa CAD (Diseño Asistido por Computador, por sus siglas en inglés ComputerAidedDesign), en donde se puede trabajar mejor la modelación, después se importa a un programa para FEA, en este programa se discretiza el modelo, se añaden las propiedades de los elementos, se dan las propiedades de los materiales, cargas, temperaturas,

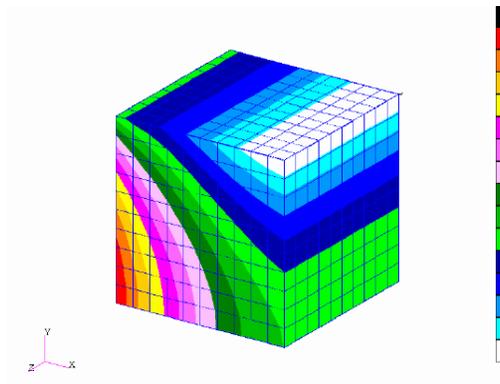
etc. Nota: Actualmente hay programas de FEA en donde se puede trabajar la modelación y así se evita el intercambio de archivos entre programas, que no es muy recomendable.

### 1.2.5.2 *Procesamiento*

Dentro del procesamiento se revisa que el modelo no contenga errores de geometría, ni conflictos entre los DOF's, propiedades, cargas, etc. en el modelo. Una vez pasada esta prueba el programa realiza la matriz de rigidez, donde se conjuntan las matrices de cada elemento. En este paso no interviene el usuario, todo es realizado por el programa de FEA. Una vez realizada esta acción se tiene como resultado un archivo con toda la información para el análisis. Este archivo puede ser automáticamente analizado por algunos programas o se puede seleccionar enviarlo a otro programa o computadora de mayor capacidad, que haga más eficiente este tipo de trabajo. Una vez analizado este archivo se regresa para su lectura en el programa FEA original.

### 1.2.5.3 *Post-procesamiento*

En este paso se abre del archivo analizado en el procesamiento y se realiza la lectura de los resultados. Este paso se debe hacer en el mismo programa donde se realizó el pre-procesamiento. Usualmente estos resultados se pueden obtener en cifras dentro de tablas de resultados y también se pueden observar en del modelo mediante una tabulación de colores dentro del mismo modelo, como se muestra en la figura 1.6.



**Figura 1.6** Tabulación de colores

### 1.2.6 Los doce pasos de Champion

De acuerdo a Jr, Edward Champion, un estándar de método del elemento finito consta de doce pasos, los cuales se describen a continuación.

**Paso 1.** Definición del problema y su dominio. De acuerdo a los métodos de elemento finito, MEF, existen tres fuentes de aproximación. El primero es la definición del dominio, tanto físico como geométrico; el segundo es la discretización del dominio físico; y el tercero es la solución por algoritmos. La aproximación usada en la definición de las características físicas de diferentes regiones del dominio está bien orientada. Sin embargo, la definición geométrica del dominio requiere establecer un sistema de coordenadas global, a través del cual se tomarán coordenadas de ciertos puntos, los cuales definirán las ecuaciones de línea y superficies de los elementos a detallar. El dominio puede ser limitado o no (algunas partes se extienden hacia el infinito).

**Paso2.** Discretización del dominio. Ya que el problema es usualmente definido sobre dominio continuo, las ecuaciones que gobiernan, con excepción de las condiciones de frontera, son válidas para todo el dominio como cualquier porción. Esto permite la idealización del dominio en forma interconectada de dominio de tamaño finito de diferente tamaño y forma. La idealización del dominio deberá hacer referencia a lo siguiente: En la idealización del dominio de un elemento finito, se hace referencia a dos elementos: elementos finitos, y elementos maestros. Los elementos finitos son aquellos que al ponerlos juntos resultan de la versión discreta del dominio continuo real.

Los elementos finitos son generalmente de lados rectos, sin embargo, pueden ser curvos en los límites o superficies curvas como en las cáscaras (shells). Los elementos curvos contienen, por lo tanto, aproximaciones geométricas, además de las aproximaciones físicas. Estas aproximaciones geométricas son controladas por el número de nodos utilizados al exterior de los elementos que definen la forma. Las aproximaciones físicas son controladas por el número total de nodos, tanto interior como exterior, y son utilizadas para definir algunas funciones (funciones de forma) de la variable de estado. Los elementos maestros (master elements) son aquellos utilizados en lugar de los elementos finitos, con el propósito de facilitar los cálculos en el dominio del elemento. La definición de funciones de forma y, particularmente, la integración,

se vuelven más simples con los elementos maestros. En general, los elementos maestros son líneas rectas, triángulos rectos o prismas, cuadrados y cubos. Éstos están definidos en referencia para normalizar los ejes coordenados. De esta forma, los elementos reales pueden ser de cualquier forma y tamaño.

**Paso 3.** Identificación de variables de estado. Hasta ahora no se ha hecho énfasis en la naturaleza física del problema. Este paso consiste en la identificación del tema que se está analizando, ya que de este dependerán las variables a utilizar; estas variables son relacionadas una con otra por una ecuación constitutiva que representa una expresión matemática de una ley física.

**Paso 4.** Formulación del problema. Comúnmente un problema físico es formulado como una ecuación diferencial con condiciones límite o como una ecuación integral (funcional) sujeta a requerimientos estáticos. Mientras la ecuación diferencial puede ser aproximada sobre unos puntos discretos usando diferencias finitas, la ecuación funcional puede ser minimizada sobre dominios discretos mediante el método de elemento finito.

**Paso 5.** Estableciendo sistemas de coordenadas. Hay dos razones principales por las cuales se debe establecer un sistema de coordenadas. La primera, es la facilidad de construir las funciones de ensayo (trial functions) para los elementos, y el segundo es la facilidad de la integración dentro de los elementos. Dependiendo de la forma del elemento, se pueden escoger ejes cartesianos o curvilíneos localizados dentro del elemento de referencia y por el cual la ecuación matriz del elemento será obtenida. Una vez que los ejes coordenados están establecidos, las ecuaciones de los elementos son simplemente calculadas al elemento principal, y finalmente, transformados al sistema para ser ensamblados. Después de la solución de las ecuaciones simultáneas, la transformación inversa toma lugar para empezar a computar las entidades físicas del dominio del elemento.

**Paso 6.** Construyendo funciones aproximadas para los elementos. Ya que la variable de estado y el sistema de coordenadas local han sido seleccionados, la función se puede aproximar de muchas maneras. Solamente se necesitan dos entidades para la aproximación. Estas entidades son: la física (la variable de estado) y la geométrica (forma del elemento). En el caso de

elementos hechos de líneas rectas o planos, las coordenadas de los nodos primarios (nodos en los extremos del elemento) definirán la forma del elemento inmediatamente.

**Paso 7.** Obteniendo las ecuaciones y las matrices del elemento. Hasta este punto se asume que la formulación y discretización del dominio con las formas y dimensiones elemento deseado han sido completadas. La función aproximada está escrita en términos de funciones de forma. Esta aproximación contiene la aproximación por la variable de estado y las coordenadas para los nodos del elemento que definen la forma del elemento.

**Paso 8.** Transformaciones de coordenadas. La determinación del sistema de ecuaciones para los valores nodales, involucra la integración de funciones de forma o su derivada o ambas sobre el elemento. La integración es más sencilla de evaluar cuando la ecuación para interpolar está escrita en términos del sistema coordinado del elemento.

**Paso 9.** Ensamble de las ecuaciones del elemento. El ensamble de las ecuaciones matrices está hecho de acuerdo a una configuración topológica de los elementos, después de que esta ecuación es transformada al sistema global. El ensamble se hace de los nodos a través de las interfaces, las cuales son comunes a los elementos adyacentes.

**Paso 10.** Introducción a las condiciones de frontera. En éste paso, el conjunto completo de ecuaciones serán reducidas o condensadas a su forma final. Las condiciones de frontera esenciales son los valores preescritos de la función (o su primer derivada en el caso de ecuaciones diferenciales de cuarto orden) en la frontera.

**Paso 11.** Solución del grupo final de ecuaciones. Los métodos de elemento finito dan una solución a un conjunto de ecuaciones simultáneas. El procedimiento de solución está clasificado en: 1) directo, 2) iterativo, y 3) estocástico. La solución directa consiste en un conjunto de pasos sistemáticos y que son usados frecuentemente en soluciones de elemento finito. La certeza de los resultados es considerablemente determinada por la condición de las ecuaciones, el número de ecuaciones y la computadora. Cuando los sistemas son muy largos y de elevado orden, la técnica de iteración como la Gauss-Seidel o Jacobi son las más usadas. Estos métodos son auto-correctivos y la certeza de la solución depende del número de iteraciones. El tiempo de solución es menor que el requerido en el proceso directo.

**Paso 12.** Interpretación de resultados. Normalmente los valores resultantes son interpretados y usados para calcular otras entidades físicas, como flujo, ya sea, a través del dominio o en ciertas regiones de éste.

### **1.2.7 Ventajas y desventajas del método.**

El método de elementos finitos es muy versátil y poderoso y permite a los ingenieros obtener información del comportamiento de objetos de forma complicada bajo casi cualquier carga imaginable (carga, puntuales, de presión, térmicas, fuerza inerciales, cargas dependientes del tiempo). Permite resolver problemas en estado estable o dependiente del tiempo, lineal o no lineal. Se pueden manejar materiales especiales: no homogéneos, ortotrópicos, anisotrópicos. Se pueden además considerar efectos especiales sobre materiales: plasticidad, propiedades dependientes de temperatura. Las ramas de aplicación son variadas: mecánica de sólidos, mecánica de fluidos, electromagnetismo, biomecánica, transferencia de calor, acústica, etc. A nivel empresarial, las ventajas del método son notorias: la etapa de desarrollo de un producto se acorta, se pueden identificar problemas de diseño antes de fabricar un prototipo, se reduce las etapas de prueba y error en el diseño de un nuevo producto. La principal limitación de los métodos de elementos finitos radica en que la precisión de los resultados depende de la densidad de elementos utilizada. Se pueden producir grandes errores en el modelado es debido al uso de opciones inadecuadas del programa, o debido al uso adecuado del programa pero con datos errados.

### **1.3 Generalidades del programa ANSYS®**

ANSYS® es un programa computacional de análisis que trabaja mediante el elemento finito, utiliza un preproceso para poder crear una geometría, y para con esto utilizar rutinas de solución para discretizar y aplicar cargas a la geometría en estudio, finalmente se simulan las condiciones planeadas para dicha entidad geométrica, para así obtener un preproceso. Dicho programa diseña, desarrolla, y realiza el soporte de las soluciones que ofrece a sus usuarios para la simulación de todo el ciclo de desarrollo de producto. La herramienta simula, de forma realista y eficiente, tanto las condiciones de trabajo del diseño propuesto como el propio proceso de fabricación, cubriendo un amplio abanico de sectores industriales.

Por lo tanto el programacolabora con sus usuarios en la adquisición de productos más innovadores y de mayor calidad, que necesitan menos prototipos y ensayos para salir al mercado, lo que ofrece un retorno de la inversión por la reducción del tiempo de desarrollo. Además, los procesos de simulación y la información generada son fácilmente automatizables por lo que la trazabilidad del proceso de desarrollo queda garantizada y se minimiza el tiempo de modificaciones posteriores.El análisis del elemento finito se desarrolló primero por la industria aeroespacial para predecir la conducta de los materiales de las alas de un avión durante un vuelo. Ahora se utiliza a lo largo de casi todos los planes de diseño como en los sistemas mecánicos y las estructuras de la ingeniería civiles. ANSYS® se usa a lo largo de la industria en muchas disciplinas de la ingeniería.

### **1.3.1 Sistemas de unidades**

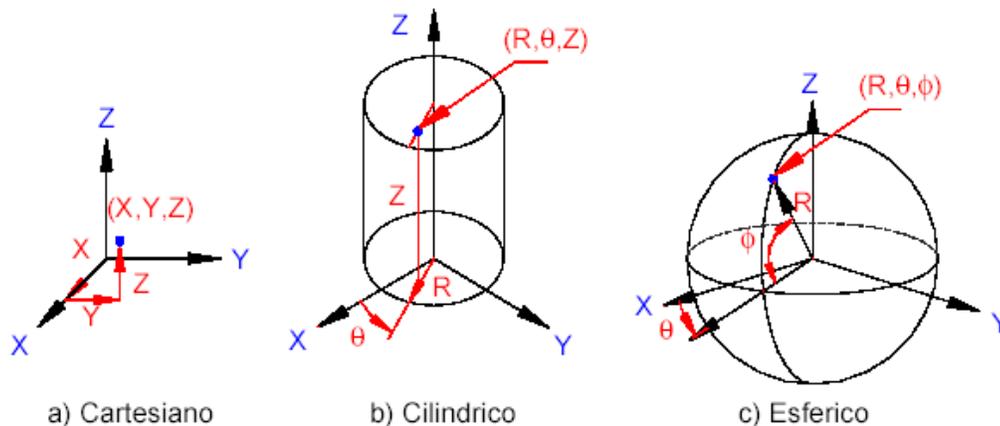
ANSYS® se basa en la utilización de tres sistemas de unidades los cuales son: Sistema Internacional de Unidades (S.I.), el Sistema Ingles de Unidades y el sistema (m,k,s). En este trabajo de tesis dentro del programa se utilizó el SI, donde las cantidades básicas de este sistema son la longitud, masa y el tiempo, y sus unidades respectivas son el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo(s). Las demás unidades son derivadas de estas unidades básicas; por ejemplo, la unidad de aceleración dividida por la unidad de tiempo al cuadrado ( $m/s^2$ ). El peso de cualquier cuerpo debe ser expresado en Newton (N), en donde un Newton es la Fuerza a la que se ve sometido un cuerpo con masa de un kilogramo sometido a una aceleración igual a la de la gravedad ( $9.81 m/s^2$ ).

### **1.3.2 Modelado de un sólido**

ANSYS® utiliza un modelo discreto para resolverá el análisis deseado. Este se construye a partir de una geometría básica (dibuja en dos o tres dimensiones).Hay tres formas de construir un modelo, ya sea construir la geometría básica y realizar el mallado con ANSYS®, construir la geometría básica en un programa CAD, exportarla y mallarla o construir la geometría y realizar el mallado en un programa CAD, e importar el modelo y mallado a ANSYS®

### 1.3.3 Sistemas de coordenadas

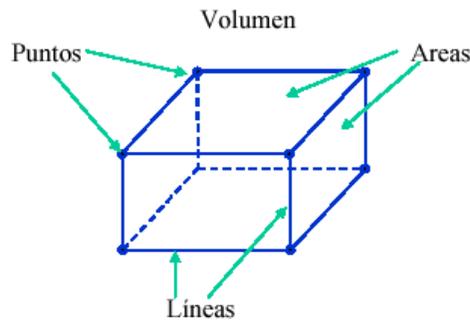
Los sistemas de coordenadas tiene cuatro funciones básicas: permiten crear geometrías con base en un sistema determinado, permiten orientar las cargas y las restricciones aplicadas sobre un hondo elemento, dan la referencia para revisar los resultados del modelo, y permiten listar las coordenadas de las entidades dibujadas. Las entidades geométricas pueden ser ubicadas y definidas en tres sistemas de coordenadas: las del plan de trabajo, las globales o un sistema local. Un sistema de referencia global puede ser visto como un marco de referencia absoluto para el espacio de modelado; este sistema global se identifica con un número, y pueden ser de tres tipos: cartesiano, cilíndrico y esférico.



**Figura 1.7** Sistemas coordenados globales

### 1.3.4 Entidades de un modelo sólido.

Un modelo sólido se construye a partir de cuatro entidades básicas: puntos, áreas, líneas y volúmenes. La Figura 1.6 presenta un ejemplo de la conformación de un volumen cúbico a partir de 6 áreas, 12 líneas y 8 puntos.

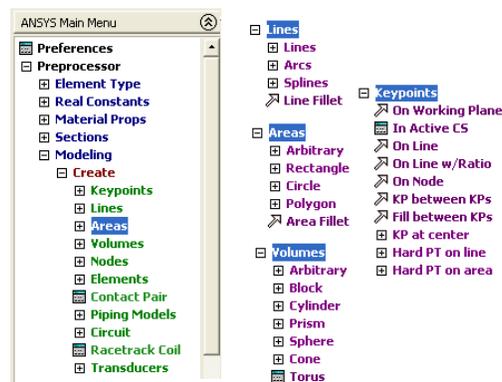


**Figura 1.8** Entidades básicas de un cubo

Estas entidades tienen un orden jerárquico: de menor a mayor, la jerarquía es puntos-líneas-áreas y volúmenes. Esta jerarquía implica que no puede borrarse una entidad si forma parte de una de un nivel superior.

### 1.3.5 Entidades primitivas

Las entidades primitivas en 2 dimensiones son básicamente de tres formas: rectángulos, círculos y polígonos. La creación de estas entidades se logran a través del menú principal, seleccionando **Preprocessor>Modeling>Create>**, lo cual lleva al menú de la Figura 3.3. En el lado izquierdo se presenta el submenú *Create*, y en la parte derecha se muestran las ventanas con las opciones disponibles para la creación de las entidades primitivas. Al crear un rectángulo se crean 4 líneas, 4 puntos y un área. Para la creación de una área de tres a más lados se puede usar la opción *Keypoints*.



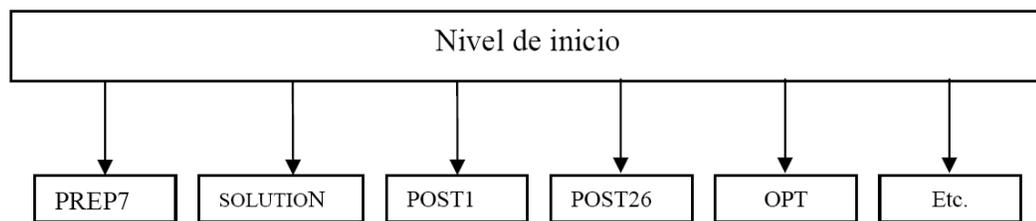
**Figura 1.9** Creación de primitivas en dos dimensiones

### 1.3.6 Operaciones booleanas.

Las operaciones booleanas permiten combinar diferentes entidades mediante operadores lógicos como adición, sustracción, etc. generalmente se permite la ejecución de operaciones booleanas sobre entidades que componen entidades de mayor orden. Estas operaciones no deben realizarse sobre entidades enmalladas.

### 1.3.7 Organización del programa ANSYS®

El programa ANSYS® tiene dos niveles básicos: el nivel de inicio y el nivel de proceso. En el nivel de inicio, se puede entrar en una de los procesos de ANSYS®, como se muestra en la Figura 1.8. Un proceso es una colección de funciones y rutinas para servir propósitos específicos.



**Figura 1.10** Organización del programa

El preproceso (**PREP7**) contiene los comandos necesarios para construir un modelo:

- Definir tipo de elementos y opciones
- Definir las constantes reales de los elementos
- Definir propiedades de los materiales
- Crear el modelo geométrico
- Definir el control del mallado
- Mallar el objeto creado

La solución de proceso que permite aplicar las condiciones de frontera y cargas. Por ejemplo, el problema estructural, el usuario puede definir desplazamiento en las condiciones de frontera y fuerzas, o para problemas de transferencia de calor se puede definir límites de temperatura o superficies de convección. Las soluciones que entrega software son:

- Para problemas estructurales: desplazamiento, fuerzas, cargas distribuidas (presión), temperaturas para expansión térmica, gravedad.
- Para problemas térmicos: temperaturas, rangos de transferencia de calor, superficies de convección, generación interna de calor.
- Para problemas de flujo de fluidos: velocidad, presión, temperaturas.
- Para problemas eléctricos: voltajes y corrientes.
- Para problemas magnéticos: potenciales, flujo magnético, densidad de corriente.

Una vez que toda la información está disponible para la solución de proceso, el programa lo resuelve por medio de una solución nodal. El postproceso (**POST1**) general contiene los comandos que permiten enlistar y desplegar los resultados de un análisis:

- Lee los datos de resultados del expediente de resultados
- Lee los datos de elementos de resultados
- Imprime los resultados
- Enlista los resultados

### **1.3.8 Base de datos y archivos de ANSYS®**

ANSYS® escribe y lee muchos archivos durante un análisis típico. La información que el usuario introduce cuando modela un problema (tipo de elemento, propiedad de material, dimensiones, geometría, etc.) es almacenado como datos de entrada. Durante la fase de solución ANSYS® computa varios resultados, tales como desplazamiento, temperatura, tensión, etc. Esta información es almacenada como datos de resultados. Los datos de entrada y resultados son almacenados en la base de datos de ANSYS®. La base de datos reside en la memoria hasta que el usuario salve los datos en una base de datos Jobname.DB. Cuando se

activa el comando RESUME\_DB, la base de datos es leída en la memoria del archivo que fue salvado más recientemente.

### **1.3.9 Archivos Log**

El archivo Log-file está escrito en ASCII, el cual es creado inmediatamente de activar un comando en ANSYS®. Cada acción tomada por el usuario es registrada secuencialmente en un archivo de formato de comandos (ANSYS Parametric Design Language –APDL-) la sintaxis para el nombre del Log-file es también guardada en un directorio de trabajo con el nombre de JOBNAME.LOG. El archivo Log-file es utilizado para que otro usuario entienda cómo se llevó a cabo un análisis o también para aprender los comandos equivalentes de las acciones realizadas dentro del modo interactivo de ANSYS® (Graphical User Interface –GUI-) [2].

En este trabajo se utiliza el archivo Log-file para mostrar los parámetros de entrada y comando realizados en el análisis probabilístico del ancla analizada, debido a las ventajas que presenta para generar subrutinas de trabajo, usando macros o programas diseñados específicamente para las necesidades de esta investigación.

# Capítulo 2

## VARIABLES ALEATORIAS Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

### 2.1 Breve descripción de las fallas en los puentes atirantados

En esta tesis se analiza el comportamiento mecánico de los esfuerzos en el anclaje superior de un puente atirantado, bajo dos condiciones; la primera un modelo ideal sin defectos, y la segunda se utiliza un modelo con pequeños defectos internos, a fin de determinar la influencia que estos tienen en el desempeño del elemento estructural.

Un puente atirantado está compuesto por muchos elementos: cimentación, pilotes de control, tablero, columnas principales, columnas secundarias, cables y anclajes superiores e inferiores que unen a los cables con la columna en caso del primero, y anclajes que unen a los cables con el tablero del puente en caso de los segundo.

Todos estos elementos están sujetos a cargas externas como tráfico vehicular, vientos, cambios de temperatura y en algunas ocasiones fuerzas sísmicas. Esto hace que ellos estén constantemente sujetos a monitoreos periódicos para determinar su comportamiento durante su tiempo de servicio; debido a que las cargas externas, antes mencionadas, pueden afectar los elementos del puente más allá de sus parámetros de diseño.

Existen otros motivos que originan fallas en los puentes atirantados, de manera general podemos decir que las fallas se deben a cuatro factores fundamentales [1]:

1. A problemas de diseño
2. A fallas en el material de constitutivo
3. A los procedimientos de construcción
4. A la operación bajo cargas externas

Estas causas de falla, generan que en los elementos estructurales existan defectos internos o externos tales como agrietamientos, porosidad e inclusiones, que pueden incrementarse y crecer debido a las cargas externas durante el servicio y provocar que el puente colapse. También las fallas pueden deberse a un mal control de calidad en el proceso constructivo (segundo y tercer tipo de falla) y/o a que no se cumplieron las especificaciones técnicas. Por último una causa de falla es originada porque se rebasan las cargas de diseño. Esto puede suceder debido a un incremento del flujo vehicular, porque se presentan vientos con velocidades mayores a las normales, debido a un sismo con intensidad mayor a la de diseño, o bien a una combinación de ellas. En este trabajo de investigación se enfoca en analizar el comportamiento estructural del elemento de anclaje superior del puente “Río Papaloapan”(ver Figura 2.1) que se encuentra ubicado en el estado de Veracruz (México), tiene una longitud de 203 m y ha estado en operación desde el año 1995.



**Figura 2.1** Puente “Río Papaloapan”

Debido a que en varias ocasiones se han presentado fallas en los cables del puente que colapsan sin motivo aparente, se desarrolló un programa de investigación para evaluar las condiciones de operación en las que se encontraba el puente y se determinó que el origen de la falla de los cables se hallaba en los anclajes superiores del puente. Esto se determinó después de realizar las inspecciones visuales, las pruebas no destructivas de líquidos penetrantes y de ultrasonido (Ver Figura 2.2 y Figura 2.3), así como pruebas destructivas por esfuerzos de tensión y tenacidad a la fractura.

Las pruebas mencionadas anteriormente fueron realizadas por investigadores del Instituto Mexicano del Transporte, quienes reportaron que las principales causas fallas identificadas en los anclajes superiores del puente fueron las siguientes [...]:

- Propiedades mecánicas deficientes del acero,
- Procesos de fabricación inadecuado,
- Composición química deficientes



**Figura 2.2** Prueba no destructiva con líquidos penetrantes para determinar defectos y porosidades



**Figura 2.3** Prueba no destructiva con resonancia magnética

## 2.2 Descripción del ancla superior

Existen tres tipos de anclaje superior en el puente Río Papaloapan, que van en relación con la ubicación del cable que sostienen. Para los efectos de nuestra investigación utilizamos el ancla número 2 (anclaje superior) debido a que en esta fue en donde se presentaron las fallas y se detectaron los defectos internos. En la Figura 2.4 se muestra un arreglo entre anclas – cables y la ubicación de estos elementos en una de las columnas principales del puente.

En la Figura 2.5 se presenta una de las anclas presentadas en la Figura 2.4 con los dibujos normalizados y sus dimensiones y detalles proporcionados por el IMT.

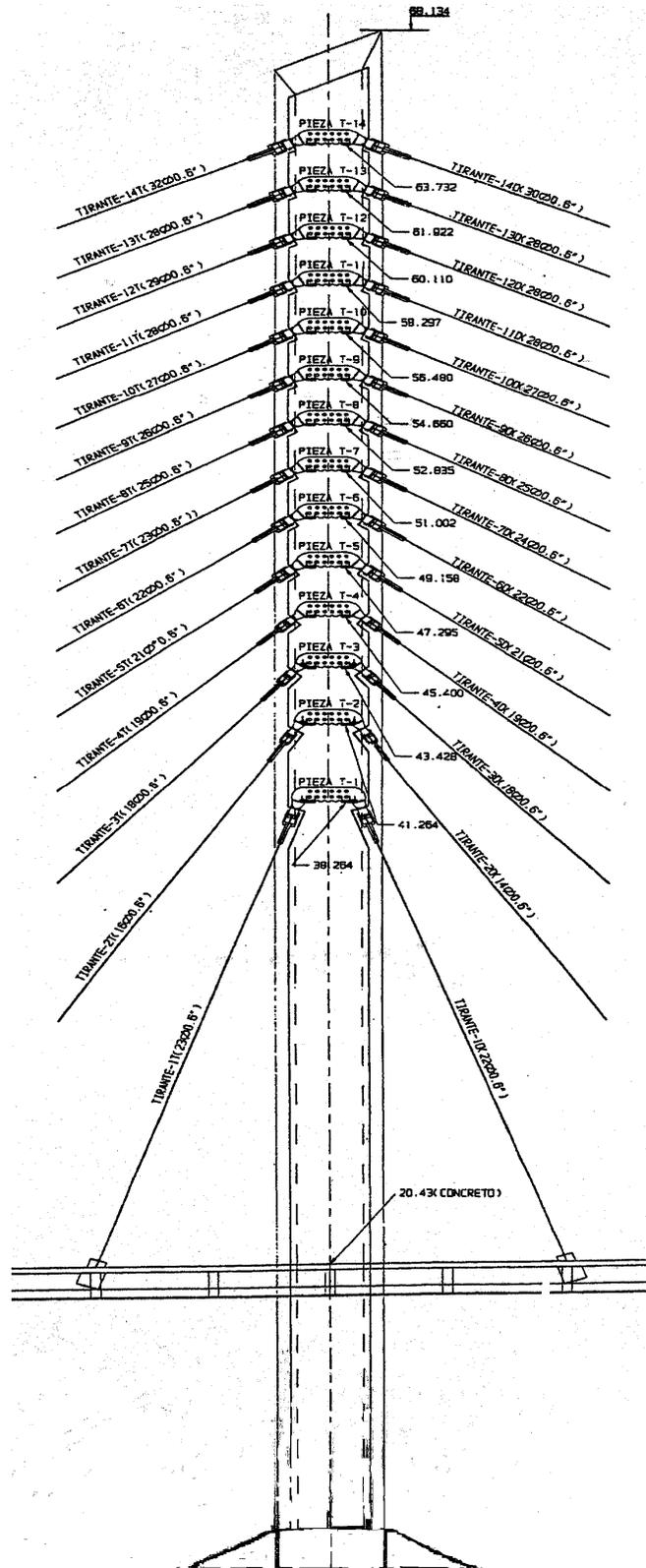


Figura 2.4 Arreglo de anclas – cables en una columna principal del puente “Río Papaloapan”.

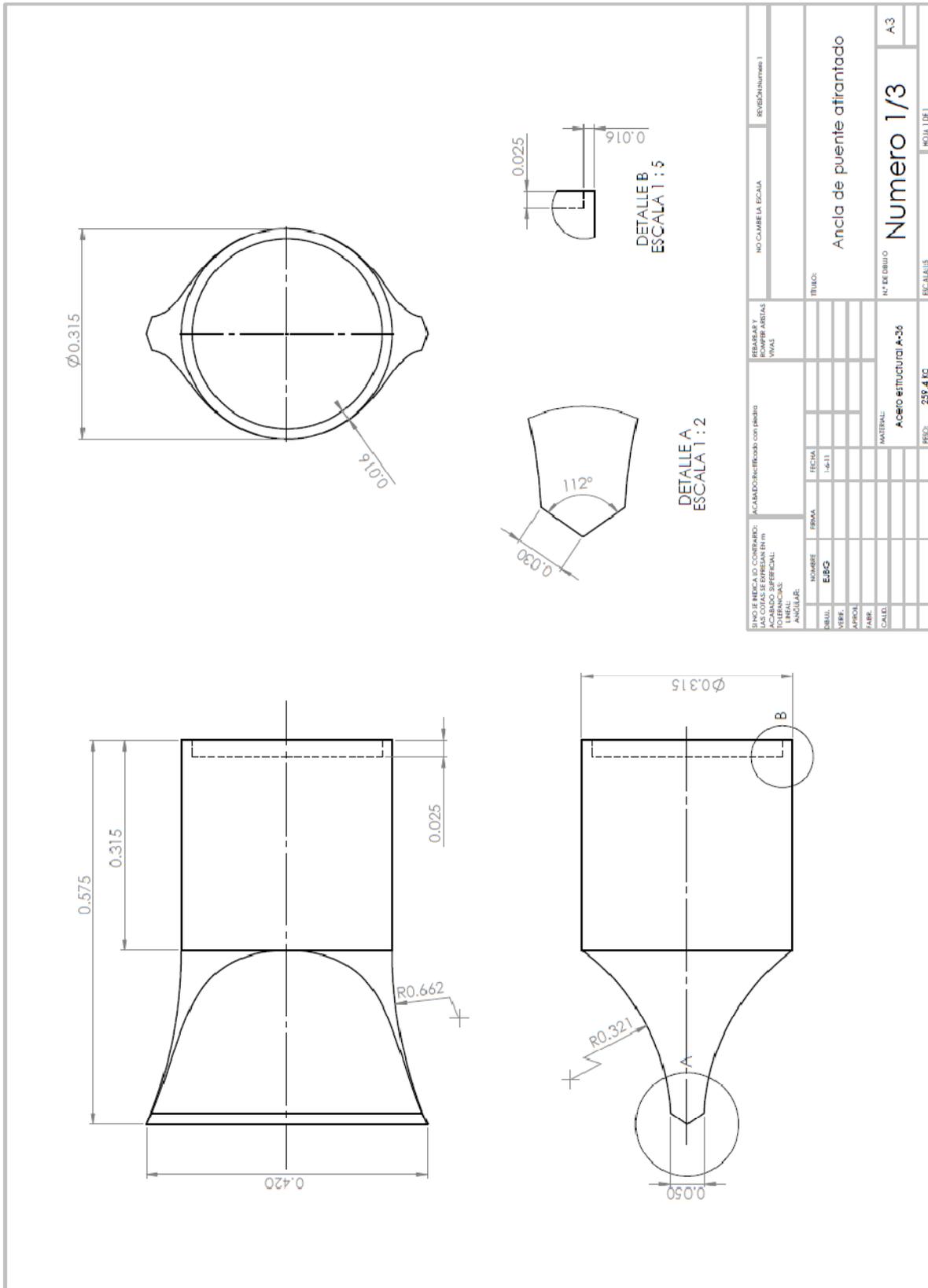
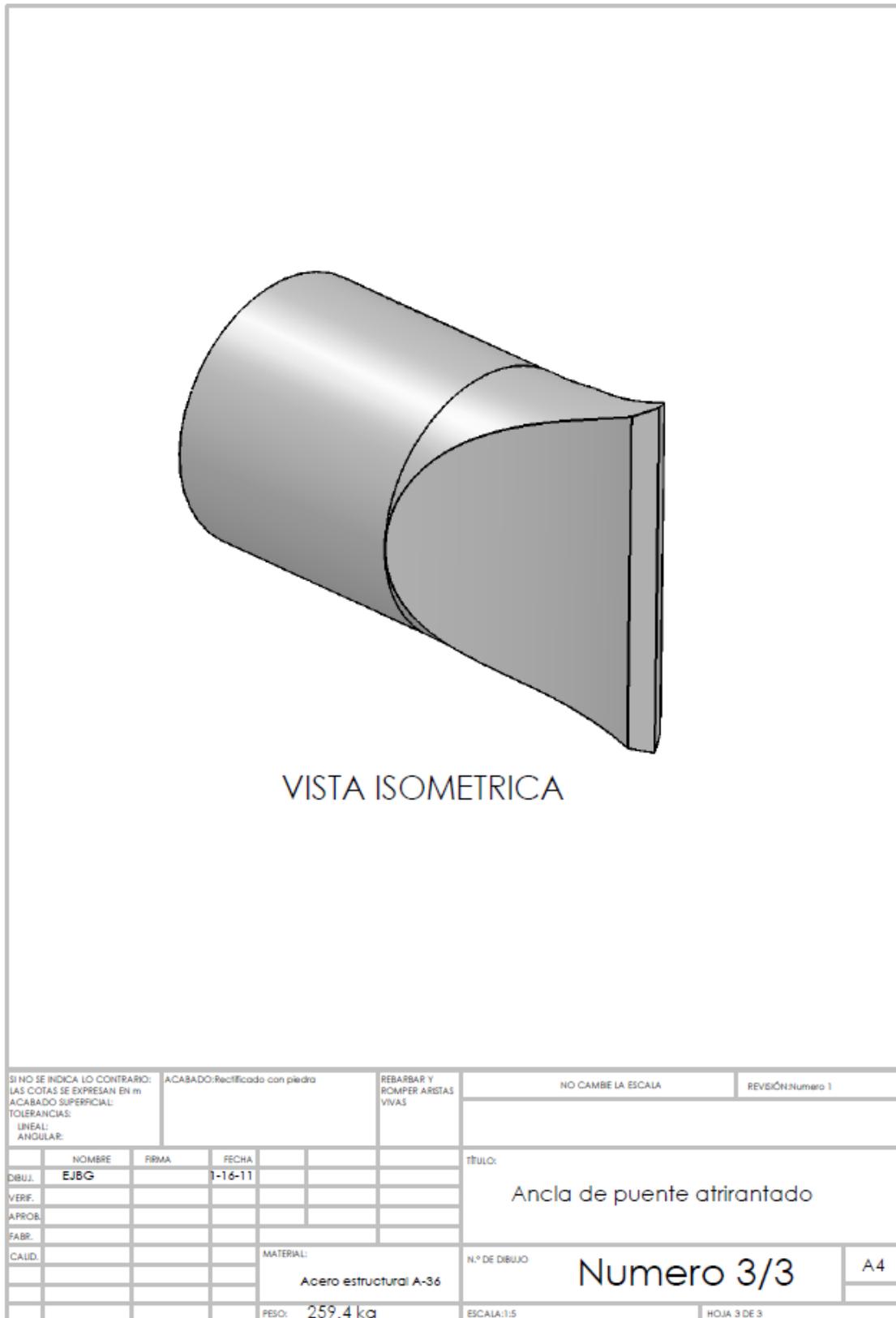


Figura 2.5 Dibujos normalizados de una ancla superior del puente “Río Papaloapan”.



**Figura 2.6** Dibujos normalizados de una ancla superior del puente“Río Papaloapan”.

Debido a que en las investigaciones realizadas por el IMT, se encontraron anclas sanas y anclas con defectos, se realizan dos tipos de análisis, el primero para cuando el ancla está operando sin defectos, mientras que el segundo análisis se realiza para cuando el ancla tiene pequeños defectos internos. Con estos análisis se determina como influyen estos defectos en el comportamiento estructuras de las anclas.

Los análisis realizados en este trabajo son probabilísticos debido a que se desea eliminar la incertidumbre que se presenta cuando se realizan análisis determinísticos, donde se obtienen resultados conservadores, típicamente haciendo suposiciones para parámetros clave, en donde para garantizar la confiabilidad estructural se introduce un parámetro de seguridad. Lo último hace que en muchas ocasiones se eleve el costo de las estructuras o éstas se hacen muy sobradas en relación con el comportamiento verdadero de la estructura. Este parámetro de seguridad se elimina al realizar un análisis probabilístico debido a que al utilizar la teoría de probabilidad estructural se obtienen resultados más realistas y precisos. Por este motivo a continuación se presentan algunos conceptos elementales de probabilidad utilizados en nuestra investigación.

## 2.3 Conceptos básicos de probabilidad

### 2.3.1 Variable aleatoria

En probabilidad y estadística, una variable aleatoria o variable estocástica es una variable cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio, es decir dependen de las circunstancias. Una variable aleatoria es una función, que asigna a los eventos (resultados de un experimento) los números reales.

Existen dos tipos de eventos simples y compuestos. Los eventos simples son tales que no pueden ser vistos como uniones de otros eventos más pequeños.

Una variable aleatoria (v.a.)  $X$  es una función real definida en el espacio muestral  $\Omega$  (el espacio de todos los eventos simples posibles  $\omega$  del experimento) asociado a un experimento aleatorio.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Es decir a cada evento simple una v.a. le asigna un número real. El rango de una v.a.  $X$  se denota por  $R_x$ , y se define como el conjunto de los valores reales que ésta puede tomar:

$$R_x = \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x\}. \quad (2.2)$$

### 2.3.2 Variable aleatoria discreta y continua.

Las variables aleatorias se clasifican en discretas, continuas y mixtas, dependiendo de la cantidad de valores que pueden tomar.

Un conjunto es discreto si está formado por un número finito de elementos, o si sus elementos se pueden enumerar en secuencia de modo que haya un primer elemento, un segundo elemento, un tercer elemento, y así sucesivamente. Una v.a. es discreta si su recorrido es un conjunto discreto. Por ejemplo, una empresa dedicada a la fabricación de componentes de vehículos, fabrica al día 1000 motores de automóviles. Definimos la v.a.  $X = \text{"número de motores defectuosos"}$ ;  $X$  puede tomar valores desde 0 hasta 1000, por lo que esta v.a. es discreta.

Una v.a. es continua, si su recorrido no es un conjunto numerable, es decir toma valores en un intervalo de números reales. Por ejemplo, la variable que mide la temperatura en una cierta ciudad del mundo es una variable continua ya que, teóricamente, puede tomar cualquier valor entre  $-60\text{ }^\circ\text{C}$  y  $60\text{ }^\circ\text{C}$ .

### 2.3.3 Función de distribución de probabilidad

Para una variable aleatoria  $X$  su *función de distribución de probabilidad* se denota por  $F_X(x)$  y se define como:

$$F_X(x) = P(X < x), x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

es decir el valor de  $F_X(x)$  es la probabilidad de que la v.a.  $X$  tome valores menores a  $x$ . Note que esta definición es válida para cualquier tipo de v.a.'s.

Además a una v.a. se le asocia su *función de densidad de probabilidad*, pero su definición depende del tipo de la v.a. Para una v.a. discreta  $X$  su *función de densidad de probabilidad* se denota por  $f_X(x)$  y se define como:

$$f_X(x) = P(X = x), x \in \mathbb{R},$$

y para una v.a.  $X$  continua su *función de densidad de probabilidad* se denota por  $f_X(x)$  y es tal que satisface:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx, x \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Note que las funciones de densidad para los dos tipos de v.a.'s tienen la misma notación, sin embargo sus interpretaciones probabilísticas son diferentes. Además una función de distribución de probabilidad de una v.a.  $X$  puede ser obtenida a partir de su función de densidad de probabilidad  $f_X(x)$  y viceversa.

De las ecuaciones (2.3) y (2.4) se sigue que:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx,$$

es decir la probabilidad de que los valores de una v.a. continua  $X$  estén en un intervalo  $(a,b)$  se calcula como la integral de "a" a "b" de su función de densidad.

Existen dos características importantes de las v.a.'s la esperanza  $E[X]$  (la media  $\mu$ ) y la varianza  $Var[X]$ .

La esperanza de una v.a. se define como:

$$E[X] = \sum_j x_j P(X = x_j),$$

si  $X$  es una v.a. discreta, y como:

$$E[X] = \int x f_X(x) dx,$$

si  $X$  es una v.a. continua. La esperanza de una v.a. describe su tendencia central, i.e. alrededor de que numero toma los valores la v.a.

La varianza de una v.a. se define como:

$$Var[X] = \sum_j (x_j - E[X])^2 P(X = x_j),$$

si  $X$  es una v.a. discreta, y como:

$$Var[X] = \int (x - E[X])^2 f_X(x) dx.$$

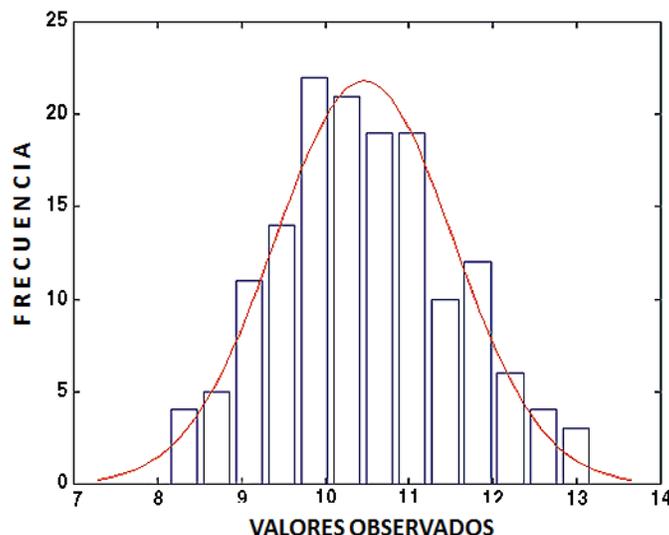
Si  $X$  es una v.a. continua. La varianza de una v.a. es una característica de la dispersión de sus valores, i.e. que tan lejos en promedio caen los valores de la v.a. del valor esperado  $E[X]$ . Para tener la medida de dispersión en las mismas unidades que la v.a.  $X$  se introduce su desviación estándar  $\sigma$  definida como:

$$\sigma = +\sqrt{Var[X]}.$$

La probabilidad de un evento está directamente relacionada con la frecuencia. Si al realizar de manera consecutiva un experimento se observa que la frecuencia de un evento tiende a una constante mientras crece el número de las repeticiones entonces esta constante (por lo general desconocida) se toma como la probabilidad del dicho evento. Por lo tanto la probabilidad de un evento es el promedio de las veces que sucede el evento al realizar el experimento una infinidad de veces. Debido a esto al realizar un experimento un cierto número de veces solo es posible aproximarse a la probabilidad teórica del evento calculando la frecuencia del evento.

En muchas ocasiones para realizar un análisis probabilístico es necesario determinar el tipo de v.a., su tipo de distribución y sus parámetros.

Para esto en el caso de las variables aleatorias continuas primero se construye un histograma del experimento y posteriormente se realiza un ajuste de distribución teórica al dicho histograma (Ver Figura 2.7).



**Figura 2.7.** Ejemplo de grafico de frecuencias

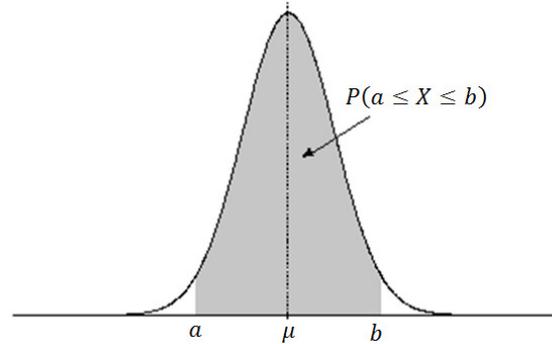
Existen distintas funciones de distribución teóricas, cada una de estas basada en un modelo de comportamiento del proceso que genere un universo de observaciones. Es decir existe un amplio espectro de patrones de comportamiento para los experimentos aleatorios y estos pueden ser descritos mediante funciones de distribución. A continuación se describen algunos tipos de distribuciones de probabilidad que se abordaran en este trabajo.

### 2.3.4 Distribución Normal

La distribución normal, (Gauss), es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua. La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. La distribución de una variable normal está completamente determinada por dos parámetros, su media y su desviación estándar y la función de densidad de una v.a.normal  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  viene dada por la ecuación:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]; \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.5)$$

Esta función tiene una forma de campana, como se muestra en la Figura 2.8.



**Figura 2.8** Distribución normal

La distribución normal posee ciertas propiedades importantes que conviene destacar:

- Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.
- La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello, cualquier valor entre  $-\infty$  y  $+\infty$  es teóricamente posible. El área total bajo la curva es, por tanto, igual a uno.
- Es simétrica con respecto a su media  $\mu$ . Según esto, para este tipo de variables existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.
- La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica ( $\sigma$ ). Cuanto mayor sea  $\sigma$ , más aplanada será la curva de la densidad.
- El área bajo la curva comprendida entre los valores situados aproximadamente a dos desviaciones estándar de la media es igual a 0.95. En concreto, existe un 95% de posibilidades de observar un valor comprendido en el intervalo  $(\mu - 1.96 \sigma, \mu + 1.96 \sigma)$ .
- La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . La media indica la posición donde está centrada la campana, de modo que para diferentes valores de  $\mu$  la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal. Por otra parte, la desviación estándar determina el grado de apuntamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de  $\sigma$ , más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más

plana. Un valor pequeño de este parámetro indica, por tanto, una gran probabilidad de obtener datos cercanos al valor medio de la distribución.

### 2.3.5 Distribución Weibull

La distribución de Weibull se aplica en los análisis de fiabilidad, para establecer, por ejemplo, el periodo de vida de un componente hasta que presenta una falla. La función de densidad de una v.a.  $X$  de Weibull es:

$$f_X(x; a, b) = abx^{b-1}e^{-ax^b}, x > 0, \quad (2.6)$$

donde  $a > 0, b > 0$ .

Cuando  $b = 1$  la distribución de Weibull se reduce a la distribución exponencial.

### 2.3.6 Teorema del límite central

Consideremos una muestra aleatoria del tamaño  $n$ , es decir  $n$  variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  independientes e idénticamente distribuidas. La media muestral de esta muestra aleatoria se define como:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Note que la media muestral también es una variable aleatoria.

Un resultado importante de la teoría de probabilidad y estadística es el Teorema del Límite Central siguiente.

**Teorema:** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria del tamaño suficientemente grande ( $n > 30$ ) tal que  $E[X_i] = \mu$  y  $Var[X_i] = \sigma^2$ , entonces se tiene que la media muestral  $\bar{X}_n$  tiene una distribución normal con la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2/n$ , i.e.

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \quad (2.7)$$

Note que el resultado del teorema anterior no depende del tipo de distribución de la muestra aleatoria, i.e. del tipo de experimento. Además se puede observar que mientras crece el tamaño de la muestra la varianza de la media muestral disminuye y tiende a cero. Esto permite estimar el valor de  $\mu$ , es decir del valor esperado teórico (en general desconocido) del experimento, con cierto nivel de confianza.

### 2.3.7 Prueba Chi-cuadrada

Supongamos que tenemos un número  $k$  de clases  $A_i, i = 1, \dots, k$ , para  $n$  observaciones registradas ( $n$  es el tamaño de la muestra). Denotaremos las **frecuencias observadas** en cada clase por  $O_1, O_2, \dots, O_k$  ( $O_i$  es el número de valores observados en la clase  $A_i$ ). Se cumple que:

$$O_1 + O_2 + \dots + O_k = n.$$

Lo que queremos es comparar las frecuencias observadas con las **frecuencias esperadas** (teóricas), a las que denotaremos por  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , para los cuales se tiene que:

$$E_1 + E_2 + \dots + E_k = n.$$

**Tabla 2.1** Frecuencias observadas y esperadas

CLASE	FRECUENCIA OBSERVADA	FRECUENCIA ESPERADA
1	$O_1$	$E_1$
2	$O_2$	$E_2$
...	...	...
$k$	$O_k$	$E_k$
<b>TOTAL</b>	$n$	$n$

Se tratará ahora de decidir si las frecuencias observadas están o no en concordancia con las frecuencias esperadas (es decir, si el número de resultados observados en cada clase corresponde aproximadamente al número esperado). Para comprobarlo, haremos uso de una prueba de hipótesis usando la distribución Chi-cuadrado:

El estadístico de prueba será

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}. \quad (2.8)$$

Observa que este valor será la suma de  $k$  números no negativos. El numerador de cada término es la diferencia entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada elevada al cuadrado. Por tanto, cuanto más cerca estén entre sí ambos valores más pequeño será el numerador, y viceversa. El denominador permite relativizar el tamaño del numerador.

Las ideas anteriores sugieren que, mientras que el valor del estadístico  $\chi^2$  sea más pequeño, más coherentes serán las observaciones obtenidas con los valores esperados. Por el contrario, valores grandes de este estadístico indicarán falta de concordancia entre las observaciones y lo esperado. En este tipo de pruebas de hipótesis se suele rechazar la hipótesis nula (los valores observados son coherentes con los esperados) cuando el estadístico es mayor que un determinado valor crítico.

Notas:

- 1) El valor del estadístico  $\chi^2$  se podrá aproximar por una distribución Chi-cuadrado cuando el tamaño muestral  $n$  sea grande ( $n > 30$ ), y todas las frecuencias esperadas sean iguales o mayores a 5 (en ocasiones deberemos agrupar varias categorías a fin de que se cumpla este requisito).
- 2) Las observaciones son obtenidas mediante muestreo aleatorio a partir de una población particionada en categorías.

Un **experimento multinomial** es la generalización de un experimento binomial:

- 1) Consiste en  $n$  pruebas idénticas e independientes.
- 2) Para cada prueba, hay un número  $k$  de resultados posibles.
- 3) Cada uno de los  $k$  posibles resultados tiene una probabilidad de ocurrencia  $p_i$  asociada  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ , la cual permanece constante durante el desarrollo del experimento.

- 4) El experimento dará lugar a un conjunto de frecuencias observadas  $(O_1, O_2, \dots, O_k)$  para cada resultado. Obviamente,  $O_1 + O_2 + \dots + O_k = n$ .

En ocasiones estaremos interesados en comparar los resultados obtenidos al realizar un experimento multinomial con los resultados esperados (teóricos). Ello nos permitirá saber si nuestro modelo teórico se ajusta bien o no a las observaciones. Para ello, recurriremos a la distribución Chi-cuadrado, la cual nos permitirá realizar una **prueba de hipótesis sobre la bondad del ajuste**.

Concretamente, usaremos el estadístico (2.8) que tiene una distribución que aproxima a  $\chi^2_{k-1}$  con  $k - 1$  grados de libertad.

Podemos calcular cada frecuencia esperada (teórica) multiplicando el número total de pruebas  $n$  por la probabilidad de ocurrencia asociada, es decir:

$$E_i = n \cdot p_i, \text{ donde } i = 1, \dots, k.$$

### EJEMPLO:

En cierta máquina Expendedora de Refrescos existen 4 canales que expiden el mismo tipo de bebida. Estamos interesados en averiguar si la elección de cualquiera de estos canales se hace de forma aleatoria o por el contrario existe algún tipo de preferencia en la selección de alguno de ellos por los consumidores.

La siguiente tabla muestra el número de bebidas vendidas en cada uno de los 4 canales durante una semana. Es necesario realizar la prueba de hipótesis de que los canales son seleccionados al azar con un nivel de confianza del 5%.

**Tabla 2.2** Bebidas consumidas

CANAL	No. BEBIDAS CONSUMIDA MEDIANTE EXPNDEDOS
1	13
2	22
3	18
4	17

**SOLUCIÓN:**

Para realizar la prueba de hipótesis debemos calcular las frecuencias esperadas de cada suceso bajo la hipótesis de uniformidad entre los valores. Si la selección del canal fuera aleatoria, todos los canales tendrían la misma probabilidad de selección y por lo tanto la frecuencia esperada de bebidas vendidas en cada uno de ellos debería ser aproximadamente la misma. Como se han vendido en total 70 refrescos, la frecuencia esperada en cada canal es:

$$E_i = n \cdot p_i = 70 \cdot \frac{1}{4} = 17.5, \text{ donde } i = 1, \dots, 4.$$

El estadístico del contraste sería:

$$\chi^2 = \frac{(13 - 17.5)^2}{17.5} + \frac{(22 - 17.5)^2}{17.5} + \frac{(18 - 17.5)^2}{17.5} + \frac{(17 - 17.5)^2}{17.5} = 2.3428$$

Este valor debemos compararlo con el valor crítico de la distribución  $\chi^2$  con  $(4 - 1) = 3$  grados de libertad, de las tablas de distribución  $\chi^2_3$  se obtiene que este valor es 7.81.

Puesto que el valor del estadístico 2.34 es menor que el valor crítico, no podemos rechazar la hipótesis de que los datos se ajustan a una distribución uniforme. Es decir, que los canales son seleccionados aleatoriamente entre los consumidores [...].

**2.4 Variables que intervienen en el análisis.**

Como ya se explicó anteriormente, para cada tipo de análisis se deberán tomar en cuenta las condiciones de operación del puente. Estas condiciones se expresan como variables de cambio, es decir que en nuestro estudio se realizaron diversos análisis (cuando el ancla tiene defectos y cuando no tiene) y en cada tipo de análisis, mediante distribuciones de probabilidad se asignaron magnitudes aleatorias correspondientes a las variables antes mencionadas. De esta manera se realizó el análisis bajo las condiciones de operación aleatorias.

Las variables de propiedades mecánicas, cargas externas en el ancla y defectos internos en el ancla se generaron en función de una distribución de probabilidad para cada tipo de análisis o prueba.

#### **2.4.1 Propiedades Mecánicas del ancla**

El elemento estructural del puente atirantado denominado anclaje superior, como se ilustra en los planos de la Figura 2.6, es una viga con geometría irregular empotrada en un extremo y en el otro está sometido a cargas externas.

El análisis estructural que se realizó es probabilístico, que toma en cuenta diferentes casos que pueden presentarse en el desempeño real del anclaje, por eso los parámetros de la resistencia del material, en este caso el Módulo de Young, fue considerado como un parámetro aleatorio que varía de acuerdo con una función de distribución dada [tesis doctoral, Didier].

La densidad del material y la Relación de Poisson son parámetros determinísticos, ya que su influencia en los análisis no afecta el comportamiento del anclaje de manera trascendental, como es el caso de Módulo de Young.

#### **2.4.2 Cargas externas en el ancla**

Las cargas externas a que está sometida el ancla en uno de sus extremos, son de dos tipos.

La primera es una carga axial, que depende del peso del tablero del puente (25000 ton) a la que se le conoce como carga muerta; éste peso está distribuido a través de los cables que sostienen al puente.

Sin embargo, debido a que por el puente circula toda clase de vehículos (esta carga adicional se le conoce como cargas vivas), a pesar de que el peso de los vehículos es muy pequeño con respecto al peso total del puente, el tráfico vehicular sí influye en la carga axial, ya que en algunas ocasiones a través del puente circula una combinación de vehículos de dos, tres, cinco, seis y nueve ejes (en la Tabla 2.1, se dan los pesos de acuerdo a los ejes de los vehículos).

La suma de la combinación de cargas vivas provocadas por el tráfico vehicular adicionadas al peso muerto que le corresponde sostener al cable, hacen que la carga axial externa no sea considerada como determinista, sino aleatoria descrita por una función de distribución normal [Tesis doctoral, Didier].

La segunda carga considerada en el extremo del puente, es una carga de compresión, que es originada netamente por el viento y que impacta de manera directa en los cables. Considerando, el impacto del viento en los cables del puente esta carga es también una carga viva, y como depende de la velocidad del viento y la velocidad del viento nunca es constante la carga de compresión externa también es un parámetro probabilístico.

**Tabla 2.3** Pesos de vehículos en el puente de acuerdo a los ejes que contienen

TIPO DE VEHICULO	CARGAS VEHICULARES POR CADA EJE, EN KILOGRAMOS									TOTAL
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
C-2	3,295	7,970								11,265
C-3	4,301	9,347	9,177							22,825
T3-S2	4,104	7,791	7,737	7,737	8,166					35,555
T3-S3	4,179	11,288	11,330	10,458	10,582	11,057				58,894
T3-S2-R4	4,298	8,771	8,553	9,150	9,191	7,562	6,877	8,845	8,481	71,728

### 2.4.3 Defectos internos en el ancla

En el análisis del ancla sin defectos la geometría en la simulación numérica es considerada continua, sin embargo, cuando se analiza al ancla con defectos la geometría contiene discontinuidades, que se originan ya sea por fabricación o por los años de servicio.

De acuerdo a las investigaciones realizadas por el Instituto Mexicano del Transporte, al realizar pruebas no destructivas y pruebas destructivas de las anclas del puente, se encontró que existían pequeños defectos internos en las anclas, que se concentraban generalmente en tres zonas (alrededor el empotre del ancla, del cilindro y de la zona de transición – véase Figura 2.9 ).

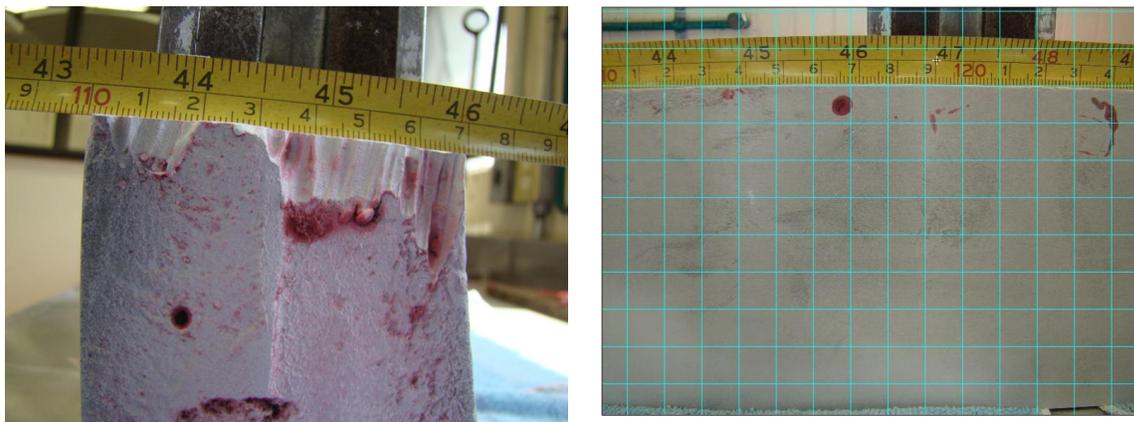
Estos pequeños defectos algunas veces eran porosidades e inclusiones no metálicas, que se caracterizaban por existir una variación en su tamaño, así como en su ubicación, y en

su número de defectos. Se analizaron 15 anclas y todas presentaban las mismas características.

Debido a esta variación del tamaño del defecto interno y la ubicación de los mismos en cada una de las zonas mencionadas éstas se consideran como aleatorios ajustados a una función de distribución que rige tanto al tamaño como a la ubicación.

Cabe mencionar que es difícil establecer un criterio para seleccionar el número de defectos que pueden estar dentro del ancla, por lo que se tomó la decisión de ubicar 50 defectos para todas las pruebas de análisis con defectos. Además existen limitaciones relacionadas con el equipo de cómputo disponible ya que los tiempos de simulación crecen exponencialmente conforme va aumentando el número de los defectos incorporados en el anclaje.

Para ser más concretos, se colocaron de manera aleatoria 20 defectos en la zona de empotramiento o de soldadura, ya que en inspecciones realizadas por el IMT, se determinó que en esta región es donde se presentaron el mayor número de defectos, mientras que para la zona cilíndrica y de transición, se colocaron 15 defectos en cada una.



**Figura 2.9** Presencia y ubicación de defectos internos después de realizar pruebas destructivas

# Capítulo 3

## ANÁLISIS DE UN ANCLAJE SUPERIOR

En este capítulo se analizará el entorno físico del problema, para establecer las condiciones para su solución, se analiza la formulación del problema por medio de la teoría del elemento finito y se también definen todas las variables probabilísticas que intervienen en los tipos de análisis (con y sin defectos) que se han planteado anteriormente.

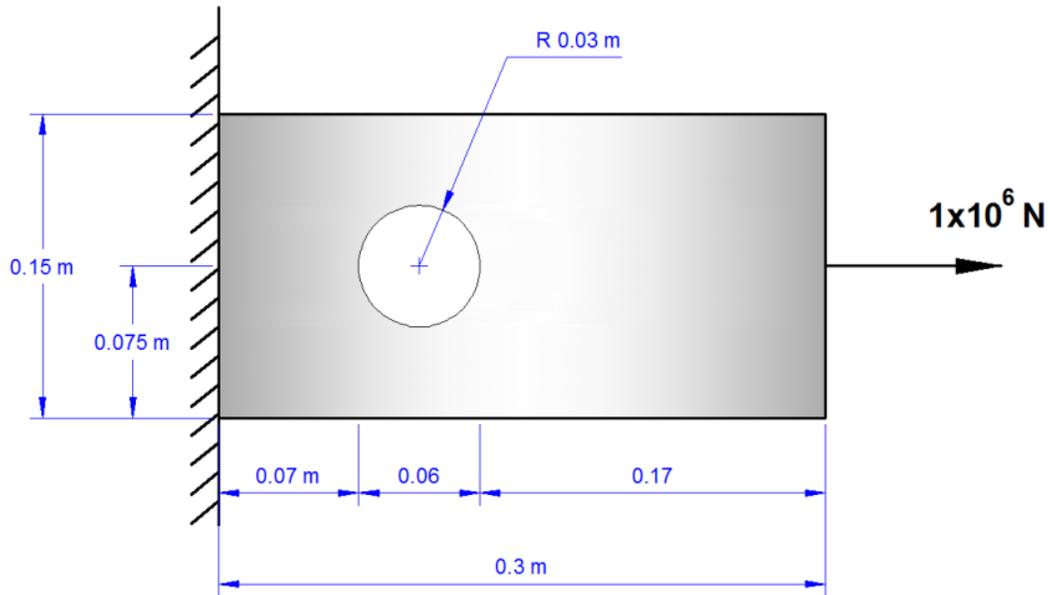
### 3.1 Formulación del ancla por el método del elemento finito.

Para realizar la simulación del ancla dentro del programa ANSYS, primero se debe definir el entorno físico del problema bajo las condiciones (fuerzas, restricciones, propiedades del material) en que opera y tomando en cuenta la teoría básica del elemento finito modelar se define un problema similar, pero de una menor complejidad.

En el siguiente ejemplo se muestra el modelado y solución mediante el método del elemento finito para una placa con un barrenado en el centro, con esto se pretende presentar una analogía para el ancla con un defecto circular en su interior.

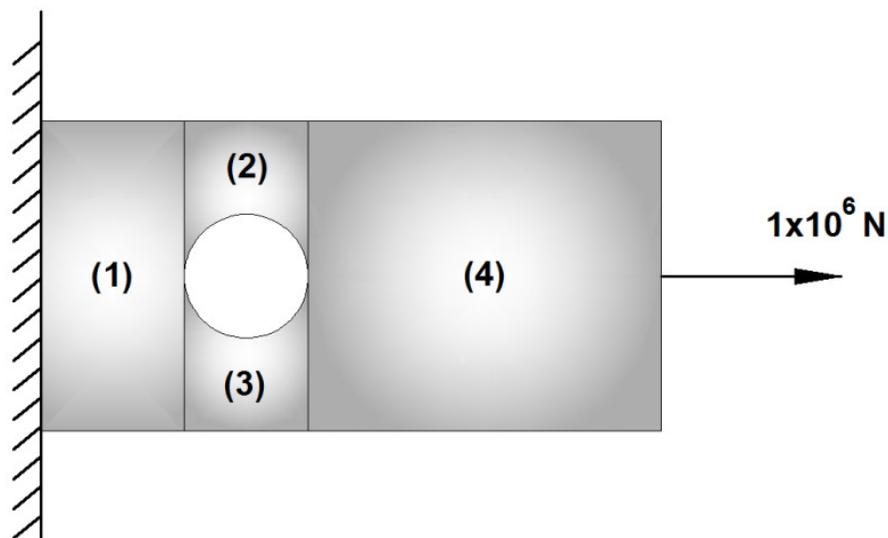
Debido a que el ancla se encuentra soldada a una de las columnas principales por su sección de transición, este modelo deberá analizarse como una viga en cantiléver sometida a una fuerza de tracción en su extremo opuesto.

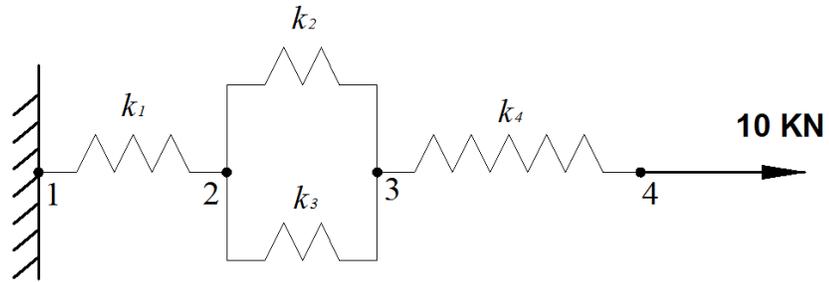
La Figura 3.1 muestra las dimensiones de la placa rectangular con un defecto en el centro de diámetro 0.06 m, con un módulo de elasticidad de  $E = 2 \times 10^{11}$  Pa. Consideramos que las deflexiones de la placa y los esfuerzos promedios están a lo largo de la placa y así se determinan los esfuerzos en cada elemento de la placa que se defina.



**Figura 3.1** Modelo analógico para el ancla superior

De acuerdo a la teoría del método del elemento finito en análisis de estructuras en dos dimensiones y con la propiedad del módulo de Young, la discretización del modelo se puede representar mediante un sistema de resortes, el cual consta de 4 nodos y 4 elementos (resortes) como se muestra en la Figura 3.2.





**Figura 3.2** Modelo analógico para el ancla superior

El paso siguiente para la resolución del problema es calcular el coeficiente de rigidez de cada elemento como se muestra a continuación.

En general la rigidez se calcula como:

$$k_n = \frac{[(A_n)(E)]}{L_n} \quad (3.1)$$

dónde:  $A_n$  = es el área del n-ésimo elemento,

$L_n$  = es la longitud del n-ésimo elemento.

El área del defecto se calcula como:

$$D = 0.06\text{m}$$

$$A_d = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 2.827 \times 10^{-3}\text{m}^2$$

Las longitudes de los elementos son las siguientes:

- La longitud del elemento 1 es:  $L_1 = 0.07\text{m}$
- La longitud del elemento 2 es:  $L_2 = 0.06\text{m}$
- La longitud del elemento 3 es:  $L_3 = L_2$

- La longitud del elemento 4 es:  $L_4 = 0.17m$

Las áreas de cada elemento son las siguientes:

- El área del elemento 1:  $A_1 = (L_1)(0.15) = 0.011m$
- El área del elemento 2:  $A_2 = (0.075)(L_2) - \left(\frac{A_d}{2}\right) = 3.086 \times 10^{-3}m$
- El área del elemento 3:  $A_3 = A_2$
- El área del elemento 4:  $A_4 = (L_4)(0.15) = 0.026m$

Con los datos geométricos se calculan las rigideces para cada elemento:

- La rigidez del elemento 1:  $k_1 = \frac{[(A_1)(E)]}{L_1} = 3 \times 10^{10} Pa m$
- La rigidez del elemento 2:  $k_2 = \frac{[(A_2)(E)]}{L_2} = 1.029 \times 10^{10} Pa m$
- La rigidez del elemento 3:  $k_3 = k_2$
- La rigidez del elemento 4:  $k_4 = \frac{[(A_4)(E)]}{L_4} = 3 \times 10^{10} Pa m$

Ahora es necesario calcular la matriz de rigidez para cada elemento y hemos de colocarla en el sistema global para cada una.

En elemento 1 la matriz de rigidez es:

$$[\mathbf{K}]^{(1)} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}.$$

En el sistema global se define como:

$$[\mathbf{K}]^{(1G)} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^{10} & -3 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ -3 \times 10^{10} & 3 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En elemento 2 la matriz de rigidez es:

$$[\mathbf{K}]^{(2)} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}.$$

En el sistema global se define como:

$$[\mathbf{K}]^{(2G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.029 \times 10^{10} & -1.029 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & -1.029 \times 10^{10} & 1.029 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El elemento 3 la matriz de rigidez es:

$$[\mathbf{K}]^{(3)} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix}.$$

En el sistema global se define como:

$$[\mathbf{K}]^{(3G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.029 \times 10^{10} & -1.029 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & -1.029 \times 10^{10} & 1.029 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El elemento 4 la matriz de rigidez es:

$$[\mathbf{K}]^{(4)} = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix}.$$

En el sistema global se define como:

$$[\mathbf{K}]^{(4G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 10^{10} & -3 \times 10^{10} \\ 0 & 0 & -3 \times 10^{10} & 3 \times 10^{10} \end{bmatrix}.$$

La matriz de rigidez global se obtiene simplemente ensamblándola o sumando las matrices de cada elemento:

$$[\mathbf{K}]^{(G)} = [\mathbf{K}]^{(1G)} + [\mathbf{K}]^{(2G)} + [\mathbf{K}]^{(3G)} + [\mathbf{K}]^{(4G)}. \quad (3.2)$$

El resultado de la suma es:

$$[\mathbf{K}]^{(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 - k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 - k_3 & k_4 + k_2 + k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]^{(G)} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^{10} & -3 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ -3 \times 10^{10} & 5.058 \times 10^{10} & -2.058 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & -2.058 \times 10^{10} & 5.058 \times 10^{10} & -3 \times 10^{10} \\ 0 & 0 & -3 \times 10^{10} & 3 \times 10^{10} \end{bmatrix}.$$

Aplicando las condiciones de frontera en la placa determinamos que el desplazamiento es igual a cero en el nodo 1 y existe una carga aplicada  $P = 1 \times 10^6 N$  en el nodo 4.

Aplicando las condiciones de frontera al sistema, se tiene lo siguiente:

$$[\mathbf{K}]^{(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 - k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 - k_3 & k_4 + k_2 + k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]^{(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 \times 10^{10} & 5.058 \times 10^{10} & -2.058 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & -2.058 \times 10^{10} & 5.058 \times 10^{10} & -3 \times 10^{10} \\ 0 & 0 & -3 \times 10^{10} & 3 \times 10^{10} \end{bmatrix}.$$

El vector de cargas se define como:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000000 \end{bmatrix}.$$

El vector de desplazamientos de acuerdo a:

$$u = \{[\mathbf{K}]^{(G)}\}^{-1} \cdot F \quad (3.3)$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3.333 \times 10^{-11} & 3.333 \times 10^{-11} & 3.333 \times 10^{-11} \\ 1 & 3.333 \times 10^{-11} & 8.194 \times 10^{-11} & 8.194 \times 10^{-11} \\ 1 & 3.333 \times 10^{-11} & 8.194 \times 10^{-11} & 1.153 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000000 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.333 \times 10^{-5} \\ 8.194 \times 10^{-5} \\ 1.153 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Los esfuerzos en los elementos se definen como:

$$\sigma_n = (E) \left( \frac{u_{n+1} - u_n}{L_n} \right) \quad (3.4)$$

- El esfuerzo en el elemento 1 es:  $\sigma_1 = (E) \left( \frac{u_1 - u_0}{L_1} \right) = 9.524 \times 10^7 Pa$
- El esfuerzo en el elemento 2 es:  $\sigma_2 = (E) \left( \frac{u_2 - u_1}{L_2} \right) = 1.68 \times 10^8 Pa$
- El esfuerzo en el elemento 3 es:  $\sigma_3 = \sigma_2 = 1.68 \times 10^8 Pa$
- El esfuerzo en el elemento 4 es:  $\sigma_4 = (E) \left( \frac{u_3 - u_2}{L_4} \right) = 3.922 \times 10^7 Pa$

Con el ejercicio anterior se demuestra que usando el método del elemento finito se pueden obtener esfuerzos para secciones de un dominio cualquiera, en el caso de esta tesis, en el ancla se realizará un análisis por elementos finitos similar al presentado anteriormente, pero las condiciones para el análisis del ancla se vuelven más complejas debido a que se tiene un modelo tridimensional y de geometría irregular (ver Figuras 2.5 y 2.6).

Para calcular la integridad estructural de un elemento del puente atirantado, primero se deben evaluar los parámetros que originan las cargas y variables involucradas en el comportamiento mecánico del ancla, quienes a su vez, están en función de otras variables, por ejemplo cargas dinámicas, propiedades del material y defectos internos, etc. Las dispersiones de estas variables están representadas por funciones de distribución de probabilidad. A continuación se deduce la magnitud y la ubicación de cada una de las variables para los análisis con y sin defectos que se desarrollaron en el programa ANSYS®.

## 3.2 Variables que intervienen en el análisis sin defectos

Para realizar el análisis sin defectos, se deben primero determinar los intervalos y magnitudes de las variables que se encuentran involucradas en este tipo de análisis, primero se mencionaran las que afectan las propiedades mecánicas y posteriormente las variables que se presentan por condiciones de operación, es decir las cargas externas. En el Capítulo 2 se encuentran expuestos los conceptos del porque intervienen estas variables.

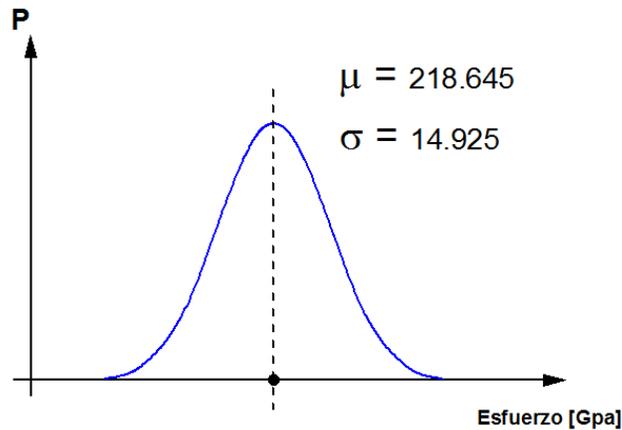
### 3.2.1 Propiedades Mecánicas del ancla

#### a) Módulo de elasticidad de Young (probabilístico)

El módulo de elasticidad se comporta de manera probabilística, es decir que para cada prueba realizada, este toma valores de acuerdo con una distribución de probabilidad, dichos valores fueron obtenidos de la Tabla 3.1 proporcionada por el IMT, de donde se obtiene el promedio del módulo de elasticidad y la desviación estándar de este. Esta tabla se utiliza únicamente para este tipo de análisis debido a que los datos presentados en la tabla se obtuvieron para las probetas sanas. En la Figura 3.3 se bosqueja la curva de densidad de probabilidad que describe el comportamiento del módulo de Young.

**Tabla 3.1** Pesos de vehículos en el puente de acuerdo a los ejes que contiene

Lote	Módulo de Elasticidad [GPa]	Esfuerzo de Cedencia $\sigma_y$ [MPa]	Esfuerzo Máximo $\sigma_{max}$ [MPa]	% Elongación	Observ.
125825	233,41 ± 29,06	464,75 ± 6,99	724,50 ± 47,08	12,91 ± 2,58	4 probetas válidas
24673	211,82 ± 3,88	417,38 ± 12,61	708,53 ± 9,37	14,48 ± 2,50	4 probetas válidas
24624	221,94 ± 21,56	421,77 ± 5,70	724,78 ± 13,04	17,16 ± 1,43	3 probetas válidas
311853	207,41 ± 5,20	435,07 ± 8,72	717,58 ± 10,43	14,64 ± 3,07	4 probetas válidas
<b>Promedio</b>	218,645±14,925	434,69±8,505			



**Figura 3.3** Curva de densidad de probabilidad para el módulo de Young en análisis sin defectos.

**b)** Densidad (determinista)

Debido a que la densidad para el análisis sin defectos se determinó como determinista, esta fue obtenida de tablas con  $\rho = 7854 \text{ kg/m}^3$ .

**c)** Relación de Poisson (determinista)

Al igual que en el caso anterior, la relación de Poisson fue establecida como determinista para este tipo de análisis mediante tablas de resistencia de materiales y se estableció una  $\nu = 0.3$ .

### 3.2.2 Cargas externas en el ancla

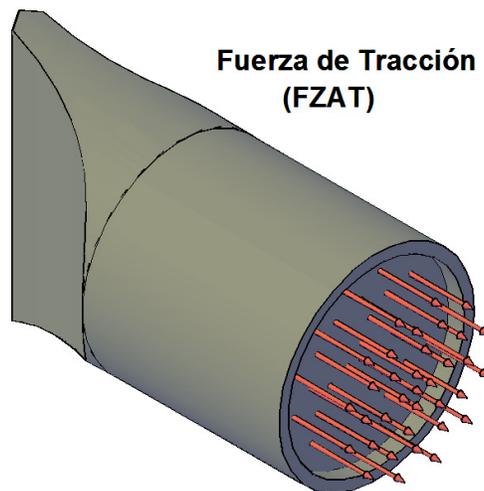
Para determinar las cargas externas se estudió, la ubicación del ancla en el puente y las fuerzas que actuaban directamente sobre ella.

Se encontró que existe una fuerza de carga axial o de tracción que es aplicada en sección posterior del cilindro del ancla. Esta fuerza corresponde a 200 toneladas debido al peso del puente y sus componentes. Como ya se mencionó en el Capítulo 2, en el puente existe flujo vehicular por lo tanto se generan variaciones en la carga axial, por lo que la fuerza de tracción es probabilística.

La fuerza del viento se determinó mediante la norma **N-PRY-CAR-6-01-004/01**, esta norma contiene los criterios generales para determinar las cargas eventuales debidas a la acción del viento, que actúan en puentes y estructuras similares, conforme al párrafo E.4.1.1.1 de la norma **N-PRY-CAR-6-01-001** de ejecución de proyectos, nuevos puentes y estructuras similares. Esta norma fue provista por el IMT. Debido a que existe una variación del viento la fuerza del viento se determinó como variable probabilística.

**a) Carga axial por tráfico vehicular (probabilístico)**

Para poder establecer a la carga axial o fuerza de tracción como una variable probabilística, debemos entender que para introducir esta fuerza dentro del software, esta deberá transformarse en una presión ya que la fuerza que deducimos como fuerza de tracción, actúa sobre una área del ancla. Dicha presión se modela como una carga distribuida uniformemente en la sección transversal del ancla, esto se puede apreciar en la Figura 3.4.



**Figura 3.4** Ubicación de Fuerza de axial o de tracción

Determinando el área de la sección transversal obtenemos:

$$A = \pi r^2 \quad (3.5)$$

$$A = \pi(0.15^2) = 0.07068 \approx 0.071$$

Realizando la conversión a Kilogramo fuerza obtenemos:

$$200 \text{ TONS} = 200000 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg}_f = 9.8066 \text{ N} = 10^{-3} \text{ tf}$$

$$20 \times 10^3 \text{ kg}_f \left( \frac{9.81 \text{ N}}{1 \text{ kg}_f} \right) = 1,962,000 \text{ N}.$$

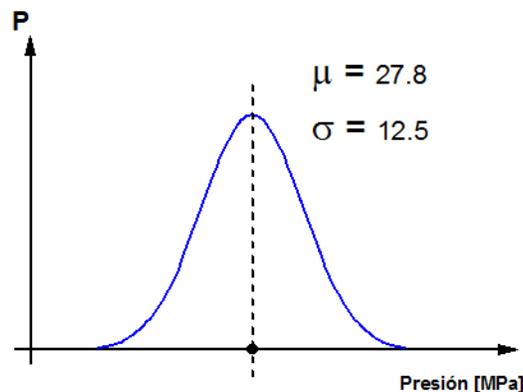
Aplicando la definición de presión, obtenemos:

$$P = \frac{F}{A} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad (3.6)$$

$$P = \frac{1,962,000 \text{ N}}{0.071 \text{ m}^2} = 27.62422 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$P \approx 27.8 \text{ MPa} \rightarrow 200 \text{ TONS}.$$

Una vez determinada de presión a la cual se encuentra sometida la región donde se ubica la fuerza de tracción, asignamos una desviación estándar en función de la Tabla 2.1, donde se presentan las condiciones del tráfico vehicular [Tesis doctoral, Didier]. En la Figura 3.5 se bosqueja la curva de densidad de probabilidad que describe el comportamiento de la fuerza de tracción.



**Figura 3.5** Curva de densidad de probabilidad para la fuerza de tracción en análisis sin defectos.

**b)** Carga lateral por viento (probabilístico)

De la norma **N-PRY-CAR-6-01-004/01**, en su fracción F.2 (presión dinámica de base) se deduce y explica un criterio para evaluar la fuerza dinámica del viento, esto es la presión perpendicular que ejerce el flujo del viento sobre una superficie de  $1 \text{ m}^2$  y se determina con la fórmula siguiente:

$$q_z = 0.049 \cdot G \cdot V_D^2 \quad (3.7)$$

dónde:  $q_z$  = Presión dinámica de base del viento a la altura  $z$  [Pa],

$V_D^2$  = Velocidad de diseño de viento, determinada como se indica F.1 [Km/h],

$G$  = Factor de corrección para la altura sobre el nivel del mar, [Adimensional] determinado como la siguiente expresión:

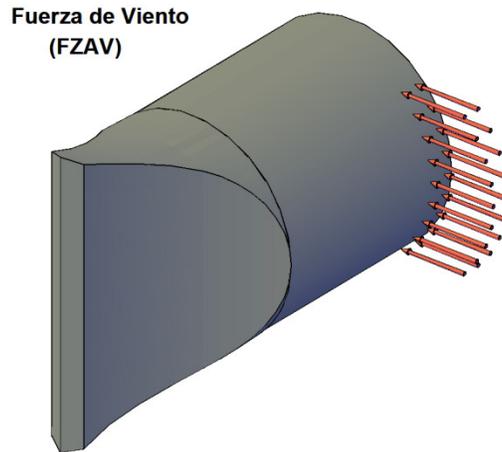
$$G = \frac{8 + h_m}{8 + 2h_m} \quad (3.8)$$

dónde:  $h_m$  = Altura sobre el nivel del mar del sitio donde se ubica la estructura [Km].

Para nuestro caso debemos tomar  $h_m = 0$  ya que el río Papaloapan se encuentra ubicado a nivel del mar. Por lo tanto el factor de corrección de altura es  $G = 1$  y se toma una velocidad de diseño de viento de 200 km/h, así obtenemos la presión dinámica de viento:

$$q_z = 0.049 \cdot 1 \cdot 200^2 = 1,960 \left[ \frac{N}{m^2} \right].$$

Con la deducción anterior, se obtuvo la presión que ejerce la velocidad del viento a 200 km/h a la altura del nivel del mar, sobre un metro cuadrado. Ahora se debe calcular el área del cable donde se somete esta presión y posteriormente determinar la fuerza que se ejerce sobre esta área para calcular la presión real aplicada al ancla como una carga distribuida sobre el extremo donde se empotra el cable, como se muestra en la Figura 3.6.



**Figura 3.6** Ubicación de Fuerza de axial o de tracción

Para determinar el área de impacto del viento sobre el cable, se sabe que este tiene un diámetro  $\phi_{cable} = 10 \text{ in} = 0.254 \text{ m}$  y una longitud  $L_{cable} = 35 \text{ m}$ , ahora podemos obtener el área como se muestra a continuación:

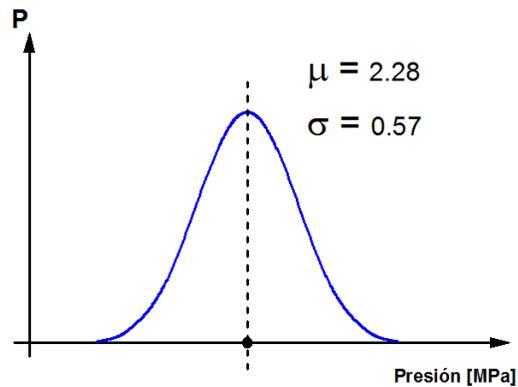
$$A = \frac{\phi_{cable} \cdot \pi}{2} \cdot L = \left( \frac{0.254 \cdot \pi}{2} \right) (35) = 13.96 \text{ m}^2 \approx 14 \text{ m}^2.$$

Por tanto ahora deducimos que la fuerza del viento ejerce sobre el cable de acuerdo:

$$P = 1960 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 14 \text{ m}^2 = 27,440 \text{ N} = 27.44 \text{ KN}.$$

El área donde se ubicara esta fuerza es de  $0.012 \text{ m}^2$  y está en la región cilíndrica del ancla, como se mostró en la Figura 3.6, por tanto la presión real ejercida en el ancla por la fuerza del viento se deduce de la fórmula (3.5). Así podemos establecer que la fuerza del viento se comporta como una variable aleatoria, que obedece a una distribución normal debido a que existen cambios de viento en todo momento. Esta curva de densidad se ilustra en la Figura 3.7. donde la media es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{27,440}{0.012} = 2.28 \text{ MPa}$$



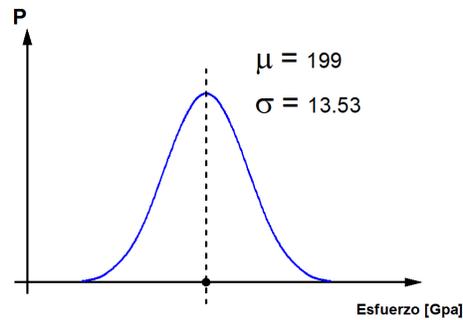
**Figura 3.7** Curva de densidad de probabilidad para la fuerza del viento en análisis sin defectos.

### 3.3 Variables que intervienen en el análisis con defectos

Las variables densidad, relación de Poisson, fuerza de tracción y fuerza de viento determinadas en la sección anterior también se utilizan para el análisis con defectos. Esto debido a que se pretende que ambos análisis conserven las variables en común para que las diferencias que se presenten entre ambos métodos de análisis, quedaran en función del módulo de Young, la posición y tamaño de los defectos. El módulo de Young, es la única variable de las propiedades que se modifica, ya que de acuerdo al IMT las propiedades físicas del ancla se modifican por la presencia de defectos. Se determinó que las propiedades del ancla con defectos tienen las siguientes propiedades:

- $E = 199 \text{ Gpa,}$
- Esfuerzo de cedencia = 312 Mpa,
- Esfuerzo último = 620 Mpa.

Como se puede observar estas propiedades son de menor magnitud que las determinadas en los estudios revisados por el IMT para anclas sanas. Estos nuevos valores se denominarán como **críticos** debido a que existe mayor probabilidad a que haya esfuerzos máximos en el ancla que se aproximen a estos valores. El módulo de Young para el análisis con defectos también se determinara como una variable aleatoria con la función de densidad presentada en la Figura 3.8 (la desviación estándar para esta variable se dedujo la Tabla 3.1).



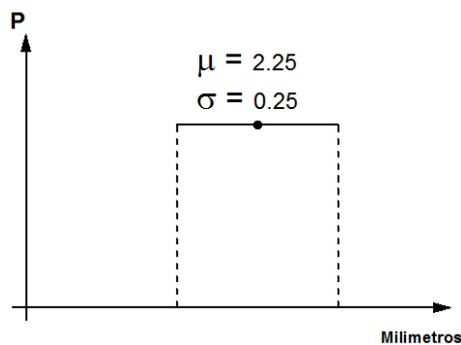
**Figura 3.8** Curva de densidad de probabilidad para la fuerza del viento en análisis con defectos.

### 3.3.1 Defectos internos en el ancla

Los defectos en el interior del ancla únicamente dependerán de dos variables: la magnitud del diámetro que tengan y la posición en la que se encuentren. Se tomaron en cuenta 50 defectos para distribuir en el interior del ancla. A continuación se explica cómo se determinó cada una de estas variables.

#### 3.3.1.1 Tamaño del defecto (aleatorio)

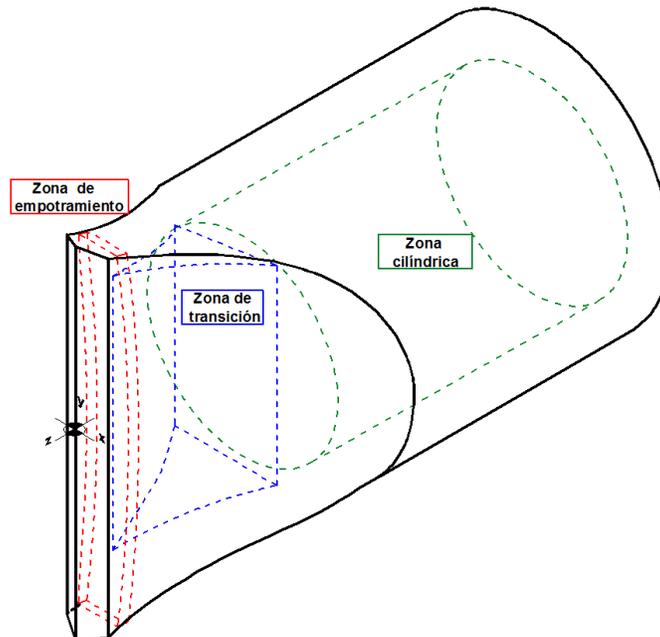
Los estudios realizados por el IMT, detectaron la presencia de defectos con un tamaño de 2 a 2.5 milímetros de diámetro en el interior del ancla, también se encontraron algunos de menor tamaño, pero estos no se tomaron en consideración debido a la complejidad de su solución en el programa de elemento finito. El tamaño es considerado como una variable aleatoria continua. En la Figura 3.9 se puede observar la función de densidad que corresponde a la variable del tamaño de los defectos.



**Figura 3.9** Curva de densidad de probabilidad para la fuerza del viento en análisis con defectos.

### 3.3.1.2 Ubicación del defecto (aleatoria)

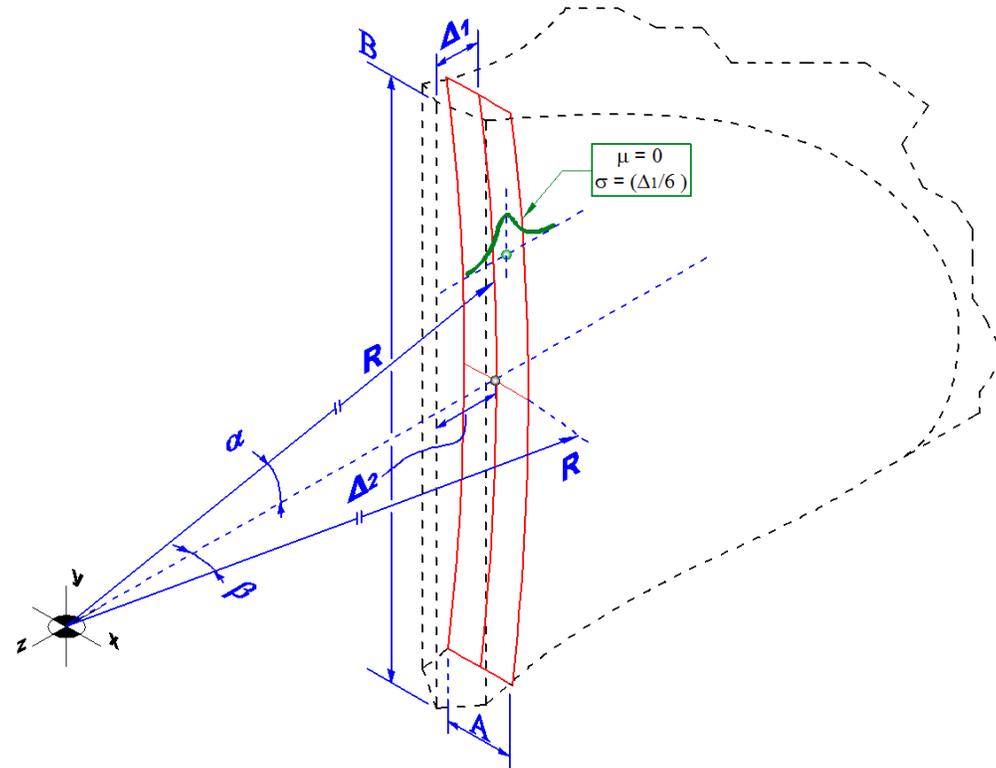
El IMT detecto tres zonas donde se ubicaron los defectos en el interior del ancla. En la Figura 3.10 se pueden observar la zona de empotramiento (color rojo), la zona transición (color azul) y la zona cilíndrica (color verde), también se muestra la posición de nuestro sistema global de coordenadas de referencia para ubicar defectos con este mismo sistema. El procedimiento para la ubicación consiste en generar de manera aleatoria adecuada las coordenadas en  $R^3$ , es decir las tres coordenadas espaciales  $(x, y, z)$ .



**Figura 3.10** Zonas de ubicación de defectos

#### a) Zona de empotre o de soldadura

En la zona de empotramiento fue donde se localizó el mayor número de defectos, debido a que en esta zona es donde se encuentra el bisel para la soldadura con la columna principal del puente. Para poder ubicar los defectos en esta zona fue necesaria una deducción geométrica que involucrara las coordenadas esféricas. En la Figura 3.11 se muestran las variables utilizadas para la deducción geométrica.



**Figura 3.11** Zonas de empotramiento

Básicamente para ubicar los defectos en esta zona, se generó un segmento de la superficie de una esfera acotada por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  tomando un radio  $R$  con el origen del sistema de coordenadas ubicado sobre el eje  $z$  a una distancia  $d$  del anclaje. Tomando a los parámetros  $(b, \Delta_1$  y  $\Delta_2)$  como conocidos, se determinó la magnitud del radio  $R$ . A continuación se obtienen las relaciones geométricas entre las variables conocidas.

Debido a que modificamos nuestro sistema de referencia para poder ubicar el centro de la esfera, debemos determinar

$$d = R - \Delta_2$$

a partir de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} \frac{b}{2} \cong R \cdot \text{sen}(\alpha) \\ (d + \Delta_1) = R \cdot \text{cos}(\alpha) \\ (d + \Delta_2) = R \end{cases} \quad (3.9)$$

Resolviendo dicho sistema se obtiene:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{2R} \\ d + \Delta_1 = R \cdot \cos(\alpha) \\ d + \Delta_2 = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \\ d + \Delta_1 = R \cdot \cos(\alpha) \\ d + \Delta_2 = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + \Delta_1 = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \\ d + \Delta_2 = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + \Delta_1 = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \\ d + \Delta_2 = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + \Delta_1 = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \\ d = R - \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow R - \Delta_2 + \Delta_1 = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2}.$$

Elevando al cuadrado las dos partes de la última ecuación obtenemos que

$$(R - \Delta_2 + \Delta_1)^2 = \left( R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \right)^2$$

$$(R - \Delta_2 + \Delta_1)^2 = R^2 - \left(\frac{Rb}{2R}\right)^2$$

$$R^2 + 2(\Delta_1 - \Delta_2)R + (\Delta_1 - \Delta_2)^2 = R^2 - \frac{b^2}{4}.$$

Por lo tanto se obtiene que el radio  $R$  puede ser calculado como:

$$R = \frac{\frac{b^2}{4} + (\Delta_1 - \Delta_2)^2}{2(\Delta_1 - \Delta_2)} \quad (3.10)$$

En nuestra rotación  $\alpha = -\theta$ ; ( $\varphi = 0$ )

$$(R \cdot \operatorname{sen}(\beta) = a/2) \Rightarrow \left( \operatorname{sen}(\beta) = \frac{a}{2R} \right),$$

es decir se obtiene que:

$$\beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{2R}\right) \quad (3.11)$$

De la primera ecuación del sistema (3.9) se deduce que:

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{b}{2R}\right) \quad (3.12)$$

A continuación se presenta la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares para ubicarlas en los ejes espaciales  $(x,y,z)$ .

$$x = R_f \cdot \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \quad (3.13)$$

$$y = R_f \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \quad (3.14)$$

$$z = \left(R_f \cdot \cos(\varphi) \cos(\theta)\right) - d \quad (3.15)$$

dónde:  $\varphi = \alpha$

$$\theta = \beta$$

$$R_f = R + \varepsilon.$$

De acuerdo con las fórmulas (3.11) y (3.12) los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se generaron de manera aleatoria de manera uniforme en los intervalos:

$$\left(-\arcsen(b/2R), \arcsen(b/2R)\right)$$

y

$$\left(-\arcsen(a/2R), \arcsen(a/2R)\right),$$

respectivamente.

El factor  $\varepsilon$  de la expresión anterior es un incremento aleatorio con distribución normal con la media 0 y desviación estándar  $(\Delta_1)/6$  (ver la región en color verde de la Figura 3.10). Dicha v.a. fue generada como

$$\varepsilon = GDIS\left(0, \frac{(\Delta_1)}{6}\right) \quad (3.16)$$

Dónde:  $GDIS$  = función de densidad de probabilidad normal, con  $\mu = 0$  y  $\sigma = \frac{\Delta_1}{6}$

Posteriormente para poder ubicar el defecto adentro del anclaje se debe restar la distancia comod  $= R - \Delta_2$ .

De esta manera podemos asignar adecuadamente las posiciones con coordenadas rectangulares en el interior del ancla en la zona de empotre. Para poder ubicar 20 defectos con posiciones diferentes en esta zona, se deberá construir mediante programación un "loop" que realice 20 veces el paso anterior.

### b) Zona de transición

Para colocar los defectos en la zona de transición del ancla, se deberán definir algunas variables dimensionales del ancla para poder determinar conceptos y deducciones geométricas que nos permitan ubicar los defectos. En la Figura 3.12 se presenta a detalle la geometría de esta zona de transición en el plano  $(x,z)$  a una altura de  $y = 0$ .

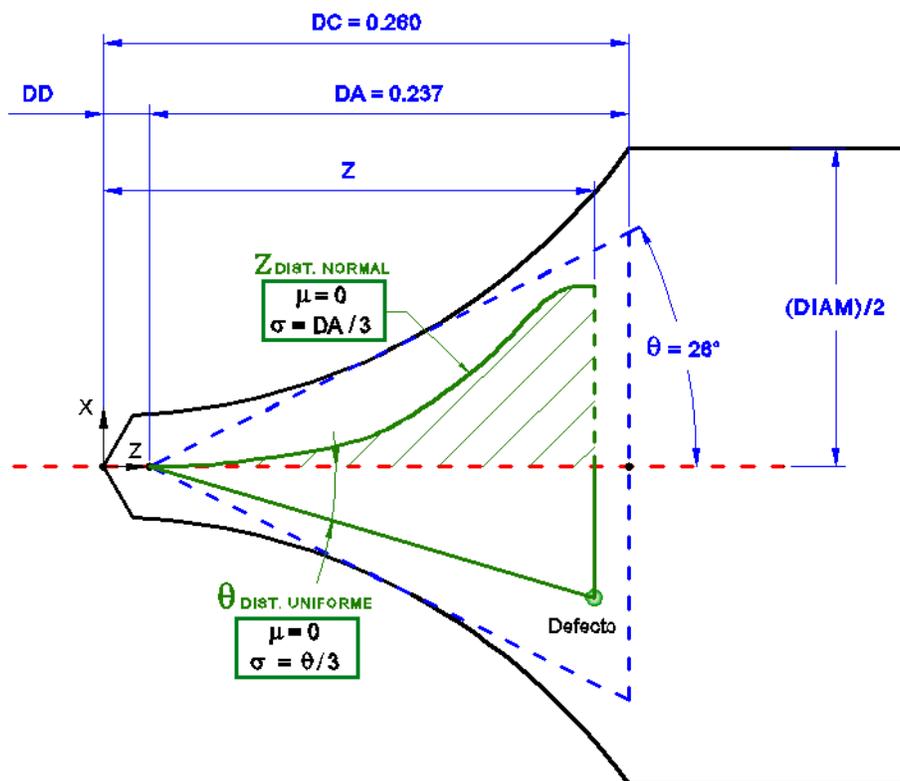


Figura 3.12 Zona de Transición

Para poder ubicar un defecto como el que se presenta en la Figura 3.12, primero se asigna la coordenada  $z$ , esta coordenada depende de la función de densidad de probabilidad normal, la cual deberá presentar las características que muestra la figura anterior. Los defectos tienen mayor probabilidad de tener su coordenada  $z$  a mayor distancia de la zona de empotramiento. Esto se logra restando a la distancia  $DC$ , el valor absoluto de la distribución normal asignada a  $z$ , es decir:

$$z = DC - \left| GDIS \left( 0, \frac{DA}{3} \right) \right| \quad (3.17)$$

dónde  $GDIS$  es la función de densidad de probabilidad normal, con  $\mu = 0$  y  $\sigma = \frac{DA}{3}$ .

Para determinar la posición  $x$ , se debe tomar en cuenta que esta se encuentra en función del ángulo  $\theta_D$ , dónde el ángulo toma valores de acuerdo con una función de densidad de probabilidad normal siguiente:

$$\theta_D = GDIS \left( 0, \frac{\theta}{3} \right) \quad (3.18)$$

dónde  $\theta = 26^\circ$ , y  $GDIS$  es la función de densidad de probabilidad normal con  $\mu = 0$ ,  $\sigma = \frac{\theta}{3}$ .

Finalmente se determina la posición  $x$ , mediante el teorema de Pitágoras, con la coordenada  $z$  y tomando en cuenta la posición donde se ubica el inicio del ángulo

$$x = \tan(\theta_D) \cdot (z - DD). \quad (3.19)$$

dónde  $DD = DC - DA$

Para terminar la coordenada  $y$ , debemos utilizar una función de densidad de probabilidad normal, con una  $\mu = 0$ , debido a que  $y$  puede tomar valores positivos y negativos, y con una  $\sigma = \frac{DIAM}{6}$ , como se muestra a continuación.

$$y = GDIS \left( 0, \frac{DIAM}{6} \right) \quad (3.20)$$

dónde  $GDIS$  es la función de densidad de probabilidad normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = \frac{DIAM}{6}$ .

De acuerdo con las ecuaciones (3.19), (3.20) y (3.17) es posible ahora asignar posiciones  $(x, y, z)$  en el interior del ancla en la zona de transición. Para poder asignar 15 defectos con posiciones diferentes en esta zona, se debe programar un “loop” que asigne en cada ciclo una magnitud para las coordenadas  $(x, y, z)$  de acuerdo con las fórmulas (3.19), (3.20) y (3.17), así se aseguraría que existirán posiciones diferentes de defectos en esta región.

### c) Zona cilíndrica

Para definir las coordenadas de los defectos en la zona cilíndrica, se debe trabajar con coordenadas polares, es decir seleccionar un radio  $R$  y un ángulo  $\phi$ . Los valores de  $R$  se determinan mediante una función de distribución normal y para asignar los valores del ángulo  $\phi$  se utiliza una distribución uniforme. Posteriormente se utiliza la transformación de coordenadas en las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Finalmente para determinar la coordenada  $z$  se utiliza una función de distribución uniforme. En la Figura 3.13 se muestran las coordenadas polares y las formas de cada función de densidad utilizadas.

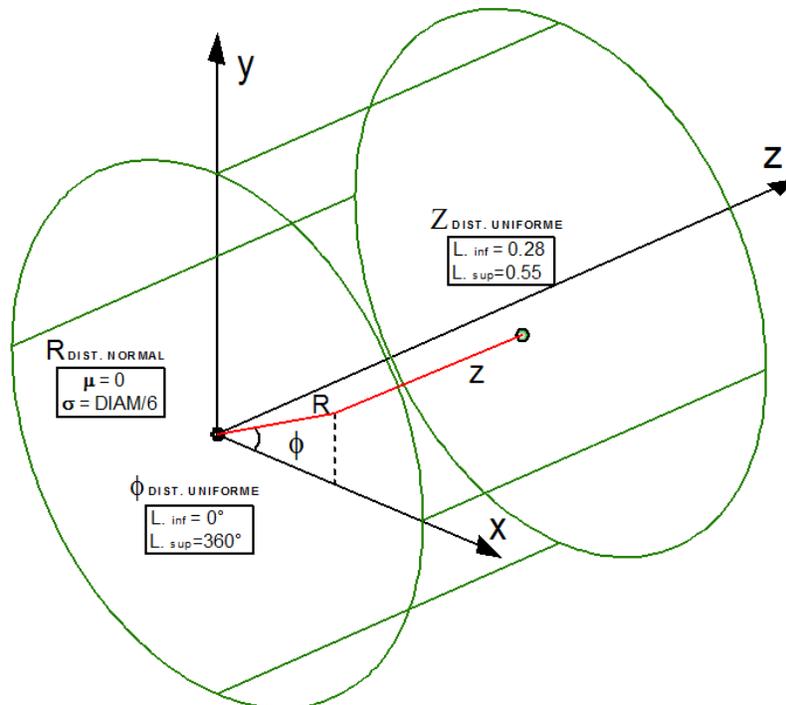


Figura 3.13 Zona Cilíndrica

Como ya se mencionó anteriormente el radio  $R$  se determina mediante una función de densidad normal de la forma:

$$R = GDIS\left(0, \frac{DIAM}{6}\right) \quad (3.21)$$

dónde  $GDIS$  es la función de densidad de probabilidad normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = \frac{DIAM}{6}$ .

El ángulo  $\phi$  de las coordenadas polares se genera utilizando la distribución uniforme como:

$$\phi = RAND(0, 360^\circ) \quad (3.22)$$

dónde  $RAND$  es la función de densidad de probabilidad uniforme con  $L_{inf}=0$  y  $L_{sup}= 360^\circ$ .

Ahora mediante la transformación de coordenadas se determinan  $x$  y  $y$  como:

$$x = R \cdot \cos(\phi) \quad (3.23)$$

$$y = R \cdot \text{sen}(\phi) \quad (3.24)$$

Finalmente para determinar la ubicación de la coordenada  $z$  utilizamos una función de densidad de probabilidad con las siguientes características

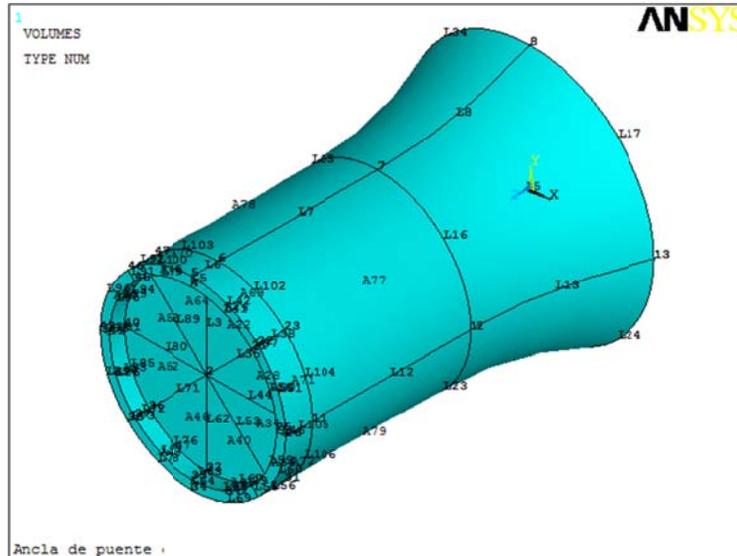
$$z = RAND(0.28, 0.55) \quad (3.25)$$

dónde  $RAND$  es la función de densidad de probabilidad uniforme con  $L_{inf}=0.28$  y  $L_{sup} = 0.55$ .

De acuerdo con las ecuaciones (3.22) – (3.25) es posible asignar posiciones en el interior del ancla en la zona de cilíndrica. Para poder asignar 15 defectos con posiciones diferentes esta zona, se deberá programar un “loop” que asigne una en cada ciclo una los valores para  $(x, y, z)$  de acuerdo con las ecuaciones (3.22) – (3.25) y de esta manera se aseguraría que existirán posiciones diferentes para cada defecto.

Ahora que se han establecido los conceptos de distribución de defectos para cada zona de ubicación, estos pueden desarrollarse dentro del programa ANSYS®.

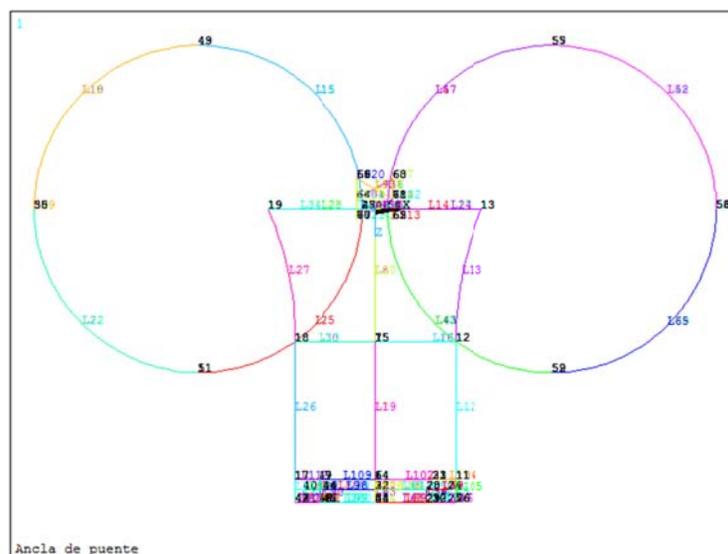




**Figura 4.2** Volumen de perfil principal

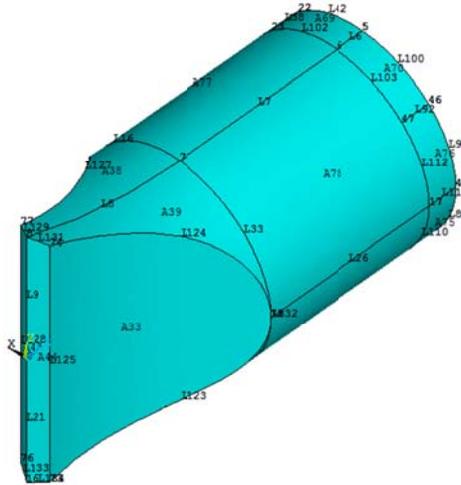
Una vez que se ha generado el perfil general, se construyó la zona del transición entre el zona cilíndrica y la zona del empotre del anclaje mediante dos cilindros laterales ubicados a un radio de 0.6 m.

También se debe general el bisel donde se colocara la soldadura para unir el ancla con la columna principal. El bisel se construyó con dos prismas triangulares equiláteros ubicado en el centro del sistema global de unidades. En la figura 4.3 se observa la vista superior del anclaje con los elementos a substraer del volumen.



**Figura 4.3** Elementos a substraer del perfil general el ancla.

Al aplicar las operaciones booleana de sustracción para los cilindros y los prismas triangulares sobre el volumen del anclaje finalmente se obtiene el modelo geométrico del ancla dentro del programa ANSYS®, como se muestra en la Figura 4.4.



**Figura 4.4** Modelado geométrico del en el programa ANSYS®

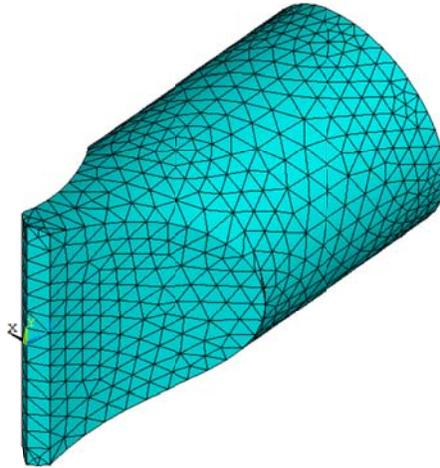
El modelo que se ha geométrico construido, se utilizó para ambos análisis. En el análisis sin defectos este será el modelo final, mientras que para el análisis con defectos se necesita sustraer los defectos internos.

## 4.2 Análisis sin defectos

De acuerdo a la teoría del método del elemento finito, una vez generada la geometría se debe realizar la Discretización de ella y después se deben aplicar las condiciones de frontera, para proceder posteriormente con la solución.

### 4.2.1 Discretización del modelo sin defectos

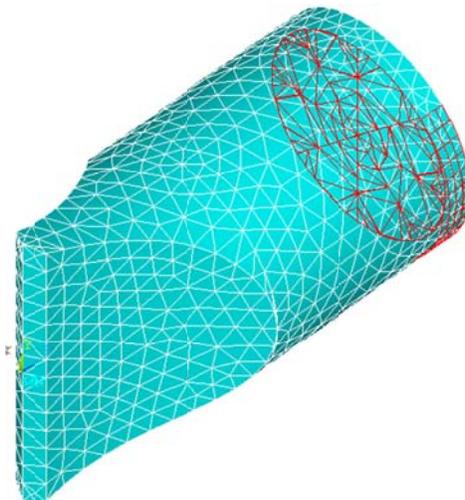
Para realizar la discretización de la geometría del ancla se asignó un elemento *SOLID92*. Este elemento es prismático de 8 nodos y tiene la propiedad de calcular desplazamientos, esfuerzos y deformaciones, en la Figura 4.5 se muestra la discretización del ancla, donde la malla cuenta con 17244 nodos y 11031 elementos.



**Figura 4.5** Discretización del anclaje para análisis sin defectos

#### 4.2.2 Condiciones de frontera sin defectos

Las condiciones de frontera y las propiedades del material, son las variables aleatorias y las variables deterministas, determinadas en el Capítulo 3. Como variables aleatorias, se definió para este tipo de análisis el módulo de Young, la fuerza de tráfico vehicular (tracción) y la fuerza que ejerce el viento y para variables deterministas la relación de Poisson y la densidad del material del ancla. En la Figura 4.6, se observa como el programa ANSYS®, ubica estas fuerzas de acuerdo a las deducciones mostradas en el capítulo 2.

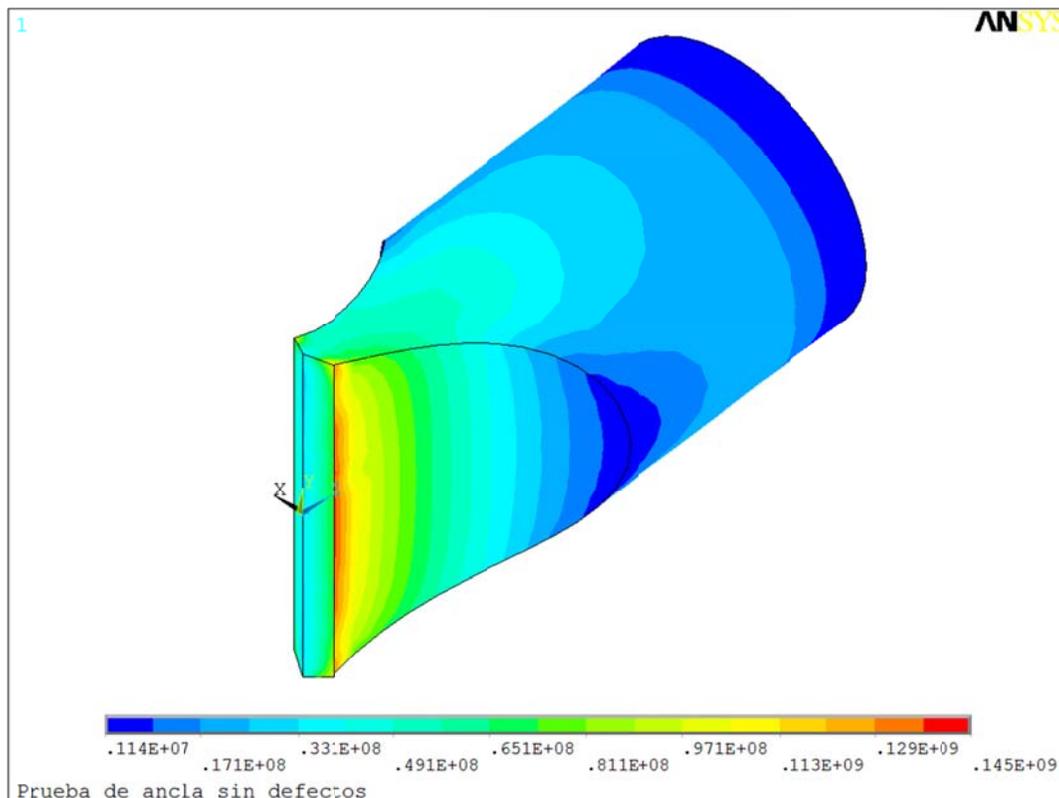


**Figura 4.6** Condiciones de frontera en el anclaje para análisis sin defectos

### 4.2.3 Resultados de un análisis sin defectos

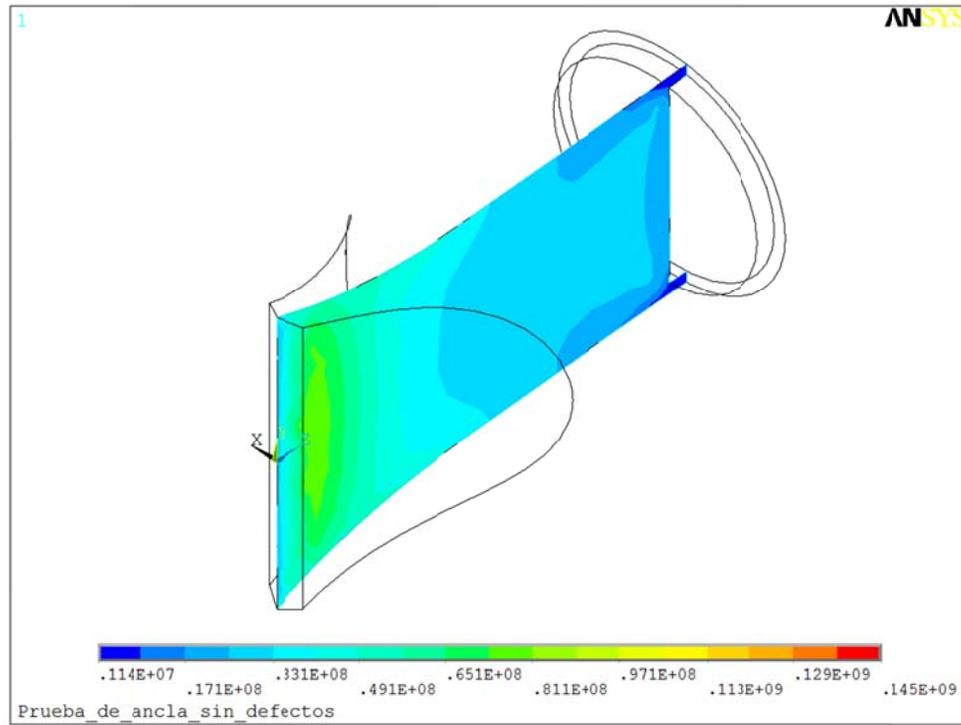
Finalmente después de crear la geometría del ancla, de haber discretizado y aplicar las condiciones de frontera y las propiedades del material, se procede a solucionar el problema planteado. Los resultados obtenidos, muestran la distribución de esfuerzos en el anclaje, de acuerdo a las variables aleatorias y deterministas que se aplicaron.

Los campos de esfuerzos se muestran mediante bandas de colores sobre las superficies del ancla, y se puede identificar su magnitud mediante una escala que asocia colores con magnitudes de esfuerzo. En la figura 4.7 se observa el ancla con las distribuciones de esfuerzos correspondientes.

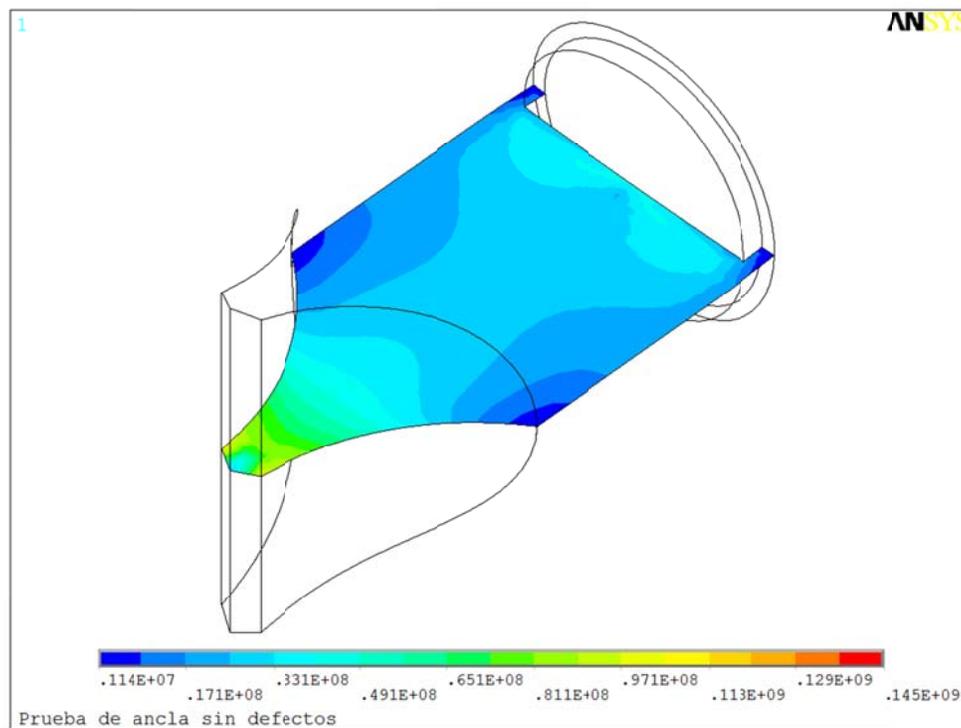


**Figura 4.7** Distribución de esfuerzos en el anclaje.

La versatilidad del programa ANSYS®, nos permite observar las distribuciones en el interior del ancla, realizando cortes transversales. En la Figura 4.8 se observa un corte transversal lateral en el ancla sobre el sistema global de coordenadas. En la Figura 4.9 se muestra un corte trasversal superior sobre el sistema global de coordenadas.



**Figura 4.8** Corte transversal lateral sobre el ancla.



**Figura 4.9** Corte transversal superior sobre el ancla.

Los resultados mostrados en la Figuras 4.7, 4.8 y 4.9, son visualmente descriptivos, ya que nos permite ubicar las zonas donde hay concentraciones de esfuerzos máximos, está en color rojo y para concertaciones con es esfuerzos mínimos se asigna el color azul, para las magnitudes intermedias de esfuerzos se utiliza una degradación de colores.

De acuerdo a el planteamiento de este trabajo de investigación, el resultado que se espera determinar en cada prueba realiza, es encontrar cual es el esfuerzo máximo registrado, para se utilizó una herramienta del programa llamada *NSORT* que organiza todas las magnitudes de esfuerzos registradas y nos devuelve la mayor magnitud.

Todo el procedimiento que se realizó anteriormente, contempla únicamente una sola prueba, recordemos que todos los pasos anteriores se incluyeron dentro de "Loop". De esta manera se pudieron establecer corridas (tamaño de muestra) para 50, 100 y 250 pruebas. Por tanto nuestro resultado más significativo es obtener el esfuerzo máximo de cada prueba y así obtener un historial del comportamiento de los esfuerzos en función de las variables probabilísticas y deterministas. El historial para cada tamaño de muestra de este tipo de análisis se presenta en el Anexo A.

El análisis sin defectos se elaboró mediante la herramienta *LOG FILE*, esta permite realizar algoritmos con secuencias de comando, de esta manera se agiliza el proceso de análisis para distintos tamaños de muestra. El algoritmo completo en *Log File* de este tipo de análisis se puede observar en el Anexo B.

### **4.3 Análisis con defectos**

Para realizar un análisis con defectos en el interior del ancla se utilizara el mismo modelo geométrico que para un análisis sin defectos.

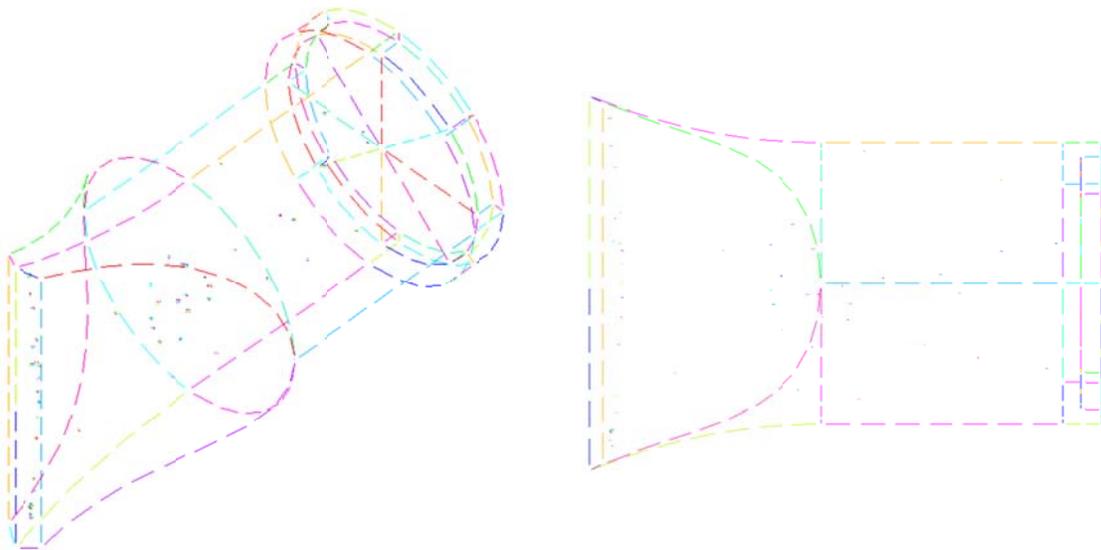
#### **4.2.1 Discretizacion del modelo con defectos**

Para poder realizar la discretizacion del ancla en este tipo de análisis primero debemos ubicar los defectos en las zonas de empotramiento, transición y cilindro.

Los defectos se consideraron como esferas con un tamaño variable de 2 a 2.5 milímetros de diámetro, mediante la herramienta *SPH4* del programa. Cada defecto se generaba en el origen del sistema de coordenadas global y mediante las deducciones de posición desarrolladas en el Capítulo 3, se ubicaban para cada zona. Posterior a la ubicación las esferas como defectos, estos se substrajeron del modelo geométrico de la Figura 4.4.

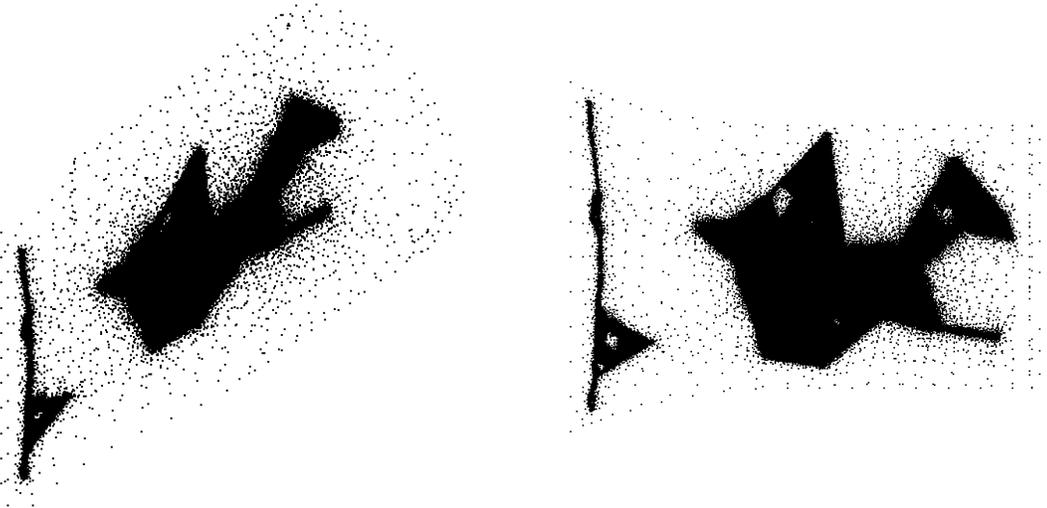
Como ya se mencionó anteriormente este análisis se desarrolló mediante la herramienta *LOG FILE* donde se realizó un algoritmo para cada ubicar los defectos en cada zona. En el Anexo C se observan los diagramas de flujo que se siguieron para ubicar los defectos cada zona y así agregarlos dentro del *Log File*.

En la Figura 4.10 se presentan por medio de líneas la ubicación de los defectos en el interior del anclaje.



**Figura 4.9** Ubicación de 50 defectos en el interior del anclaje

Después de tener los defectos substráidos en el modelo del anclaje, se procede a la discretización esta se realizó con elemento *SOLID92*. Este elemento es prismático de 8 nodos y tiene la propiedad de calcular desplazamientos, esfuerzos y deformaciones, en la Figura 4.10 se muestra la discretización del ancla, donde la malla cuenta con 205739 nodos y 168496 elementos. Debido a que no es posible visualizar la discretización en el interior del anclaje, esta se presenta mediante la visualización de los nodos.



**Figura 4.10** Discretización del anclaje para análisis con defectos

Con la Figura 4.10 podemos comprobar que la distribución de nuestros nodos es correcta ya que existe una concentración de nodos en las zonas de ubicación.

#### **4.2.2 Condiciones de frontera con defectos**

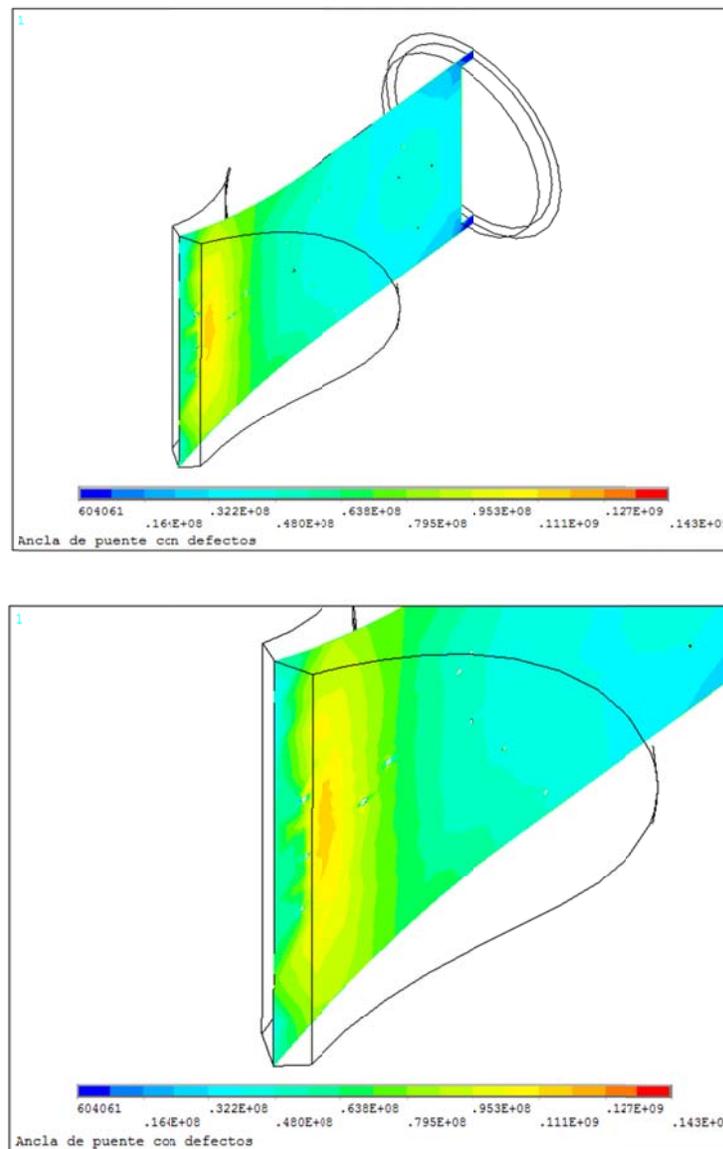
Al igual que en análisis sin defectos se mantienen constantes las variables aleatorias probabilistas (módulo de Young, Fuerza de tracción, fuerza de viento) y deterministas (relación de Poisson, Densidad).

#### **4.3.3 Resultados de un análisis con defectos**

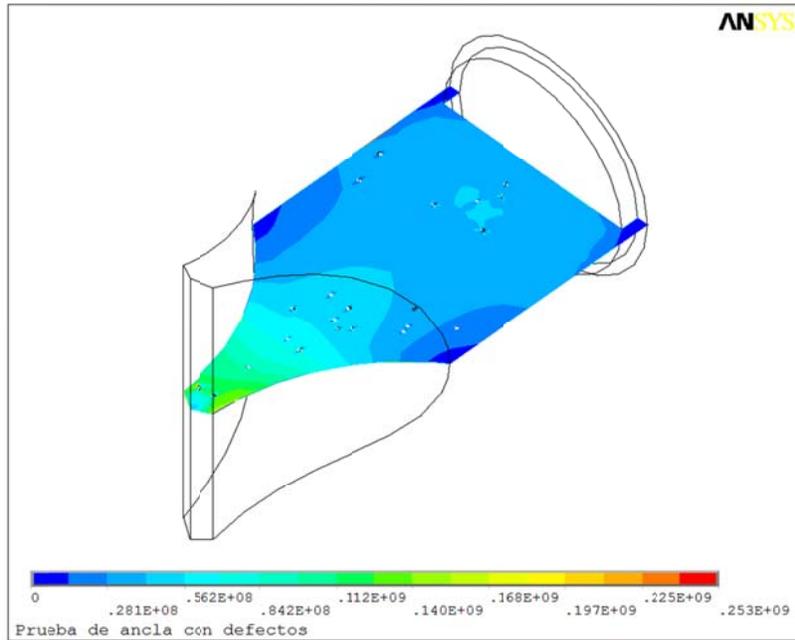
Finalmente después de crear la geometría del ancla, de haber discretizado y aplicar las condiciones de frontera y las propiedades del material, se procede a solucionar el problema planteado. Los resultados obtenidos al igual que en el análisis con defectos se muestran la distribución de esfuerzos en el anclaje, de acuerdo a las variables aleatorias y deterministas que se aplicaron.

Para este tipo de análisis también se obtuvo como resultado principal el esfuerzo máximo encada prueba realizada y así se estableció el historial su comportamiento para cada tamaño de muestra. El historial para cada tamaño de muestra de este tipo de análisis se presenta en el Anexo A. y el algoritmo completo en *Log File* de este tipo de análisis se puede observar en el Anexo B.

En la Figura 4.11 se observa un corte transversal lateral en el ancla sobre el sistema global de coordenadas y en la Figura 4.12 se muestra un corte trasversal superior sobre el sistema global de coordenadas.



**Figura 4.11** Corte transversal lateral sobre el ancla.



**Figura 4.12** Corte transversal superior sobre el ancla.

# Capítulo 5

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 5.1 Introducción

Realizando un estudio del comportamiento mecánico del anclaje superior del puente y su modelación numérica, se establecieron dos tipos de análisis para determinar los esfuerzos a los que está sometido. En el primero se realizó un análisis sin defectos (se consideró al anclaje como un elemento continuo), mientras que para el segundo se tomaron en cuenta los defectos internos generados por fabricación y/o por esfuerzos residuales (se incluyeron 50 defectos esféricos con diámetros variables en el rango de 2 a 2.5 milímetros). El análisis sin defectos fue de vital importancia ya que esto garantizó un marco de comparación entre las condiciones ideales y las condiciones reales de operación bajo las cuales se encuentra sometido el anclaje. Así fue posible apreciar el impacto que tienen los defectos en la vida útil del elemento del puente.

Para cada tipo de análisis se obtuvieron tres muestras de 50, 100 y 250 pruebas. Cada una de las pruebas se efectuó aplicando un algoritmo en el programa ANSYS [...], que permite modelar numéricamente la distribución de los esfuerzos en el anclaje sometido a fuerzas externas (tracción y tensión) y condiciones climáticas (viento y temperatura). El resultado de cada una de estas pruebas es expresado como el esfuerzo máximo que se presenta en el anclaje. Posteriormente se realizó el análisis estadístico de cada una de las muestras utilizando el programa @RISK [...]. Primero se generaron los histogramas de los esfuerzos máximos correspondientes, eligiendo el número de las clases (NC) en función del tamaño de la muestra (TM) como:

$$NC = \sqrt{TM} \quad (5.1)$$

Luego se realizó un ajuste de las curvas de densidad de probabilidad aplicando la prueba de Chi cuadrada para determinar el tipo de distribución de los esfuerzos máximos y sus parámetros. Además, se compararon los resultados obtenidos para las tres muestras en cada

tipo de análisis con el fin de determinar si existen cambios circunstanciales en las curvas de distribución de probabilidad dependiendo del tamaño de la muestra. A continuación se describen los resultados obtenidos para cada tipo de análisis.

Nota: Para los dos tipos de análisis se tomaron las siguientes variables de entrada:

- El módulo de Young con una distribución normal
- La fuerza de tracción con una distribución normal
- La fuerza del viento bajo una distribución uniforme

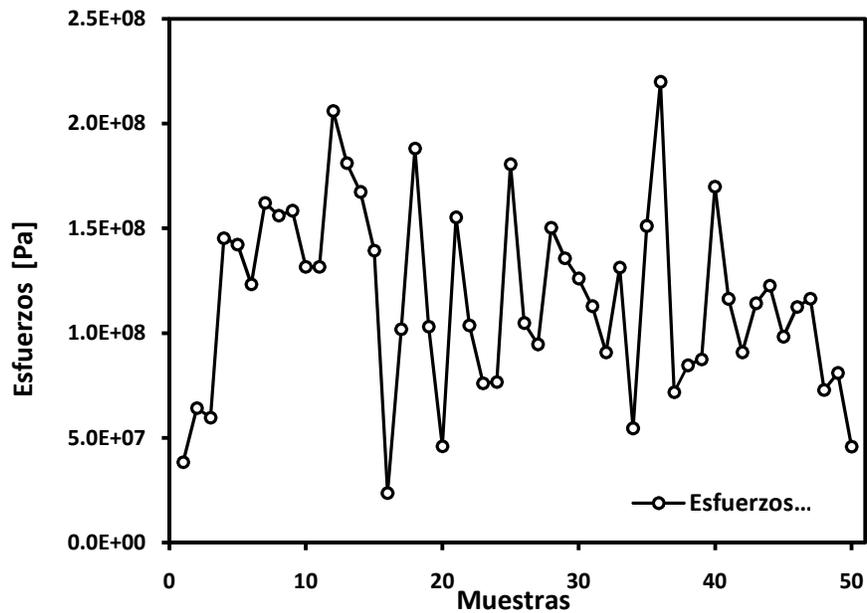
## 5.2 Análisis del ancla sin defectos.

### 5.2.1 Muestra con 50 pruebas

A continuación se muestran los esfuerzos máximos obtenidos por el análisis del ancla sin defectos para una muestra con 50 pruebas en la Tabla 5.1, la cual contiene el número de prueba y el esfuerzo máximo registrado en el ancla, estos datos se ilustran gráficamente en la Figura 5.1.

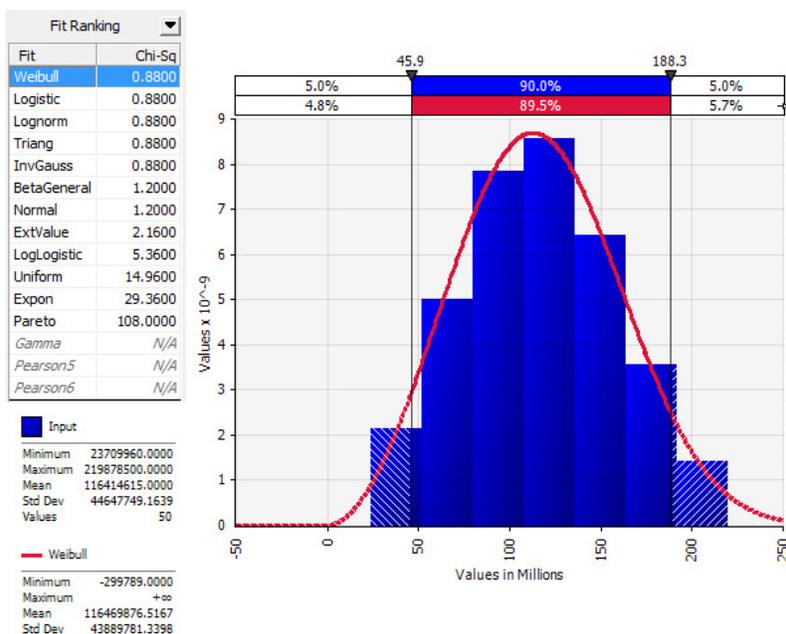
**Tabla 5. 1** Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis sin defectos

No.	Esfuerzo [Pa]								
1	3.84E+07	11	1.32E+08	21	1.55E+08	31	1.13E+08	41	1.16E+08
2	6.42E+07	12	2.06E+08	22	1.04E+08	32	9.08E+07	42	9.08E+07
3	5.98E+07	13	1.81E+08	23	7.62E+07	33	1.31E+08	43	1.14E+08
4	1.45E+08	14	1.67E+08	24	7.67E+07	34	5.45E+07	44	1.23E+08
5	1.42E+08	15	1.40E+08	25	1.81E+08	35	1.51E+08	45	9.82E+07
6	1.23E+08	16	2.37E+07	26	1.05E+08	36	2.20E+08	46	1.13E+08
7	1.62E+08	17	1.02E+08	27	9.46E+07	37	7.18E+07	47	1.17E+08
8	1.56E+08	18	1.88E+08	28	1.50E+08	38	8.46E+07	48	7.30E+07
9	1.58E+08	19	1.03E+08	29	1.36E+08	39	8.75E+07	49	8.09E+07
10	1.32E+08	20	4.60E+07	30	1.26E+08	40	1.70E+08	50	4.59E+07



**Figura 5. 1** Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis sin defectos

A partir de estos datos se construyó el histograma correspondiente y posteriormente se determinó la curva de densidad de probabilidad eligiendo a ésta, en función del valor de la prueba de Chi cuadrada (ver Figura 5.2.), tomando en cuenta que al mejor ajuste le corresponde el mínimo valor de la prueba.



**Figura 5. 2** Densidad de probabilidad para el análisis con 50 pruebas sin defectos

Es posible notar que en este caso existen 5 diferentes tipos de distribución a los cuales les corresponde el mismo valor mínimo de 0.88 de la prueba de Chi cuadrada (Weibull, Logística, Lognormal, Triangular y la de Gauss Inversa). Sin embargo como los valores de los esfuerzos máximos deben ser no negativos y en este caso el único tipo de distribución cuyos valores son no negativos es la distribución de Weibull se decidió elegirla como la mejor opción. Note que la distribución de Weibull tiene una media ( $\mu$ ) de 116.469 MPa y una desviación estándar ( $\sigma$ ) de 43.889 MPa.

### 5.2.2 Muestra con 100 pruebas

Para la muestra con 100 pruebas también se construyó la gráfica donde se ubican los esfuerzos máximos obtenidos contra el número de prueba donde se obtuvieron. Consecutivamente se elaboró el histograma y se realizó el ajuste de la curva de densidadde probabilidad.La tabla de los datos se puede observar en el Anexo A, Tabla A.1 y la gráfica del comportamiento de los datos se muestra en la Figura 5.3.

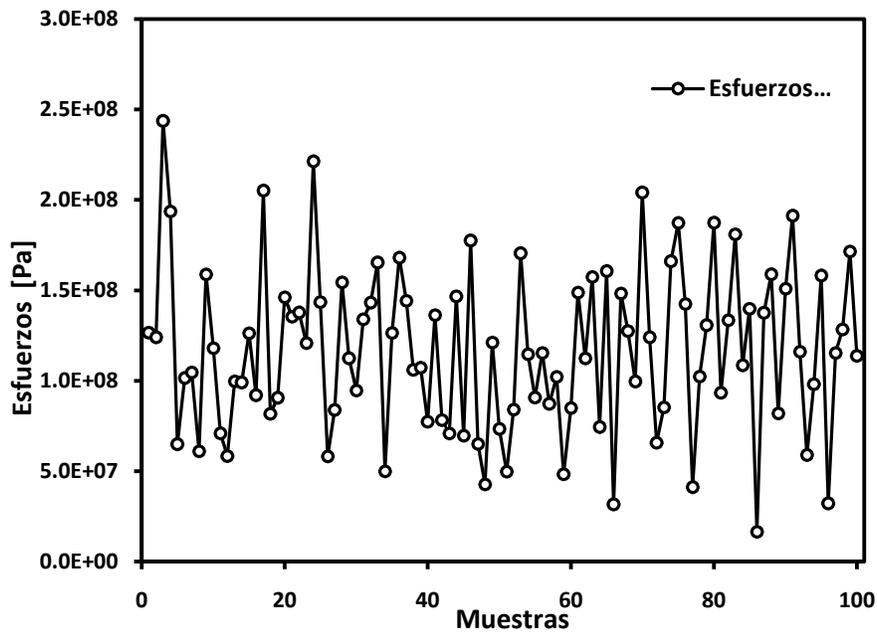


Figura 5. 3 Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis sin defectos

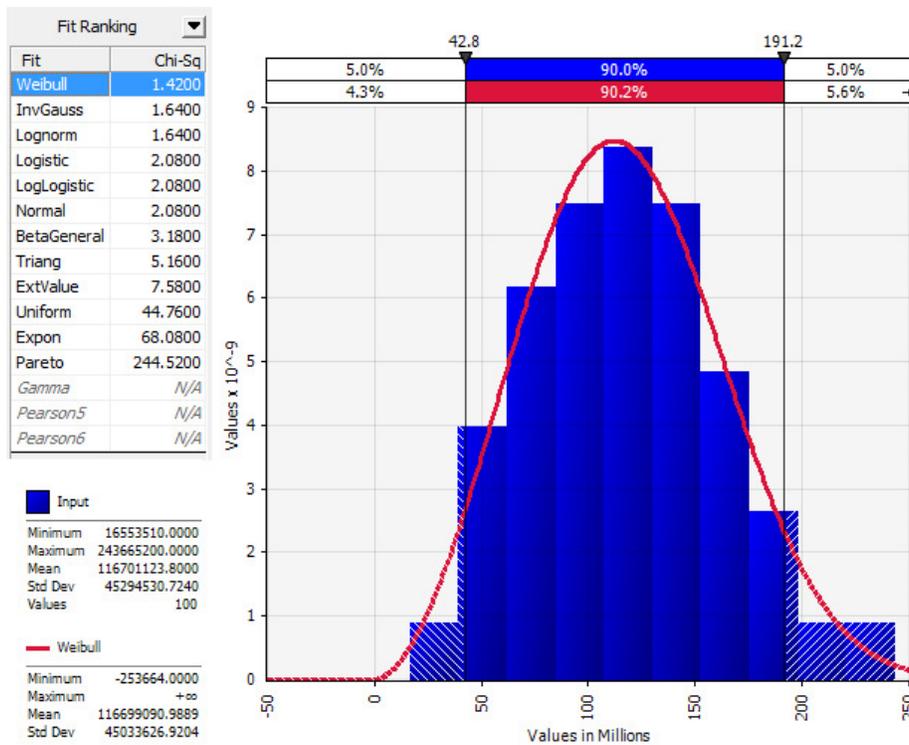
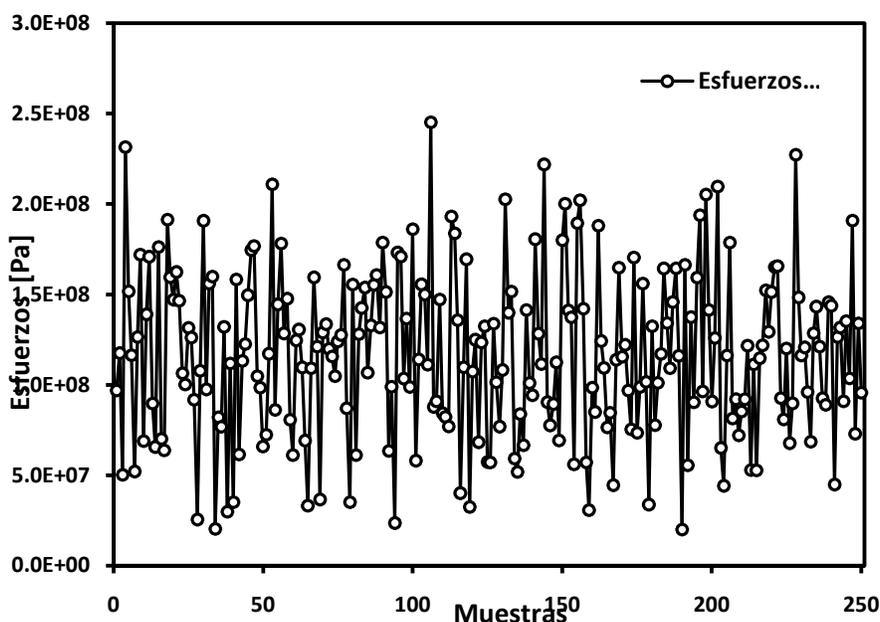


Figura 5. 4 Densidad de probabilidad para el análisis con 100 pruebas sin defectos

Observando la Figura 5.4, podemos identificar fácilmente que el mejor ajuste de distribución de probabilidad corresponde a Weibull, ya que esta tiene el factor mínimo de 1.42 obtenido en la prueba de Chi cuadrada. Además, se cumple con la condición de que nuestros esfuerzos deberán ser no negativos. La distribución de Weibull para esta muestra tiene  $\mu = 116.699\text{MPa}$  y  $\sigma = 45.033\text{MPa}$ .

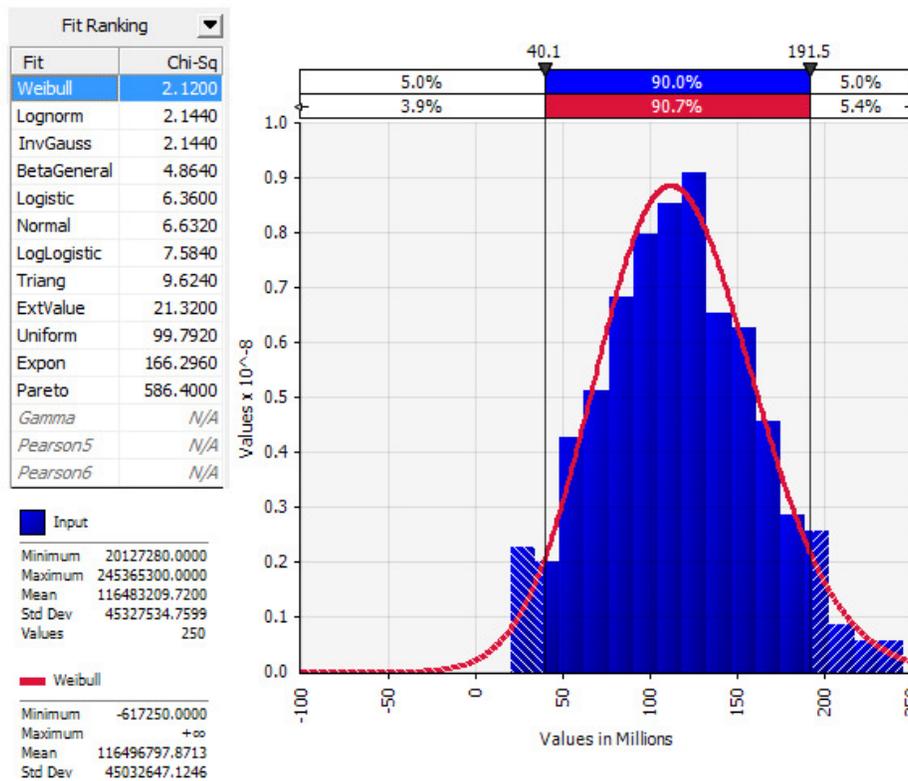
### 5.2.3 Muestra con 250 pruebas

Análogamente, para el estudio estadístico de la muestra con 250 pruebas, se ha construido la Figura 5.5 y se ha generado el ajuste de la curva de densidad de probabilidad para los datos obtenidos como esfuerzos máximos de cada prueba (ver Anexo A, Tabla A.2).



**Figura 5. 5** Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis sin defectos

Al igual que en la muestra anterior es posible observar que en la Figura 5.6 el mejor ajuste para el histograma corresponde a una distribución de Weibull debido a que esta obtiene el mínimo valor de 2.144 en la prueba de Chi-cuadrada. Dicha distribución  $\mu = 116.499\text{MPa}$  y  $\sigma = 45.032\text{MPa}$ .



**Figura 5. 6** Densidad de probabilidad para el análisis con 250 pruebas sin defectos

En esta etapa los resultados obtenidos para las tres muestras revelan que para el ancla sin defectos la distribución de los esfuerzos máximos es del tipo Weibull. También se observó que el *factor de ajuste* (el valor de la prueba de Chi cuadrada) aumenta conforme aumenta el tamaño de la muestra. A continuación se presenta la Tabla 5.2 con los valores de la media y la desviación estándar para las tres muestras.

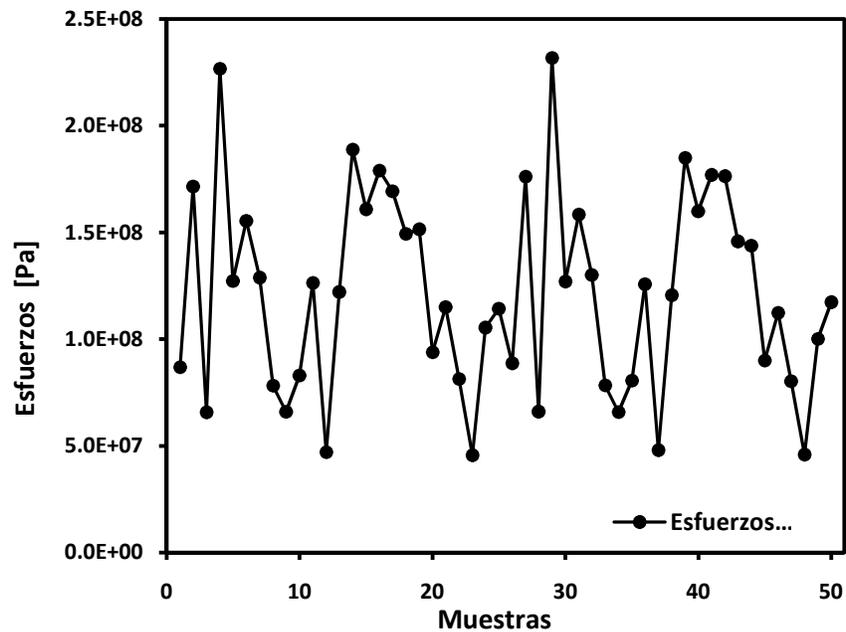
**Tabla 5. 2** Media y desviación estándar correspondientes a las muestras

	Tamaño de muestra		
	50	100	250
Media ( $\mu$ ) MPa	116.469	116.699	116.496
Desv. Estándar ( $\sigma$ ) MPa	43.889	45.033	45.032

## 5.3 Análisis del ancla con defectos

### 5.3.1 Muestra con 50 pruebas

En este inciso se analizan los esfuerzos máximos obtenidos por el análisis del ancla con 50 defectos internos (ver Capítulo 3, Inciso ...) para una muestra con 50 pruebas (véase la Figura 5.7). Esta gráfica contiene el número de prueba y el esfuerzo máximo registrado en el ancla durante dicha prueba (ver el Anexo A, Tabla A.3).



**Figura 5. 7** Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis con defectos

El ajuste que se realizó para ésta muestra corresponde a una distribución de tipo Weibull, así como en el caso de la muestra de 50 pruebas sin defectos. Como podemos observar en la Figura 5.8, esta distribución no tiene el mejor factor de ajuste de la prueba de Chi cuadrada, sin embargo; como ésta no debe de contener valores negativos, se decidió seleccionarla como la mejor opción. Esta distribución de Weibull tiene  $\mu = 121.344\text{MPa}$  y  $\sigma = 46.508\text{MPa}$ .

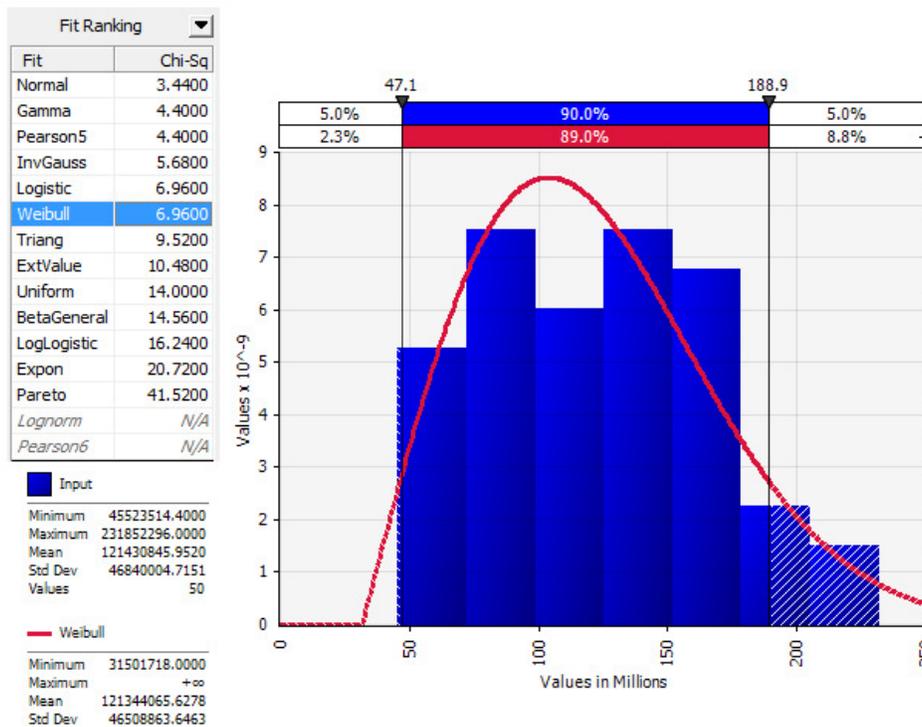
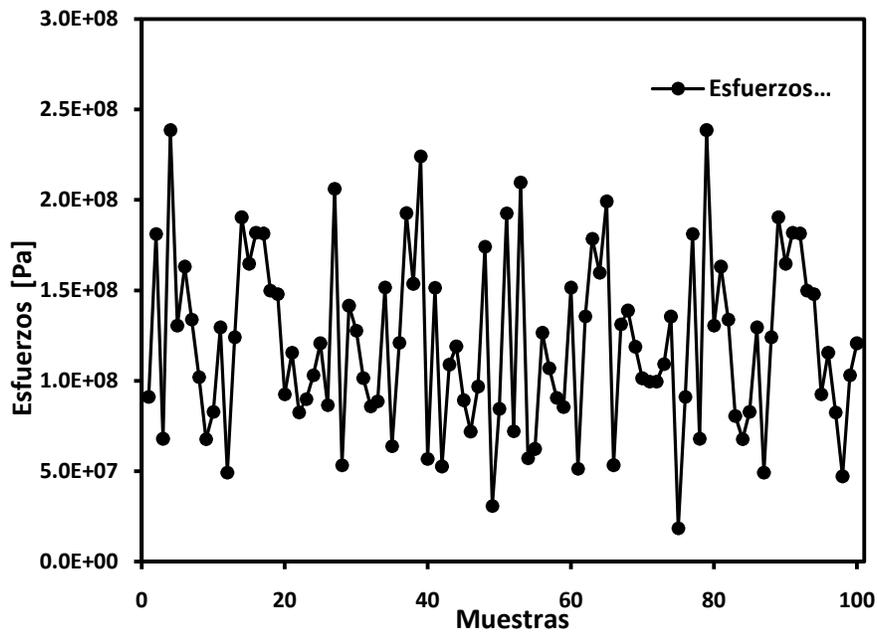


Figura 5. 8 Densidad de probabilidad para el análisis con 50 pruebas con defectos

### 5.3.2 Muestra con 100 pruebas

En el estudio estadístico para la muestra con 100 pruebas del anclaje con defectos de igual manera se construyó la gráfica de esfuerzos contra número de prueba y se elaboró el histograma y se elaboró el ajuste de la curva de densidad de probabilidad. La tabla de los datos se puede observar en el Anexo A, Tabla A.4, cuya gráfica se presenta en la Figura 5.9.



**Figura 5. 9** Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis con defectos

La curva de densidad de probabilidad asignada al histograma de la Figura 5.9 de acuerdo al factor obtenido en la prueba de Chicuadrada es Weibull, con  $\mu = 120.322\text{MPa}$  y  $\sigma = 48.127\text{MPa}$ .

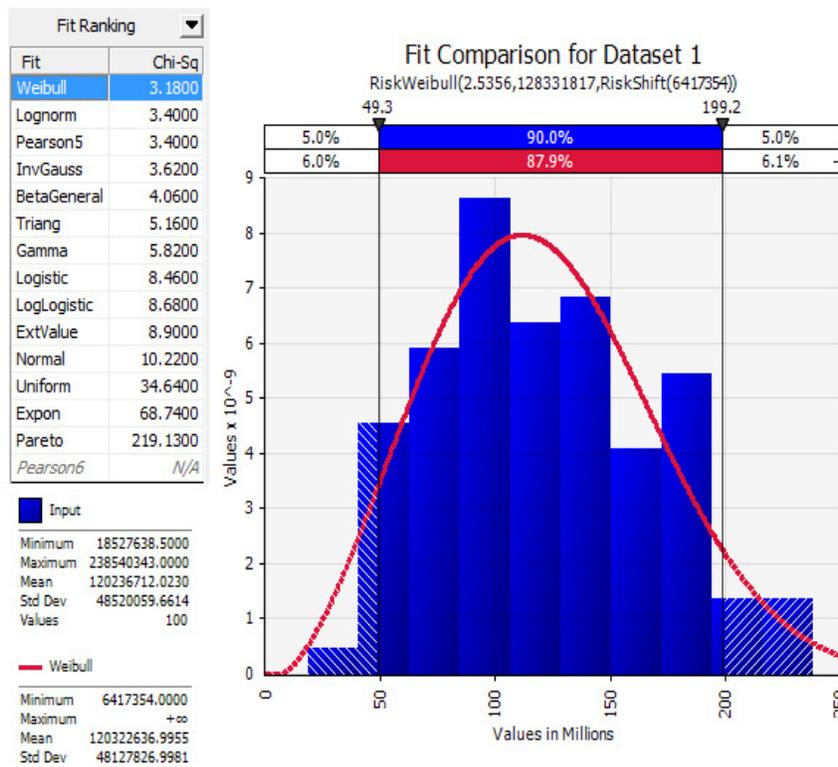


Figura 5. 10 Densidad de probabilidad para el análisis con 100 pruebas con defectos

### 5.3.3 Muestra con 250 pruebas

Análogamente para estudio estadístico de la muestra con 250 pruebas, se ha construido la Gráfica 5.10 y se ha realizado el ajuste de la curva de densidad de probabilidad para los datos obtenidos (ver el Anexo A, Tabla A.5).

Al realizar el ajuste del histograma con 250 pruebas, podemos observar de la Figura 5.12 que el mínimo valor 20.36 en la prueba de Chi-cuadrada corresponde a una curva de densidad de probabilidad tipo Weibull, con  $\mu = 122.236\text{MPa}$  y  $\sigma = 52.476\text{MPa}$ .

Es importante resaltar que en el caso del anclaje con defectos para la muestra del tamaño 250 se observa una nueva moda de los esfuerzos máximos. Esta se ubica del lado derecho del histograma y cerca de los valores del orden de 300 MPa, lo cual ocasiona que la curva de ajuste sufra alargamiento en la dirección donde se ubican esas magnitudes.

En particular, esto resulta en un desplazamiento a la derecha de la media  $\mu$ , es decir hacia los valores más grandes de los esfuerzos máximos. Dicha moda no se observa para los tamaños de la muestra más pequeños (de 50 y 100 pruebas) ya que la probabilidad de observar estos esfuerzos atípicos es baja.

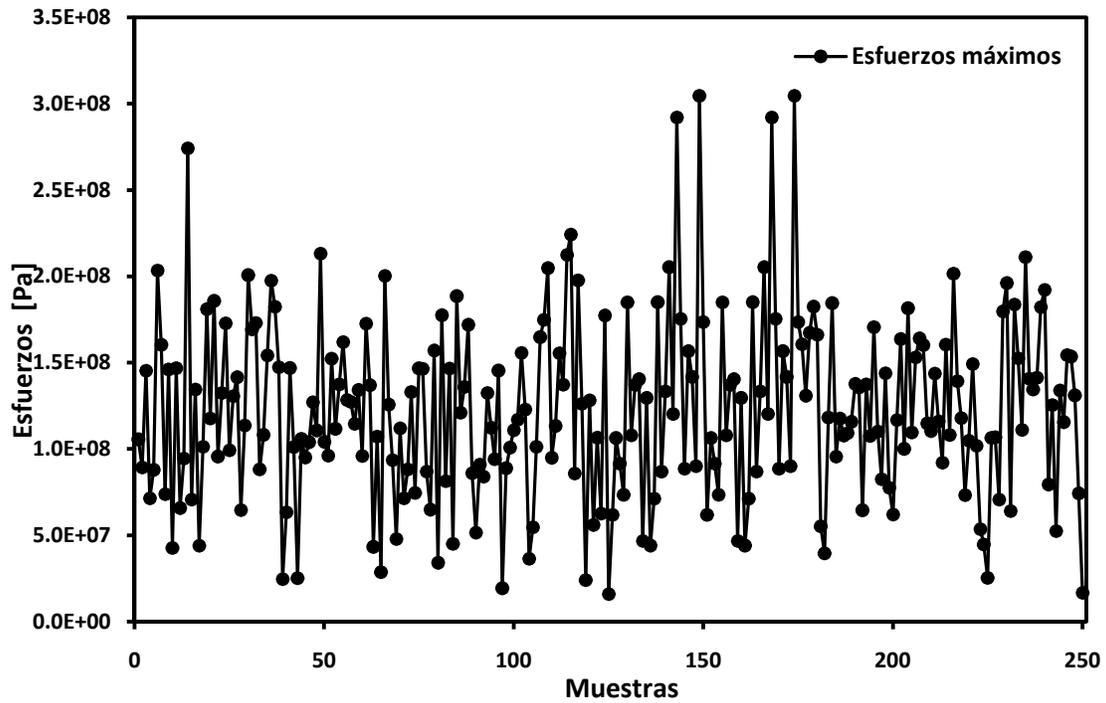
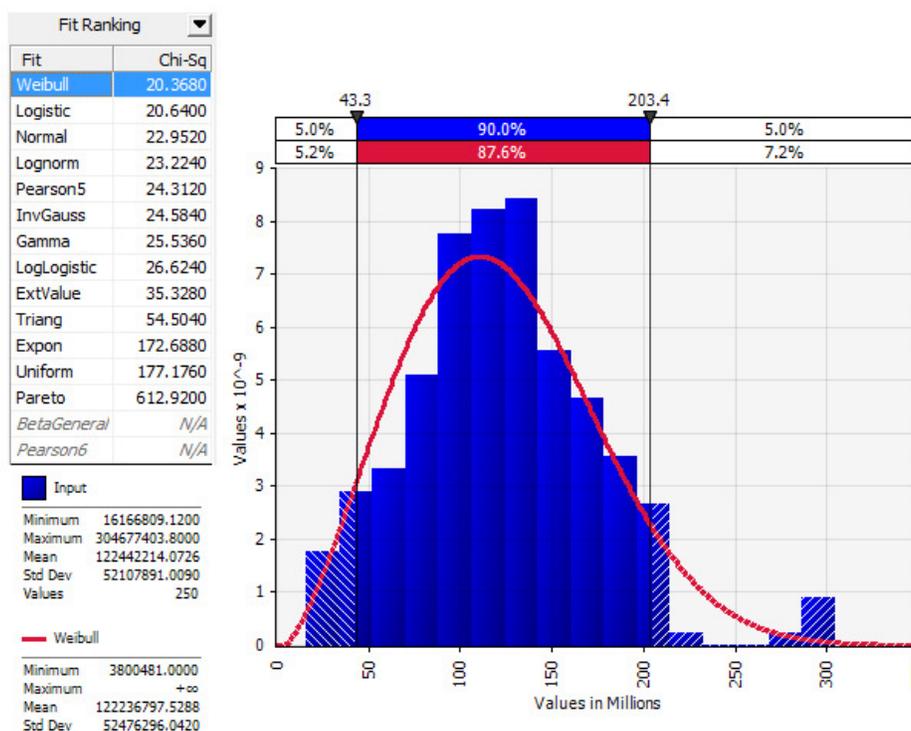


Figura 5. 11 Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis con defectos



**Figura 5. 112** Densidad de probabilidad para el análisis con 100 pruebas con defectos

Para las muestras de 100 y 250 pruebas, en los dos casos los ajustes realizados dieron como el mejor resultado la distribución Weibull. En el caso de la muestra de 50 pruebas ésta no fue la mejor función de densidad de ajuste, pero es posible suponer que para este tamaño la muestra no fue representativa. Sin embargo de acuerdo a la naturaleza de los datos se tomó la decisión de elegir la como la mejor, ya que no hubo una diferencia significativa en el valor de la prueba de Chi-cuadrada. Además, se observa que al incrementar el tamaño de la muestra aumenta el valor de la prueba de Chi-cuadrada (ver la Tabla 5.3).

**Tabla 5. 3** Media y desviación estándar correspondientes a las muestras

	Tamaño de muestra		
	50	100	250
Media( $\mu$ )MPa	121.344	120.322	122.236
Desv. Estándar( $\sigma$ )MPa	46.508	48.127	52.476

## 5.4 Análisis Probabilístico

En los incisos A) y B) se estableció que el tipo de distribución de los esfuerzos máximos para los dos tipos de análisis y todos los tamaños de las muestras es Weibull. Además se estimaron los parámetros de la distribución para cada una de las muestras. En este inciso se realiza el análisis comparativo de las distribuciones de ajuste para las muestras de un mismo tamaño sin y con defectos internos. El objetivo de este análisis es el observar si existen diferencias circunstanciales en los parámetros de las distribuciones al tomar en cuenta defectos en el interior del ancla.

Utilizando el programa @RISK se superpusieron las curvas de densidad de probabilidad obtenidas para las dos muestras de un mismo tamaño, bajo una misma escala. Esto permitió observar las diferencias entre ellas. Además en cada gráfico de comparación, se marcó la media de cada distribución, así como los límites de cedencia que sobrepasan al límite de elasticidad del material ( $EC_{sd}$  – esfuerzo de cedencia sin defectos,  $EC_{cd}$  – esfuerzo de cedencia con defectos).

En las tres gráficas de comparación, la curva de densidad de probabilidad de los esfuerzos máximos *sin* defectos es la curva que delimita al área de color azul y la curva de densidad de probabilidad de los esfuerzos máximos *con* defectos es la línea de color rojo. A continuación se describen los resultados obtenidos para cada tamaño de la muestra. En la cada gráfica se marcaron los valores  $\mu \pm \sigma$  para cada distribución.

### 5.4.1 Análisis de las curvas de densidad de probabilidad para las muestras con 50 pruebas

En este caso para cada una de estas gráficas comparativas se tomó el tamaño de las clases  $NC = 7$  de acuerdo con la fórmula (5.1).

En la Figura 5.13 podemos observar que la cola izquierda de la curva correspondiente al análisis con defectos tiene una pendiente más grande en comparación con la cola izquierda de la curva de densidad del análisis sin defectos. Además la cola derecha, es decir la región de

esfuerzos grandes, de la función de densidad es más pesada para el caso del análisis con defectos.

En la Figura 5.14 se presenta la probabilidad acumulada en el intervalo de esfuerzos de 175 a 300 MPa en las dos colas de las curvas de densidad de probabilidad Weibull. La probabilidad acumulada en este intervalo para la curva correspondiente al análisis con defectos es de 13.2 % mientras que para el caso sin defectos se tiene una probabilidad de 9.8% en el mismo intervalo. Como existe una diferencia significativa entre estos dos porcentajes (3.4%) esto implica que es más probable que se presenten esfuerzos con magnitudes grandes en el caso del anclaje con defectos. Además se observa que existe una probabilidad del 0.1% de que haya un esfuerzo que supere los 300 MPa, es decir un esfuerzo cercano al límite de cedencia  $EC_{cd}$ .

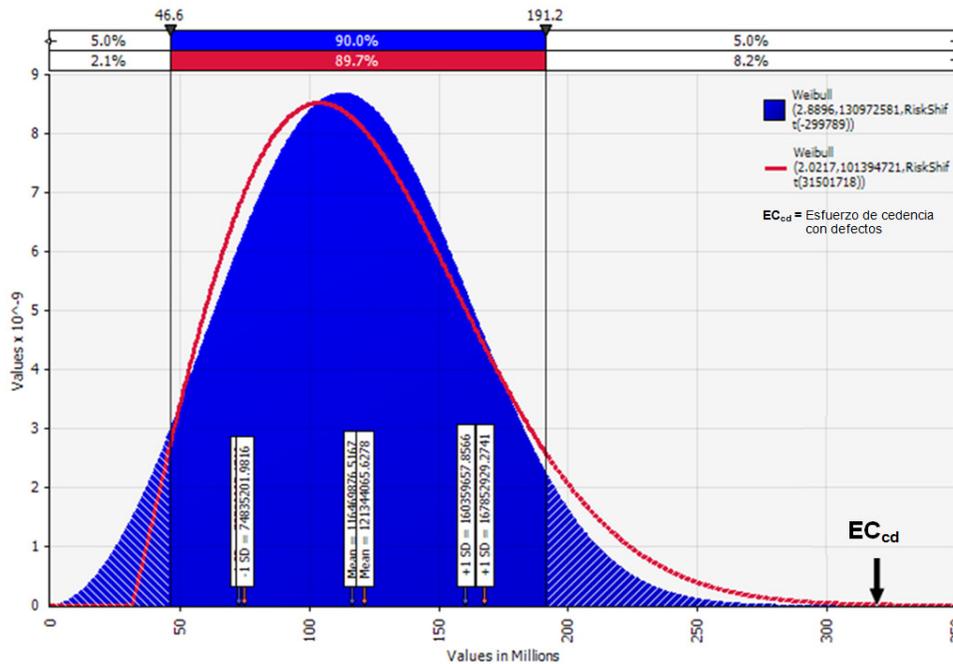
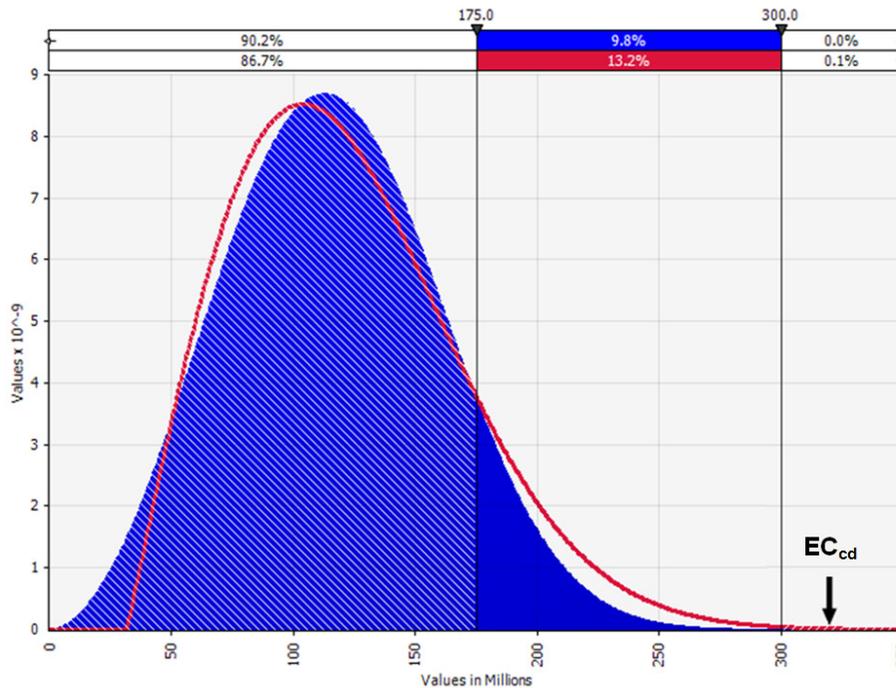


Figura 5. 123 Densidades de probabilidad para los análisis con y sin defectos, TM=50



**Figura 5. 134** Las curvas de densidad para las muestras con 50 pruebas, con las probabilidades acumuladas en el intervalo (175,300).

Las diferencias entre las dos funciones de densidad de probabilidad también se observan a partir del análisis comparativo de sus parámetros. En la Figura 5.15 se muestran los valores de las medias  $\mu$  y los valores de  $\mu \pm \sigma$  para las dos distribuciones. Note que las medias se encuentran desfasadas y se tiene que la media de la función de densidad de los esfuerzos máximos para la ancla sin defectos ( $\mu_{sd}$ ) en comparación con la media de la función de densidad para la ancla con defectos ( $\mu_{cd}$ ) es tal  $\mu_{sd} < \mu_{cd}$ . Esto significa que la tendencia central de los esfuerzos máximos en el caso con defectos es mayor que la del caso sin defectos.

Además se tiene que

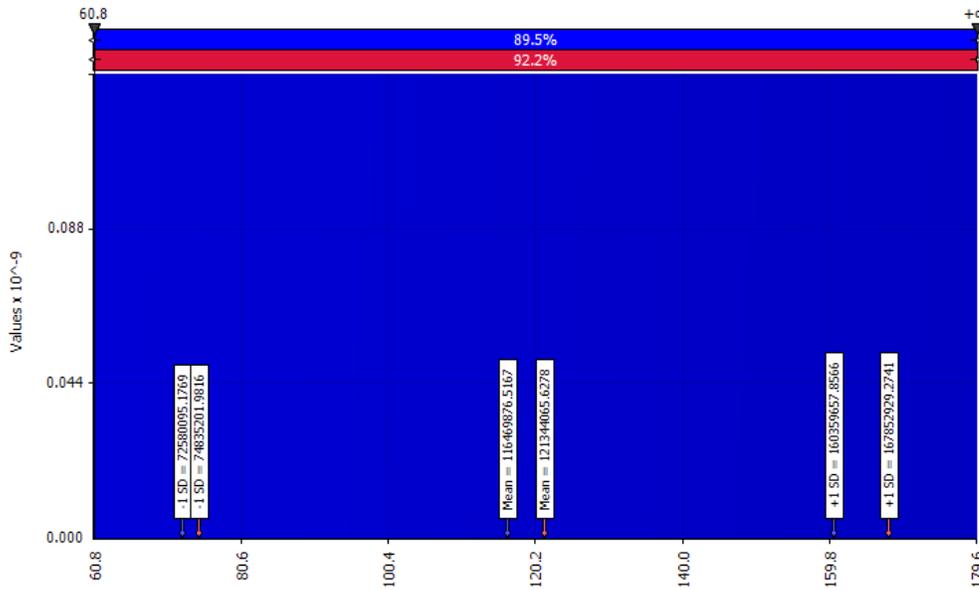
$$\mu_{sd} - \sigma_{sd} < \mu_{cd} - \sigma_{cd}, \quad (5.2)$$

$$\mu_{sd} + \sigma_{sd} < \mu_{cd} + \sigma_{cd}, \quad (5.3)$$

Donde  $\sigma_{sd}, \sigma_{cd}$ , son las desviaciones estándar de las funciones de densidad de los esfuerzos máximos para las anclas sin y con defectos, respectivamente. Además se tiene que:

$$(\mu_{cd} - \sigma_{cd}) - (\mu_{sd} - \sigma_{sd}) < (\mu_{cd} + \sigma_{cd}) - (\mu_{sd} + \sigma_{sd}) \quad (5.4)$$

También se puede apreciar que los esfuerzos máximos más probables de observar se desplazan hacia la derecha en el caso del anclaje con defectos.

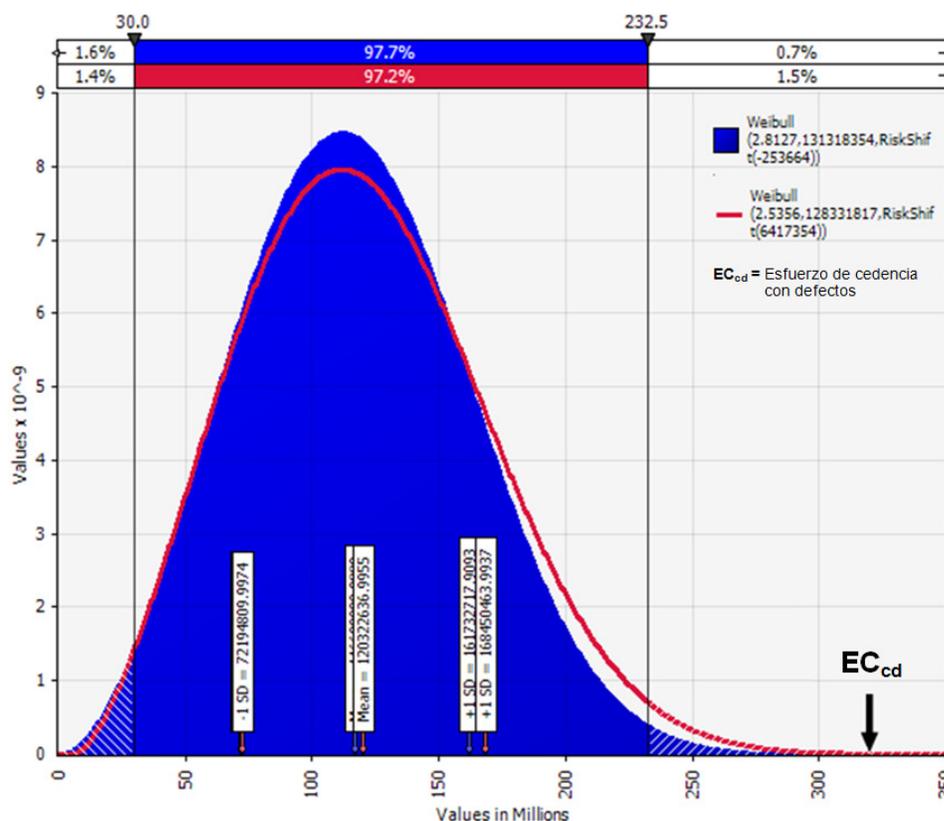


**Figura 5. 15** Las medias  $\mu_{sd}$ ,  $\mu_{cd}$  de las funciones de densidad y  $\mu_{sd} \pm \sigma_{sd}$ ,  $\mu_{cd} \pm \sigma_{cd}$  para las muestras con 50 pruebas

### 5.4.2 Análisis de las curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 100 muestras

En este caso para cada una de las gráficas comparativas se tomó el tamaño de las clases NC = 10 de acuerdo con la fórmula (5.1). Para realizar el análisis de esta muestra, se tomaron en cuenta todas las consideraciones del análisis con 50 pruebas.

En la gráfica anterior podemos observar que al igual que para el tamaño de muestra de 50 pruebas, la cola izquierda de la curva correspondiente al análisis con defectos tiene una pendiente más grande en comparación con la cola izquierda de la curva de densidad del análisis sin defectos. Además la cola derecha, es decir la región de esfuerzos grandes de la función de densidad es más pesada para el caso del análisis con defectos. Las diferencias entre las dos funciones de densidad de probabilidad también se observan a partir del análisis comparativo de sus parámetros. En la Figura 5.16 se muestran los valores de las medias  $\mu$  y los valores de  $\mu \pm \sigma$  para las dos distribuciones.

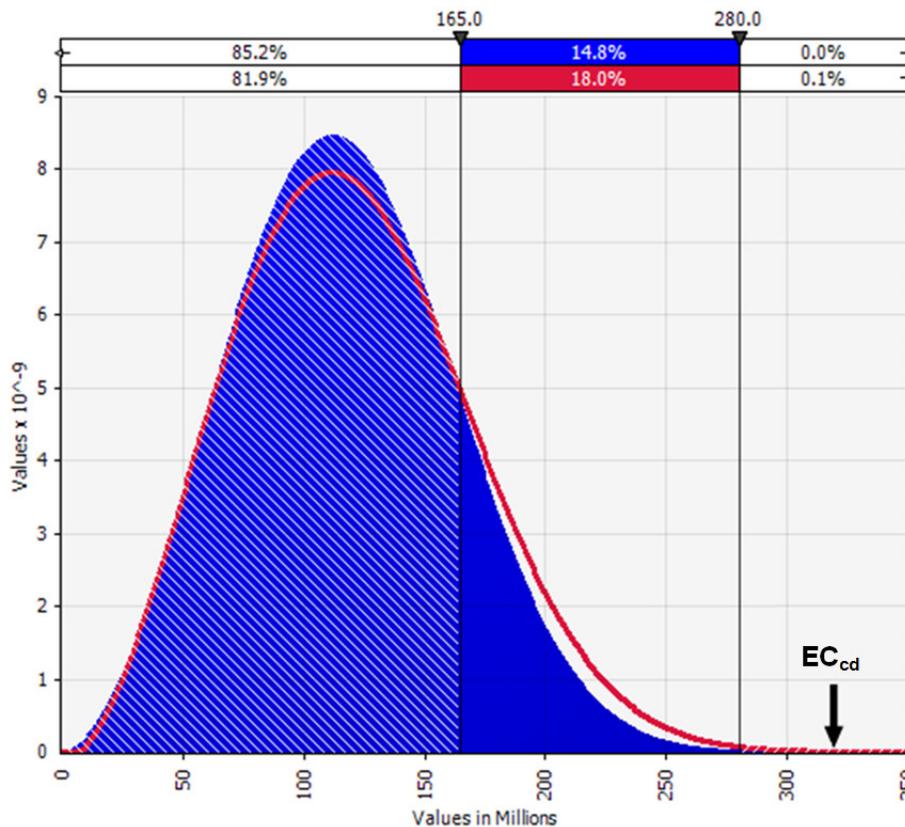


**Figura 5. 146** Curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 100 muestras.

Cabe destacar que las medias se encuentran desfasadas y se tiene que la media de la función de densidad de los esfuerzos máximos para la ancla sin defectos ( $\mu_{sd}$ ) en comparación con la media de la función de densidad para la ancla con defectos ( $\mu_{cd}$ ) es tal  $\mu_{sd} < \mu_{cd}$ . Esto significa que la tendencia central de los esfuerzos máximos en el caso con defectos es mayor que la del

caso sin defectos. Además se tiene un comportamiento que cumple con las ecuaciones (5.2), (5.3), y (5.4), de donde se concluye que los esfuerzos máximos más probables de observar se desplazan hacia la derecha en el caso del anclaje con defectos.

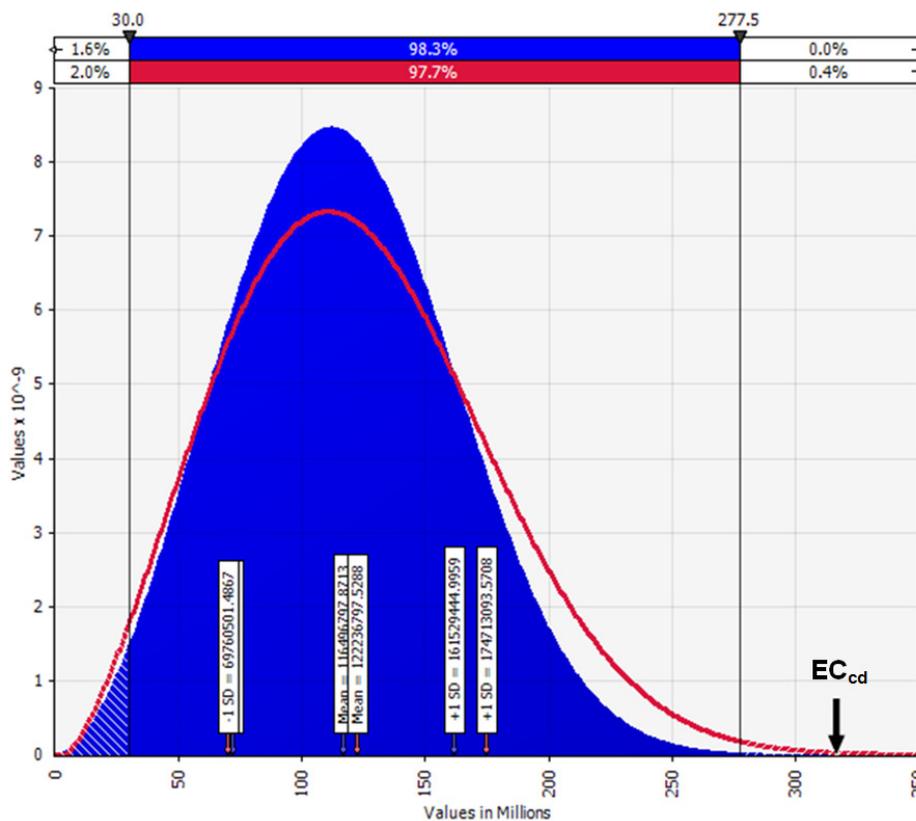
En la Figura 5.17 se presenta la probabilidad acumulada en el intervalo de esfuerzos de 165 a 280 MPa en las intersecciones de las dos colas de las curvas de densidad de probabilidad Weibull. La probabilidad acumulada en este intervalo para la curva correspondiente al análisis con defectos es de 18.0 % mientras que para el caso sin defectos se tiene una probabilidad de 14.8% en el mismo intervalo. Como existe una diferencia significativa entre estos dos porcentajes de 3.2%, esto implica que es más probable que se presenten esfuerzos con magnitudes grandes en el caso con defectos. Además se observa que existe una probabilidad del 0.1% de que haya un esfuerzo que supere los 280 MPa, es decir un esfuerzo cercano al límite de cedencia  $EC_{cd}$ .



**Figura 5. 157** Probabilidad de las curvas en su sección final y sin defectos, con 100 muestras

### 5.4.3 Análisis de las curvas de densidad de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 250 muestras

En este caso para cada una de las gráficas comparativas se tomó el tamaño de las clases NC = 16 de acuerdo con la fórmula (5.1). Para realizar el análisis de esta muestra, se tomaron en cuenta todas las consideraciones del análisis con tamaños de muestra de 50 y 100 pruebas. En la Figura 5.18 se observa que al igual que los tamaños de muestra de 50 y 100 pruebas, la cola izquierda de la curva correspondiente al análisis con defectos tiene una pendiente más grande en comparación con la cola izquierda de la curva de densidad del análisis sin defectos. Además esta pendiente es la más grande que se presenta para los dos tamaños de muestras analizados. Además la cola derecha, es decir la zona donde se ubican los esfuerzos grandes de la función de densidad es más pesada para el caso del análisis con defectos.



**Figura 5. 168** Curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 250 muestras.

Las diferencias entre las dos funciones de densidad de probabilidad también se observan a partir del análisis comparativo de sus parámetros. En Figura 5.18 se muestran los valores de las medias  $\mu$  y los valores de  $\mu \pm \sigma$  para las dos distribuciones.

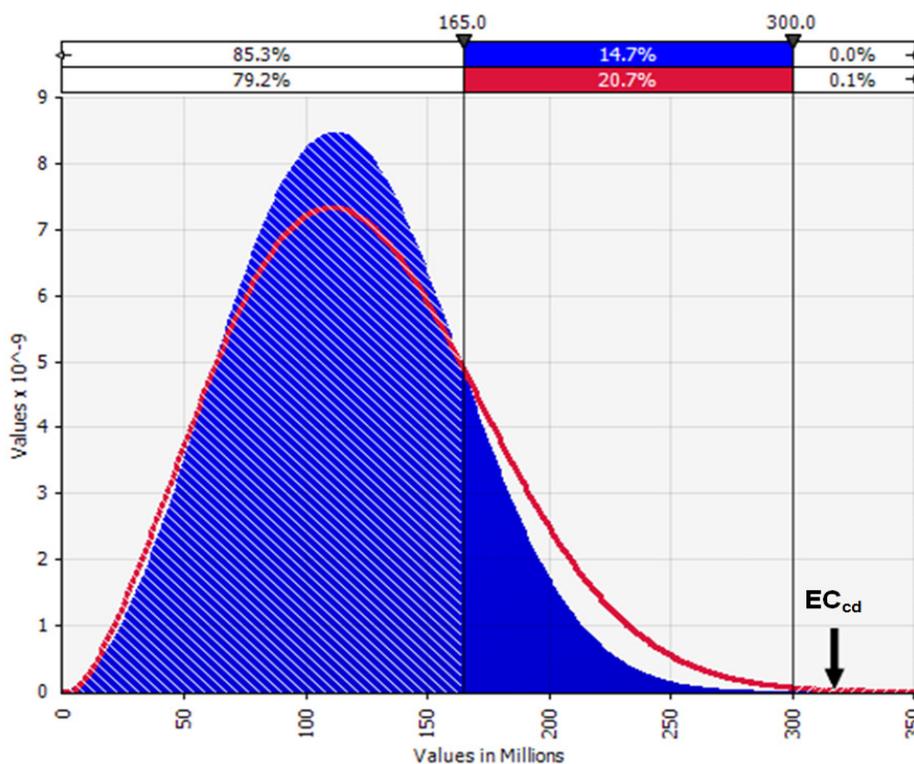
Las medias se encuentran desfasadas y se tiene que la media de la función de densidad de los esfuerzos máximos para la ancla sin defectos ( $\mu_{sd}$ ) en comparación con la media de la función de densidad para la ancla con defectos ( $\mu_{cd}$ ) es tal  $\mu_{sd} < \mu_{cd}$ . Esto significa que la tendencia central de los esfuerzos máximos en el caso con defectos es mayor que la del caso sin defectos.

Se tiene el mismo comportamiento que se presentó en los casos anteriores para las muestras con 50 y 100 pruebas, donde se cumplen las ecuaciones (5.2), (5.3) y 5.4), por tanto los esfuerzos máximos más probables de observar se desplazan hacia la derecha en el caso del anclaje con defectos.

En la Figura 5.19 se presenta la probabilidad acumulada en el intervalo de esfuerzos de 165 a 300 MPa en las intersecciones de las dos colas de las curvas de densidad de probabilidad Weibull. La probabilidad acumulada en este intervalo para la curva correspondiente al análisis con defectos es de 20.7 % mientras que para el caso sin defectos se tiene una probabilidad de 14.7% en el mismo intervalo.

Como existe una diferencia significativa entre estos dos porcentajes de 6.0%, esto implica que es más probable que se presenten esfuerzos con magnitudes grandes en el caso con defectos. Dicha diferencia es la más grande que se presenta para los dos tamaños de muestras analizados anteriormente.

Además, se observa que existe una probabilidad del 0.1% de que haya un esfuerzo que supere los 300 MPa, es decir un esfuerzo cercano al límite de cedencia  $EC_{cd}$ .



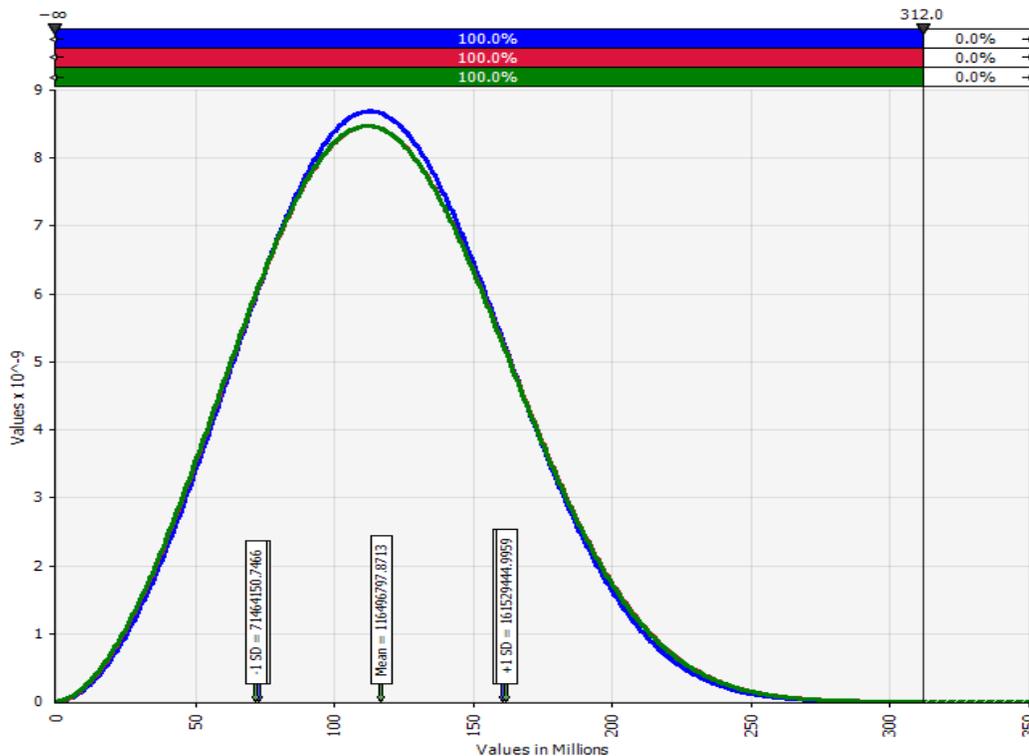
**Figura 5. 179** Curvas de distribución de probabilidad para los análisis con defectos y sin defectos, con 250 muestras

De los incisos a), b) y c) es posible concluir que los resultados obtenidos para las muestras de 100 y 250 pruebas son semejantes, pero difieren de los resultados obtenidos para las muestras de 50 pruebas. Lo cual sugiere que una muestra de tamaño 50 no es representativa. En los casos de las muestras de 100 y 250 pruebas las colas izquierdas de las funciones de densidad son prácticamente idénticas, se observa la misma tendencia de cambio de los parámetros de la distribución.

Sin embargo, el hecho de que exista una segunda moda en la distribución de los esfuerzos máximos para el caso del anclaje con defectos (ver Figura 5.11.) solamente se manifiesta en el caso de la muestra con 250 pruebas. Por lo cual en este caso la cola derecha de la función de densidad se hace más pesada en comparación con la muestra de 100 pruebas y se acerca peligrosamente a la región del límite de cedencia del material. Debido a esto se concluye que para realizar un análisis confiable es necesario trabajar con las muestras del tamaño 250.

#### 5.4.4 Análisis de las curvas de densidad sin defectos

En esta sección se comparan los ajustes para los tres tamaños de muestra en obtenidas, mostrada en la Figura 5.20, donde la curva de color azul corresponde a la muestra de 50 pruebas, la curva de color rojo corresponde a la muestra con 100 pruebas y la curva de color verde corresponde a la muestra de 250 pruebas.



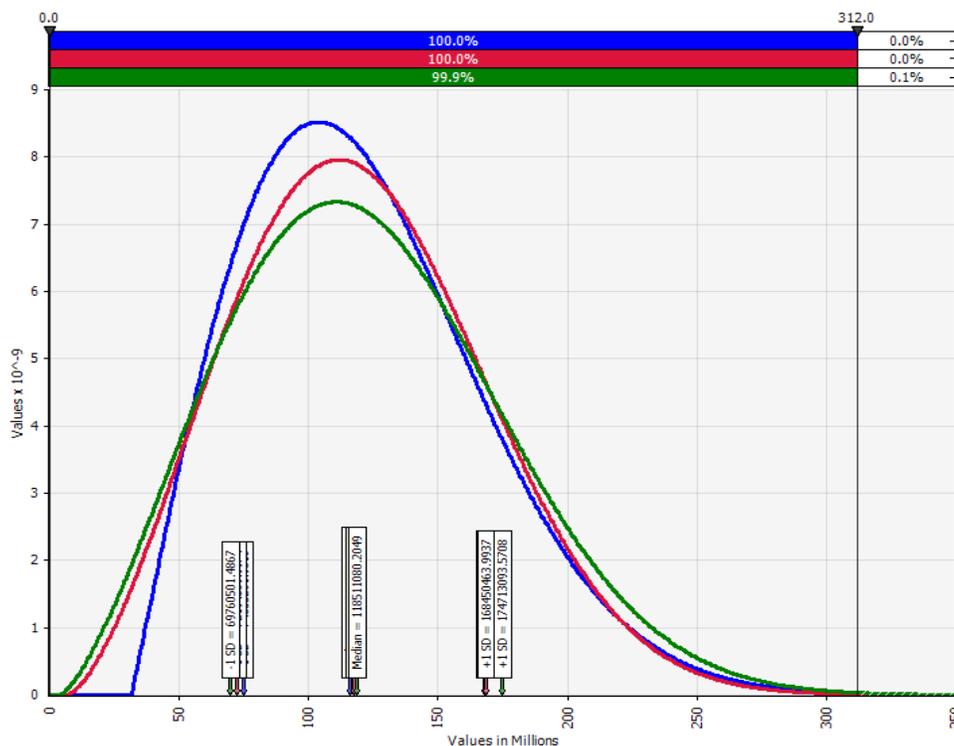
**Figura 5. 20** Curvas de densidad de probabilidad para los análisis sin defectos con 50, 100 y 250 pruebas

Se observa que el máximo de la curva correspondiente a la muestra con 50 pruebas (la curva azul) se encuentra por encima de las otras dos, esto se presenta debido a que una muestra del tamaño 50 no es representativa, por lo que la curva de densidad ajustada al histograma difiere de la función de densidad de probabilidad teórica. Sin embargo, las dos funciones de densidad correspondientes a las muestras con 100 y 250 pruebas (las curvas roja y verde, respectivamente) son prácticamente idénticas, lo cual sugiere que el tamaño de la muestra de 100 ya es suficiente para obtener una buena estimación de la distribución teórica.

Ahora, note que el 100% de los esfuerzos máximos que se presentan en los análisis sin defectos para los tres tamaños de la muestra queda dentro del intervalo de 0 a 312 MPa, donde el valor de 312 Mpa corresponde al esfuerzo de fluencia crítico. Por lo tanto se puede deducir que la probabilidad de que ocurra un esfuerzo superior al esfuerzo de fluencia crítico es de 0%, es decir no se puede presentar.

#### 5.4.5 Análisis de las curvas de densidad para el análisis con defectos

Ahora analizamos las tres curvas de densidad de probabilidad para las tres muestras obtenida con el análisis del anclaje con defectos en la Figura 5.21, donde la curva de color azul corresponde a la muestra de 50 pruebas, la curva de color rojo corresponde a la muestra con 100 pruebas y la curva de color verde corresponde a la muestra con 250 pruebas.



**Figura 5. 181** Curvas de densidad de probabilidad para los análisis con defectos con 50, 100 y 250 pruebas

La curva correspondiente a la muestra con 50 pruebas (la curva azul) tiene una forma diferente en comparación con las funciones de densidad obtenidas para las muestras con 100 y 250 pruebas (las curvas verde y roja, respectivamente).

Sin embargo, es posible notar que la media de los esfuerzos máximos es prácticamente la misma para los tres casos. Además, los valores máximos de las funciones de densidad se hacen más pequeños conforme va creciendo el tamaño de la muestra.

Esto se debe a que las colas derechas de las funciones de densidad ajustadas se hacen más pesadas para las muestras con tamaños más grandes, ya que en las muestras con tamaños grandes se observan con una mayor frecuencia los esfuerzos grandes del orden de 300 MPa.

Por lo tanto a diferencia con el caso del anclaje sin defectos el tamaño de la muestra debe ser al menos de 250 para poder realizar un análisis confiable.

Para las muestras con 50 y 100 pruebas el 100% de los esfuerzos máximos que se presentan en los análisis con defectos queda dentro del intervalo de 0 a 312 MPa, donde el valor de 312 MPa corresponde al esfuerzo de fluencia crítico, pero en el caso de la muestra con 250 pruebas (la muestra más representativa), el 0.1% de los resultados observados *sale fuera del intervalo superando el esfuerzo de fluencia crítico*. Esto podría resultar en una deformación permanente en el material.

## **5.5 Análisis de las medias y las desviaciones estándar para las muestras de 250 pruebas**

A continuación se presenta la tabla con las medias y las desviaciones estándar de las distribuciones ajustadas, así como los porcentajes de diferencias relativas entre dichos parámetros obtenidos de los análisis del anclaje con y sin defectos para la muestra con 250 pruebas. Para este análisis se eligió la muestra de 250 pruebas ya que, de acuerdo con los incisos anteriores, ésta es representativa para ambos casos.

En la Tabla 5.4 podemos observar que el porcentaje de diferencia entre la media y la desviación estándar para los casos sin y con defectos es de 4.7% y 14.2%, respectivamente. Esto significa que *existe un cambio significativo* en los parámetros de distribución de los esfuerzos máximos al incorporar defectos internos en el modelo del anclaje.

En particular en el modelo del anclaje con defectos en promedio se observan los esfuerzos máximos cuyas magnitudes son casi 5% más grandes que las observadas en el análisis sin defectos.

**Tabla 5. 4** Desviación relativa para un tamaño de muestra de 250 pruebas

<b>Media (<math>\mu</math>)</b>	<b>Análisis Sin</b>	<b>Análisis Con</b>	<b>%</b>
<b>Des. Est. (<math>\sigma</math>)</b>	<b>Defectos</b>	<b>Defectos</b>	<b>Diferencia</b>
$\mu$	116.496	122.236	<b>4.6958</b>
$\sigma$	45.032	52.476	<b>14.1855</b>

## CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo computacional de los anclajes superiores de un puente atirantado usando elementos finitos; donde se simularon los pequeños defectos internos y se determinó su influencia en su desempeño estructural.

Para determinar la influencia de los defectos internos se realizaron dos modelos numéricos del anclaje superior, uno sin defecto y el otro con defectos a fin de tener un parámetro comparativo entre las condiciones ideales de diseño y las condiciones reales del desempeño mecánico del elemento estructural.

Para el modelo numérico sin defectos, mediante un análisis probabilístico se determinó la distribución de los esfuerzos máximos  $E_{Max}$  que están en función del módulo de Young, la fuerza del viento y la fuerza provocada por el tráfico vehicular,  $E_{Max}(E, F_{ZAT}, F_{ZAV})$ , que fue de tipo Weibull como se observa gráficamente en las Figuras 5.2, 5.4 y 5.6.

De la misma manera, tomando además en cuenta el tamaño de defecto ( $T_d$ ), el número de defectos ( $N_d$ ) y su localización ( $L_d$ ), para el modelo del ancla con defectos internos, se realizaron una serie de análisis para determinar la distribución de los esfuerzos máximos  $E_{Max}(E, F_{ZAT}, F_{ZAV}, T_d, N_d, L_d)$ . Para las muestras de 100 y 250 pruebas, en los dos casos los ajustes realizados dieron como el mejor resultado la distribución Weibull. En el caso de la muestra de 50 pruebas ésta no fue la mejor función de densidad de ajuste, pero es posible suponer que para este tamaño la muestra no fue representativa. En los casos de las muestras de 100 y 250 pruebas las colas izquierdas de las funciones de densidad son prácticamente idénticas, se observa la misma tendencia de cambio de los parámetros de la distribución. Sin embargo, el hecho de que exista una segunda moda en la distribución de los esfuerzos máximos para el caso del anclaje con defectos (ver Figura 5.11.) solamente se manifiesta en el caso de la muestra con 250 pruebas.

Se determinó que la media de los esfuerzos máximos es prácticamente la misma para los tres casos. Además, los valores máximos de las funciones de densidad se hacen más pequeños conforme va creciendo el tamaño de la muestra. Esto se debe a que las colas derechas de las

funciones de densidad ajustadas se hacen más pesadas para las muestras con tamaños más grandes, ya que en las muestras con tamaños grandes se observan con una mayor frecuencia los esfuerzos grandes del orden de 300 MPa.

Por lo tanto, a diferencia del caso del anclaje sin defectos, para realizar un análisis confiable es necesario trabajar con las muestras de tamaño al menos de 250 pruebas.

Para las muestras con 50 y 100 pruebas el 100% de los esfuerzos máximos que se presentan en los análisis con defectos queda dentro del intervalo de 0 a 312 MPa, donde el valor de 312 MPa corresponde al esfuerzo de fluencia crítico, pero en el caso de la muestra con 250 pruebas (la muestra más representativa), el 0.1% de los resultados observados *sale fuera del intervalo superando el esfuerzo de fluencia crítico*. Esto podría resultar en una deformación permanente en el material, sería necesario realizar un análisis de plasticidad para determinar si rebasa el esfuerzo último.

Además, se determinaron las medias y las desviaciones estándar de las distribuciones ajustadas, así como los porcentajes de diferencias relativas entre los parámetros obtenidos de los análisis del anclaje con y sin defectos para la muestra con 250 pruebas. Para este análisis se eligió la muestra de 250 pruebas ya que, de acuerdo con los incisos anteriores, ésta es representativa para ambos casos. El porcentaje de diferencia entre la media y la desviación estándar para los casos sin y con defectos fue de 4.7% y 14.2%, respectivamente. Esto implica que *existe un cambio significativo* en los parámetros de distribución de los esfuerzos máximos al incorporar defectos internos en el modelo del anclaje. En particular en el modelo del anclaje con defectos en promedio se observan los esfuerzos máximos cuyas magnitudes son casi 5% más grandes que las observadas en el análisis sin defecto.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Sabed Moaveni, "Finite Element Analysis: Theory and Applications with Ansys", Prentice Hall, Second Edition. 2003.
2. Erdogan Madenci, Ibrahim Guven, "The Finite Element Method and Application in Engineering Using Ansys", Springer, 2006.
3. Tadeusz Stolarski, Y. Nakasone, S. Yoshimoto, "Engineering Analysis with Ansys Software", Butterworth-Heinemann, 2007.
4. Huei-Huang Lee, "Finite Element Simulation with Ansys Workbench 12", Schroff Development Corporation; 2010.
5. Esam M. Alawadhi, "Finite Element Simulations using Ansys", CRC Press, 2009.
6. Robert D. Cook, Davis S. Malkus, Michel E. Plesha, Robert J. Witt, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 2002.
7. Ansys, versión 12, Grupo SSC, S. A. de C. V. San Miguel de Allende, Gto.
8. "Estudio para la Evaluación de los Dispositivos de Soporte Superior (botellas) de los Anclajes de los Tirantes del Puente Río Papaloapan", Proyecto ET-81/2003(EEO5/03), Instituto Mexicano del Transporte, 2003.
9. Octavio A. Rascón, Miguel Barousse M. y Gabriel Ventura S., "Análisis normativo y estadístico de cargas vivas en puentes en México", Publicación Técnica, No.97, Sanfandalia, Querétaro, 1997, Instituto Mexicano del Transporte.
10. D. Samayoa, A. Balankin, F. Carrión, 2005. "Análisis de esfuerzos en los Cables de un Puente Atirantado debido a la Interacción Vehículo-Estructura", 4º
11. Sharif Rahman, 2001. "Probabilistic fracture mechanics: J-estimation and finite element methods", Engineering Fracture Mechanics 68, pp 107-125.
12. Isaac Elishakoff, "Probabilistic Theory of Structures", 1999, Dover Publications Inc. Pp. 433-468.
13. Raj Sundararajan, "Probabilistic Structural Mechanics Handbook, Theory and Industrial Applications", 1995, Chapman & Hall A division of International Thomson Publishing Inc. Pp 27-69.
14. Mood A.M., Graybill F.A., Boes D.C., Introduction to the Theory of Statistics (3<sup>rd</sup> edition), New York, Mc Graw Hill, 1974
15. Hoel P.G., Port S.C., Stone C.J., Introduction to Probability Theory, Boston, Houghton Mifflin Company, 1971

# ANEXO A

## RESULTADOS DE LOS ESFUERZOS MÁXIMOS EN LOS ANÁLISIS

Tabla A.1 *Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis sin defectos*

No.	Esfuerzo [Pa]								
1	126751600	21	135501400	41	136394600	61	148874400	81	93447370
2	124010100	22	137726300	42	78345100	62	112481400	82	133578900
3	243665200	23	120983200	43	70937150	63	157493800	83	181160900
4	193773500	24	221347400	44	146807500	64	74412070	84	108540700
5	64881850	25	143661700	45	69773700	65	160595000	85	139969600
6	101490200	26	58260950	46	177490800	66	31650510	86	16553510
7	104693400	27	84007590	47	65199620	67	148441900	87	137545100
8	61150390	28	154575600	48	42817480	68	127627600	88	158880100
9	158942400	29	112426000	49	121262200	69	99533050	89	82002670
10	118159100	30	94703800	50	73343940	70	204099500	90	150979800
11	70879970	31	134149000	51	49857740	71	124035000	91	191210300
12	58500780	32	143180900	52	84149580	72	65839790	92	116209000
13	99806450	33	165337900	53	170471800	73	85442280	93	58889590
14	99026010	34	49982390	54	114794700	74	166073300	94	98250770
15	126442500	35	126532800	55	90878340	75	187436600	95	158139400
16	91973990	36	167976500	56	115536900	76	142559800	96	32169300
17	205149600	37	144316600	57	87259210	77	41144890	97	115476700
18	81887590	38	106172200	58	102236700	78	102412800	98	128454800
19	90560660	39	107399300	59	48487650	79	130670400	99	171594400
20	146310700	40	77504720	60	85050630	80	187387100	100	113950700

Tabla A.2 Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis sin defectos

No.	Esfuerzo [Pa]								
1	9.71E+07	51	7.26E+07	101	5.81E+07	151	2.00E+08	201	1.26E+08
2	1.18E+08	52	1.17E+08	102	1.14E+08	152	1.41E+08	202	2.10E+08
3	5.04E+07	53	2.11E+08	103	1.56E+08	153	1.37E+08	203	6.51E+07
4	2.32E+08	54	8.63E+07	104	1.50E+08	154	5.63E+07	204	4.42E+07
5	1.52E+08	55	1.44E+08	105	1.11E+08	155	1.90E+08	205	1.16E+08
6	1.17E+08	56	1.78E+08	106	2.45E+08	156	2.02E+08	206	1.79E+08
7	5.21E+07	57	1.28E+08	107	8.78E+07	157	1.42E+08	207	8.16E+07
8	1.27E+08	58	1.48E+08	108	9.11E+07	158	5.73E+07	208	9.21E+07
9	1.72E+08	59	8.09E+07	109	1.47E+08	159	3.08E+07	209	7.23E+07
10	6.91E+07	60	6.14E+07	110	8.43E+07	160	9.87E+07	210	8.54E+07
11	1.39E+08	61	1.25E+08	111	8.24E+07	161	8.50E+07	211	9.20E+07
12	1.71E+08	62	1.31E+08	112	7.72E+07	162	1.88E+08	212	1.22E+08
13	8.99E+07	63	1.10E+08	113	1.93E+08	163	1.24E+08	213	5.31E+07
14	6.57E+07	64	6.92E+07	114	1.84E+08	164	1.10E+08	214	1.11E+08
15	1.76E+08	65	3.33E+07	115	1.36E+08	165	7.67E+07	215	5.29E+07
16	7.03E+07	66	1.09E+08	116	4.01E+07	166	8.47E+07	216	1.15E+08
17	6.40E+07	67	1.59E+08	117	1.10E+08	167	4.45E+07	217	1.22E+08
18	1.91E+08	68	1.21E+08	118	1.69E+08	168	1.14E+08	218	1.52E+08
19	1.60E+08	69	3.66E+07	119	3.27E+07	169	1.65E+08	219	1.29E+08
20	1.47E+08	70	1.29E+08	120	1.07E+08	170	1.16E+08	220	1.51E+08
21	1.62E+08	71	1.34E+08	121	1.25E+08	171	1.22E+08	221	1.65E+08
22	1.47E+08	72	1.20E+08	122	6.83E+07	172	9.70E+07	222	1.66E+08
23	1.07E+08	73	1.16E+08	123	1.24E+08	173	7.56E+07	223	9.29E+07
24	1.00E+08	74	1.05E+08	124	1.33E+08	174	1.71E+08	224	8.10E+07
25	1.32E+08	75	1.24E+08	125	5.74E+07	175	7.36E+07	225	1.20E+08
26	1.26E+08	76	1.28E+08	126	5.73E+07	176	9.90E+07	226	6.78E+07
27	9.20E+07	77	1.67E+08	127	1.34E+08	177	1.56E+08	227	8.98E+07
28	2.55E+07	78	8.72E+07	128	1.02E+08	178	1.02E+08	228	2.27E+08
29	1.08E+08	79	3.52E+07	129	7.69E+07	179	3.38E+07	229	1.48E+08
30	1.91E+08	80	1.56E+08	130	1.08E+08	180	1.33E+08	230	1.16E+08
31	9.75E+07	81	6.14E+07	131	2.03E+08	181	7.78E+07	231	1.21E+08
32	1.56E+08	82	1.28E+08	132	1.40E+08	182	1.01E+08	232	9.62E+07
33	1.60E+08	83	1.43E+08	133	1.52E+08	183	1.17E+08	233	6.87E+07
34	2.05E+07	84	1.54E+08	134	5.94E+07	184	1.64E+08	234	1.29E+08
35	8.20E+07	85	1.07E+08	135	5.20E+07	185	1.34E+08	235	1.43E+08
36	7.70E+07	86	1.33E+08	136	8.40E+07	186	1.09E+08	236	1.21E+08
37	1.32E+08	87	1.55E+08	137	6.68E+07	187	1.46E+08	237	9.26E+07
38	3.00E+07	88	1.61E+08	138	1.42E+08	188	1.65E+08	238	8.92E+07
39	1.12E+08	89	1.32E+08	139	1.01E+08	189	1.16E+08	239	1.46E+08
40	3.53E+07	90	1.79E+08	140	9.44E+07	190	2.01E+07	240	1.44E+08
41	1.58E+08	91	1.51E+08	141	1.81E+08	191	1.67E+08	241	4.49E+07
42	6.17E+07	92	6.37E+07	142	1.28E+08	192	5.57E+07	242	1.27E+08
43	1.13E+08	93	9.92E+07	143	1.12E+08	193	1.37E+08	243	1.32E+08
44	1.23E+08	94	2.36E+07	144	2.22E+08	194	9.05E+07	244	9.11E+07
45	1.50E+08	95	1.73E+08	145	9.04E+07	195	1.60E+08	245	1.35E+08
46	1.75E+08	96	1.71E+08	146	7.76E+07	196	1.94E+08	246	1.04E+08
47	1.77E+08	97	1.03E+08	147	8.94E+07	197	9.66E+07	247	1.91E+08
48	1.05E+08	98	1.37E+08	148	1.12E+08	198	2.05E+08	248	7.32E+07
49	9.87E+07	99	9.89E+07	149	6.94E+07	199	1.42E+08	249	1.34E+08
50	6.61E+07	100	1.86E+08	150	1.80E+08	200	9.08E+07	250	9.58E+07

Tabla A.3 Máximos esfuerzos para 50 pruebas en un análisis con defectos

No.	Esfuerzo [Pa]								
1	3.84E+07	11	1.26E+08	21	1.15E+08	31	1.58E+08	41	1.77E+08
2	6.42E+07	12	4.71E+07	22	8.14E+07	32	1.30E+08	42	1.76E+08
3	5.98E+07	13	1.22E+08	23	4.55E+07	33	7.84E+07	43	1.46E+08
4	1.45E+08	14	1.89E+08	24	1.05E+08	34	6.59E+07	44	1.44E+08
5	1.42E+08	15	1.61E+08	25	1.14E+08	35	8.06E+07	45	9.00E+07
6	1.23E+08	16	1.79E+08	26	8.86E+07	36	1.26E+08	46	1.12E+08
7	1.62E+08	17	1.69E+08	27	1.76E+08	37	4.79E+07	47	8.03E+07
8	1.56E+08	18	1.49E+08	28	6.60E+07	38	1.21E+08	48	4.58E+07
9	1.58E+08	19	1.51E+08	29	2.32E+08	39	1.85E+08	49	1.00E+08
10	1.32E+08	20	9.39E+07	30	1.27E+08	40	1.60E+08	50	1.17E+08

Tabla A.4 Máximos esfuerzos para 100 pruebas en un análisis con defectos

No.	Esfuerzo [Pa]								
1	9.12E+07	21	1.16E+08	41	1.52E+08	61	5.14E+07	81	1.63E+08
2	1.81E+08	22	8.26E+07	42	5.26E+07	62	1.36E+08	82	1.34E+08
3	6.79E+07	23	8.99E+07	43	1.09E+08	63	1.79E+08	83	8.07E+07
4	2.39E+08	24	1.03E+08	44	1.19E+08	64	1.60E+08	84	6.78E+07
5	1.31E+08	25	1.21E+08	45	8.92E+07	65	1.99E+08	85	8.30E+07
6	1.63E+08	26	8.66E+07	46	7.20E+07	66	5.33E+07	86	1.29E+08
7	1.34E+08	27	2.06E+08	47	9.68E+07	67	1.31E+08	87	4.93E+07
8	1.02E+08	28	5.34E+07	48	1.74E+08	68	1.39E+08	88	1.24E+08
9	6.78E+07	29	1.41E+08	49	3.08E+07	69	1.19E+08	89	1.90E+08
10	8.30E+07	30	1.28E+08	50	8.44E+07	70	1.01E+08	90	1.65E+08
11	1.29E+08	31	1.02E+08	51	1.93E+08	71	9.96E+07	91	1.82E+08
12	4.93E+07	32	8.59E+07	52	7.22E+07	72	9.96E+07	92	1.81E+08
13	1.24E+08	33	8.87E+07	53	2.10E+08	73	1.09E+08	93	1.50E+08
14	1.90E+08	34	1.52E+08	54	5.73E+07	74	1.35E+08	94	1.48E+08
15	1.65E+08	35	6.39E+07	55	6.23E+07	75	1.85E+07	95	9.26E+07
16	1.82E+08	36	1.21E+08	56	1.26E+08	76	9.12E+07	96	1.16E+08
17	1.81E+08	37	1.93E+08	57	1.07E+08	77	1.81E+08	97	8.26E+07
18	1.50E+08	38	1.54E+08	58	9.07E+07	78	6.79E+07	98	4.71E+07
19	1.48E+08	39	2.24E+08	59	8.56E+07	79	2.39E+08	99	1.03E+08
20	9.26E+07	40	5.69E+07	60	1.51E+08	80	1.31E+08	100	1.21E+08

Tabla A.5 Máximos esfuerzos para 250 pruebas en un análisis con defectos

No.	Esfuerzo [Pa]								
1	1.06E+08	51	9.63E+07	101	1.17E+08	151	6.20E+07	201	1.17E+08
2	8.95E+07	52	1.52E+08	102	1.56E+08	152	1.06E+08	202	1.64E+08
3	1.45E+08	53	1.12E+08	103	1.23E+08	153	9.16E+07	203	1.00E+08
4	7.16E+07	54	1.37E+08	104	3.66E+07	154	7.36E+07	204	1.81E+08
5	8.79E+07	55	1.62E+08	105	5.48E+07	155	1.85E+08	205	1.10E+08
6	2.03E+08	56	1.29E+08	106	1.01E+08	156	1.08E+08	206	1.53E+08
7	1.60E+08	57	1.27E+08	107	1.65E+08	157	1.37E+08	207	1.64E+08
8	7.40E+07	58	1.15E+08	108	1.75E+08	158	1.40E+08	208	1.60E+08
9	1.46E+08	59	1.34E+08	109	2.05E+08	159	4.69E+07	209	1.15E+08
10	4.28E+07	60	9.61E+07	110	9.49E+07	160	1.30E+08	210	1.10E+08
11	1.47E+08	61	1.73E+08	111	1.13E+08	161	4.40E+07	211	1.44E+08
12	6.58E+07	62	1.37E+08	112	1.56E+08	162	7.14E+07	212	1.16E+08
13	9.46E+07	63	4.33E+07	113	1.37E+08	163	1.85E+08	213	9.22E+07
14	2.74E+08	64	1.07E+08	114	2.13E+08	164	8.70E+07	214	1.61E+08
15	7.08E+07	65	2.89E+07	115	2.24E+08	165	1.33E+08	215	1.08E+08
16	1.35E+08	66	2.00E+08	116	8.60E+07	166	2.05E+08	216	2.02E+08
17	4.41E+07	67	1.26E+08	117	1.98E+08	167	1.20E+08	217	1.39E+08
18	1.01E+08	68	9.37E+07	118	1.26E+08	168	2.92E+08	218	1.18E+08
19	1.81E+08	69	4.80E+07	119	2.42E+07	169	1.75E+08	219	7.34E+07
20	1.18E+08	70	1.12E+08	120	1.28E+08	170	8.87E+07	220	1.05E+08
21	1.86E+08	71	7.15E+07	121	5.60E+07	171	1.57E+08	221	1.49E+08
22	9.56E+07	72	8.84E+07	122	1.06E+08	172	1.42E+08	222	1.02E+08
23	1.33E+08	73	1.33E+08	123	6.28E+07	173	9.02E+07	223	5.37E+07
24	1.73E+08	74	7.47E+07	124	1.77E+08	174	3.05E+08	224	4.48E+07
25	9.94E+07	75	1.47E+08	125	1.62E+07	175	1.74E+08	225	2.55E+07
26	1.31E+08	76	1.47E+08	126	6.20E+07	176	1.61E+08	226	1.07E+08
27	1.41E+08	77	8.71E+07	127	1.06E+08	177	1.31E+08	227	1.07E+08
28	6.48E+07	78	6.49E+07	128	9.16E+07	178	1.67E+08	228	7.09E+07
29	1.14E+08	79	1.57E+08	129	7.36E+07	179	1.82E+08	229	1.80E+08
30	2.01E+08	80	3.41E+07	130	1.85E+08	180	1.66E+08	230	1.96E+08
31	1.69E+08	81	1.77E+08	131	1.08E+08	181	5.54E+07	231	6.43E+07
32	1.73E+08	82	8.15E+07	132	1.37E+08	182	3.97E+07	232	1.84E+08
33	8.84E+07	83	1.47E+08	133	1.40E+08	183	1.18E+08	233	1.53E+08
34	1.08E+08	84	4.52E+07	134	4.69E+07	184	1.84E+08	234	1.11E+08
35	1.54E+08	85	1.88E+08	135	1.30E+08	185	9.57E+07	235	2.11E+08
36	1.98E+08	86	1.21E+08	136	4.40E+07	186	1.18E+08	236	1.41E+08
37	1.82E+08	87	1.36E+08	137	7.14E+07	187	1.08E+08	237	1.35E+08
38	1.48E+08	88	1.72E+08	138	1.85E+08	188	1.09E+08	238	1.41E+08
39	2.48E+07	89	8.62E+07	139	8.70E+07	189	1.16E+08	239	1.82E+08
40	6.35E+07	90	5.17E+07	140	1.33E+08	190	1.38E+08	240	1.92E+08
41	1.47E+08	91	9.11E+07	141	2.05E+08	191	1.36E+08	241	7.94E+07
42	1.01E+08	92	8.41E+07	142	1.20E+08	192	6.45E+07	242	1.26E+08
43	2.53E+07	93	1.33E+08	143	2.92E+08	193	1.38E+08	243	5.25E+07
44	1.06E+08	94	1.12E+08	144	1.75E+08	194	1.08E+08	244	1.34E+08
45	9.51E+07	95	9.43E+07	145	8.87E+07	195	1.71E+08	245	1.15E+08
46	1.04E+08	96	1.45E+08	146	1.57E+08	196	1.10E+08	246	1.54E+08
47	1.27E+08	97	1.94E+07	147	1.42E+08	197	8.26E+07	247	1.53E+08
48	1.11E+08	98	8.88E+07	148	9.02E+07	198	1.44E+08	248	1.31E+08
49	2.13E+08	99	1.01E+08	149	3.05E+08	199	7.77E+07	249	7.43E+07
50	1.04E+08	100	1.11E+08	150	1.74E+08	200	6.22E+07	250	1.68E+07

# ANEXO B

## ALGORITMOS *Log File* DESARROLLADOS

### Algoritmo B.1 *Análisis del anclaje superior sin defectos internos*

```
!! Definición de parámetros
YOUNG=218.64E9                !MODULO DE YOUNG
DSY=14.925E9                 !DESVIACION ESTANDAR DEL MODULO DEYOUNG
FZAT=27.8E6                  !FUERZA DE TRACCION
DSFT=12.51E6                 !DESVIACION ESTANDAR FUERZA DE TRACCION
FZAV=2.28E6                  !FUERZA DE VIENTO
DSFV=0.57E6                 !DESVIACION ESTANDAR FUERZA DE VIENTO
DENSIDAD=7854                !DENSIDAD DEL ACERO
POISSON=0.3                  !RELACION DE POISSON

!! Pre-proceso
!/PREP7
/TITLE, Anclaje de puente sin defectos

!! Definición de propiedades
MPTEMP, , , , , , , ,
MPTEMP, 1, 0
MPDATA, EX, 1, , YOUNG
MPDATA, DENS, 1, , DENSIDAD
MPDATA, PRXY, 1, , POISSON
ET, 1, SOLID92                !TIPO DE ELEMENTO

!! Construcción de la geometría
!! Creación de keypoints
K, 1, 0, 0, 0, 0.53           !CONSTRUCCION DE KEYPOINTS
K, 2, 0, 0, 0, 0.55
K, 3, 0, 0, 0.142, 0.55
K, 4, 0, 0, 0.142, 0.575
K, 5, 0, 0, 0.1575, 0.575
K, 6, 0, 0, 0.1575, 0.530
K, 7, 0, 0, 0.1575, 0.26
K, 8, 0, 0, 0.21, 0
K, 9, 0, 0, 0, 0
K, 10, 0, 0, 0.21, 0.12734

!! Creación de líneas entre keypoints
L, 9, 1                       !CONSTRUCCION DE LINEAS
L, 1, 2
L, 2, 3
L, 3, 4
L, 4, 5
L, 5, 6
L, 6, 7
LARC, 7, 8, 10, 0.662
L, 8, 9
L, 1, 6
```

```

!! Creacion de areas por keypoints
AL, 1, 7, 8, 9, 10                ! CONSTRUCCION DE AREA
AL, 2, 3, 4, 5, 6, 10

!! Rotacion de areas y adic ion para crear volumen
VROTAT, 1, , , , , 1, , 360, ,
VROTAT, 2, , , , , 1, , 360, 8
VADD, ALL
/VIEW, 1, 1, 1, 1                ! AJUSTE VISUAL
/ANG, 1
/REP, FAST
WPSTYLE, , , , , , 1
WPSTYLE, 0.05, 0.05, -1, 1, 0.003, 0, 2, , 5
WPRO, , -90.000000,
WPOF, , , -0.30

!! Substraccion de l ementos para generar volumen completo
CYL4, -0.346, , 0.321, , , , 0.6
CYL4, 0.346, , 0.321, , , , 0.6
RPR4, 3, 0.01155, 0.02, 0.04619, 60, 0.6    ! CONSTRUCCION BISEL
RPR4, 3, -0.01155, 0.02, 0.04619, 120, 0.6
VSBV, 13, ALL
WPCSYS, -1, 0
/VIEW, 1, -1
/ANG, 1
/REP, FAST
/ANG, 1, 45, YS, 1
/REP, FAST
/ANG, 1, 45, XS, 1
/REP, FAST

!! Mal l ado
BTOL, 1E-16
LESIZE, ALL, 0.05                ! TAMAÑO DE LINEA
VMESH, ALL                        ! DISCRETIZACION DE VOLUMEN

!! Condiciones de frontera cinematicas
DA, 43, ALL, 0                    ! CONDICIONES DE FRONTERA CINEMATICA
DA, 44, ALL, 0

!! Selecc ion de areas y aplicacion de fuerza de tracci on
SFA, 22, 1, PRES, (-1*FZAT)       ! APLICACION DE FUERZA DE TRACCION
SFA, 28, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 34, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 40, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 46, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 52, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 58, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 64, 1, PRES, (-1*FZAT)

!! Selecc ion de areas y aplicacion de fuerza de viento
SFA, 75, 1, PRES, FZAV            ! APLICACION FUERZA VIENTO
SFA, 76, 1, PRES, FZAV

!! Soluc ion del probl ema
/SOLU
SOLVE
FINISH

```

```
!! Postproceso y revision de parametros de salida
/POST1                                !VISUALIZACION DE RESULTADOS
/SET, LAST
/DSCALE, ALL, 1.0
/EFACET, 1
PLNSOL, S, EQV, 0, 1.0

!! Obtencion del esfuerzo maximo
NSEL, ALL

!! Clasificar los esfuerzos en todos los nodos por magnitud Ascendente
NSORT, S, EQV, 1, 1

!! Extraccion del esfuerzo maximo absoluta
*GET, MAX_ESFUERZO, SORT, 0, MAX

!! Obtencion de la deformacion maxima
NSEL, ALL

!! Clasificar las deformaciones en todos los nodos por magnitud Ascendente
NSORT, S, EQV, 1, 1

!! Extraccion de la deformacion maxima absoluta
*GET, MAX_DEFORMACION, SORT, 0, MAX
FINISH

!! Diseno de analisis probabilistico
/PDS

!! Agregando distribuciones de probabilidad a las variables de entrada
PDVAR, YOUNG, GAUS, YOUNG, DSY, 0, 0          !D. NORMAL PARA M. YOUNG
PDVAR, FZAT, GAUS, FZAT, DSFT, 0, 0          !D. NORMAL FUERZA DE TRACCION
PDVAR, FZAV, GAUS, FZAV, DSFV, 0, 0          !D. NORMAL FUERZA DE VIENTO

!! definicion de parametros de salida
PDVAR, MAX_ESFUERZO, RESP
PDVAR, MAX_DEFORMACION, RESP

!! definiendo simulacion montecarlo
PDMETH, MCS, LHS
PDLHS, 40, 1, RAND, , 'ALL', , , , INIT
```



```

!! Rotacion de areas y adic ion para crear volumen
VROTAT, 1, , , , , 1, , 360, ,
VROTAT, 2, , , , , 1, , 360, 8
VADD, ALL
/VIEW, 1, 1, 1, 1                                !AJUSTE VI SUAL
/ANG, 1
/REP, FAST
WPSTYLE, , , , , , 1
WPSTYLE, 0. 05, 0. 05, -1, 1, 0. 003, 0, 2, , 5
WPRO, , -90. 000000,
WPOF, , , -0. 30

!! Substracc ion de elementos para generar volumen completo
CYL4, -0. 346, , 0. 321, , , , 0. 6
CYL4, 0. 346, , 0. 321, , , , 0. 6
RPR4, 3, 0. 01155, 0. 02, 0. 04619, 60, 0. 6                                !CONTRUCCION BI SEL
RPR4, 3, -0. 01155, 0. 02, 0. 04619, 120, 0. 6
VSBV, 13, ALL
WPCSYS, -1, 0
/VIEW, 1, -1
/ANG, 1
/REP, FAST
/ANG, 1, 45, YS, 1
/REP, FAST
/ANG, 1, 45, XS, 1
/REP, FAST
NUMCMP, VOLU

!! Defectos en la zona de soldadura
!! def in i c i o n de parametros para ubi c a c i o n de defectos
DELTA_1=0. 018
DELTA_2=0. 033
A=0. 051
B=0. 42
R=(1/(2*(DELTA_2-DELTA_1)))*(((B**2)/4)+((DELTA_1-DELTA_2)**2))
C=1
DELTA_3=R-DELTA_2

!!Ubi c a c i o n de defectos en la zona de soldadura del ancl a

*DO, D, 1, ND_ZE, 1
C=C+1
E=GDIS(0, DELTA_1/6)
*AFUN, DEG
ALFA= RAND(-ASIN(B/(2*R))*0. 9, ASIN(B/(2*R))*0. 9)
BETA=RAND(-ASIN(A/(2*R))*0. 9, ASIN(A/(2*R))*0. 9)
RAD_V=RAND(RADI 0*1. 25, RADI 0)
SPH4, 0, 0, RAD_V
RF=R+E
POS_X=RV*COS(ALFA)*SIN(BETA)
POS_Y=RV*SIN(ALFA)
Z=RF*COS(ALFA)*COS(BETA)
POS_Z=Z-DELTA_3
VGEN, , C, , , POS_X, POS_Y, POS_Z, , , 1
F=D+1
*ENDDO

!! Defectos en la zona de cil indrica
!! def in i c i o n de parametros para ubi c a c i o n de defectos

```

```

DIAM=0.315
RAD_1=DIAM/2

!!Ubicacion de defectos en la zona de cilindrica del ancla

*DO, K, 1, ND_ZC, 1
C=C+1
RAD_V=RAND(RADIO*1.25, RADIO)
SPH4, 0, 0, RAD_V
RAD_C=ABS(GDIS(0, RAD_1/3))
FI=RAND(0, 360)
POS_X2=RAD_C*COS(FI)
POS_Y2=RAD_C*SIN(FI)
POS_Z2=RAND((0.26+RAD_V), (0.55-RAD_V))
VGEN, , C, , , POS_X2, POS_Y2, POS_Z2, , , 1
L=K+1
*ENDDO

!! Defectos en la zona de transicion
!! definicion de parametros para ubicacion de defectos
DC=0.26
DA=0.237
DD=DC-DA
TETA=26

!!Ubicacion de defectos en la zona de transicion del ancla

*DO, P, 1, ND_ZT, 1
C=C+1
AT=GDIS(0, ((TETA)/3))
RAD_V=RAND(RADIO*1.25, RADIO)
SPH4, 0, 0, RAD_V
POS_Z3=DC-ABS(GDIS(0, DA/3))
POS_X3=TAN(AT)*(POS_Z3-DD)
POS_Y3=GDIS(0, (DIAM/6))
VGEN, , C, , , POS_X3, POS_Y3, POS_Z3, , , 1
Q=P+1
*ENDDO

!!Substraccion de defectos en el volumen del ancla
BTOL, 1E-28
VSBV, 1, ALL
!DISCRETIZACION DE VOLUMEN

!! Mallado
LESI ZE, ALL, RADIO*2
LSEL, S, LINE, , 3, 9
LSEL, A, LINE, , 12
LSEL, A, LINE, , 16
LSEL, A, LINE, , 19, 21
LSEL, A, LINE, , 23
LSEL, A, LINE, , 26
LSEL, A, LINE, , 30
LSEL, A, LINE, , 33
LSEL, A, LINE, , 35, 38
LSEL, A, LINE, , 40, 42
LSEL, A, LINE, , 44, 46
LSEL, A, LINE, , 49, 51
LSEL, A, LINE, , 53, 56

```

```

LSEL, A, LINE, , 58, 60
LSEL, A, LINE, , 62, 64
LSEL, A, LINE, , 67, 69
LSEL, A, LINE, , 71, 74
LSEL, A, LINE, , 76, 78
LSEL, A, LINE, , 80, 82
LSEL, A, LINE, , 85, 87
LSEL, A, LINE, , 89, 92
LSEL, A, LINE, , 94, 96
LSEL, A, LINE, , 98, 100
LSEL, A, LINE, , 102, 112
LSEL, A, LINE, , 123, 134
LESIZE, ALL, 0.042, , , , 1, , , 1,          ! TAMAÑO DE LINEA
LSEL, ALL
VMESH, ALL

      !! Condiciones de frontera cinematicas
DA, 43, ALL, 0          ! CONDICIONES DE FRONTERA CINEMATICA
DA, 44, ALL, 0

      !! Seleccion de areas y aplicacion de fuerza de traccion
SFA, 22, 1, PRES, (-1*FZAT)          ! APLICACION DE FUERZA DE TRACCION
SFA, 28, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 34, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 40, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 46, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 52, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 58, 1, PRES, (-1*FZAT)
SFA, 64, 1, PRES, (-1*FZAT)

      !! Seleccion de areas y aplicacion de fuerza de viento
SFA, 75, 1, PRES, FZAV          ! APLICACION FUERZA VIENTO
SFA, 76, 1, PRES, FZAV

      !! Solucion del problema
/SOLU
SOLVE
FINISH

      !! Postproceso y revision de parametros de salida
/POST1          ! VISUALIZACION DE RESULTADOS
/SET, LAST
/DSCALE, ALL, 1.0
/EFACET, 1
PLNSOL, S, EQV, 0, 1.0

      !! Obtencion del esfuerzo maximo
NSEL, ALL

      !! Clasificar los esfuerzos en todos los nodos por magnitud Ascendente
NSORT, S, EQV, 1, 1

      !! extraccion del esfuerzo maximo absoluta
*GET, MAX_ESFUERZO, SORT, 0, MAX

      !! Obtencion de la deformacion maxima
NSEL, ALL

      !! Clasificar las deformaciones en todos los nodos por magnitud Ascendente

```

```
NSORT, EPTO, EQV, 1, 1

!! Extraccion de la deformacion maxima absoluta
*GET, MAX_DEFORMACION, SORT, 0, MAX

!! Obtencion del desplazamiento maximo en eje z
NSEL, ALL

!! Clasificar las deformaciones en todos los nodos por magnitud Ascendente
NSORT, U, Z, 1, 1

!! Extraccion de la deformacion maxima absoluta
*GET, DESPLAZAMIENTO_Z, SORT, 0, MAX

!! Obtencion del desplazamiento maximo en eje X
NSEL, ALL

!! Clasificar las deformaciones en todos los nodos por magnitud Ascendente
NSORT, U, X, 1, 1

!! Extraccion de la deformacion maxima absoluta
*GET, DESPLAZAMIENTO_X, SORT, 0, MAX
FINISH

!! Diseno de analisis probabilistico
/PDS

!! Agregando distribuciones de probabilidad a las variables de entrada
PDVAR, YOUNG, GAUS, YOUNG, DSY, 0, 0           !DI ST. NORMAL PARA M. YOUNG
PDVAR, FZAT, GAUS, FZAT, DSFT, 0, 0           !DI ST. NORMAL FUERZA DE TRACCION
PDVAR, FZAV, GAUS, FZAV, DSFV, 0, 0           !DI ST. NORMAL FUERZA DE VIENTO

!! definicion de parametros de salida
PDVAR, MAX_ESFUERZO, RESP
PDVAR, MAX_DEFORMACION, RESP
PDVAR, DESPLAZAMIENTO_Z, RESP
PDVAR, DESPLAZAMIENTO_X, RESP

!! definiendo simulacion montecarlo
PDMETH, MCS, LHS
PDLHS, 10, 1, RAND, , 'ALL ' , , , INIT
```

# ANEXO C

## DIAGRAMAS DE FLUJO PARA UBICACIÓN DE DEFECTOS

Diagrama C.1 Diagrama de flujo para ubicación de defectos en la zona de empotramiento

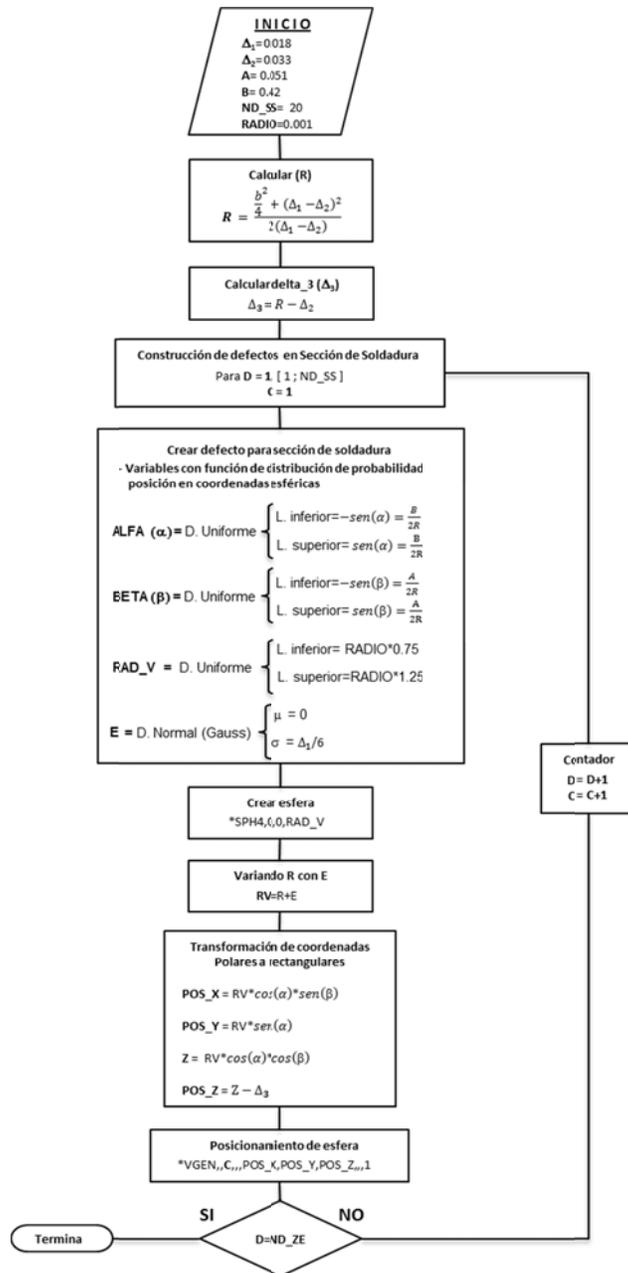


Diagrama C.2 Diagrama de flujo para ubicación de defectos en la zona de transición

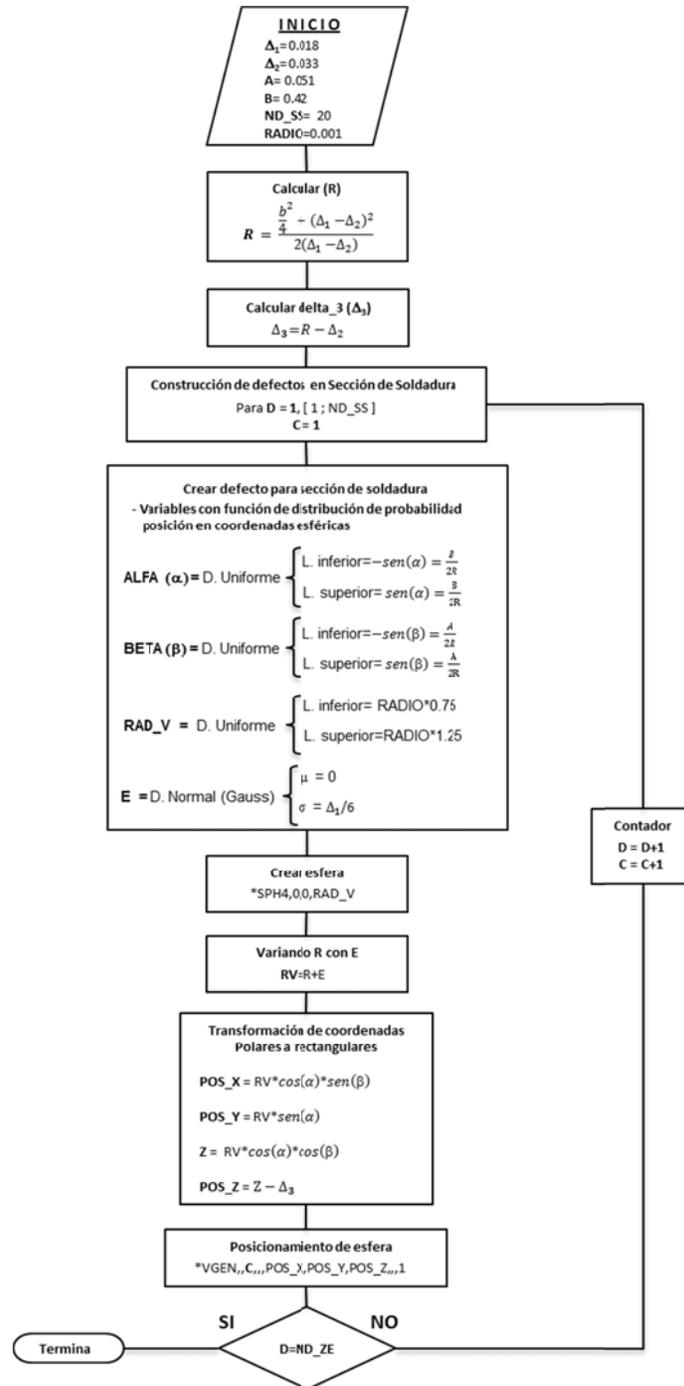


Diagrama C.3 Diagrama de flujo para ubicación de defectos en la zona cilíndrica

