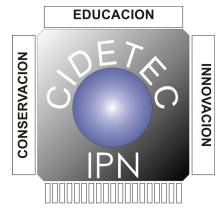




INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**CENTRO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO EN CÓMPUTO**



**DISEÑO DE UNA LEY DE CONTROL
PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS
DE UN ROBOT MANIPULADOR**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE CÓMPUTO

P R E S E N T A:

ING. HÉCTOR MANUEL MALDONADO DEL TORO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAMÓN SILVA ORTIGOZA

DR. VÍCTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN

MÉXICO, D. F.

JUNIO 2011.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 14:00 horas del día 23 del mes de junio de 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del CIDETEC para examinar la tesis de grado titulada:

"DISEÑO DE UNA LEY DE CONTROL PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE UN ROBOT MANIPULADOR"

Presentada por el alumno:

MALDONADO
Apellido paterno

DEL TORO
materno

HÉCTOR MANUEL
nombre(s)

Con registro:


B	0	9	1	3	6	1
---	---	---	---	---	---	---


aspirante al grado de:


MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE CÓMPUTO


Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.


LA COMISIÓN REVISORA


DRA. MAGDALENA MARCIANO MELCHOR
Presidente


M. EN C. JUAN CARLOS GONZÁLEZ ROBLES
Secretario


DR. RAMÓN SILVA ORTIGOZA
Primer Vocal
(Director de Tesis)


DR. VÍCTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN
Segundo Vocal
(Director de Tesis)


M. EN C. JUAN CARLOS RIVERA DÍAZ
Tercer Vocal


M. EN C. EDUARDO VEGA ALVARADO
Suplente

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO


DR. VÍCTOR MANUEL SILVA GARCÍA



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 27 del mes Junio del año 2011, el (la) que suscribe Héctor Manuel Maldonado Del Toro alumno (a) del Programa de Maestría en Tecnología de Cómputo con número de registro B091361, adscrito a Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ramón Silva Ortigoza y el Dr. Victor Manuel Hernández Guzmán, y cede los derechos del trabajo intitulado Diseño de una ley de control para el seguimiento de trayectorias de un robot manipulador al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección thunderhead86@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Héctor Manuel Maldonado Del Toro
Nombre y firma

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia el problema de seguimiento de trayectorias de un robot manipulador de dos grados de libertad, empleando el controlador PD con precompensación. Las ganancias de dicho controlador son seleccionadas utilizando un criterio de sintonía. La posición del extremo del robot se controla indirectamente a través del control de posición de las uniones.

Inicialmente se presenta una introducción relacionada con el tema de robots manipuladores donde se realizó un estado del arte que permitió conocer las distintas problemáticas asociadas al control de dichos robots, particularmente en el problema de seguimiento de trayectoria. Una vez realizado lo anterior, se planteó los objetivos de la tesis y la metodología que se siguió para lograrlo. Posteriormente, se realizó el estudio de la cinemática y dinámica que involucra al robot manipulador para obtener sus modelos matemáticos. Se analizó la ley de control PD con precompensación, y se realizó un criterio de sintonía para seleccionar las ganancias óptimas del controlador, también se realizaron las simulaciones numéricas con el fin de poner a prueba el desempeño del controlador usando Matlab[®]-Simulink[®]. Se implementó la ley de control mediante la tarjeta DS1104 de la marca dSPACE[®] para realizar los experimentos de seguimiento de trayectorias, obteniendo resultados satisfactorios. Finalmente se presentan las conclusiones y perspectivas a futuro de este trabajo.

Abstract

This work is concerned with the trajectory tracking of a 2-degree of freedom robotic arm. This task is solved by using a PD plus feedforward controller. The position of the robot end effector is controlled indirectly through the precise control of the angular positions at the robot joints.

A literature review on the subject is first presented. Then the objectives of the work are given, and the methodology used to solve the problem is described. The kinematic and dynamic models of the robotic arm under study are reviewed. A previous presentation of the global stability result on PD plus feedforward control for trajectory tracking of robotic arms is studied. The corresponding stability conditions are used as a criterion to select the controller gains. A simulation study is performed using Matlab[®]-Simulink[®] employing the kinematic and dynamic models of the robot under study. Several experimental results are presented which were performed using a DS1104 board from dSPACE[®]. Finally, some conclusions and remarks on future work are presented at the end of the document.

Dedicatoria

A dios por darme la capacidad de realizar los estudios de Maestría y poder superarme día a día. Por permitirme seguir a lado de todos mis seres queridos.

A mis padres Minerva y Héctor, por darme el apoyo y las fuerzas para culminar este trabajo, gracias por su cariño y amor que siempre me han brindado, mil gracias los amo.

A mis hermanos Janelly y Jairo, por todos los momentos que hemos compartido y por el apoyo que me han brindado a lo largo de toda mi vida.

A todos mis primos, en especial a Paulo y Waldir por que siempre han confiado en mi y por darme su apoyo, gracias por todo.

A mi novia Lilia Adriana, por darme todo su amor y las fuerzas para terminar este trabajo, gracias por darle sentido a mi vida y por ser muy paciente conmigo. Te amo mi amorcito.

A todos mis ex-compañeros del Tecnológico de Reynosa y del CBTIS No. 15 que han sido importantes en mi formación como estudiante. A mis amigos de toda la vida Adri, Zure, Fer y Pancho. Para que sea un aliciente y que decidan seguir creciendo académicamente.

Agradecimientos

Al Dr. Ramón Silva Ortigoza, por confiar en mi persona y permitirme trabajar con él. Le agradezco por apoyarme con la crítica y recomendaciones que me hicieron crecer profesionalmente. Por su compromiso y consejos a nivel profesional y personal.

Al Dr. Victor Manuel Hernández Guzmán, por ser mi asesor de tesis, quien con sus conocimientos se lograron superar las dificultades presentadas a lo largo de esta investigación.

A mis revisores, la Dra. Magdalena Marciano Melchor, el M. en C. Juan Carlos González Robles, el M. en C. Juan Carlos Rivera Díaz y el M. en C. Eduardo Vega Alvarado. A todos ellos, por su aportación en la realización de este trabajo y su ayuda en mi desarrollo profesional

Al CIDETEC-IPN, por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría y a sus docentes por brindarme los conocimientos necesarios para desarrollar este trabajo de investigación. Al personal administrativo por su valiosa ayuda en cada procedimiento. Al director Dr. Victor Manuel Silva García por su apoyo recibido en todo momento.

A mis amigos y compañeros del CIDETEC, en especial a Edgar Roberto Ramos Silvestre por el ánimo y apoyo dado en todo momento a lo largo de estos dos años de estudio.

A la SIP-IPN y al CONACYT, por el apoyo de las becas brindadas durante todo este periodo, ya que fueron cruciales para la culminación de esta tesis y los estudios de Maestría.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes históricos de la robótica	1
1.2. Robots manipuladores	4
1.3. Estado del arte	5
1.4. Planteamiento del problema	7
1.5. Objetivos	7
1.6. Recursos a utilizar	8
1.7. Contenido de la tesis	8
2. Modelado matemático del robot manipulador	11
2.1. Estructuras básicas	11
2.2. Modelo cinemático	14
2.2.1. Modelo cinemático directo	14
2.2.2. Modelo cinemático inverso	16
2.3. Modelo dinámico	19
2.4. Robot manipulador a utilizar	23
2.4.1. Estructura mecánica	23
2.4.2. Electrónica de potencia	27
2.4.3. Adquisición de datos y control	28
2.4.4. Robot manipulador conectado para tiempo real	29
3. Ley de control y simulación	31
3.1. Definición de las trayectorias a seguir	31
3.1.1. Trayectorias definidas para desplazamientos angulares deseados	31
3.1.2. Parábola	34
3.2. Controlador PD con precompensación	36
3.3. Ejemplo del motor con resorte	37
3.4. Criterio de sintonía para un robot de n grados de libertad	38
3.5. Criterio de sintonía aplicado al robot a utilizar	39
3.5.1. Criterio de sintonía aplicado a una trayectoria angular	40
3.5.2. Criterio de sintonía aplicado a una parábola	45
3.6. Simulación de la ley de control	47
3.6.1. Diagrama a bloques en Matlab®-Simulink®: Trayectoria angular	47

3.6.2. Diagrama a bloques en Matlab®-Simulink®: Parábola	50
3.7. Resultados obtenidos en simulación	50
3.7.1. Resultados para la trayectoria angular	50
3.7.2. Resultados para la parábola	53
4. Control en tiempo real	55
4.1. Diagrama a bloques en Matlab®-Simulink®	55
4.1.1. Diagrama a bloques para la trayectoria angular	56
4.1.2. Diagrama a bloques para la parábola	59
4.2. Resultados experimentales	59
4.2.1. Resultados de la trayectoria angular	59
4.2.2. Resultados de la parábola	60
5. Conclusiones y perspectivas a futuro	63
Referencias	67
A. Representación en variables de estados	71
B. Motores y panel de conexiones	73
B.1. Hojas técnicas de los motores	73
B.2. Panel de conexiones del robot manipulador	76
C. Diagramas a bloques en Matlab®-Simulink®: Parábola	77
C.1. Diagrama a bloques para simulación: Parábola	77
C.2. Diagrama a bloques para tiempo real: Parábola	77
D. Conversión de pulsos a radianes	81
E. Comentario sobre la selección de una trayectoria	83

Índice de figuras

1.1. Robot manipulador con elemento terminal para soldadura de arco.	5
2.1. Configuración del robot articulado.	12
2.2. Configuración del robot esférico.	12
2.3. Configuración del robot SCARA.	13
2.4. Configuración del robot cilíndrico.	13
2.5. Configuración del robot cartesiano.	14
2.6. Diagrama del robot manipulador para analizar la cinemática directa. . .	15
2.7. Diagrama del robot manipulador para analizar la cinemática inversa. . .	17
2.8. Diagrama del robot manipulador para analizar el modelo dinámico. . . .	19
2.9. Diagrama a bloques del brazo robótico a utilizar.	24
2.10. Brazo robótico.	25
2.11. Robot manipulador conectado para pruebas en tiempo real.	29
3.1. Trayectorias angulares deseadas.	32
3.2. Normas de los vectores de posición, velocidad y aceleración deseados. . .	33
3.3. Parábola en el plano $X - Y$	34
3.4. Posiciones articulares y normas de los vectores de posición, velocidad y aceleración deseados asociadas a la parábola.	35
3.5. Diagrama motor con resorte.	37
3.6. Diagrama a bloques utilizado para la simulación.	49
3.7. Gráficas de simulación para la trayectoria angular.	52
3.8. Gráficas de simulación para la parábola.	54
4.1. Diagrama a bloques utilizado para tiempo real.	58
4.2. Gráficas en tiempo real para la trayectoria angular.	61
4.3. Gráficas de tiempo real para la parábola.	62
B.1. Motor Pittman GM14904S014.	74
B.2. Motor Pittman GM8724S015.	75
B.3. Distribución de señales del conector DB25 al rack de conexiones.	76
C.1. Diagrama a bloques utilizado para la simulación.	78
C.2. Diagrama a bloques utilizado para tiempo real.	79

E.1. Trayectorias angulares deseadas. 83

Índice de tablas

2.1. Parámetros asociados al prototipo a utilizar.	26
3.1. Arreglo de Routh-Hurwitz.	38

Capítulo 1

Introducción

A través del tiempo los seres humanos han tenido que realizar actividades de alto riesgo, de mucha precisión y repetitividad, surgiendo la necesidad de hacer un mecanismo inteligente que tenga la habilidad de obedecer ordenes proporcionadas por los seres humanos. Este mecanismo inteligente nace con el desarrollo conjunto de las ramas de la electrónica, mecánica, programación y control. A este mecanismo inteligente se le llamó robot.

La aplicación de los robots hoy en día se extiende en diferentes áreas. Estas aplicaciones se encuentran en la industria, investigación, entretenimiento, entre otras. Un tipo de robots altamente utilizados en la industria son los manipuladores, ya que son parte fundamental en la fabricación de nuevos productos, gracias a su alta eficacia y durabilidad al momento de hacer aplicaciones que al ser humano le tomaría un riesgo. Los manipuladores ya que han sido de gran ayuda para el desarrollo de productos que le facilitan el modo de vida al ser humano.

1.1. Antecedentes históricos de la robótica

La robótica tiene su origen desde hace miles de años pero no era conocida como ciencia, solo se le conocía como autómatas. Los primeros modelos utilizaban la aplicación de fuerza directa para realizar los movimientos con juegos de poleas, engranajes y palancas; en esta fase los autómatas eran réplicas del ser humano que realizaban una serie de movimientos simples. Algunos de los autómatas más famosos de la edad media del siglo XII, son el hombre de hierro de Alberto Magno o la cabeza parlante de Roger Bacon [1].

En el año 1495 Leonardo da Vinci ya había diseñado uno de los primeros autómatas humanoides, llamándole “caballero mecánico” capaz de incorporarse, agitar los brazos, mover la cabeza y abrir y cerrar la mandíbula [2]. En el año de 1738 Jacques Vaucanson construyó androides automatizados, montó un autómata flautista capaz de ejecutar melodías. El muñeco realizaba digitación sobre el instrumento y seguía con los ojos la partitura. Además, construyó un pato mecánico de más de 400 piezas móviles, capaz de graznar y comer de la mano del público completando de forma total la digestión [3]. En 1795 Jean-Frédéric Leschot, se especializó en la fabricación de prótesis para sustituir

miembros amputados consiguiendo no sólo cubrir el aspecto estético sino desarrollar un alto grado de funcionalidad para los brazos y piernas construidos [1]. En 1801 Joseph Jacquard, en el inicio de la industria textil, inventa una máquina textil programada mediante tarjetas de memoria perforadas [4].

En 1921 aparece la palabra robot por primera vez, en una obra de teatro llamada “Los Robots Universales de Rossum” escrita por el dramaturgo checo Karel Capek [5]. La palabra checa “Robota” significa servidumbre o trabajo forzado, y cuando se tradujo al inglés se convirtió en el término robot. En 1938 Roselund y Pollard, de la compañía Devilbiss, construyen el primer brazo articulado (manipulador) para pintura de tipo spray [6], lo que representó una nueva forma de entender la producción industrial al incorporar robots a las cadenas de producción, donde hasta entonces sólo habían operado trabajadores humanos. En 1950, la palabra robot fue utilizada en la obra “Yo robot” por el escritor Isaac Asimov [7]. El término robótica es implementado por Isaac Asimov, definiendo a la ciencia que estudia a los robots. También inventó las denominadas “tres leyes de robótica” que son las siguientes:

1. Un robot no puede actuar contra un ser humano o mediante la inacción, que un ser humano sufra daños.
2. Un robot debe de obedecer las ordenes dadas por los seres humanos, salvo que estén en conflictos con la primera ley.
3. Un robot debe proteger su propia existencia, a no ser que esté en conflicto con las dos primeras leyes.

En 1955 J. Denavit y R. S. Hartenberg utilizan el álgebra matricial para describir y representar la geometría espacial de los elementos de un robot [8]. En 1956 George Devol obtiene la patente de un manipulador programable, que dio origen al robot industrial. A partir de Devol es cuando puede denominarse robot a una máquina [9]. En 1959 C. Y. Lee define los programas de decisiones binarias para el desarrollo de autómatas combinatorios, una herramienta alternativa a la lógica booleana útil para la descripción de autómatas combinatorios, ya que el álgebra de Boole no puede modelar la dinámica de los sistemas secuenciales [10]. Ese mismo año Edford Associates proponen un sistema de control denominado Controlador Digital Modular a la empresa General Motors Company que dará paso a los sistemas de control automático actuales, consistentes en máquinas de estado secuencial y procesadores centrales con desplazamiento de bits [11].

La empresa llamada Unimation en 1961 instala el primer robot llamado “Unimate” en la planta de General Motors para atender a una máquina de fundición. El robot disponía de un manipulador basado en control numérico y se movía por transmisión hidráulica [12]. En 1963 se inicia la implementación de robots en la industria automovilística en Europa, a la que Japón se suma en 1968. En ese mismo año se desarrolla en el Stanford Research Institute (SRI) el robot móvil Shakey, provisto de sensores táctiles y una cámara de visión [10].

Hasta 1970 todos los robots funcionaban con actuadores hidráulicos pero ese año el SRI construye un manipulador con 6 grados de libertad accionado por servomotores de

corriente continua, y era controlado por una computadora implementando un control de movimiento por lazo cerrado PID (Proporcional Integral Derivativo) [6]. El robot fabricado por Unimation denominado PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) que en español significa máquina programable universal para ensamble, se desarrolló en 1978 y comienza a trabajar para General Motors Company en tareas de montaje. Posteriormente, en 1981 se desarrolla el robot SCARA (Selective Compliant Assembly Robot Arm) que en español significa brazo robótico “obediente para ensamble selectivo” en la Universidad de Yamanashi en Japón y es ampliamente utilizado en la industria. En 1982 la empresa Fanuc de Japón y General Motors forman GM Fanuc para introducirse en el mercado de los robots en América del norte [13].

En el año de 1986 el robot submarino Jason del Instituto Oceanográfico de los Estados Unidos explora los restos del Titanic. En ese mismo año Honda comienza con el proyecto del humanoide llamado ASIMO (Advanced Step in Innovative Mobility) que en español significa un “avanzado paso en movilidad innovadora”. En 1997 se realiza la primera competencia de soccer utilizando robots, llevado a cabo en la ciudad de Nagoya, Japón, teniendo a más de 40 equipos [13]. En ese mismo año Honda presenta el humanoide P-3, capaz de caminar con seguridad sobre dos piernas, imitando la marcha humana, gracias a sensores de gravedad, visuales, de detección de ángulos y de aceleración. Entre sus habilidades figuran las de pasear por terreno llano, subir y bajar escaleras, abrir puertas, pulsar interruptores y empujar obstáculos [10].

En el año 2000 la compañía Honda da un gran paso en el área de la robótica al presentar la última versión del androide ASIMO. Ésta versión del androide se hizo para estar a la venta en el mercado teniendo como características el poder subir escaleras sin ninguna ayuda, tener movimientos seguros y delicados, siendo capaz de reaccionar a decenas de órdenes orales en el lenguaje japonés. También, es capaz de reconocer el rostro de personas. Asimismo, sus brazos y manos son lo suficientemente precisas como para encender luces, abrir puertas, levantar objetos y empujarlos [10]. En el año 2001 en el área médica es realizada la primera telecirugía, cuando los cirujanos en Nueva York controlaron la consola de mandos realizando una extracción laparoscópica de la vesícula biliar a una mujer de 68 años en Strasbourg, Francia. En el año 2005 aparece ROKVISS (Robotic Component Verification on board the International Space Station) que en español significa “componente robótico de verificación a bordo de la estación espacial internacional”, el cual es un brazo teleoperado construido por el German Aerospace Center, y se somete a su primera prueba en el espacio [13].

En los últimos años han sido diseñados otros robots para tareas de limpieza doméstica. En el terreno militar destacan robots desarticuladores de explosivos, o de vehículos de conducción autónoma. El desarrollo de la tecnología que nos rige actualmente, donde se incluyen las computadoras electrónicas, los actuadores de control con retroalimentación, transmisión de potencia a través de engranes, y la tecnología en sensores contribuyeron a flexibilizar los robots para desempeñar tareas difíciles de realizar en las diversas áreas en las que la robótica es ampliamente utilizada.

Una vez que se han mencionado algunos de los antecedentes históricos de la robótica,

a continuación se presenta una posible clasificación de la misma [14]:

$$\begin{array}{l}
 \checkmark \text{ Robots manipuladores} \\
 \checkmark \text{ Robots móviles} \left\{ \begin{array}{l} \text{Robots terrestres} \\ \text{Robots acuáticos} \\ \text{Robots aéreos} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Robots con ruedas} \\ \text{Robots con patas} \\ \text{Robots marinos} \\ \text{Robots submarinos} \end{array} \right.
 \end{array}$$

De acuerdo a esta clasificación, los robots manipuladores y los robots móviles son las piezas claves que conforman actualmente la robótica. En este trabajo se aborda el tema relacionado con los robots manipuladores

1.2. Robots manipuladores

Para hacer una definición de lo que es un robot manipulador no se tiene estrictamente una definición universal, pero de acuerdo a las definiciones encontradas en [15]: para la Asociación de Industrias Robóticas (RIA) un robot manipulador multifuncional es capaz de mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales según trayectorias variables, programadas para realizar diversas tareas. También este concepto ha sido tomado por la Organización Internacional de Estándares (ISO), definiendo al manipulador multifuncional reprogramable con varios grados de libertad, capaz de manipular piezas, materiales, dispositivos especiales y capaces de realizar tareas que se le programen. La Federación Internacional de la Robótica (IFR) le denomina al robot como una máquina de manipulación automática reprogramable y multifuncional, con tres o más ejes que puedan posicionar y orientar materias, piezas, dispositivos especiales para la ejecución de trabajos diversos en las diferentes etapas de la producción industrial ya sea en una posición fija o en movimiento.

Una definición importante es la que nos dice el Robot Institute of America (RIA), donde un robot es un manipulador multifuncional diseñado para mover cargas, piezas, herramientas o dispositivos especiales a través de variables de movimientos programados para la realización de una variedad de tareas [13]. De las definiciones mencionadas anteriormente se puede decir que un concepto común de lo que es un robot manipulador es un brazo mecánico con capacidad de ser programable y que incorpora un control complejo para la manipulación de objetos.

La diferencia entre un robot manipulador y otros autómatas es la versatilidad y la facilidad para cambiar la tarea a realizar simplemente cambiando sus programas. Además, de que las tareas a realizar están basadas en la manipulación. En lo que respecta a los componentes que conforman a un robot manipulador se encuentran los siguientes: estructura mecánica, actuadores, transmisiones, sensores y elementos terminales. En la Figura 1.1 se muestra un robot manipulador con un elemento terminal para soldadura de arco.

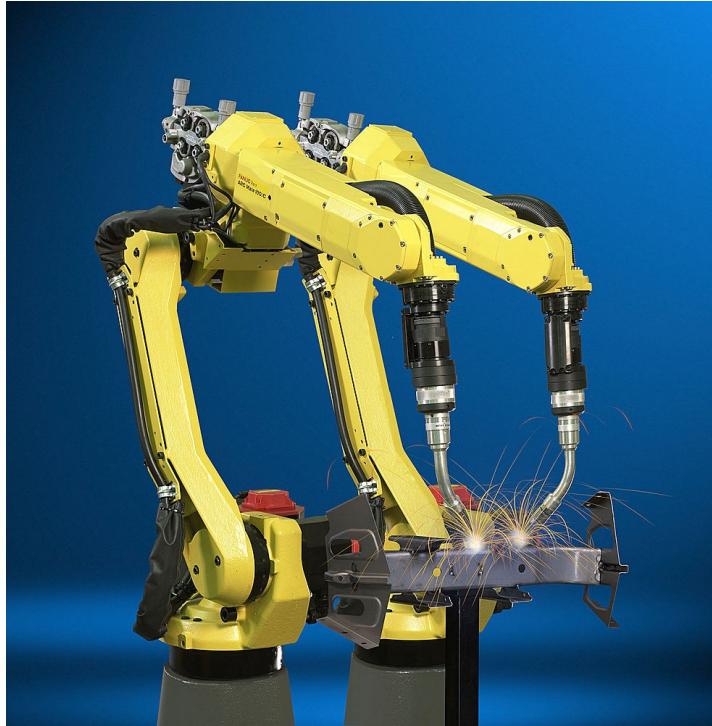


Figura 1.1: Robot manipulador con elemento terminal para soldadura de arco.

Los sistemas de control en los robots manipuladores a lo largo del tiempo han sido un problema de objeto de estudio. En el inicio de la robótica sus técnicas de control se limitaban a ser programados manualmente o por medio de secuencias lógicas. Hoy en día la mayor parte de los robots industriales emplean servomecanismos, con retroalimentación de posición y velocidad, todo esto para generar un movimiento inteligente de alta precisión y rapidez en las articulaciones. Así surge la necesidad de investigar técnicas para identificar los modelos dinámicos que puedan optimizar el control de las articulaciones, ya que en condiciones de trabajo afecta el movimiento y la carga del robot. Además, de tener en cuenta los momentos de inercia, acoplamiento de articulaciones y la gravedad [16]. Debido a lo expuesto anteriormente, dentro de los objetivos de control en los robots manipuladores se pueden dividir en: estabilidad, regulación de posición, seguimiento de trayectoria y optimización [14]. En la presente tesis se aborda el problema de seguimiento de trayectorias en robots manipuladores.

1.3. Estado del arte

El seguimiento de trayectoria de un manipulador se refiere a como realizar una trayectoria en el espacio de trabajo y su interpretación en función del movimiento de las articulaciones. Su interés es mover el último eslabón o elemento final desde una posición a otra, tomando en cuenta la velocidad y la aceleración entre los puntos y el factor más

importante a tomar en cuenta es la aceleración máxima posible [17].

Existen diversos trabajos de investigación que tratan las técnicas de control para el seguimiento de trayectorias. Estos trabajos describen como se ha contribuido al desarrollo de las leyes de control para un robot. Es conveniente decir que las técnicas de control para un robot manipulador es muy basto y amplio, y en este trabajo se citan las investigaciones más significativas para robots manipuladores.

En [18], se diseñan controladores robustos que hacen frente a los parámetros inciertos del sistema bajo control, realizando análisis de estabilidad a los controladores propuestos usando la teoría de Lyapunov, para seguimiento de trayectoria. En [19], se describe la comparación experimental entre cuatro modelos basados en algoritmos de control en una unidad de brazo robótico. Éstos controladores son el PD, par calculado, PD+, PD precompensación calculada y todos incluyen la compensación de Coulomb y fricción viscosa, así como la cancelación de momentos de gravedad. En [20], se muestra el diseño de dos controladores no lineales PID con compensación adaptable de gravedad para un robot manipulador de dos grados de libertad, aplicado en el problema de seguimiento de trayectoria, usando la teoría de estabilidad de Lyapunov para comprobar la estabilidad en forma global de los dos controladores.

En lo referente a seguimiento de trayectorias se realizaron trabajos de investigación. En [21], se considera el problema del PID para el seguimiento de trayectoria en el control de los robots manipuladores, el objetivo es demostrar que bajo el control PID clásico, la estabilidad semiglobal se puede asegurar con arbitrariedad teniendo un pequeño error en el seguimiento de trayectoria a la salida. En [22], se propone un diseño de control no lineal basado en pasividad tomando el modelo dinámico de Euler-Lagrange. Se experimenta en un robot manipulador para un conjunto de puntos y se prueba la estabilidad mediante el segundo método de Lyapunov. En [23] se propone una ley de control PD con salida retroalimentada tomando en cuenta la dinámica del robot utilizando el modelo dinámico, para el seguimiento de trayectoria en robots manipuladores, presentando resultados a nivel experimental.

También, se realizaron trabajos de investigación utilizando el método de aprendizaje iterativo para el control de los robots. En [24], se presenta un sistema de aprendizaje iterativo con el controlador PD que proporciona un entorno estable a lo largo de una trayectoria deseada teniendo las ventajas de rechazar perturbaciones desconocidas y la capacidad de adaptarse a los parámetros de sistema desconocidos. En [25], se presentan resultados del control adaptativo de aprendizaje iterativo en los robots manipuladores, teniendo como base un controlador PD con compensación de dos parámetros. En [26] se propone un esquema simple de control para robots manipuladores, donde se propone un lazo interno para estabilización y un lazo externo para el seguimiento de trayectoria. Para el control interno se usa un PD y para el control externo se usa un PID. Las ganancias del controlador son actualizadas en línea para hacer frente a las variaciones en el modelo de robot.

Además, otra técnica utilizada es las redes neuronales. En [27] se propone un nuevo esquema de control para el seguimiento de trayectoria en robot manipulador, basado en redes neuronales y un método de control PD. Además, se presentan resultados en

simulación y experimentales. En [28], se presentan dos controladores para el seguimiento de la trayectoria para manipuladores industriales, el primero que se propone está basado en la tecnología de redes neuronales y el otro es un controlador PD. En [29], se presenta una combinación de redes neuronales y lógica difusa para tener la capacidad de aprender una trayectoria, y se realizó un estudio sobre la trayectoria en un robot manipulador.

1.4. Planteamiento del problema

Con base en las publicaciones más significativas presentadas en la sección anterior, estas publicaciones son representativas y de importancia en el ámbito del estudio de los diferentes controladores que se pueden emplear en los robots manipuladores. Algunas publicaciones no son muy recientes pero se siguen tomando como base para el desarrollo de nuevos controladores. Al haber revisado dichas publicaciones, se puede observar que la mayoría presentan resultados sólo en simulación y no llegan a implementar, mucho menos probar los resultados prácticos en algún tipo de prototipo físico.

El seguimiento de trayectoria es un tarea muy común, que es objeto de amplio estudio dentro de la investigación de la robótica. Dado que existen diferentes técnicas de control para este tipo de problema cada una presentan ventajas y desventajas. En el presente trabajo se pretende implementar un controlador PD con precompensación para realizar experimentos y verificar el desempeño del mismo. Dicho controlador, realiza el seguimiento de trayectoria utilizando el modelo dinámico del robot manipulador así como la aceleración, velocidad y posición de la tarea encomendada (trayectoria deseada), para poder realizar movimientos rápidos y eficientes.

1.5. Objetivos

El objetivo general de este trabajo consiste en instrumentar una ley de control PD con precompensación, para el seguimiento de trayectorias de un robot manipulador e implementación de este controlador en tiempo real con la ayuda de la tarjeta DS1104. Para lograr este objetivo se propone la realización de una serie de objetivos específicos, que permitirán el desarrollo del presente trabajo. A continuación se presentan los objetivos específicos:

1. Estudiar el modelo dinámico del robot manipulador.
2. Estudiar el controlador PD con precompesación para la tarea de seguimiento de trayectorias, basado en el modelo dinámico.
3. Realizar la simulación del controlador PD con precompensación para un seguimiento de trayectorias, utilizando el software Matlab[®]-Simulink[®].
4. Realizar la integración de ControlDesk[®] y la tarjeta DS1104 con Matlab[®]-Simulink[®], para instrumentar la ley de control propuesta en el numeral 2.

5. Reportar los resultados experimentales obtenidos en tiempo real.
6. Comparar los resultados experimentales del robot, con los obtenidos a nivel simulación, y así determinar su eficiencia y desempeño.

1.6. Recursos a utilizar

Para cumplir con los objetivos planteados anteriormente se requieren recursos de diversos tipos. A continuación se mencionan los recursos más significativos empleados en el desarrollo de este trabajo:

- Instrumentos electrónicos como multímetro, osciloscopio y fuentes de poder.
- Computadora con procesador Pentium 4 a 2.4 GHz y con 1.5 GB de memoria RAM.
- Para la ejecución del software se utilizará la plataforma del sistema operativo Windows XP. Entre los más importantes están los siguientes: Matlab[®]-Simulink[®] así como ControlDesk[®], para conectarse con la tarjeta de adquisición.
- Tarjeta DS1104 para el procesamiento digital de señales marca dSPACE[®] modelo DS1104.
- Un robot manipulador de dos grados de libertad realizado en el CIDETEC-IPN, mediante los proyectos con número de registro 20090075 y 20100045, dirigidos por el Dr. Ramón Silva Ortigoza. Cabe mencionar que este robot fue realizado por el M. en C. Juan Carlos Rivera Díaz, en su tesis titulada: “Diseño, construcción y control en tiempo real de un brazo robótico de dos grados de libertad”.

1.7. Contenido de la tesis

Este trabajo consta de 5 capítulos y de 5 apéndices, los cuales se describen a continuación:

- En el Capítulo 1 se desarrolló una reseña histórica de la robótica, así como la composición general de un robot manipulador. Además, se presentaron las investigaciones más significativas del control de robots manipuladores, desde el contexto de control automático.
- En el Capítulo 2 se analiza la cinemática y dinámica del robot manipulador de dos grados de libertad y también se muestran las partes más importantes que componen al robot manipulador a utilizar en el desarrollo de la tesis.
- En el Capítulo 3 se definen las trayectorias a seguir para el robot manipulador y se analiza la ley de control PD con precompensación, para posteriormente mostrar los resultados obtenidos en simulación.

- En el Capítulo 4 se realiza la implementación en tiempo real de la ley de control PD con precompensación para el robot manipulador mediante la tarjeta DS1104. También se muestran los resultados obtenidos de dicha implementación.
- En el Capítulo 5 se llevan a cabo las conclusiones y perspectivas a futuro sobre esta tesis.

En la parte final de este documento se presentan los apéndices correspondientes a esta tesis, los cuales son:

- En el Apéndice A se representa el modelo dinámico asociado al robot de dos grados de libertad en variables de estado.
- En el Apéndice B se muestran las hojas de especificaciones de los motores utilizados, así como la tabla de conexiones que existe entre la tarjeta DS1104 y el prototipo a utilizar.
- En el Apéndice C se presentan los diagramas a bloques desarrollados en Matlab®-Simulink®, tanto para simulación como para tiempo real para la trayectoria definida por una parábola.
- En el Apéndice D se realiza la conversión de pulsos generados por el encoder a radianes.
- En el Apéndice E se realiza un comentario sobre la selección adecuada de una trayectoria deseada para el robot manipulador.

Capítulo 2

Modelado matemático del robot manipulador

En este capítulo se desarrollan los modelos matemáticos de un robot manipulador de dos grados de libertad y se describe el prototipo a utilizar. En primer lugar se presentan las estructuras básicas en el diseño de los robots manipuladores. Posteriormente, se muestra el desarrollo de la obtención del modelo cinemático y dinámico que involucra al robot manipulador bajo estudio. Y finalmente, se muestran las partes más importantes que componen al prototipo a utilizar, llamado robot manipulador de dos grados de libertad.

2.1. Estructuras básicas

Un robot manipulador puede ser visto como una cadena cinemática abierta formada por un conjunto de eslabones relacionados mediante articulaciones que permiten el movimiento para los eslabones sucesivos. Las articulaciones son típicamente de tipo giretorio (de revolución) o lineal (prismáticos). Una articulación de revolución es como una bisagra y permite la rotación relativa entre los dos enlaces. Una articulación prismática permite un movimiento relativo lineal entre dos enlaces. Denotamos las articulaciones de revolución por R y de las articulaciones prismáticos por P.

Al diseñar un robot manipulador se pueden combinar diferentes articulaciones. Esto da paso a diferentes estructuras cinemáticas, donde el número de grados de libertad total está dado por la suma de los grados de libertad que componen a las articulaciones. Estas estructuras se realizan en base al área de trabajo deseado que es el volumen total abarcado por el elemento terminal cuando el manipulador ejecuta todos los movimientos posibles y el área de trabajo está limitada por la geometría del manipulador. La mayoría de estos manipuladores están basados en cinco estructuras geométricas: articulada (RRR), esférica (RRP), SCARA (RRP), cilíndrica (RPP) y cartesiana (PPP). A continuación se describen brevemente:

- a) Manipulador articulado: Es también llamado manipulador antropomórfico, siendo

un diseño conjunto de las articulaciones de tipo revolución (R). Los ejes de las articulaciones están diseñados como la cintura (z_0), el hombro (z_1) y el codo (z_2). Típicamente el eje de la articulación z_2 es paralela a z_1 y ambos z_1 y z_2 son perpendiculares a z_0 . La estructura cinemática se muestra en la Figura 2.1(a) y el espacio de trabajo del manipulador articulado se muestra en las Figuras 2.1(b) y (c).

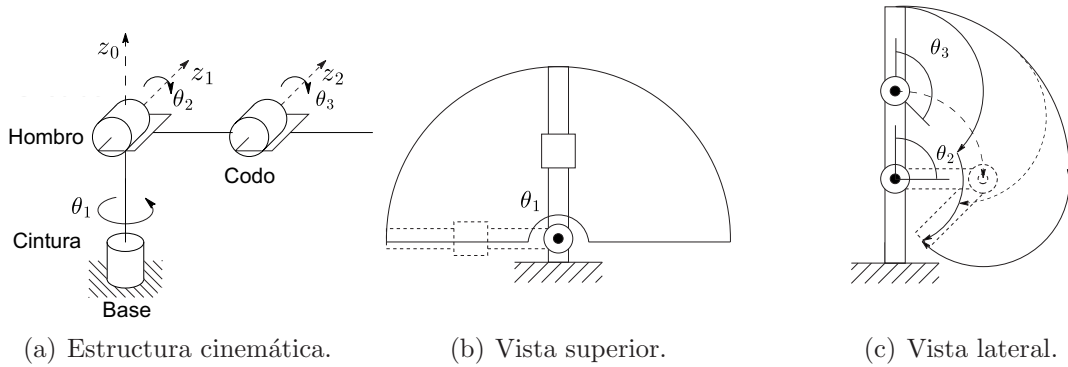


Figura 2.1: Configuración del robot articulado.

- b) Manipulador esférico: Este manipulador surge de sustituir la tercera unión, llamada codo (z_2) por una unión de tipo prismática del manipulador articulado. El término de manipulador esférico se deriva del hecho de que el conjunto de coordenadas coinciden con las coordenadas esféricas del elemento terminal con respecto a un sistema de coordenadas situado en la articulación del hombro. En la Figura 2.2(a) se muestra su estructura cinemática y el espacio de trabajo se muestra en la Figura 2.2(b).

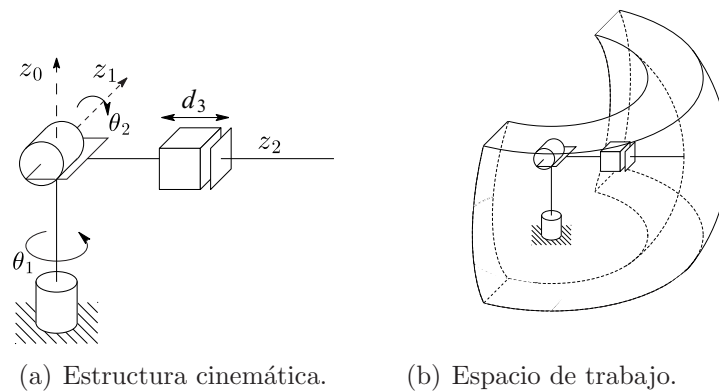


Figura 2.2: Configuración del robot esférico.

- c) Manipulador SCARA: Este es muy popular y como su nombre indica está adaptado para las operaciones de montaje. Aunque el SCARA tiene la misma estructura

(RRP) que el manipulador esférico, son bastante diferentes tanto en apariencia como en su gama de aplicaciones. A diferencia de la estructura esférica, la cual es z_0 perpendicular a z_1 , y z_2 perpendicular a z_1 , la estructura SCARA tiene a z_0 , z_1 y z_2 mutuamente paralelas. En la Figura 2.3(a) se muestra la estructura cinemática y en la Figura 2.3(b) el espacio de trabajo.

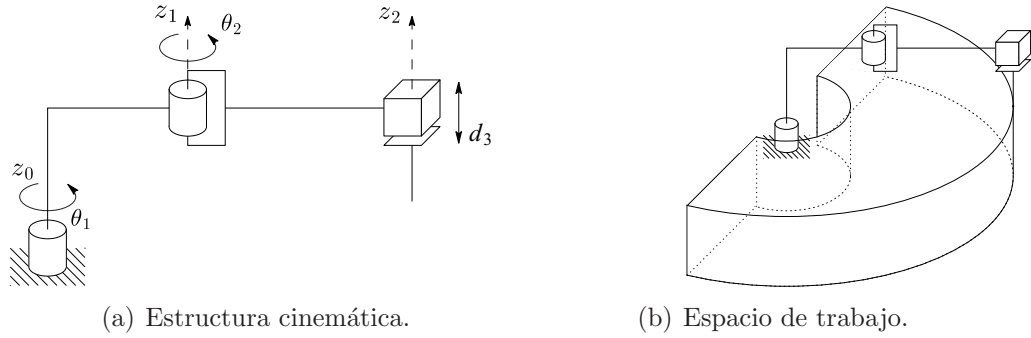


Figura 2.3: Configuración del robot SCARA.

- d) Manipulador cilíndrico: En este manipulador la primera articulación z_0 es de revolución y produce una rotación alrededor de la base, mientras que la segunda articulación z_1 y la tercera articulación z_2 son prismáticas. Como su nombre indica, las variables comunes son las coordenadas cilíndricas del elemento final con respecto a la base. En la Figura 2.4(a) se muestra su estructura cinemática y su espacio de trabajo en la Figura 2.4(b).

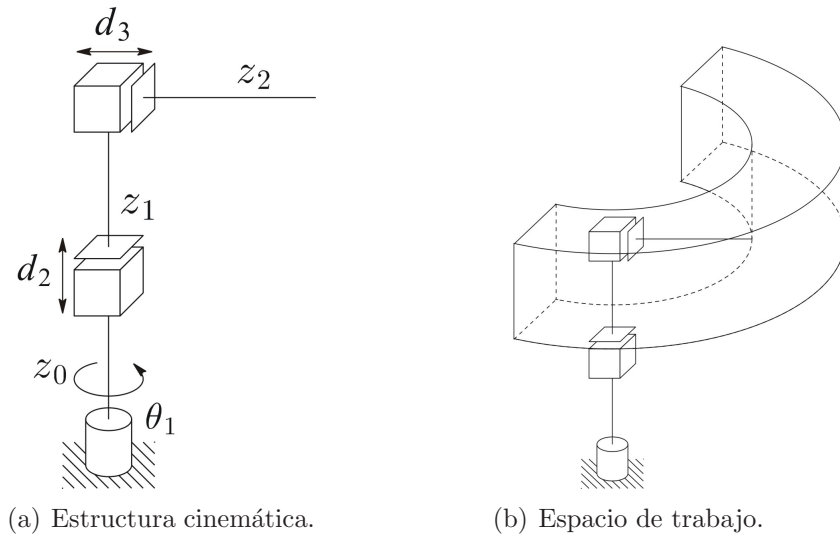


Figura 2.4: Configuración del robot cilíndrico.

- e) Manipulador cartesiano: Este manipulador se compone de tres articulaciones de forma prismática. Las variables comunes son las coordenadas cartesianas del elemento terminal con respecto a la base y su descripción cinemática es la más simple de todos los manipuladores. En la Figura 2.5(a) se muestra su estructura y en la Figura 2.5(b) el espacio de trabajo.

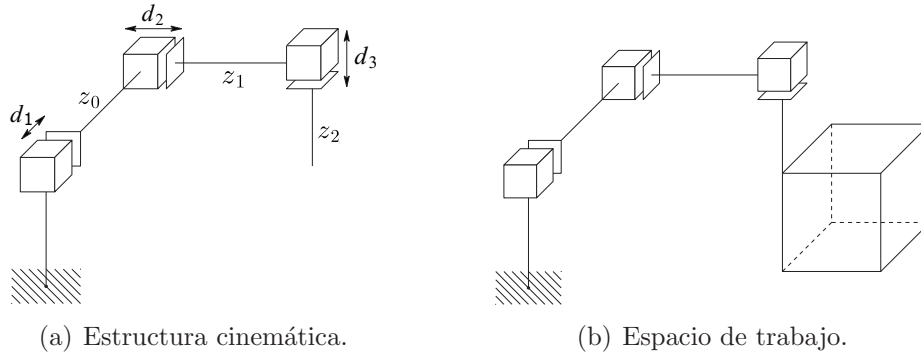


Figura 2.5: Configuración del robot cartesiano.

2.2. Modelo cinemático

En esta sección se obtiene la cinemática del robot manipulador bajo estudio en la cual existen dos problemas denominados cinemática directa y cinemática inversa. Estos se basan en el empleo de transformaciones entre sistemas de referencia. En primer lugar se mostrará la obtención del modelo cinemático directo. Dicho modelo describe la relación que tienen las posiciones angulares \mathbf{q} de las uniones (articulaciones) con la posición \mathbf{x} del dispositivo terminal, es decir $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$. Posteriormente se obtendrá el modelo cinemático inverso que consiste en adoptar la posición angular \mathbf{q} con base a una posición \mathbf{x} deseada del extremo final, es decir $\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$.

2.2.1. Modelo cinemático directo

Se considera el robot manipulador de dos grados de libertad que se muestra en la Figura 2.6. En primer lugar se define el marco referencial de base como un sistema cartesiano de dos dimensiones cuyo origen se encuentra localizado en la primera articulación del robot. Las coordenadas cartesianas x e y describen la posición del extremo final del segundo eslabón con respecto al marco referencial de base. Es preciso decir que ambas coordenadas cartesianas x e y dependen del vector de coordenadas angulares $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^T$. De la Figura 2.6 empleando métodos geométricos, es inmediato verificar que el modelo cinemático directo viene determinado por:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2), \\ y &= -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

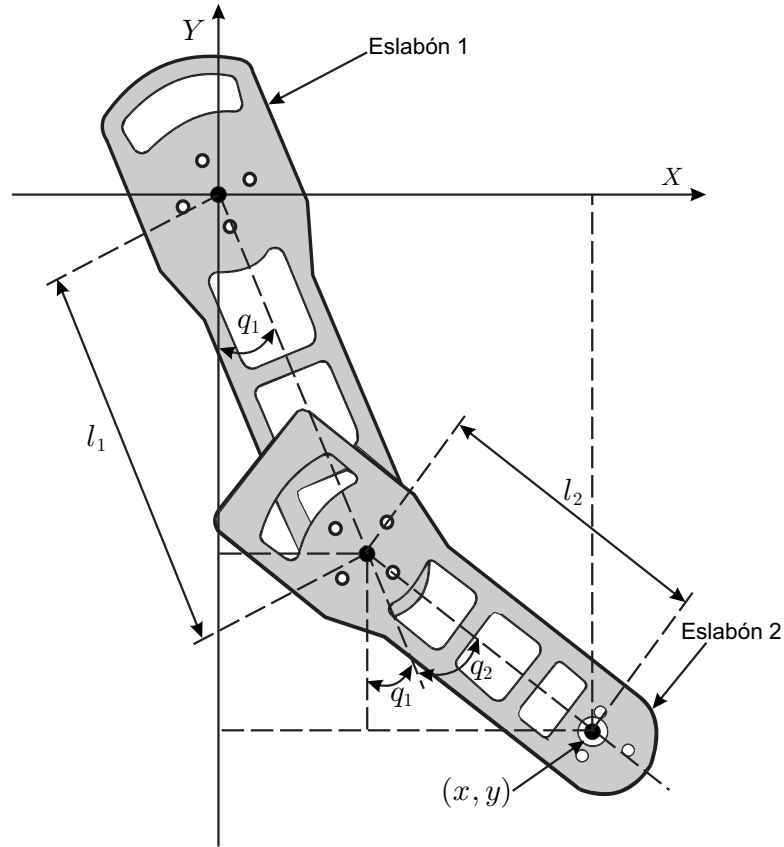


Figura 2.6: Diagrama del robot manipulador para analizar la cinemática directa.

El modelo cinemático directo (2.1) se utilizará para representar la posición x e y del robot manipulador en el plano cartesiano, a partir de las posiciones angulares obtenidas mediante el modelo dinámico que se obtiene en la sección 2.3.

También se puede obtener a partir del modelo cinemático directo (2.1), derivando una vez con respecto al tiempo, la siguiente relación de velocidades.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \\ &= J(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $J(\mathbf{q})$ recibe el nombre de la matriz jacobiana o simplemente el jacobiano del robot. El jacobiano es una de las partes más importantes en el análisis y control del movimiento del robot. De igual manera resulta cierta la siguiente relación de aceleraciones:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q}) \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + J(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

donde $\frac{d}{dt}J(\mathbf{q})$ y $J(\mathbf{q})$ vienen dadas respectivamente por:

$$\frac{d}{dt}J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen}(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & -l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

y

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

2.2.2. Modelo cinemático inverso

Para la implementación práctica en el robot manipulador una parte importante es la deducción del modelo cinemático inverso. Debido a que dicho modelo tiene por objetivo obtener las posiciones angulares deseadas, $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \quad q_{d2}]^T$, en términos de la posición deseada, x_d e y_d . Esta deducción se empleará con la finalidad de implementar trayectorias para las variables x_d e y_d , permitiendo que el robot tenga movimientos significativos en el plano $X - Y$. Considerando la Figura 2.7 se puede obtener los ángulos q_{d1} y q_{d2} en términos de x_d e y_d . Para obtener q_{d2} , se toma al ángulo auxiliar γ , y por medio de la ley de cosenos, se obtiene,

$$x_d^2 + y_d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \gamma, \quad (2.6)$$

al resolver (2.6) para,

$$\cos \gamma = -\frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}. \quad (2.7)$$

Ahora de acuerdo a la Figura 2.7 se observa $\gamma = 180^\circ - q_{d2}$. Tras sustituir en (2.7), se tiene que,

$$\cos(180^\circ - q_{d2}) = -\frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}. \quad (2.8)$$

Al aplicar la ley de ángulos suplementarios donde $\cos(180^\circ - q_{d2}) = -\cos q_{d2}$, para posteriormente multiplicar por -1 a (2.8) y solucionar para q_{d2} se obtiene,

$$q_{d2} = \cos^{-1} \left(\frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right). \quad (2.9)$$

Por otro lado para encontrar el ángulo q_{d1} , de acuerdo a la Figura 2.7 se determina que,

$$q_{d1} = \beta - \alpha. \quad (2.10)$$

De igual manera se determina que,

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{x_d}{-y_d} \right) \quad (2.11)$$

y

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{l_2 \operatorname{sen} q_{d2}}{l_1 + l_2 \cos q_{d2}} \right). \quad (2.12)$$

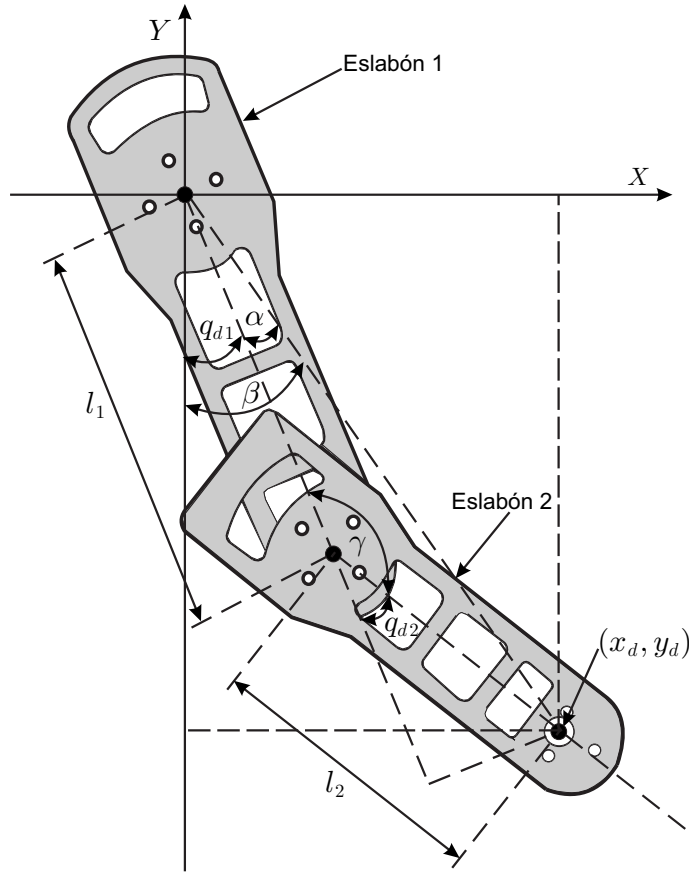


Figura 2.7: Diagrama del robot manipulador para analizar la cinemática inversa.

Al sustituir (2.11) y (2.12) en (2.10) resulta,

$$q_{d1} = \tan^{-1} \left(\frac{x_d}{-y_d} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{l_2 \sin q_{d2}}{l_1 + l_2 \cos q_{d2}} \right). \quad (2.13)$$

En resumen el modelo cinemático inverso de un robot manipulador de dos grados de libertad está determinado por:

$$q_{d1} = \tan^{-1} \left(\frac{x_d}{-y_d} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{l_2 \sin q_{d2}}{l_1 + l_2 \cos q_{d2}} \right), \quad (2.14)$$

$$q_{d2} = \cos^{-1} \left(\frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right). \quad (2.15)$$

De esta manera una vez que se ha obtenido el modelo cinemático inverso del sistema, que permitirá transformar trayectorias cartesianas a trayectorias angulares, se procede a obtener las relaciones de velocidades y aceleraciones de este modelo. Las cuales también son necesarias para la implementación del controlador PD con precompensación descrito

en la sección 3.2. Luego entonces es necesario evaluar a $q_1 = q_{d1}$, $q_2 = q_{d2}$, $x = x_d$ y $y = y_d$, en (2.2), de tal manera que,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_{d1}) + l_2 \cos(q_{d1} + q_{d2}) & l_2 \cos(q_{d1} + q_{d2}) \\ l_1 \sin(q_{d1}) + l_2 \sin(q_{d1} + q_{d2}) & l_2 \sin(q_{d1} + q_{d2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{bmatrix}, \\ &= J(\mathbf{q}_d) \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Posteriormente, multiplicando por el jacobiano inverso $J^{-1}(\mathbf{q})$ ambos lados de la ecuación (2.16), se obtiene,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{bmatrix} = J^{-1}(\mathbf{q}_d) \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 \sin q_{d2}} & \frac{-\cos(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 \sin q_{d2}} \\ \frac{-l_1 \sin(q_{d1}) - l_2 \sin(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 l_2 \sin q_{d2}} & \frac{l_1 \cos(q_{d1}) + l_2 \cos(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 l_2 \sin q_{d2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

también se puede obtener la siguiente relación de aceleraciones:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} \\ \ddot{q}_{d2} \end{bmatrix} = \underbrace{-J^{-1}(\mathbf{q}_d) \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q}_d) \right] J^{-1}(\mathbf{q}_d)}_{\frac{d}{dt}[J^{-1}(\mathbf{q}_d)]} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + J^{-1}(\mathbf{q}_d) \begin{bmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

donde $J^{-1}(\mathbf{q}_d)$ denota la inversa de la matriz jacobiana y $\frac{d}{dt} J(\mathbf{q}_d)$ la derivada temporal de la matriz jacobiana. Estas vienen dadas por:

$$J^{-1}(\mathbf{q}_d) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 \sin q_{d2}} & \frac{-\cos(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 \sin q_{d2}} \\ \frac{-l_1 \sin(q_{d1}) - l_2 \sin(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 l_2 \sin q_{d2}} & \frac{l_1 \cos(q_{d1}) + l_2 \cos(q_{d1}+q_{d2})}{l_1 l_2 \sin q_{d2}} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

y

$$\frac{d}{dt} J(\mathbf{q}_d) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_{d1}) \dot{q}_{d1} - l_2 \sin(q_{d1} + q_{d2}) (\dot{q}_{d1} + \dot{q}_{d2}) & -l_2 \sin(q_{d1} + q_{d2}) (\dot{q}_{d1} + \dot{q}_{d2}) \\ l_1 \cos(q_{d1}) \dot{q}_{d1} + l_2 \cos(q_{d1} + q_{d2}) (\dot{q}_{d1} + \dot{q}_{d2}) & l_2 \cos(q_{d1} + q_{d2}) (\dot{q}_{d1} + \dot{q}_{d2}) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

Cabe decir que el Jacobiano $J^{-1}(\mathbf{q}_d)$ determinado por (2.20) no es válido cuando $q_{d2} = 0$ o $q_{d2} = \pi$. Cuando este sea el caso se dirá que el robot manipulador está en una configuración singular [30]. Estas configuraciones se dan cuando el extremo del robot se localiza en una frontera física. Tanto las relaciones de velocidad y aceleraciones resultan válidas siempre y cuando el jacobiano $J^{-1}(\mathbf{q}_d)$ no sea singular. Para muchas aplicaciones es importante planificar los movimientos del robot manipulador de tal manera que se eviten las configuraciones singulares.

2.3. Modelo dinámico

En esta sección se muestra el modelo dinámico del robot rígido de dos grados de libertad, mostrado en la Figura 2.8. Para esto se emplea el método de Euler-Lagrange. Este modelo se empleará en la implementación de un controlador para realizar la tarea de seguimiento de trayectorias, la cual tiene como fin hacer que el punto de interés siga una trayectoria deseada.

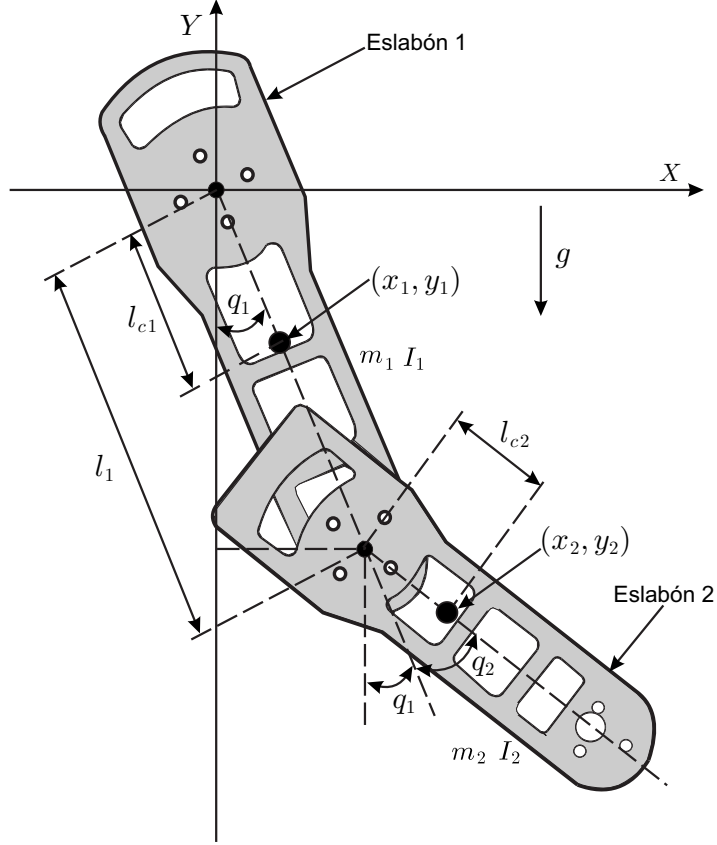


Figura 2.8: Diagrama del robot manipulador para analizar el modelo dinámico.

De acuerdo al método de Euler-Lagrange las ecuaciones de movimiento que gobiernan a un robot rígido de n grados de libertad están determinadas por,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.22)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ y $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$, representan respectivamente la posición angular de los eslabones y la velocidad angular de los mismos, siendo $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$ el vector de controles o pares aplicados al robot. $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, denota el Lagrangiano del sistema definido por la diferencia entre la energía cinética, $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, y la energía potencial

del robot rígido de n grados de libertad, $\mathcal{U}(\mathbf{q})$, es decir,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (2.23)$$

En el caso de dos grados de libertad, la energía cinética y potencial de los eslabones están determinadas por,

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.24)$$

y

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \mathcal{U}_1(\mathbf{q}) + \mathcal{U}_2(\mathbf{q}). \quad (2.25)$$

De esta manera, para obtener el modelo dinámico de un robot de 2 grados de libertad se parte de (2.22).

En primer lugar se encuentra la energía cinética asociada a los eslabones uno y dos, considerando el centro de masa de cada eslabón. De acuerdo a (2.24), la energía cinética asociada al sistema está determinada por,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ &= \left[\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde m_1 y m_2 denotan las masas de los eslabones, I_1 e I_2 representan los momentos de inercia de los eslabones uno y dos respectivamente, \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son la rapidez del centro de masa de los eslabones, cuya representación en términos de las coordenadas cartesianas es $\mathbf{v}_1 = (\dot{x}_1 \ \dot{y}_1)^T$ y $\mathbf{v}_2 = (\dot{x}_2 \ \dot{y}_2)^T$. Por lo tanto, de acuerdo a la Figura 2.8 las coordenadas del centro de masa del eslabón uno en el plano $X - Y$ son:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c1} \sin(q_1), \\ y_1 &= -l_{c1} \cos(q_1), \end{aligned} \quad (2.27)$$

mientras que las coordenadas para el centro de masa del eslabón dos quedan expresadas por,

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2), \\ y_2 &= -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (2.28)$$

En consecuencia el vector velocidad de cada eslabón es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

y

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Al realizar las operaciones correspondientes y utilizando las siguientes identidades trigonométricas $\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1) = 1$ y $\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) + \cos(q_1 + q_2) = \cos(q_2)$, entonces la velocidad al cuadrado de cada eslabón resulta ser:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 &= l_{c1}^2 \dot{q}_1^2, \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 &= l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

De esta manera la energía cinética asociada al eslabón uno es,

$$\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2, \quad (2.32)$$

y para el eslabón dos es,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_{c2}^2[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + m_2l_1l_{c2}[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2]\cos(q_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}I_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

De esta forma la energía cinética total del sistema, $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, se obtiene de sustituir (2.32) y (2.33) en (2.24), obteniendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_{c2}^2[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ &\quad + m_2l_1l_{c2}[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2]\cos(q_2) + \frac{1}{2}I_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por otro lado, las energías potenciales asociadas a los eslabones de la Figura 2.8, son:

$$\mathcal{U}_1(\mathbf{q}) = -m_1l_{c1}g\cos(q_1) \quad (2.35)$$

y

$$\mathcal{U}_2(\mathbf{q}) = -m_2l_1g\cos(q_1) - m_2l_{c2}g\cos(q_1 + q_2), \quad (2.36)$$

donde g representa la gravedad que afecta a los eslabones. Así la energía potencial total del sistema, $\mathcal{U}(\mathbf{q})$, que se obtiene al sustituir (2.35) y (2.36) en (2.25), está determinada por,

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = [-m_1l_{c1}g\cos(q_1)] + [-m_2l_1g\cos(q_1) - m_2l_{c2}g\cos(q_1 + q_2)]. \quad (2.37)$$

Finalmente el Lagrangiano del robot manipulador de dos grados de libertad resulta de sustituir (2.34) y (2.37), en (2.23),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_{c2}^2[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ &\quad + m_2l_1l_{c2}[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2]\cos(q_2) + \frac{1}{2}I_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 - m_1l_{c1}g\cos(q_1) \\ &\quad - m_2l_1g\cos(q_1) - m_2l_{c2}g\cos(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (2.38)$$

De esta manera de acuerdo a (2.22), las ecuaciones de movimiento del sistema de la Figura 2.8 quedan dadas por,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = \tau_1, \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = \tau_2, \quad (2.40)$$

siendo τ_1 y τ_2 , los pares que actúan en los eslabones uno y dos respectivamente del robot manipulador. Desarrollando las ecuaciones de movimiento (2.39) y (2.40), con $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ definido por (2.38), se obtiene para el eslabón uno lo siguiente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ &\quad + I_1 \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos q_2 + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin q_1 - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \quad (2.43)$$

Mientras que para el eslabón dos se tiene que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2], \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \quad (2.46)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento para el sistema mostrado en la Figura 2.8, tras haber empleado el método de Euler-Lagrange, quedan determinadas por,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ &\quad + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (2.47)$$

y

$$\begin{aligned} \tau_2 &= [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Una forma general de describir el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad se muestra a continuación:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.49)$$

donde $M(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau}$ es un vector de fuerzas aplicadas

y pares aplicados en las uniones. Para el caso del modelo dinámico del robot manipulador de dos grados de libertad encontrado en (2.47) y (2.48), se puede expresar de acuerdo a (2.49) como,

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2, \\ M_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \\ C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \\ g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Cabe decir que la representación en variables de estado del modelo dinámico descrito en (2.50), se presenta en el Apéndice A. Dicha representación será útil para la simulación del modelo en Matlab[®]-Simulink[®].

2.4. Robot manipulador a utilizar

Para la realización de los experimentos en tiempo real desarrollados para este trabajo se utilizó un prototipo llamado robot manipulador o brazo robótico construido por el M. en C. Juan Carlos Rivera Díaz [31]. En la subsección 2.4.4 se muestran las fotos del prototipo terminado e instrumentado.

Los componentes que conforman al prototipo se muestran en tres etapas llamadas: *Estructura mecánica, electrónica de potencia y adquisición de datos y control*. Al unir dichas etapas permitirá una interacción apropiada entre el prototipo y la tarjeta de control, todo ello para poder realizar los experimentos en tiempo real que tienen como finalidad implementar la ley de control que se propone en la sección 3.2. En la Figura 2.9 se presenta un diagrama a bloques de las etapas que componen al brazo robótico desarrollado.

2.4.1. Estructura mecánica

La estructura mecánica describe las piezas mecánicas, motores y parámetros físicos que involucran al robot manipulador. Dentro de la estructura mecánica se muestran

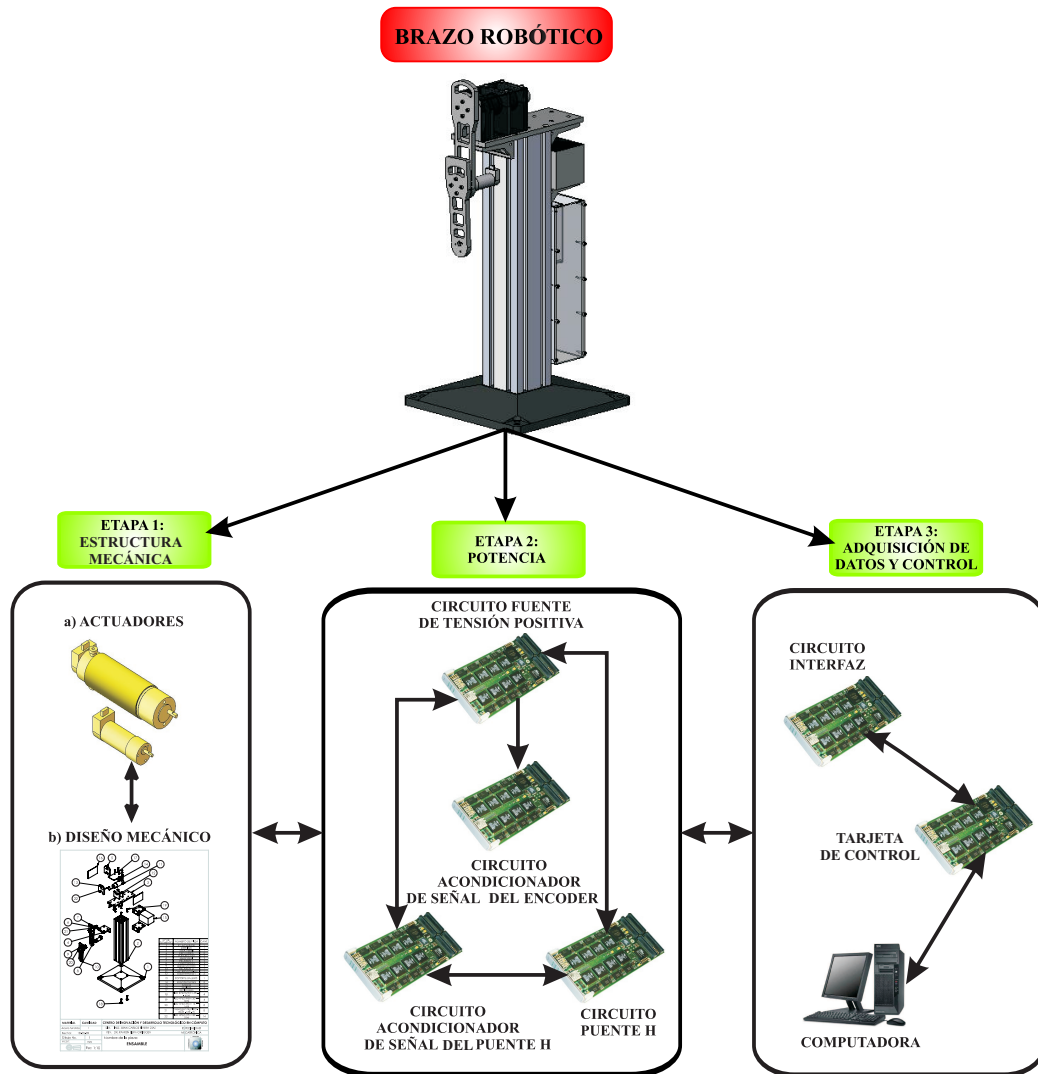
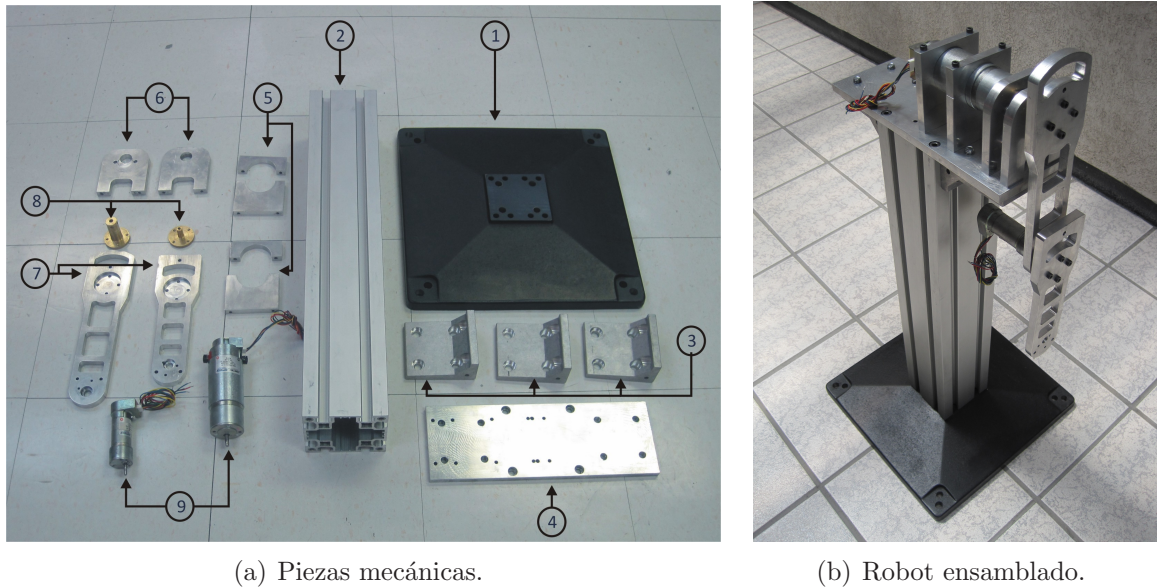


Figura 2.9: Diagrama a bloques del brazo robótico a utilizar.

las piezas más importantes y los motores que constituyen al robot manipulador. Dichas piezas primero se diseñaron en un software de diseño asistido por computadora llamado SolidWorks® para después realizar su maquinado en máquinas de tipo convencional o de control numérico computarizado. Cabe mencionar que los parámetros físicos del prototipo llamado brazo robótico son necesarios para representar el modelo dinámico en simulación y también para la implementación tanto en simulación como en tiempo real. Las piezas mecánicas que constituyen al robot manipulador se muestran en la Figura 2.10(a) y el robot manipulador ensamblado se muestra en la Figura 2.10(b).

A continuación se listan y se describen brevemente los componentes mostrados en la Figura 2.10(a).



(a) Piezas mecánicas.

(b) Robot ensamblado.

Figura 2.10: Brazo robótico.

1. *Base principal:* Es la pieza que sirve de soporte a la estructura del brazo robótico, se ensambla con la estructura principal.
2. *Estructura principal:* Es un perfil de aluminio que se monta en la base principal y soporta en la parte superior la base del motor uno, mediante unos soportes en ángulo.
3. *Soportes en ángulo:* Los soportes están sujetos a la estructura principal y a la base del motor. Asimismo un soporte de este tipo será empleado para colocar las baterías encargadas de suministrar energía al brazo robótico.
4. *Base del motor:* Esta base sirve para soportar al motor uno con la ayuda de las bridas de soporte. Está montada sobre la estructura principal con la ayuda de los soportes en ángulo.
5. *Bridas de soporte para el motor:* Se dividen en dos, en las bridas inferiores y las bridas superiores. Las bridas inferiores tienen unas ranuras donde se monta el motor uno y con las bridas superiores se sujeta el motor uno.
6. *Soportes entre motor y eje de unión:* Uno de los soportes sirve para sujetar el motor y el otro soporte sirve para sujetar el eje que une la flecha del motor con los eslabones, mediante un rodamiento montado en el soporte.
7. *Eslabones:* El brazo robótico consta de dos eslabones los cuales son montados a las flechas de los motores.

8. *Ejes de unión de motor con eslabón:* Los ejes son los encargados de unir las flechas de los motores con los eslabones. Cabe decir que el eje que une la flecha del motor dos con el eslabón dos se tuvo que volver a manufacturar con un material de mayor resistencia.
9. *Actuadores:* Como actuadores del brazo robótico se usaron motores de CD de imán permanente para dotar de movimiento a los dos eslabones. Para el primer eslabón se utilizó el motor de la marca Pittman modelo GM14904S014 (Motor 1) y para el segundo eslabón se utilizó el motor de la marca Pittman modelo GM8724S015 (Motor 2). Las hojas de especificaciones técnicas se pueden encontrar en el Apéndice B.1. Cabe señalar que los dos motores cuentan con un encoder óptico y una caja de reducción.

Parámetros físicos

Los parámetros asociados al brazo robótico se muestran en la Tabla 2.1. Los parámetros de interés para la simulación y la implementación del controlador son los que involucran a los eslabones los cuales se obtuvieron a partir de los dibujos técnicos realizados en el software de dibujo asistido por computadora llamado SolidWorks® y al darle la información del material con el que se construiría. Estos parámetros de interés son las distancias de los eslabones (l_1 y l_2), así como las distancias del centro de masa de los eslabones (l_{c1} y l_{c2}), las masas de los mismos (m_1 y m_2) y los momentos de inercia de los eslabones (I_1 y I_2). Es preciso decir que m_1 toma en cuenta la masa del eslabón uno y además la masa del motor 2 ya que en la práctica debe ser considerado. También se tuvo la tarea de verificar las longitudes y los centros de masa de los eslabones en una máquina de coordenadas tridimensionales y el valor de las masas con una báscula de alta precisión.

Descripción	Notación	Valor	Unidad
Masa del eslabón uno	m_1	0.763	kg
Masa del eslabón dos	m_2	0.343	kg
Longitud del eslabón uno	l_1	0.193	m
Longitud del eslabón dos	l_2	0.145	m
Distancia al centro de masa (eslabón uno)	l_{c1}	0.136	m
Distancia al centro de masa (eslabón dos)	l_{c2}	0.048	m
Inercia del eslabón uno (centro de masa)	I_1	0.008532	kg m ²
Inercia del eslabón dos (centro de masa)	I_2	0.0020147	kg m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/s ²

Tabla 2.1: Parámetros asociados al prototipo a utilizar.

2.4.2. Electrónica de potencia

La electrónica de potencia tiene como objetivo acondicionar las señales que relacionan a los actuadores con la tarjeta de control. Para lograr dicho objetivo se necesitaron de las siguientes subetapas: *circuito fuente*, *circuito acondicionador de señales para puente H*, *circuito puente H* y *circuito acondicionador de encoder* tal y como se muestra en la Figura 2.9, en la etapa de potencia. A continuación, se describen cada una de las subetapas de las cuales está conformada la electrónica de potencia.

- *Circuito fuente de tensión positiva*: El brazo robótico cuenta con dos baterías de 12 V - 12 Ah conectadas en serie, las que brindan un voltaje al puente H de 24 V. No obstante es necesario reducir el voltaje para los circuitos acondicionadores de señales: puente H y del encoder a 5 V y los ventiladores que son los que permiten el enfriamiento del puente H. Para lograr lo antes mencionado, se diseñó un circuito el cual permite reducir el voltaje de las baterías al voltaje demandado por cada uno de los circuitos que así lo requieran. Para ello se utilizaron dos circuitos reguladores de tensión (LM7805 y LM7812), los cuales reciben como entrada 24 V y a su salida reducen a 5 V y 12 V respectivamente.
- *Circuito acondicionador de señales del puente H*: Este circuito se encarga de transmitir las señales, de la tarjeta de control al puente H. Para que no se vean distorsionadas por el ruido electromagnético. De tal manera que tienen un tipo de acondicionamiento que se encuentra compuesto por una configuración de tipo colector abierto, este esquema electrónico tiene la característica de deformar mínimamente la calidad de la señal. Para el prototipo del brazo robótico se seleccionó el circuito integrado 6N137 como circuito acondicionador de señales. Asimismo, al emplear el circuito integrado 6N137 en su salida se tiene una señal invertida, por lo cual se emplea una compuerta lógica NOT 74HC04 para tener la señal de origen. Las señales que son transmitidas con el circuito acondicionador son PWM (Acrónimo de Pulse Wide Modulation, Modulación por Ancho de Pulso) y DIR (señal de dirección para los motores).
- *Circuito puente H*: Este circuito está conformado principalmente por el manejador de corriente LMD18200, o bien llamado puente H, tiene como propósito el control de motores eléctricos de CD, mas propiamente es el que permite energizar a los actuadores y dar el sentido de giro al rotor del motor. El puente H permite recibir la señal de entrada bajo la forma de PWM, proporcionando al motor eléctrico un voltaje promedio, que vinculado a las señales de DIR y Brake (freno de motor) logra regular la velocidad angular del motor eléctrico. Las señales PWM, DIR y Brake son enviadas desde la tarjeta de control pasando por el circuito acondicionador de señal del puente H. Cabe resaltar que al emplearse dos motores de CD, se hace uso de dos circuitos puente H.
- *Circuito acondicionador de señal del encoder*: Este circuito tiene como objetivo recibir las señales que generan el encoder óptico con el que cuentan los motores

para transmitirla hasta la tarjeta de control y que sean recibidas adecuadamente. De igual manera las señales son acondicionadas mediante el circuito integrado 6N137. Las señales que involucran al encoder y que son recibidas por la tarjeta de control son llamadas como: VCC-PHB0, GND-INDEX y VCC-PHB90, que corresponden a las señales de los canales A, INDEX y B.

2.4.3. Adquisición de datos y control

Para la adquisición de datos y el control del brazo robótico, se llevó a cabo mediante una tarjeta de control. Dicha tarjeta se encuentra conectada en un bus tipo PCI (Peripheral Component Interconnect) a una computadora de escritorio como se muestra en el diagrama esquemático de la Figura 2.9 en la etapa de adquisición de datos y control, teniendo tres subsistemas llamados: *Circuito interfaz*, *tarjeta de control* y *computadora*. A continuación se explica el proceso que se realiza para llevar a cabo el control en tiempo real del prototipo.

- *Circuito interfaz*: Este circuito tiene como objetivo hacer la comunicación entre el brazo robótico y el rack de conexiones de la tarjeta de control. El circuito interfaz es el que permite la entrada y salida de señales. Como señales de entrada se tienen las provenientes de los encoders, llamadas VCC-PHB0, GND-INDEX y VCC-PHB90, estas señales corresponden a cada uno de los dos encoders. Las señales de salida son las de PWM, DIR y Brake. Estas señales corresponden para cada uno de los dos motores. En el Apéndice B.2 se muestra el panel de conexiones conectado entre los pines de la tarjeta de control y el circuito interfaz.
- *Tarjeta de control*: La tarjeta de control es una tarjeta modelo DS1104 marca dSPACE®. Esta tarjeta de control es la encargada de recibir, procesar y mandar las señales digitales para el control del prototipo, realizando las operaciones correspondientes de acuerdo al modelo previamente compilado en la memoria de la tarjeta. Así, la tarjeta dSPACE® cuenta con un procesador MPC8240 de punto flotante y 64 bits, reloj interno de 250 MHz, una memoria física de 32 MB y memoria flash de 8 MB. Además cuenta con diez señales de PWM con una frecuencia máxima de 20 MHz. Dos canales independientes para encoders incrementales con resolución de 24 bits para lectura de posición.
- *Computadora*: Dentro de la computadora como primer paso se crea un modelo en el software Matlab®-Simulink®, ya que este programa desarrolla modelos matemáticos y leyes de control entre otros, en forma de bloques. Al crear las simulaciones en dicho programa se tiene la facilidad para la implementación en tiempo real, en este caso solamente se quita el modelo dinámico y se sustituye con la planta, en este caso el robot manipulador. Al cargar el programa desarrollado en Matlab®-Simulink® en la tarjeta de control previamente compilado, se crea un programa para visualizar el comportamiento del robot manipulador mediante las

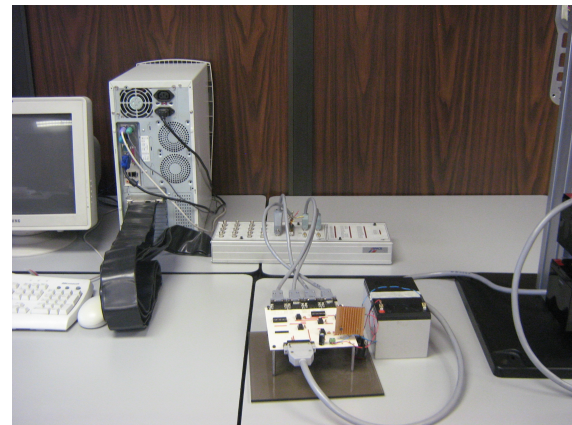
variables de interés. Dicho programa se crea con el software ControlDesk[®], teniendo en este software el ambiente gráfico para desarrollar los experimentos en tiempo real con el robot manipulador.

2.4.4. Robot manipulador conectado para tiempo real

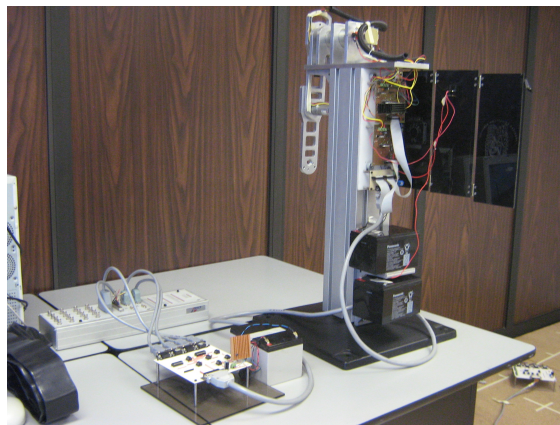
Una vez descritas las etapas mas importantes que conforman al robot manipulador y después de unir todas las etapas, se tiene listo el prototipo para implementar las leyes de control en tiempo real. En la Figura 2.11(a) se muestra la computadora utilizada, también se aprecia conectado el rack de conexiones de la tarjeta de control instalada en la computadora. En la Figura 2.11(b) se muestra el circuito interfaz conectado al rack de conexiones de la tarjeta de control. En la Figura 2.11(c) el circuito interfaz conectado a la electrónica de potencia instalada en el robot manipulador. En la Figura 2.11(d) se muestra el robot manipulador conectado con todas la etapas necesarias para llevar a cabo las pruebas en tiempo real.



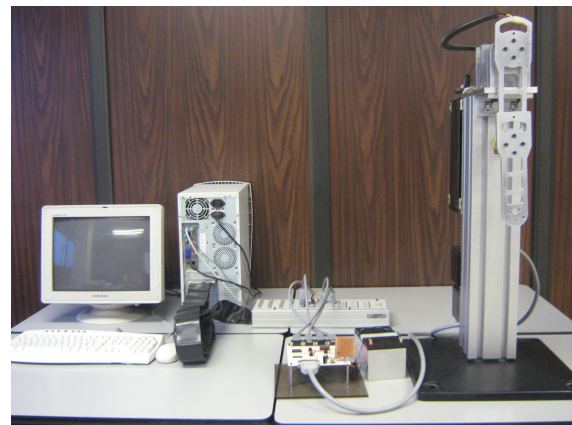
(a) Computadora.



(b) Rack de conexiones y circuito interfaz.



(c) Electrónica de potencia.



(d) Robot conectado con todas las etapas.

Figura 2.11: Robot manipulador conectado para pruebas en tiempo real.

Capítulo 3

Ley de control y simulación

En este capítulo se describe la ley de control basada en PD con precompensación, la cual permite que las articulaciones del robot manipulador a emplearse realicen la tarea de seguimiento de las trayectorias preestablecidas. Para realizar lo anterior, primero se describen las relaciones matemáticas asociadas a las trayectorias a seguir por el robot. Posteriormente, se describe el controlador PD con precompensación. Asimismo, mediante el empleo de un criterio de sintonía se realiza la selección apropiada de las ganancias proporcionales y derivativas asociadas al controlador PD. Finalmente, se realizan las simulaciones correspondientes, para verificar el desempeño del controlador propuesto, con la ayuda de Matlab[®]-Simulink[®].

3.1. Definición de las trayectorias a seguir

Debido a que un controlador PD con precompensación necesita del conocimiento previo de la posición, velocidad y aceleración deseadas de las trayectorias a seguir por el robot, se analizan las propiedades de las trayectorias que seguirá el robot, tales como sus normas euclidianas.

Las trayectorias que se propone siga el robot son dos: La primer trayectoria se expresa explícitamente en términos de los desplazamientos angulares deseados (q_{d1}, q_{d2}) , para que se impongan en las posiciones angulares (q_1, q_2) . Mientras, que la segunda trayectoria que se propone es una parábola, la cual queda expresada en términos de las coordenadas deseadas (x_d, y_d) , que deberá seguir el extremo final del robot (x, y) , véase la Figura 2.7.

3.1.1. Trayectorias definidas para desplazamientos angulares deseados

Las trayectorias deseadas que se ha elegido sigan las posiciones angulares del robot están descritas de la siguiente manera [14]:

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1[1 - e^{-2.0 t^3}] + c_1[1 - e^{-2.0 t^3}] \text{sen}(\omega_1 t) \\ b_2[1 - e^{-2.0 t^3}] + c_2[1 - e^{-2.0 t^3}] \text{sen}(\omega_2 t) \end{bmatrix} \quad [\text{rad}], \quad (3.1)$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \omega_1$ y ω_2 denotan los parámetros de las trayectorias deseadas, siendo t el tiempo en el cual evolucionan las señales deseadas.

En el caso particular cuando los parámetros de la trayectoria deseada asociada a la primera articulación se eligen como: $a_1 = \pi/180$ [rad], $b_1 = \pi/6$ [rad], $c_1 = \pi/6$ [rad] y $\omega_1 = 2$ [rad/s], se obtiene la trayectoria de color azul mostrada en la Figura 3.1. Mientras, que cuando se eligen los parámetros para la posición deseada asociada a la segunda articulación como: $a_2 = \pi/180$ [rad], $b_2 = \pi/3$ [rad], $c_2 = 25\pi/50$ [rad] y $\omega_2 = 2.5$ [rad/s], se obtiene la trayectoria de color rojo mostrada en la Figura 3.1.

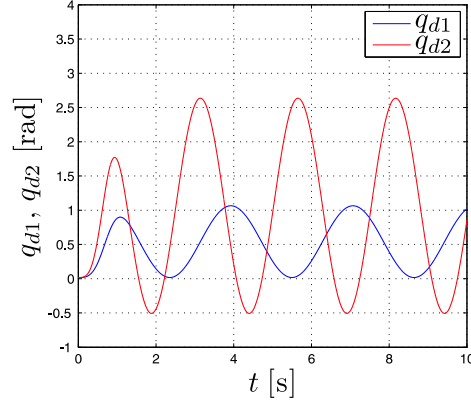


Figura 3.1: Trayectorias angulares deseadas.

A partir de realizar la diferenciación de las posiciones deseadas, determinadas por (3.1), las velocidades deseadas quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{d1} &= 6b_1t^2e^{-2.0t^3} + 6c_1t^2e^{-2.0t^3} \operatorname{sen}(\omega_1t) \\ &\quad + [c_1 - c_1e^{-2.0t^3}] \cos(\omega_1t) \omega_1 \text{ [rad/s]}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{d2} &= 5.4b_2t^2e^{-1.8t^3} + 5.4c_2t^2e^{-1.8t^3} \operatorname{sen}(\omega_2t) \\ &\quad + [c_2 - c_2e^{-1.8t^3}] \cos(\omega_2t) \omega_2 \text{ [rad/s]}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ahora diferenciando (3.2) y (3.3), se obtienen las expresiones analíticas que gobiernan a las aceleraciones deseadas:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{d1} &= 12b_1te^{-2.0t^3} - 36b_1t^4e^{-2.0t^3} + 12c_1te^{-2.0t^3} \operatorname{sen}(\omega_1t) \\ &\quad - 36c_1t^4e^{-2.0t^3} \operatorname{sen}(\omega_1t) + 12c_1t^2e^{-2.0t^3} \cos(\omega_1t) \omega_1 \\ &\quad - [c_1 - c_1e^{-2.0t^3}] \operatorname{sen}(\omega_1t) \omega_1^2 \text{ [rad/s}^2\text{]}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{d2} &= 10.8b_2te^{-1.8t^3} - 29.2b_2t^4e^{-1.8t^3} + 10.8c_2te^{-1.8t^3} \operatorname{sen}(\omega_2t) \\ &\quad - 29.2c_2t^4e^{-1.8t^3} \operatorname{sen}(\omega_2t) + 10.8c_2t^2e^{-1.8t^3} \cos(\omega_2t) \omega_2 \\ &\quad - [c_2 - c_2e^{-2.0t^3}] \operatorname{sen}(\omega_2t) \omega_2^2 \text{ [rad/s}^2\text{]}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Una vez descritas las posiciones, velocidades y aceleraciones deseadas, se procede al cálculo de sus *normas euclidianas*. Recordando que la norma euclidiana $\|\mathbf{q}\|$ de un vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, se define como:

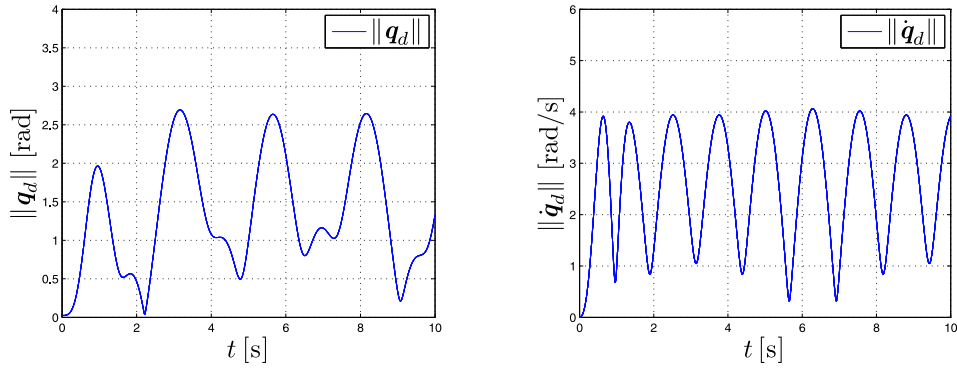
$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2} = \sqrt{\mathbf{q}^T \mathbf{q}}. \quad (3.6)$$

Aplicando la definición (3.6) a (3.1), (3.2) y (3.3), (3.4) y (3.5), respectivamente, se obtienen las normas euclidianas de las posiciones, velocidades y aceleraciones deseadas, cuyos gráficos se muestran en las Figuras 3.2(a), 3.2(b) y 3.2(c). De estas figuras se observa que las cotas máximas asociadas a estas normas son:

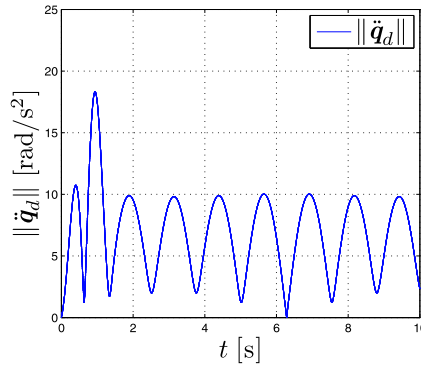
$$\|\mathbf{q}_d\|_{\text{Max}} \leq 2.69 \text{ [rad]}, \quad (3.7)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} \leq 4.07 \text{ [rad/s]}, \quad (3.8)$$

$$\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} \leq 18.32 \text{ [rad/s}^2\text{]}. \quad (3.9)$$



(a) Norma del vector de posición deseado. (b) Norma del vector de velocidad deseada.



(c) Norma del vector de aceleración deseado.

Figura 3.2: Normas de los vectores de posición, velocidad y aceleración deseados.

3.1.2. Parábola

Una trayectoria que se puede describir en el plano cartesiano $X - Y$ es la trayectoria de la parábola. Dicha trayectoria queda descrita como,

$$x_d = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{P} \right) + h, \quad (3.10)$$

$$y_d = \frac{1}{4b} x_d^2 + k, \quad (3.11)$$

donde la coordenada (h, k) representa el vértice de la parábola, b representa la distancia entre el vértice y el foco. Por otro lado, A denota la amplitud de la parábola en el eje X , P es el tiempo en el que realiza la parábola completa y t es el tiempo. El valor de los parámetros asociados a (3.10) y (3.11), se propusieron como:

$$(h, k) = (0 \text{ m}, -0.3 \text{ m}), \quad b = 0.05 \text{ m}, \quad P = 5 \text{ s}, \quad A = 0.2 \text{ m}.$$

Para estos parámetros el gráfico correspondiente se muestra en la Figura 3.3.

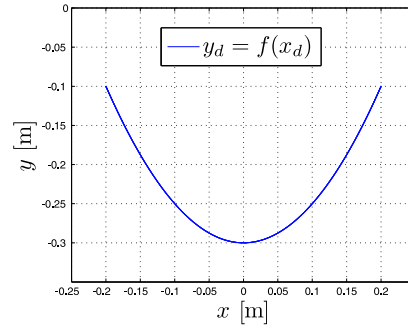


Figura 3.3: Parábola en el plano $X - Y$.

De nueva cuenta, debido a que el controlador PD con precompensación, el cual se presenta más adelante, necesita del conocimiento de la velocidad y de la aceleración deseadas, se procede a realizar la primera y segunda derivada de las ecuaciones (3.10) y (3.11), quedando determinadas respectivamente por:

$$\dot{x}_d = \frac{2A\pi}{P} \cos \left(\frac{2\pi t}{P} \right), \quad (3.12)$$

$$\dot{y}_d = \frac{1}{2b} x_d \dot{x}_d. \quad (3.13)$$

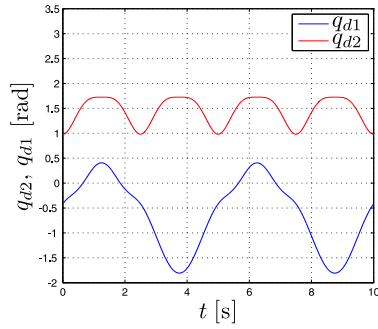
y por:

$$\ddot{x}_d = -\frac{4A\pi^2}{P^2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{P} \right), \quad (3.14)$$

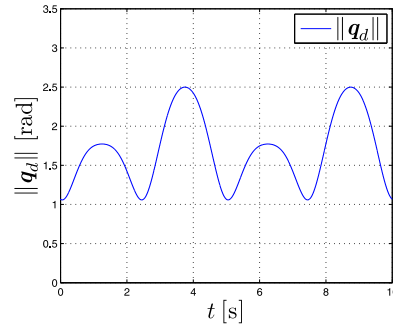
$$\ddot{y}_d = \frac{1}{2b} (\dot{x}_d^2 + x_d \ddot{x}_d). \quad (3.15)$$

Con la finalidad de aplicar el criterio de sintonía para el controlador PD con precompensación, es necesario obtener las normas de posición (3.10) y (3.11), velocidad (3.12) y (3.13) y aceleración deseadas (3.14) y (3.15), expresadas en términos de posición, velocidad y aceleración angulares.

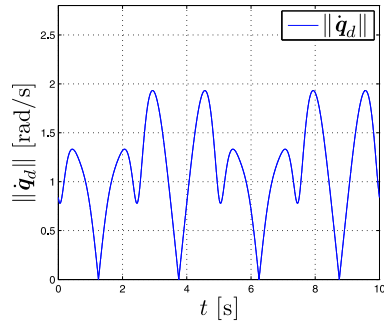
Para lograr lo anterior se realiza lo siguiente: 1.- Se sustituye (3.10) y (3.11) en (2.14) y (2.15) para obtener q_{d1} y q_{d2} (Véase Figura 3.4(a)). 2.- Sustituyendo (3.12) y (3.13) en (2.18) se obtienen \dot{q}_{d1} y \dot{q}_{d2} . 3.- Finalmente, sustituyendo (3.14) y (3.15) en (2.19) se obtienen \ddot{q}_{d1} y \ddot{q}_{d2} . Habiendo realizado esto, es posible obtener las normas de posición, velocidad y aceleración angulares deseadas. Aplicando (3.6) a q_{d1} - q_{d2} , \dot{q}_{d1} - \dot{q}_{d2} y \ddot{q}_{d1} - \ddot{q}_{d2} , respectivamente, se encuentran los resultados gráficos mostrados en las Figuras 3.4(b), (c) y (d).



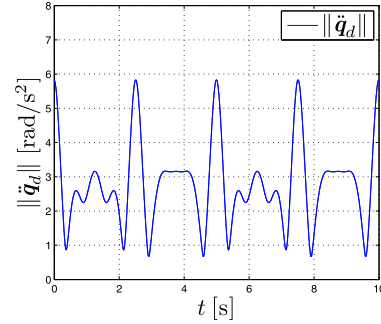
(a) Posiciones articulares.



(b) Norma del vector de posición deseado.



(c) Norma del vector de velocidad deseado.



(d) Norma del vector de aceleración deseado.

Figura 3.4: Posiciones articulares y normas de los vectores de posición, velocidad y aceleración deseadas asociadas a la parábola.

En la Figura 3.4 se obtienen a nivel numérico las cotas máximas de las normas asociadas a la posición, velocidad y aceleración:

$$\|\mathbf{q}_d\|_{\text{Max}} \leq 2.50 \text{ [rad]}, \quad (3.16)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} \leq 1.93 \text{ [rad/s]}, \quad (3.17)$$

$$\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} \leq 5.82 \text{ [rad/s}^2\text{]}. \quad (3.18)$$

3.2. Controlador PD con precompensación

Con la finalidad de realizar la tarea de control de seguimiento de trayectorias en el robot rígido de dos grados de libertad, estudiado en el capítulo anterior, y determinado por el siguiente modelo dinámico:

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2, \\ M_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \\ C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \\ g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Un controlador PD con precompensación, que realiza esta tarea se describe como:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} + K_d \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{M(\mathbf{q}_d) \begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} \\ \ddot{q}_{d2} \end{bmatrix} + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}_d) \\ g_2(\mathbf{q}_d) \end{bmatrix}}_{\text{Término de precompensación}}, \quad (3.21)$$

donde K_p y K_d son matrices simétricas definidas positivas respectivamente, llamadas ganancias de posición y de velocidad. $\tilde{q}_1 = q_{d1} - q_1$ y $\tilde{q}_2 = q_{d2} - q_2$ denotan el error de la posición angular uno y el error de la posición angular dos, respectivamente. El término de “precompensación” en el nombre del controlador es debido al hecho de que mencionada ley de control emplea el modelo dinámico del robot evaluado explícitamente en la trayectoria deseada. En particular, en este trabajo se evalúan las trayectorias definidas por (3.1), (3.10) y (3.11). Para el cálculo de K_p y K_d se hace uso del criterio de sintonía propuesto en [14], el cual requiere del conocimiento de las cotas máximas de las normas de velocidad y aceleración deseadas, denotadas por $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$ y $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$. Las cuales quedaron determinadas por (3.8) y (3.9) para (3.1), mientras que para (3.10) y (3.11) resultaron en (3.17) y (3.18).

Con la finalidad de comprender el desarrollo del problema, primero se estudia la ley de control PD con precompensación para un sistema mecánico lineal y de una entrada-una salida, que puede ser considerado como un robot manipulador con una sola articulación.

Dicho sistema mecánico consiste de un motor de CD con escobillas que está unido mediante un resorte a una pared, véase la Figura 3.5.

También, se presentan las condiciones necesarias para la selección adecuada de las ganancias de diseño K_p y K_d del controlador PD con precompensación, de tal manera que se garantice la estabilidad del sistema, es decir $\tilde{q}_1 \rightarrow 0$ y $\tilde{q}_2 \rightarrow 0$. Posteriormente, dicho criterio se aplica al robot manipulador bajo estudio. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos a nivel simulación para observar el desempeño del controlador.

3.3. Ejemplo del motor con resorte

Considerando el ejemplo de un motor de corriente directa que a través de un resorte está unido a una pared, según se muestra en la Figura 3.5.

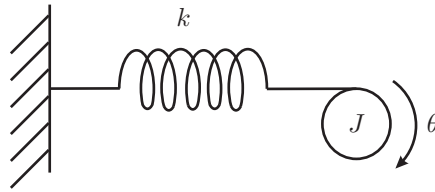


Figura 3.5: Diagrama motor con resorte.

El modelo matemático del motor con resorte es,

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau, \quad (3.22)$$

donde θ , $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ describen la posición, velocidad y aceleración angular del rotor, respectivamente, τ representa el par electromagnético generado por el motor y también representa la entrada del sistema o bien la variable de control, J representa la inercia del rotor, b representa el coeficiente de fricción viscosa del rotor y k representa la constante de rigidez del resorte.

Se propone un controlador PD con precompensación dado por,

$$\tau = K_p(\theta_d - \theta) + K_d(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + \underbrace{J\ddot{\theta}_d + b\dot{\theta}_d + k\theta_d}_{\text{Término de precompensación}}, \quad (3.23)$$

donde K_p y K_d son constantes positivas llamadas ganancias proporcional y derivativa respectivamente. θ_d , $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$ son respectivamente la posición angular deseada, la velocidad angular deseada y la aceleración angular. Sustituyendo (3.23) en (3.22) el sistema en lazo cerrado resulta en:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = K_p(\theta_d - \theta) + K_d(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + J\ddot{\theta}_d + b\dot{\theta}_d + k\theta_d, \quad (3.24)$$

el cual se puede reescribir como,

$$K_p(\theta_d - \theta) + K_d(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + J(\ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}) + b(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + k(\theta_d - \theta) = 0, \quad (3.25)$$

Si se define el error de posición como $\tilde{\theta} = (\theta_d - \theta)$ en (3.25), se obtiene:

$$K_p \tilde{\theta} + K_d \dot{\tilde{\theta}} + J \ddot{\tilde{\theta}} + b \dot{\tilde{\theta}} + k \tilde{\theta} = 0, \quad (3.26)$$

o bien acomodando,

$$J \ddot{\tilde{\theta}} + (K_d + b) \dot{\tilde{\theta}} + (K_p + k) \tilde{\theta} = 0. \quad (3.27)$$

Aplicando la transformada de Laplace a (3.27), se obtiene el polinomio característico siguiente:

$$p(s) = Js^2 + (K_d + b)s + (K_p + k). \quad (3.28)$$

En la Tabla 3.1 se muestra el arreglo de Routh-Hurwitz [32] asociado para el polinomio característico (3.28), el cual permite establecer las condiciones que han de cumplir sus coeficientes, con el fin de garantizar de que este sea un polinomio estable (i.e., que sus raíces tenga parte real negativa).

s^2	J	$K_p + k$
s^1	$K_d + b$	0
s^0	$K_p + k$	

Tabla 3.1: Arreglo de Routh-Hurwitz.

De acuerdo a la Tabla 3.1, las condiciones de estabilidad, para que $\tilde{\theta} \rightarrow 0$, están dadas por:

$$\begin{aligned} J &> 0, \\ K_d + b &> 0, \\ K_p + k &> 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.4. Criterio de sintonía para un robot de n grados de libertad

Una manera de seleccionar las ganancias del controlador PD con precompensación para un robot manipulador de n grados de libertad con uniones de tipo rotacional es mediante un criterio de sintonía. El criterio de sintonía propuesto en [14] es utilizado para determinar los valores propios mínimos de las matrices diagonales de diseño K_p y K_d que garantizan el cumplimiento del objetivo de control de movimiento en el robot manipulador de dos grados de libertad.

La metodología del criterio de sintonía se presenta a continuación:

1. Obtención del modelo dinámico del robot a ser controlado. Particularmente, determinación de $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.
2. Cálculo de las constantes $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$, $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$, k'_M , k_M , k_{C_1} , k_{C_2} , k_g y k' .

3. Determinación de $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$, $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$ a partir de la especificación de la tarea encomendada al robot.
4. Cálculo de las constantes s_1 y s_2 dadas por,

$$s_1 = [k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}^2], \quad (3.30)$$

$$s_2 = 2 [k' + k'_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}^2]. \quad (3.31)$$

y la obtención de k_{h1} y k_{h2} descritas por,

$$k_{h1} \geq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}, \quad (3.32)$$

$$k_{h2} \geq \frac{s_2}{\tanh\left(\frac{s_2}{s_1}\right)}. \quad (3.33)$$

5. Cálculo de las constantes \mathbf{a} y \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} [\lambda_{\text{Max}} \{K_d\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} + k_{h1}], \quad (3.34)$$

$$\mathbf{b} = \alpha_4 \lambda_{\text{Max}} \{M(\mathbf{q})\} + \alpha_2 k_{C_1}, \quad (3.35)$$

con $\alpha_2 = \sqrt{n}$ y $\alpha_4 = 1$.

6. Seleccionar $\gamma > 0$ y finalmente determinar las matrices de diseño K_p y K_d de manera que sus valores propios mínimos satisfagan:

$$\lambda_{\min} \{K_d\} > k_{h1} + \gamma \mathbf{b}, \quad (3.36)$$

$$\lambda_{\min} \{K_p\} > \alpha_3 \left[\frac{[2\gamma \mathbf{a} + k_{h2}]^2}{4\gamma [\lambda_{\min} \{K_d\} - k_{h1} - \gamma \mathbf{b}] + k_{h2}} + k_{h2} \right], \quad (3.37)$$

$$\lambda_{\min} \{K_p\} > \gamma^2 \frac{\alpha_1^2 \lambda_{\text{Max}}^2 \{M(\mathbf{q})\}}{\lambda_{\min} \{M(\mathbf{q})\}}, \quad (3.38)$$

$$\lambda_{\min} \{K_p\} > k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}^2, \quad (3.39)$$

con $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_3 = 1$.

3.5. Criterio de sintonía aplicado al robot a utilizar

En esta sección se aplica el criterio de sintonía presentado en la sección anterior, con la finalidad de determinar los valores propios mínimos de las matrices simétricas de diseño K_p y K_d que garanticen el cumplimiento del objetivo de control de seguimiento de trayectoria. Cabe decir que este criterio se debe de realizar para cada una de las diferentes trayectorias que deberá seguir el robot. En particular, aquí se presentan los cálculos para el caso de las trayectorias determinadas por (3.1), (3.10) y (3.11) respectivamente. En estos desarrollos es necesario considerar los parámetros obtenidos en la Tabla 2.1. Además, de considerar que el robot tiene dos grados de libertad, es decir $n = 2$.

3.5.1. Criterio de sintonía aplicado a una trayectoria angular

A continuación se desarrolla el criterio de sintonía para el caso en el cual la trayectoria del robot manipulador de dos grados de libertad está determinada por (3.1), es decir:

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1[1 - e^{-2.0 t^3}] + c_1[1 - e^{-2.0 t^3}] \text{sen}(\omega_1 t) \\ b_2[1 - e^{-2.0 t^3}] + c_2[1 - e^{-2.0 t^3}] \text{sen}(\omega_2 t) \end{bmatrix} \quad [\text{rad}]. \quad (3.40)$$

1. Los elementos de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ son:

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2, \\ M_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Los elementos de la matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2, \\ C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Los elementos del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ son:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \text{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} g \text{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \text{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

2. Para el cálculo de las siguientes constantes: $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$, $\lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\}$, k'_M , k_M , k_{C1} , k_{C2} , k_g y k' se utilizan los parámetros del robot mostrados en la Tabla 2.1.

Determinación de $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$, $\lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\}$ y k'_M

Para la obtención de $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$ y $\lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\}$ (que en este caso la matriz $M(\mathbf{q})$ sólo depende de q_2), se procede a obtenerlos numéricamente, es decir, evaluando la matriz $M(\mathbf{q})$ para un conjunto de valores de q_2 entre 0 y 2π , y extrayendo los valores propios correspondientes. Los valores que arroja este procedimiento son:

$$\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} = 0.0029 \text{ [kg m}^2\text{]}, \quad (3.44)$$

$$\lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\} = 0.0457 \text{ [kg m}^2\text{]}, \quad (3.45)$$

y ocurren para $q_2 = \pi$ y $q_2 = 0$, respectivamente.

Por otro lado k'_M resulta en [14]:

$$k'_M = \lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\} = 0.0457 \text{ [kg m}^2\text{]}. \quad (3.46)$$

Determinación de k_M

Considerando la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$, definida por (3.41), a partir de sus componentes pueden verificarse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{11}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -2m_2l_1l_{c2} \sin(q_2), \\ \frac{\partial M_{12}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{12}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2l_1l_{c2} \sin(q_2), \\ \frac{\partial M_{21}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{21}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2l_1l_{c2} \sin(q_2), \\ \frac{\partial M_{22}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{22}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Entonces la constante k_M puede determinarse como [14]:

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right| \right]. \quad (3.48)$$

Por lo tanto, al considerar (3.47) en (3.48), la constante k_M resulta ser:

$$k_M \geq n^2 2m_2l_1l_{c2}. \quad (3.49)$$

Empleando los parámetros presentados en la Tabla 2.1 se obtiene:

$$k_M = 0.0254 \text{ [kg m}^2\text{]}. \quad (3.50)$$

Determinación de k_{C_1}

Considere el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -m_2l_1l_{c2} \sin(q_2) [2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ m_2l_1l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

el cual puede expresarse como:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T [C_1(\mathbf{q})] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T [C_2(\mathbf{q})] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

donde:

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1l_{c2} \sin(q_2) \\ -m_2l_1l_{c2} \sin(q_2) & -m_2l_1l_{c2} \sin(q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{111}(\mathbf{q}) & C_{112}(\mathbf{q}) \\ C_{121}(\mathbf{q}) & C_{122}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \\ C_2(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_2l_1l_{c2} \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{211}(\mathbf{q}) & C_{212}(\mathbf{q}) \\ C_{221}(\mathbf{q}) & C_{222}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así la constante k_{C_1} puede determinarse como [14]:

$$k_{C_1} \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} |C_{k_{ij}}(\mathbf{q})| \right]. \quad (3.53)$$

Aplicando, (3.52) en (3.53), la constante k_{C_1} se obtiene:

$$k_{C_1} \geq n^2 m_2 l_1 l_{c2}. \quad (3.54)$$

La cual usando los parámetros de la Tabla 2.1 resulta ser:

$$k_{C_1} = 0.0127 \text{ [kg m}^2\text{]}. \quad (3.55)$$

Determinación de k_{C_2}

De igual manera al considerar el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$, expresado como en (3.52), a partir de las matrices $C_1(\mathbf{q})$ y $C_2(\mathbf{q})$ puede verificarse que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{111}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{111}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial C_{112}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{112}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{121}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{121}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{122}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{122}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{211}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{211}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{212}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{212}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial C_{221}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{221}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial C_{222}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{222}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Entonces la constante k_{C_2} puede determinarse como [14]:

$$k_{C_2} \geq n^3 \left[\max_{i,j,k,l,q} \left| \frac{\partial C_{k_{ij}}(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right| \right]. \quad (3.57)$$

Aplicando los resultados (3.56) en (3.57), la constante k_{C_2} resulta en:

$$k_{C_2} \geq n^3 m_2 l_1 l_{c2}. \quad (3.58)$$

Así, usando los parámetros de la Tabla 2.1, k_{C_2} toma el siguiente valor numérico:

$$k_{C_2} = 0.0254 \text{ [kg m}^2\text{]}. \quad (3.59)$$

Determinación de k_g

De acuerdo con los componentes del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ descrito en (3.43), se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_1(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2).\end{aligned}\tag{3.60}$$

Así la constante k_g puede determinarse como [14]:

$$k_g \geq n \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right|.\tag{3.61}$$

Por lo tanto, la constante k_g se escoge como [14]:

$$k_g \geq n [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_2 l_{c2}] g.\tag{3.62}$$

Usando los parámetros de la Tabla 2.1, k_g toma el siguiente valor numérico:

$$k_g = 3.6634 \text{ [kg m}^2/\text{s}^2].\tag{3.63}$$

Determinación de k'

Para la obtención de k' se procede a obtenerlo numéricamente evaluando la norma $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para un conjunto de valores de q_1 y q_2 entre 0 y 2π , y extrayendo el valor máximo. Éste se produce para $q_1 = \pi/2$ y $q_2 = 0$, y arroja el valor:

$$k' = 1.8423 \text{ [N-m]}.\tag{3.64}$$

3. Las cotas máximas de velocidad y aceleración, $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$, $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$ asociadas a (3.40) están determinadas por (3.8) y (3.9), es decir,

$$\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} \leq 4.07 \text{ [rad/s]},\tag{3.65}$$

$$\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} \leq 18.32 \text{ [rad/s}^2].\tag{3.66}$$

4. Para el cálculo de la constante s_1 definida por (3.30), se obtuvo usando (3.50), (3.59), (3.63), (3.65) y (3.66), de tal manera que,

$$s_1 = 4.56 \text{ [N-m]},\tag{3.67}$$

y la constante s_2 definida por (3.31), se calcula a partir de (3.46), (3.55), (3.64), (3.65) y (3.66), obteniendo,

$$s_2 = 5.78 \text{ [N-m]}.\tag{3.68}$$

Por otro lado, el cálculo de la constante k_{h1} descrita por (3.32), se obtiene utilizando a (3.55) y (3.65), resultando en:

$$k_{h1} = 0.05 \text{ [kg m}^2\text{/s]}, \quad (3.69)$$

y el cálculo de la constante k_{h2} descrita por (3.33), se determina con (3.67) y (3.68), teniendo como resultado:

$$k_{h2} = 6.77 \text{ [N-m]}. \quad (3.70)$$

5. Para la determinación de la constante \mathbf{a} , definida por (3.34), se propone un valor de $\lambda_{\text{Max}} \{K_d\} = 5 \text{ [N-m-s/rad]}$, y con la ayuda de (3.55), (3.65) y (3.69), se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{a} = 2.55 \text{ [kg m}^2\text{/s]}, \quad (3.71)$$

y para determinar a \mathbf{b} , definida por (3.35), se utiliza (3.45) y (3.55), resultando en:

$$\mathbf{b} = 0.06 \text{ [kg m}^2\text{]}. \quad (3.72)$$

con $\alpha_2 = \sqrt{n} = \sqrt{2}$ y $\alpha_4 = 1$.

6. Finalmente, se procede a encontrar las matrices K_p y K_d , las cuales deben satisfacer las restricciones determinadas en (3.36)-(3.39). Para (3.36) se utiliza (3.69) y (3.72) con $\gamma = 2$, de manera que:

$$\lambda_{\min} \{K_d\} > (k_{h1} + \gamma \mathbf{b}) = 0.18 \text{ [N-m-s/rad]}, \quad (3.73)$$

Para determinar $\lambda_{\min} \{K_p\}$, definida por (3.37)-(3.39), se utiliza (3.44), (3.45), (3.67), (3.69)-(3.72), resultando en:

$$\lambda_{\min} \{K_p\} > \alpha_3 \left[\frac{[2\gamma \mathbf{a} + k_{h2}]^2}{4\gamma [\lambda_{\min} \{K_d\} - k_{h1} - \gamma \mathbf{b}]} + k_{h2} \right] = 50.78 \text{ [N m]}, \quad (3.74)$$

$$\lambda_{\min} \{K_p\} > \left(\gamma^2 \frac{\alpha_1^2 \lambda_{\text{Max}}^2 \{M(\mathbf{q})\}}{\lambda_{\min} \{M(\mathbf{q})\}} \right) = 2.88 \text{ [N m]}, \quad (3.75)$$

$$\lambda_{\min} \{K_p\} > k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} + k_{C2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}^2 = 4.56 \text{ [N m]}, \quad (3.76)$$

donde se escogió a $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_3 = 1$.

Por lo tanto, una selección adecuada para K_p que cumple las condiciones (3.74)-(3.76), esta determinada por:

$$K_p = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 55 \end{bmatrix} \text{ [N-m]}. \quad (3.77)$$

Mientras que una selección apropiada para K_d , que satisface el hecho de que $\lambda_{\text{Max}} \{K_d\} = 5 \text{ [N-m-s/rad]}$ y (3.73), esta dada por:

$$K_d = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ [N-m-s/rad]}. \quad (3.78)$$

3.5.2. Criterio de sintonía aplicado a una parábola

A continuación se muestra de manera resumida el desarrollo del criterio de sintonía aplicado al caso en el que la trayectoria a seguir está determinada por una parábola, descrita por (3.10)-(3.11), i.e.:

$$x_d = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{P} \right) + h, \quad (3.79)$$

$$y_d = \frac{1}{4b} x_d^2 + k, \quad (3.80)$$

1. Debido a que las componentes modelo dinámico del robot a ser controlado no dependen de la trayectoria a seguir, entonces las matrices $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ no sufren modificación alguna.
2. De igual manera, como el cálculo de $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$, $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$, k'_M , k_M , k_{C_1} , k_{C_2} , k_g y k' , no depende de la trayectoria a seguir por el robot, estas constantes permanecen sin cambio¹, es decir:

$$\lambda_{\min}\{M(q)\} = 0.0029 \text{ [kg-m}^2\text{]}, \quad (3.81)$$

$$\lambda_{\max}\{M(q)\} = 0.0457 \text{ [kg-m}^2\text{]}, \quad (3.82)$$

$$k'_M = 0.0457 \text{ [kg-m}^2\text{]} \quad (3.83)$$

$$k_M = 0.0254 \text{ [kg-m}^2\text{]}, \quad (3.84)$$

$$k_{C_1} = 0.0127 \text{ [kg-m}^2\text{]}, \quad (3.85)$$

$$k_{C_2} = 0.0254 \text{ [kg-m}^2\text{]}, \quad (3.86)$$

$$k_g = 3.6634 \text{ [kg-m}^2\text{/s]}, \quad (3.87)$$

$$k' = 1.8423 \text{ [N-m]}. \quad (3.88)$$

3. Las cotas máximas de velocidad y aceleración, $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\max}$, $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\max}$ correspondientes a (3.79)-(3.80) están determinadas por (3.17) y (3.18), es decir,

$$\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\max} \leq 1.93 \text{ [rad/s]}, \quad (3.89)$$

$$\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\max} \leq 5.82 \text{ [rad/s}^2\text{]}. \quad (3.90)$$

4. Para determinar el valor de s_1 se utiliza (3.84), (3.86), (3.87), (3.89) y (3.90) en (3.32), mientras que para determinar s_2 se utiliza (3.83), (3.85), (3.88), (3.89) y (3.90) en (3.31), respectivamente obteniendo los siguientes valores:

$$s_1 = 3.9090 \text{ [N-m]}, \quad (3.91)$$

$$s_2 = 4.3124 \text{ [N-m]}. \quad (3.92)$$

¹Véase el numeral 2, asociado a la Subsección 3.5.1

De esta manera, sustituyendo (3.85) y (3.89) en (3.32) se encuentra k_{h1} . Y sustituyendo (3.91) y (3.92) en (3.33) se encuentra k_{h2} . Es decir:

$$k_{h1} = 0.0248 \text{ [kg-m}^2\text{/s]}, \quad (3.93)$$

$$k_{h2} = 5.3794 \text{ [N-m]}. \quad (3.94)$$

5. Para determinar \mathbf{a} se propone $\lambda_{\text{Max}} \{K_d\} = 5 \text{ [N-m-s/rad]}$ y utilizando (3.85) y (3.89) en (3.34), para determinar \mathbf{b} se utiliza (3.82) y (3.85) en (3.35), resultando en:

$$\mathbf{a} = 2.5248 \text{ [kg-m}^2\text{/s]}, \quad (3.95)$$

$$\mathbf{b} = 0.0639 \text{ [kg-m}^2\text{]}. \quad (3.96)$$

con $\alpha_2 = \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{n}$, $\alpha_4 = 1$ y

6. Finalmente, se procede a determinar las matrices K_p y K_d , para determinar $\lambda_{\text{min}} \{K_p\}$ definida en (3.36) se propone $\gamma = 2$ y se utiliza (3.93) y (3.96), teniendo como resultado:

$$\lambda_{\text{min}} \{K_d\} > (k_{h1} + \gamma \mathbf{b}) = 0.15 \text{ [N-m-s/rad]}, \quad (3.97)$$

Asimismo, para determinar $\lambda_{\text{min}} \{K_p\}$ definida por las condiciones (3.37) y (3.38) se utiliza a (3.81), (3.82), (3.91), (3.93)-(3.97), resultando en:

$$\lambda_{\text{min}} \{K_p\} > \alpha_3 \left[\frac{[2\gamma \mathbf{a} + k_{h2}]^2}{4\gamma [\lambda_{\text{min}} \{K_d\} - k_{h1} - \gamma \mathbf{b}]} + k_{h2} \right] = 40.72 \text{ [N m]} \quad (3.98)$$

$$\lambda_{\text{min}} \{K_p\} > \left(\gamma^2 \frac{\alpha_1^2 \lambda_{\text{Max}}^2 \{M(\mathbf{q})\}}{\lambda_{\text{min}} \{M(\mathbf{q})\}} \right) = 2.88 \text{ [N m]} \quad (3.99)$$

$$\lambda_{\text{min}} \{K_p\} > k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} + k_{C2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}^2 = 3.90 \text{ [N m]}, \quad (3.100)$$

con $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_3 = 1$.

Por lo tanto una selección adecuada de K_p que cumple las condiciones (3.98)-(3.100), son

$$K_p = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 55 \end{bmatrix} \text{ [N-m]}, \quad (3.101)$$

Mientras que una selección apropiada para K_d , que satisface la condiciones cuando $\lambda_{\text{Max}} \{K_d\} = 5 \text{ [N-m-s/rad]}$ y (3.97), corresponde a:

$$K_d = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ [N-m-s/rad]}. \quad (3.102)$$

Como se observa en (3.77)-(3.78) y (3.101)-(3.102) las matrices de ganancias K_p y K_d son iguales. Debido a que al determinar las condiciones de las ganancias K_p y K_d para el criterio de sintonía aplicado a la parábola determinadas por (3.97)-(3.99). Se observa que el valor determinado en (3.73)-(3.75) asociadas a la trayectoria angular, son mayores y por lo tanto cumplen con las condiciones (3.97)-(3.99). Es por eso que se utilizaron los mismos valores de ganancias K_p y K_d para la trayectoria angular y para la parábola.

3.6. Simulación de la ley de control

Una vez descrito el controlador PD con precompensación que se propone para realizar la tarea de seguimiento de trayectoria, es decir el conseguir que $\tilde{q}_1 \rightarrow 0$ y $\tilde{q}_2 \rightarrow 0$. Se procede a realizar las simulaciones numéricas para verificar el desempeño del controlador propuesto. Éstas simulaciones se realizan con la ayuda del software Matlab[®]-Simulink[®], las cuales permiten tener un referente antes de proceder a la instrumentación en tiempo real de la ley de control.

A continuación se muestran el diagrama a bloques desarrollado para realizar las simulaciones del controlador PD con precompensación, asociadas a las trayectorias deseadas: angular y parábola. Posteriormente, se presentan los resultados obtenidos.

3.6.1. Diagrama a bloques en Matlab[®]-Simulink[®]: Trayectoria angular

En este apartado se presenta el diagrama a bloques desarrollado para el controlador asociado a la trayectoria angular deseada (3.40). En la Figura 3.6 se muestra el diagrama a bloques realizado. Éste se desarrolló con la ayuda de funciones básicas de Matlab[®]-Simulink[®]. Los bloques de los cuales se conforma este diagrama se describen a continuación:

- **Bloque A:** En este bloque se realiza la asignación de los parámetros físicos del robot manipulador, los cuales se muestran en la Tabla 2.1. Dichos parámetros son utilizados para el controlador, el modelo dinámico y la cinemática directa (la cual permite visualizar la evolución del robot en el plano $X - Y$).
- **Bloque B:** En este bloque se introducen las ganancias proporcionales y derivativas, K_p y K_d , las cuales son requeridas por el bloque **F** correspondientes al controlador PD con precompensación. Las ganancias que se utilizan son las mostradas en (3.77) y (3.78).
- **Bloque C:** En este se realiza la generación de la trayectoria angular y tiene como salida a la posición angular q_{d1} y q_{d2} , descritas por la ecuación (3.40). Además tiene como salida a las velocidades deseadas, \dot{q}_{d1} y \dot{q}_{d2} descritas en (3.2) y (3.3) respectivamente. También tiene como salida a las aceleraciones deseadas, \ddot{q}_{d1} y \ddot{q}_{d2} , descritas en (3.4) y (3.5), respectivamente.
- **Bloque D:** Aquí, se sintetiza la ley de control representada por (3.21). Tiene como entradas a las variables q_{d1} , q_{d2} , \dot{q}_{d1} , \dot{q}_{d2} , \ddot{q}_{d1} , \ddot{q}_{d2} , q_1 , q_2 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 y tiene como salida a los pares aplicados en los eslabones, τ_1 y τ_2 .
- **Bloque E:** Este bloque representa la realización del modelo dinámico del robot manipulador representado en variables de estado descrito en (A.7)-(A.10). El modelo dinámico tiene como entradas a τ_1 y τ_2 , las cuales representan la entrada de

control del sistema y como salida tiene a las posiciones angulares, q_1 y q_2 , así como las velocidades angulares \dot{q}_1 y \dot{q}_2 .

- Bloque **F**: Aquí, se lleva a cabo la síntesis de la cinemática directa del robot manipulador descrita por la ecuación (2.1). Tiene como entrada a las posiciones articulares q_1 y q_2 , y como salida la posición (x, y) . Dicha posición se considera el punto de interés del robot manipulador.

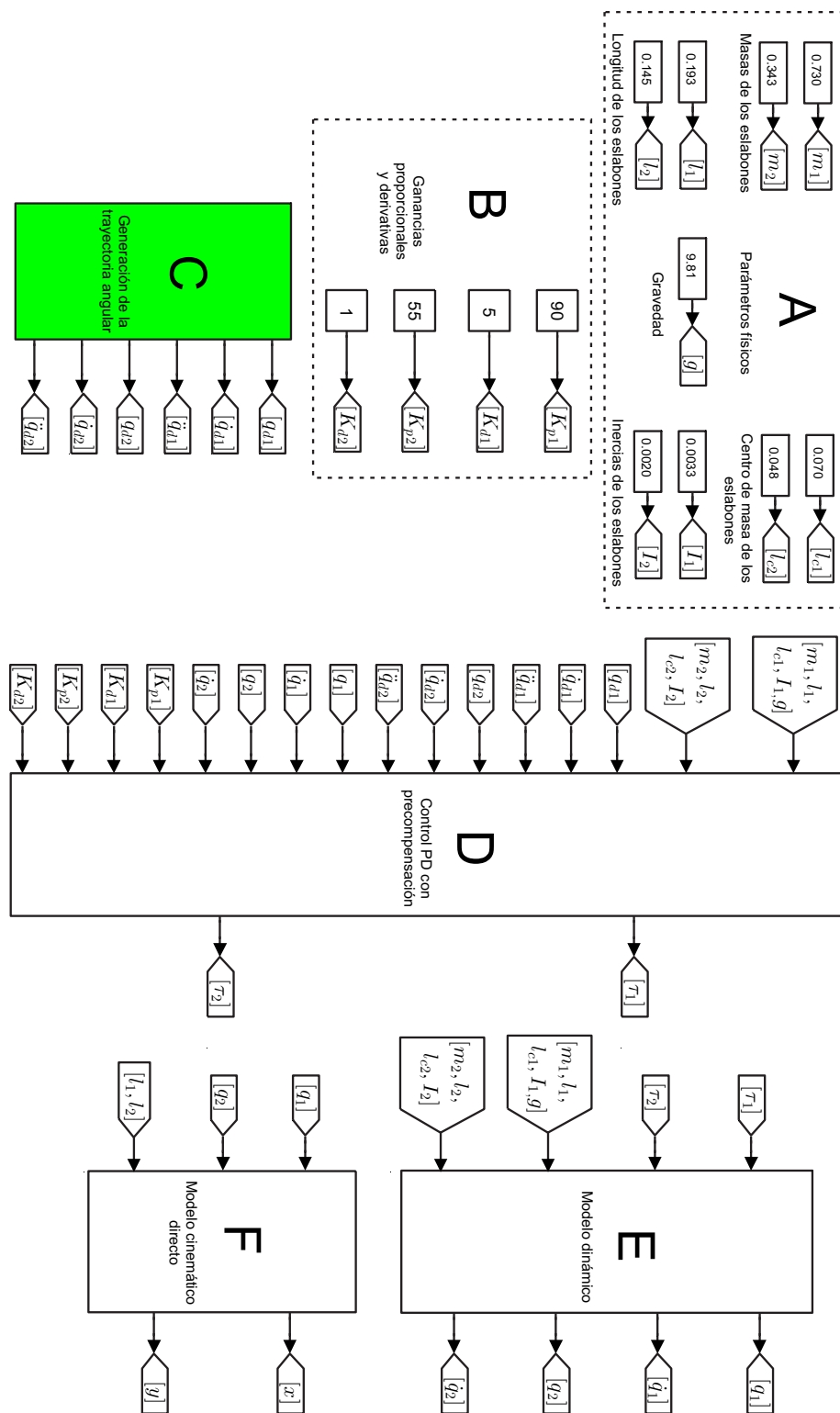


Figura 3.6: Diagrama a bloques utilizado para la simulación.

3.6.2. Diagrama a bloques en Matlab[®]-Simulink[®]: Parábola

Con la intención de no perder al lector, en esta subsección no se presenta el sistema en Matlab[®]-Simulink[®] para el caso en el que la trayectoria deseada es una parábola. No obstante, el diagrama a bloques para este caso se puede apreciar en el Apéndice C.1. Cabe decir, que los diagramas a bloques desarrollados en las Figuras 3.6 y C.1 son similares, salvo algunas pequeñas variantes. Así, en la Figura C.1 se aprecia que no existe el Bloque **C**, debido a que cuando se programa la trayectoria angular (3.40) no se hace uso del modelo cinemático inverso descrito en (2.14) y (2.15). Asimismo, también se observa que en la Figura C.1 se han agregado los bloques **G** y **H**. A continuación se explica detalladamente el contenido de estos bloques:

- Bloque **G**: En este se realiza la generación de la trayectoria llamada parábola que tiene como salida las variables x_d y y_d , descritas por las ecuaciones (3.79) y (3.80) respectivamente, dichas variables representan la trayectoria en el plano $X - Y$. Además también tiene como salida las variables \dot{x}_d y \dot{y}_d , que representan a la primera derivada descrita en (3.12) y (3.13) respectivamente. Asimismo tiene como salida a la segunda derivada \ddot{x}_d y \ddot{y}_d , de la parábola, las cuales se describen en (3.14) y (3.15) respectivamente.
- Bloque **H**: En este se realiza la síntesis de la cinemática inversa teniendo como entrada a $x_d, y_d, \dot{x}_d, \dot{y}_d, \ddot{x}_d$ y \ddot{y}_d y tiene como salida a $q_{d1}, q_{d2}, \dot{q}_{d1}, \dot{q}_{d2}, \ddot{q}_{d1}$ y \ddot{q}_{d2} . Este bloque permite transformar la trayectoria llamada parábola del plano cartesiano $X - Y$ al plano de las coordenadas articulares, incluyendo a las relaciones de velocidad y aceleración implicadas en la parábola. La cinemática inversa utilizada en este bloque está determinada por (2.14) y (2.15), (2.18) y (2.19).

3.7. Resultados obtenidos en simulación

Las trayectorias deseadas empleadas en las simulaciones son dos: la primera se refiere al movimiento angular descrito por (3.40) y la segunda se refiere a la parábola descrita por (3.79) y (3.80). A continuación se muestran los resultados correspondientes asociados a éstas trayectorias.

3.7.1. Resultados para la trayectoria angular

Aquí se presenta los resultados de simulación asociados al caso en el que la trayectoria deseada se expresa en el espacio de las articulaciones del robot, determinada por (3.40).

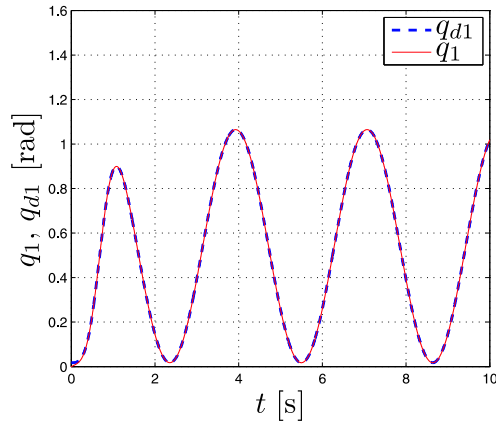
Los resultados obtenidos a nivel simulación para este caso se muestran en la Figura 3.7. Ahí, se puede observar como la ley de control PD con precompensación realiza el objetivo de seguimiento de trayectoria, pues $q_1 \rightarrow q_{d1}$ y $q_2 \rightarrow q_{d2}$ (Véase las Figuras 3.7(a) y (b)). Más aun, esto se puede apreciar con mayor claridad en la Figura 3.7(c), donde se muestra como los errores de seguimiento de trayectoria tienden a cero, es decir, $\tilde{q}_1 = q_{d1} - q_1 \rightarrow 0$ y $\tilde{q}_2 = q_{d2} - q_2 \rightarrow 0$, respectivamente, en aproximadamente 1 s.

Por otro lado, en la Figura 3.7(d) se observa la trayectoria que describe el punto (x, y) en el plano cartesiano, determinado por la cinemática directa (2.1).

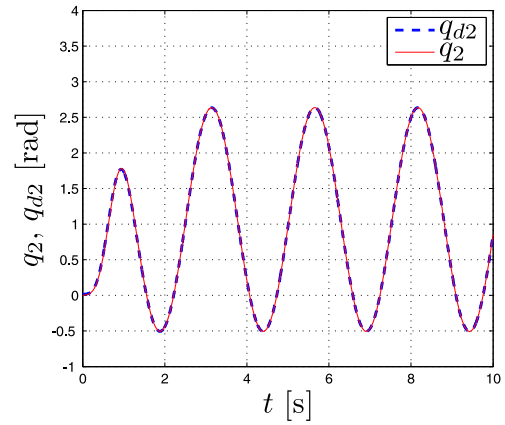
Asimismo, en la Figura 3.7(e) se muestran los pares que requieren los motores de CD, τ_1 y τ_2 , para realizar la tarea de seguimiento trayectoria. De acuerdo a los resultados obtenidos, se observa que éstos demandan un valor máximo de 1.2 N-m y 0.15 N-m, respectivamente. Cabe decir que estos valores de par, no sobrepasan los niveles provistos por las hojas técnicas de los motores.

Finalmente, en la Figura 3.7(f) se observa que el voltaje asociado a los motores de CD, para sintetizar los pares demandados en la Figura 3.7(e), v_1 y v_2 , presentan niveles máximos de voltaje de 5 V y 7 V, respectivamente. En consecuencia, no sobrepasan el intervalo de voltaje de $[-24 \text{ V}, 24 \text{ V}]$, con el cual se alimentan a nivel experimental los motores. Asimismo, estos valores cumplen con las especificaciones técnicas de los actuadores.

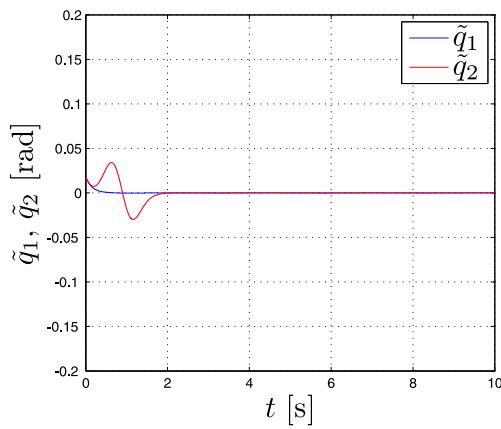
Una vez que se ha simulado y a su vez se ha evaluado el controlador PD con precompensación con las ganancias K_p y K_d escogidas en (3.77) y (3.78), de acuerdo al criterio de sintonía, el siguiente paso es desarrollar la implementación en tiempo real.



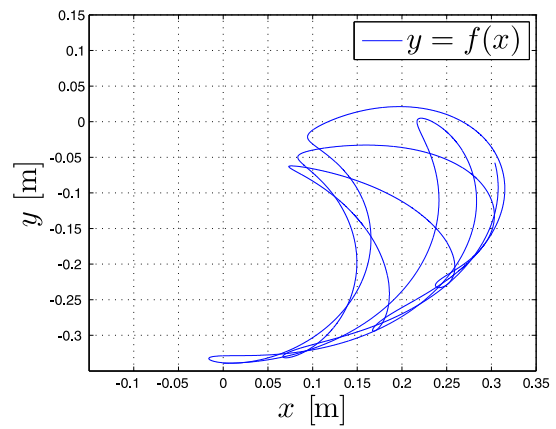
(a) Trayectoria del eslabón uno



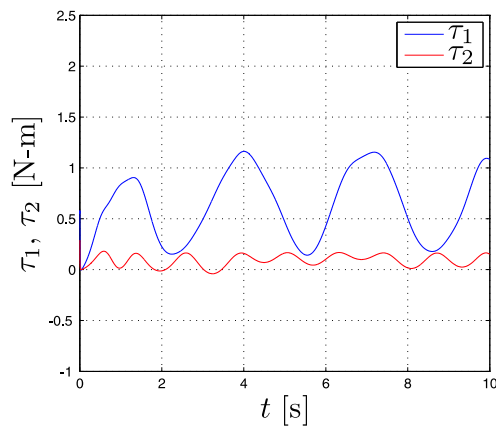
(b) Trayectoria del eslabón dos



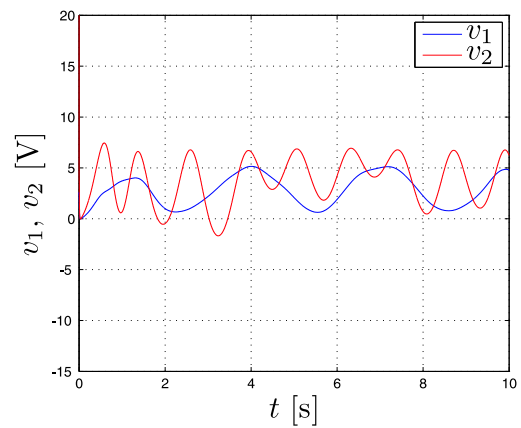
(c) Errores del seguimiento de trayectoria



(d) Posición en X-Y



(e) Pares de los motores



(f) Voltaje de los motores

Figura 3.7: Gráficas de simulación para la trayectoria angular.

3.7.2. Resultados para la parábola

En este apartado se muestran los resultados de simulación para el caso en el que la trayectoria deseada es una parábola, la cual se expresa en el espacio cartesiano $X - Y$, dicha trayectoria esta determinada por (3.79) y (3.80), con las ganancias utilizadas determinadas por (3.101) y (3.102).

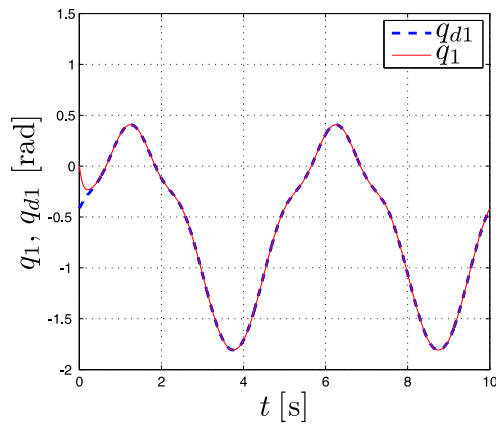
Los resultados que se obtienen a nivel simulación para el caso de la parábola se muestra en la Figura 3.8. Ahí, se puede ver que el controlador PD con precompensación lleva a cabo el objetivo de control en el seguimiento de la trayectoria, al observar las Figuras 3.8(a) y (b) se tiene que $q_1 \rightarrow q_{d1}$ y $q_2 \rightarrow q_{d2}$. Asimismo, en la Figura 3.8(c) se puede ver con claridad como los errores de seguimiento de trayectoria tienden a 0, es decir $\tilde{q}_1 = q_{d1} - q_1 \rightarrow 0$ y $\tilde{q}_2 = q_{d2} - q_2 \rightarrow 0$, en aproximadamente 1.5 s.

Además, en la Figura 3.8(d) se puede observar que el punto de interés $(x, y) \rightarrow (x_d, y_d)$, lográndose el seguimiento de la parábola en el plano cartesiano $(X - Y)$ por el robot.

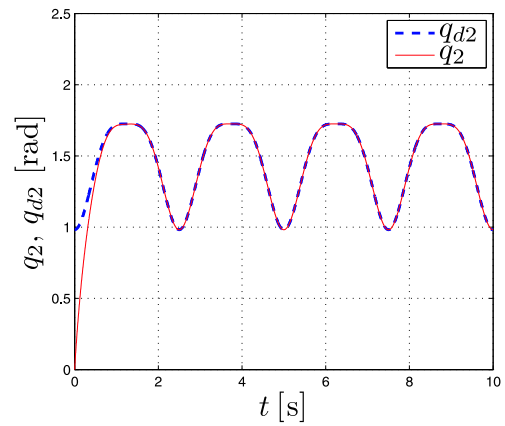
En la Figura 3.8(e) se presentan los pares que requieren los motores de CD, τ_1 y τ_2 , para realizar la tarea de seguimiento de trayectoria. En los cuales se observa que τ_1 muestra valores máximos en el intervalo de $[-1.1 \text{ N} - \text{m}, 0.5 \text{ N} - \text{m}]$ y para τ_2 se observa que sólo presenta valores con un máximo de 0.2 N-m. Al observar los valores de torque necesarios para realizar la tarea de seguimiento referente a la parábola, estos no sobrepasan los niveles provisto por las hojas técnicas de los motores.

Finalmente en la Figura 3.8(f) se observa que el voltaje asociado al motor uno, v_1 , tiene un valor de $[-5 \text{ V}, 3 \text{ V}]$ y para el motor dos, v_2 tiene un valor máximo de 7 V. En consecuencia, no sobrepasan el intervalo de voltaje de $[-24 \text{ V}, 24 \text{ V}]$, con el cual se alimentan a nivel experimental los motores. Asimismo, estos valores cumplen con las especificaciones técnicas de los actuadores.

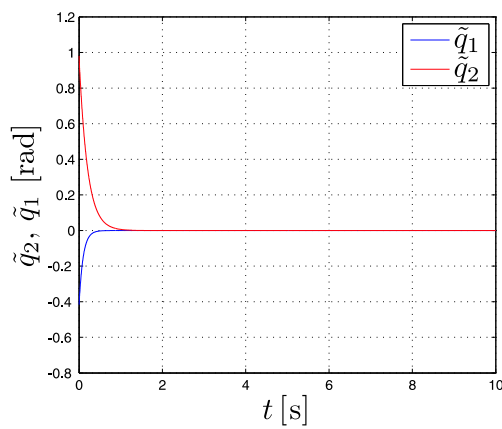
Al haber simulado y verificado el comportamiento de la ley de control PD con precompensación con las ganancias K_p y K_d escogidas en (3.101) y (3.102), de acuerdo al criterio de sintonía, se procede a desarrollar la implementación en tiempo real.



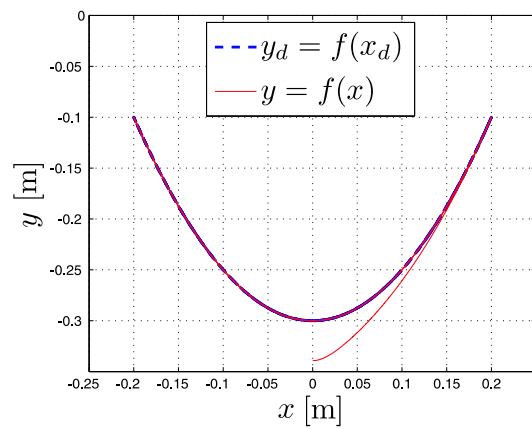
(a) Trayectoria del eslabón 1



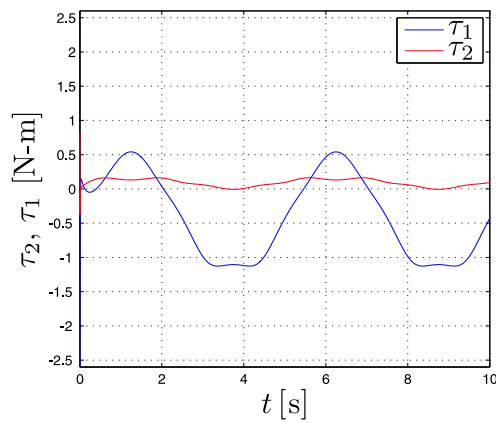
(b) Trayectoria del eslabón 2



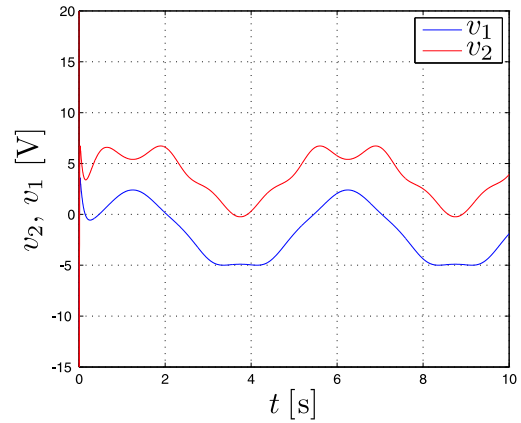
(c) Errores del seguimiento de trayectoria



(d) Posición en X-Y



(e) Pares de los motores



(f) Voltaje de los motores

Figura 3.8: Gráficas de simulación para la parábola.

Capítulo 4

Control en tiempo real

Una vez que se ha desarrollado la ley de control PD con precompensación, para realizar la tarea del seguimiento de trayectorias en el robot bajo consideración, y habiendo realizado las simulaciones numéricas que permiten verificar el desempeño del controlador para una trayectoria angular y una parábola. En este capítulo se llevan a cabo los experimentos en tiempo real en el prototipo a utilizar, con la finalidad de verificar los resultados obtenidos a nivel simulación. Primero se describen los bloques de los cuales se compone el programa desarrollado que permite realizar los experimentos en tiempo real. Posteriormente, se presentan los resultados experimentales obtenidos, así como los comentarios asociados a los mismos.

4.1. Diagrama a bloques en Matlab[®]-Simulink[®]

Cabe decir que las simulaciones en lazo cerrado obtenidas en el capítulo anterior, permiten visualizar el comportamiento del robot para el objetivo de control para el cual se diseñó, sin la necesidad hasta este punto de construir un prototipo. En el entendido de que un modelo matemático asociado a un sistema dinámico describe la evolución de su comportamiento con el correr del tiempo del mismo.

A nivel conceptual una de las partes más importantes es la implementación de una ley de control a nivel experimental, es decir, la transición de la simulación a la práctica. Esto radica en tener en cuenta que dicha ley de control se realizará con la ayuda de electrónica analógica y/o digital, microcontroladores, tarjetas, computadoras, etc. Y que el modelo, sobre el cual se verifica una ley de control en simulación, se sustituirá por la planta o prototipo construido para tal fin. Para realizar lo anterior, en este trabajo se realizó lo siguiente:

- Para la implementación práctica del controlador simulado, definido por (3.21), se hace uso del software Matlab[®]-Simulink[®] y de la tarjeta DS1104 de la marca dSPACE[®] junto con el software ControlDesk[®].
- Habiendo sintetizado el controlador, este se introduce en el prototipo descrito en

la Sección 2.4, a través de los motores de CD que actúan al robot¹. Pues como se ha dicho, en este caso el modelo dinámico empleado en simulación se reemplaza por el prototipo construido.

Habiendo realizado los comentarios pertinentes, sobre el proceso de simulación a experimentación, a continuación se describe el diagrama a bloques desarrollado para implementar el controlador PD con precompensación en tiempo real para la trayectoria angular y la parábola.

4.1.1. Diagrama a bloques para la trayectoria angular

En este apartado se presenta el diagrama a bloques desarrollado para realizar los experimentos en lazo cerrado asociados a la trayectoria angular (3.40).

En la Figura 4.1 se muestra el diagrama a bloques realizado. Al comparar la Figura 3.6 (la correspondiente a simulación) con la Figura 4.1, se observa que varios de los bloques se identifican con las mismas letras, a saber: los Bloques **A**, **B**, **C**, **D**, **F**. Esto es debido a que mencionados bloques no sufren modificación alguna en ambas figuras, y que se han explicado en la Subsección 3.6.1, motivo por el cual en este apartado no se comentan.

Además, en lo que respecta al Bloque **E** de las Figuras 3.6 y 4.1, si bien se mantiene la misma identificación, cabe decir que en la primera figura el Bloque **E** representa el modelo dinámico del robot, mientras que en la segunda el Bloque **E** representa el acondicionamiento de los voltajes v_1 y v_2 (correspondientes al motor uno y motor dos, respectivamente) y la lectura de la posición angular de los eslabones, con la ayuda de los encoders. Finalmente, en la Figura 4.1 se observa que el Bloque **I** ha sido agregado en comparación con la Figura 3.6. Por lo anterior, a continuación se explican los bloques que se modificaron o agregaron:

- Bloque **E**: Como se ha dicho, en este bloque se realiza el acondicionamiento de los voltajes v_1 y v_2 , así como la adquisición de la posición angular de los eslabones. Este bloque tiene como entradas a los voltajes v_1 y v_2 , y como salidas a las posiciones y velocidades angulares, i.e., q_1 , q_2 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 .

Para la lectura del desplazamiento angular de los eslabones se utilizaron encoders incrementales. Éstos ya vienen integrados a los motores 1 y 2, respectivamente. Véase el Apéndice B.1. Cabe decir que la lectura que generan los encoders son pulsos, y debido a que el controlador (3.21) requiere de las posiciones y velocidades angulares q_1 , q_2 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 expresadas en radianes, resultó necesario realizar la conversión de pulsos a radianes.

¹Aquí, es importante recordar que el controlador PD con precompensación entrega pares de entrada, véase (3.21), i.e., τ_1 y τ_2 que deben generarse por los motores de CD. Debido a que éstos admiten como entrada voltajes, una conversión apropiada de par a voltaje deberá de realizarse, según se detalla posteriormente.

De acuerdo a lo desarrollado en el Apéndice D, los pulsos generados por el encoder, n_{pulsos} , expresados en radianes para el motor 1, son:

$$q_1 = \frac{(n_{pulsos})(2\pi)}{9850 \text{ ppr}} \text{ [rad]}, \quad (4.1)$$

Mientras que para la flecha del motor 2, son:

$$q_2 = \frac{(n_{pulsos})(2\pi)}{9750 \text{ ppr}} \text{ [rad]}. \quad (4.2)$$

Por último, para obtener las velocidades angulares \dot{q}_1 y \dot{q}_2 , se derivan las posiciones angulares q_1 y q_2 respectivamente, con funciones básicas de Matlab®-Simulink®.

- **Bloque I:** En este bloque se realiza la conversión de par a voltaje, por lo ya comentado anteriormente. De acuerdo a [33], el par del motor está dado por:

$$\tau = k_m i, \quad (4.3)$$

donde k_m es la constante de par e i es la corriente de armadura del motor, respectivamente. Utilizando la ley de Ohm que está determinada por:

$$v = Ri, \quad (4.4)$$

donde R es la resistencia de armadura del motor. Así, solucionado para i de (4.3) y sustituyéndola en (4.4), se encuentra que:

$$v = \frac{R}{k_m} \tau. \quad (4.5)$$

Así, a partir de (4.5) y de las hojas técnicas de especificaciones de los motores (Véase el Apéndice B.1), se encuentra que la relación de par a voltaje para los motores de CD 1 y 2, quedan determinadas, respectivamente, por:

$$v_1 = \frac{R_1}{k_{m1}} \tau_1 = \frac{0.27}{0.0306} \tau_1 \text{ [V]}, \quad (4.6)$$

$$v_2 = \frac{R_2}{k_{m2}} \tau_2 = \frac{4.33}{0.0216} \tau_2 \text{ [V]}, \quad (4.7)$$

donde τ_1 y τ_2 corresponden a las entradas de control determinadas por (3.21).

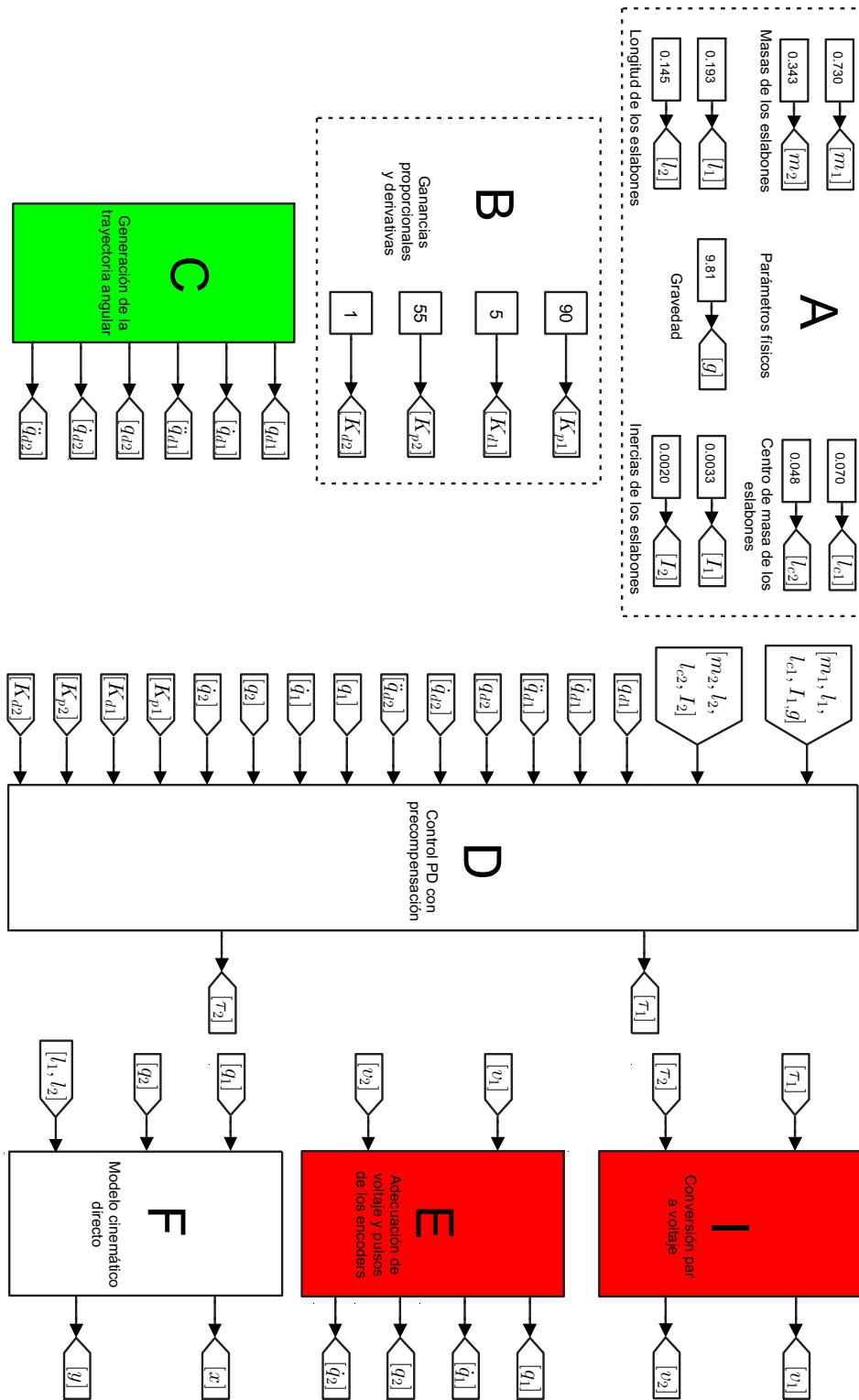


Figura 4.1: Diagrama a bloques utilizado para tiempo real.

4.1.2. Diagrama a bloques para la parábola

De nueva cuenta, con el objetivo de no perder al lector, en esta subsección no se presenta el diagrama a bloques en Matlab[®]-Simulink[®] para los experimentos en tiempo real, asociada al caso cuando la trayectoria deseada es una parábola. No, obstante, el diagrama se muestra en el Apéndice C.2. Cabe señalar, que los diagramas a bloques desarrollados en las Figuras C.1 y C.2 son similares, ya que los Bloques **A**, **B**, **D**, **F**, **G** y **H** son iguales. Pero, el Bloque **E** de la Figura C.1 es cambiado por la síntesis utilizada en el Bloque **E** de la Figura 4.1. El Bloque **I** se agrega en la Figura C.2 con respecto a la Figura C.1, teniendo el mismo contenido que el Bloque **I** de la Figura 4.1.

De esta forma, se tienen los diagramas a bloques en Matlab[®]-Simulink[®] para la trayectoria angular y para la parábola, para la implementación en tiempo real habiendo explicado los bloques que sufrieron modificaciones respecto a las simulaciones, a continuación se detalla el resultado de los experimentos

4.2. Resultados experimentales

Después de haber explicado los diagramas a bloques que conforman los programas desarrollados para seguir una trayectoria angular y una parábola, respectivamente. A continuación, se presentan los resultados experimentales obtenidos en lazo cerrado, para los casos en los cuales las trayectorias deseadas quedan determinadas por (3.40) y por (3.79) y (3.80).

4.2.1. Resultados de la trayectoria angular

En este apartado se presentan los resultados experimentales cuando se realiza el seguimiento de la trayectoria angular definida por (3.40), usando las ganancias K_p y K_d determinadas por (3.77) y (3.78). Los resultados experimentales asociados a las variables q_{d1} , q_1 , q_{d2} , q_2 , \tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 , x_d , y_d , x , y , τ_1 , τ_2 , v_1 y v_2 se muestran en la Figura 4.2, respectivamente.

En la Figura 4.2(a) y (b) se puede observar que el controlador PD con precompensación realiza el seguimiento de la trayectoria apropiadamente, puesto que $q_1 \rightarrow q_{d1}$ y $q_2 \rightarrow q_{d2}$. Asimismo, los errores del seguimiento de trayectoria se muestran en la Figura 4.2(c), ahí se observa que \tilde{q}_1 es aproximadamente 0, pues $\tilde{q}_1 \in [-0.001 \text{ rad}, 0.01 \text{ rad}]$. Y lo mismo sucede para \tilde{q}_2 , pues $\tilde{q}_2 \in [-0.025 \text{ rad}, 0.025 \text{ rad}]$. Lo cual está en completo acuerdo con lo obtenido a nivel simulación (Véase la Figura 3.7(a), (b) y (c)).

Por otro lado, en la Figura 4.2(d) se muestra la trayectoria que describe el punto (x, y) en el plano cartesiano, determinado por la cinemática directa (2.1).

En la gráfica 4.2(e) se presentan los pares requeridos por los motores de CD, τ_1 y τ_2 . Ahí, se observa que $\tau_1 \in [-0.5 \text{ N} - \text{m}, 3 \text{ N} - \text{m}]$, con picos de hasta $4.5 \text{ N} - \text{m}$. Lo cual no afecta el funcionamiento de los motores, pues de acuerdo a las especificaciones del fabricante, no se sobrepasan el par máximo de estos. Asimismo, se observa que $\tau_2 \in [-0.1 \text{ N} - \text{m}, 0.4 \text{ N} - \text{m}]$.

La Figura 4.2(f) presenta el voltaje asociado a los motores de CD. Ahí, se aprecia que $v_1 \in [-1 \text{ V}, 4 \text{ V}]$. Mientras que $v_2 \in [-2 \text{ V}, 4.9 \text{ V}]$. Cabe decir que los v_1 y v_2 , no sobrepasan los $\pm 24 \text{ V}$, con el cual se alimentan los motores de CD.

Finalmente, de esta manera se observa que el seguimiento de trayectoria angular presenta un buen desempeño a nivel experimental, y que los resultados obtenidos son muy similares a los obtenidos en simulación.

4.2.2. Resultados de la parábola

En esta subsección se presentan los resultados experimentales para el caso cuando se tiene una trayectoria en el plano cartesiano $X - Y$ definida como una parábola sintetizada por (3.79) y (3.80). En la Figura 4.3 se presentan las gráficas que se obtuvieron en tiempo real para la parábola.

En la Figura 4.3(a) y (b) se observa como se realiza el seguimiento de las posiciones angulares, es decir $q_1 \rightarrow q_{d1}$ y $q_2 \rightarrow q_{d2}$. De igual manera, los errores $\tilde{q}_1 = q_{d1} - q_1$ y $\tilde{q}_2 = q_{d2} - q_2$ se muestran en la Figura 4.3(c), donde se puede ver que \tilde{q}_1 es aproximadamente 0 y tiene un error inicial de 0.9 rad pero al correr el tiempo $\tilde{q}_1 \in [-0.01 \text{ rad}, 0.01 \text{ rad}]$. Para el caso del error dos \tilde{q}_2 es aproximadamente 0 y presenta un error inicial de -0.4 rad , y al correr del tiempo $\tilde{q}_2 \in [-0.01 \text{ rad}, 0.01 \text{ rad}]$. Lo cual está de acuerdo con lo obtenido a nivel simulación (Véase la Figura 3.8(a), (b) y (c)).

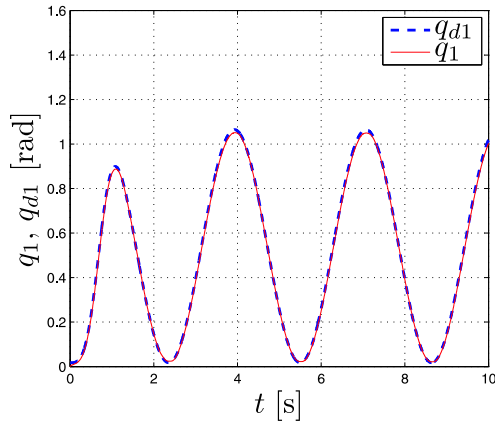
Por otro lado, en la Figura 4.3(d) se observa que la parábola no parte de la posición inicial del manipulador, en consecuencia se presenta un error inicial en las coordenadas articulares. Asimismo se observa que el punto de interés (x, y) del robot manipulador realiza el seguimiento de la parábola, es decir $(x, y) \rightarrow (x_d, y_d)$.

También, en la Figura 4.3(e) se muestran τ_1 y τ_2 los cuales son los pares requeridos por los motores de CD, de dicha figura se observa que $\tau_1 \in [-2.5 \text{ N - m}, 1.8 \text{ N - m}]$. Además, se observa que presenta un pico inicial negativo debido a que la parábola no inicia en la posición de reposo del robot. De igual forma para $\tau_2 \in [-0.1 \text{ N - m}, 0.3 \text{ N - m}]$, además se observa que también tiene un pico inicial por lo comentado anteriormente.

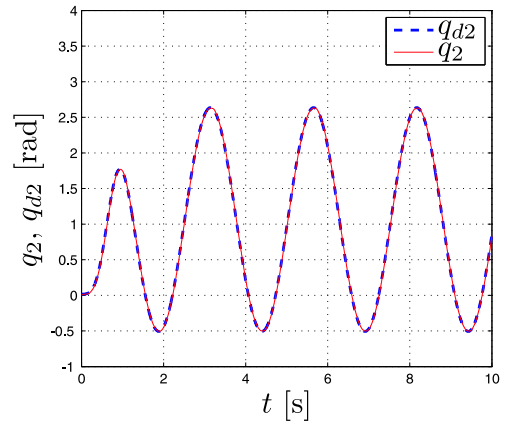
En la Figura 4.3(f) se observa el voltaje correspondiente a los motores de CD. $v_1 \in [-5 \text{ V}, 3 \text{ V}]$. Mientras que $v_2 \in [-1 \text{ V}, 3 \text{ V}]$. Al analizar dichos valores de voltaje se puede ver que v_1 y v_2 presentan unos picos iniciales, que se presentan porque la parábola no inicia en la posición de reposo del robot, además estos valores no sobrepasan los valores de voltaje de $\pm 24 \text{ V}$, con el cual se alimentan a nivel experimental los motores. Asimismo, estos valores cumplen con las especificaciones técnicas de los motores.

De esta manera se observa que el seguimiento de trayectoria de una parábola tiene un buen desempeño a nivel experimental, y que los resultados obtenidos son muy similares a los obtenidos en simulación.

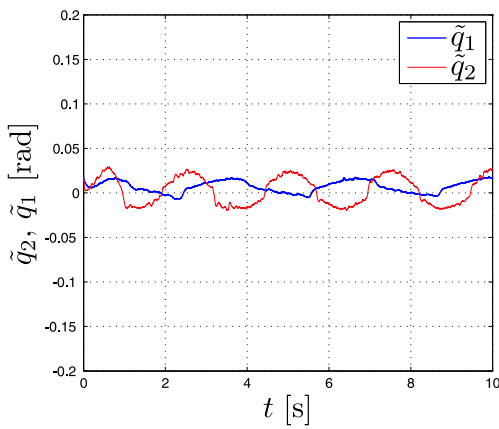
Finalmente, como se observa en los resultados experimentales presentados en las Figuras 4.2 y se puede observar con respecto a las Figuras 3.7 y 3.8, presentadas a nivel simulación, que los errores \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 no son estrictamente 0, ya que en la práctica existen diversos factores que afectan el desempeño del controlador.



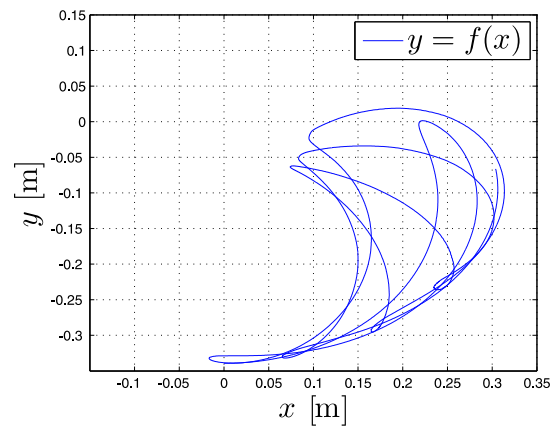
(a) Trayectoria del eslabón uno



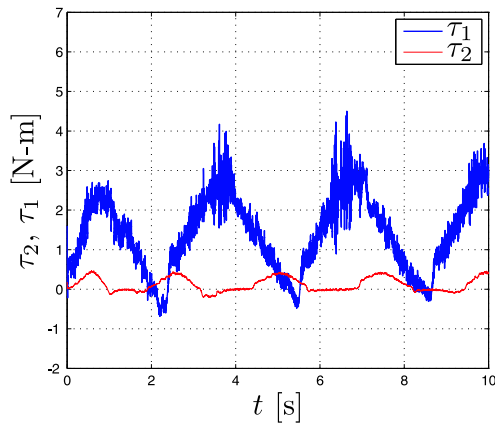
(b) Trayectoria del eslabón dos



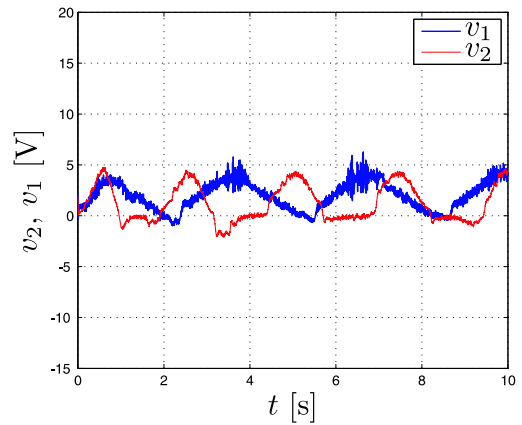
(c) Errores del seguimiento de trayectoria



(d) Posición en X-Y

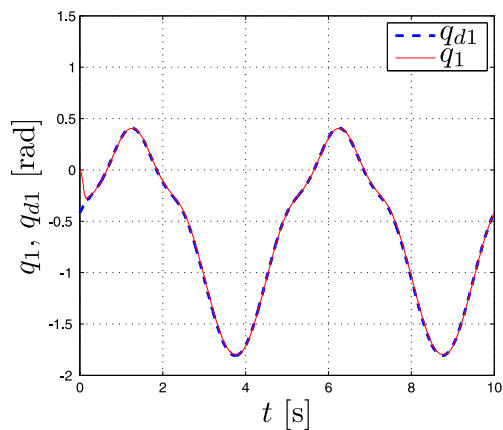


(e) Par de los motores

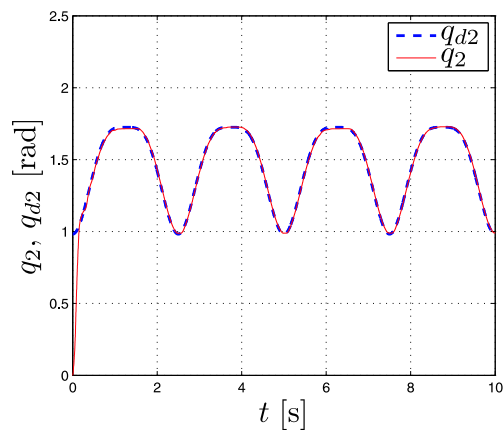


(f) Voltaje de los motores

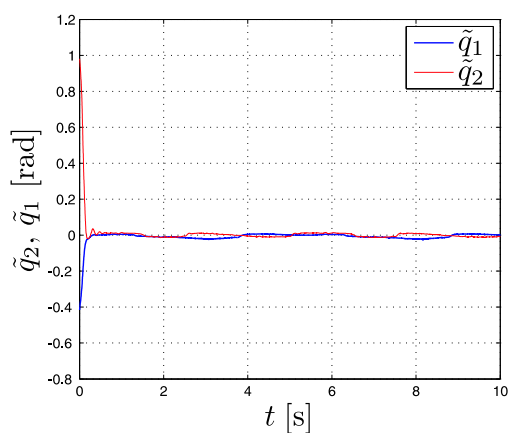
Figura 4.2: Gráficas en tiempo real para la trayectoria angular.



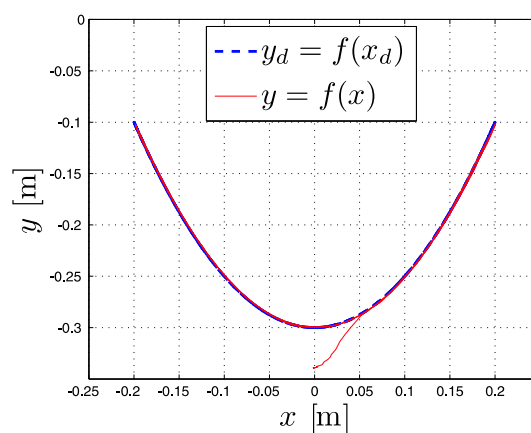
(a) Trayectoria del eslabón 1



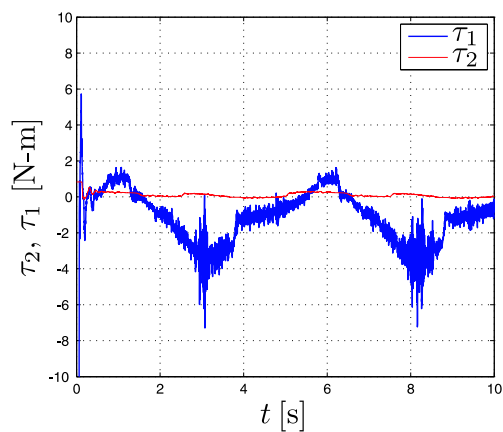
(b) Trayectoria del eslabón 2



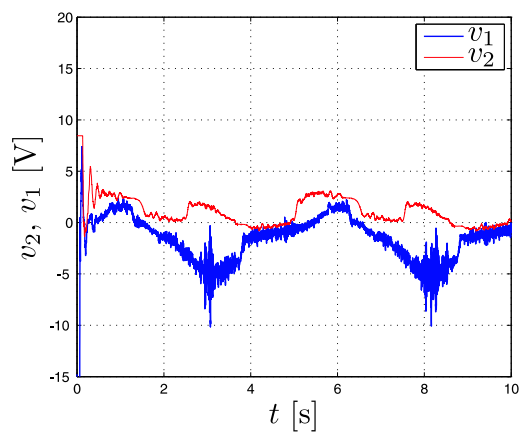
(c) Errores del seguimiento de trayectoria



(d) Posición en X-Y



(e) Par de los motores



(f) Voltaje de los motores

Figura 4.3: Gráficas de tiempo real para la parábola.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas a futuro

En este trabajo se logró cumplir con el objetivo general propuesto inicialmente, el cual consistió en implementar el controlador PD con precompensación para el seguimiento de trayectorias de un robot manipulador. La instrumentación de este controlador se realizó en tiempo real utilizando la tarjeta dSPACE® modelo DS1104. Con base en la investigación relacionada con el tema se procedió a dar solución al problema planteado. Primero se seleccionó un controlador que permitiera realizar la tarea de seguimiento de trayectorias en el robot manipulador. Posteriormente, se realizaron las simulaciones numéricas en lazo cerrado para verificar el desempeño del controlador. Finalmente, dicho controlador se instrumentó en tiempo real, para comparar el buen desempeño obtenido a nivel simulación, con sus respectivos resultados experimentales. A continuación se listan algunas de las conclusiones asociadas con este trabajo:

- En lo relativo a la obtención del modelo dinámico asociado al robot se desarrolló de manera clara, debido a que en la literatura no es presentado en extenso.
- Se analizó el controlador PD con precompensación para resolver la tarea de seguimiento de trayectorias. Al observar que la precompensación requería del modelo dinámico evaluado en la trayectoria deseada, hubo la necesidad de determinar matemáticamente la posición, la velocidad y la aceleración de los perfiles de las trayectorias deseadas. Además, esta información fue necesaria para realizar el criterio de sintonía asociado a la determinación de las ganancias proporcionales y derivativas asociadas al controlador.
- Así, se procedió a realizar las simulaciones numéricas del controlador PD con precompensación para realizar el seguimiento de trayectorias. Para esto se utilizó Matlab®-Simulink®, en el cual se tuvo que profundizar en su manejo para realizar la síntesis del controlador y del modelo dinámico.
- Rumbo a la instrumentación de la ley de control, se encontró que ésta entregaba pares de carga, τ_1 y τ_2 , debido a que los motores de CD utilizados en el robot se activan mediante voltaje, existió la necesidad de encontrar una relación de par-voltaje que permitiera sintetizar apropiadamente la ley de control. A esto se le dio

solución mediante el empleo de la ley de Ohm y la de relación $\tau = k_m i$. Así, se determinó que la relación par-voltaje era $v = \frac{R}{k_m} \tau$.

- Habiendo superado lo anterior, se realizó la integración de Matlab®-Simulink®, ControlDesk® y la tarjeta DS1104, para realizar las pruebas experimentales de la ley de control propuesta. Para esto, de nueva cuenta, existió la necesidad de revisar manuales y ejemplos de aplicación de los mismos.
- Se realizó la comparación de los resultados en simulación y a nivel experimental, observando que son similares.

De esta manera, se muestra que el comportamiento del controlador PD con precompensación instrumentado en tiempo real tiene buen desempeño. Así se logró cumplir con el objetivo de este trabajo.

A continuación se presentan algunos problemas que se tuvieron que superar en el desarrollo de este trabajo:

- Se estudiaron y analizaron de forma completa los parámetros involucrados en el modelo dinámico del robot manipulador de dos grados de libertad debido a que el controlador PD con precompensación hace uso de estos.
- Como la lectura de los encoders entregan pulsos equivalentes a un desplazamiento angular, y como el control empleado demandaba que dichos desplazamientos fueran expresados en radianes, hubo que hallar una relación de conversión apropiada de pulsos generados por el encoder a radianes.
- En cuanto a las tarjetas electrónicas, fue necesario analizar el funcionamiento de cada una de ellas, para lo cual se realizaron medidas de niveles de voltaje y corriente con instrumentos adecuado para verificar el correcto funcionamiento.
- Hubo la necesidad de reemplazar el motor de CD asociado al primer eslabón, ya que cuando se implementó una trayectoria con alta velocidad en el robot (Véase el Apéndice E), su caja de engranes se dañó. Por lo anterior, resulta conveniente que cuando se le proponga una trayectoria al robot utilizado, se analicen las trayectorias que se pretenden implementar para no dañar las cajas de engranes asociadas a los motores.
- Por otro lado, al no contar con sensores que proporcionan las velocidades de cada articulación, estas se obtuvieron derivando las posiciones angulares q_1 y q_2 , generadas por los encoders, lo cual generaba ruido, y al introducirse estas señales en un controlador PD con precompensación, esto hace que la parte derivativa genere mucho ruido. Es por eso que se optó por darle valores pequeños a la ganancia derivativa K_d , ésto permitió que las señales de par τ_1 y τ_2 tuvieran menor ruido.

El tema de robots manipuladores en sus diferentes configuraciones es muy estudiado y existe mucha información sobre el tema, no obstante se siguen encontrando nuevas

aplicaciones de interés a nivel internacional. Las investigaciones realizadas sólo son un nuevo aporte significativo a esta área de la robótica. En ese orden de ideas, dentro de los trabajos a futuro que podrían desarrollarse en el Área de Mecatrónica serían los siguientes.

- Se podría cambiar los motores de CD empleados hasta ahora por unos sin caja de engranajes, con el objetivo de someter el robot a pruebas de altas velocidades.
- Diseñar un elemento terminal el cual tenga una aplicación específica de acuerdo al tipo de configuración que tiene el robot manipulador.
- Desarrollar otras técnicas de control como PD con par-calculado o PD con aprendizaje iterativo e instrumentarlas en tiempo real para verificar su desempeño.
- Abordar la problemática de evasión de obstáculos mediante el método de campos potenciales artificiales. Primero a nivel de simulación y posteriormente a nivel experimental.

Referencias

- [1] M. Sánchez, M. Rodríguez, S. Bayarri, P. Redorta, E. Rodríguez, E. Fernández y M. Villavicencio, “Historia de la robótica: de Arquitas de Tarento al robot da Vinci (Parte I),” *Actas Urológicas Españolas*, vol. 31, no. 2, 2007.
- [2] M. Taddei, *Leonardo da Vinci's Robots*, Italia, Leonardo 3, 2007.
- [3] D. M. Fryer and J. C. Marshall, *The Motives of Jacques de Vaucanson*, Society for the History of Technology, 1979.
- [4] J. Essinger, *Jacquard's Web: How a hand-lom led to the bird of the information age*, New York, Oxford University Press, October 2004.
- [5] K. Capek, *R. U. R. (Rossum's Universal Robots)*, Penguin Classics, 2004.
- [6] R. Iñigo y E. Vidal, *Robots industriales manipuladores*, Barcelona, Ediciones UPC, 2002.
- [7] I. Asimov, *I. Robot*, First Edition, Gnome Press, 1950.
- [8] J. Denavit and R. Hartenberg, “A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, pp. 215-221, 1955.
- [9] S. Bermejo, *Desarrollo de los robots basados en el comportamiento*, Barcelona, Ediciones UPC, 2003.
- [10] M. Sánchez, M. Rodríguez, S. Bayarri, P. Redorta, P. Jiménez, V. Monllaou y M. Villavicencio, “Historia de la robótica: de Arquitas de Tarento al robot da Vinci (Parte II),” *Actas Urológicas Españolas*, vol. 31. No. 3, 2007.
- [11] J. Angulo, *Historia y evolución de la robótica*, 5ta. edición, España, Ed. Paraninfo, 1999.
- [12] M. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*, New York, Wiley, 1989.
- [13] M. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, Estados Unidos, Wiley, 2006.
- [14] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de Movimientos de Robot Manipuladores*, Madrid, Prentice Hall, 2003.

- [15] A. Barrientos, L. Penin, C. Balaguer y R. Aracil, *Fundamentos de la robótica*, Madrid, Mc Graw-Hill, 1997.
- [16] A. Baturone, *Robótica: Manipuladores y robots móviles*, Barcelona, Marcombo, 2001.
- [17] J. J. Craig, *Robótica*, 3ra. Edición, México, Prentice Hall, 2006.
- [18] S. González, “Diseño de controladores robustos y adaptativos para robots manipuladores”, Tesis de maestría dirigida por Dr. Leonardo Acho Zuppa, CITEDIPN, Tijuana México, Julio 2005.
- [19] F. Reyes and R. Kelly, “Experimental evaluation of model-based controller on a direct-drive robot arm,” *Mechatronics*, vol. 2, pp. 1861-1866, 1991.
- [20] M. Gámez, “Diseño de controladores con compensación adaptable de gravedad para robots manipuladores”, Tesis de maestría dirigida por Dr. Leonardo Acho Zuppa, CITEDIPN, Tijuana México, Junio 2005.
- [21] I. Cervantes and J. Alvarez, “ON the PID tracking control of robots manipulators,” *System and control letters*, vol 42, No. 1, pp. 37-46, Enero 2001.
- [22] J. Ordaz-Oliver, O. Dominguez-Ramirez and E. Espinoza-Quezada, “Trajectory Tracking Control for Robotics Manipulators Based on Passivity,” *Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, Cuernavaca México, pp. 484-489, Octubre, 2008.
- [23] S. Islam and P. X. Liu, “PD output feedback control design for industrial robotic manipulators,” *IEEE Transactions on Mechatronics*, vol. 16, No. 1, pp. 187-197, Enero 2011.
- [24] T. Kuc, K. Nam and J. S. Lee, “An iterative learning control of robot manipulators,” *IEEE Transactions on robotics and automation*, vol. 7, No. 6, Diciembre 1991.
- [25] C. Chiang-Ju and A. Tayebi, “Further results on adaptive iterative learning control of robot manipulators,” *Automática*, vol. 44, pp. 830-837, 2008.
- [26] M. Tarokh and H. Seraji, “A control scheme for trajectory tracking of robot manipulators,” *IEEE Internacional Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1192-1197, Abril 1988.
- [27] Z. Jiang and T. Ishida, “Trajectory tracking control of industrial robot manipulators using a neural network controller,” *IEEE Internacional Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 4, pp. 2390-2395, Octubre 2007.

- [28] J. Zhao-Hui and T. Ishida, "Trajectory tracking control of industrial robot manipulators using a neural network controller," *Systems, Man and Cybernetics, ISIC. IEEE International Conference on*, Montreal, pp. 2390-2395, Octubre 2007.
- [29] J. Kwang, H. You and C. Park, "Neuro-fuzzy control of a robot manipulator for a trajectory design," *Robot and Human Communication, Proceedings 6th IEEE International Workshop on*, Sendai Japan, pp. 260-265, 1997.
- [30] T. Lung-Weng, *Robot analysis: The mechanics of serial and parallel manipulators*, New York, Wiley, 1999.
- [31] J. C. Rivera-Díaz, "Diseño, construcción y control en tiempo real de un brazo robotico de dos grados de libertad", Tesis de maestría dirigida por Dr. Ramón Silva Ortigoza, CIDETEC-IPN, Distrito Federal México, Noviembre 2010.
- [32] B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automático*, México, Prentice Hall, 1996.
- [33] J. R. García-Sánchez, "Diseño y construcción de un robot móvil aplicando el método de campos potenciales en la evasión de obstáculos", Tesis de maestría dirigida por R. Silva Ortigoza y V. M. Hernández Guzmán, Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Computo, Instituto Politécnico Nacional, Mexico D.F., Diciembre, 2008.

Apéndice A

Representación en variables de estados

Para simular el modelo dinámico definido por (2.50), y posteriormente implementar la ley de control definida por (3.21), es necesario realizar un cambio de variables de estado. Esto se logra debido a que existe la matriz de inercia $M(\mathbf{q})^{-1}$ (esta existe debido a que $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva) permite expresar el modelo dinámico del robot de dos grados de libertad (2.50) en términos de τ_1 y τ_2 y así poder realizar el cambio de variables de estado. De tal manera que, despejando el término de segundo orden obtenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

y tras multiplicar $M(\mathbf{q})^{-1}$ de lado izquierdo por ambos lados a (A.1), se obtiene,

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{A.2})$$

al invertir la matriz $M(\mathbf{q})$ y simplificar los demás términos en (A.2) se tiene,

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} M_{22}(\mathbf{q}) & -M_{12}(\mathbf{q}) \\ -M_{21}(\mathbf{q}) & M_{11}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= M_{11}(\mathbf{q})M_{22}(\mathbf{q}) - M_{12}(\mathbf{q})M_{21}(\mathbf{q}), \\ \Delta_2 &= \tau_1 - C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q}_1 - C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q}_2 - g_1(\mathbf{q}), \\ \Delta_3 &= \tau_2 - C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q}_1 - C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q}_2 - g_2(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Así, en (A.3) es representado el modelo dinámico de un robot de dos grados de libertad en términos de τ_1 y τ_2 , con los componentes de las matrices definidos por (2.51).

Ahora se procede a desarrollarse el cambio de variables de estado para simular de manera sencilla el par de ecuaciones diferenciales de segundo orden determinadas en

(A.3). Al seleccionar como variables de estado a,

$$\begin{aligned}x_1 &= q_1, \\x_2 &= \dot{q}_1, \\x_3 &= q_2, \\x_4 &= \dot{q}_2,\end{aligned}\tag{A.5}$$

al derivar una vez con respecto al tiempo las variables (A.5), obtenemos,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{q}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q}_1, \\ \dot{x}_3 &= \dot{q}_2 = x_4, \\ \dot{x}_4 &= \ddot{q}_2,\end{aligned}\tag{A.6}$$

sustituyendo las variables de las ecuaciones (A.5) y (A.6) en (A.4), el sistema dinámico representado en variables de estado se define de la siguiente manera,

$$\dot{x}_1 = x_2,\tag{A.7}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M_{22}[\tau_1 - C_{11}x_2 - C_{12}x_4 - g_1] - M_{12}[\tau_2 - C_{21}x_2 - C_{22}x_4 - g_2]}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}},\tag{A.8}$$

$$\dot{x}_3 = x_4,\tag{A.9}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-M_{21}[\tau_1 - C_{11}x_2 - C_{12}x_4 - g_1] + M_{11}[\tau_2 - C_{21}x_2 - C_{22}x_4 - g_2]}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}},\tag{A.10}$$

definiendo a:

$$\begin{aligned}M_{11} &= m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + m_2l_{c2}^2 + 2m_2l_1l_{c2} \cos(x_3) + I_1 + I_2, \\ M_{12} &= m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2} \cos(x_3) + I_2, \\ M_{21} &= m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2} \cos(x_3) + I_2, \\ M_{22} &= m_2l_{c2}^2 + I_2, \\ C_{11} &= -m_2l_1l_{c2} \sin(x_3) x_4, \\ C_{12} &= -m_2l_1l_{c2} \sin(x_3) [x_2 + x_4], \\ C_{21} &= m_2l_1l_{c2} \sin(x_3) x_2, \\ C_{22} &= 0, \\ g_1 &= [m_1l_{c1} + m_2l_1]g \sin(x_1) + m_2l_{c2}g \sin(x_1 + x_3), \\ g_2 &= m_2l_{c2}g \sin(x_1 + x_3).\end{aligned}\tag{A.11}$$

así, (A.7)-(A.10) es un sistema de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden.

Apéndice B

Motores y panel de conexiones

B.1. Hojas técnicas de los motores

En la Figura B.1 se muestra la hoja técnica del motor Pittman GM14904S014 correspondiente al eslabón 1 y en la Figura B.2 se muestra la hoja técnica del motor Pittman GM8724S015 correspondiente al eslabón 2.



GM14904S014

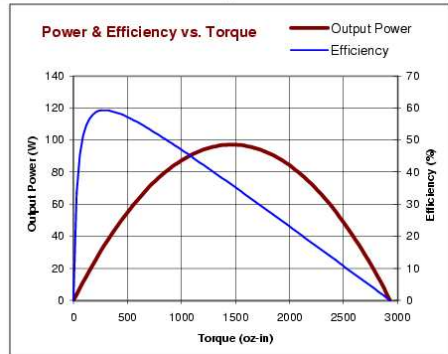
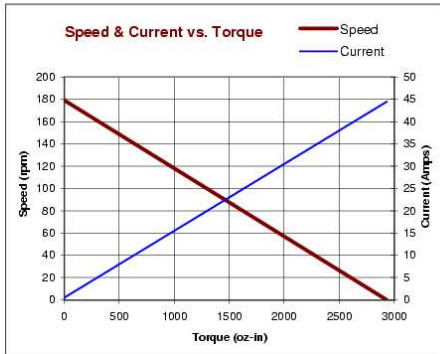
Lo-Cog® DC Servo Gearmotor



Assembly Data	Symbol	Units	Value
Reference Voltage	E	V	12
No-Load Speed	S_{NL}	rpm (rad/s)	179 (18.7)
Continuous Torque (Max.) ¹	T_C	oz-in (N-m)	374 (2.6)
Peak Torque (Stall) ²	T_{PK}	oz-in (N-m)	2934 (20.7)
Weight	W_M	oz (g)	44.7 (1268)
Motor Data			
Torque Constant	K_T	oz-in/A (N-m/A)	4.33 (3.06E-02)
Back-EMF Constant	K_E	V/krpm (V/rad/s)	3.21 (3.06E-02)
Resistance	R_T	Ω	0.27
Inductance	L	mH	0.40
No-Load Current	I_{NL}	A	0.52
Peak Current (Stall) ²	I_P	A	44.4
Motor Constant	K_M	oz-in/ \sqrt{W} (N-m/ \sqrt{W})	8.63 (6.09E-02)
Friction Torque	T_F	oz-in (N-m)	1.6 (1.1E-02)
Rotor Inertia	J_M	oz-in-s ² (kg-m ²)	3.7E-03 (2.6E-05)
Electrical Time Constant	τ_E	ms	1.58
Mechanical Time Constant	τ_M	ms	7.0
Viscous Damping	D	oz-in/krpm (N-m-s)	0.18 (1.2E-05)
Damping Constant	K_D	oz-in/krpm (N-m-s)	55 (3.7E-03)
Maximum Winding Temperature	θ_{MAX}	$^{\circ}F$ ($^{\circ}C$)	311 (155)
Thermal Impedance	R_{TH}	$^{\circ}F/watt$ ($^{\circ}C/watt$)	45.9 (7.7)
Thermal Time Constant	τ_{TH}	min	28.8
Gearbox Data			
Reduction Ratio			19.7
Efficiency ³			0.84
Maximum Allowable Torque		oz-in (N-m)	500 (3.53)
Encoder Data			
Channels			3
Resolution		CPR	500

1 - Specified at max. winding temperature at 25°C ambient without heat sink. 2 - Theoretical values supplied for reference only.
3 - Effective gearbox efficiency for this unit improved by use of ball bearings.

- Included Features**
- 2-Pole Stator
 - Ceramic Magnets
 - Heavy-Gauge Steel Housing
 - 11-Slot Armature
 - Silicon Steel Laminations
 - Stainless Steel Shaft
 - Copper-Graphite Brushes
 - Diamond Turned Commutator
 - Motor Ball Bearings
 - Output Ball Bearing
 - Wide Face Gears
- Customization Options**
- Alternate Winding
 - Sleeve or Ball Bearings
 - Modified Output Shaft
 - Custom Cable Assembly
 - Special Brushes
 - EMI/RFI Suppression
 - Alternate Gear Material
 - Special Lubricant
 - Optional Encoder
 - Fail-Safe Brake



All values are nominal. Specifications subject to change without notice. Graphs are shown for reference only.

© 2001 Pittman.

PITTMAN, 343 Godshall Drive, Harleysville, PA 19438, Phone: 877-PITTMAN, Fax: 215-256-1338, E-mail: info@pittmannet.com, Web Site: www.pittmannet.com

Figura B.1: Motor Pittman GM14904S014.



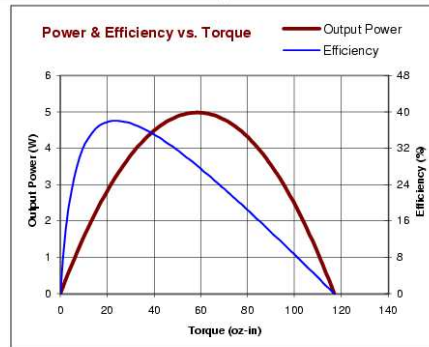
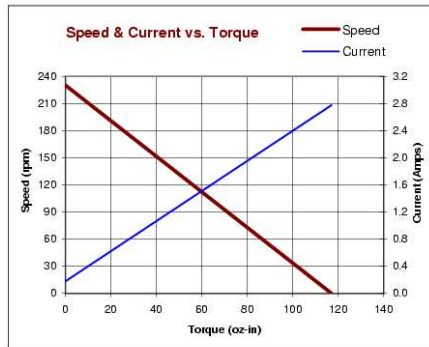
GM8724S015

Lo-Cog® DC Servo Gearmotor

Assembly Data	Symbol	Units	Value
Reference Voltage	E	V	12
No-Load Speed	S_{NL}	rpm (rad/s)	230 (24.1)
Continuous Torque (Max.) ¹	T_C	oz-in (N-m)	42 (2.9E-01)
Peak Torque (Stall) ²	T_{PK}	oz-in (N-m)	117 (8.3E-01)
Weight	W_M	oz (g)	11.3 (320)
Motor Data			
Torque Constant	K_T	oz-in/A (N-m/A)	3.09 (2.18E-02)
Back-EMF Constant	K_E	V/krpm (V/rad/s)	2.29 (2.18E-02)
Resistance	R_T	Ω	4.33
Inductance	L	mH	2.34
No-Load Current	I_{NL}	A	0.18
Peak Current (Stall) ³	I_P	A	2.77
Motor Constant	K_M	oz-in/ \sqrt{W} (N-m/ \sqrt{W})	1.49 (1.05E-02)
Friction Torque	T_F	oz-in (N-m)	0.35 (2.5E-03)
Rotor Inertia	J_M	oz-in-s ² (kg-m ²)	2.3E-04 (1.6E-06)
Electrical Time Constant	τ_E	ms	0.54
Mechanical Time Constant	τ_M	ms	14.7
Viscous Damping	D	oz-in/krpm (N-m-s)	0.020 (1.4E-06)
Damping Constant	K_D	oz-in/krpm (N-m-s)	1.6 (1.1E-04)
Maximum Winding Temperature	θ_{MAX}	$^{\circ}F$ ($^{\circ}C$)	311 (155)
Thermal Impedance	R_{TH}	$^{\circ}F/watt$ ($^{\circ}C/watt$)	70.5 (21.4)
Thermal Time Constant	τ_{TH}	min	10.7
Gearbox Data			
Reduction Ratio			19.5
Efficiency ³			0.87
Maximum Allowable Torque		oz-in (N-m)	175 (1.24)
Encoder Data			
Channels			3
Resolution		CPR	500

- Included Features**
- 2-Pole Stator
 - Ceramic Magnets
 - Heavy-Gauge Steel Housing
 - 7-Slot Armature
 - Silicon Steel Laminations
 - Stainless Steel Shaft
 - Copper-Graphite Brushes
 - Diamond Turned Commutator
 - Motor Ball Bearings
 - Output Ball Bearing
 - Wide Face Gears
- Customization Options**
- Alternate Winding
 - Sleeve or Ball Bearings
 - Modified Output Shaft
 - Custom Cable Assembly
 - Special Brushes
 - EMI/RFI Suppression
 - Alternate Gear Material
 - Special Lubricant
 - Optional Encoder
 - Fail-Safe Brake

1 - Specified at max. winding temperature at 25°C ambient without heat sink. 2 - Theoretical values supplied for reference only. 3 - Effective gearbox efficiency for this unit improved by use of ball bearings.



All values are nominal. Specifications subject to change without notice. Graphs are shown for reference only. © 2001 Pittman.

PITTMAN, 343 Godshall Drive, Harleysville, PA 19438, Phone: 877-PITTMAN, Fax: 215-256-1338, E-mail: info@pittmanner.com, Web Site: www.pittmanner.com

Figura B.2: Motor Pittman GM8724S015.

B.2. Panel de conexiones del robot manipulador

En la Figura B.3 se muestra el número de pin y la señal que van del conector DB25 al rack de conexiones que tiene la tarjeta de control.

CONECTOR DB25		INC1		INC2		DIGITAL I/O		SLAVE I/O PWM	
PIN	FUNCIÓN	PIN	FUNCIÓN	PIN	FUNCIÓN	PIN	FUNCIÓN	PIN	FUNCIÓN
1	FASEA_M1	2	PHI0_M1						
2	FASEB_M2	4	PHI90_M1						
3	IDX_M1	6	IDX_M1						
4	PWM_M1							2	SPWM8
5	DIR_M1					2	IO 1		
6	BRAKE_M1					5	IO 5		
7	FASEA_M2			2	PHI0_M2				
8	FASEB_M2			4	PHI90_M2				
9	IDX_M2			6	IDX_M2				
10	PWM_M2							3	ST2PWM
11	DIR_M2					3	IO 3		
12	BRAKE_M2					6	IO 7		
13	GND	1,3,5, 7,8,9	GND	1,3,5, 7,8,9	GND	1,4, 7,8,9	GND	1,4,5,6, 7,8,9	GND
14	FASEA_M1	2	PHI0_M1						
15	FASEB_M1	4	PHI90_M1						
16	IDX_M1	6	IDX_M1						
17	PWM_M1								
18	DIR_M1								
19	BRAKE_M1								
20	FASEA_M2			2	PHI0_M2				
21	FASEB_M2			4	PHI90_M2				
22	IDX_M2			6	IDX_M2				
23	PWM_M2								
24	DIR_M2							3	IO 3
25	BRAKE_M2							6	IO 4

Figura B.3: Distribución de señales del conector DB25 al rack de conexiones.

Apéndice C

Diagramas a bloques en Matlab[®]-Simulink[®]: Parábola

En este apéndice se presentan los diagramas a bloques desarrollados para la simulación y ejecución en tiempo real del seguimiento de una trayectoria definida por una parábola. Los diagramas a bloques en Matlab[®]-Simulink[®], tanto en simulación como en tiempo real representan la síntesis de las ecuaciones matemáticas utilizadas.

C.1. Diagrama a bloques para simulación: Parábola

En la Figura C.1 se presenta el diagrama a bloques para la simulación del seguimiento de una trayectoria definida por una parábola.

C.2. Diagrama a bloques para tiempo real: Parábola

En la Figura C.2 se presenta el diagrama a bloques para realizar el experimento del seguimiento de una trayectoria definida por una parábola.

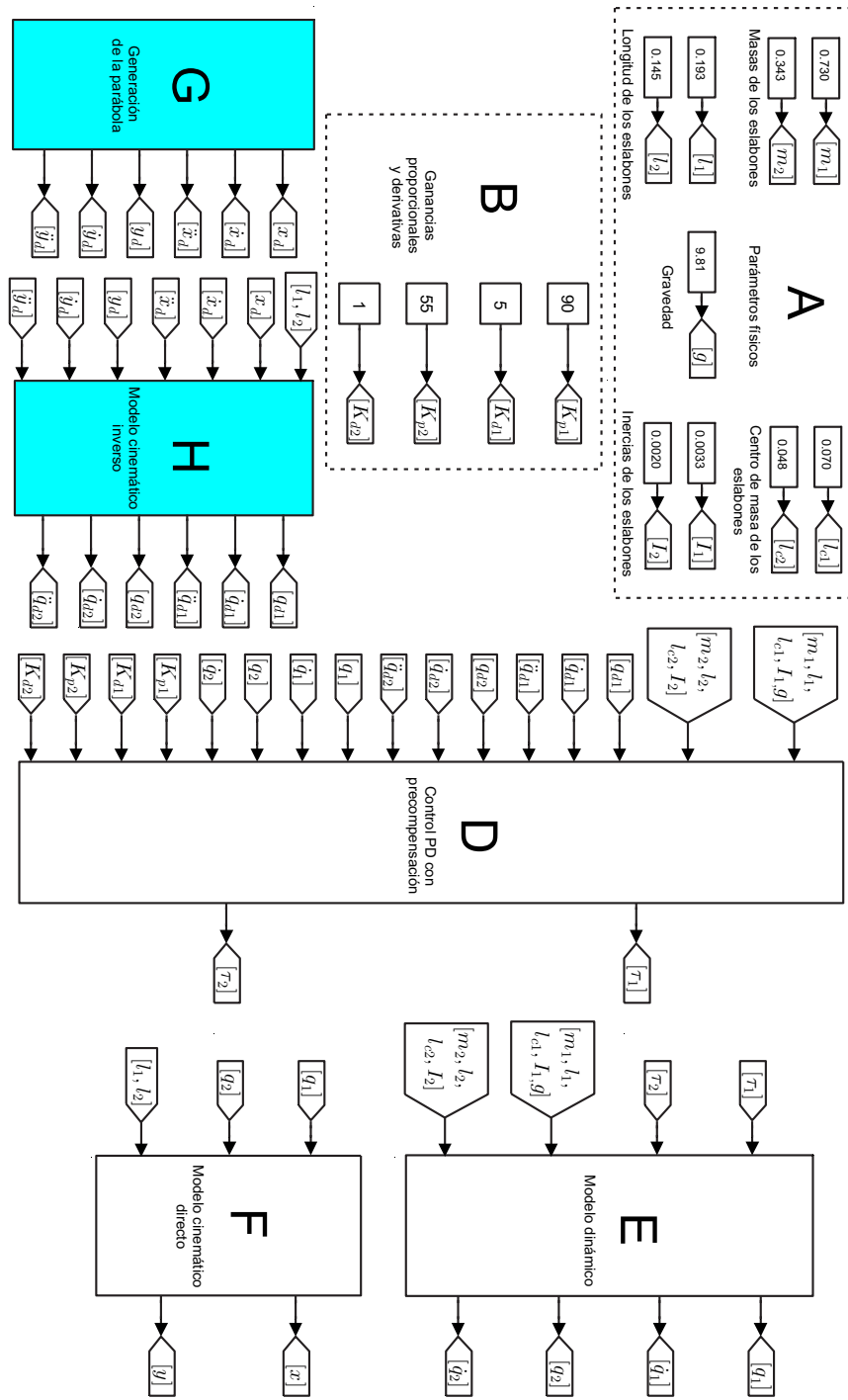


Figura C.1: Diagrama a bloques utilizado para la simulación.

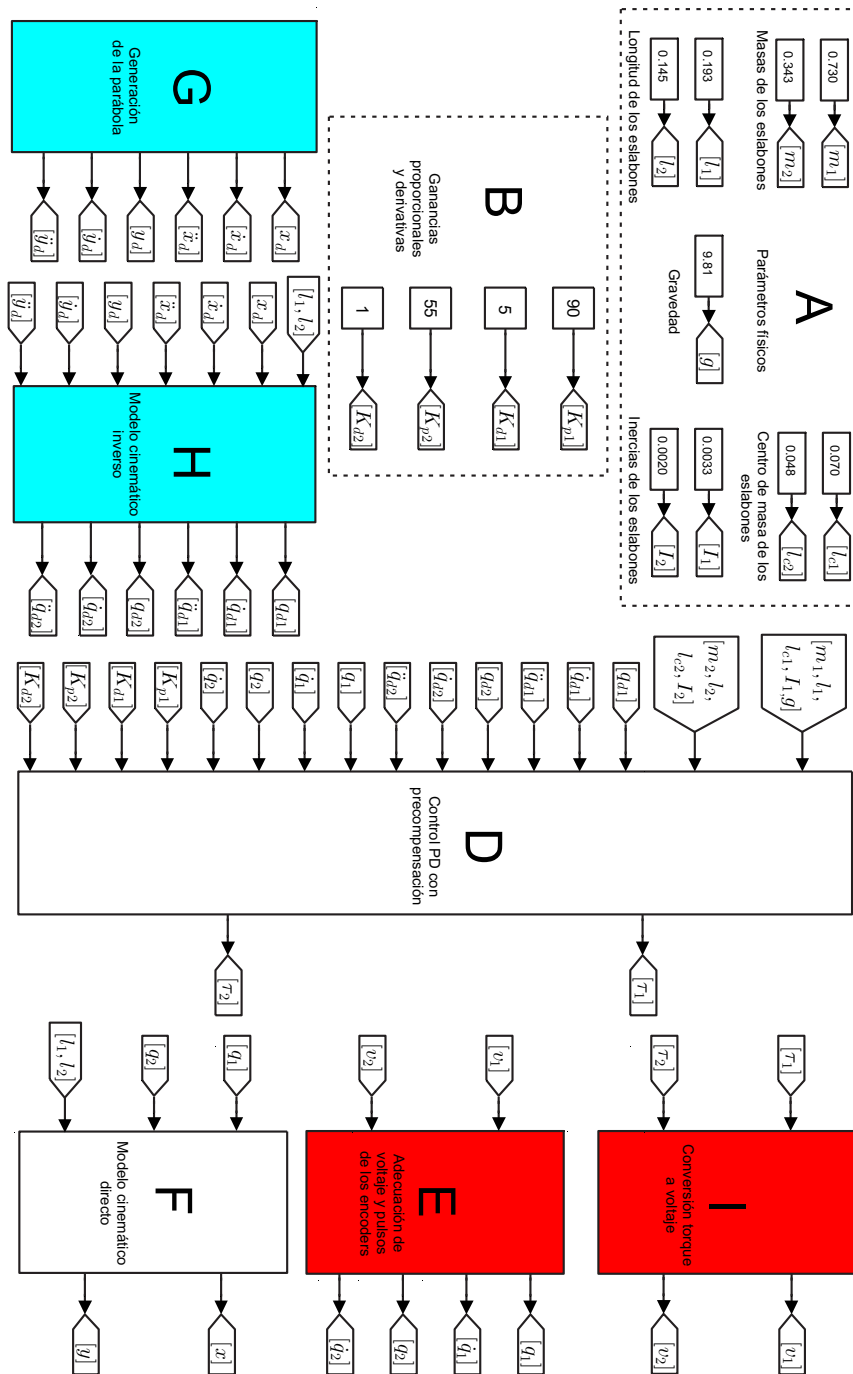


Figura C.2: Diagrama a bloques utilizado para tiempo real.

Apéndice D

Conversión de pulsos a radianes

Debido a que los motores tienen integrados encoders de tipo incremental en la flecha del motor, existe la necesidad de convertir pulsos a radianes ya que el controlador requiere valores de posición y velocidad angular medida en radianes. Para el caso del primer motor asociado al eslabón uno, de acuerdo a las hojas de especificaciones mostradas en el Apéndice B.1, se observa que,

$$1_{\text{rev/sin caja}} = 500 \text{ ppr}, \quad (\text{D.1})$$

donde $1_{\text{rev/sin caja}}$ es una vuelta del eje del motor sin caja de engranes y los 500 ppr son los pulsos por revolución de dicho eje. Debido a que el eje donde se acopla la carga (eslabón uno) tiene una caja de engranes la cual tiene una relación de 19.7:1, es necesario tener una relación entre el eje del motor (sin caja de engranes) y el eje de la carga (con caja de engranes) quedando determinado por,

$$19.7_{\text{rev/sin caja}} = 1_{\text{rev/con caja}}, \quad (\text{D.2})$$

donde $1_{\text{rev/con caja}}$ es una vuelta del eje con caja de engranes (donde se acopla el eslabón uno). Para obtener una relación de los pulsos generados por el encoder en el eje de la carga de (D.1) y (D.2) se obtiene que,

$$1_{\text{rev/con caja}} = \frac{19.7_{\text{rev/sin caja}}}{1_{\text{rev/sin caja}}} (500 \text{ ppr}) = 9850 \text{ ppr}. \quad (\text{D.3})$$

Una vez que obtuvieron el número de pulsos que se genera en una revolución correspondiente al eje de la carga (con caja de engranes), se procede a convertir dichos pulsos en radianes, por lo tanto si se considera que,

$$2\pi = 1_{\text{rev/con caja}} = 9850 \text{ ppr}, \quad (\text{D.4})$$

se puede tener la siguiente regla,

$$9850 \text{ ppr} \rightarrow 2\pi, \quad (\text{D.5})$$

$$n_{\text{pulsos}} \rightarrow q_1, \quad (\text{D.6})$$

donde n_{pulsos} son los pulsos generados por el encoder y q_1 es el desplazamiento angular del eslabón uno. Al solucionar para D.5 y D.6 por regla de tres se obtiene que,

$$q_1 = \frac{(n_{pulsos})(2\pi)}{9850 \text{ ppr}} [\text{rad}]. \quad (\text{D.7})$$

De esta manera queda determinado el desplazamiento angular q_1 en términos de los pulsos generados por el encoder con respecto al eje de la carga donde está acoplado el eslabón uno.

Para el caso del motor dos asociado al eslabón dos se determina de la misma forma que para el eslabón uno, pero al considerar las hojas de especificaciones del motor (ver Apéndice B.1), éste tiene 500 ppr con una caja de engranes de 19.5:1, por lo tanto se tiene que,

$$1_{\text{rev/con caja}} = \frac{19.5_{\text{rev/sin caja}}}{1_{\text{rev/sin caja}}} (500 \text{ ppr}) = 9750 \text{ ppr}. \quad (\text{D.8})$$

Una vez obtenidos los pulsos generados por el encoder asociado al eje de la carga del motor dos se puede tener la siguiente regla,

$$9750 \text{ ppr} \rightarrow 2\pi, \quad (\text{D.9})$$

$$n_{pulsos} \rightarrow q_2, \quad (\text{D.10})$$

y al solucionar para el desplazamiento angular q_2 correspondiente al eslabón dos se tiene que,

$$q_2 = \frac{(n_{pulsos})(2\pi)}{9750 \text{ ppr}} [\text{rad}]. \quad (\text{D.11})$$

Así queda determinado el desplazamiento angular q_2 en términos de los pulsos generados por el encoder con respecto al eje de la carga donde está acoplado el eslabón dos.

Por último para obtener la velocidad, \dot{q}_1 y \dot{q}_2 se obtiene derivando la posición angular q_1 y q_2 respectivamente con funciones básicas de Matlab[®]-Simulink[®].

Apéndice E

Comentario sobre la selección de una trayectoria

En este apéndice se realiza un comentario importante sobre la selección de una trayectoria, ya que una mala selección puede ocasionar daños en los motores del robot manipulador. Al implementar en tiempo real la trayectoria angular determinada por (3.1) con $a_1 = \pi/45$ [rad], $b_1 = \pi/4$ [rad], $c_1 = \pi/18$ [rad] y $\omega_1 = 15$ [rad/s], y con $a_2 = \pi/180$ [rad], $b_2 = \pi/3$ [rad], $c_2 = 25\pi/36$ [rad] y $\omega_2 = 3.5$ [rad/s]. En la Figura E.1 muestra el perfil de la trayectoria para ambas articulaciones.

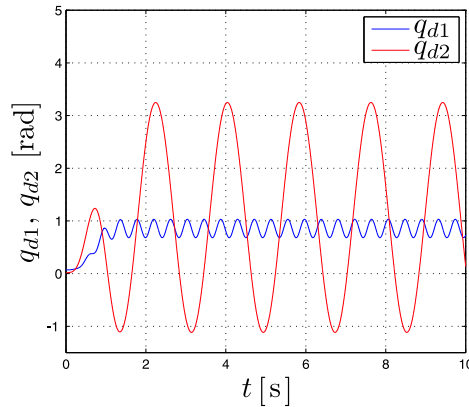


Figura E.1: Trayectorias angulares deseadas.

Después de realizar tres experimentos se tuvo como resultado que la caja de engranes del eslabón uno se dañó debido a la alta frecuencia de oscilación (cambios de giro en instante de tiempo muy pequeños) en el desplazamiento angular 1, q_{d1} . Por lo que se considera necesario tomar en cuenta que la velocidad de oscilación de la trayectoria no sea muy alta, para no dañar la caja de engranes del motor de CD.