Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

La transición grados→radianes↔reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistémico

Tesis que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:

Hilario Meneses Pérez

Director de Tesis:

Dr. Gustavo Martínez Sierra

México, D. F., Marzo 2010

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 13:00 horas del día 23 del mes de febrero del 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-Legaria para examinar la tesis de titulada:

La transición grados→radianes↔reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistémico.

Presentada por el(la) alumno(a):

Meneses	Pérez	Hilario
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 5 | 0 | 4 | 0 | 5 |

aspirante al grado de:

Maestro en ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Marcela Ferrari Escolá

Dra. Gabriela Buendía Abalos

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CICATA IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 22 del mes de febrero del año 2010, el que suscribe Hilario Meneses Pérez alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A050405, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Gustavo Martínez Sierra y cede los derechos del trabajo intitulado "La transición grados→radianes↔reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistémico", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección hilariomeneses@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Hilario Meneses Pérez
Nombre y firma

http://www.fayerwayer.com/tag/matematicas/

"Es muy común recordar que alguien nos debe agradecimiento, pero es más común no pensar en quienes le debemos nuestra propia gratitud"

Johann Wolfgang Goethe

Gracias, Dr. Gustavo Martínez Sierra y Profesores de Matemática Educativa.

ÍNDICE

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE PLANES DE ESTUDIO Y LIBROS DE TEXTO

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS COGNITIVO A PROFESORES Y ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS

CAPÍTULO 6

REFERENCIAS

Índice de Figuras, Gráficas y Tablas

Figuras

GRÁFICOS

TABLAS

Glosario

Actividad: Acción observable realizada por un individuo o grupo social en respuesta a necesidades de carácter práctico o teórico.

Construcción del conocimiento: Proceso mediante el cual las personas y/o comunidades pasan de un estado de conocimiento a otro que es considerado, en algún sentido, superior al anterior.

Convención Matemática: Puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados al momento de la integración sistémica de un conjunto de conocimientos y que puede tomar la forma de una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción entre otras.

Costumbre didáctica: Es el conjunto de prácticas establecidas por el uso en el quehacer docente.

Estereorradián: Ángulo sólido con un vértice en el centro de una esfera, y que se intercepta en ésta una superficie cuya área es igual a la de un cuadrado con radio igual al radio de la esfera.

noción Matemática: Objetos de conocimiento construidos susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son, por tanto objeto de estudio en sí mismas y de una evaluación explícita, asimismo sirven como instrumento para el estudio de otros objetos.

Noción Paramatemática: Nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas; luego no son objetos de evaluación directa, sino que son identificadas al momento de presentarse su no-maestría por parte de los estudiantes.

Noción Protomatemática: Nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de manera que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

Práctica de referencia: Conjunto articulado de actividades que desarrolla un sujeto o grupo cultural con una finalidad específica y bajo una práctica social que norma y regula las mismas.

Práctica docente: Se articula a través de un conjunto de procesos complejos y multidimensionales que exceden el reduccionismo del espacio a la tarea de dar clases o de planificar una secuencia de contenidos para tales fines. Es necesario ampliar este concepto, incorporando todas aquellas tareas que el docente realiza en su contexto de trabajo.

PRÁCTICA SOCIAL: Supuestos que regulan y norman las actividades vinculadas a la construcción de conocimiento. Es un elemento inherente al conocimiento, aunque a veces no se perciba claramente su presencia. Se construye en el consenso de un grupo social culturalmente situado, afectando y conformando la psique de sus actores.

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: Es el proceso por el cual ciertos contenidos seleccionados como aquellos que se deben enseñar en un tiempo y lugar dados, son transformados en contenidos enseñables. Para que ello sea posible debe operar un doble proceso de descontextualización y recontextualización, que transforma el contenido inicial en un contenido con fines pedagógicos. En palabras de Chevallard: La transposición didáctica es la transformación del saber científico o saber erudito en un saber posible de ser enseñado. La contenidización o pedagogización de contenidos iniciales, provenientes del campo cultural de una sociedad en sentido amplio, es un proceso complejo que sin lugar a dudas debe ser revisado constantemente para mantener alto el nivel de actualización de la educación.

SOCIOEPISTEMOLOGÍA: aproximación teórica en Matemática Educativa que se plantea el estudio de las condiciones y circunstancias relacionadas con la construcción de conocimiento, asumiendo que las mismas pueden ser de naturaleza epistemológica, didáctica, cognitiva y social. Estas cuatro dimensiones se abordan de manera sistémica y situada para explicar cómo una persona o grupo social construye sus ideas matemáticas.

RESUMEN

Este trabajo ofrece resultados sobre la construcción del conocimiento a través del estudio de los procesos presentes en la arquitectura de sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado procesos de articulación y convención matemática. Se muestra una descripción de lo que, a nuestro parecer, son nociones básicas que permiten interpretar a la convención matemática como generadora de conocimiento dentro del marco de la matemática educativa. Para tal fin se dan evidencias del funcionamiento de la noción de la convención matemática. En particular se presentan resultados que identifican los procesos de articulación y convención matemática presentes en la construcción de la conversión de unidades angulares (grados→radianes↔reales). Estos fenómenos giran alrededor de las respuestas matemáticamente erróneas de estudiantes y profesores de nivel medio y superior, en donde se desconoce el por qué al usar medidas angulares en radianes no deben indicarse las unidades, además de la ausencia de argumentos para establecer por qué en matemáticas superiores la medida más conveniente para un ángulo es el radián.

El capítulo 1, planteado como antecedentes, muestra las aportaciones que han hecho otras investigaciones respecto del fenómeno didáctico ligado a la noción de la transición de las unidades angulares en la construcción de la función trigonométrica.

En el capítulo 2, se explican los referentes teóricos y a través de ellos se proporcionan los instrumentos conceptuales necesarios para dar racionalidad a la investigación.

Una aproximación a la vida de la función trigonométrica en el escenario escolar puede hacerse mediante el examen de las fuentes principales de organización y recursos con que el docente cuenta para impartir su clase, así como con el registro de la misma. Dichas fuentes las constituyen los Programas de Estudio y los Libros de Texto más utilizados. Este análisis se presenta en el capítulo 3, y constituye un fuerte argumento del por qué estudiar tal transición angular más allá del contexto escolar y el matemático.

Un acercamiento de cómo es concebida y razonada la elección de la unidad de medida angular (grado, radián o real), asignado como argumento en una función trigonométrica, es a través de los cuestionarios y el mismo diálogo de profesores y estudiantes, que constituyen a su vez una fuente para el análisis cognitivo. Estos resultados son reportados en el capítulo 4.

El capítulo 5 se muestra un acercamiento a cómo se crea la transición de las unidades angulares grados→radianes↔reales que ofrece explicación de la naturaleza de tal transición; al estudiar su origen y desarrollo de los criterios y condiciones de su validez, su consistencia lógica y el devenir del radián como unidad angular.

Finalmente, en el capítulo 6 se hace una recapitulación de la presente investigación y las contribuciones de la misma.

ABSTRACT

This work offers results over the building of know ledge through by studying of the currently process in the consolidation of conceptual systems of mathematics, that we joint named and convention mathematics processes.

It shows a description of the bases and notions that let understand the mathematic convention to generate the know ledge inside of the terms of educational mathematics.

For this propose we give facts and evidences of the functioning of the notion the mathematic convection. In particular it presents results that identify the process of Jaunt and mathematic presentations in the building of the conversion or Angular units (grades-radians-real). These phenomenon's saint ground of the wrong answers math's from students and professors of medium level and high too, in where it. We don´t know the reason to use angular measures in radians, it mustn´t to indicate the units, besides of the lack of facts for establish reasons, that because the high level in Mathematics I the most convenient measure for angle is: the radian.

Chapter 1. The plan such as background, it shows the contributions that have been done, and others investigations with respect to the didactic phenomenon, joined to the knowledge and the transition of the angular units, in the building of trigonometric function.

In the Chapter 2 it explains the theory references and through by them, it gives the need conceptual instruments, in order to give trotlines to the investigation.

An approach of the life of trigonometric function in the school scene, it can do by the test of the mean sources of organization and means with the teacher take them for giving his classes, and in the same way with the register of the last mentioned (same). The mentioned sources are the bases of studying Programs and Text Books, more uses. This analysis presents in the chapter number three and is a strong reasoning for using the reason for studying the mentioned angular transition beyond the school context and the mathematics subject.

A close step that how is the way for make and think reasonably the election of the unit of angular measure (grade, radian or real, assign such as argument in a trigonometric functions, is by the questionnaires and with the same dialogue between teachers and students that establish at the same time the source for the cognitive analysis these results are reported in the chapter number four.

In the chapter number five, it shows an approaching to say how is creating the transition of the angular units (grade-radians-real) and show the explanation of the nature of the transition. When we study the origin and the development of the criterion and condition of the validity, it´s logical and substantial they arrive of the radian, such as angular unit.

Finally, in the chapter number six it makes a recapitulation of this investigation and the contribution is inside of itself.

PRESENTACIÓN

Una de las recientes preocupaciones, a nivel mundial, sobre el papel que juega la escuela en la educación y formación del individuo, es la denominada alfabetización de la ciencia. Prueba de ello es que México, junto con más de 30 países, aceptó ser considerado en este criterio por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en la evaluación PISA *(Programme for International Student Assessment PISA)*, cuyos resultados del año 2000, 2003 y 2006 han desequilibrado el status quo del sector educativo del país.

De acuerdo con Wynne (citado en Montiel 2005), la alfabetización de la ciencia se define como "*la capacidad de usar un conocimiento científico para identificar preguntas y para sacar conclusiones basadas en las pruebas, con el fin de entender y ayudar a tomar decisiones sobre el mundo natural y los cambios realizados en él a través de la actividad humana"*. Cabe señalar que en las pruebas del PISA se evalúa lo que los países participantes han acordado, que son resultados deseables, estén éstos reflejados o no en los currículos actuales de cada país.

En enero del 2008, se da a conocer la Reforma Integral de la Educación Media Superior en México, documento integrado por la Subsecretaría de Educación Media Superior de la Secretaría de Educación Pública de México; e incluye aportaciones de las autoridades educativas de los Estados de la República, de la Red de Bachilleratos de ANUIES, del Consejo de Especialistas perteneciente a la Secretaría de Educación Pública, de la Universidad Nacional Autónoma de México, del Instituto Politécnico Nacional y de diversos especialistas en temas educativos.

Indiscutiblemente, el conocimiento matemático juega un papel primordial en esta Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), particularmente en la resolución de problemas de *aplicación* en contextos reales. En este sentido una pregunta interesante sería ¿Por qué no vislumbramos los resultados de pruebas, como la de OCDE en evaluación PISA con anticipación, si en efecto, el currículo mexicano no contempla la vinculación de las áreas científicas?, pues de acuerdo con Montiel, (2005), las Matemáticas, Física, Química, Biología, son áreas o "materias" escolares que viven, más no conviven, en la formación de los estudiantes.

Los fenómenos didácticos y sus efectos en la sociedad no encontrarán una única explicación que dote de solución a los problemas que se presentan. Es tarea de la Investigación Educativa entender el fenómeno en su totalidad y atender a sus particulares. Este es el caso de la Matemática Educativa, como disciplina que se encarga de los fenómenos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas; sin embargo, distintas escuelas de pensamiento han desarrollado investigación en diversas direcciones: cómo se aprende, cómo se enseña, cómo se convirtieron los saberes teóricos en saberes escolares, cuáles son las restricciones institucionales y escolares para la actividad didáctica, qué se enseña, etc. Y es sólo en base a estos resultados que puede pensarse en formar un currículo que beneficie efectivamente el aprendizaje y, en este sentido, *alfabetizarlo matemáticamente*.

La investigación que aquí se reporta, pretende ser una aportación a la comprensión del fenómeno educativo que vive nuestra sociedad, la cual puede ser sumamente significativa para la alfabetización de las ciencias en los niveles medio superior y superior. Tradicionalmente la convivencia de las matemáticas con otras áreas científicas escolares se entiende como la *aplicación* de las primeras en los problemas de las segundas.

Este trabajo nace en el seno de una aproximación teórica, la socioepistemología, construida en el marco de la matemática educativa, que centra su atención en la caracterización de "aquello que permite la construcción del conocimiento matemático". Tal objetivo genera investigación que busca explicar cómo se aprende, cómo se enseña, y qué se enseña, para lograr desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, vía el rediseño del discurso matemático escolar[1]. Esto presupone un cambio radical en lo que se entiende por enseñar y aprender matemáticas, resolver problemas y evaluar el aprendizaje.

Uno de los fundamentos de este trabajo, se basa en los trabajos realizados en torno a los procesos de convención matemática (Martínez-Sierra, 2003), donde se han desarrollado algunas nociones teóricas que han sido útiles, tanto en la explicación de algunos fenómenos didácticos, como en la interpretación de los procesos de construcción de conocimiento. En particular, en el plano de la construcción de conocimiento se han dado evidencias de que ciertas piezas de conocimiento, a las que se han denominado convenciones matemáticas, pueden ser entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o proceso de integración de conocimientos. En el mismo sentido, en el plano de la explicación de fenómenos didácticos se han aportado evidencias de que algunas de las rupturas conceptuales presentes en la escuela tienen su origen en la dialéctica articulación/desarticulación entre las diferentes partes del corpus de la matemática escolar. Con base a estos resultados, la convención matemática se ha convertido en una línea de investigación que ha permitido construir hipótesis interpretativas que permiten dar cuenta de la existencia de las rupturas en la construcción escolar de sistemas conceptuales matemáticos (Méndez, 2008; Martínez-Tecolapa, 2005; Colín, 2006; Juárez, 2007).

Las investigaciones recientes que han tomado como objeto de estudio a la función trigonométrica (Maldonado, 2005; Montiel, 2005; Méndez, 2008; Rotaeche, 2008), han permitido identificar diferentes dificultades que presentan estudiantes del Nivel Medio Superior (NMS) al enfrentarse con actividades que involucran la transición (conversión) de *grados → radianes* y a la transición (equivalencia) *radianes ↔ reales*.

En la presente investigación se presenta un análisis sistémico: didáctico para saber qué y cómo se enseña; cognitivo, con el objetivo de conocer qué se aprende y cómo se concibe la

---

[1] El discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático normado por las creencias de los actores del sistema didáctico de lo qué es la enseñanza y lo qué es la matemática, (Cordero y Flores, 2005).

conversión de unidades angulares en profesores y alumnos de NMS y Nivel Superior (NS); y epistemológico, con el propósito de estar al tanto del origen de las unidades angulares.

Al estudiar cómo se construye la función trigonométrica (FT) centramos nuestra atención en la transición por la que pasa el argumento *x* de una FT, por ejemplo el paso de una medida angular, expresada en sistema sexagesimal cuya unidad de medida es el grado, a una medida del sistema cíclico, cuya unidad es el radián, para finalmente pasar a ser un número real. Para ello realizamos un estudio sistémico (en el marco de lo didáctico, cognitivo y epistemológico) sobre la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales*. Con lo cual, pretendemos continuar y ampliar la investigación desarrollada por Méndez (2008). En este sentido analizamos los planes y programas de NMS y superior contemplando los objetivos específicos; es decir, el contenido temático en cuanto al tratamiento de la FT y la bibliografía sugerida para el profesor y estudiante. Nuestro interés se centra en la forma en que se definen los ángulos, su medición y conversión de un sistema de medición angular a otro, en la definición y caracterización del sistema cíclico, en la construcción de la FT como función con variable real y la elaboración de las gráficas trigonométricas.

El análisis realizado permitió identificar algunos fenómenos didácticos entorno al tratamiento de la función trigonométrica; en específico, en la forma de definir al radián, en la graficación o caracterización de la gráfica de una FT (donde se da la transición radianes↔reales) y en las actividades que realizan los profesores y alumnos del NMS y NS, los cuales exteriorizaron confusiones sobre el uso de las unidades de medida angulares.

Nuestros resultados, muestran dos factores que permiten explicar la problemática planteada.

I. La transposición didáctica del concepto de ángulo medido en radián, que no se ha consolidado en el contexto escolar.
II. El desconocimiento, en el contexto escolar, de que concepto de radián, como medida angular, es una convención matemática que articula y provee de coherencia, en sentido matemático, a la FT de variable real.

Estos resultados, abren un campo de investigación sobre la construcción de alternativas didácticas que posibiliten a los estudiantes, la apropiación de convenciones matemáticas. Esto se asevera a razón de que la enseñanza tradicional asume, al parecer, que las convenciones matemáticas son objetos de memorización, sin embargo como se mostrará para el caso de la transición *grados → radianes ↔ reales*, este camino no es trivial, pues tanto estudiantes como profesores presentaron inconsistencias en sus actividades.

Nuestra investigación está dividida en 6 capítulos. En el primer capítulo se plantea y justifica el problema de investigación. En el segundo, se presenta el marco teórico y la metodología de investigación a seguir. En los siguientes dos capítulos se evoca al desarrollo del análisis que dicta la metodología que se eligió, es decir, el análisis didáctico y el análisis cognitivo. En el quinto capítulo se presentan anotaciones sobre la epistemología y la transposición didáctica del radián como medida angular. Finalmente, en el sexto capítulo, se hace una recapitulación de la presente investigación.

Capítulo 1.

Planteamiento del Problema de Investigación: Antecedentes

El presente capítulo pretende ofrecer al lector, elementos para mostrar cómo se detectó el problema de investigación, además de proporcionar fundamentos sobre la pertinencia del presente estudio al seno de la Matemática Educativa. Asimismo, presenta algunas investigaciones que, de alguna manera anteceden a ésta.

1.1 Introducción a la problemática

Es necesario establecer de inicio la postura que esta investigación asume para su realización, para ello acudiré a Chevallard (1998) cuando afirma que la Matemática Educativa[1] tiene como *objeto* de estudio al *sistema didáctico* (los saberes, la institución, el profesor y el alumno) y a los *fenómenos* (*didácticos*) que en él suceden. Esta perspectiva asume de entrada, como *objeto de estudio*, la complejidad de los hechos educativos, al considerarlos como resultado de una continua interacción entre los componentes del sistema didáctico que se conforma con el objeto adquirir los conceptos y métodos, de la matemática, en situación escolar. En otras palabras, se asume una perspectiva *sistémica* reconociendo que el sistema didáctico está constituido por:

- Tres subsistemas:
    - Institución–profesores
    - Los alumnos y
    - Un cuerpo de conocimientos a aprender (saber enseñado) alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa) que forma un *contrato didáctico*, el cual toma tal saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje, uniendo en un mismo sitio a profesores y alumnos.
- Un estrato que Chevallard (1997) denomina la *noósfera* (lugar donde se piensa el funcionamiento didáctico) del sistema didáctico.

De esta concepción se desprende que nuestra disciplina intenta teorizar sobre los fenómenos didácticos; dado que la intención de una investigación es generar conocimiento de tipo descriptivo, explicativo o predictivo sobre alguno de tales fenómenos. En este

[1] Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas, entre otras, dependiendo de la escuela de pensamiento de que se trate.

sentido, la presente investigación pretende realizar un estudio de carácter sistémico que responda cómo se realiza la transición del concepto de unidad angular, *grados→radianes↔reales*, en el argumento de la FT.

Dentro de esta perspectiva teórica, hemos asumido como problema de investigación la aparición de fenómenos didácticos que investigaciones anteriores han evidenciado (Navarro, 2004; Martínez y Rodríguez, 2005; Maldonado, 2005; Montiel 2005; Méndez, 2008). Fenómenos que giran alrededor de respuestas matemáticamente erróneas, que proporcionan algunos estudiantes e incluso profesores sobre el uso de las unidades angulares (grado, radián o número real) y la falta de argumentos para justificar las respuestas correctas que proporcionan. Lo cual podemos resumir en:

- Las respuestas reiteradas de estudiantes y profesores de nivel secundario, medio y superior en donde se desconoce por qué utilizan las medidas angulares en radianes sin indicar las unidades.

- La ausencia de argumentos, entre estudiantes y profesores del área de nivel medio superior y superior, diferentes a lo memorístico (como 'leyes'), para establecer por qué en matemáticas superiores la medida más conveniente para un ángulo es el radián.

La detección de los fenómenos antes citados proporciona evidencia de que el uso de las medidas angulares en radianes puede no haber alcanzado la estabilidad necesaria para la construcción de la noción de función trigonométrica. Esta detección es el origen del trabajo de investigación ya que todos los fenómenos mencionados se convierten en obstáculos para la construcción de la noción de función trigonométrica. Por ejemplo, en la definición *sen (x "radianes")*:= *sen (x "reales")* y *sen (x "grados"):≠ sen (x "reales"),* ocurre la transición *radián → real*, que es un salto conceptualmente drástico. Es por ello que estamos interesados en estudiar la vida escolar de tal transición.

1.1.1 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La postura que asume el trabajo de investigación lo lleva a desarrollar un estudio sistémico de la transición *grados→radianes↔reales* por la que pasa *x* como variable independiente del ángulo. De ahí se derivan tres preguntas de investigación que están circunscritas dentro del marco de lo didáctico, lo cognitivo y lo epistemológico.

- En lo didáctico; ¿Cómo se da la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales* en términos del sistema de enseñanza?

- En lo cognitivo; ¿Cómo se da la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales* desde la perspectiva de las concepciones de estudiantes y profesores?

- En lo epistemológico; ¿Cómo se da la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales* desde el punto de vista de su naturaleza y validez del conocimiento?

1.2 ANTECEDENTES

Entre las investigaciones que anteceden a nuestro trabajo, que analizan algunos conceptos básicos de geometría y trigonometría, se encuentran los realzados por Martínez y Rodríguez (2005), Rotaeche (2008), Navarro (2004), Maldonado (2005), Montiel (2005) y Méndez (2008). En Martínez y Rodríguez (2005) se realizó una confrontación de lo didáctico y lo cognitivo de conceptos básicos como la medición de ángulos, ángulos negativos, ángulos mayores de 360° y de sus funciones trigonométricas. En Rotaeche (2008) se presentó una secuencia didáctica que tiene como finalidad rescatar los significados relacionados con la medición angular versus medición de longitudes. En Navarro (2004) se diseñó una ingeniería didáctica para abordar el tema de funciones con la intención de superar la ruptura conceptual entre las gráficas de las funciones algebraicas y trigonométricas. En Maldonado (2005) se reportó la vida escolar de la FT tras un análisis didáctico. En Montiel (2005) se realizó un estudio socioepistemológico de la FT y por último, en Méndez (2008) realizó una investigación sobre la construcción escolar de las FT.

Estas investigaciones, con base a un análisis didáctico, cognitivo o socioepistemológico, proporcionan evidencia de que hay rupturas conceptuales en los estudiantes y profesores en cuanto a la transición *(grados→radianes↔reales)* del argumento *"x"* de una FT. En investigaciones, como las de Navarro (2004), Maldonado (2005) y Rotaeche (2008), se ha evidenciado que tanto estudiantes como profesores presentan diversas dificultades que van desde comprender la definición del concepto de ángulo según el contexto, entender las relaciones que hay entre las diferentes formas de medir un ángulo, hasta precisar en qué momento utilizar qué tipo de medida angular (grado, radián o real).

Otras investigaciones han reportado diferencias entre los libros de texto, más utilizados en el nivel bachillerato, en cuanto a las definiciones asignadas a las unidades de los sistemas sexagesimal y circular. Martínez y Rodríguez (2005) muestran en su trabajo evidencia del discurso y vida escolar de conceptos como ángulo, ángulo negativo, ángulos mayor de 360°, unidades angulares, razones trigonométricas y FT. En el mismo trabajo se realiza un análisis de la bibliografía utilizada por profesores y alumnos en base al cual se diseñó un cuestionario que fue aplicado a estudiantes del NMS. Posterior al análisis didáctico y cognitivo, los autores concluyeron que algunos estudiantes consideran que un ángulo es mayor a otro, si el arco de éste se ve más grande; la mayoría asume la inexistencia de ángulos mayores a 360°, y sólo una minoría de estudiantes pueden relacionar a las FT con sus gráficas correspondientes.

Navarro (2005) desarrolla una investigación circunscrita en el bachillerato donde se deben trabajar los límites especiales $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\ x}{x}=0$, pero que muchas veces son evadidos en el salón de clases. Para ello realiza un análisis didáctico de los libros de texto que aparecen en los programas de estudio de instituciones educativas, como el

Instituto Politécnico Nacional (IPN), la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM) y la Universidad Autónoma del Estado de Guerrero (UAG). La autora reporta dificultades de profesores al momento de graficar la FT, a causa de una falta de comprensión en el uso que tienen el grado y el radián.

En su análisis didáctico, Navarro (2005) informa que la mayoría de las formas en que se abordan los límites indicados, es considerando al ángulo medido en radianes, pues de no ser así, al considerar cualquier otra unidad angular diferente al radián, como el grado, no se satisfacen los límites $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\ x}{x} = 0$.

Así mismo al abordar a las FT, Navarro consideró para el dominio de la función *"números medidos en radianes y en reales para que al graficar pudieran observar que ambos tipos de números están sobre el eje x"*. Pero, al no aparecer el símbolo de π como múltiplo y submúltiplo en el eje de las abscisas los profesores presentaron dificultades para graficar una FT. Tal observación aporta evidencia que el docente reconoce y relaciona a π con el radián, como unidad del sistema cíclico, aunque dicha unidad angular no se indique, es decir, reconoce a π como un número real, con magnitud angular, pero tal asociación no ocurre cuando el símbolo de π no está presente. El profesor no está consciente de la transición de radianes → reales, lo que se manifiesta en problemática al momento de graficar una FT.

La investigación de Maldonado (2005) se enfocó más en la FT, al realizar un estudio didáctico, con la intención de reportar la vida escolar de la FT. En específico, dirige su interés en conocer la finalidad de la FT en los programas curriculares y los libros de texto, para inferir sobre cuáles son las intenciones didácticas de llevar las FT al sistema escolar y cuál es la trascendencia de esta noción matemática entre los estudiantes del NMS. Para ello, analiza los programas de estudio y los libros de texto del NMS (por ser en este nivel donde se incluye en la currícula la noción de FT), que son utilizados para el estudio de la FT con la intención de identificar la presencia de la noción de tal función en nuestro sistema escolar; así mismo mostrar las intenciones didácticas presentes en la incursión de la FT.

Del análisis de los programas, Maldonado reporta que para el estudio de las FT, se hacen presentes conceptos tales como: ángulo, triángulo rectángulo, sistema de ejes coordenados y círculo trigonométrico. Así mismo indica que antes de mencionar a la FT como función real de variable real, se define primero como razón trigonométrica por el simple hecho de involucrar ángulos medidos en grados, con la conversión de estos ángulos a radianes se define a estas razones como funciones reales, presentando así, las gráficas de éstas. Del análisis de los libros de texto se desprende que antes de abordar el tema de FT, se presentan las características de un ángulo, para posteriormente definirlas como razones de los lados de un triángulo rectángulo (razones trigonométricas). Pero, al momento de ubicar el triángulo rectángulo con uno de sus vértices en el origen del plano coordenado (sistema de coordenadas rectangulares), quedando como radio de una circunferencia la hipotenusa del triángulo, y haciendo uso del círculo unitario, la razón trigonométrica se muestra ya como una FT, función de variable real. En ambos análisis (programas y libros de texto), no se hace explícito el paso que hay de la relación de radianes a reales. En el siguiente esquema, Maldonado refleja la vida escolar de la FT.

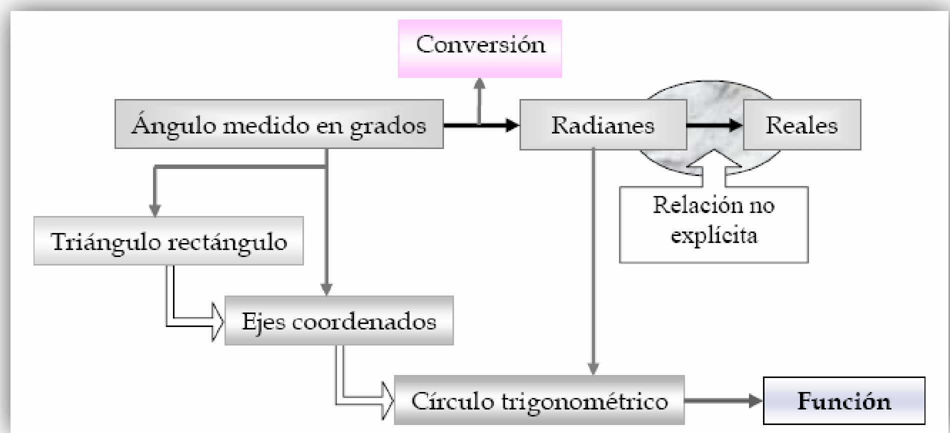


Fig. 1.1 Construcción escolar de la función trigonométrica (Maldonado, 2005)

Maldonado, también diseña un cuestionario con base a los contenidos institucionales de tres sistemas educativos mexicanos de NMS: ENP (UNAM), EP (UAEM) y CECyT (IPN); con el propósito de conocer las concepciones que quedan en los estudiantes de la noción de FT. Su diseño esboza tres etapas escolares: el planteamiento de la razón trigonométrica, la relación entre ángulos en grados y radianes, y la comprensión de las propiedades.

Del análisis de los cuestionarios aplicados se detectaron dificultades, en los estudiantes, para resolver actividades que implican el uso de las unidades angulares, y se mostraron conflictos en la solución de ejercicios que involucraron la decisión de qué unidad angular utilizar (grado, radián o real). Maldonado reporta que la relación (equivalencia) del radián y el real constituye un punto de partida para las FT y concluye que **al no hacerse explícito en el discurso matemático escolar provoca que para el estudiante sea indistinto el tratamiento de razón o de función.**

Una investigación que lleva a cabo un estudio socioepistemológico de la FT, es el trabajo de Montiel (2005), el cual centra su atención en el fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la FT. Su exposición contempla elementos cognitivos, epistemológicos, didácticos y aporta elementos de carácter social para explicar el fenómeno en cuestión; muestra la estrecha relación existente entre la organización de los programas de estudio, la exposición de los libros de texto y el discurso escolar; y caracteriza la presentación escolar de la FT en seis etapas:

- **Etapa Escolar 1**. Sobre los ángulos: clasificación, unidad de medida, ángulos dirigidos.
- **Etapa Escolar 2**. Sobre los triángulos: clasificación, propiedades, razones trigonométricas, solución de triángulos, las razones trigonométricas en el plano y sus signos de acuerdo a su posición.

- **Etapa Escolar 3**. Problemas de aplicación, leyes e identidades trigonométricas.
- **Etapa Escolar 4**. El círculo trigonométrico: círculo unitario, ángulos-arcos, conversión de unidades *grados→radianes↔reales*, graficación de la función trigonométrica.
- **Etapa escolar 5**. La función trigonométrica: dominio y rango, propiedades (periodicidad y acotamiento), variación de parámetros.
- **Etapa Escolar 6**. Operaciones con la función trigonométrica: derivación e integración.

En tres libros de análisis matemático con importante influencia escolar en el NS (Hardy, 1908, Apostol, 1984 y Spivak, 1992), Montiel encuentra presentaciones Geométricas - Analíticas para la construcción del seno y coseno, sobresalen exposiciones que si bien retoman los principios trigonométricos–geométricos del seno y coseno, problematizan sobre algunos fundamentos de la teoría analítica de las FT y proponen construcciones con base en herramientas del cálculo diferencial e integral.

En las tres exposiciones bibliográficas, Montiel localiza importantes elementos sobre la definición de la FT, que en el discurso matemático escolar se han dejado de lado. Hardy hace explícito que para tratar *analíticamente* a la FT es necesario ir más allá de los principios básicos trigonométricos-geométricos, específicamente demostrar que un arco puede medirse y en consecuencia asociarle un número llamado longitud; Apostol centra más la atención en las propiedades de la función, retomando conceptos de la trigonometría, pero atiende con precisión a la variable independiente de la función cuando habla de la unidad de medida, de la longitud de arco, necesaria para trabajar en la teoría analítica de las funciones trigonométricas, el *radián*; y por su lado Spivak no proporciona argumentos convincentes, en términos teóricos, del uso de los radianes como unidad de medida angular, pero lo incluye en su construcción de la función.

Implícita o explícitamente, los tres autores toman de base un razonamiento respecto de la proporción de la longitud del arco y el área un sector de circunferencia.

Sea el ángulo inscrito en una circunferencia de radio $\boldsymbol{r}$, que subtiende una longitud de arco, se deduce que la longitud $\boldsymbol{s}$ conforme crece es $\boldsymbol{s = \theta r}$.

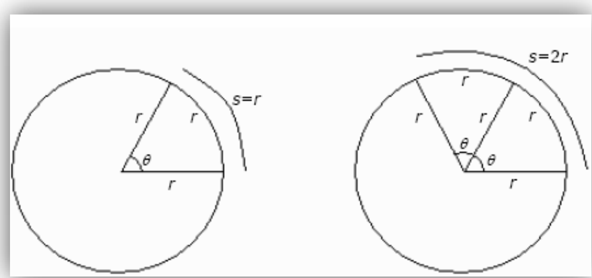
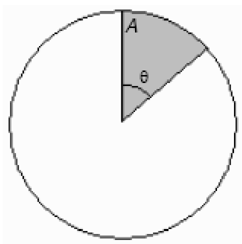


Fig. 1.2 Longitud del arco de una circunferencia

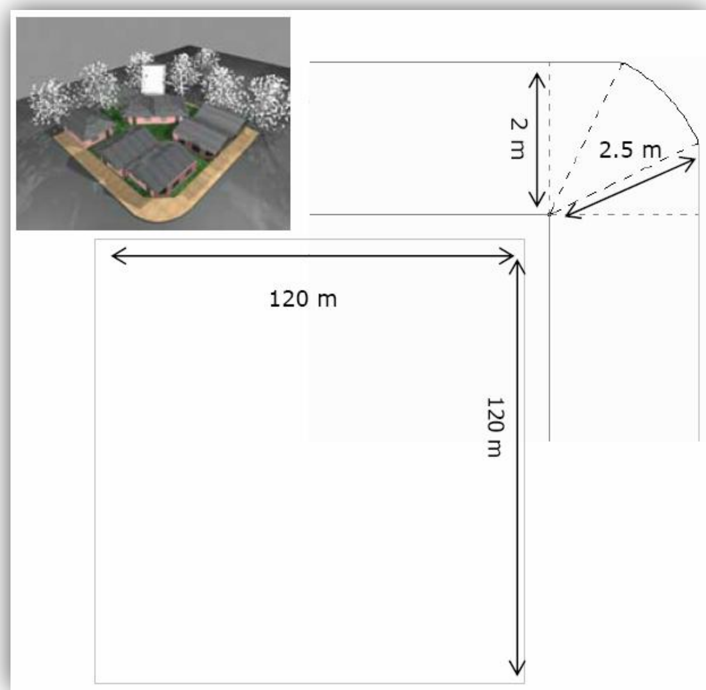
Montiel, señala por otro lado, que el área de un sector de la circunferencia puede expresarse mediante la razón de proporcionalidad: $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$ (el área $\boldsymbol{A}$ es al área total $[\pi r^2]$ lo que $\boldsymbol{\theta}$ es a la longitud total $[2\pi]$).



En su investigación Montiel hace hincapié en que "*estas expresiones necesitan una unidad de medida que mantenga la* ***homogeneidad de las ecuaciones****. Esto es, abandonar el grado como unidad de medida angular y usar su equivalente en radianes. Tal como sucede en los tres textos citados,* ***es probable que ningún texto de matemáticas aborde el tema de homogeneidad de las ecuaciones".***

En la edición 19° de la Relme – Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa – celebrada en Montevideo, Uruguay; Montiel (2005) lleva a cabo una experiencia didáctica con la participación de colegas profesores de varios países de Latinoamérica, en donde se exploraron sus concepciones ligadas a ciertas nociones trigonométricas. Dicha actividad aportó evidencia sobre algunas relaciones que se establecen entre el tipo de problemas y la herramienta matemática elegida por profesores. Montiel lo ilustra con el siguiente problema:

Se planea la construcción de la banqueta que rodea este conjunto de cabañas. Para saber la cantidad de mezcla a usar es necesario calcular el área de la banqueta. Cada esquina se puede aproximar a un sector de circunferencia y dos triángulos rectángulos. ¿Cuál sería el área de esquina?, ¿Cuál el área de toda la banqueta?



Montiel reporta:

> *"Los profesores participantes en la experiencia iniciaron por calcular las áreas más sencillas, cuatro rectángulos de 120 m de largo x 2 m de ancho, 1 cuadrado de 120 m de lado y 8 triángulos de 2 m de base y $\sqrt{2.25}$ de altura.*

Esta última medida se debe calcular a partir de los datos proporcionados. El último cálculo es el área de 4 sectores circulares.

Sólo 4 de 18 profesores obtuvieron el área a partir de la relación proporcional $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\text{área del sector}}{\text{área total}}$ *(el ángulo del sector es al ángulo completo, lo que el área del sector al área de todo el círculo)...”*

Lo revelador de la actividad, y así lo informa Montiel, es que únicamente estos cuatro, el 22% de los profesores, usaron el ángulo en unidad angular de radián, mientras que el resto utilizó la unidad angular en grados y a partir de este dato ya no continuaron con la actividad. Se señala así mismo que dentro del debate que se sostuvo con y entre los profesores no se proporcionaron argumentos que sustentaran la elección del uso del ángulo en grados.

Por último tenemos la investigación desarrollada por Méndez (2008) “*Sobre la construcción escolar las FT: La transición grados→radianes↔reales en el NMS*”. La autora fija su interés en la FT, escolarmente en la construcción de la FT, trata entre otras cosas, el triángulo, el círculo trigonométrico, medición de ángulos (presentados regularmente en grados y radianes), las razones trigonométricas y a la FT. Al estudiar cómo se construye la FT, Méndez concentra su atención en la transición por la que pasa el argumento de *x* de *sen x*, es decir, por qué *x* pasa de ser una medida angular expresada en el sistema sexagesimal (cuya unidad de medida es el grado) para convertirse a la expresión dada por el sistema cíclico (en la cual la unidad de medida es el radián) y así ser considerada como un número real para que *sen x* sea una función de variable real.

Para cumplir con los propósitos de la investigación, Méndez realizó un análisis a programas y planes de estudio, libros de textos utilizados por profesores y estudiantes, además de realizar entrevistas a los docentes del NMS. En los planes y programas de estudio se analizaron el contenido temático, los objetivos planeados por éstos para el tratamiento de la FT y la bibliografía sugerida tanto para el profesor como para el estudiante; considerando esto se hizo la revisión de tal bibliografía centrando la atención en la forma como se definen los ángulos, su medición (conversión de un sistema de medición angular a otro), definición y caracterización del sistema cíclico, a la FT como función real y a la construcción de las graficas trigonométricas.

Del análisis de los libros de texto sugeridos en los Planes y Programas de Estudio, así como los utilizados por el profesorado de las diferentes Instituciones Educativas del NMS, Méndez pudo identificar en su contenido temático una similitud entre ellos, además de una estructura que se puede distinguir entre los libros analizados. Es decir, la gran mayoría de los libros inician definiendo al ángulo como una abertura de dos semirrectas unidas por un punto denominado vértice, o bien, considerando una circunferencia que tienen de longitud 360° y su unidad de medida es el grado (1°), sí éste se divide en 60 partes iguales se forma el minuto (1´) y éste a su vez se divide en otras 60 partes iguales se forma el segundo (1´´). Posteriormente se define a la medida angular en el sistema cíclico donde se dice que un radián es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de circunferencia de longitud igual al radio. En seguida, se dan expresiones como reglas, fórmulas o hasta teoremas para ser usados en la conversión de un sistema a otro. En estas conversiones se muestran errores en las igualdades y en las operaciones que realizan para deducir su equivalencia en el otro sistema o para simplificar términos ya que utilizan las dos unidades de medida en una misma expresión y esto podría ser claramente confuso para el lector. Así por ejemplo, en Ruiz 2005 (citado en Méndez 2008), encontramos que escriben $30° = \frac{30°\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$ bajo el argumento que *"por simplicidad hemos omitido la palabra radianes al aplicar la regla de transformación"* y en Fuenlabrada 2004 (citado en Méndez 2008); encontramos la expresión $1° = \frac{\pi}{180°} radianes$, en donde podemos notar el uso de dos unidades de medida en el mismo lado de una igualdad.

Méndez reporta: "*siguiendo esta estructura o patrón de los libros, lo siguiente sería la graficación de las funciones trigonométricas, en unos casos, sólo la caracterización de éstas. Sin embargo, antes de esto, de manera no clara para el lector, se hace la omisión de la expresión "rad" o "radianes", por lo que en un momento estamos manipulando una medida angular en el sistema cíclico y en otro momento sólo a un número real sin dejar realmente explícito el por qué de tal acción. Es más, cuando algunos autores lo hacen explícito sólo justifican a la omisión de las expresiones, ya mencionadas, como algo que simplificará, facilitará y proporcionará comodidad para seguir manipulando la cantidad exclusivamente como un número real*".

De acuerdo con lo anterior, sobre la estructura que tienen los libros de texto del NMS, Méndez simplifica en el siguiente esquema, las etapas por las que el estudiante, de este nivel, atraviesa al abordar temas de trigonometría (enfocándonos en la transición de interés *grados → radianes ↔ reales*).

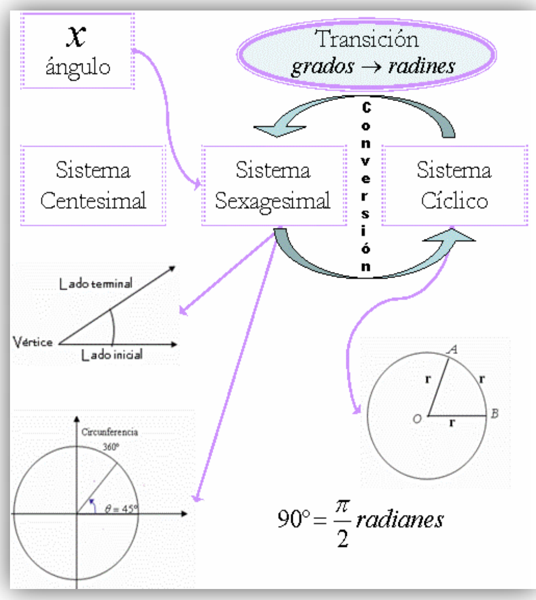


Fig. 1.3 Estructura del discurso matemático escolar de las FT en los libros de texto de NMS (Méndez, 2008)

Tras este análisis se puede identificar claramente una estructura o patrón que tienen los libros de texto del NMS para el tratamiento de las transiciones mencionadas y en general de la Trigonometría mediante el orden y la forma en que se explican.

Del análisis de los libros, Méndez reporta: *podemos localizar algunas rupturas conceptuales asociadas a los conceptos que pueden ser considerados como articuladores:*

- *No se hacen explícito el motivo por el que, repentinamente, aparece un sistema de medición de ángulo como los radianes.*
- *La* ***destematización*** *(es decir el no considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las funciones trigonométricas.*

Una explicación de tales rupturas surge de la consideración que dentro de la estructura del discurso matemático escolar existen diferentes prácticas sociales, tal como aquella que toma en cuenta la medición del ángulo a través de grados es considerada como “natural” y en consecuencia es la unidad de medida elegida dentro de la actividad matemática escolar.

En contraste, desde este enfoque, la medida de los ángulos, con radianes, es un concepto que articula, en sentido matemático, la medición de los ángulos con los grados y las FT como funciones de variable real. Así, la contradicción entre el significado matemático y el significado construido por el discurso matemático escolar, es la fuente de las rupturas conceptuales.

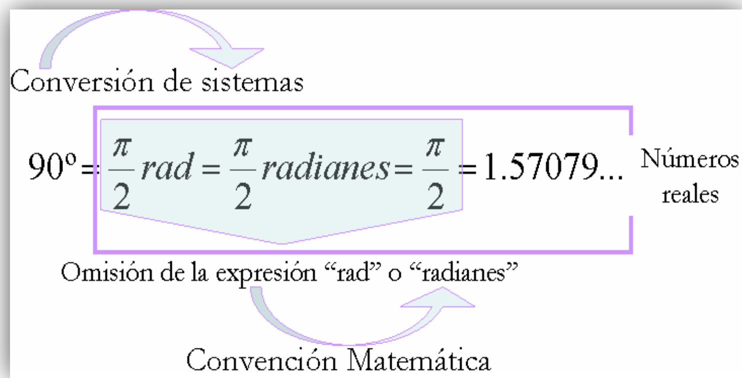


Fig. **1.4** Patrón en los libros de texto en la *destematización* del tránsito de los radianes a los números reales (Méndez, 2008)

Recapitulando investigaciones referentes a la misma problemática y con el propósito de contrastarlas con nuestra labor, tenemos:

Maldonado (2005) reporta que es a partir de la relación del radián a número real donde se definen la función trigonométrica de variable real y concluye que al no hacerse explícito en el discurso matemático escolar provoca que para el estudiante sea indistinto el tratamiento de razón o de función. En mi opinión, hacer explícita dicha relación modificaría ligeramente el contexto escolar y las concepciones del concepto, ya que en realidad la explicación no genera la necesidad de cambiar de unidad de medida angular.

Montiel (2005) documenta que en la escuela se trata a la función trigonométrica como una *extensión* de las razones y que su única explicación sobre la unidad de medida radica en la equivalencia entre grados y radianes en el círculo trigonométrico. Este enfoque clásico no ha podido resolver la elección de unidad de medida en el tránsito de la trigonometría clásica y la trigonometría analítica. Indica que no hay recursos didácticos que permitan al profesor el tránsito constructivo entre triángulo rectángulo → círculo trigonométrico → función trigonométrica y concluye que con todo esto se despoja de los usos y significados que dan origen a la función trigonométrica, perdiéndose el vínculo con algunas prácticas de referencia[2]; por lo cual plantea la construcción de la función trigonométrica en escenarios que articulen la actividad del alumno con la práctica de referencia específica y realista. Considero que no es una tarea fácil institucionalizar las prácticas de referencia en el discurso matemático escolar, además de que no se responde a la necesidad del cambio de la unidad de medida.

Méndez (2008) reporta rupturas conceptuales asociadas a diferentes prácticas sociales que consideran como "natural" la medida del ángulo en grados en la actividad escolar. Así, la contradicción entre el significado matemático y el significado construido por el discurso matemático escolar es la fuente de rupturas conceptuales. Tales rupturas condicionan diferentes concepciones en relación a las funciones trigonométricas, como el considerar que el dominio de las funciones trigonométricas es dimensional con la unidad en grados o en radianes, lo que deriva que no sea posible interpretar adecuadamente, al mezclar los valores de x con números reales y cantidades en grados, expresiones del tipo $f(x) = x + sen\, x$. Esta ruptura conceptual puede ser subsanada sí se considera el tránsito de los radianes a los números reales como una convención matemática, concepto que articula y da coherencia a la transición de los radianes a números reales para la definición de las funciones trigonométricas como funciones de variable real. Pero ante esto, considero que aunque se acepte esta convención matemática, que debería hacerse explícita en el discurso matemático escolar para la construcción de la FT, no se revela la necesidad del cambio en las unidades de medida del ángulo.

De acuerdo a lo anterior, el presente trabajo de investigación pretende continuar sobre la misma línea de investigación desarrollada por Méndez, usando una metodología similar, pero ampliando el contexto de estudio y análisis a otros sistemas del Nivel Medio Superior e incluyendo al Nivel Superior.

[2] Bajo el modelo propuesto por Montiel, la matematización de la astronomía (primer momento), el movimiento (segundo momento) y de la transferencia de calor (tercer momento) reciben el nombre de ***práctica de referencia*** ya que se refiere a prácticas que reflejan necesidades sociales, de origen pragmático o reflexivo, en un momento y lugar determinados.

Capítulo 2.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo se explican los referentes teóricos y a través de ellos se proporcionan los instrumentos conceptuales necesarios para dar racionalidad a la investigación.

2.1 SISTEMA DIDÁCTICO

Esta investigación considera como objeto de estudio el sistema didáctico, así como los fenómenos didácticos que en él suceden. Para ello realizaremos un estudio sistémico sobre la relación del profesor y los estudiantes con respecto de un saber matemático escolar.

De acuerdo con Brousseau (1993), existen diversos "contratos" que condicionan y modifican las relaciones del sistema didáctico en el aula. El **contrato social de enseñanza** donde se establece la causa del saber a enseñar, el **contrato escolar** donde se define la actividad, las responsabilidades, actitudes y los derechos de los participantes del fenómeno escolar, a saber, escuela, profesor y alumno; el **contrato pedagógico** donde se establecen las relaciones sociales entre profesor y alumno; y finalmente el **contrato didáctico** que es un conjunto de reglas -con frecuencia no enunciadas explícitamente- que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas. Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos. La misma noción en la teoría antropológica es enunciada por Bosch, Fonseca, Gascón[1]:

> *"Recordemos que el contrato didáctico institucional (Chevallard 1991) está formado por un conjunto de cláusulas que distribuyen las responsabilidades recíprocas en el juego que se establece en cada institución docente entre los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor, como director del proceso de estudio. Las cláusulas del contrato tienen un carácter marcadamente implícito (el contrato siempre está presente, pero no se puede explicitar) y no rigen todos los aspectos de la relación que se establece entre los estudiantes y el profesor, sino únicamente los que hacen referencia al conocimiento matemático a estudiar".*

[1]Bosch, Fonseca, Gascón (2004): "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares", *Recherche en Didactique des Mathématiques* (en prensa).

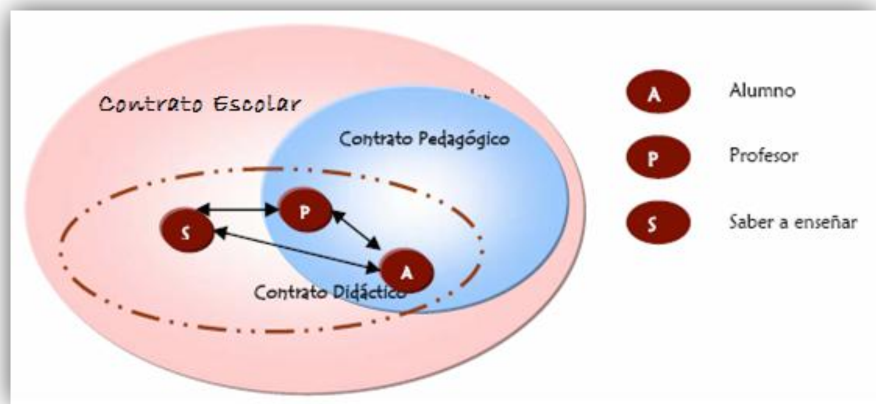


Fig. 2.1 Sistema didáctico

Es claro que el contrato escolar y el pedagógico están sujetos a variables tales como: estructura institucional, modalidad educativa, calendarios escolares, programas académicos, horas clase, estándares de evaluación, tradición de enseñanza, etc., y consiguientemente encontraremos diferencias significativas de una Institución a otra, en una región que en otra, etc. Pero en tanto dichos contratos son necesarios para la existencia de un contrato didáctico, se han acotado las formas de estudiarlos. La información, la interpretación y las restricciones del medio rigen los comportamientos del alumno en situación escolar; esto es, los contratos escolar y pedagógico generan en el alumno concepciones de su actividad respecto del aprendizaje de las matemáticas en la escuela (D'Amore, 1999):

- **La concepción escolar**: El alumno ajusta su comportamiento con base en aquello que espera le sea evaluado. Nadie le dice lo que habrá de hacer explícitamente, sólo tiene que escribir lo que el profesor le transmite, porque el alumno espera que eso le sea preguntado en alguna evaluación posterior, sin embargo, a pesar de no ser explícito, el alumno descifra el mensaje y se comporta en consecuencia.

- **La concepción de la matemática**: El alumno tiende a responder haciendo uso de objetos matemáticos, aun cuando la pregunta no lo requiera. Aunque no se haga explícito el uso de objetos matemáticos, por parte del problema o de su maestro, la concepción del alumno hacia la materia, hace que opere dicha actividad con números, expresiones matemáticas, gráficas, entre otros. El cree que la respuesta habrá de ser matemática.

- **La concepción de la modalidad escolar**: Aunque el objetivo sea la adquisición de un concepto matemático el alumno tiende a repetir ejercicios de naturaleza semejante, pues él descubre que la modalidad de clase se conserva a lo largo del tiempo. Termina por aprender que la modalidad empleada por su maestro, le indica lo que él habrá de hacer.

2.2 La Teoría de la Transposición Didáctica

Para responder a nuestra pregunta de investigación debemos tener un modelo del funcionamiento global del sistema didáctico. Tal modelo lo tomaremos de la Teoría de la Transposición Didáctica. Chevallard (1998) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la didáctica de la matemática sería el estudio del hombre -las sociedades humanas- aprendiendo y enseñando matemática; plantea que el objeto principal de estudio de la didáctica de la matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos - formados por los subsistemas: docentes, alumnos y saber enseñado- que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

Sintetizando algunas características de esta perspectiva, Bosch, Fonseca, Gascón expresan:

> *"El modelo que propone actualmente la Teoría Antropológica de lo Didáctico, describe el conocimiento matemático en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas cuyos componentes principales son tipos de tareas, técnicas, tecnologías, y teorías. Recordemos que las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o 'saber-hacer' formado por los tipos de tareas y las técnicas, y por un bloque teórico o 'saber' formado por el discurso tecnológico-teórico que describe, explica y justifica la práctica docente".*

El problema central de la didáctica para Chevallard, es el estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y de sus efectos, considerando el conjunto de condicionantes cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

La relatividad del saber a la institución en que se presenta acarrea el concepto de transposición didáctica (Chevallard 1998), el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado. Tomando un texto de dicho autor, él mismo nos describe este concepto que consideramos esencial para la didáctica[2]:

> *"¿Qué es la transposición de los saberes? O, mejor dicho: ¿por qué hay transposición de los saberes? La respuesta es a priori muy simple y se puede explicitar en algunos puntos. Primer punto: los saberes nacen y crecen en ciertos "lugares" determinados de la sociedad. (La producción de los saberes es algo complejo, que supone una "ecología" particular.) Segundo punto: las necesidades sociales hacen que los saberes producidos deban vivir también en otros lugares de la sociedad. (La cosa es todavía más compleja y oscura: así, casi cada objeto de uso cotidiano "contiene" hoy día, de manera invisible para el usuario, matemáticas "cristalizadas",*

[2] Traducción de "La transposicion didactique et l'avenir de l'École" (1996), realizada por Marianna Bosch

y un montón de otros saberes más.) Tercer punto: para poder vivir "lejos" de sus lugares de producción, los saberes sufren transformaciones que los adaptan a las ecologías "locales" correspondientes. (De este modo, los objetos matemáticos que manipulan ingenieros, economistas o geógrafos deben empezar a vivir "en asociación" con otros objetos, que el matemático ignora y que, por lo menos culturalmente, parecen propios de estos ámbitos específicos de la práctica social.)".

Cuando un saber se transpone en una institución para ser estudiado hablaremos de transposición didáctica (el adjetivo didáctico corresponde aquí al sustantivo estudio). El estudio de la transposición didáctica se preocupa, entre otras cuestiones, de detectar y analizar esta clase de diferencias y hallar las causas por las cuales se han producido, con el objeto de subsanarlas y evitar que la enseñanza transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

Las investigaciones, sobre el fenómeno de la transposición didáctica, dan cuenta de que los objetos destinados a la enseñanza de ninguna manera pueden interpretarse como una simplificación de objetos más complejos, los cuales son proporcionados por una comunidad científica (saber erudito). Yves Chevallard ha sistematizado estas ideas para las matemáticas en su Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1998).

La teoría establece que el saber a enseñar difiere cualitativamente del saber erudito (esto, claro está, debido a los fenómenos de la transposición didáctica). En este sentido se precisan las características del saber enseñable:

En cuanto al saber:

1. La *desincretización* del saber: división de la práctica teórica en campos de saber delimitados que den lugar a prácticas de aprendizaje especializados.

2. La *despersonalización* del saber: separación del saber y de la persona en cada una de esas prácticas.

3. La *programabilidad* de la adquisición del saber: programación de los aprendizajes y de los controles, según las secuencias razonadas, que permitan una adquisición progresiva de los conocimientos expertos.

En cuanto a la transmisión:

4. La *publicidad* del saber: definición explícita en comprensión y extensión, del saber a transmitir.

5. El *control social* de los aprendizajes: control regulado de los aprendizajes, según procedimientos de verificación que autoricen la certificación de los conocimientos expertos.

Otro de los aspectos de interés para esta investigación es el funcionamiento didáctico de los saberes que proporciona la teoría, la cual establece diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico (Chevallard, 1998):

- *Nociones matemáticas*: Objetos de conocimiento construidos susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son, por tanto *objeto de estudio* en sí mismas y de una evaluación explícita, asimismo sirven como instrumento para el estudio de otros objetos. Este tipo de nociones son designadas comúnmente por la currícula.

- *Nociones paramatemáticas*: Nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas; luego no son objetos de evaluación directa, sino que son identificadas al momento de presentarse su no-maestría por parte de los estudiantes. Como ejemplo tenemos la noción de demostración: a un alumno se le pide demostrar aunque la demostración no haya sido considerada como *objeto de enseñanza*.

- *Nociones protomatemáticas*: Nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de manera que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos. Como muestra de este tipo de nociones tenemos la noción de *simplicidad* o *patrón* presente, por ejemplo, en las tareas algebraicas de factorización y simplificación de expresiones algebraicas.

El objeto del saber puede tomar diferente connotación según su referente; para el profesor de matemáticas, los objetos del saber, que son integrados como objetos de enseñanza se conocen como nociones matemáticas, por ejemplo: la recta, la parábola, la derivada, la integral, ecuaciones diferenciales, etc. Las nociones matemáticas son adecuadas didácticamente con la finalidad de darle sentido en el quehacer docente del nivel educativo.

Adyacente a las nociones matemáticas residen las nociones paramatemáticas (noción de parámetro, noción de demostración y noción de ecuación) que son herramientas de la actividad matemática sin ser necesariamente objeto de estudio, generalmente son preconstruidas (por mostración), objetos de apoyo didáctico del docente.

En la enseñanza de las matemáticas están implicados ambos tipos de nociones: las nociones matemáticas como objetos de enseñanza dignos de evaluación directa, de los cuales el docente espera que el alumno pueda proporcionar o reconstruir la definición, demostrar y reconocer las propiedades de uso; y las nociones paramatemáticas como objetos de saber auxiliares, necesario para la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos.

La noción protomatemática conforma una capa más profunda en el contrato didáctico, por debajo del acto de enseñanza o paralelo a éste se encuentra la noción protomatemática que permite evaluar en el alumno las competencias de capacidades a través de la evaluación del desempeño. El ejercicio de tales capacidades no se ejecuta en la enseñanza sino en contextos de situación específicos.

El docente generalmente no recurre a la noción protomatemática, especialmente porque no puede constituir el objeto de una enseñanza, ya que en muchas ocasiones no alcanza a ser percibido conscientemente por el alumno (dificultad protomatemática), sin embargo la noción protomatemática se hace indispensable por su aportación a los objetivos de enseñanza que conlleva a ser un prerrequisito del contrato didáctico.

Nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas conforman las capas más profundas del conocimiento didáctico del saber matemático. El análisis de la transposición didáctica de cualquier noción matemática admite la consideración de nociones paramatemáticas, las que a su vez deben ser reflexionadas a la luz de ciertas nociones protomatematicas. Se debe considerar que una noción de un nivel puede pasar a otro en determinadas condiciones, es decir, una noción paramatemática puede llegar a ser objeto de definición precisa y una noción protomatemática pasar a ser noción paramatemática.

Cabe aclarar que estos niveles de explicitación no son de ninguna manera absolutos pues a veces es posible llevar una noción a un nivel superior de explicitación, a este respecto Chevallard (1997) menciona que la noción paramatemática de demostración puede ser objeto de definiciones lógicas y precisas en la lógica matemática.

Estas nociones forman distintos estratos de funcionamiento del conocimiento matemático escolar que podemos dividir en dos grandes grupos: el de nociones explícitas, conformado por nociones matemáticas y el de nociones implícitas, integrado por nociones paramatemáticas y protomatemáticas. La importancia de estas distinciones en niveles de explicitación, es que proporcionan elementos para el análisis del discurso didáctico.

2.3 LA NOCIÓN DE CONVENCIÓN MATEMÁTICA CÓMO COSTUMBRE DIDÁCTICA EN LA INTEGRACIÓN SISTÉMICA DE CONOCIMIENTOS

La noción de “convención” matemática es usualmente considerada dentro de la cultura escolar como preestablecida e inmóvil; se le concibe como una norma a la que hay que atender. En los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas las convenciones ocupan una parte del amplio espectro de aquellos objetos y procesos matemáticos (como definiciones, axiomas, y algoritmos) que dentro del funcionamiento didáctico del conocimiento se considera indispensable memorizar tanto por estudiantes como por profesores.

La concepción de “convención matemática” puede ser entendida como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la práctica de integración sistémica de los conocimientos, es decir, existe una normatividad de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, es decir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso, el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Así las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes (Martínez-Sierra, 2003).

Básicamente, la búsqueda de integración puede resolverse optando por alguna de las siguientes vertientes (Martínez, 2005):

1. La *ruptura* producida por dejar a un lado un significado por otro, que ocasionalmente es construido para la tarea de integración, es decir, cambia la centración de significado.

2. La *continuida*d al conservar un significado en la tarea de integración.

Así la convención matemática puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

Desde una perspectiva teórica de la socioepistemología, -aquella que busca explicar la construcción del conocimiento situado, y que entiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares-, nos preguntamos en qué contribuye el manejo escolar de las convenciones al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Para responder a esta interrogante presentamos el siguiente ejemplo ilustrativo, trazado por Martínez, (2005):

> *"Partamos del supuesto que queremos asignarle un significado al símbolo $2^{1/2}$. La multiplicación reiterada no puede ser utilizada para ello, por lo que buscamos otro camino. Si retomamos la operatividad de las potencias de la misma base podemos postular que sería conveniente que $2^{1/2}\ 2^{1/2} = 2^1 = 2 = (2^{1/2})^2$ por lo que tenemos que "convenir" que $2^{1/2}$ = raíz cuadrada de 2. Lo anterior muestra que la igualdad $2^{1/2}$ = raíz cuadrada* ***no se puede demostrar si no se debe convenir.****"*

2.4 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología que se desprende de nuestra postura sistémica y de la pregunta de investigación determina la necesidad de realizar:

Un análisis didáctico: que cumpla con el objetivo de construir un esquema de la utilización de las unidades angulares *grados→radianes↔reales* en la vida escolar. De la misma forma se contempla el análisis de programas de estudio y libros de textos del NMS y NS, con el propósito de identificar aquellas partes que incurren, recurren y consideran a la noción de conversión de unidades angulares.

Un análisis cognitivo: que busque establecer las concepciones de las unidades angulares *grados→radianes↔reales*, dado que nada de lo que hacemos es independiente del proceso cognitivo. Este análisis contempla el estudio del funcionamiento y de las diversas formulaciones de las nociones que nos interesan, mediante la consulta, en la medida de lo posible, por medio de cuestionarios y entrevistas a profesores y alumnos del NMS y NS.

Un análisis epistemológico: que aclare la naturaleza y validez de la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales*. Un buen referente para visualizar la evolución de tal transición es un estudio histórico que muestre el devenir del radián como concepto de unidad angular.

2.4.1 ANÁLISIS DIDÁCTICO

La importancia de analizar libros de textos reside justamente en el papel que éste tiene en el aula, de tal forma lo expresan González y Sierra (2004). El libro de texto utilizado en el aula de matemáticas tiene diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver.

En este sentido, Choppin 1980 (citado en González y Sierra 2004) considera que el libro de texto es a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos, contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores, además de que es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes.

Por ello, consideramos que es de gran importancia analizar la contribución que los libros de texto han tenido en el aula de clases, en decir, en la educación matemática que reciben los estudiantes del NMS y NS respecto a un contenido específico como lo es en nuestro caso las funciones trigonométricas.

El análisis didáctico que se realizó conforma las dos primeras etapas del trabajo de investigación.

- **Primera etapa:** se examinaron los planes y programas de estudio, en específico los objetivos que se plantean en éste.

Los criterios a considerar para el análisis de los planes y programas de estudio fueron:

  - ✓ Cuáles son los objetivos que plantea el programa de estudios en general para la asignatura.

  - ✓ Cuáles son los propósitos que se plantean para el tratamiento de la función trigonométrica.

- **Segunda etapa:** se analizaron los libros donde las funciones trigonométricas sean tratadas desde un punto de vista analítico, observando de manera específica cómo es el tratamiento de las medidas angulares y sus transiciones, además de los ejemplos y ejercicios que se utilizan para ello.

Criterios a considerar en el análisis de textos.

- ✓ La forma de definir la medida angular en el sistema sexagesimal.
- ✓ La manera de definir la medida angular en el sistema cíclico.
- ✓ Cuál es la finalidad de la conversión *grados* → *radianes*.
- ✓ Cómo es el tránsito de *radianes* ↔ *reales.*
- ✓ Cuál es el fundamento de tales transiciones para la graficación de las funciones trigonométricas.

2.4.2 Análisis Cognitivo

Con base a lo encontrado en el análisis didáctico se diseñó y aplicó un cuestionario[3] a profesores y alumnos, además de que se realizaron una serie de entrevistas a diversos profesores de matemáticas, con la intención de conocer cómo enseñan o explican a sus estudiantes temas relacionados con las funciones trigonométricas y cómo entienden ellos mismos la transición *(grados→radianes↔reales)* a la que es sometida x cuando se encuentra como argumento en una función trigonométrica. Se busca obtener elementos que nos acerquen al análisis del concepto por medio de los argumentos, razonamientos, procedimientos y resultados que los profesores y estudiantes usen para resolver un problema en donde se ponga en juego la unidad angular del ángulo como concepto matemático.

El diseño del instrumento de análisis consta de cuatro actividades que buscan averiguar las concepciones de los profesores con respecto a la transición *grados→radianes↔reales.* El cuestionario consta de dos fases, con propósitos específicos en cada una de éstas. En la primera fase, conformada por las tres primeras actividades, se tiene como propósito detectar las concepciones que los entrevistados tienen de las características del dominio (el valor de x en sus diferentes posibilidades como grados, radianes o números reales) e imágenes de la función trigonométrica. En una segunda fase, conformada por la última actividad, se tiene como objetivo detectar las concepciones que se tienen respecto al significado de las operaciones entre funciones trigonométricas y funciones algebraicas.

En términos generales el cuestionario para estudiantes y profesores es el mismo (ver Anexo A). Con la salvedad de que en los cuestionarios destinados a profesores se les pide información sobre su experiencia docente alrededor del tema de las funciones trigonométricas y se redactaron las actividades matemáticas con la frase "¿Cómo explicaría a sus estudiantes…?" y en el cuestionario reservado para estudiantes se sugiere el uso de tablas para apoyar la graficación. En general la estrategia del diseño del cuestionario es favorecer el contexto geométrico como una manera de motivar a las personas cuestionadas a realizar varios cálculos y potencialmente favorecer la aparición y eventualmente propiciar la reflexión sobre las rupturas conceptuales.

[3] El instrumento de entrevista podrá observarse en el anexo A

El análisis cognitivo conforma la tercera y cuarta etapa del trabajo de investigación:

- **Tercera etapa:** de acuerdo a lo hallado en los estudios anteriores se diseñó un cuestionario dirigido tanto para profesores como alumnos del NMS y NS con la intención de conocer cómo vive el concepto de la conversión de unidades angulares y las transiciones *grados→radianes↔reales*.

- **Cuarta etapa**: como producto del análisis a las respuestas dadas en el cuestionario de la etapa anterior, se llevaron a cabo una serie de entrevistas a profesores de matemáticas con el objeto de contar con información sobre los procesos cognitivos de los estudiantes y de los mismos profesores a través de cuestionamientos sobre las concepciones que presenta el profesor con respecto a la transición de la unidad angular *grados→radianes↔reales*.

2.4.3 Análisis Epistemológico

Sobre el análisis epistemológico, Castañeda (2008), escribió:

> *Los estudios de carácter epistemológico, ofrecen explicaciones de la naturaleza de los objetos matemáticos al analizar su origen y desarrollo de los criterios y condiciones de su validez, su consistencia lógica, entre otras (Albert, 1998). Sin embargo es posible llevar la investigación a enfoques más específicos, y para los matemáticos educativos (Sierpinska y Lerman, 1996) este tipo de estudios provee explicaciones detalladas de los procesos por los que se desarrolla una idea matemática, observando las condiciones de desarrollos pasados, los momentos en los que se negocian y agregan significados ampliándose campos de estudio o los puntos en la historia en los que se descartan ideas y nociones asociadas a los conceptos en cuestión. (P 868)*

- **Quinta etapa**: derivado del análisis de las etapas anteriores surge la necesidad de realizar un estudio epistemológico, en busca de establecer la naturaleza y validez de la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales*. Un buen referente para visualizar la evolución de tal transición es el estudio en el tiempo que muestre el devenir del radián como concepto de unidad angular.

Capítulo 3

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LOS PLANES DE ESTUDIO Y LIBROS DE TEXTO

Un acercamiento a la vida de la FT en el escenario escolar puede hacerse mediante el examen de las fuentes principales de organización y recursos con que el docente cuenta para impartir su clase, así como con el registro de su clase. Dichas fuentes las constituyen los Programas de Estudio y los Libros de Texto más utilizados.

Con esta finalidad se revisa: el sistema curricular; desde el tercer año de educación media básica, pasando por el nivel medio superior, hasta el nivel superior; en disciplinas que involucran tal concepto matemático, examinando principalmente los objetivos y propósitos que se plantean para el tratamiento de la conversión de unidades angulares *grados→radianes↔reales*; y la bibliografía sugerida por tales programas. Todo ello con la finalidad de razonar cómo es presentado el concepto de conversión de unidades angulares.

3.1 ANÁLISIS DE LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO

3.1.1 ANÁLISIS DE PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO DE NIVEL MEDIO BÁSICO

El concepto matemático de ángulo es abordado por primera vez en el salón de clases en el 4° grado de la educación primaria continuando su uso en 5° y 6°, no será hasta el 1° año de educación media básica que este será emprendido como tema específico.

De lo reportado por Rotaeche (2008), en el análisis de textos oficiales de matemáticas de 4° grado de educación básica, subrayamos la forma en que se maneja el concepto de ángulo:

- Se maneja el concepto de ángulo a través de giros “partes de vueltas”.
- La medición del ángulo de acuerdo a la fracción de un giro.
- El grado es la unidad de medida de los ángulos.
- Se da a conocer el símbolo del grado (°).
- Notación de una magnitud angular, por ejemplo 45°, 90°, …
- Equivalencia entre los ángulos y la fracción del giro.
- Se presenta al transportador como instrumento para medirlo.

- Se muestra la medición y clasificación del ángulo; agudo, recto y obtuso.

En la reforma educativa de 1993, en el primer grado de secundaria, se aborda el tema de "Medición y Cálculo Geométrico". Del plan curricular de esta reforma destaca lo siguiente, respecto al concepto de estudio:

> *"La medición juega un papel central en la enseñanza de la geometría porque ayuda a comprender su utilidad en la vida cotidiana, al mismo tiempo que desarrolla nociones y habilidades necesarias para el aprendizaje de esta disciplina….*
> *...Deberán asimismo diseñarse actividades para que desarrolle y afine la noción de ángulo, se adquiera familiaridad con los distintos tipos de ángulos que puedan presentarse (agudos, rectos, obtusos, etc) y se utilice el transportador para medirlos, así como en la reproducción y trazado de figuras.*
> *…Por ejemplo, una actividad interesante es que al intentar reproducir un polígono o fabricar el plano de un terreno irregular de lados rectos, los alumnos se percaten de que además de los lados, necesitan medirse los ángulos…"*

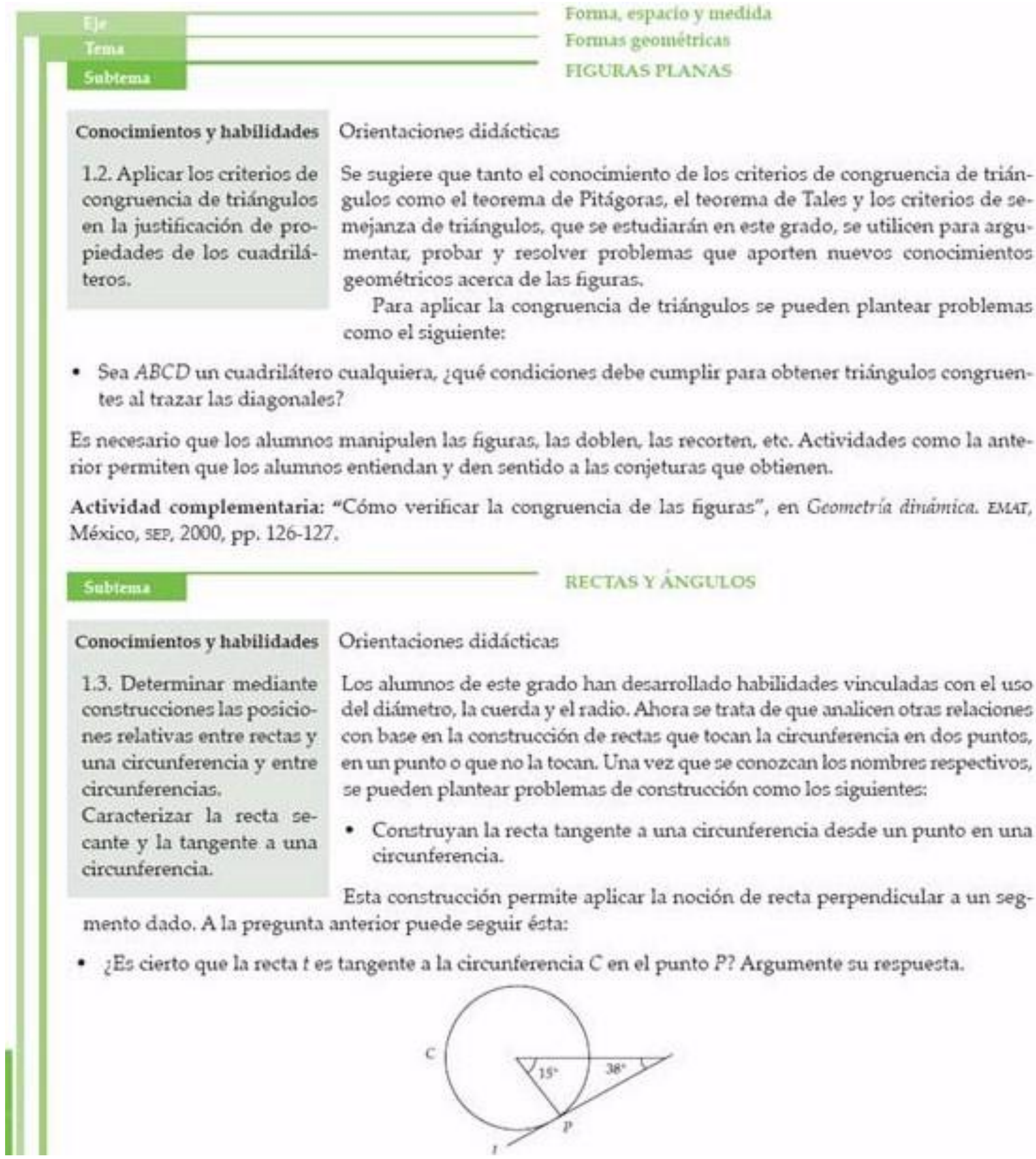
En este nivel se encuentran algunas de las primeras definiciones y elementos relacionados con el ángulo que se le son presentadas al estudiante. Algunas de éstas son:

- Un ángulo es la porción del plano comprendido entre dos semirrectas que tienen el mismo origen. Las semirrectas que lo forman se llaman lados del ángulo y el punto común, vértice.

- Para medir ángulos se utiliza como unidad principal el grado. El grado es igual a una de las 360 partes iguales en que se divide la circunferencia.

- Los ángulos se pueden medir con mayor exactitud si se emplean otras unidades más pequeñas que el grado, éstas son el minuto y el segundo.

De acuerdo con el Plan de Estudios 2006 de Educación Media Básica, de la Secretaría de Educación Pública de México, en el Programa de Estudios del tercer grado, uno de los propósitos del estudio de las Matemáticas, en el eje que compete a la investigación (Forma, espacio y medida), es el de favorecer de modo especial el desarrollo de la competencia de argumentación tomando como base las propiedades de la figura. Finalmente, la comprensión de los diversos conceptos matemáticos deberá sustentarse en actividades que pongan en juego la intuición y favorezcan el uso de herramientas matemáticas para ampliar, reformular o rechazar ideas previas.



Eje — Forma, espacio y medida
Tema — Formas geométricas
Subtema — FIGURAS PLANAS

Conocimientos y habilidades	Orientaciones didácticas
1.2. Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.	Se sugiere que tanto el conocimiento de los criterios de congruencia de triángulos como el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales y los criterios de semejanza de triángulos, que se estudiarán en este grado, se utilicen para argumentar, probar y resolver problemas que aporten nuevos conocimientos geométricos acerca de las figuras. Para aplicar la congruencia de triángulos se pueden plantear problemas como el siguiente:

- Sea *ABCD* un cuadrilátero cualquiera, ¿qué condiciones debe cumplir para obtener triángulos congruentes al trazar las diagonales?

Es necesario que los alumnos manipulen las figuras, las doblen, las recorten, etc. Actividades como la anterior permiten que los alumnos entiendan y den sentido a las conjeturas que obtienen.

Actividad complementaria: "Cómo verificar la congruencia de las figuras", en *Geometría dinámica*. EMAT, México, SEP, 2000, pp. 126-127.

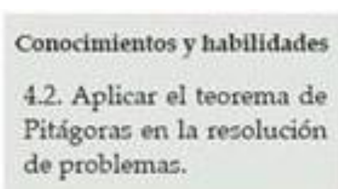
Subtema — RECTAS Y ÁNGULOS

Conocimientos y habilidades	Orientaciones didácticas
1.3. Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.	Los alumnos de este grado han desarrollado habilidades vinculadas con el uso del diámetro, la cuerda y el radio. Ahora se trata de que analicen otras relaciones con base en la construcción de rectas que tocan la circunferencia en dos puntos, en un punto o que no la tocan. Una vez que se conozcan los nombres respectivos, se pueden plantear problemas de construcción como los siguientes: • Construyan la recta tangente a una circunferencia desde un punto en una circunferencia.

Esta construcción permite aplicar la noción de recta perpendicular a un segmento dado. A la pregunta anterior puede seguir ésta:

- ¿Es cierto que la recta *t* es tangente a la circunferencia *C* en el punto *P*? Argumente su respuesta.

Fig. 3.1 Plan de Estudio de Nivel Medio Básico.



Conocimientos y habilidades

4.2. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Abordan los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de figuras geométricas. Resuelven problemas que implican relacionar ángulos inscritos y centrales de una circunferencia. Se plantea determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco. Se desarrolla la habilidad de calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.

Se resuelven problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras y razones trigonométricas. Calculan las medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas.

Conocimientos y habilidades

4.3. Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.

Se esboza el problema de averiguar la medida del ángulo formado por la diagonal y el eje horizontal. Los alumnos pueden probar con el único recurso con el que cuentan, que es la medición directa del ángulo con el transportador, obteniéndose la magnitud angular en grados.

Un estudio que antecede a las funciones trigonométricas es la *trigonometría* presentada en el tercer año de educación media (secundaria), teniendo como misión la organización y programabilidad de tales saberes a enseñar, en este nivel, a la Secretaría de Educación Pública[1] (SEP) la cual argumenta que: "*... la trigonometría sigue siendo importante por sus aplicaciones en la ciencia y la tecnología y presenta numerosas situaciones interesantes que muestran las relaciones de la geometría con la aritmética y el álgebra...*". En este nivel el programa de matemáticas está constituido por áreas, y justamente es en el área de *geometría* donde encontramos a la *trigonometría*, en el que "*se propone que los alumnos conozcan y estudien las razones trigonométricas de un triángulo y las utilicen en la solución de los problemas en los que esta disciplina es tan rica, como con el cálculo de distancias inaccesibles a la medición directa",* (SEP). Es decir, se definen las razones trigonométricas (razones de los lados) de un triángulo rectángulo para ser utilizarlas como medios de solución en la estimación de distancias.

Pero es en el NMS donde se da el tránsito de la Trigonometría Clásica (vinculada al estudio de los triángulos) a la Trigonometría Analítica (vinculada al estudio de las funciones trigonométricas).

[1]Secretaria de Educación Pública (2007, 12 enero). Educación Media Básica. *Programa de estudio de matemáticas tercer año* [en línea]. México: Secretaria de Educación Pública. Recuperado el 22 de julio de 2008, de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/programa/programa.pdf

3.2 ANÁLISIS DE PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR DEL GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO

En el marco de que el Plan Nacional de Desarrollo 2007-2011 establece la necesidad de actualizar los Planes y Programas de Estudio, contenidos, métodos y materiales para el desarrollo integral de los estudiantes. La Secretaria de Educación Pública expidió el *"Acuerdo por el que se reforma la Estructura Curricular de la Educación Media Superior que se imparte en las instituciones Públicas y Privadas Incorporadas a la Secretaria de Educación*", publicado en el periódico oficial *"*Gaceta del Gobierno*",* el 26 de enero del 2009.

PRIMERO.- Se reforma la estructura curricular de la educación media superior que se imparte en instituciones públicas y privadas incorporadas a la Secretaria de Educación para adecuarse al Sistema Nacional de Bachillerato establecido por la Secretaria de educación Pública.

SEGUNDO.- La estructura curricular de la educación media superior se desarrollará conforme a un modelo educativo de transformación académica, basado en competencias con planes y programas de estudio para las opciones de Bachillerato General y Bachillerato Tecnológico inscritos en marco curricular común.

En el marco de esta reforma, en el programa de estudios de la asignatura de trigonometría, se encuentran el tema de ángulos, sus unidades de medida y sus respectivas conversiones.

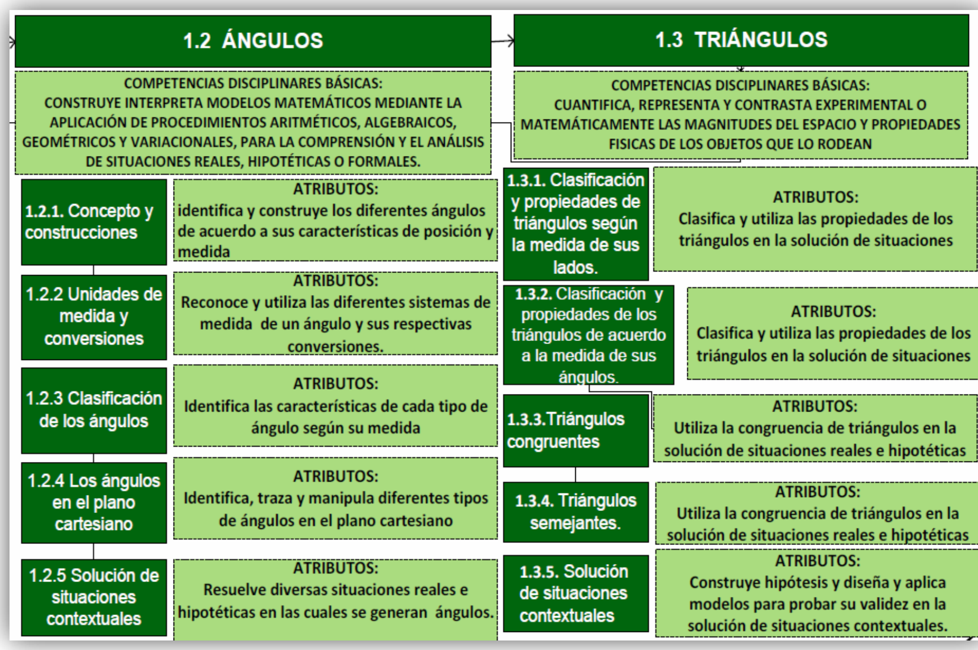


Fig. 3.2 Plan de Estudios de Nivel Medio Superior[2]

[2] Gobierno del Estado de México, (2008). *Plan y programa de estudios de bachillerato general tercer semestre ciclo escolar 2008-2009.* Estado de México, México.

El programa es presentado en bloques, la conversión de unidades angulares se encuentra en el bloque de conceptos fundamentales, de manera que la currícula de matemáticas sigue una secuencia en la presentación de su contenido, la comprensión de los conceptos es acumulativo, el conocimiento de un tema requiere el dominio de los temas anteriores.

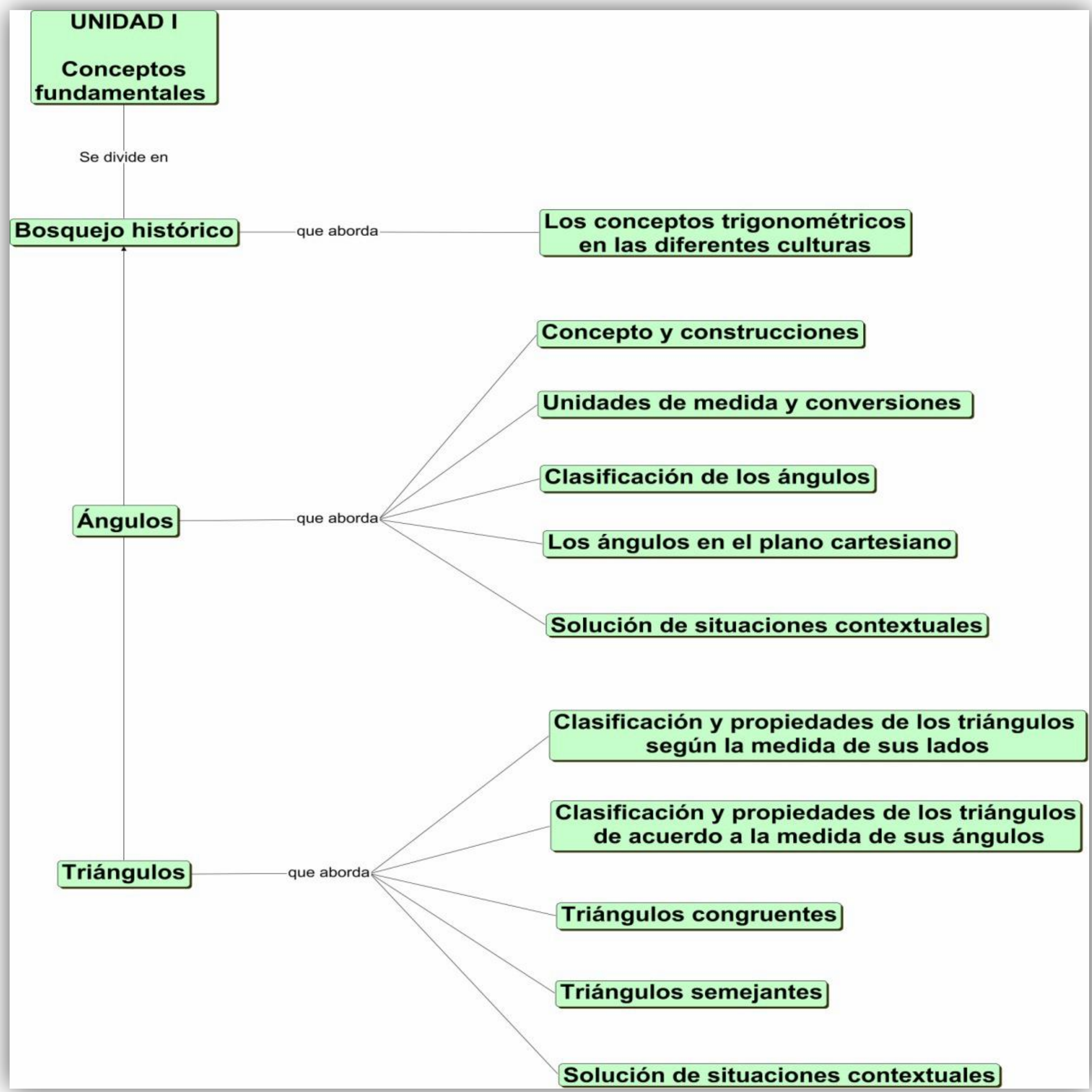


Fig. 3.3 Programa de la asignatura de trigonometría en bloques.

De las actividades docentes que se sugieren para el aprendizaje colaborativo del tema de ángulos tenemos:

- Construir diversos ángulos dentro y fuera del salón de clases procurando medirlos, clasificarlos y manipularlos.
- Identificar y extraer los ángulos de su espacio contextual reconociendo su importancia y utilidad.

- Analizar los algoritmos que se utilizan para convertir los grados, minutos y segundos a decimal.
- Formular la regla de tres para convertir de grados a radianes.
- Ubicar, analizar, manipular y reubicar un ángulo en el plano cartesiano.
- Desarrollar un ensayo sobre la importancia y aplicación de los ángulos.
- Construir un cuadro comparativo, sobre los ángulos y los triángulos.
- Diseñar un problema de su contexto, donde involucre los conceptos de triángulo y ángulos.

Prevalece el tratamiento algorítmico y memorístico pues después de definir y clasificar los ángulos, se continúa con los diferentes sistemas de medición de éstos (sexagesimal, centesimal y cíclico), con la transición de un sistema a otro por medio del factor de equivalencia que existe entre los sistemas de medición angular y con una cantidad de ejercicios, considerando que con la repetición incesante se logra el aprendizaje pero no se hace explícita la transición de la unidad angular a un número real. Aparecen términos como: *triángulo rectángulo*, *el teorema de Pitágoras, razones trigonométricas o funciones de ángulos agudos, círculo trigonométrico* (para el cálculo de ángulos cuadrantales). Se presentan las propiedades de las FT y el trazo de éstas en el plano coordenado.

Se puede concluir del análisis de los planes y programas de estudio del Bachillerato General y el Bachillerato Tecnológico que se imparten en el Estado de México, que para llegar a definir la FT como una función de variable real; primero se define la razón trigonométrica como la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, que implica ángulos medidos en grados, la conversión de los ángulos a radianes en el círculo unitario –transición de grados a radianes–, es en este segundo momento cuando se define la FT de variable real, lo que a su vez es el enlace para un tercer momento la presentación de la FT en un contexto gráfico –transición radianes a reales-.

Las FT, después de presentarlas en los semestres respectivos, se emplean en el bloque de Cálculo con la derivación e integración de las funciones trascendentes incluyendo a las funciones trigonométricas no interesándose en el entendimiento de este concepto puesto que sólo son utilizadas como objetos a los cuales se les aplican ciertos procedimientos (Cantoral y Farfán, 1998).

De acuerdo con Montiel (2005), en el Nivel Superior el tratamiento de la FT depende del contexto profesional de la carrera, encontrándose regularmente en los programas de ciencia e ingeniería, básicamente en

- Función Trigonométrica, $y = a\ sen\ (bx + c) + d$
- Serie Infinita, $sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
- Producto Infinito, $sen\ x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$
- Serie Trigonométrica,

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 sen\ x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots$$

Del análisis realizado a los programas de estudio, se puede reiterar lo ya reportado por Montiel (2005), *"La programación de los temas referentes a trigonometría y funciones trigonométricas en el Nivel Medio Superior y en el discurso matemático asociado, permite que al final de este periodo las funciones trigonométricas puedan operarse (derivarse e integrarse). En consecuencia, el discurso matemático escolar del Nivel Superior asume de entrada que la función trigonométrica ha sido aprendida por el estudiante, generando en el docente una* ***indiferencia*** *ante las explicaciones analíticas que* ***problematizan la longitud de un arco, la conveniencia o necesidad del uso del radián,…****"*

3.3 ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Como ya se indicó en el capítulo uno, la intención de la presente investigación es encontrar argumentos que puedan hacer explícita dicha transición, específicamente la evolución por la que pasa el argumento de una FT. Es decir, como el argumento *x* de una FT pasa de ser una medida angular expresada en grados a convertirse en una unidad cíclica para finalmente considerarse un número real.

Para cumplir con el cometido de esta investigación se dio a la tarea de hacer una investigación en libros de texto, donde sean tratados los temas de trigonometría, desde un punto de vista analítico, con la finalidad de encontrar argumentos razonados sobre la transición de *grados→radianes→reales.* Considerando que una fuente importante son los textos utilizados en el nivel superior.

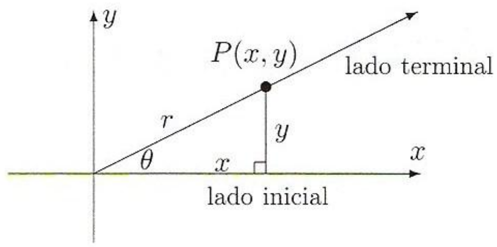
Se muestran a continuación los libros que se analizaron, utilizando el siguiente criterio:

- ✓ La conversión de *grados → radianes.*
- ✓ La conversión de *radianes ↔ reales.*
- ✓ Cuál es el fundamento de tales transiciones para graficación de las funciones trigonométricas.

1. *Baley, J. (2004). Trigonometría, México. Mc. Graw Hill*

En este texto se indica que, en matemáticas superiores, la medida más conveniente para el ángulo es el radián, que es la razón entre el arco interceptado y el radio de un círculo; esto debido a que en algunas operaciones, como la medición de la longitud de un arco, el área del sector de un círculo, la velocidad angular o las integrales en cálculo se concibe de forma natural a la unidad del ángulo en radianes.

En este texto se definen las FT en términos de un punto *(x, y)* que se localiza en el lado terminal de un ángulo, a una distancia *r* de su vértice.



$$\text{seno } \theta = \frac{y}{r}$$
$$\text{coseno } \theta = \frac{x}{r}$$
$$\text{tangente } \theta = \frac{y}{x}$$
$$\text{cosecante } \theta = \frac{r}{y}$$
$$\text{secante } \theta = \frac{r}{x}$$
$$\text{cotangente } \theta = \frac{x}{y}$$

En esta definición de las FT, *el dato de entrada es un ángulo medido en grados o radianes y el dato de salida es un número real*. Para explicar la transición *radianes → reales,* se amplía este concepto para reproducir una definición de la FT que **admita un número real como dato de entrada, o dominio y que produzca como dato de salida un número real.**

La forma en que el texto define a la FT, con un dominio en los números reales, es la siguiente:

En un círculo de radio r y un ángulo central θ, si la longitud de r es igual a *1* y θ asume todos los valores posibles, entonces, el punto *(x, y)* trazará un círculo unitario.

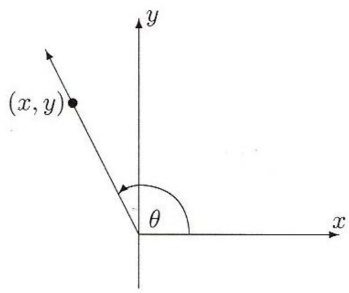


Fig. 3.4 Punto *(x, y)* en el lado terminal del ángulo θ

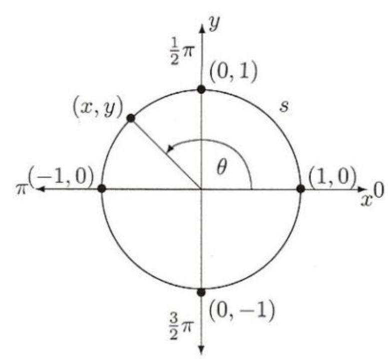


Fig. 3.5 Un círculo unitario es aquél cuyo radio es igual a la unidad y cuyo centro coincide con el origen.

Es posible localizar el punto *(x, y)* sobre el círculo unitario utilizando el ángulo central θ o a la longitud del arco *s*, medida en el sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del eje *x*. Si empleamos la longitud del arco *s* para localizar un punto *(x, y)* sobre el círculo unitario, teniendo presente que $r = 1$, podemos establecer las siguientes definiciones de las funciones circulares.

$$\operatorname{sen} s = y \qquad \cos s = x \qquad \tan s = \frac{x}{y} \qquad \csc s = \frac{1}{y} \qquad \sec s = \frac{1}{x} \qquad \cot s = \frac{y}{x}$$

El número s es la longitud de un arco sobre el círculo unitario desde el eje x hasta el punto (x, y). Dado que $r = 1$ y $s = r\theta$, esa longitud es exactamente igual a la medida del ángulo central que se intercepta expresada en radianes, por tanto, estas definiciones de las funciones circulares corresponden exactamente a las definiciones de las FT consideradas para ángulos medidos en radianes.

En el otro apartado del libro donde se aborda el tema de las gráficas de las FT, se señala el por qué graficar $y = sen\ x$ en lugar de $y = sen\ \theta$, ya que en la graficación se acostumbra usar x para el valor del dato de entrada, lo que se llama el argumento de la función, y y se usa para el valor de salida. En las FT es frecuente que la entrada o argumento sea el ángulo θ. La confusión se produce cuando decimos que $\text{sen}\frac{y}{r}$ y $\cos\frac{x}{r}$. Estas x y y se refieren a los puntos sobre el círculo de radio r. Son elementos diferentes de la x y de la y usadas para designar la entrada y salida de una función representada en una gráfica; por lo que es recomendable usar cualquier otra variable, por ejemplo ***s*** o ***t***, como entrada o argumento de una FT.

En apartados del mismo libro se hacen notaciones interesantes en cuanto al tema de investigación, tales como:

- Los radianes no tienen dimensiones ya que cualquier unidad que se haya empleado para medir la longitud de un arco que aparece en el numerador se cancela con las unidades utilizadas para medir la longitud del radio que está en el denominador. Por lo que se debe de omitir la palabra radián.

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Donde:
θ = medida de ángulo en radianes
s = longitud del arco interceptado
r = radio del círculo

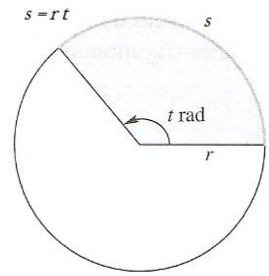
- Calcula el número de grados que hay en $\frac{1}{6}\pi\ radianes$. En **ocasiones hay que escribir la palabra radián** para hacer énfasis en el sistema de medición empleado.

2. Purcell, E. (2007) *Cálculo diferencial e integral*, México. Pearson Prentice Hall.

Este libro es muy utilizado en la asignatura de Cálculo en el nivel superior, cuenta con un capítulo preliminar donde se localizan los temas de "precálculo, en él se hace una revisión de los conceptos que son necesarios conocer para abordar con éxito nuevos temas y conceptos que son presentados con posterioridad en el texto.

En el apartado correspondiente a las FT, se inicia con la exhortación de que se debe estar familiarizado con las definiciones de las funciones trigonométricas basadas en ángulos y triángulos rectángulos, las cuales es importante no olvidar. Sin embargo, en aplicaciones posteriores, se hace hincapié en prestar mayor interés en las FT basadas en el círculo trigonométrico. Cuando se considera de esta forma sus dominios son conjunto de números reales en vez de conjunto de ángulos.

Para explicar el por qué de la transición *grados→radianes* se indica que: *"La división de una vuelta en 360 partes es arbitraria (debida a los antiguos babilonios, a quienes les agradaban los múltiplos de 60). La división en 2π partes es más fundamental y yace en el uso casi universal de la medida radián en cálculo. En particular, observe que la longitud **s** del arco que corta un círculo de radio r por medio de un ángulo central de **t** radianes satisface".*



$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{t}{2\pi}$$

Esto es, la fracción de la circunferencia total $2\pi r$ corresponde a un ángulo t es la misma fracción del círculo unitario que corresponde al mismo ángulo t. Esto implica que $s=rt$. Cuando $r=1$, esto da $s=t$, *lo cual* significa que *la longitud del arco en el círculo unitario cortado por un ángulo central de t radianes es t*; esto es correcto incluso si t es negativa, con tal que interpretemos la longitud como negativa cuando se mide en dirección de las manecillas del reloj.

Ahora podemos hacer la conexión entre la trigonometría del ángulo y la trigonometría del círculo unitario. Si θ es un ángulo medido en k radianes, es decir, si θ es un ángulo que corta un arco de longitud t del círculo unitario, entonces:

$$sen\,\theta = sen\,t \qquad\qquad \cos\theta = \cos t$$

Es de suma importancia resaltar del texto que ***"En cálculo, cuando encontramos un ángulo medido en grados, casi siempre lo cambiamos a radianes antes de realizar cualquier cálculo. Por ejemplo:***

$$sen\,31.6° = sen\left(31.6 \cdot \frac{\pi}{180} radián\right) \approx sen\,0.55\text{"}$$

Para explicar el por qué de esta transición (de *radianes→reales)* se inicia definiendo las FT con base al círculo unitario. Sea ***C*** un círculo unitario, es el círculo con radio 1 y centro en el origen cuya circunferencia tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea ***A*** el punto (1, 0) y ***t*** un número positivo. Existe un solo punto ***P*** en el círculo ***C*** tal que la distancia medida en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del arco ***AP*** es igual a ***t***.

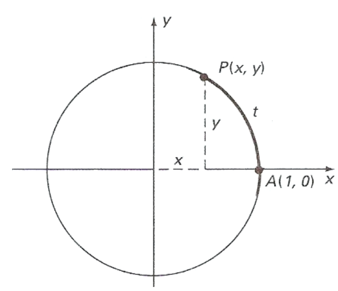


Fig. 3.6 Círculo unitario

La circunferencia de un círculo con radio *r* es *2πr*, de modo que la circunferencia de *C* es *2π*. Por lo tanto, si $t = \pi$, entonces el punto *P* está exactamente a la mitad del camino alrededor del círculo unitario iniciando en el punto *A*. Así, para cada número real t, podemos asociar un único punto *P(x, y)* en el círculo unitario. Esto permite construir las definiciones clave de las funciones seno y coseno.

Sea ***t*** un número real que determina el punto ***P(x, y)*** como se explicó anteriormente. Entonces:

$$\operatorname{sen} t = y \quad \text{y} \quad \cos t = x$$

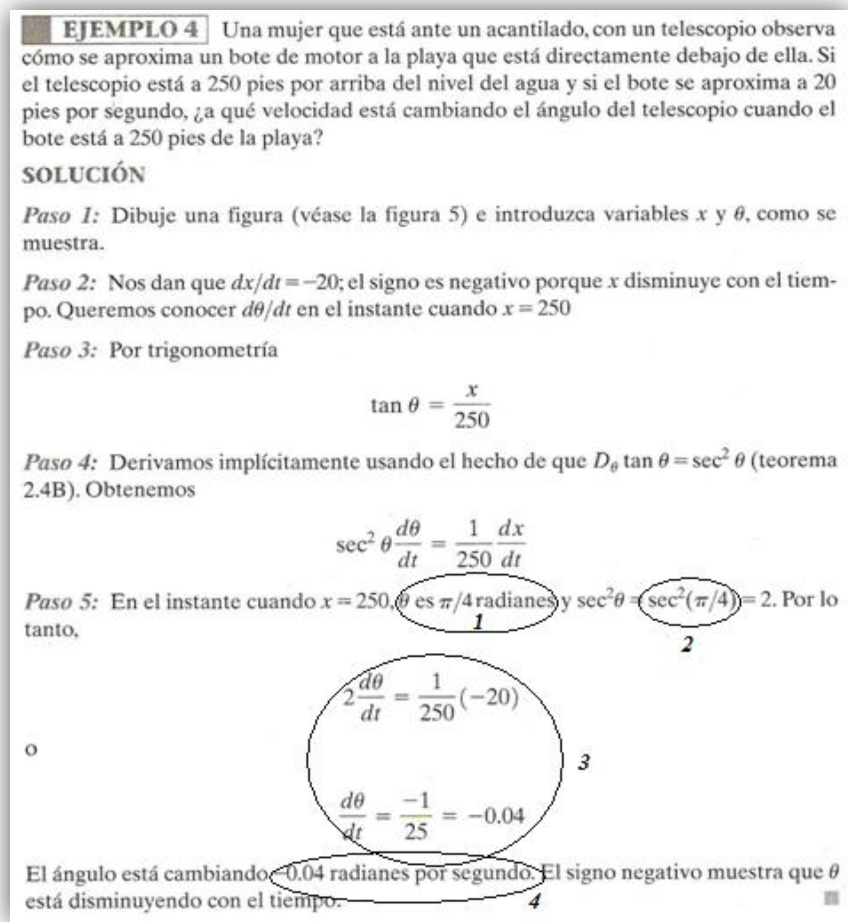
En el apartado 2.8, *"Razones de cambio relacionadas",* se deja ver, el procedimiento sistemático para la resolución de problemas con tasas de cambio relacionadas, en base a un ejemplo donde si bien no queda claro el criterio empleado en el tránsito del radián a número real y viceversa (radián ↔ real), es posible hacer las siguientes observaciones:

1. Aunque en un apartado previo se indicó que cuando el ángulo esté dado en radianes no se debe de indicar esta unidad en el ejemplo no se cumple con la indicación.

2. En este punto sí se cumple con la indicación, será por qué el ángulo se encuentra como argumento de una FT.

3. No se hace ningún análisis de las dimensiones implicadas en el ejemplo.

4. Se da una explicación del significado del signo negativo, pero no se hace evidente cómo se obtuvieron las unidades de la velocidad de cambio del ángulo, los radianes por segundo.



EJEMPLO 4 Una mujer que está ante un acantilado, con un telescopio observa cómo se aproxima un bote de motor a la playa que está directamente debajo de ella. Si el telescopio está a 250 pies por arriba del nivel del agua y si el bote se aproxima a 20 pies por segundo, ¿a qué velocidad está cambiando el ángulo del telescopio cuando el bote está a 250 pies de la playa?

SOLUCIÓN

Paso 1: Dibuje una figura (véase la figura 5) e introduzca variables x y θ, como se muestra.

Paso 2: Nos dan que $dx/dt = -20$; el signo es negativo porque x disminuye con el tiempo. Queremos conocer $d\theta/dt$ en el instante cuando $x = 250$

Paso 3: Por trigonometría

$$\tan\theta = \frac{x}{250}$$

Paso 4: Derivamos implícitamente usando el hecho de que $D_\theta \tan\theta = \sec^2\theta$ (teorema 2.4B). Obtenemos

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}\frac{dx}{dt}$$

Paso 5: En el instante cuando $x = 250$, θ es $\pi/4$ radianes y $\sec^2\theta = \sec^2(\pi/4) = 2$. Por lo tanto,

1 2

$$2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}(-20)$$

o

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{25} = -0.04$$

3

El ángulo está cambiando -0.04 radianes por segundo. El signo negativo muestra que θ está disminuyendo con el tiempo.

4

3. Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*, México. Iberoamérica.

En la sección 8.1, del capítulo *"funciones trascendentes",* se lleva a cabo un repaso de las funciones trigonométricas con el propósito de que los estudiantes que necesiten recordar estos temas se apoyen de este apartado, antes de adentrarse en temas que prolongan y hacen uso de tales conceptos trigonométricos, en contextos como es el cálculo de derivadas e integrales de funciones trigonométricas.

Es importante destacar que en este texto se hace explícito que **hay dos métodos para definir las FT:** un método clásico en el cual se emplea el triángulo rectángulo, siendo ***"conveniente"*** la utilización de las unidades del ángulo en grados del sistema sexagesimal; o mediante un desarrollo moderno, donde interviene "una circunferencia unitaria" utilizando como unidad angular el radián, **el cual debe ser considerado como un número real**. De esta forma se expone, la conveniencia de la transición de *grados → radianes* se da por la razón de que la medida en grados es conveniente cuando los ángulos son utilizados en actividades aplicadas como la agrimensura, la navegación y el diseño de equipo; pero en aplicaciones donde se requiere del cálculo se acostumbra utilizar los radianes.

Por lo que se establece la siguiente relación con el fin de poder transitar entre grados y radianes.

$$180° = \pi\, rad, \quad 1° = \frac{\pi}{180} = rad, \quad 1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)$$

El siguiente teorema es una consecuencia de las fórmulas anteriores.

i. Para convertir un valor en radianes a uno en grados hay que multiplicar por 180/π.
ii. Para convertir un valor en grados a uno en radianes hay que multiplicar por π/180.

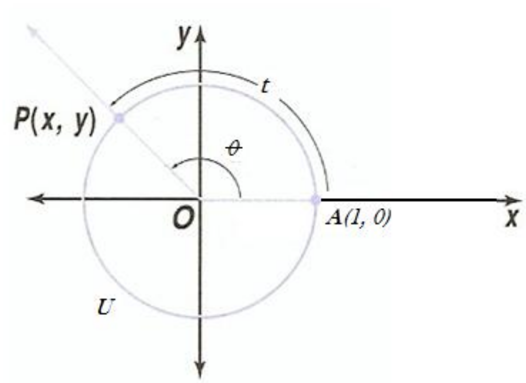
La explicación que obtenemos de este texto en cuanto a la transición *radianes → reales,* es del tipo:

> *"Cuando se considera un ángulo expresado en radianes, no se indicará esta unidad. Así, si un ángulo tiene una medida en radianes igual a 5, se escribe $\theta = 5$ en vez de $\theta = 5$ rad. Esto no debe causar confusión respecto a las unidades usadas para expresar un ángulo, pues si θ tiene un valor en grados igual a 5, se escribe $\theta = 5°$ y no $\theta = 5$."*

Y la fundamentación de tal transición es porque:

La medida en radianes de un ángulo se puede obtener a partir de una circunferencia con *cualquier* radio. En lo que sigue, la expresión **ángulo central** de una circunferencia se refiere a un ángulo cuyo vértice está en el centro de esta curva. Sea θ un ángulo central de una circunferencia de radio r que determina un arco en la circunferencia cuya longitud es s, donde $0 \leq s < 2\pi r$. Para calcular la medida o valor en radianes de θ, se coloca θ en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y se sobrepone una circunferencia unitaria U, como se muestra en la figura. Si θ intercepta un arco de longitud t en U, entonces, por definición, se puede escribir $\theta = t$. De la geometría plana, la razón de los arcos en la figura es igual a la razón de los radios correspondientes, es decir,

$\theta = t$ radianes



$$\frac{t}{s} = \frac{1}{r} \quad o\ bien \quad t = \frac{s}{r}$$

Sustituyendo t por θ se obtiene el siguiente teorema.

Si un ángulo central θ de una circunferencia de radio r intercepta un arco de longitud s, entonces la medida en radianes de θ es:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

La formula $\theta = \frac{s}{r}$ para la medida en radianes de un ángulo es independiente del tamaño de la circunferencia. Por ejemplo, si el radio de tal curva es r = 4 cm y un ángulo central θ, abarca un arco de 8 cm de longitud, entonces la medida en radianes de θ es de:

$$\theta = \frac{8\ cm}{4\ cm} = 2$$

Si el radio de la circunferencia es de 5 km y la longitud del arco es de 10 km, entonces:

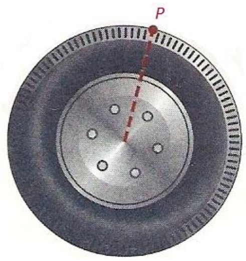
$$\theta = \frac{10\ km}{5\ km} = 2$$

Estos cálculos indican que **la medida en radianes de un ángulo no tiene dimensiones y se puede considerar como un número real**. Es por esto que se usa la notación $\theta = t$ de preferencia a $\theta = t$ radianes.

Se dice que en el ángulo expresado en radianes no se deben indicar las unidades, pero el mismo autor, Swokowski, en su libro de *"Trigonometría"*[3] dice que cuando se empleen fórmulas, donde queda explícita la unidad angular, se debe recordar emplear al radián y hacer evidente su uso, por ejemplo:

[3] Swokowski, E. (2001). Trigonometría, México. Thomson Learning.

Supón que una máquina contiene una rueda de 3 ft de diámetro, que gira con una rapidez de 16000 rpm. Determina la rapidez angular de la rueda.



Denota con *O* el centro de la rueda y sea *P* un punto en la circunferencia. Dado que el número de revoluciones por minuto es 1600 y cada revolución genera un ángulo de 2π **radiane**s, el ángulo generado por el segmento de recta *OP* en un minuto medirá (1600)(2π **radianes**), es decir,

Rapidez angular = (1600)(2π) = 3200π **radianes** por minuto

Como se dijo anteriormente, se definen las FT en dos contextos matemáticos diferentes: un desarrollo moderno en donde interviene "una circunferencia unitaria" y el otro por medio de triángulos rectángulos. El enfoque de la circunferencia unitaria es el siguiente:

Sea *U* una circunferencia unitaria, es decir, una circunferencia con radio 1 y centro en el origen *O* de un sistema de coordenadas rectangulares. Entonces, *U* es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Dado cualquier número real *t*, denotamos por θ al ángulo (en la posición normal) cuya medida en radianes es *t*. la figura muestra un caso posible con $0 \leq \theta < 2\pi r$. En ella *P(t)* denota el punto de intercepción del lado final de θ con una circunferencia unitaria *U*. Usando la fórmula $s = r\theta$ con *r = 1*, se ve que el arco $\widehat{AP}$ que el ángulo θ de intercepta tiene longitud *s = t*. Entonces, *el número real t puede considerarse como la medida en radianes del ángulo θ o la longitud del arco* $\widehat{AP}$*de U.*

La discusión anterior indica cómo se puede asociar a cada número real *t* un punto único *P(t)* en U. El punto *P(t)* se llama **punto de circunferencia unitaria *U* que corresponde a *t*.** Las seis **funciones trigonométricas** se pueden definir a partir de las coordenadas *(x, y)* de *P(t)*. Estas funciones son el **seno**, el **coseno**, la **tangente**, la **cotangente**, la **secante** y la **cosecante** y se denotan por los símbolos **sen, cos, tan, cot, sec** y **csc,** respectivamente. Si *t* es un número real, la función seno asocia a *t* otro número real que se denota por *sen (t)*, o bien *sen t*.

Para tomar en cuenta las coordenadas rectangulares de *P(t)* se usa la notación P(x, y), es el punto de la circunferencia unitaria que corresponde a *t*. Esta notación se usa en la siguiente definición:

Si *t* es un número real y *P(x, y)* es el punto de una circunferencia unitaria *U* que corresponde a t, entonces

$$sen\, t = y \qquad csc\, t = \frac{1}{y} \;\; (para\; y \neq 0)$$

$$\cos t = x \qquad \tan t = \frac{1}{x} \;\; (para\; x \neq 0)$$

$$tan\, t = \frac{y}{x} \;\; (para\; x \neq 0 \qquad tan\, t = \frac{x}{y} \;\; (para\; y \neq 0)$$

Debido a que estas fórmulas están dadas en términos de las coordenadas de un punto sobre una circunferencia unitaria a veces se llaman **funciones circulares** de las funciones trigonométricas.

El dominio de las funciones seno y coseno es un ℝ, porque $sen\, t = x$ y $\cos\, \mathrm{t} = \mathrm{y}$ existe para todo número real.

4. Finney, R. (2000) *Cálculo de una variable*, México. Prince Hall.

Este libro, utilizado en la asignatura de Cálculo en el nivel superior, repasa en su primer capítulo, *"Prerrequisitos para el Cálculo",* los aspectos más importantes que se deben tener en cuenta para el aprendizaje del cálculo, entre los que se encuentra la FT. Es así que en este apartado se hacen notaciones interesantes que son de utilidad para la presente investigación como:

- Al graficar una FT en el plano coordenado por lo general denotamos la variable independiente (los radianes) como x en vez de θ.
- A partir de este momento, en este libro supondremos que todos los ángulos se miden en radianes, a menos que se establezca de manera explícita otro tipo de unidad como los grados. Al hablar del ángulo $\frac{\pi}{3}$ nos estamos refiriendo a radianes (que son 60°), no $\frac{\pi}{3}$ grados.
- Al trabajar con operaciones se debe mantener la calculadora en radianes.

En el capítulo 4, *"Aplicaciones de la derivada",* específicamente en la estrategia de solución para resolver problemas de razones de cambio, el texto muestra diversas confusiones en cuanto a los criterios para ir de radián a número real y viceversa (radián↔real). A continuación mostramos tal evidencia en los siguientes puntos:

1. En un apartado previo se indicó que cuando el ángulo esté dado en radianes no se debe de indicar esta unidad, *"…por lo general consideramos a los radianes **adimensionales** y no escribimos sus unidades."*

2. Por qué se indican los radianes cuando se encuentran relacionados con otra unidad de medida, como en este caso de las unidades de la velocidad de cambio del ángulo, *radianes/minuto*. Sí aplicáramos el criterio del punto anterior se tendría "¿?"/minuto.

3. Se escribe la palabra *radianes* para hacer énfasis en el sistema de medición empleado.

4. En un apartado se hace un análisis de las dimensiones implicadas en el ejemplo, en la cual se hace notar la conveniencia de considerar las unidades de *radianes/minuto* como *1/minuto*.

5. Con la consideración anterior se obtienen las unidades de la velocidad de ascenso del globo.

Ejemplo 2 UN GLOBO EN ASCENSO

Un globo de aire caliente sube en línea recta en un campo y sus movimientos son rastreados por un telémetro a 500 pies del punto de partida. En el momento en que el ángulo ~~de elevación~~ del telémetro es $\pi/4$, el ángulo está creciendo a razón de 0.14 radianes/minuto. ¿Qué tan rápido está subiendo el globo en ese momento? 2 1

Solución Responderemos la pregunta en seis pasos.

Paso 1:

Trace un dibujo y dé nombre a las variables y las constantes (Figura 4.47). Las variables del dibujo son 3

θ = el ángulo en radianes que el telémetro hace con el suelo,

y = la altura en pies del globo.

t representa el tiempo en minutos y suponemos que θ y y son funciones diferenciables de t.

La única constante en la figura es la distancia del telémetro al punto de partida (500 pies). No hay necesidad de darle un símbolo especial.

Paso 2:

Escriba la información numérica adicional. 1

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/min} \quad \text{cuando} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

2

Paso 3:

Escriba lo que debemos hallar. Queremos dy/dt cuando $\theta = \pi/4$.

Paso 4:

Escriba una ecuación que relacione las variables y y θ.

$$\frac{y}{500} = \tan\theta \quad \text{o} \quad y = 500 \tan\theta$$

Paso 5:

Derive con respecto de t usando la regla de la cadena El resultado nos indica la relación de dy/dt (que queremos conocer) con $d\theta/dt$ (que ya conocemos).

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

Paso 6: 4

Evalúe con $\theta = \pi/4$ y $d\theta/dt = 0.14$ para encontrar dy/dt.

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sqrt{2})^2(0.14) = 140 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

5

Interpretación

En el momento de la pregunta, el globo sube a razón de 140 pies/minuto.

$$\frac{dy}{dt} = 500 \times \sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt} = 140$$

Análisis de dimensiones

$$pies \times \frac{pies^2}{pies^2} \times \frac{1}{min} = \frac{pies}{min}$$

Fig. 3.7 Análisis de dimensiones

5. Stewart, J. (1999), *Cálculo conceptos y contextos.* México. Internacional Thomson Editores.

Este libro es utilizado en la asignatura de Cálculo en el NS, cuenta con un apéndice C en el cual se hace una revisión de los aspectos más importantes de la trigonometría y de las FT para estar al tanto del aprendizaje del cálculo. Destacamos las siguientes observaciones por ser de interés para la investigación:

La explicación que obtenemos de este texto en cuanto a la transición *grados ↔ radianes*, es la equivalencia que permite la traslación entre ambos sistemas.

> *Los ángulos pueden medirse en grados o en radianes (abreviado con rad). El ángulo dado por una revolución completa contiene 360°, que es igual a 2π rad. Por lo tanto*

$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$

En cuanto a la justificación que obtenemos por parte del texto sobre la transición *radianes→reales,* es del tipo:

> *“En cálculo, la* **convención es usar la medida radián** *(excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando utilizamos la función $f(x) = sen\, x$, se entiende que $sen\, x$ significa el seno del ángulo cuya medida en* **radianes es x**. *De este modo, las gráficas de las funciones seno y coseno son como las que se muestran en la figura”.*

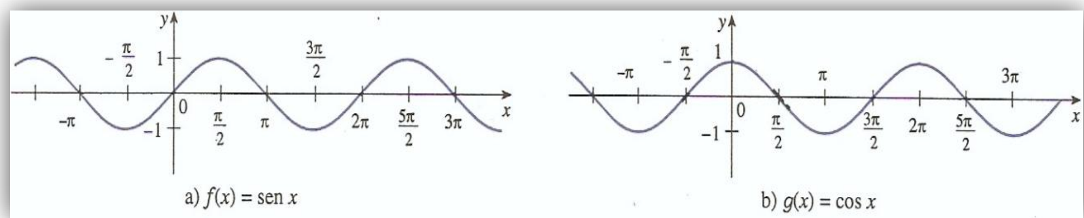


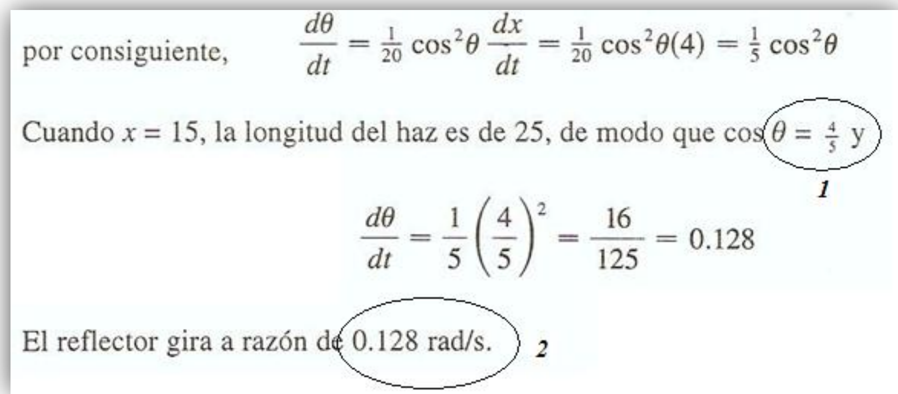
Fig. 3.8 Grafica de la función seno y coseno del ángulo

En otro apartado se indica:

> *“Si* $\boldsymbol{\theta}$ *es un número, la convención es que sen θ significa el seno del* **ángulo cuya medida en radianes es $\boldsymbol{\theta}$**. *Por ejemplo la expresión sen 3 implica que estamos tratando con un ángulo de* **3 rad**. *Al buscar en la calculadora una aproximación para este número debemos recordar poner la calculadora en* **modo de radianes**. *Si queremos conocer el seno del ángulo de 3°, escribimos sen 3°, y debemos poner la calculadora en modo de grados.”*

Aunque de manera implícita, se definen las FT bajo las siguientes circunstancias: la primera, como razones de longitud de los lados de un triángulo rectángulo, pero debido a que tal definición no se aplica a ángulos obtusos o negativos, se vuelve indispensable una segunda definición en la cual se considera ubicar al ángulo $\boldsymbol{\theta}$ en el plano coordenado, se establece que ***P(x, y)*** sea cualquier punto sobre el lado terminal de $\boldsymbol{\theta}$ y se determina que ***r*** sea la distancia que hay del origen al punto ***P***.

En el apartado "A*plicaciones de la derivada*", específicamente en la estrategia de solución para resolver problemas de razones de cambio, el texto no muestra criterios claros para ir de radián a número real y viceversa *(radian ↔ real),* esto queda a la vista en los siguientes puntos:



por consiguiente, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$

Cuando $x = 15$, la longitud del haz es de 25, de modo que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

1

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El reflector gira a razón de 0.128 rad/s. *2*

Fig. 3.9 El radián en contexto de otras ciencias.

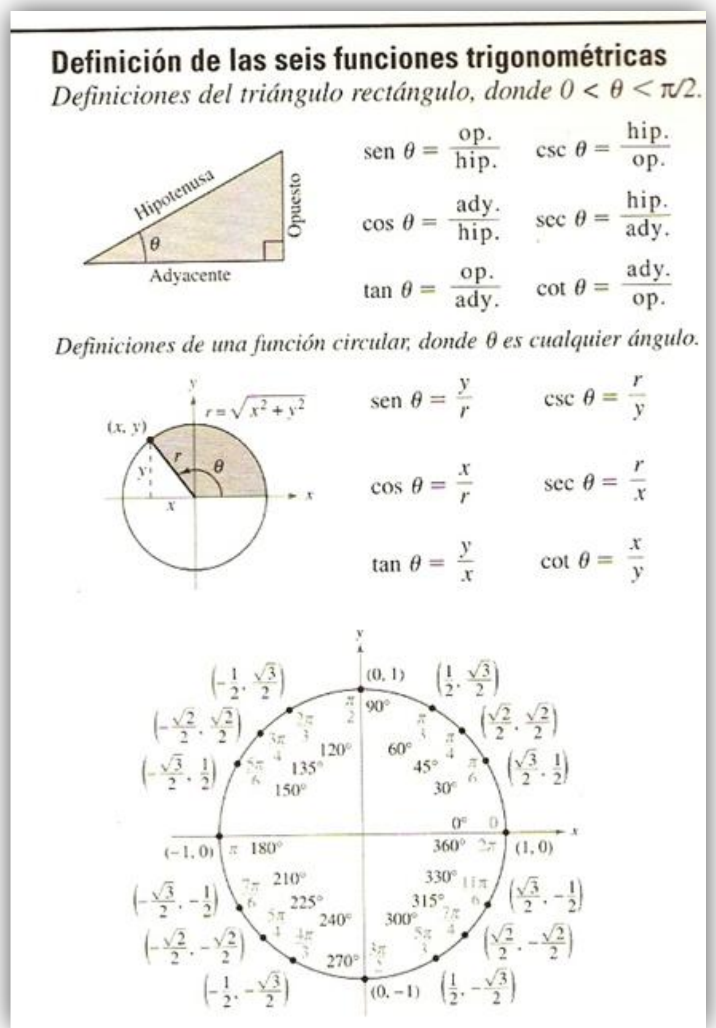
1. En un apartado previo se mostró que cuando el ángulo esté dado en radianes no se debe de indicar esta unidad, *"Si **θ** es un número, la convención es que sen θ significa el seno del **ángulo cuya medida en radianes es θ**."* Se cumple con la indicación en el ejemplo planteado.

2. Por qué se expresan los radianes cuando se encuentran relacionados con otra unidad de medida, como en este caso de las unidades de velocidad de cambio del giro, *radianes/segundo*. Sí aplicáramos el criterio del punto anterior se tendría *"¿?"/segundo, 1/segundo o segundo^{-1}*

6. Larson, R. (2005), *Cálculo diferencial e integral.* México. Mc Graw Hill.

Este libro cuenta con un capítulo de preparación que antecede a los capítulos propios del cálculo, aunque se cuenta con un apartado dedicado al tema de funciones y sus gráficas, no se hace ningún comentario explícito sobre las FT ni de las unidades angulares. No obstante, en el reverso de la contraportada se presenta un formulario de trigonometría en que se define a las FT de dos maneras: haciendo uso del triángulo rectángulo donde $\boldsymbol{0<\theta<\frac{\pi}{2}}$ y mediante el uso del círculo unitario, en el que ***θ* es cualquier ángulo**. Del mismo modo se muestra una circunferencia que indica las equivalencias entre los dos sistemas de unidades e implícitamente marca la transición ***grados→radianes↔reales.***

En el capítulo 2, *"Derivación",* específicamente en el tema de resolución de problemas de razones de cambio, no se encuentran los criterios precisos para ir de radián a número real y viceversa (radián ↔ real), muy similar a lo encontrado en textos analizados con anterioridad.



Definición de las seis funciones trigonométricas

Definiciones del triángulo rectángulo, donde $0 < \theta < \pi/2$.

$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{op.}}{\text{hip.}}$ $\csc\theta = \frac{\text{hip.}}{\text{op.}}$

$\cos\theta = \frac{\text{ady.}}{\text{hip.}}$ $\sec\theta = \frac{\text{hip.}}{\text{ady.}}$

$\tan\theta = \frac{\text{op.}}{\text{ady.}}$ $\cot\theta = \frac{\text{ady.}}{\text{op.}}$

Definiciones de una función circular, donde θ es cualquier ángulo.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r}$ $\csc\theta = \frac{r}{y}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$

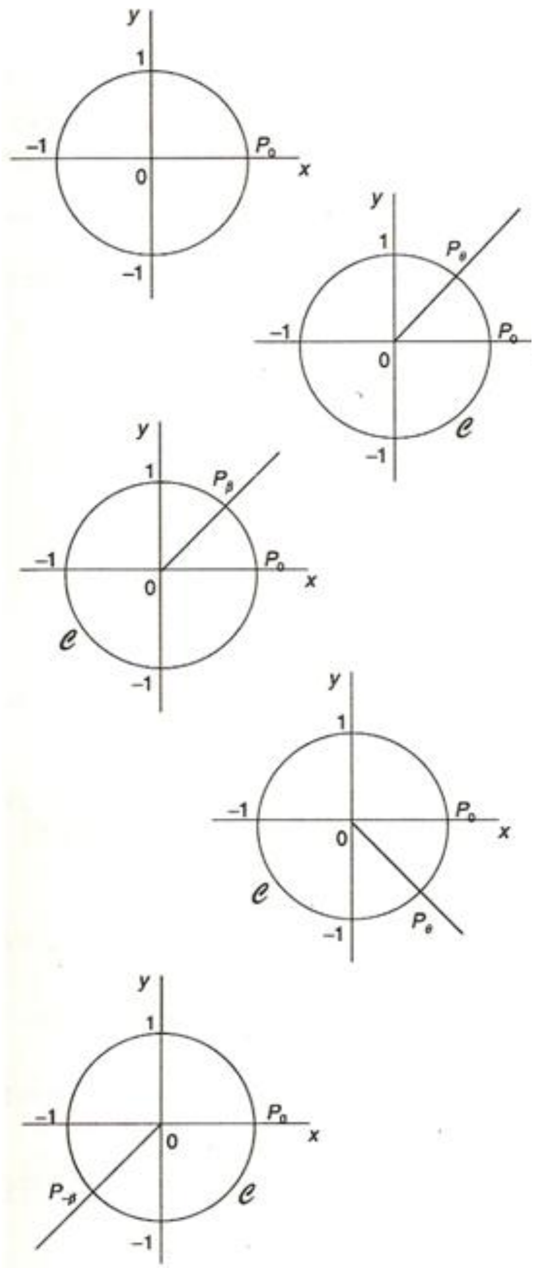
7. Benítez, R. (2006), *Cálculo diferencial para ciencias básicas e ingeniería.* México. Trillas.

Dicha obra es destinada para utilizarse en un primer curso de cálculo diferencial para nivel superior, en las aéreas de ciencias básicas e ingeniería; asimismo, para adaptarse sin dificultad a diversos planes de estudio y enfoques. Esta obra cuenta con todo un capítulo dedicado al estudio de funciones, en el cual se ubica el estudio de las FT, incluyendo el análisis de diversos conceptos matemáticos; los cuales son de interés para la presente investigación, de ellos recuperamos lo siguiente: “*En cálculo los ángulos se miden en radianes.”*

Tal afirmación no es nueva, sino que es similar a la encontrada en diversos libros de cálculo, pero en este texto en particular, se halla un argumento razonado del por qué de las unidades angulares en radianes y de la transición del radián a un número real *(radián→real).* Para definir radián y medir con esta unidad a los ángulos se usa una función especial, la cual se describe enseguida:

Considérese el círculo unitario $\mathcal{C}$ con centro en el origen en el plano-*xy*.

De hecho $\mathcal{C} = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$. Además, tómese en cuenta la función P: $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ definida como sigue:



($\boldsymbol{\beta}$ es el residuo que resulta al dividir $\boldsymbol{\theta}$ entre $\boldsymbol{2\pi}$)

1. Si $\theta = 0$, entonces $P_\theta = P(\theta) = P_0 = (1, 0)$

2. Para $\theta > 0$, hay dos casos:
   - Si $0 < \theta \leq 2\pi$, entonces $P(\theta) = P_\theta$ en donde P_θ es el punto sobre $\mathcal{C}$ que se obtiene al girar respecto al origen y en el sentido contrario de las manecillas del reloj el punto $P_0 = (1, 0)$ de modo que arc$P_0 P_\theta = \theta$
   - Si $2\pi < \theta$, entonces existen únicos números reales no negativos α y β tales que

   $\frac{\theta}{2\pi} = \alpha + \frac{\beta}{2\pi}$ o bien $\theta = 2\alpha\pi + \beta$

   Con $0 \leq \beta \leq 2\pi$. En cuyo caso

   $$P_\theta = P(\theta) = P(\beta) = P_\beta$$

3. Para $\theta < 0$, hay también dos casos:

   - Si $-2\pi \leq \theta < 0$, entonces $P(\theta) = P_\theta$ en donde P_θ es el punto sobre $\mathcal{C}$ que se obtiene al girar respecto al origen y en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj el punto $P_0 = (1, 0)$ de modo que arc$P_0 P_\theta = |\theta|$
   - Si $-2\pi < \theta$, entonces $-\theta > 2\pi$ por lo que existen únicos números reales no negativos α y β tales que

   $\frac{\theta}{-2\pi} = \frac{-\theta}{2\pi} = \alpha + \frac{\beta}{2\pi}$ o bien $\theta = -2\alpha\pi - \beta$

   Con $0 \leq \beta \leq 2\pi$. En cuto caso

   $$P_\theta = P(\theta) = P(-\beta) = P_{-\beta}$$

A esta función especial P: $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ que asocia a cada número real un punto sobre $\mathcal{C}$ se llama ***función enrolladora o de dar vueltas.***

Para medir ángulos con esta función, se consideran ángulos dirigidos (positivos o no positivos) en posición normal.

Considérese la función enrolladora P: $\mathbb{R} \to \mathcal{C}$

i. Un radián es la longitud del arco $P_0 P_\theta$ subtendido por el ángulo $\angle P_0 O P_\theta$ en donde $\theta = 1, P_0 = P(0)$ y $P_\theta = P(\theta)$.

ii. La medida en radianes de un ángulo no negativo AOB es un número real $\theta \geq 0$, lo cual se escribe

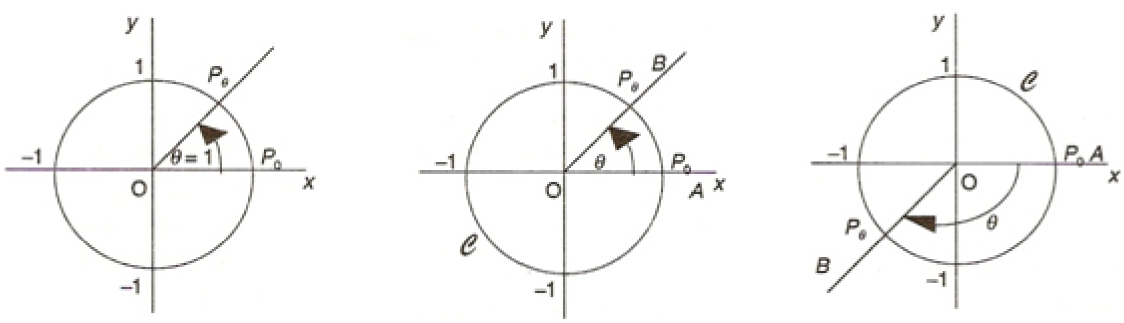
$$\angle AOB = \theta\, radianes,\ \angle AOB = \theta\, rad \text{ o brevemente } \angle AOB = \theta$$

siempre que $P_\theta = P(\theta)$ sea la intercepción del lado final de dicho ángulo con el circulo unitario $\mathcal{C}$.

iii. La medida en radianes de un ángulo negativo AOB es un número real $\theta < 0$, la cual se escribe

$$\angle AOB = \theta\, radianes,\ \angle AOB = \theta\, rad \text{ o brevemente } \angle AOB = \theta$$

siempre que $P_\theta = P(\theta)$ sea la intercepción del lado final de dicho ángulo con el circulo unitario $\mathcal{C}$.



i ii iii

La transición de grados a radianes *(grados ↔ radián)* **se expone como una necesidad de tránsito entre la geometría plana**, donde la medida del ángulo central (que tiene su vértice en el centro de la circunferencia) es independiente del radio de la circunferencia; **y el cálculo**, donde la medida del ángulo central es el radián que depende del radio de la circunferencia.

A partir de la función enrolladora P: $\mathbb{R} \to \mathcal{C}$ se definen las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante como: sen, cos, tan, cot, sec y csc. De la forma siguiente.

- Si θ es un número real y $P(\theta) = (x_\theta, y_\theta)$ es la imagen de θ bajo la función enrolladora P: $\mathbb{R} \to \mathcal{C}$, entonces:

$$sen\ \theta = y_\theta \qquad \tan\theta = \frac{y_\theta}{x_\theta},\ (x_\theta \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{1}{x_\theta},\ (x_\theta \neq 0)$$

$$cos\ \theta = x_\theta \qquad \cot\theta = \frac{x_\theta}{y_\theta},\ (y_\theta \neq 0) \qquad \csc\theta = \frac{1}{y_\theta},\ (y_\theta \neq 0)$$

- Si $P = (x, y)$ es un punto del plano-*xy* en el lado final de un ángulo que mide θ rad; entonces los valores de las funciones en θ son:

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{r} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, \qquad \csc\theta = \frac{r}{y},$$

en donde *r* es la distancia de *P* al origen *O*, o sea $r = PO = \sqrt{x^2 + y^2}$

Cabe subrayar la siguiente nota: "*en el caso de ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas se interpretan como razones entre los lados del triángulo rectángulo que determina las coordenadas de un punto en el lado final del ángulo…*"

Otro aspecto que merece nuestra atención del texto y que lo diferencia, es el hecho de que al abordar el tema del lugar geométrico de las FT, se gradúa al eje de las abscisas tomando como unidad de medida los números enteros-reales y no se graba de la forma $k\pi$[4], como múltiplo o submúltiplo de π, siendo esto último lo más usual de hallar en textos afines al tema.

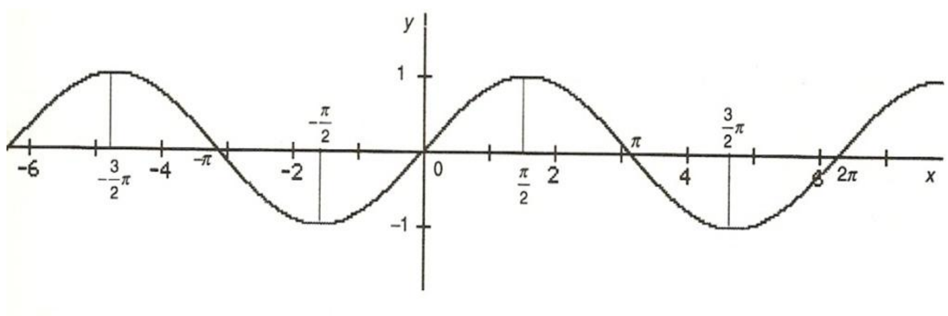
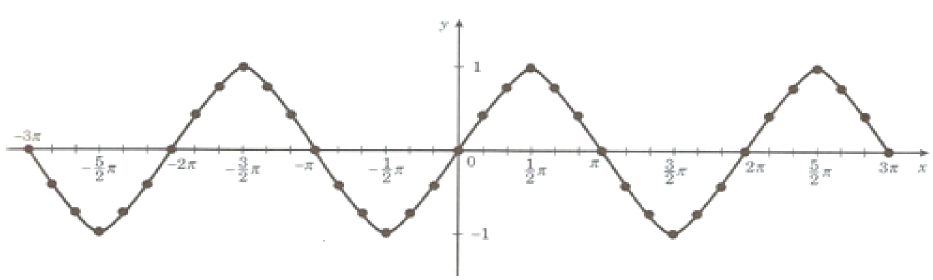


Fig. 3.10 El radián como unidad en números enteros-reales.



[4]Los valores de k son de la forma $\frac{p}{q}$, con p, q enteros y q diferente de cero. Por ejemplo los números π, 2π,2π/3, -π/2, -5π/3 etc.

Fig. 3.11 El radián como unidad en números múltiplos y submúltiplos de π.

8. Cruz, M. (2008). *Temas de matemáticas para bachillerato*: *Funciones circulares*. México. Universidad Nacional Autónoma de México.

En dicho libro son tratados los temas de trigonometría desde un punto de vista más analítico, aunque está planteado para apoyar al NMS, sus contenidos pueden ser de interés tanto para otros niveles de educación como para el público en general.

En dicho texto identificamos cuestionamientos a ciertos paradigmas que hay en la docencia de la matemática, así mismo los conceptos trigonométricos no son estudiados como propiedades de los triángulos sino que su exposición se basa en las propiedades de simetría de la circunferencia. A continuación se presentan algunos señalamientos que son de interés para la investigación:

- El metro, invención y propiedad de los franceses, es una barra recta y rígida hecha de una aleación especial. Todas las longitudes físicas, estrictamente, tienen que medirse con reglas basadas en el metro o cualquier otra unidad de longitud. **No se vale usar "metros" que pueden curvarse**; no importa que en la práctica existan los llamados "flexómetros", ya que desde el punto de vista matemático no pueden utilizarse para medir longitudes de curvas.

- Desde la Primaria nos dicen que el número π tiene un valor aproximado de 3.1416 y que se interpreta como el número de veces que cabe el diámetro D en la longitud L de la circunferencia correspondiente, es decir, $\pi = \frac{L}{D}$. Tal definición y método es adecuada al contexto de educación básica, pero para en el NMS y NS se deben de adoptar otras metodologías que respondan a las necesidades de argumentos como **por qué π es un número irracional**. El método apropiado para obtener el valor de π y comprender su irracionalidad es la inscripción de una figura geométrica como el hexágono o el cuadrado en una circunferencia unitaria (tomamos la longitud del radio como unidad para medir otras longitudes), una primera aproximación al valor de la longitud de la circunferencia será el perímetro de la figura inscrita, al duplicar el número de lados es evidente que el perímetro que también se puede medir con regla, será una mejor aproximación a la longitud de la circunferencia. Esta es la única manera de "rectificar una curva", aproximando su longitud por la suma de longitudes de cuerdas cada vez pequeñas; se trata del proceso de evaluar un límite.

- A todos nos resulta familiar medir los ángulos en "grados" que resulta de dividir arbitrariamente una circunferencia de cualquier radio en 360 partes iguales[5]. Esta familiaridad se fundamenta en que los "juegos de geometría", que nos exigen comprar en la Primaria, incluyen el "transportador"; que por regla general es un semicírculo de plástico, madera o metal cuyo borde circular está marcado con 180

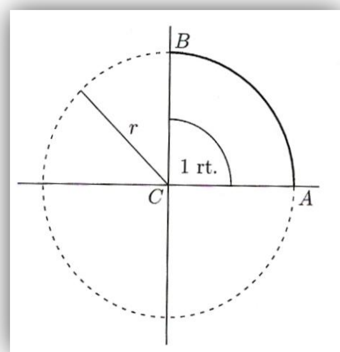
[5] En Francia y en Estados Unidos se usa una división de la circunferencia en 400 grados centesimales, por lo que existen en esos países transportadores en los que se observa cada cuarto de círculo o cuadrante una división de 100 grados centesimales.

divisiones, de manera que sirve para medir ángulos comprendidos entre 0° y 180° (aunque también se fabrican transportadores de círculo completo dividido en 360°).

- Para quitar la arbitrariedad de dividir una circunferencia en el número de partes iguales 360, 400 o cualquier otra que a uno se la ocurra, hay otra manera de medir ángulos basada en el número π. Este número no es arbitrario, la longitud D del diámetro y la longitud L correspondiente de cada circunferencia están ligadas por el número π,

$$\frac{L}{D} = \pi \quad \text{ó} \quad L = \pi D \quad \text{ó} \quad L = 2\pi r$$

A partir de las observaciones anteriores el autor realiza el siguiente análisis para argumentar el uso del radián como única medida angular y la transición del ***radián → real:***



1 rt.[6] = $\frac{\pi}{2}$ rad.

1. El ángulo recto es el único que subtiende un arco igual a la cuarta de cualquier circunferencia.
2. El único arco en el que el radio cabe $\frac{\pi}{2}$ veces es aquel cuya longitud es la cuarta parte de la circunferencia (arco AB).

Conclusión: el ángulo recto es el único que subtiende un arco de circunferencia que en el radio cabe $\frac{\pi}{2}$ veces.

La conclusión también se puede interpretar de la manera siguiente: si se toma como unidad de longitud el radio r de la circunferencia, el arco de $\frac{1}{4}$ de circunferencia subtendido por un ángulo recto tiene una longitud de $\frac{\pi}{2}$ "unidades iguales al radio" y como la frase "unidades iguales al radio" resulta muy extensa, se dice que la longitud del arco de $\frac{1}{4}$ de circunferencia es de:

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \quad \text{"}\boldsymbol{radianes}\text{"}$$

La medida del ángulo recto por definición es: *un ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes.*

La siguiente figura muestra una cinta métrica en la que se ha tomado como unidad de medida la longitud del radio de una circunferencia. Se hace coincidir el punto A de la circunferencia con el cero de la cinta métrica y se hace rodar sin que resbale. Inicialmente el punto A se encuentra en la posición más baja coincidiendo con el cero. Al término del primer cuarto de vuelta, el punto B es el que ocupa lo posición más baja y coincide con el número $\frac{\pi}{2}$ de la cinta.

[6] rt. es la abreviatura de ángulo recto, en este texto se utiliza el ángulo recto como referencia al igual que Euclides lo utilizo en sus postulados. Por ejemplo, en el teorema o proposición 32 del libro I de los "Elementos", dice: "*En cualquier triángulo, si uno de sus lados se prolonga, el ángulo exterior es igual a los dos ángulos interiores opuestos, y los tres ángulos interiores son iguales a dos ángulos rectos"*

Este hecho no es otra cosa más que la rectificación del arco *AB* correspondiente a la cuarta parte de la circunferencia: la longitud de este arco y la longitud entre el cero y el número $\frac{\pi}{2}$ de la recta son iguales, y como la cuarta parte de la circunferencia corresponde a un ángulo girado igual a un recto, por definición decimos que su medida es igual a la longitud del arco AB, es decir, 1 rt. = $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Al final del siguiente cuarto de vuelta, el punto *D* es el que ocupa la posición más baja y coincide con el número π de la cinta. A partir del inicio, la circunferencia ha girado media vuelta y el número π es la longitud del arco *ABC*, es decir, la longitud de media circunferencia y como el ángulo girado es igual a 2 rt., decimos que 2 rt. = π radianes.

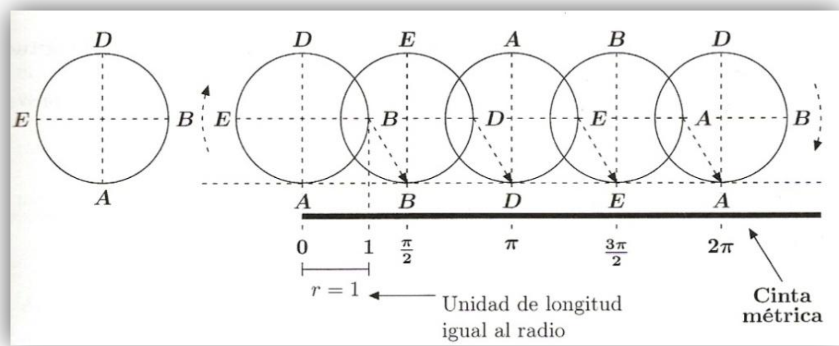
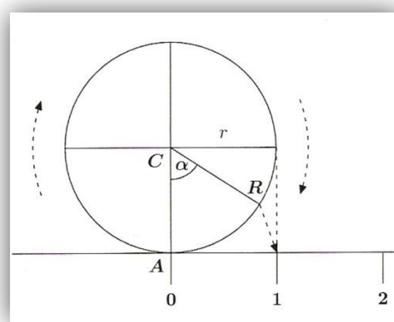


Fig. 3.12 Circunferencia unitaria rodando sobre la recta de los números reales.

Después de girar $\frac{3}{4}$ de vuelta, correspondiente a un ángulo de 3 rt., el punto *E* coincide con el número $\frac{3\pi}{2}$, de manera que 3 rt. = $\frac{3\pi}{2}$ radianes. Por último, al término de una vuelta completa el punto *A* vuelve a ocupar la posición más baja y coincide 2π de la cinta métrica. Por lo que 4 rt. = 2π radianes.

En base a lo señalado en el texto, se establece una proporcionalidad directa definida entre múltiplos de un ángulo recto y múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, como que $\frac{1}{2}$ rt. = $\frac{\pi}{4}$ radianes, $\frac{1}{3}$ rt. = $\frac{\pi}{6}$ radianes, $\frac{2}{3}$ rt. = $\frac{\pi}{3}$ radianes, $\frac{1}{5}$ rt. = $\frac{\pi}{10}$ radianes, etc. Es en este contexto en se define qué es un ángulo de un radián.



Si se hace coincidir un punto *A* de una circunferencia con la marca de cero, de una cinta métrica graduada en unidades iguales al radio, y se hace rodar, habrá un punto *R* que caiga sobre la marca 1 de la cinta. El arco *AR* correspondiente tendrá una longitud igual al radio y el ángulo *ACR*= α **es de un radián**.

Un radián, es un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia, **que subtiende un arco cuya longitud es igual a la de radio**.

Fig. 3.13 El ángulo α es de 1 radián

En general, si un ángulo θ con vértice en el centro de una circunferencia de radio r subtiende un arco de longitud ℓ, para expresarlo en radianes, se debe dividir ℓ entre el radio r.

$$\frac{l}{r} = \theta \qquad \text{(en radianes),}$$

de esta expresión se deriva:

$$l = r\theta \quad (arco = radio \times ángulo).$$

Por medio de la resolución del siguiente ejercicio se expone el por qué de la transición del ***radián → real.***

"La distancia de la Tierra al Sol es de 1500 millones de kilómetros ¿Qué tanta distancia recorre la Tierra, aproximadamente, en su órbita alrededor del sol en un lapso de un mes?"

Aunque sabemos que la órbita de la Tierra es elíptica, su excentricidad es pequeña y la podemos considerar como una circunferencia de radio igual a 1500 millones de kilómetros.

$$r = 1.5 \times 10^9 \ km.$$

También sabemos que la Tierra realiza una vuelta completa en 1 año = 12 meses. Otra aproximación que se tiene que hacer para resolver el problema es la de considerar que el movimiento es uniforme, es decir, que la Tierra recorre arcos iguales en tiempos iguales. Si en 12 meses describe un ángulo igual a 4 rt. en un mes describirá un ángulo de $\frac{1}{12}$ de 4 rt., o sea $\frac{1}{3}$ rt.

Y puesto que $\quad 1\, rt. = \frac{\pi}{2}\, rad, \ \frac{1}{3}\, rt. \ = \frac{\pi}{6}\, rad.$

En conclusión, considerando un movimiento circular uniforme, en 1 mes la tierra recorre T_1T_2, correspondiente a un ángulo $\theta = \frac{\pi}{6} rad.$

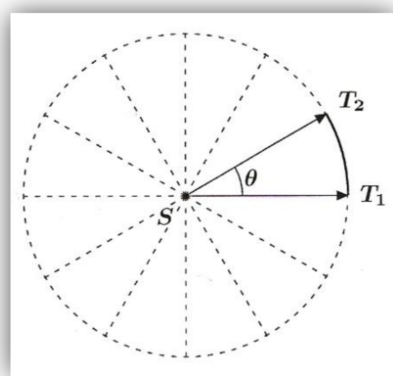
Entonces el arco T_1T_2, lo podemos calcular con la formula.

$$\boldsymbol{l = r\theta \quad (arco = radio \times ángulo)}$$

$$\boldsymbol{Arco}\ T_1T_2 = (1.5 \times 10^9) \times \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 785.4 \ \times 10^6\ km$$

$$= 785.4\ millones\ de\ kilómetros$$



¿Cuál es la longitud del arco T_1T_2 que recorre la Tierra en 1 mes?

En el texto se destaca que:

"Debe notarse que la multiplicación del radio por el ángulo no cambia las unidades del radio, es decir, el resultado de la longitud del arco está dado por km y no $[km \times rad]$*. Tanto desde el punto de vista de la física como de las matemáticas,* ***el radian no es una unidad****,* $\frac{\pi}{6}$ *es* ***un número real*** *sin unidades. Por eso hicimos la aclaración, que en este caso será:* $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6} rad}$***. es una forma abreviada de decir que el radio r cabe*** $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ ***"veces" en el arco*** $\boldsymbol{T_1T_2}$***. Y "veces" no es ninguna unidad física."***

En este contexto el autor le da sentido a la unidad angular expresada en radián.

"Y como $\frac{\pi}{6} = 0.5236$*, significa que el arco* T_1T_2 *que se recorre en un mes, sólo cabe la mitad, "y un poquito más" del radio de la órbita de la tierra."*

Así mismo se expone la transición ***grados*** ↔ ***radián***, en el siguiente escenario:

"Es tan arraigada la costumbre de medir ángulos en grados que da la impresión de ser la única manera "natural" para hacerlo, que si nos dicen 90° inmediatamente se nos viene a la mente el ángulo recto y cuesta trabajo hacer una asociación inmediata de este ángulo con el número $\frac{\pi}{2}$ *por falta de costumbre."*

Es conveniente, de acuerdo a lo antes dicho, tener como justificación la equivalencia entre grados y radianes **hasta que la costumbre vuelva "natural" visualizar la medida de un ángulo en radianes**. En este contexto se recomienda que para la enseñanza secundaria y para el bachillerato se fabricaran, además de los divididos en grados, transportadores graduados en unidades de ángulo recto y en radianes (o fabricarlos uno mismo como tarea). Así mismo, las escuadras del juego de geometría ofrecen una buena oportunidad de recordar la relación entre el ángulo recto, el radián y el grado.

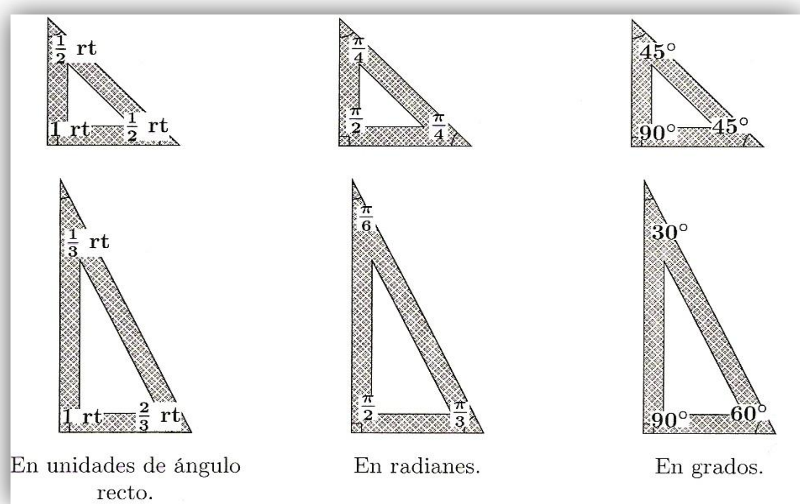


Fig. 3.14 Los ángulos de las escuadras en grados y radianes

Cabe destacar que es en este texto donde encontramos mayor presencia, desde un punto de vista más analítico, un concepto que es menos evidente en los textos analizados con anterioridad; la función circular, función especial Φ: ℝ→𝒞 que asocia a cada número real un punto sobre 𝒞 (círculo unitario) llamada ***función enrolladora o de dar vueltas.*** A partir de esta función se define al radián como unidad del ángulo y se desencadena la enunciación de las funciones trigonométricas. Es desde esta función circular, teniendo como unidad angular el radián, donde se definen las funciones trigonométricas, además de que el concepto de radián como unidad angular, es la base para la construcción de numerosas identidades matemáticas; en la que está implicada la magnitud angular.

A partir de la función Φ: ℝ→𝒞, se puede considerar "descomponer" a Φ en dos funciones reales de variable real, es decir, en dos funciones de ℝ a ℝ**.** Esta "descomposición" es la que da lugar a las funciones circulares, también llamadas funciones trigonométricas. Se realiza la asociación de los elementos de ℝ con los elementos de 𝒞 por medio del rodamiento de la circunferencia unitaria a lo largo de la recta de los números reales R, al hacerla rodar, lo que se hace es medir longitudes de arco de la circunferencia unitaria.

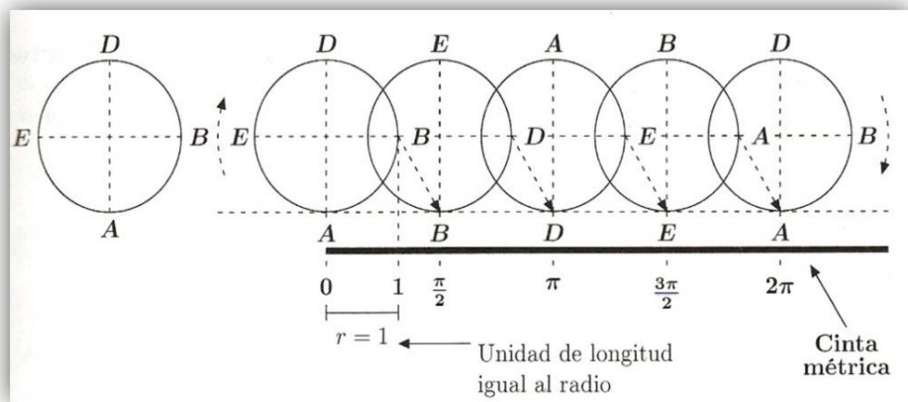


Fig. 3.15 Circunferencia unitaria rodando sobre la recta de los números reales.

Como estas longitudes corresponden a medidas de ángulos en radianes, de aquí en adelante los puntos de la circunferencia serán asociados con los ángulos. Es decir, en lugar de expresar que el número real $\pi/2$ está asociado con el punto B (0, 1) de la circunferencia expresaremos que es el ángulo de $\pi/2$ radianes (más simple de $\pi/2$), el que está asociado al punto B. Dado que todas las funciones circulares surgen de la asociación de dos conjuntos; éstos son: el conjunto ℝ de los número reales y el conjunto 𝒞 de los puntos de la circunferencia unitaria, ℝ es el dominio y 𝒞 el rango de la función.

A continuación se apuntan los requisitos para considerar a la función trigonométrica o circular:

1. Todo elemento de ℝ debe tener asociado un elemento en 𝒞 (todo número real debe estar asociado con un punto en la circunferencia).

2. Dos a más elementos de ℝ pueden estar asociados a un mismo elemento de $\mathcal{C}$ (a dos a más elementos reales se les puede asociar con un mismo punto de la circunferencia unitaria).

3. Un mismo elemento de ℝ no puede estar asociado con distintos elementos de $\mathcal{C}$ (un mismo número real no puede estar asociado con puntos distintos de la circunferencia unitaria).

3.4 Resumen y Conclusión del Análisis Didáctico de los Planes de Estudio y Libros de Texto

Después de realizar el análisis didáctico encontramos tres posibles escenarios que permiten dar cuenta de la transición *grados→radianes↔reales.*

1. **Extensión de la Trigonometría Clásica.**- A partir de lo reportado por Maldonado (2005), Méndez (2008), Montiel (2005) y al análisis realizado a programas y textos del NMS, se puede deducir el tratamiento escolar tradicional que hay en el NMS del concepto de FT, corresponde a una presentación secuenciada lógica y coherente de los temas y conceptos matemáticos, dicha secuencia es **trigonometría → círculo trigonométrico → función trigonométrica.** Es una **extensión de la Trigonometría Clásica** que encuentra en el círculo trigonométrico una explicación necesaria y suficiente para dejar claro el dominio de la función en todos los reales, la conversión de la unidad de medida *(grados ↔ radianes)* y la transición de *radián→real.*

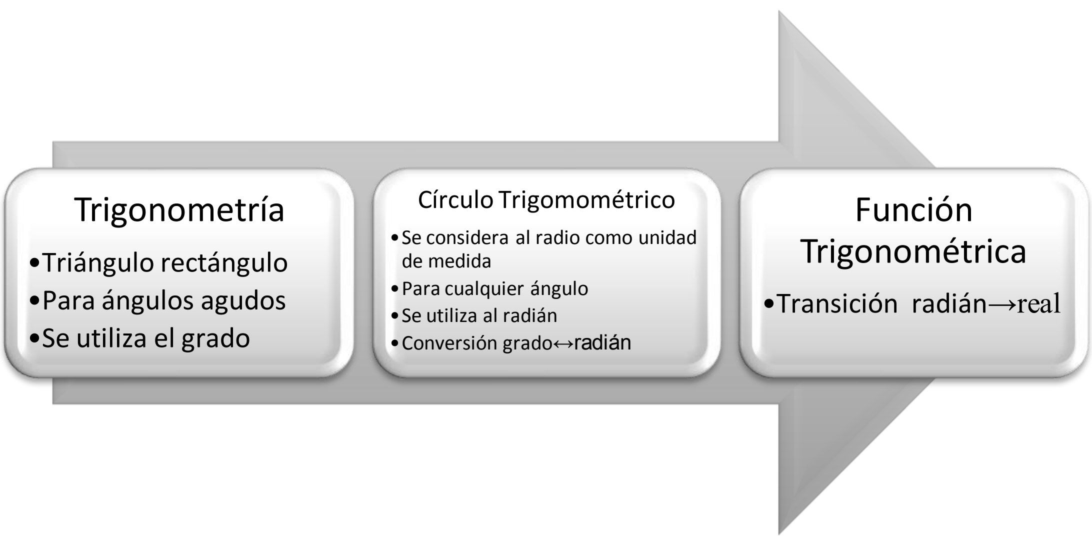


Fig. 3.16 Extensión de la Trigonometría Clásica para el estudio de la FT.

Otro punto importante que hay que resaltar del análisis efectuado, es que en los libros de texto del NMS estudiados por Maldonado (2005) y Méndez (2008) no se hace explícita la evolución de **radianes → reales**, además de la ausencia de un argumento que explique la transición ***grados→radianes↔reales.***

2. **División de la trigonometría**.- Del análisis hecho a diversos textos de cálculo del NS, con importante influencia escolar (Larson, 2005), (Swokowski,1989), (Purcell, 2007), (Baley, 2004) y (Stewart, 1999), encontramos explícitamente o implícitamente que **hay dos métodos para definir las FT:** a partir de un **método clásico** donde es ***"conveniente"*** la utilización del ángulo en grados o mediante el desarrollo de un **método moderno** donde interviene "una circunferencia unitaria".

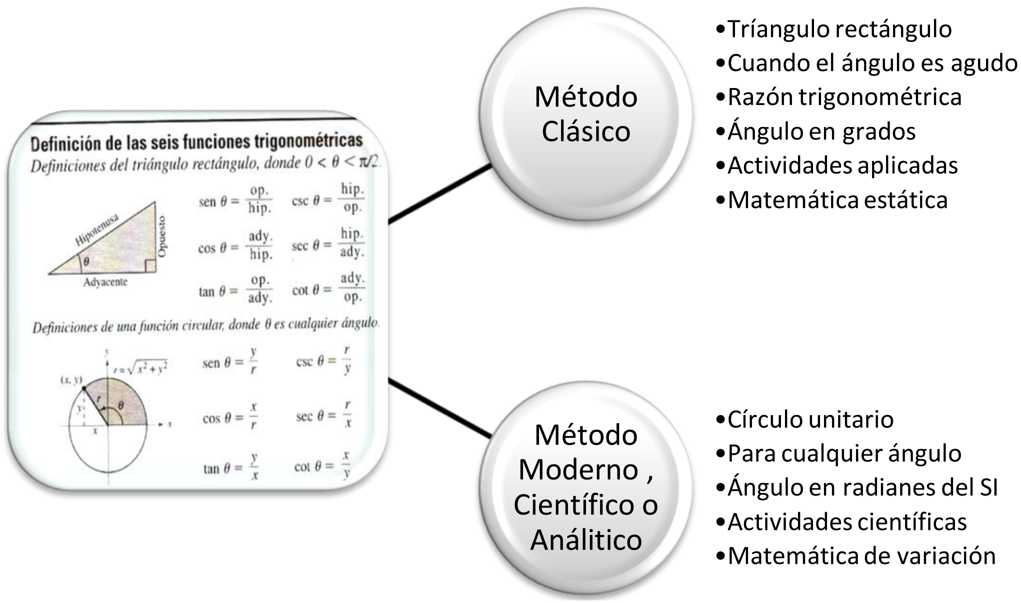


Fig. 3.17 División de la Trigonometría para el estudio de la FT

Otro aspecto importante que conviene destacar del análisis de los libros de texto del NS estudiados en el marco del trabajo de investigación, es que en problemas de aplicación del cálculo en que están implicadas FT se muestran criterios poco claros para ir del radián a un número real y viceversa (radián ↔ real); de igual forma identificamos que los ángulos en radianes son escritos en términos de π, números de la forma $k\pi$ como unidad de medida angular, por ejemplo al desarrollar una integral definida de una FT los límites inferior y superior son submúltiplos o múltiplos de π. Consideramos que en este contexto es válida la pregunta de por qué no números enteros o decimales.

$$\int_{-2}^{6} x^2 \sqrt[3]{x+2}\,dx \qquad \int_{1}^{5} x^2 \sqrt{x-1}\,dx$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos\left(\frac{2}{3}x\right)\,dx \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} (x+\cos x)\,dx$$

Fig. 3.18 Los límites de la integral de una FT son de la forma $k\pi$.

3. **El radián unidad propia del ángulo**. Por medio de la definición de una función especial P: $\mathbb{R}\rightarrow\mathcal{C}$ que asocia a cada número real un punto sobre el círculo unitario $\mathcal{C}$, función llama ***función enrolladora o de dar vueltas.*** A partir de esta función se definen las funciones trigonométricas y la transición de grados a radianes **se expone como una necesidad de tránsito entre la geometría plana**, donde la medida del ángulo central es independiente del radio de la circunferencia; **y el cálculo**, donde la medida del ángulo central es el radián que depende del radio de la circunferencia.

Medir los ángulos con el número π, no es arbitrario para círculo, pues expresa la razón entre la circunferencia y el diámetro. La función con la unidad angular, en radianes, desencadena la enunciación de las funciones trigonométricas; además el concepto de radián, como unidad angular, es la base para la construcción de numerosas identidades matemáticas que mantienen la homogeneidad en las ecuaciones, donde está implicada la magnitud angular.

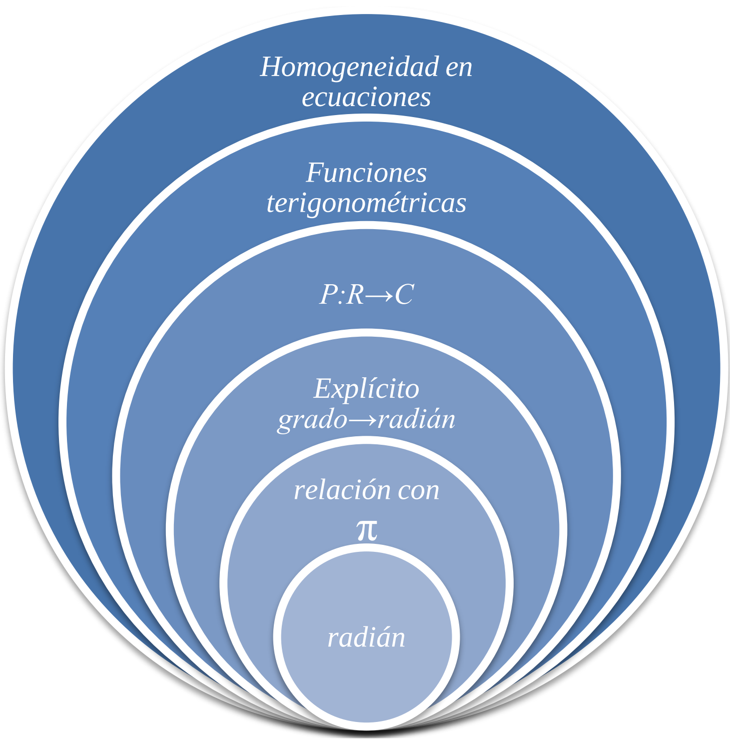


Fig. 3.19 El radián como unidad "natural"

Capítulo 4

ANÁLISIS COGNITIVO A PROFESORES Y ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS

Un acercamiento de cómo es concebida y razonada la elección de la unidad de medida angular *(grado, radián o real)*, asignada como argumento en una FT, es a través de los cuestionarios y el mismo diálogo con profesores y estudiantes de matemáticas, que constituyen la fuente para el análisis cognitivo. Con tal propósito en la presente investigación se estudian estas concepciones en ambos actores.

El grupo de profesores, fue conformado en dos bloques: un conjunto de 13 profesores de matemáticas que desempeñan su quehacer docente en el NMS del área metropolitana de la Ciudad de México (6 de CECyT[1] del IPN y 7 de EPOEM[2]); y un grupo de 32 profesores de América Latina (Argentina, Chile y México), aspirantes a un programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, profesionales en la enseñanza de las matemáticas, así como expertos de diversos campos del conocimiento afines a la materia; comprometidos con el entorno social y educativo.

El grupo de estudiantes que accedió a ser parte de la investigación está conformado por 98 alumnos del nivel medio superior que cursan el último año del bachillerato en los sistemas educativos EPOEM y CETIS[3], 65 estudiantes del nivel superior que cursan el primer año de la licenciatura en el área de físico matemática de la ESFM[4], IPN y ITESM[5] Campus Estado de México y 59 estudiantes de nivel superior que cursan los últimos grados de la carrera de ingeniería en el sistema educativo de la UAM[6] Unidad Azcapozalco.

[1] Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional.
[2] Escuela Preparatoria del Gobierno del Estado de México.
[3] Centro de Educación Tecnológica Industrial y de Servicios
[4] Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.
[5] Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
[6] Universidad Autónoma Metropolitana.

4.1 ANÁLISIS DE LOS CUESTIONARIOS A PROFESORES

Precedido del análisis de los planes de estudio y de los libros de texto, se diseñó un instrumento de entrevista para profesores y estudiantes de matemáticas. En la metodología de la investigación, capítulo 2, se especificaron las actividades y los propósitos de cada una de ellas. Por consiguiente en el presente capítulo, se revisa en forma general las respuestas de los docentes.

La principal señal de ruptura conceptual que se identifica en los docentes, se presenta cuando se encuentran ante la disyuntiva al elegir la unidad de medida angular –el grado el radián o utilizar un número real.–

4.1.1 PRIMER ACTIVIDAD

Actividad 1

¿Cómo le explicaría a un estudiante el valor de las siguientes expresiones?

a) sin (-3) = c) sin (-10) = e) cos (680)=

b) cos (5) = d) sin (-580) =

Fig. 4.1 Actividad 1

En la primer actividad, donde se pide calcular el valor de las expresiones y para lo cual se debe elegir la unidad angular (grado, radián o número real), el profesor se halla ante la disyuntiva de no saber en qué unidad se encuentra el argumento de la función trigonométrica. El 19.3% de los profesores toman en forma indiscriminada al argumento de la función trigonométrica para los dos sistemas de medida angular (el sexagesimal y el cíclico), sin ser conscientes de que el argumento es un número real. Como muestra presentamos los siguientes duplicados de los cuestionarios aplicados a los profesores.

	En grados sexagesimales	En radianes
) Sin (-3)	-0,0523	-0,1411
) Sin (5)	0,9961	0,2836
) Sin (-10)	-0,1736	0,544
) Sin (-580)	0,6427	-0,93
) Sin (-680)	0,766	0,1541

Fig. 4.2 Ante el dilema de que unidad utilizar se consideran ambos sistemas.

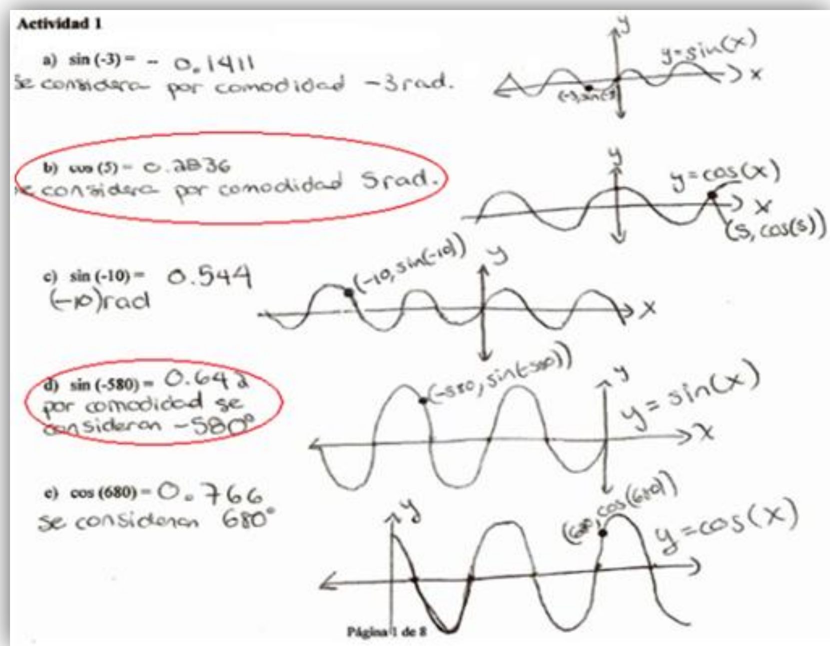


Fig. 4.3 Se justifica en forma incorrecta el uso de cada uno de los sistemas.

En otro grupo de profesores, el 23% eligió como unidad de medida el sistema sexagesimal, el grado.

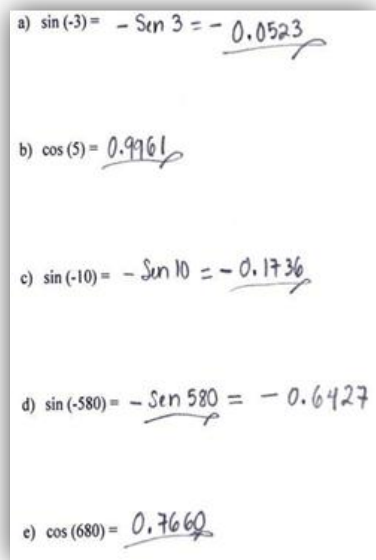


Fig. 4.4 Elección del grado como unidad angular.

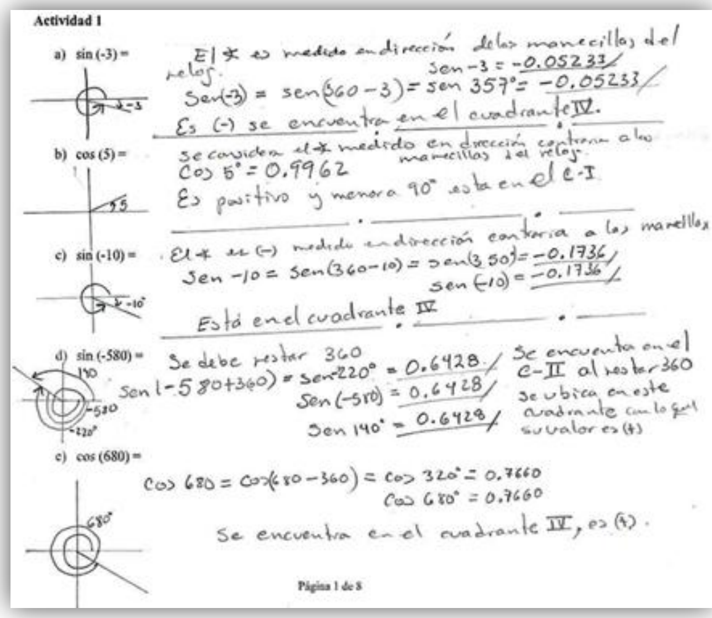
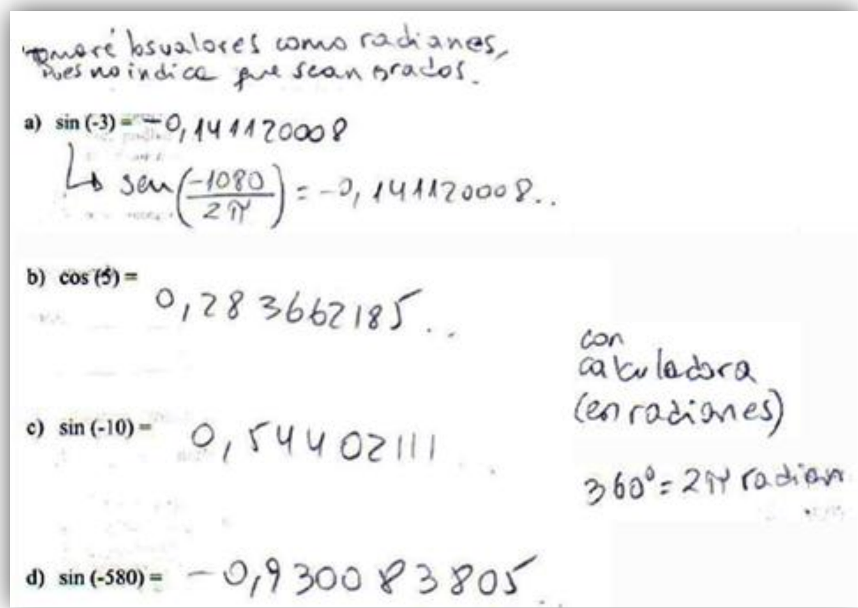


Fig. 4.5 Si bien hay conceptos trigonométricos, se elige al grado como unidad angular.

No obstante en un tercer grupo de profesores, el 53.4% eligió el radián como unidad angular y sólo el 14% de este grupo, equivalente al 7.6% de todos los maestros, fue capaz de justificar su respuestas.


Tomaré los valores como radianes, pues no indica que sean grados.

a) sin (-3) = -0,141120008

↳ $sen\left(\frac{-1080}{2\pi}\right) = -0,141120008..$

b) cos (5) = 0,283662185..

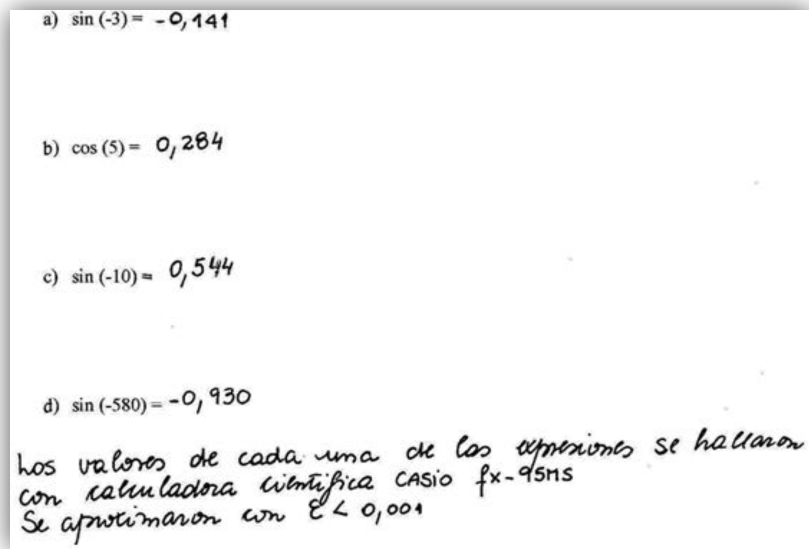
c) sin (-10) = 0,54402111

d) sin (-580) = -0,930083805

con calculadora (en radianes)

$360° = 2\pi$ radian

Fig. 4.6 Se utiliza la unidad angular de radián, pero no se justifica el por qué.


a) sin (-3) = -0,141

b) cos (5) = 0,284

c) sin (-10) = 0,544

d) sin (-580) = -0,930

Los valores de cada una de las expresiones se hallaron con calculadora científica CASIO fx-95MS
Se aproximaron con ε < 0,001

Fig. 4.7 La justificación no vas allá al valor que ofrece la calculadora en modo RAD, delegando toda la responsabilidad del concepto al uso de la tecnología.

La siguiente reproducción pertenece a un docente del grupo que justificó el porqué de su respuesta. No obstante que identifica al radián como la unidad del ángulo, recurre al equivalente de éste con los grados para visualizar al ángulo en el círculo trigonométrico y así determinar el valor numérico correspondiente con la expresión matemática.

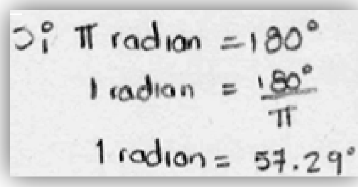


Fig. 4.8 Se recurre al equivalente entre radián y grados.

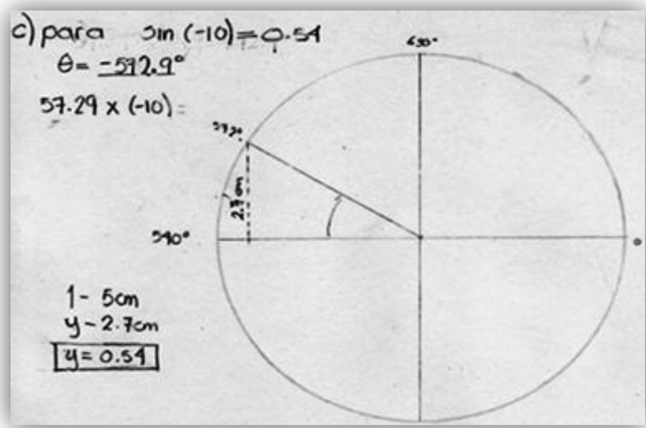
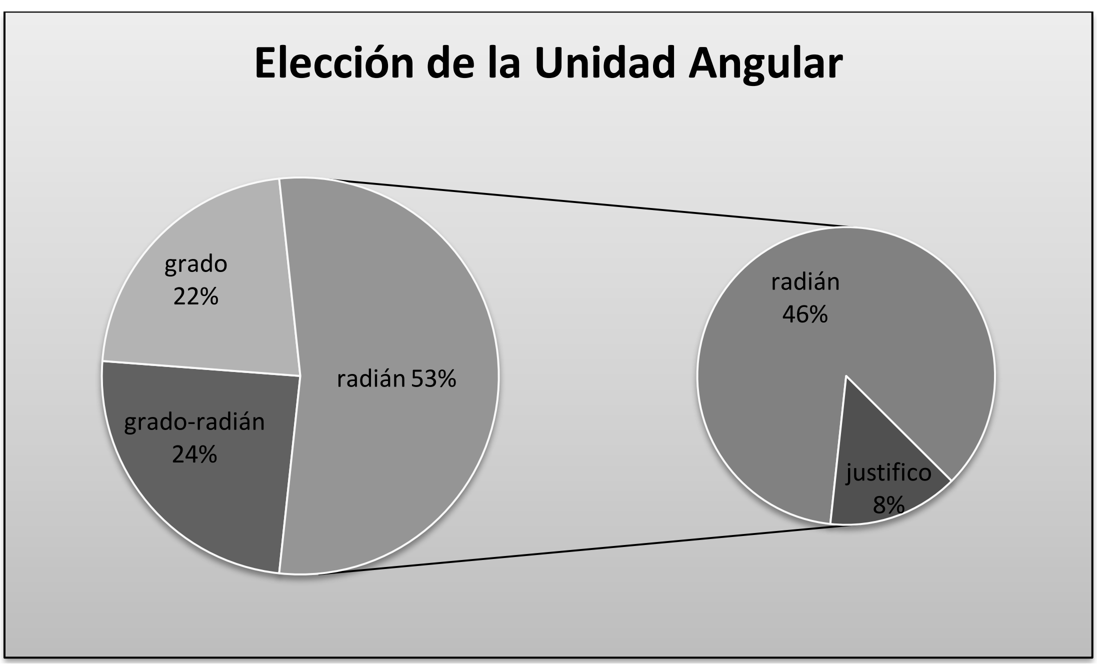


Fig. 4.9 No se visualiza el ángulo en radianes.

4.1.1.1 INTERPRETACIÓN DE DATOS DE LA PRIMER ACTIVIDAD

La distribución en la elección de la unidad angular al sustituir en el argumento de una expresión trigonométrica y obtener el valor de ésta, por parte de los profesores, quedo trazada en el gráfico 4.1. El 24% recurre a utilizar, sin la debida diferenciación o selección, los dos sistemas de medida angular (el sexagesimal y el cíclico) para el argumento de la función trigonométrica, el 22% eligió al grado (°) como unidad de medida, el 53% eligió al radián como la unidad angular y sólo el 14% de este grupo, equivalente al 7.6% de todos los maestros, fue capaz de justificar sus respuestas. En consecuencia podemos afirmar que la mayor parte de los docentes, el 92%, que participaron en nuestra investigación no presentó un argumento que justificase el uso del radián como unidad angular y sólo se limitaron a indicar la utilización de la calculadora en el sistema cíclico RAD para obtener los valores.



Gráfica 4.1 Elección de la unidad angular

4.1.2 Segunda Actividad

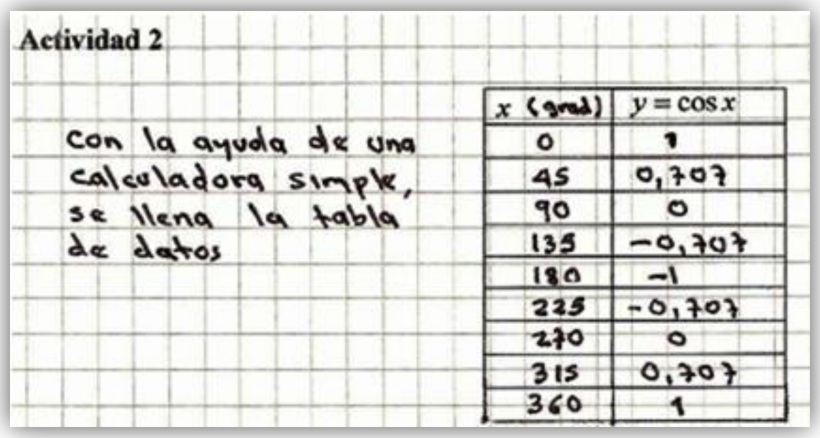
Actividad 2

¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función $y = f(x) = \cos x$?

Fig. 4.10 Actividad 2

En la segunda actividad se espera estar al tanto del procedimiento que se tiene en la elección del sistema numérico, grado, radián o real (° *rad o* ℝ) para el manejo de los valores de las variables durante todo el proceso de la actividad, que implica la tabulación y la graficación de la función.

Un 7.7 % de los profesores eligió como unidad de medida el grado del sistema sexagesimal durante el desarrollo de toda la actividad.



Actividad 2

Con la ayuda de una calculadora simple, se llena la tabla de datos

x (grad)	$y = \cos x$
0	1
45	0,707
90	0
135	−0,707
180	−1
225	−0,707
270	0
315	0,707
360	1

Fig. 4.11 Al tabular se utilizan números del sistema sexagesimal como dominio de la función.

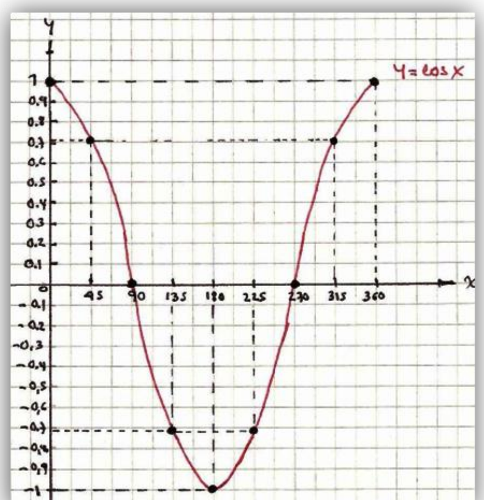
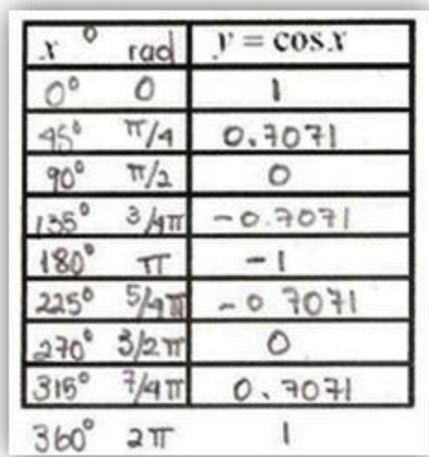


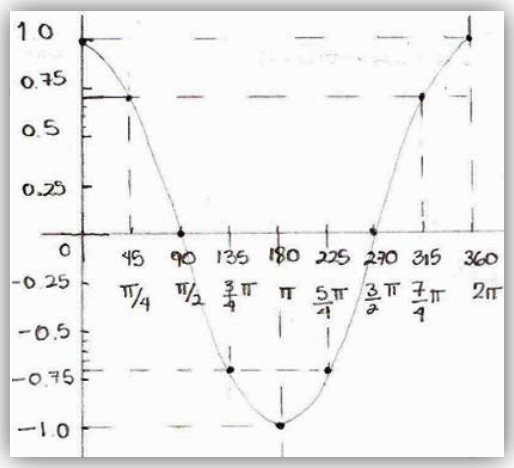
Fig. 4.12 Para el trazo de la gráfica de la función son utilizados números del sistema sexagesimal, grados para los valores de la abscisa.

Un 11.5% de los profesores se halla con la dificultad de no saber que unidad angular utilizar así que emplean ambas unidades angulares (grados y radianes), tanto para la tabulación como para la graficación.

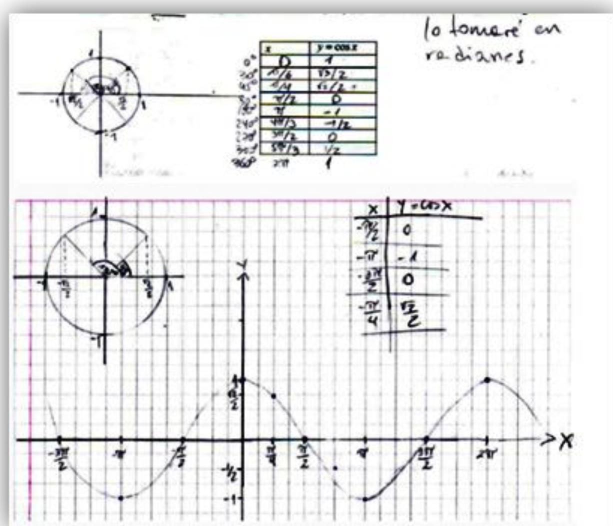


x °	rad	$y = \cos x$
0°	0	1
45°	π/4	0.7071
90°	π/2	0
135°	3/4π	−0.7071
180°	π	−1
225°	5/4π	−0.7071
270°	3/2π	0
315°	7/4π	0.7071
360°	2π	1

Ante el dilema de que unidad utilizar para la construcción de la gráfica de la función se consideran ambos sistemas para la unidad angular, el grado y el radián, éste último sin ser considerado como un número entero real.



Se recurre al equivalente entre radián y grados para la construcción de la gráfica de la función.

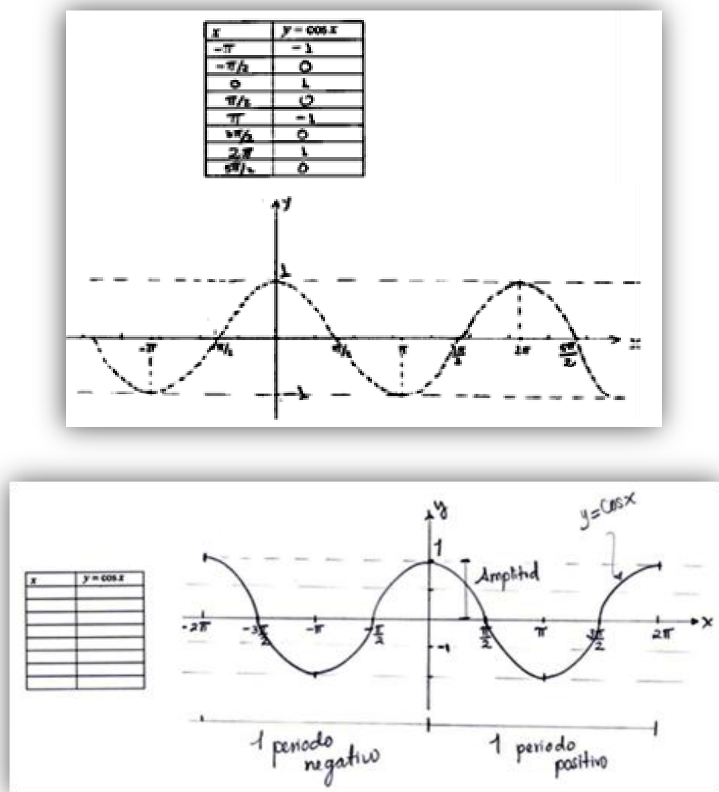


Para la construcción del gráfico, si bien se utiliza el círculo unitario no se argumenta el por qué el uso del radián en la graficación.

El radián aparece como un número real aunque relacionado con el signo π, en la forma $k\pi$, no aparece como un número real independiente de π.

Fig. 4.13 Dilema en la elección de la unidad angular

Un tercer grupo de profesores, el 80.8%, eligió como unidad angular el radián. Se identifica un mayor uso del radián en la geometría de las funciones trigonométricas, de estos el 62 % opto por no utilizar la tabulación para el bosquejo de la gráfica de la función. Un dato importante a destacar, es que todos los profesores de este grupo utilizaron la unidad radián, como ya se indicó, pero nadie menciona literalmente la unidad radián, tanto para el proceso de tabulación como para el de graficación:



Se utilizan los puntos característicos de la función para el trazo del gráfico.

Se emplean múltiplos y submúltiplos de π

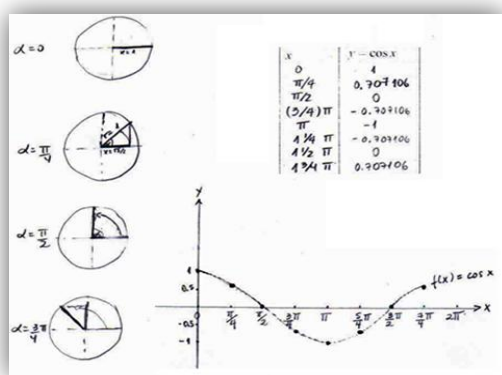
Es común que se omita la tabulación para la elaboración de la gráfica de la función.

Se favorece a la unidad cíclica en la graficación.

No aparece la palabra de la unidad angular rad.

Fig. 4.14 Aparece la unidad angular como un número real.

Se considera que la siguiente reproducción argumenta el empleo de radianes como números reales (*rad* →ℝ) para los valores del dominio.



Es utilizado el radián en el círculo trigonométrico para construir el gráfico de la función.

Se relaciona π con la unidad cíclica.

Aparentemente es considerada la unidad angular como un número real.

No se hace evidente la unidad angular como número real, ya que no son utilizados números enteros en el dominio de la función.

Fig. 4.15 Se relaciona el símbolo de π con la unidad cíclica

4.1.2.1 INTERPRETACIÓN DE DATOS DE LA SEGUNDA ACTIVIDAD

La distribución en la elección de la unidad angular a utilizar en construcción de la gráfica de la función trigonométrica $f(x) = \cos x$, por parte de los profesores, queda ilustrado en la gráfico 4.2. Se identifica una mayor utilización de la unidad cíclica, el radián en la geometría de las funciones trigonométricas Un 7.7 % de los profesores eligió como unidad de medida el grado del sistema sexagesimal, tanto para la tabulación como para la graficación de la función; se sospecha que este grupo olvidó considerar que al trazar gráficas de funciones se deben de utilizar números reales como dominio y rango[7], ya que en el caso de funciones trigonométricas esto incluye el empleo de radianes como números reales ($rad \to \mathbb{R}$) para los valores del dominio. Un segundo grupo conformado por el 11.5% de los docentes utilizó ambas unidades angulares (grados y radianes), tanto para la tabulación, como para la obtención de la gráfica de la función; se considera que este grupo empleó en primer lugar al grado, como unidad angular, con la finalidad de transitar hacia la conversión y utilización del equivalente en radianes. Si bien un tercer grupo de profesores, el 80.8 %, eligió la unidad angular de radián, sólo el 7.7% de este grupo, equivalente al 3.4% de todos los maestros fue capaz de justificar su respuestas. Podemos afirmar, en base a lo anterior, que la mayor parte de los docentes, el 96.4%, que participaron en nuestra investigación, no presentó un argumento válido que justificase el empleo del radián como un número real ($rad \to \mathbb{R}$).

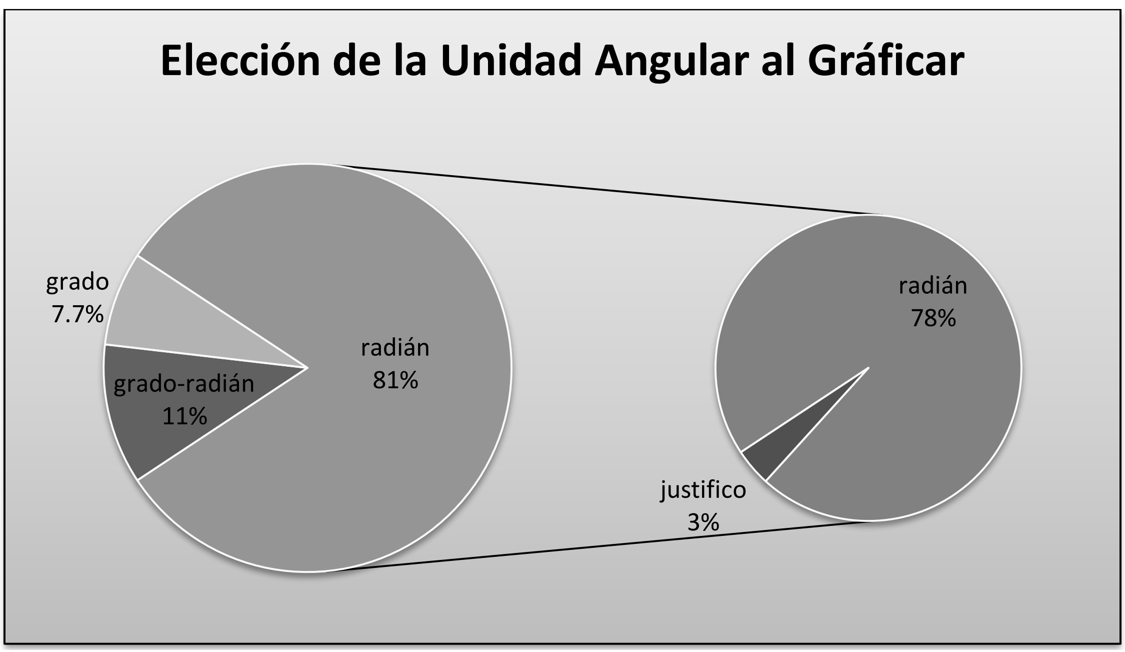


Gráfico 4.2 Elección de la unidad angular al gráficar

[7] En un contexto de matemática pura ya que en el campo de la tecnología, algunas funciones relacionan unidades expresadas en unidades de medición diferente. El dominio puede ser tiempo, presión, fechas o grados. Algunos ejemplos de estos son la distancia en función del tiempo, el volumen como una función de presión, o la temperatura como una función de la fecha. En los motores de automóvil, los pistones están conectados a los cigüeñales que giran en círculo en forma muy similar a los pedales de una bicicleta para hacer que el pistón suba y baje. Podemos describir la posición del pistón ya sea como una función del tiempo o del ángulo.

4.1.3 Tercer Actividad

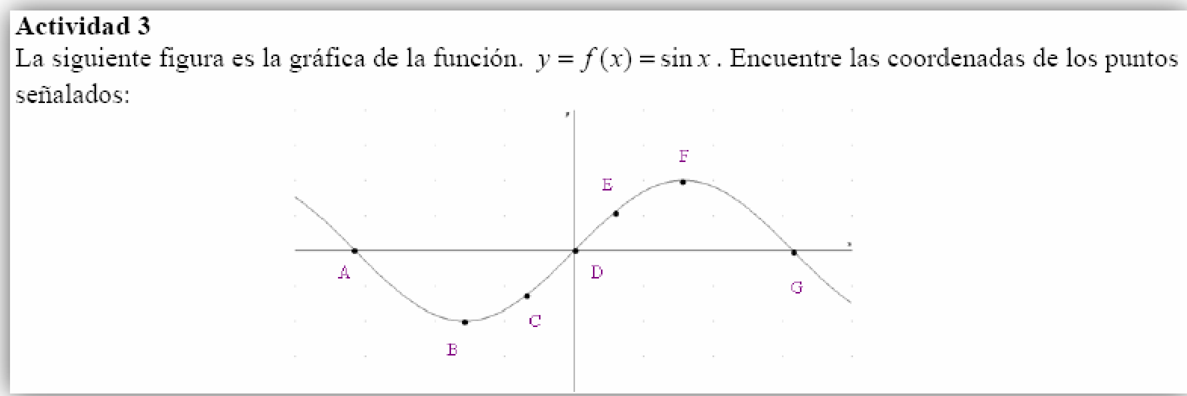


Fig. 4.16 Actividad 3

En esta actividad se espera estar al tanto del procedimiento que se tiene en la elección del sistema numérico para cada uno de los ejes coordenados; grado, radián o real (° *rad o* ℝ), para así asignar el valor al par numérico que conforme las coordenadas de cada uno de los puntos señalados.

Un 12 % de los profesores nombró al eje coordenado horizontal (el eje de la variable independiente) con valores numéricos correspondientes al sistema sexagesimal. Por otra parte designa al eje vertical (el eje de la variable independiente) con valores que corresponde a números reales. Lo que definitivamente incide al nombrar las coordenadas (par de números) con valores de diferente sistema de numeración.

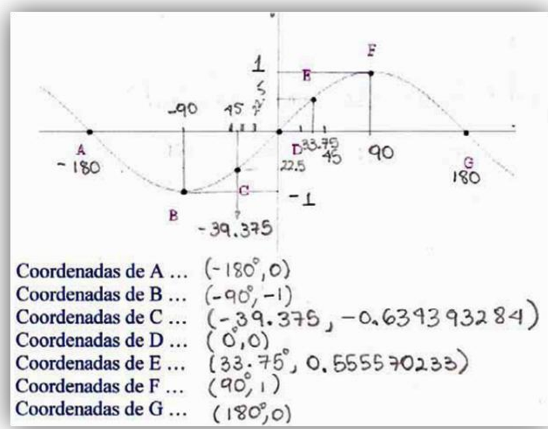


Fig. 4.17 Se utilizan dos sistemas diferentes para nombrar las coordenadas de los puntos.

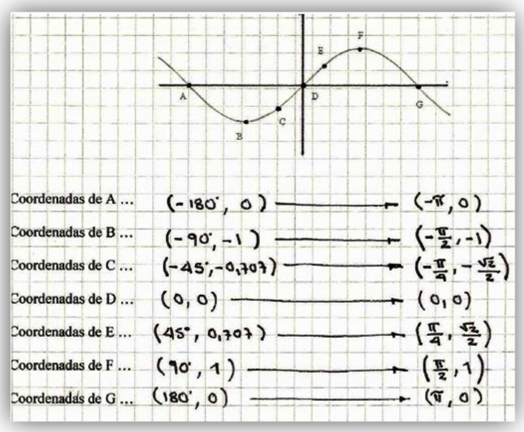
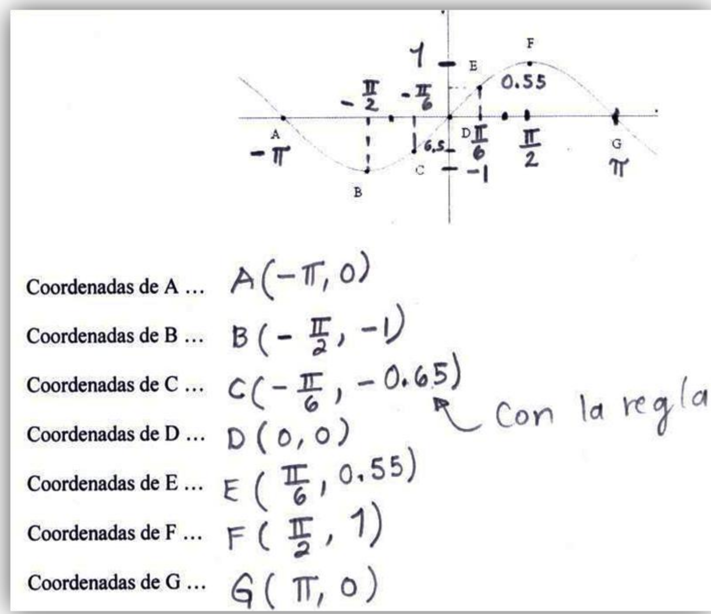


Fig. 4.18 Se recurre al equivalente entre radián y grados para nombrar las coordenadas.

La mayor parte de los docentes, el 88 %, nombró a los ejes coordenados con números reales y en consecuencia designan a las coordenadas de los puntos con un par de números reales.

Cabe destacar, como dato importante, que todos los profesores de este grupo utilizaron como unidad angular un número real para el eje de las abscisas, llevaron a cabo la transición de radianes a reales ($rad \rightarrow \mathbb{R}$) en forma maquinal; nadie hace mención de tal conversión de unidades angulares y menos la justifica.



Está la transición de rad→real, porqué no aparece la palabra rad.

Se nombran las coordenadas con un par de números reales, sin embargo la abscisa es nombra en relación con el valor de π, no se presenta como un número independiente de π.

Aún cuando aparecen números decimales éstos no son utilizados para nombrar números del dominio de la función.

Es difícil establecer si se es consciente de la transición rad→ $\mathbb{R}$

Fig. 4.19 Se da la transición en forma implícita de radián a real.

4.1.3.1 Interpretación de los Datos de la Tercer Actividad

La distribución en la elección de la unidad angular a emplear en el momento de identificar las coordenadas de los puntos significativos en la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, por parte de los profesores, queda mostrada en la tabla 4.1. Un 12 % nombró al eje coordenado horizontal con valores numéricos que corresponden al sistema sexagesimal y designa al eje vertical con valores que pertenecen a los números reales; lo que implica nombrar las coordenadas con valores de diferente sistema de numeración, se está ocupando dos sistemas numéricos, el sistema sexagesimal (°) y el sistema de los números reales ($\mathbb{R}$), sin estar conscientes de los enredos que conlleva y que matemáticamente es incorrecto. Un segundo grupo, la mayor parte de los docentes, el 88 %, nombró a los ejes coordenados con números reales y en consecuencia, nombran las coordenadas de los puntos del gráfico con un par de números reales, sin embargo no queda explícito la transición de radian a número real.

Identificación de la unidad angular con el eje coordenado de variable independiente.	
grados	12%
radianes	88%

Tabla 4.1 Identificación con la coordenada *x*

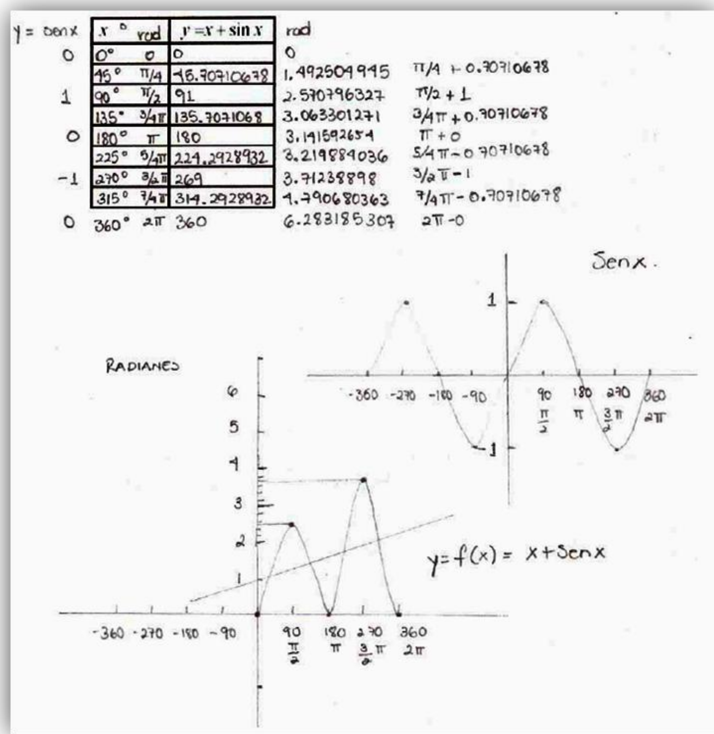
4.1.4 CUARTA ACTIVIDAD

Actividad 4
¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función $y = f(x) = x + \sin x$?

Fig. 4.20 Actividad 4

En la cuarta actividad, el objetivo consiste en detectar las posturas que adoptan los profesores al momento de realizar operaciones entre los términos algebraicos y trigonométricos que conforman la función (operaciones entre funciones trigonométricas y funciones algebraicas), además de estar al tanto del procedimiento que se sigue con la elección del sistema numérico, grado, radián o real ($°$ *rad o* $\mathbb{R}$), en el manejo de los valores de las variables durante todo el proceso de la actividad; la tabulación y la graficación de la función.

En esta actividad el profesor se halla con el conflicto de que sistema numérico debe asignar al término ***x***, que suma en la expresión, como que sistema angular –grado, radián o real– debe asignar al término ***x*,** que se encuentra como argumento del término trigonométrico ***sen x*** y así operar los términos algebraicos y trigonométricos para obtener la imagen de la función $f(x) = x + sen\,x$. Frente tal dilema de selección, el 14% toman en forma indistinta la sustitución de valores de ***x*** para los dos sistemas de medida angular (el sexagesimal y el cíclico).



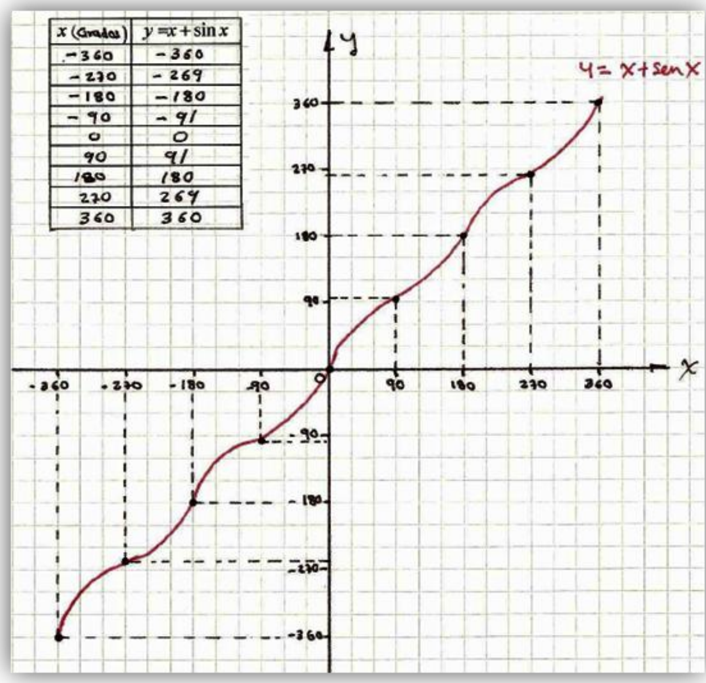
Se recurre al equivalente entre radián y grados para la construcción de la gráfica de la función.

Se presentan problemas conceptuales al operar algebraicamente términos trigonométricos.

El radián aparece como un número real, aunque relacionado con el signo de π, no aparece como un número real independiente de π.

Fig. 4.21 Problemas en la elección de la unidad angular.

Otro grupo de profesores, el 8%, eligió como sistema de numeración, para realizar la actividad y asignar valores a ***x*** al sistema sexagesimal, al grado.

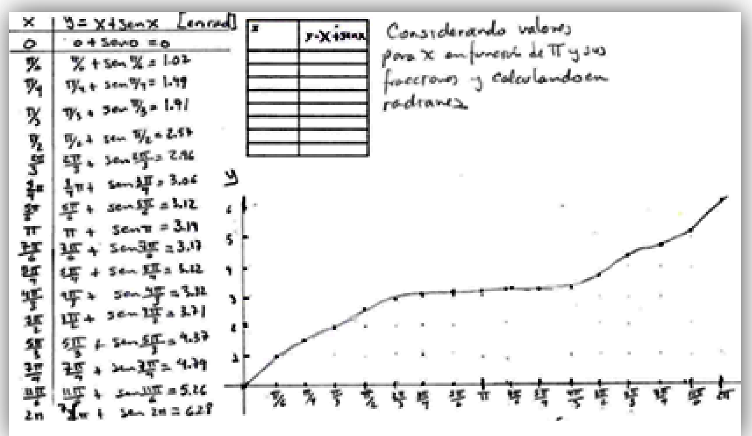


Es utilizado el sistema sexagesimal para la construcción del gráfico de la función.

Se presentan problemas conceptuales al considerar al grado como un número real.

Fig. 4.22 Problemas conceptuales al considerar al grado como un número real.

La mayoría de los docentes, el 62%, eligió en forma implícita o explícita, el sistema cíclico, el radián, como sistema de numeración, para realizar la actividad y asignar valores a ***x***.



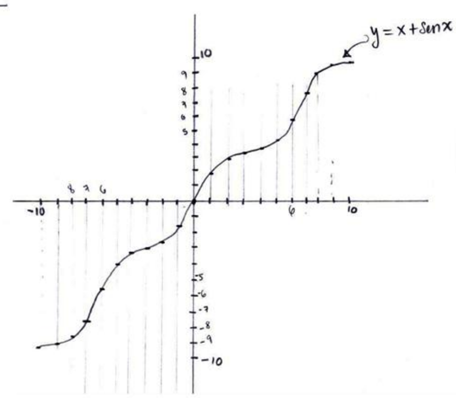
Se elige en forma explícita los radianes.

Se relaciona el símbolo de π con los radianes, al considerar la unidad en múltiplos y submúltiplos de π.

Fig. 4.23 Transición de grados a radianes de manera implícita.

Un tercer grupo de profesores, el 16% eligió los números reales (ℝ) como sistema de numeración para realizar la actividad y asignar valores a ***x*** en la expresión matemática.

x	y
-10	-9.45
-9	-9.41
-8	-8.98
-7	-7.65
-6	-5.72
-5	-4.04
-4	-3.24
-3	-3.14
-2	-2.90
-1	-1.84
0	0
1	1.84
2	2.90
3	3.14
4	3.24
5	4.04
6	5.72
7	7.65
8	8.98
9	9.41
10	9.45



x	$g(x)=x$	$h(x)=\sin x$	$f(x)=x+\sin x$
-8	-8	-0,9893582	-8,98
-7	-7	-0,6569866	-7,65
-6	-6	0,2794155	-5,72
-5	-5	0,9589243	-4,04
-4	-4	0,7568025	-3,24
-3	-3	-0,14112	-3,14
-2	-2	-0,9092974	-2,9
-1	-1	-0,841471	-1,84
0	0	0	0
1	1	0,841471	1,84
2	2	0,9092974	2,9
3	3	0,14112	3,14
4	4	-0,7568025	3,24
5	5	-0,9589243	4,04
6	6	-0,2794155	5,72
7	7	0,6569866	7,65
8	8	0,9893582	8,98

Fig. 4.24 Se está trabajando al radián como un numero real, independiente del símbolo de π

4.1.4.1 Interpretación de Datos de la Cuarta Actividad

En la operación entre funciones trigonométricas y funciones algebraicas, por parte de los profesores, queda mostrada en el gráfico 4.4. El 14% presentó indecisión ante la selección de la unidad angular por utilizar, el 8% utiliza los grados. Queda de manifiesto que en ambos grupos se olvida que los valores numéricos a asignar a la variable ***x***, en la expresión matemática antes señalada, debe de corresponder a un número real (ℝ); ante la inseguridad de no saber qué sistema numérico usar se acude a ambos sistemas, el grado (°) del sistema sexagesimal y al radián del sistema cíclico. Esta actitud tiene consecuencias al momento de realizar la operación de la suma, ya que se están sumado términos de diferente sistema numérico sin hacer uso de axiomas o propiedades adecuadas; esto prueba que existen rupturas conceptuales en el manejo de las unidades angulares, como evidencia mostramos lo que creemos realizó un docente:

x (Grados)	$y = x + \sin x$
-360	-360
-270	-269
-180	-180
-90	-91
0	0
90	91
180	180
270	269
360	360

$$f(x) = x + sen\,x$$

Vamos a calcular el valor de la función para $x = 90°$

$$f(90°) = 90° + sen\,90°$$

$$f(90°) = 90° + 1 = 91 \quad ¿?$$

No se asigna un número real.

Sistema sexagesimal

Número Real

Fig. 4.25 Problemas con la operación entre funciones por las unidades angulares.

La mayoría de los docentes, el 62%, optó, en forma implícita o explícita, por el radián como sistema de numeración para realizar la actividad y asignar valores a $\boldsymbol{x}$. Se dice que se da de manera explícita en base a que se nombra la expresión rad como unidad y de forma implícita pues a pesar de que no se nombra literalmente el término rad, se relaciona el símbolo de π con rad, tal hecho se hace evidente al optar por múltiplos y submúltiplos de π ($\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \ldots etc.$) para tabular y graficar una función que no es trigonométrica, es decir, llevaron a cabo la transición de radianes a reales ($rad \rightarrow \mathbb{R}$); así mismo nadie hace mención de tal conversión de unidades angulares y menos la justifica o evidencia tal transición. Sólo el 16% eligió los números reales ($\mathbb{R}$) como sistema de numeración, para realizar la actividad y asignar valores a $\boldsymbol{x}$ en la expresión matemática. Percibimos que esta determinación se hace en forma juiciosa, así lo hacen notar las transcripciones de los docentes, al considerar a los números enteros como referentes para la tarea de la tabulación, la graficación y al momento de obtener el valor del término trigonométrico (***sen x***), en donde se considera al argumento de la expresión en rad, es decir, llevaron a cabo la transición de radianes a reales ($rad \rightarrow \mathbb{R}$) en forma reflexiva.

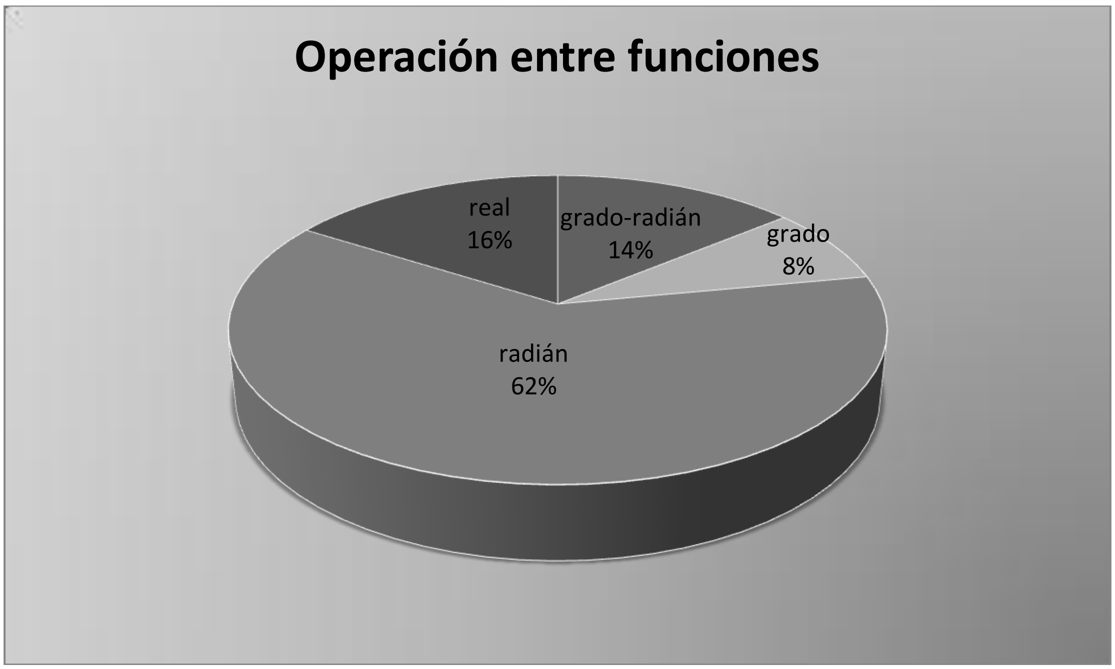


Gráfico 4.4 Elección de la unidad angular al realizar operaciones entre funciones.

4.2 ANÁLISIS DE LOS CUESTIONARIOS A ESTUDIANTES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR Y SUPERIOR

Precedido del análisis de los planes de estudio y de los libros de texto se diseño una actividad para estudiantes del NMS y superior (ver anexo A), en que se pide calcular el valor de las expresiones y para lo cual se debe discernir entre la unidad angular; grado, radián o número real.

Del cuestionario destinado a los estudiantes sólo se consideró, para su análisis, la pregunta de la actividad 1, ya que esta es la que arrojó información relevante para nuestro estudio.

4.2.1 ACTIVIDAD

Actividad 1

¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones?

a) sin (-3) = c) sin (-10) = e) cos (680) =

b) cos (5) = d) sin (-580) =

Fig. 4.26 Actividad 1, en estudiantes de matemáticas.

La principal señal de ruptura conceptual que se identificó en los estudiantes se presenta cuando se encuentran ante la disyuntiva de elegir la unidad de medida angular –grado, radián o número real–. Ante tal dilema de selección, un 3.4% de estudiantes del último año de bachillerato, el 16.4% estudiantes del primer año de licenciatura y un 33.3% de estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura, utilizan ambos sistemas de medida angular (el sexagesimal y el cíclico). Como ejemplo presentamos el siguiente duplicado de los cuestionarios aplicados a los estudiantes[8].

Ante el dilema de que unidad utilizar se consideran ambos sistemas.

No se presenta ninguna explicación que justifique el uso para cada sistema.

Se presentan problemas conceptuales al no diferenciar la unidad en que se encuentra el argumento de la función.

¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones? Justifica tus respuestas

a) sin (-3) = -.05233 Utilizar calculadora
-.1411 rad Utilize Degree y radianes

b) cos (5) = .99619 Utilizar calculadora
.2836 rad Degree y Radianes.

c) sin (-10) = -.1736 Utilizar la calculadora.
.5440 rad Degree y rad

d) sin (-580) = .6427 Utiliza la calculadora.
-.930 rad Degree y rad

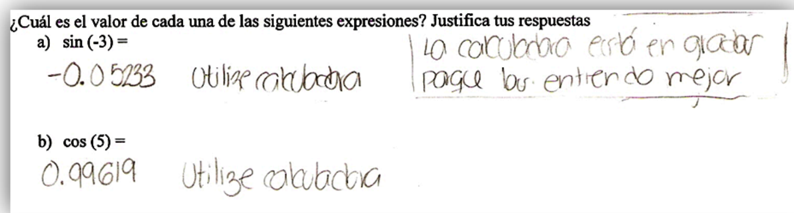
e) cos (680) = .7666 Utiliza la calculadora
.1541 rad. Degree y rad.

Fig. 4.27 Problemas en la elección de la unidad angular.

---

[8] Las reproducciones que se presentan corresponden a estudiantes de Nivel Superior.

Otro grupo de estudiantes: el 92% en estudiantes del último año de bachillerato, el 63.6% en estudiantes del primer año de licenciatura y en un 35.6% en estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura, eligió al grado como unidad de medida.



¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones? Justifica tus respuestas

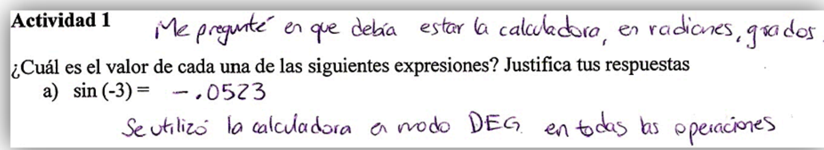
a) sin (-3) =

-0.05233 Utilize calculadora | La calculadora está en grados porque los entiendo mejor

b) cos (5) =

0.99619 Utilize calculadora

Se hace uso de los grados por que se entienden mejor, por ser más común.



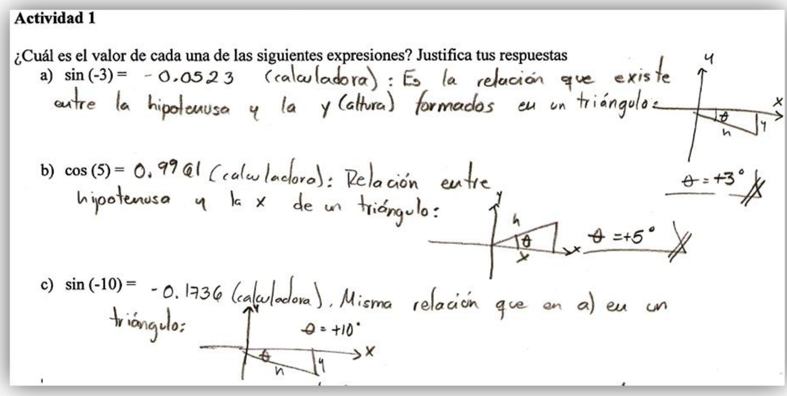
Actividad 1 Me pregunté en que debía estar la calculadora, en radianes, grados

¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones? Justifica tus respuestas

a) sin (-3) = -.0523

Se utilizó la calculadora en modo DEG en todas las operaciones

Si bien hay conceptos trigonométricos, pero se elige al grado como unidad angular.



Actividad 1

¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones? Justifica tus respuestas

a) sin (-3) = -0.0523 (calculadora): Es la relación que existe entre la hipotenusa y la y (altura) formados en un triángulo:

b) cos (5) = 0.9961 (calculadora): Relación entre hipotenusa y la x de un triángulo:

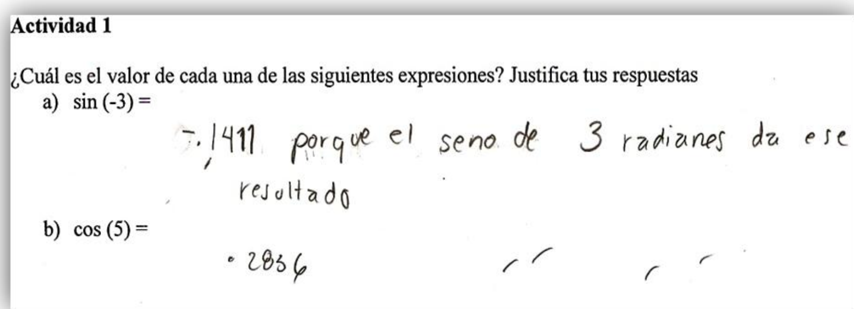
$\theta = +3°$ $\theta = +5°$

c) sin (-10) = -0.1736 (calculadora). Misma relación que en a) en un triángulo:

$\theta = +10°$

Fig. 4.28 Argumentos para la elección de la unidad angular.

En un tercer grupo, el 4.5% en estudiantes del último año de bachillerato, el 20% en estudiantes del primer año de licenciatura y en un 30.8% en estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura, eligió al radián como unidad angular.



Actividad 1

¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones? Justifica tus respuestas

a) sin (-3) =

-.1411 porque el seno de 3 radianes da ese resultado

b) cos (5) =

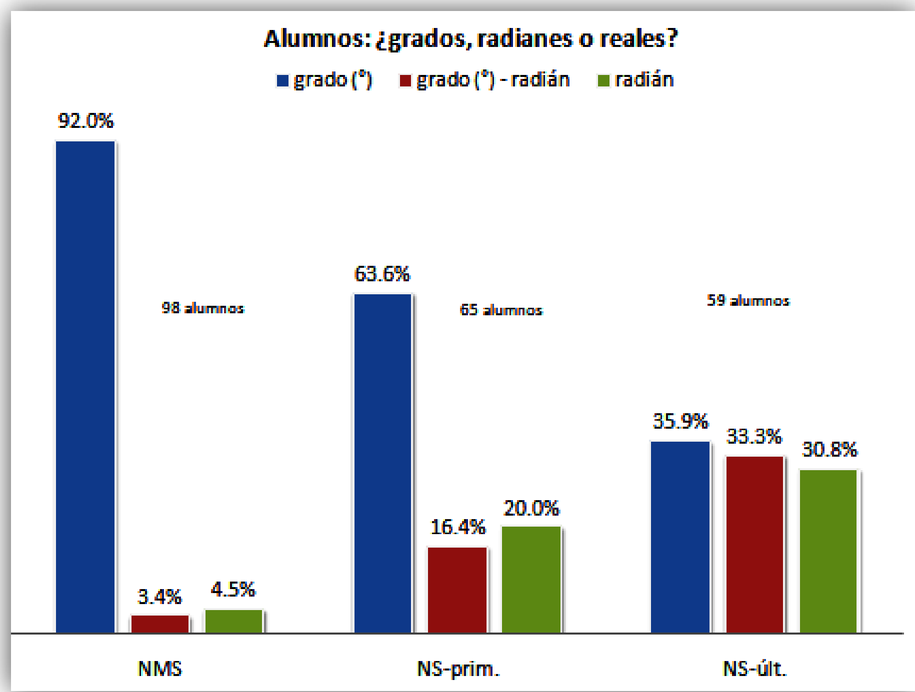
.2836

La justificación de la respuesta queda limitada al valor que ofrece la calculadora al estar en modo RAD.

Fig. 4.29 Justificación del uso de las unidades angulares.

4.2.2. Interpretación de la Actividad con Estudiantes

La distribución en la elección de la unidad angular por sustituir en una expresión trigonométrica y obtener el valor, por parte de los estudiantes, queda ilustrada en el siguiente gráfico. En el 3.4% en estudiantes del último año de bachillerato, el 16.4% en estudiantes del primer año de licenciatura y en un 33.3% en estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura, se presentó indecisión ante la selección de la unidad angular por utilizar. Por otra parte, un 92% en estudiantes del último año de bachillerato, el 63.6% en estudiantes del primer año de licenciatura y en un 35.6% en estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura, eligió al grado (°) del sistema sexagesimal. Y por último, un 4.5% en estudiantes del último año de bachillerato, 20% en estudiantes del primer año de licenciatura y un 30.8% en estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura, eligió al radián como unidad angular y por tanto obtuvo el valor correcto de las expresiones, aunque ningún estudiante de este grupo presentó un argumento que justificase el uso del radián como unidad angular, limitándose sólo a indicar la utilización de la calculadora en el sistema cíclico RAD para obtener los valores.



Gráfica. 4.5 Elección de la unidad angular.

4.3 Análisis del Diálogo con los Profesores.

En el marco de un curso propedéutico y con la participación de 32 profesores aspirantes al programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa se abrió un foro de debate con el objetivo de intercambiar ideas y reflexiones sobre dos aspectos relacionado con el cuestionario de funciones trigonométricas:

1. Sobre los problemas y dudas que cada uno de los docentes enfrento para contestar el cuestionario.

2. Intercambiar puntos de vista sobre las respuestas por parte de los estudiantes, al mismo cuestionario (información que se les compartió después de aplicarles a ellos el cuestionario).

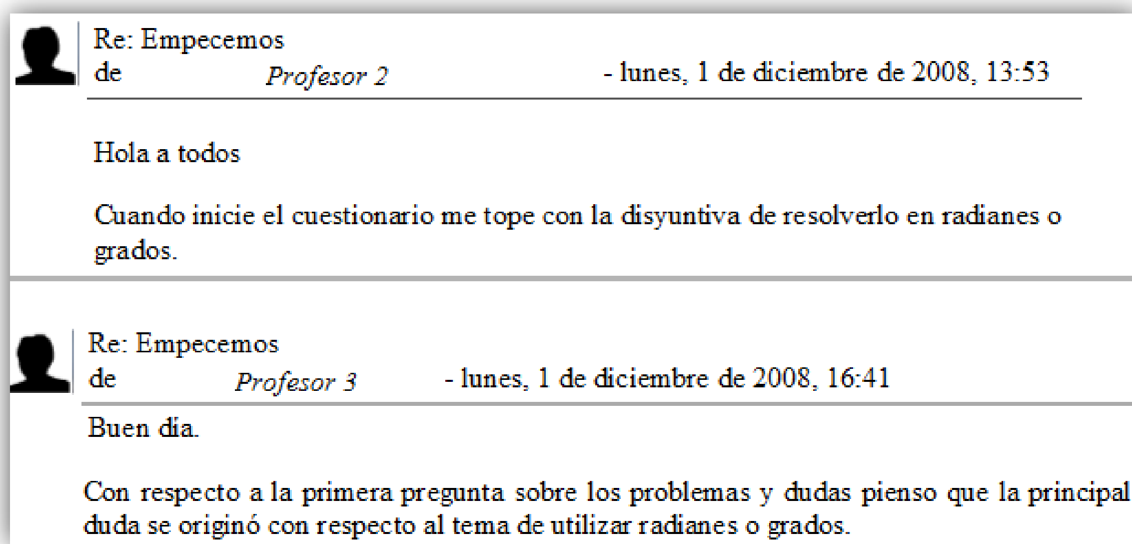
A continuación mostramos algunos aspectos que son de importancia para la presente investigación.

Con el análisis del foro se fortalece lo ya planteado como problemática de la investigación y que investigaciones anteriores han evidenciado (Maldonado, 2005, Montiel, 2005, y Méndez, 2008). Estos fenómenos giran alrededor de las respuestas matemáticamente erróneas que proporcionan algunos estudiantes e incluso profesores sobre el uso de las unidades angulares (*grados→radianes↔reales*) y a la falta de argumentos para justificar las respuestas correctas que se dan. Esta situación es resumida en lo siguiente:

- Las respuestas reiteradas de estudiantes y profesores de nivel secundario, medio y superior en donde desconocen por qué cuando se usan medidas angulares en radianes no se indican las unidades.

- La ausencia de argumentos entre estudiantes y profesores del área de nivel medio y superior, distintos a la memoria (como 'leyes'), para establecer porque en matemáticas superiores la medida más conveniente para un ángulo es el radián.

Específicamente se identificaron dos principales señales de ruptura conceptual entre los docentes y alumnos, con respecto a las unidades angulares; dificultad para elegir medida para la unidad angular (el grado o el radián) y falta de conciencia sobre el por qué de la transición de los radianes a los números reales. Así quedo de manifiesto en las siguientes declaraciones realizada por los docentes:



Re: Empecemos
de *Profesor 2* - lunes, 1 de diciembre de 2008, 13:53

Hola a todos

Cuando inicie el cuestionario me tope con la disyuntiva de resolverlo en radianes o grados.

Re: Empecemos
de *Profesor 3* - lunes, 1 de diciembre de 2008, 16:41

Buen día.

Con respecto a la primera pregunta sobre los problemas y dudas pienso que la principal duda se originó con respecto al tema de utilizar radianes o grados.

Fig. 4.30 Declaración del profesor sobre la dificultad en la elección de la unidad angular.

Ante estas respuestas surge la pregunta obligada ¿Por qué la dificultad de elegir entre grados y radianes?

Los argumentos que esgrimen los docentes, los cuales surgen de la reflexión y experiencia, no son los únicos, pero los podemos circunscribir en las siguientes categorías:

I. **A los programas de estudio.-** El concepto de radián no aparece en los planes de estudio de educación primaria ni de secundaria y sólo aparece como un sistema más de medición en el nivel de bachillerato.

Re: Empecemos
de *Profesor 4* - martes, 2 de diciembre de 2008, 19:17

Creo que nos aferramos a los grados por que la medida de ángulos en radianes es un concepto que los profesores no tienen institucionalizado, es por ello, que el paso de trabajar con grados a trabajar con radianes es abordado de manera muy superficial y expositivamente.

Fig. 4.31 Argumentos que esgrimen los docentes.

II. **En la forma de enseñanza.-** En el quehacer docente se favorece la enseñanza de la medición de los ángulos en grados y únicamente se enseña la equivalencia entre los sistemas para el tránsito entre éstos, además, sin advertirse el valor del significado que tiene el radián para la construcción del concepto de FT. Además la expresión de la unidad angular en radianes de la forma $k\pi$, ya que es común expresar la unidad en múltiplo o submúltiplos de π, le adjudica al concepto de radián como unidad angular mayor abstracción dificultando el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Re: Actividad 1
de *Profesor 1* - martes, 2 de diciembre de 2008, 02:17

Frente a las preguntas que me plantea pensaba que siento que muchas veces nuestros alumnos se aferran a los grados porque siempre los hacemos trabajar en sistema sexagesimal y de repente aparece esta misteriosa unidad que es el radian que les es de muy dificil interpretacion.

Fig. 4.32 Argumentos que esgrimen los docentes.

III. **La tecnología.-** Se ha sometido el conocimiento de las FT a la mecanización del uso de las calculadoras con FT sin ser reflexivos sobre los diferentes modos de operar la información que se introduce, ni de comprender la información que nos arroja.

IV. **El uso de los grados como producto de una costumbre didáctica**.- Esta categoría fue la más recurrente entre los docentes y se manifestó de la siguiente manera: "*...desde niños acostumbramos a ver las cosas desde un punto de vista, es famosa la tradición que los ángulos se miden con el transportador y en grados sexagesimales, como el uso de los ángulos en grados es más frecuente es fácil usarlos en la vida diaria, es más cómodo manejar los grados…, el concepto de grado aparece en su curricula desde muy pequeños y es algo que les es familiar y que se hace presente en su vida diaria, ...se debe en gran medida a las herramientas que utilizamos en la primaria, secundaria y preparatoria como el transportador".*

Dentro de la última categoría se destaca la siguiente aportación, la cual duplicamos de manera íntegra por su valor argumentativo.

Re: Empecemos
de *Profesor 5* - martes, 2 de diciembre de 2008, 12:47

El uso de los grados sexagesimales para la medición de los ángulos, me da la impresión, se debe a una "costumbre" o "tradición" históricamente adquirida. El uso del sistema sexagesimal no ofrece mayor ventaja que de los radianes, a simple vista, por lo tanto ¿a qué podríamos deber su uso, sino a una situación que obedece sólo a la costumbre o tradición heredada por nosotros de parte de nuestros predecesores?

Como el uso de los grados sexagesimales es una "tradición histórica", goza de una amplia aceptación social, lo que por supuesto le entrega una "validez" como objeto matemático y, como es de esperarse, nos obliga (ya sea a nivel de currículo oficial o no) a seguirlo enseñando en la escuela, dejando de lado otros sistemas de medición (como los radianes o los grados centesimales) que no gozan de igual estatus en el plano de lo social y lo curricular. Entonces, el sistema de medición angular de los grados sexagesimales goza de **validez en el discurso institucional**, el cual está basado en una **"tradición histórica" adquirida**, más que en alguna **ventaja intrínseca** como sistema de medición.

Dado este escenario, la decisión del uso o no uso de los sistemas de medición angular basada en grados o radianes, es una decisión bastante arbitraria y que, según mi opinión, no se ha sometido a una real discusión, respecto de los alcances, obstáculos y ventajas que podrían ofrecer cada uno de los sistemas de medición, desde un punto de vista general. Ya en la escuela, no se ha tomado en cuenta la "pertinencia didáctica" en la enseñanza de estos sistemas de medición angular, lo que trae como consecuencia que la elección del sistema de medición angular, a ser enseñado en la escuela, también sea arbitraria.

Fig. 4.33 Argumentos que esgrimen los docentes.

Las respuestas coinciden al presentar el concepto de FT como producto de todo un proceso lógico y coherente de conceptos trigonométricos que evolucionó.

Si bien y aunque no se planteó obtener alternativas de solución a la problemática bosquejada, los docentes en los diferentes equipos de trabajo del foro, plasmaron en forma recurrente las siguientes ideas que resultan atractivas:

- ✓ Integrar el concepto de las unidades angulares en radianes en los programas de estudio desde la primaria.

- ✓ Hacer natural, volver una costumbre medir en radianes.

Re: Evolución grado-radián-real
de *Profesor 6* - miércoles, 3 de diciembre de 2008, 19:47

En general en matemática ocurre que algunas cosas surgen como necesidad de otros, y no simlemente por el hecho de "hacer matemática". Por otra parte es cierto que la tradición nos lleva a seguir con el sistema sexagesimal. Sería bueno introducir la noción de ambos sistemas desde chicos para que sea natural su uso y equivalencia

Saludos

Fig. 4.34 Alternativas de solución de los docentes a la problemática planteadas.

Con base a la exploración cognitiva realizada a profesores y estudiantes de matemáticas, podemos, al igual que Méndez (2008), reportar rupturas conceptuales asociadas a diferentes costumbres didácticas, que consideran como "natural" la medida del ángulo en grados en la actividad escolar. Así la contradicción entre el significado matemático y el significado construido por el discurso matemático escolar es la fuente de rupturas conceptuales. Tales rupturas condicionan diferentes concepciones en relación a las funciones trigonométricas presentes en estudiantes y profesores de Nivel Superior.

El uso recurrente del sistema sexagesimal (los grados sexagesimales), para la medición de los ángulos, da la impresión de darse a raíz de una "costumbre" o "tradición" históricamente adquirida. La definición del grado como medida angular es arbitraria, división de la circunferencia en 360 partes, no hay un fundamento matemático. Consiguientemente, surge la interrogante de a qué podríamos deber tan recurrente uso, sino a una situación que obedece sólo a la costumbre o tradición heredada de nuestros predecesores.

Tal reflexión surge al seno de la discusión en el foro y recibe una respuesta por parte de un profesor, duplicamos lo dicho ante su valor argumentativo:

> *"Como el uso de los grados sexagesimales es una "tradición histórica", goza de una amplia aceptación social, lo que por supuesto le entrega una "validez" como objeto matemático y, como es de esperarse, nos obliga (ya sea a nivel de currículo oficial o no) a seguirlo enseñando en la escuela, dejando de lado otros sistemas de medición (como los radianes o los grados centesimales) que no gozan de igual estatus en el plano de lo social y lo curricular. Entonces, el sistema de medición angular de los grados sexagesimales goza de **validez en el discurso institucional**, el cual está basado en una **"tradición histórica" adquirida**, más que en alguna **ventaja intrínseca** como sistema de medición.*
>
> *Dado este escenario, la decisión del uso o no uso de los sistemas de medición angular basada en grados o radianes, es una decisión bastante arbitraria y que,*

según mi opinión, no se ha sometido a una real discusión, respecto de los alcances, obstáculos y ventajas que podrían ofrecer cada uno de los sistemas de medición, desde un punto de vista general. Ya en la escuela, no se ha tomado en cuenta la "pertinencia didáctica" en la enseñanza de estos sistemas de medición angular, lo que trae como consecuencia que la elección del sistema de medición angular, a ser enseñado en la escuela, también sea arbitraria".

4.4. Conclusión del Análisis Cognitivo.

Un objeto de saber sólo llega a la existencia como tal, en el campo de la conciencia de los agentes del sistema de enseñanza, cuando su inserción en el sistema se presenta como útil para la economía del sistema didáctico. Esto no significa decir que un objeto de saber sólo se identifica como objeto a enseñar a partir del momento en que el problema didáctico de su transposición en objeto de enseñanza estuviera resuelto: el trabajo de la transposición didáctica es un trabajo que se continúa después de la introducción didáctica del objeto del saber (Chevallard, 1998).

Una explicación de las rupturas conceptuales reportadas referente a la transición *grados→radianes↔reales* es el de considerar a ésta como una ***"dificultad proptomatemática"*** (denominado por Chevallard). Una dificultad de este tipo surge de la falta de *dominio de una capacidad requerida por el contrato didáctico para su buen entendimiento.* Las ***nociones protomatemáticas***, como puede ser considerada la noción de transición de las unidades angulares, se sitúa en un nivel *implícito* más profundo (para el docente y para el alumno). Este carácter implícito se expresa en el contrato didáctico por el hecho de que *estas nociones son obvias* salvo, precisamente, cuando se produce dificultad protomatemática y ruptura del contrato.

La noción protomatemática conforma una capa más profunda en el contrato didáctico, por debajo del acto de enseñanza o paralelo a éste se encuentra la noción protomatemática que permite evaluar en el alumno las competencias de capacidades a través de la evaluación del desempeño. El ejercicio de tales capacidades no se ejecuta en la enseñanza sino en contextos de situación específicos.

La transición de las unidades angulares grados→radianes↔reales, es una noción cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de manera que la noción misma, no es reconocida ni como objeto de estudio ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

En base a las reflexiones hechas a lo largo del desarrollo de la investigación se brindan indicios para considerar el uso del grado, como unidad angular, como una costumbre didáctica históricamente adquirida; distinción con la que no goza el radián como medida del ángulo. Este es un síntoma incuestionable de que es la **transposición didáctica** del concepto de radián como unidad angular, la que no se ha arraigado en el escenario escolar y que en consecuencia no goza de una validez institucional.

Capítulo 5

Notas sobre la Epistemología y Transposición Didáctica del Radián Como Unidad de Medida Angular

Los estudios de tipo epistemológico brindan explicaciones sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, al analizar su origen y desarrollo de los criterios y condiciones de su validez, su consistencia lógica, entre otras cosas (Castañeda, 2008). En el marco de este estudio es posible llevar la investigación a enfoques más específicos que proveen explicaciones detalladas sobre los procesos por los que se desarrolla una idea matemática, observando las condiciones de desarrollos pasados, los momentos en los que se negocian y agregan significados, ampliándose campos de estudio o puntos en la historia en los que se destacan ideas y nociones asociadas a los conceptos en cuestión.

Un acercamiento a cómo se crea la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales* está en el análisis de carácter epistemológico, que ofrece explicación de la naturaleza de tal transición; al estudiar su origen y desarrollo de los criterios y condiciones de su validez, su consistencia lógica y el devenir del radián como unidad angular.

Con esta finalidad se realiza un estudio en los diferentes contextos en que está implícita la transición *grados→radianes↔reales*, desde la naturaleza y origen de la unidad angular, tanto del grado como del radián, hasta el análisis de momentos en la historia, en que se acentúan y agregan significados a tal transición, como lo es en la asociación con un número real a la longitud del arco; el tratamiento analítico a la FT, más allá de los principios básicos trigonométricos-geométricos; la necesidad de homogeneidad en las ecuaciones en donde está implícita la unidad angular; el surgimiento del radián y a la transposición didáctica del radián como medida de unidad angular.

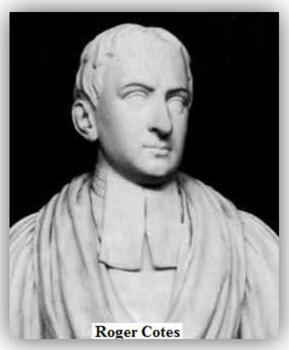
5.1 EPISTEMOLOGÍA DE LA UNIDAD ANGULAR.

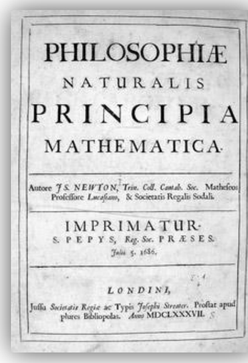
5.1.1 ORIGEN DEL GRADO COMO MEDIDA DE LA UNIDAD ANGULAR.

El grado como unidad de medida angular, tiene su origen en una de las primeras civilizaciones de Mesopotamia, la Sumeria. Los sumerios desarrollaron las bases de la mayoría de las ciencias prácticas de la humanidad; establecieron la vara de tres pies y la libra, pesos y medidas que siguen utilizándose en la actualidad. **Gudea** (El "llamado"), importante personaje del Renacimiento de Sumeria, gobernador de Lagash (2141-2122 a. C.), creó el sistema duodecimal, o por docenas, cuya unidad, el 12, es divisible por 2, 3 y 4. Como consecuencia, el círculo en cuatro cuadrantes se divide en 360 grados. Gudea dividió también el año en doce meses, los días en 24 horas, las horas en 60 minutos y los minutos en 60 segundos. Muchos de estos logros científicos y tecnológicos de la cultura Mesopotámica fueron adoptados por los griegos y de ellos a la humanidad.

El grado ha sido utilizado todo este tiempo, hasta nuestros días, lo que le brinda un gran reconocimiento, costumbre didáctica históricamente adquirida. Sin embargo, actualmente la medición del ángulo en grado ya no es suficiente en el contexto de una matemática de la variación y el cambio, aunque su utilidad pueda estar justificada para el estudio de la trigonometría desde la perspectiva del triángulo rectángulo, además de que el uso de los grados común para algunos problemas y actividades, como la navegación y la construcción; el radián como unidad angular, puede desplazar sin dificultades al grado en este contexto, sólo es cuestión de aceptarlo y favorecer su funcionalidad.

5.1.2 CONCEPCIÓN DEL RADIÁN COMO MEDIDA ANGULAR




PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

El origen del grado como unidad angular se remonta a las primeras civilizaciones de Mesopotamia, hace ya 4100 años. En contraste, es hasta el año 1714 d. C., cuando aparece el primer antecedente que da lugar a la construcción del radián como unidad angular; no han pasado ni 300 años. Gracias al genio excepcional del matemático y físico inglés, y de quien Newton llegó a comentar alguna vez, "*Si Cotes hubiera vivido, habríamos aprendido algo*". Roger Cotes (1682-1716), publicó la segunda edición de Principia de Newton con un prefacio original (obra en que Newton asocia las leyes astronómicas de Kepler y la ley centrípeta de Huygens en el movimiento circular para establecer el principio de su célebre ley de la gravitación universal). Cotes murió el 5 de junio de 1716, dejando sin terminar una serie de investigaciones elaboradas en óptica y una gran cantidad de manuscritos inéditos. Contribuyó con dos memorias a las transacciones filosóficas; uno es *"Logometría"*, que analiza el cálculo de logaritmos y algunas aplicaciones del cálculo infinitesimal y en la que se construye con éxito la espiral logarítmica y el otro corresponde a la "*Descripción del gran meteoro ardiente visto el 6 de* *marzo de 1716"*. Después de su muerte, sus documentos fueron recopilados y publicados por su primo y sucesor, el Dr. Robert Smith con el título de "*Harmonia Mensurarum"* (1722). Esta labor incluyó la *"Logometría,"* el teorema de trigonométria conocido como *"Teorema en el Círculo de Cotes"* y un análisis de las curvas conocidas como *"Espirales de Cotes"*, que se produce en la ruta descrita por una partícula bajo la influencia de una fuerza central que varía inversamente como el cubo de la distancia.

El concepto de radián como medida angular, en oposición a la medida del ángulo en grados, debe ser acreditado a Roger Cotes en 1714. Este concibió el radián en todo menos en el nombre, y reconoció su carácter natural como unidad de medida angular. Sobre ello Gowing[1] (2002) señala:

> *"Cotes consideró que bastante se había dicho sobre las medidas de las proporciones, y que se necesitaba una nueva palabra para el ángulo donde se percibiera el concepto de ángulo como una medida de proporción. El arco circular, interceptado por las rectas que forman un ángulo con centro en el punto de dicho ángulo era la medida natural; pero varía con el tamaño del círculo, por lo que se necesitaba de un patrón, la medida de proporción. El patrón podría ser un círculo estándar o alguna línea estándar que variará con el circulo, por ejemplo el diámetro o el lado de un polígono regular. El radio era la opción más apropiada siempre que la medida de una proporción se cambiará en la medida de un ángulo (percibido como la longitud del arco), el patrón tendría relación con el radio. Rober Smith expande sus ideas en sus notas como editor, sigue de cerca la forma del argumento en la Proposición I de Logometría, donde se muestra que el patrón de proporción es 2.71828… (es decir, la relación entre cuyos medidas siempre es igual a un patrón). Smith llega a la idea de un patrón de medida angular, es decir, prospera la idea de un ángulo cuya medida es siempre igual al radio, y muestra que es 57.295 grados."*

Este es probablemente la primera publicación que se tenga registro sobre el concepto de radián como unidad de medida angular, y no es casual que sea en el marco del desarrollo de la concepción del mismo cálculo. El manejo simultáneo de los arcos (su proporción respecto al círculo) y los radianes (expresados en términos de π) surge a partir de los problemas que trae consigo la matemática de la variación y el cambio. Lo anterior responde a una de las interrogantes planteadas al inicio de la investigación, "¿Por qué en matemáticas superiores la medida más conveniente para un ángulo es el radián?".

Ahora la interrogante, que surge desde un contexto del cálculo, es ¿cómo se obtiene que un radio sea igual a 57.295°?

En tanto a esta incógnita el mismo referente de Gowing (2002) señala:

> *"Smith primero deriva la serie* **arc sen m***, donde* ***m*** *es la medida de un ángulo, utiliza el método de Newton de revocación de las series para encontrar una serie* ***m****, y deduce que* ***m*** *es igual al patrón de proporcionalidad al que le fija con* ***M****.*

[1] Instituto Royal Centro de la historia de la ciencia y tecnología, Reino Unido.

De esta manera encuentra la serie para el **sen** *del ángulo cuya medida es igual al patrón de proporcionalidad –patrón de proporcionalidad angular–. Es análogo, paso a paso, a la determinación de Cotes de la relación modular en Logometria, la Proposición 1. Smith dice que lo encontró en un documento pequeño de Cotes; lamentablemente, no ha sobrevivido este documento."*

Aunque esto es sólo un bosquejo que no responde íntegramente a la interrogante.

La palabra "radián" que puede significar "radio en el ángulo", parece haberse originado alrededor de 1870 producto del intercambio de ideas entre Thomas Muir y James Thomson[2], respecto al factor de proporción concebido por Cotes para la medida angular. El término radianes apareció por primera vez impreso el 5 de junio de 1873 en preguntas de examen fijados por James Thomson en el Queen's College, Belfast en 1873, que después de su muerte, a manera de una colección, se reeditaron sus principales informes de investigación en física e ingeniería. Se afirma que es en este libro, "*Collected Papers in Physics and Engineering by James Thomson",* donde por primera vez aparece y es utilizado el concepto de radián.

Por lo investigado podemos concluir que el radián, como concepto de unidad de medida angular, tiene escasamente 136 años de vida escolar; tiempo que resulta insuficiente para dispersar y adecuar el concepto en cada uno de los niveles de educación, ya que no se ha madurado la concepción del concepto para permitir su institucionalización en el contexto escolar.

Fig. 5.1 Línea de tiempo de la unidad de medida angular

[2] **James Thomson** (16 febrero 1822 **-** 8 de mayo de 1892) fue un ingeniero y físico cuya reputación es importante a pesar de que es eclipsado por su hermano menor William Thomson (Lord Kelvin). Tomas Muir y James Thomson fueron profesores en St. Andrews y Glasgow.

5.1.3 Necesidad de una unidad de medida que mantenga la homogeneidad de las ecuaciones.

Como una forma matemáticamente adecuada de medir longitudes curvas es que surge el radián; proporción que existe entre la longitud de la circunferencia y su radio, permite establecer *una correspondencia entre ángulos y arcos*, esta manera de medir ángulos está basada en el número π. Este número no es arbitrario, la longitud D del diámetro y la longitud L correspondiente de cada circunferencia están ligadas por el número π,

$$\frac{L}{D} = \pi \quad \text{ó} \quad L = \pi D \quad \text{ó} \quad L = 2\pi r$$

Un radián, es un ángulo, con vértice en el centro de una circunferencia, **que subtiende un arco cuya longitud es igual a la de radio**.

En general, si un ángulo θ, con vértice en el centro de una circunferencia de radio r, subtiende un arco de longitud ℓ, para expresarlo en radianes se debe dividir ℓ entre el radio r.

$$\frac{l}{r} = \theta \qquad \text{(en radianes)},$$

De esta expresión se deriva

$$l = r\theta \quad (arco = radio \times ángulo).$$

Para que la fórmula anterior funcione el ángulo debe manejarse en radianes, ya que el uso de grados vuelve inoperable la ecuación, ya no es funcional.

Por ejemplo:

¿Cuál es la longitud del arco interceptado por el ángulo de 90° en un círculo cuyo radio es de 10 cm?

$$\boldsymbol{l = r\theta}$$

En grados.

$$l = (10\ cm)(90°) = ¿\,\mathbf{900\ cm°}\ \text{ó}\ \mathbf{900°cm}\,?$$

En radianes.

$$l = (10\ cm)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{2}\ cm = 7.854\ cm$$

La postura del uso del radián como unidad angular va más allá del argumento de que “el uso de radián simplifica muchas fórmulas” (Maor, 1998). Por ejemplo, un arco circular de medida angular θ (donde θ está en radianes) subtiende una longitud de arco dada por $s = r\theta$; pero si θ está en grados, sólo basta con integrar a la expresión el factor de conversión $\pi/180°$ y la fórmula correspondiente es $s = \pi r\theta/180°$. De igual manera, el área de un sector circular de medida angular θ es $A = \theta r^2/2$ para θ en radianes y $A = \pi r^2 \theta / 360°$ para θ en grados[3].

Se conjetura que el factor $\pi/180$ altera matemáticamente éstas y cualquier otra ecuación ya que es una relación entre dos sistemas diferentes, es una equivalencia y se está considerando como una igualdad ¡ $\pi/180 = 1$! Es tan desatinado como considerar que $2 = 10$, por qué la concepción de la idea de dos debe ser el mismo en diferente sistema numérico, como es el decimal y el binario.

Por otro lado, Navarro (2004), en un análisis didáctico da cuenta de la forma en que se aborda el límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

Obtenido mediante la utilización de trazos geométricos en círculo unitario y considerando al ángulo medido en radianes, se cumple y queda demostrado el límite de la expresión. Pero haciendo uso de los grados, como unidad angular, el resultado cambia totalmente y no se cumple con el límite de la función.

$$\frac{sen\ \theta}{\theta} = \frac{sen\ x}{\frac{180\ x}{\pi}} = grados$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ \theta}{\theta} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\pi}{180} . \frac{sen\ x}{x} \right) = \frac{\pi}{180} = 0.0174 \ldots$$

Este fenómeno también se hace presente, al calcular este límite, en calculadoras de última generación como es la calculadora ClassPad300 Plus OS ver. 2.2 de Casio. Cabe subrayar que este equipo está configurado para que, por defecto, el sistema operativo del equipo trabaje las unidades angulares del sistema cíclico. En equipos no tan modernos es más común que éstos se encuentren configurados para que, por defecto, el sistema operativo trabaje los ángulos en el sistema sexagesimal, con grados.

Al introducir el límite mencionado en la calculadora ClassPad y manejar la configuración para la unidad angular se tiene:

[3] Tomado de Montiel, 2005.

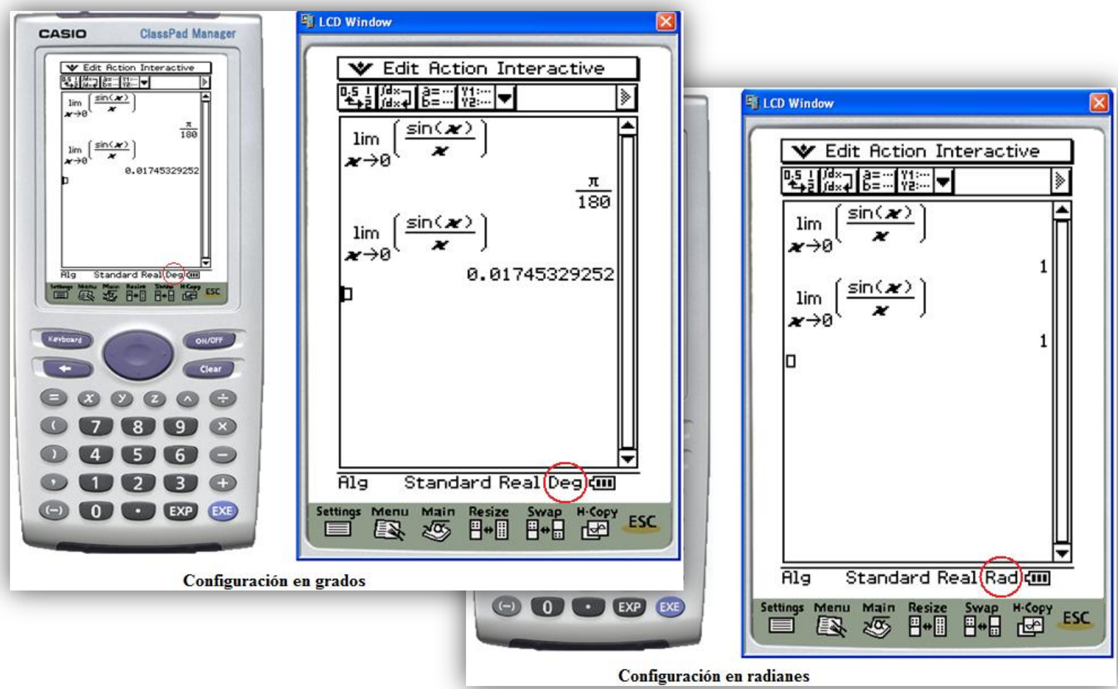
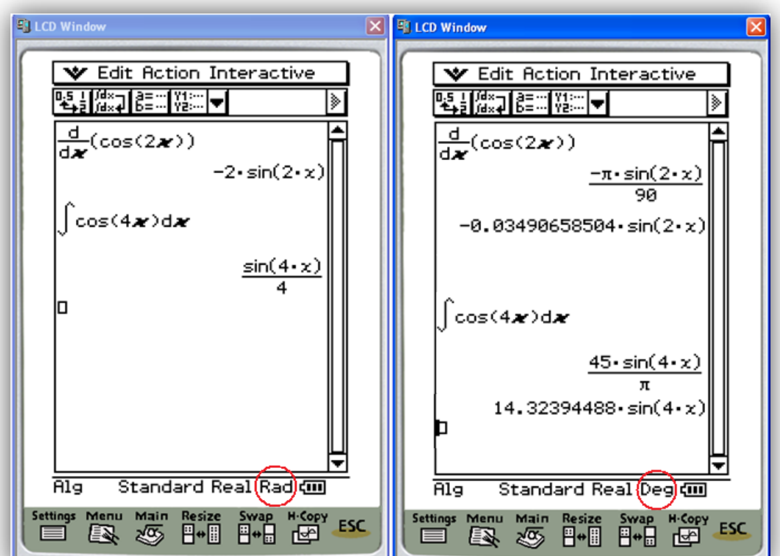


Fig. 5.2 Las unidades angulares en el contexto de las calculadoras.

El $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$, es la base para la conformación de muchas otras identidades matemáticas, como:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x=\cos x \qquad \frac{d}{dx}cos\ x=-senx \qquad \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen} x=-\operatorname{sen}\ x$$

Para acentuar como el factor $\pi/180$ altera matemáticamente cualquier ecuación, se muestra la operatividad que se tiene al utilizar uno u otro sistema de medida angular en operaciones de cálculo difencial e integral.

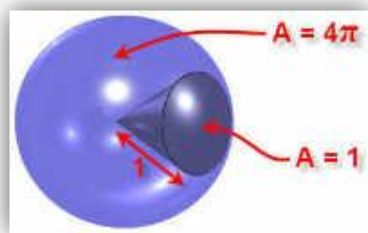


Se puede concluir que la concepción de radián, como unidad de medida angular, es matemáticamente adecuada para medir longitudes curvas, ya que permite establecer una correspondencia entre ángulos y arcos. Esta manera de medir el ángulo basada en el número π, número no arbitrario para la circunferencia. El radián es la unidad de medida que aporta homogeneidad en las ecuaciones matemáticas.

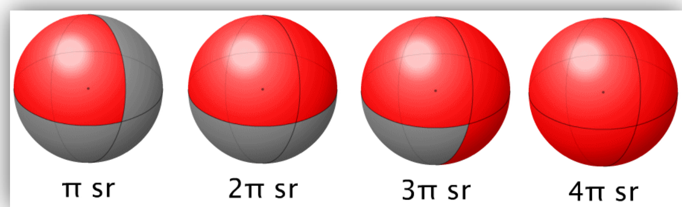
5.2 La transposición didáctica del radián como unidad de medida angular.

5.2.1 El uso del grado como práctica enraizada en el campo del actuar social

No es fácil cambiar paradigmas. Esta tan arraigada la costumbre de medir ángulos en grados que da la impresión de ser la única manera "natural" para hacerlo. Cuando se nos presenta como una propuesta al radián –matemáticamente más conveniente que el grado– este no es aceptado. En diferentes escenarios se ha tratado de adecuar dicha unidad para continuar su operación y demostrar su funcionalidad, por ejemplo, en la dirección electrónica[4] http://www.dei.uc.edu.py/tai2002/ANTENA/webtai.htm#contenido, sitio perteneciente al Departamento de Electrónica e Informática de la Universidad Católica "Nuestra Señora de la Asunción" de Asunción Paraguay, se presenta contenido correspondiente a las antenas parabólicas, que incluye teoría correspondiente al tema de "Ángulo Sólido" e implica a una unidad derivada conceptualmente del radián, el estereorradián.



Estereorradián (sr)



Una esfera de radio 1 (llamada una "esfera unidad"):

- tiene una superficie de 4π sr,
- y un estereorradián "cubriría" un área de **1**[5].

[4] Departamento de Electrónica e Informática (sin fecha). *Antenas parabólicas*. Ángulo sólido [en línea]. Asunción, Paraguay: Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción. Recuperado el 25 de febrero de 2009, de http://www.dei.uc.edu.py/tai2002/ANTENA/webtai.htm#contenido

[5] Pierce, Rod. "Disfruta Las Matemáticas" (15 de agosto del 2008). *Geometría*. Estereorradián [en línea]. Recuperado el 10 de marzo de 2010 de http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/estereorradian.html

Reproduzco fielmente tal referente para su análisis.

Angulo Sólido

En un sistema de coordenadas polares, un elemento de superficie puede ser expresado como:

$$dA = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\phi\ \ \rho\,d\theta = \rho^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta\,d\phi \quad (fig.13)\ \textbf{(8)}$$

En la *fig.14* se ven tres elementos de superficies según las distancias: ρ_1, ρ_2 y ρ_3 que pueden ser expresados como sigue:

$$dA_1 = \rho_1^2\,sen(\theta)\,d\theta\,d\phi \qquad dA_2 = \rho_2^2\,sen(\theta)\,d\theta\,d\phi \qquad dA_3 = \rho_3^2\,sen(\theta)\,d\theta\,d\phi\ \textbf{(9)}$$

Los distintos elementos de área dependen del cuadrado de la distancia considerada. Pero hay un elemento que es común a todas ellas y es: $sen(\Theta)\,d\Theta\,d\phi$.

Si a cada elemento de área se lo refiere a su correspondiente distancia al cuadrado se tiene:

$$\frac{dA_1}{\rho_1^2} = \frac{dA_2}{\rho_2^2} = \frac{dA_3}{\rho_3^2} = \underline{sen(\theta)\,d\theta\,d\phi}\ \textbf{(10)}$$

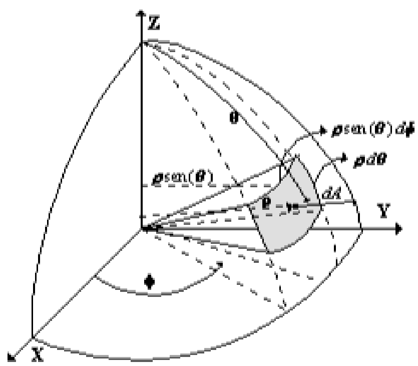


Figura 13(fig.de www.tubbs.com.ar)

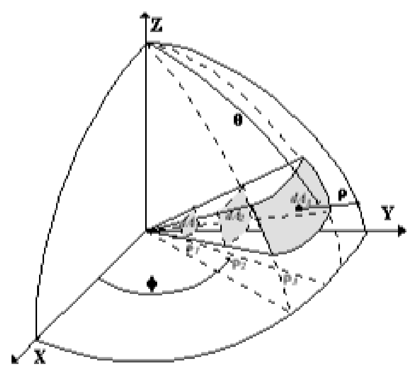


Figura 14(fig.de www.tubbs.com.ar)

Esta relación es definida como elemento de ángulo sólido y es común a las superficies consideradas. Así:

$$d\Omega = sen(\Theta)\,d\Theta\,d\phi\ \textbf{(11)}$$

Si la superficie que representa la fig.13 fuese una esfera, el ángulo sólido será:

$$\Omega = \int_0^{\pi} sen(\theta)\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -cos(\theta)\Big|_0^{\pi}\ \theta\Big|_0^{2\pi} = 2 \cdot 2\pi \quad \textbf{(12)}$$

$\therefore \Omega = 4\pi$ estereoradián. Puede ser escrito como: **(13)**

$\Omega = 2[radián] \cdot 2\pi[radián] = 4\pi[radián]^2$ o estereoradián **(14)**

Razono que todo el proceso está bien hasta el punto (13) debido a que en la parte (14), se incluye el factor $\pi/180$ –como si fuera la unidad– con la única finalidad de trabajar en grados, ya que "es más fácil imaginar un ángulo en grados que en radianes", todo se vuelve matemáticamente incorrecto y deja de ser funcional.

El ángulo sólido puede ser expresado en grados. Así:

$$\Omega = 2\frac{180}{\pi}\,Grados \cdot 2\pi\frac{180}{\pi}\,Grados = 4\pi\frac{180^2}{\pi^2}\,Grados^2 \quad \textbf{(15)}$$

$$\Omega = 4\pi\ radián^2 = 41256\ gra\,dos^2 \quad \textbf{(16)}$$

En algunos casos se expresa el ángulo sólido en grados cuadrados. Es más fácil imaginar un ángulo en grados que en radianes, y es útil para el cálculo de ganancia de antenas con método aproximado.

Fig. 5.3 Ángulo sólido cómo "grados al cuadrado"

En otro espacio de la web http://ferman.fortunecity.es/grados-cuadrados.html[6] una página personal que ofrece una teoría sobre la existencia y aplicación de los "*grados cuadrados"* en la geometría, se obtiene, a través del mismo factor $\pi/180$, la misma expresión que en el caso anterior.

"La esfera tiene **41.252961** grados cuadrados"

Además se plantea la existencia de los ángulos cúbicos expresados en grados cúbicos por ser una realidad geométrica. La intención no es cuestionar o validar la teoría que se presenta, sino identificar la necesidad y convencimiento que los grados pueden ser utilizados en otra dimensión, como es en la superficie de una esfera en grados cuadrados.

5.2.2 EL RADIÁN UNIDAD ANGULAR RECONOCIDA POR EL S. I.

El SI (del francés *Le Système International d'Unités*), nombre adoptado por la XI Conferencia General de Pesas y Medidas[7], celebrada en París en 1960, para un sistema universal, unificado y coherente de unidades de medida, basado en el sistema mks (metro-kilogramo-segundo). En este sistema el radián es la unidad natural de la medida angular, dicho esto tal medida debería ser adoptada de manera universal para forjar una comunicación científica apropiada y efectiva. Cabe destacar que para el mismo SI no le fue fácil definir y clasificar al radián. En la Conferencia de 1960 se definieron los patrones para seis unidades básicas o fundamentales y las unidades derivadas que son obtenidas a través de un sistema de ecuaciones de cantidad y de las unidades básicas. En un grupo aparte se definieron dos unidades suplementarias, estas fueron el radián y estereorradián. Posteriormente estas dos unidades suplementarias se suprimieron como una clase

[6] Mancebo, F. (2001). *Página personal*. Grados cuadrados [en línea]. España. Recuperado el 10 de noviembre de 2009 de http://ferman.fortunecity.es/grados-cuadrados.html

[7] La Conferencia General de Pesas y Medidas, es la máxima autoridad de la metrología científica y es la que aprueba las nuevas definiciones del SI y recomienda a los países que lo integren a sus legislaciones.

independiente dentro del Sistema Internacional en la XX Conferencia General de Pesas y Medidas (1995); quedando así el radián junto con el estereorradián, incorporado al SI como unidades derivadas.

Actualmente el SI consta de siete unidades básicas (en 1971 se añadió una séptima unidad fundamental, el mol). Son las unidades sobre las que se fundamenta el sistema y de cuya combinación se obtienen todas las unidades derivadas. La magnitud correspondiente, el nombre de la unidad y su símbolo se indican en la siguiente tabla[8]:

Table 1. SI base units

Base quantity	SI base unit: Name	SI base unit: Symbol
length	meter	m
mass	kilogram	kg
time	second	s
electric current	ampere	A
thermodynamic temperature	kelvin	K
amount of substance	mole	mol
luminous intensity	candela	cd

Tabla 5.1 Unidades básicas del SI.

Las otras unidades que conforman el SI, las derivadas, se forman por combinaciones simples de las unidades básicas o fundamentales. El radián, que inicialmente fue catalogado como una unidad suplementaria, actualmente es considerado por el SI como una unidad derivada, ya que se define a partir de la unidad básica de longitud $\frac{m}{m} = m \cdot m^{-1} = 1$. Del sitio oficial web del SI tomamos la siguiente tabla 5.2.

[8] International System of Units. (diciembre de 2003) International system of units (SI). *Derived quantity*. [en línea]. Recuperado el 22 de noviembre de 2009 de http://physics.nist.gov/cuu/Units/

Table 3. SI derived units with special names and symbols

Derived quantity	SI derived unit			
	Name	Symbol	Expression in terms of other SI units	Expression in terms of SI base units
plane angle	radian[a]	rad	-	$m \cdot m^{-1} = 1$ [b]
solid angle	steradian[a]	sr [c]	-	$m^2 \cdot m^{-2} = 1$ [b]
frequency	hertz	Hz	-	s^{-1}

[a] The radian and steradian may be used advantageously in expressions for derived units to distinguish between quantities of a different nature but of the same dimension; some examples are given in Table 4.

[b] In practice, the symbols rad and sr are used where appropriate, but the derived unit "1" is generally omitted.

[c] In photometry, the unit name steradian and the unit symbol sr are usually retained in expressions for derived units.

Tabla 5.2 Unidades derivadas en el SI con nombres y símbolos especiales.

Hay que reiterar que las unidades fundamentales son producto de una convención, acuerdo internacional para estandarizar las unidades de cada magnitud independiente entre sí. Definir una unidad en términos referidos a algún fenómeno natural constante e invariable, de reproducción viable, como por ejemplo el metro, patrón para la longitud, que se había definido como la distancia entre dos rayas finas sobre una barra hecha de una aleación de platino e iridio y conservada en París, que en la conferencia de 1960 se redefinió como 1.650.763,73 longitudes de onda de la luz anaranjada-rojiza emitida por el isótopo criptón 86, y se volvió a redefinirse en 1983 como la longitud recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299.792.458 de segundo; no deja de ser elegida arbitrariamente.

En base a la lógica del párrafo anterior y debido a que el grado –como unidad angular– es una unidad arbitraria, producto de la división de la circunferencia en 360 partes iguales, salta la interrogante ¿Por qué no seguir utilizando el grado como medida del ángulo, sí más de una de las unidades consideradas como fundamentales son arbitrarias? La respuesta es que el radián como unidad angular, es un concepto matemático que está vinculado con el valor de π, número irracional más famoso de la historia, este número no es arbitrario para el círculo, sino que expresa la razón entre la circunferencia y el diámetro.

El radián es una proporción de entre dos longitudes de la circunferencia, cualquier circunferencia tiene de longitud 2π radianes, 2π rad o 6.298 rad. El símbolo “rad” es una forma de decir que el radio cabe 2π veces en la circunferencia y “veces” no es alguna unidad de medida.

Es importante destacar que al pie de la tabla 5.2 –parte de la que se encuentra en el sitio web de International System of Units– se hallan cuatro anotaciones y tres de estas hacen referencia al radián y estereorradián.

(a) El radián y estereorradián pueden ser utilizados ventajosamente en expresiones para unidades derivadas para distinguir entre las cantidades de naturaleza diferente pero de la misma dimensión, algunos ejemplos se dan en la Tabla 4.

(b) En la práctica, los símbolos rad y sr se utilizan en su caso, pero la unidad derivada "1" es frecuentemente ignorado.

(c) En fotometría, el estereorradián nombre de la unidad y el símbolo sr unidad son habitualmente elegidos en las expresiones de unidades derivadas.

Señala que el símbolo rad suele ser utilizado ventajosamente, omitiéndolo por ser una magnitud sin dimensiones o colocándolo para hacer énfasis del sistema de medición empleado diferenciándolo así del grado.

(a) The radian and steradian may be used advantageously in expressions for derived units to distinguish between quantities of a different nature but of the same dimension; some examples are given in Table 4.
(b) In practice, the symbols rad and sr are used where appropriate, but the derived unit "1" is generally omitted.

Considero que esta disyuntiva es producto de la transición del grado al radián como unidad angular. En la medida en que el radián sea aceptado como única unidad angular estos dilemas se desvanecerán.

En la tabla 5.2, se presentan los ejemplos de nombres y símbolos especiales de las unidades derivadas, y es de notar la ausencia del ángulo y la presencia del radian y estereorradián en la conformación de éstas.

Table 4. Examples of SI derived units whose names and symbols include SI derived units with special names and symbols

	SI derived unit	
dynamic viscosity	pascal second	Pa·s
moment of force	newton meter	N·m
surface tension	newton per meter	N/m
angular velocity	radian per second	rad/s
angular acceleration	radian per second squared	rad/s^2
heat flux density, irradiance	watt per square meter	W/m^2
heat capacity, entropy	joule per kelvin	J/K
specific heat capacity, specific entropy	joule per kilogram kelvin	J/(kg·K)
specific energy	joule per kilogram	J/kg
thermal conductivity	watt per meter kelvin	W/(m·K)
energy density	joule per cubic meter	J/m^3
electric field strength	volt per meter	V/m
electric charge density	coulomb per cubic meter	C/m^3
electric flux density	coulomb per square meter	C/m^2
permittivity	farad per meter	F/m
permeability	henry per meter	H/m
molar energy	joule per mole	J/mol
molar entropy, molar heat capacity	joule per mole kelvin	J/(mol·K)
exposure (x and γ rays)	coulomb per kilogram	C/kg
absorbed dose rate	gray per second	Gy/s
radiant intensity	watt per steradian	W/sr
radiance	watt per square meter steradian	W/(m^2·sr)

Tabla 5.2 Unidades derivadas con nombre y símbolo donde está implícito el radián.

Quisiera resaltar que el radián como unidad angular, no ha sido la única que ha tenido problemas para ser aceptada por la comunidad mundial, aún cuando sea la propuesta de una autoridad en la metrología con reconocimiento científico e internacional como lo es el SI. Tenemos el caso de los Estados Unidos de América, desde la creación de las primeras reformas de medidas métricas en 1790, Estados Unidos, como Francia, reconoció la importancia de un sistema uniforme de peso y medida. Sin embargo desde los primeros colonos de norteamericana se retiene y se cultiva la costumbre, de su herencia británica, de las medidas de longitud y de masa, el pie y la libra.

El SI se ha convertido en una base fundamental de las medidas científicas en todo el mundo. Se usa también para el comercio diario virtualmente en casi todos los países del mundo, una de las excepciones son los Estados Unidos de América. El Congreso ha elaborado una legislación para incitar al uso del sistema métrico, incluyendo el Acta de Conversión Métrica de 1975 y el Acta de "Omnibus Trade and Competiviness" de 1998, pero el progreso ha sido lento y penoso.

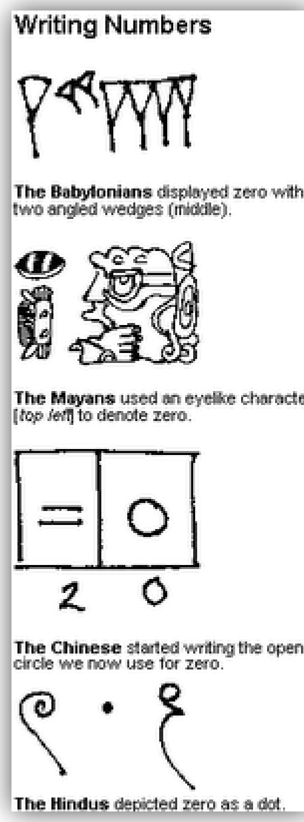

Sonda Mars Climate

El 23 de Septiembre de 1999 se informó que la sonda espacial Mars Climate, enviada por la NASA, para estudiar el clima del planeta, se estrelló en Marte y se destruyó por completo. Según fuentes de la NASA el desastre se debió a un error en la conversión al SI de unidades en los datos que se habían suministrado al ordenador a bordo. Dado que varias empresas contribuyeron en dicho proyecto, específicamente la Lockheed Martin Astronautics de Denver, encomendada a diseñar y construir la sonda espacial, y la Jet Propulsion Laboratory de Pasadena, encargada de programar los sistemas de navegación de la sonda. El error fue que la primera realizó sus medidas y proporcionó sus datos con el sistema anglosajón de unidades, mientras que la segunda utilizó el SI unidades. Así que cuando el primero le proporcionó sus datos al segundo, sin especificar el sistema de medida que empleó, el segundo lo interpretó en el SI. El resultado fue que los ordenadores de la nave realizaron los cálculos de aproximación a Marte de forma errónea, provocando que la nave quedara en una órbita equivocada, ocasionando la caída y la destrucción de la nave[9].

[9]Fernández, R. (abril de 2009). *Para libros y medios*. Exploración de Marte [en línea]. Argentina. Recuperado el 16 de diciembre de 2009, de
http://www.paralibros.com/jonas/j90926n.htm

5.2.3 Cambio de paradigma: terminar con el paradigma del uso del grado e iniciar uno para el uso del radián

No es fácil generar cambios en un sistema numérico, para muestra de ello la historia de las matemáticas nos presenta diversos pasajes que por variadas circunstancias, se resistían a un cambio muy similar al que se experimenta actualmente en la utilización de los radianes como unidad angular. Tenemos el caso de los números negativos introducidos por la pragmática mentalidad hindú, alrededor de 600 años d. C, los cuales no tuvieron aceptación durante mil años; la razón, falta de una base intuitiva. Algunos de los matemáticos más grandes como Cardan, Vieta, Descartes y Ferman se negaron a trabajar con números negativos. La historia de los números irracionales y de los números complejos es similar, aunque estos últimos aproximadamente aparecieron en el 1540 de nuestra era y sólo transcurrieron unos doscientos años hasta que su uso se normalizo. Otro caso es el número cero (0) cuyo origen se remonta, con primeras evidencias de utilización por parte de los Sumerios en Mesopotamia, hace 5000 años. Este se simbolizaba con una cuña que significaba "la ausencia de algo"; colocaron una piedra en forma de doble cuña inclinada, entre los símbolos cuneiformes, para indicar la ausencia de un número en un lugar. El símbolo cambió como notación posicional (por lo que el cero es crucial), desde el imperio babilónico y en la India. Los hindús empezaron a usar un círculo para el dígito cero (0), idea que llego a Europa por medio de los comerciantes moros y árabes, a finales de la edad media (Italia) y a principios del renacimiento (Gran Bretaña). Un edicto de 1259 d. C. prohibía a los banqueros de Florencia utilizar los símbolos infieles y en 1348, la Universidad de Padua prohibió que en la listas de precios de los libros se usaran "cifras", sino sólo letras "comunes", es decir, números romanos.[10] Sin embargo, muy pocos europeos dominaron el arte de la multiplicación y la división antes de que se importara el infiel dígito 0. Aún en contra de todo prejuicio, los números negativos, los números irracionales, los números complejos y el número cero fueron gradualmente aceptados a causa de su utilidad funcional, porque la familiaridad elimina la crítica. En *"La estructura de las revoluciones científicas"*, Thomas Kuhn escribió que *"las sucesivas transiciones de un paradigma a otro vía alguna revolución, es el patrón de desarrollo usual de la ciencia madura".*



5.2.4 La transposición didáctica del radián en libros de texto.

Un buen referente para visualizar el desenvolvimiento que está teniendo la transposición didáctica del radián como concepto de medida angular, es el análisis de los libros de texto. El desarrollo de este análisis se puede emprender desde dos líneas de investigación, una

[10] Hogben (1937).

horizontal, en el tiempo que muestre el devenir del radián como concepto de unidad angular y una vertical, que muestre su desarrollo al momento en los diferentes niveles de educación. La perspectiva adoptada es una que se nutre de ambas líneas, aunque se asiste en mayor medida del análisis vertical.

En el libro de texto de Wentworth (1915), "*Geometría plana y del espacio"*, destinado al estudio en el NMS, se presentan los contenidos como un conjunto de proposiciones enumeradas y progresivas, interpretación de la matemática como un continuo desarrollo acumulativo y lógico. Tenemos como único referente a la medida de los ángulos.

44. Medida de los ángulos. La unidad de medida para los ángulos es $\frac{1}{360}$ de un perígono, y se llama *grado*.
Se divide en 60 *minutos*, y el minuto en 60 *segundos*.
La notación 5° 13′ 12″ significa 5 grados, 13 minutos, 12 segundos.
Es evidente que un ángulo recto tiene 90°; uno de lados colineales, 180°; y un perígono, 360°.

Fig. 5.4 Medida de los ángulos en texto de principios del siglo XX

No hay ninguna referencia del radián como unidad angular, en otro apartado en el tema de circunferencia se localizó:

213. Medida de un ángulo por un arco. Vese que el valor numérico de un ángulo central (expresado en grados por ejemplo) es igual al del arco que lo subtiende. Esto se expresa diciendo que *todo ángulo central se mide por el arco que lo subtiende*, o lo que es igual, *por el arco comprendido entre sus lados.*

Fig. 5.5 Concepción de la medida de un ángulo por un arco

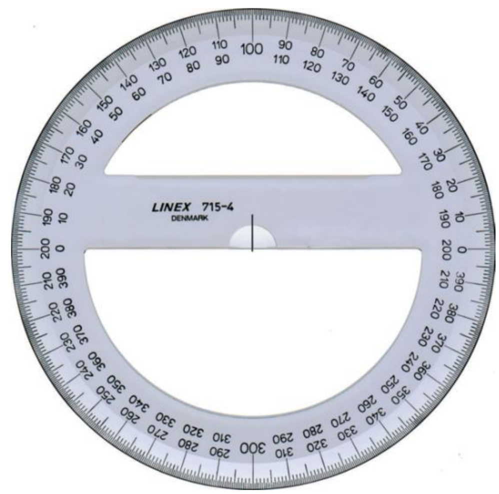
En este punto se considera que se confunde la concepción de ángulo, como abertura, con la longitud de la abertura.

5.3 Aportación de la investigación al sistema escolar

Un común denominador que arrojaron investigaciones, como respuesta a la problemática planteada, es que la medida del ángulo en radianes sea natural, es decir, hacer una costumbre didáctica medir los ángulos en radianes. Por lo que se proponen las siguientes líneas de acción a implementar en el sistema escolar:

5.3.1 El transportador en radianes

Como fruto de la investigación podemos aseverar que la utilización del transportador, desde la primaria, tiene gran impacto cognitivo y didáctico en el aprendizaje de la medición del ángulo en grados, ya que persiste la idea, en el contexto escolar, que medir los ángulos en grados es la única manera "natural" para hacerlo. Juzgamos conveniente recomendar, para la enseñanza del concepto de ángulo en la secundaria y para el bachillerato, la utilización de una herramienta que permita medir los ángulos en radianes, un transportador graduado en unidades de ángulo en radianes (o fabricarlos uno mismo como actividad didáctica), para volver natural el uso de esta unidad angular, el radián.



Transportador en grados sexagesimales. Transportador en grados centesimales.

Un prototipo del transportador en radianes:

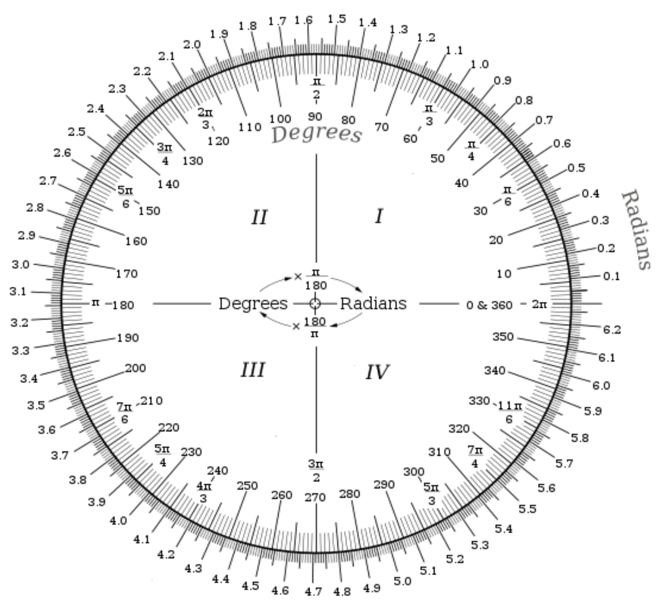


Fig. 5.5 Transportador en radianes[11]

El radián, como medida angular, ha extendido su uso a diferentes sectores en la actividad profesional como submúltiplos de la misma. El mili-radián se utiliza en la artillería y la orientación, ya que corresponde a un error de 1 m en una serie de 1000 m. La divergencia de rayos láser también normalmente se mide en mili-radianes.

[11] Wales, J. y Sanger, L. (2 noviembre de 2009). Wikipedia la enciclopedia libre. *Radian* [en línea]. Recuperado el 22 de enero de 2010 de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Degree-Radian_Conversion.svg

Unidades más pequeñas como micro-radianes (µrads) y nano-radianes (nrads) se utilizan en astronomía, y también se puede utilizar para medir la calidad del haz de láser con ultra-baja divergencia. Del mismo modo, más pequeños que los prefijos mili-son potencialmente muy útiles en la medición de ángulos pequeños.

Como múltiplos de la unidad no tienen utilidad aparente, debido principalmente a superar 2π radianes se iniciará el mismo círculo de nuevo.

5.3.2 PREPONDERAR AL RADIÁN COMO UNIDAD ANGULAR EN EL PLAN CURRICULAR.

Esta propuesta de evolución surge de los docentes, como alternativa de solución a la problemática planteada. En los planes y programas de estudio generalmente se considera al radián como una unidad más de medida del ángulo, sin que se perciba su significado matemático conceptual; hay una desocupación al significado analítico de la expresión y una trivialización del uso del radián como única unidad angular. Por lo que se hace necesaria una adecuación en los programas de estudio que remedie tal realidad.

Es curioso que el sistema de numeración sexagesimal, que es obsoleto hoy en día, haya sobrevivido y tenga utilización al estar presente, tanto en los planes y programas de estudio, como en los libros de texto de matemáticas. Consideramos que tal fenómeno es atribuido a ciertas prácticas escolares, como:

- ✓ Se cree que la matemática es acumulativa, las interpretaciones tradicionales y modernas presentan a las matemáticas como un continuo desarrollo acumulativo y lógico. Lo nuevo –el radián–, se debe construir sobre lo viejo –el grado–.

- ✓ La utilización desde la primaria del transportador cuyo borde circular está marcado con 180 divisiones, de manera que sirve para medir ángulos comprendidos entre 0° y 180°, herramienta que se opina tiene gran impacto cognitivo y didáctico en el aprendizaje de la medición del ángulo; medir los ángulos en grados da la impresión de ser la única manera “natural” para hacerlo.

- ✓ A la desafortunada relación didáctica que se establece entre **unidad angular y unidad de tiempo;** la división de la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos, con la de 1° cuenta con 60 minutos y un minuto cuenta con 60 segundos.

- ✓ La **transposición didáctica** del concepto de radián como unidad angular no se ha consolidado en el escenario escolar.

Considero que el uso del grado como unidad angular ha quedado limitado, su concepción matemática ha sido rebasada por las necesidades que demanda del concepto la matemática de variación y cambio. Es hora de abrir la puerta al radián como única unidad angular dada su funcionalidad, pero no es fácil el cambio de un sistema a otro, ni éste se puede darse por decreto, aunque se cuente con toda una legitimidad matemática. En lo personal, creo que este cambio está en proceso y alcanzará su culminación tarde o temprano, paradójicamente, debido al mismo uso que limita su actuar, es el que catalizará su aparición en escena dada por su utilidad funcional.

Medir los ángulos en radianes resulta extraño, sin embargo, como ya se expuso, sólo es cuestión de costumbre.

En el prólogo del libro "*Matemáticas e imaginación"*, escrito por Edward Kasner y James Newman, se cita de Jorge Luis Borges: *"Un hombre inmortal, condenado a cárcel perpetua, podría concebir en su celda toda el algebra y la geometría"*. Esta breve metáfora, que tiene todo el sabor de los relatos del escritor argentino, resume el poder de la imaginación cuando se aboca a las matemáticas: con suficiente tiempo, todos seríamos capaces de reconstruir la ciencia de los números. En este contexto de ficción, cada uno crearía su unidad de medida para el ángulo, producto de dividir la circunferencia en el número de partes que a uno le conviniera; no es difícil suponer que en su momento y al tiempo, cada uno concebiría el significado de la unidad angular como es el radián. El radián como concepto de unidad angular expresa de manera matemática una verdad universal.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación se profundizó en el entendimiento de fenómenos ya reportados en otras investigaciones centrados en el Nivel Medio Superior (NMS) y que extendimos al Nivel Superior (NS). En el planteamiento del problema cuestionamos la ausencia de argumentos entre estudiantes y profesores, para establecer por qué, en matemáticas superiores, la medida más conveniente para el ángulo es el radián. La intención de esta investigación fue estudiar y reportar los fenómenos didácticos que se producen en el tratamiento de la función trigonométrica y, específicamente, estar al tanto de la evolución que ha tenido el argumento de la función trigonométrica, es decir, conocer el argumento por el cual x debe transitar para pasar de ser una medida angular expresada en grados, convertirse en una unidad cíclica, expresada en radianes, para finalmente ser considerada como un número real, transición *grados→radianes↔reales*. Lo anterior nos indujo adoptar un estudio sistémico de tal transición de las unidades angulares que implicó el pronunciamiento de la principal interrogante de la investigación: cómo es la transición de las unidades angulares *grados→radianes↔reales* en términos de lo didáctico, lo cognitivo y lo epistemológico.

Del análisis didáctico realizado a los programas de estudio y libros de texto, aunado a lo reportado por investigaciones que anteceden a la presente, se identifican tres posibles escenarios que permiten dar cuenta de la transición *grado→radián↔real*: el primero es un procedimiento escolar tradicional que está presente en el tratamiento del concepto de FT en el NMS, es una presentación secuenciada, lógica y coherente de los temas y conceptos matemáticos, la secuencia es **trigonometría → círculo trigonométrico → función trigonométrica**, ésta es una **extensión de la Trigonometría Clásica** que encuentra en el círculo trigonométrico una explicación necesaria y suficiente para dejar claro el dominio de la función en todos los reales. Un segundo escenario es la definición de la FT para dos contextos diferentes (división de la trigonometría), a partir de un **método clásico** utilizado por los griegos de la antigüedad, en el cual es ***"conveniente"*** la utilización del ángulo en grados, método clásico adecuado para una **matemática estática**; y mediante el desarrollo de un **método moderno** donde interviene "una circunferencia unitaria", usando al radián como un número real. Este procedimiento moderno surge en respuesta a una problemática que trae consigo la **matemática de variación y el cambio**. Un tercer escenario es el que presenta al radián como la unidad propia para el ángulo; a partir de la definición de una función especial P: $\mathbb{R}\to\mathbf{C}$ que asocia a cada número real un punto sobre el círculo unitario **C**, función llama ***función enrolladora o de dar vueltas***, se definen las funciones trigonométricas y la transición de grados a radianes **se expone como una necesidad de tránsito entre la geometría plana**, donde la medida del ángulo central es independiente del radio de la circunferencia; **y el cálculo**, donde la medida del ángulo central es el radián que depende del radio de la circunferencia.

Tras el análisis cognitivo a profesores y estudiantes de matemáticas, se lograron identificar fenómenos ya reportados por Méndez (2008), en el NMS, realidad que también se hace presente de forma notable en profesores y estudiantes de NS; estos fenómenos son rupturas conceptuales referente a la transición *grados→radianes↔reales*. Una explicación de tales rupturas conceptuales es el de considerar a éstas como una ***"dificultad proptomatemática."*** Una dificultad de este tipo surge de la falta de *dominio de una capacidad requerida por el contrato didáctico para su buen entendimiento.* Las ***nociones protomatemáticas***, como puede ser considerada la noción de transición de las unidades angulares, se sitúa en un nivel *implícito* más profundo (para el docente y para el alumno). Este carácter implícito se expresa en el contrato didáctico por el hecho de que *estas nociones son obvias* salvo, precisamente, cuando se produce dificultad protomatemática y ruptura del contrato. La transición de las unidades angulares grados→radianes↔reales, es una noción cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de manera que la noción misma, no es reconocida ni como objeto de estudio ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

El análisis epistemológico, la evolución de la unidad angular nos aportó evidencia significativa que muestra la génesis del radián como un concepto emergente. El grado ha sido utilizado desde el año 2120 a. C. hasta nuestros días, cuenta con más de 4100 años de permanencia social. Con todo, el grado del sistema sexagesimal ya no satisface las necesidades de la matemática del cambio y de la variación, en donde se hace evidente tratar analíticamente a la FT e ir más allá de los principios básicos de la trigonometría y geometría, específicamente para demostrar que el arco puede medirse asociándole un número real que representa la longitud del arco. Es en este escenario en que aparece el radián como concepto emergente, ya que permite establecer una correspondencia entre el ángulo y arco de la circunferencia. El radián como unidad de medida angular aporta homogeneidad en las ecuaciones matemáticas.

La propuesta que se presenta retoma ideas ya concebidas en las investigaciones señaladas, que coinciden con el diagnóstico de la problemática planteada en la investigación realizada como: el no hacerse explícito la transición de radianes a reales en el discurso matemático escolar (Maldonado, 2005), el que haya rupturas conceptuales entre el significado matemático y el significado construido por el discurso matemático escolar que considera como "natural" la medida del ángulo en grado (Méndez, 2008) y la falta de recursos didácticos que permitan al profesor el tránsito constructivo entre triángulo rectángulo → círculo trigonométrico → función trigonométrica (Montiel, 2005), transición *(grados→radianes↔reales).* Son síntomas inequívocos de que es **la transposición didáctica** del concepto del ángulo, medido en radianes, que todavía está en proceso, que no ha madurado lo suficiente, la causante de tales incertidumbres.

El análisis didáctico, cognitivo y epistemológico de la investigación emprendida, nos proporcionó elementos consistentes que apuntalan **la transposición didáctica del concepto de ángulo medido en radián, no consolidada en el contexto escolar, es la respuesta a la problemática planteada**. *El trabajo de la transposición didáctica es un trabajo que se continúa después de la introducción didáctica del objeto del saber* (Chevallard, 1998).

El radián, como concepto de unidad de medida angular, tiene escasamente 136 años de vida escolar; tiempo que resulta insuficiente para dispersar y adecuar el concepto en cada uno de los niveles de educación, ya que no se ha madurado la concepción del concepto para permitir su institucionalización en todo el contexto escolar. El grado como unidad angular ha quedado limitado, su concepción matemática ha sido rebasada por las necesidades que demanda del concepto la matemática de variación y cambio. Los grados sexagesimales cuentan con una costumbre didáctica históricamente adquirida de miles de años, de la cual no goza la unidad cíclica, por lo que no ha sido fácil el cambio de un sistema a otro, ni éste puede darse por decreto, aunque se cuente con toda una legitimidad matemática –para el SI el radián es la unidad natural de la medida angular, por lo que debiera ser adoptada de manera universal para forjar una comunicación científica apropiada y efectiva–. En lo personal, creo que este cambio está en proceso y alcanzará su culminación tarde o temprano, paradójicamente, debido al mismo uso que limita su actuar, es el que catalizará su aparición en escena dada por su utilidad funcional. No deja de ser interesante vivir el proceso de transposición didáctica de tal concepto matemático.

Podemos conjeturar que el uso del grado, como unidad angular, es válido en una matemática estática, donde las configuraciones no cambian; mientras que el radián, como unidad angular, sea la unidad de variación y cambio en la matemática. En la misma definición de función tenemos: una función es una relación o asociación entre los elementos de dos conjuntos en donde a cada valor de la variable independiente le corresponde un sólo valor de la variable dependiente, uno de ellos, el llamado dominio de la función, pertenece al conjunto de los números reales, por lo que el radián es considerado como un número real.

Y nuevamente surge la interrogante, por qué considerar al radián de la unidad angular como un número real. Pensamos que tal consideración es una **convención matemática**. En los cursos de enseñanza media superior y superior, por lo general, se estudian las funciones de variable real; por tal motivo, se introduce una idea intuitiva del concepto de función restringiéndose al caso de los números reales, o en un subconjunto de éstos. Así es como a la variable independiente se le asignan valores de los reales. Al conjunto donde toma valores la variable independiente se le denomina dominio de la función y al conjunto de llegada donde la función deposita los valores se le llama contradominio o conjunto imagen de la función. **Lo que articula para que la gráfica de la función sea una curva dibujada con respecto a un sistema coordenado**. Este tipo de representación es importante porque modela el comportamiento de la función, resume el comportamiento que sufre la variable independiente, según varía la dependiente y, además, podemos verificar visualmente si la curva de la representación es una función, si lo es, saber si es creciente, decreciente, si tiene ceros, máximos y mínimos, etcétera., por mencionar algo. El uso de las formas gráficas contribuyó a la formulación actual del concepto de función (Castañeda, 2008).

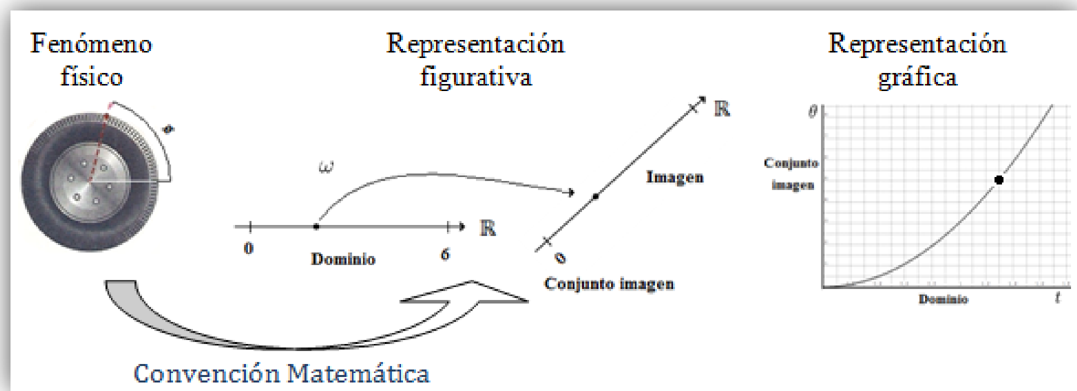


Fig. 6.1 Por convención matemática la gráfica de una función es una curva dibujada con respecto a un sistema coordenado $\mathbb{R}^2$

La convención matemática radica en considerar el tránsito de los radianes a los números reales, concepto que articula y da coherencia a la transición de los mismos, para la definición de las funciones trigonométricas como funciones de variable real. Juzgamos que la aceptación de esta convención matemática, haciéndola explícita en el discurso matemático escolar, aporta seguridad en la construcción de la FT.

El carácter sistémico de la investigación, proporcionó los siguientes elementos como argumentos que pueden responder nuestra pregunta de investigación:

- ✓ La transición ***grados→radianes*** es una noción **protomatemática**, ya que las rupturas conceptuales reportadas satisfacen las cualidades de una **dificultad protomatemática.**
- ✓ La transición de ***radianes↔reales*** es una **convención matemática;**
    - pues articula y provee de coherencia para que la gráfica de la función trigonométrica sea una curva dibujada con respecto a un sistema coordenado,
    - el símbolo rad suele ser utilizado ventajosamente, omitiéndolo por ser una magnitud sin dimensiones o colocándolo para hacer énfasis del sistema de medición empleado.

Finalmente, considero que el trabajo de investigación que se realizó genera nuevas interrogantes que permiten el desarrollo de más investigaciones, fundamentalmente en los siguientes puntos:

- ✓ En la epistemología del concepto del radián como unidad angular.
- ✓ La evolución del concepto de función con relación al concepto de la unidad angular.
- ✓ En la transposición didáctica del concepto de radián como unidad angular.

Antonio, R. (2006). *Una construcción de la potencia cero como convención matemática en un contexto aritmético-algebraico. Un estudio en nivel secundaria.* Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Guerrero-Facultad de Matemáticas. México.

Antonio, R. (2008). *Una construcción del significado del número complejo y su operatividad a través del proceso de convención matemática.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Antonio, R. y Martínez-Sierra, G. (2005). Una alternativa para la construcción de aritmética-algebraica para la construcción de las convenciones matemáticas de los exponentes. En J. Lezama, M. Sánchez y G. Molina (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18* (pp. 445-450). México: CLAME. ISBN: 970-9971-00-X.

Antonio, R. y Martínez-Sierra, G. (2009). Una construcción del significado del número complejo y su operatividad. P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 22*. México: CLAME.

Albert, A. (1998). Introducción a la epistemología. En Farfán (Coord. Edit), *Antologías, número II* (pp. 128). México: Cinvestav IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Baley, J. (2004). *Trigonometría*, México. Mc. Graw Hill

Beckmann, P. (2006) *Historia de π*, México. Conaculta

Benítez, R. (2008), *Cálculo diferencial para ciencias básicas e ingeniería.* México. Trillas.

Bosch M., Fonseca C., Gascón, J. (2004).Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 24(2/3): 205–250.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En Sánchez, E. y Zubieta, G. (comps.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas* (págs. 1-67). DME Cinvestav-IPN, México. Original en *Recherches en Didactique des Mathématiques.* (1986) 7(2), 33-115.

Canul, E. (2009). *De la concepción euclidiana a la concepción leibniziana: El caso de la tangente en el marco de la convención matemática*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors) 27 - 46.

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"* 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1), 27- 40.

Castañeda, A. (2008). Desarrollo de la noción de graficación en la antigüedad. . P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 21*. México: CLAME.

Cordero, F., y Flores, R. M. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10*(1), *7* - 38.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors) 27 - 46.

Colín, M. P. (2006). *De la aritmética al Cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada***.** Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN (CICATA-IPN), México.

Collete, P., (1988). *Historia de las matemáticas II*, España, Siglo XXI

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Aique.

Cruz, M. (1997), *Funciones circulares*. México. Universidad Nacional Autónoma de México.

Cruz, M. (2008), *Temas de matemáticas para bachillerato: Funciones circulares*. México. Universidad Nacional Autónoma de México.

D´Amore, B. (1999). La didáctica de la matemática como epistemología del aprendizaje matemático. En: D'Amore, B (Ed). *Elementi di didattica della matematica* (caps. 1 y 2, pp. 13-54 y 55-98). Italia. Pitágora Editrice,

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Finney, R. (2000) *Cálculo de una variable*, México. Prince Hall

Fuenlabrada, S. (1994). *Matemáticas II. Geometría y Trigonometría*. México: McGraw-Hill.

Gieck, K. (1989). *Manual de formulas técnica*. México: Alfaomega.

Gobierno del Estado de México, (2008). *Plan y programa de estudios de bachillerato general tercer semestre ciclo escolar 2008-2009*. Estado de México, México.

González, M. y Sierra, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX.* Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.

Granvillle, Smith y Mikesh. (1982). *Trigonometría plana y esférica.* México: UTHEA.

Gowing. (2002). Roger Cotes, *Natural Philosopher*. NY, USA: Cambrige University Press.

Guzmán, A. (1991). *Geometría y Trigonometría.* México: Publicaciones Cultural.

Hit, F., (2002) *Funciones en contexto*, México. Prince Hall

Hogben, L., *Mathematics for the Million*, Nueva York, W.W. Norton, 1937 (reimpresión: Nueva York, Pocket Book, 1965)

Hornsby, J. (1990). A method of graphing *f(x)* = A sen (B*x* + C) + D. *Mathematics Teacher* 83(1), 51-53.

Juárez, S. (2007). *La vida escolar de las operaciones raíz cuadrada y elevar al cuadrado*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas. México.

Larson, R. (2005), *Cálculo diferencial e integral.* México. Mc Graw Hill.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México

Martínez-Sierra, G. (2002). *Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 5(1). pp. 45-78

Martínez, G, (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(2), 195 – 218.

Martínez, J. y Rodríguez, P. (2005). *La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º y sus funciones trigonométricas. (Un estudio en el NMS).* Tesis de licenciatura no publicada, CIMATE, Guerrero, Chilpancingo, México.

Martínez-Sierra, G. (2008). *From the analysis of the articulation of the trigonometric functions to the corpus of eulerian analysis to the interpretation of the conceptual breaks present in its scholar structure*. In R. Cantoral, F. Fasanelli, A. Garciadiego, R. Stein., C. Tzanakis (Eds.)*Proceedings of the HPM 2008. History and Pedagogy of Mathematics. The HPM Satellite Meeting of ICME 11*.

Martínez-Tecolapa, J. (2005). La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores de 360° y sus funciones trigonométricas. (Un estudio en el nivel medio superior). Tesis de licenciatura, CIMATE, Guerrero, Chilpancingo, México.

Maldonado, E. (2005) *Un análisis didáctico a la función trigonométrica*. Tesis de maestría. No publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

Maor, E, (2006) *e: historia de un número*. México. CONACULTA-Qed

Méndez, C, (2008). *Sobre la construcción escolar de las funciones trigonométricas: La transición grados → radianes → reales en el NMS*. Tesis de maestría. Facultad de Matemáticas - Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites especiales* $lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}$ *y* $lim_{x\to 0}\frac{1-cos\ x}{x}$. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Kline, M (1976) *El fracaso de la matemática moderna Por qué Juanito no sabe sumar*. México: siglo veintiuno editores.

Purcell, E. (2007) *Cálculo diferencial e integral*, México. Pearson Prentice Hall.

Rotaeche, A. (2008). La *construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México

Ruiz, J (2005) *Matemáticas. Geometría y Trigonometría*, México: Publicaciones Cultural

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis de doctorado publicada. Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones e Intercambio Científico, Jaén España.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemolgies of mathematics and of mathematics education. En: A. J Bishop et. Al (eds.), *Internacional Hanndbool of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Smit, R. (2003), *Cálculo diferencial e integral*. México. Mc Graw Hill

Stewart, J. (1999), *Cálculo conceptos y contextos.* México. Internacional Thomson Editores.

Swokowsky-Cole (2002). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* México: International Thompson.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica.* México. Iberoamérica.

Wentworth, J. (1915). *Geometría plana y el espacio*, Ginn and Company. USA.

Zill, D. (1992). *Álgebra y trigonometría.* México. Mc Graw Hill

PÁGINAS DE INTERNET CONSULTADAS

Departamento de Electrónica e Informática (s. f.). Antenas parabólicas. *Ángulo sólido* [en línea]. Asunción, Paraguay: Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción. Recuperado el 25 de febrero de 2009, de http://www.dei.uc.edu.py/tai2002/ANTENA/webtai.htm#contenido

Fernández, R. (abril de 2009). Para libros y medios. *Exploración de Marte* [en línea]. Argentina. Recuperado el 16 de diciembre de 2009, de http://www.paralibros.com/jonas/j90926n.htm

International System of Units. (diciembre de 2003) International system of units (SI). *Derived quantity*. [en línea]. Recuperado el 22 de noviembre de 2009 de http://physics.nist.gov/cuu/Units/

Mancebo, F. (2001). Página personal. *Grados cuadrados* [en línea]. España. Recuperado el 10 de noviembre de 2009 de http://ferman.fortunecity.es/grados-cuadrados.html

Ministerio de Educación de la Nación Argentina. (2006). Aportes para la enseñanza en el nivel medio. *Matemáticas* [en línea]. Argentina. Recuperado el 20 de noviembre de 2009 de http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/tradiciones-de-ensenanza/index.php

Pierce, R. "Disfruta Las Matemáticas" (15 de agosto del 2008). Geometría. *Estereorradián* [en línea]. Recuperado el 10 de marzo de 2010 de http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/estereorradian.html

Secretaria de Educación Pública (2007, 12 enero). Educación Media Básica. *Programa de estudio de matemáticas tercer año* [en línea]. México: Secretaria de Educación Pública. Recuperado el 22 de julio de 2008, de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/programa/programa.pdf

Universidad Nacional Autónoma de México, (1 de agosto de 2008). *Planes de estudio UNAM* [en línea]. Recuperado el 26 de septiembre de 2009 de https://www.dgae.unam.mx/planes/carrerax.html

Wales, J. y Sanger, L. (2 noviembre de 2009). Wikipedia la enciclopedia libre. *Radian* [en línea]. Recuperado el 22 de enero de 2010 de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Degree-Radian_Conversion.svg

Anexo A

Cuestionarios para profesores y alumnos del nivel medio superior y superior.

Proyecto de investigación educativa IPN 2008: SIP20080424

Estimado profesor(a):

A continuación le presentamos una serie de preguntas y actividades matemáticas que le agradecemos realice con todo el detalle que le sea posible. Sus respuestas nos servirán para tener información sobre *la vida escolar de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior* del Instituto Politécnico Nacional; que forma parte del proyecto de investigación financiado por la Secretaria de Investigación y Posgrado (SIP) del IPN Clave: SIP20080424 “*Estudios sobre la construcción escolar de conocimiento matemático*”.

Atentamente
Investigadores responsables

Datos generales

Nombre (Opcional):____

Edad: ____________ Género: ______________

Años de experiencia en el IPN: ____

Años de experiencia como profesor del nivel medio superior:
____

Materias impartidas en los últimos tres años:
____
____

Libros usados para la planeación de sus clases:
____
____
____

¿Cuántas veces ha impartido el tema de *funciones trigonométricas*? ¿Dónde? ¿Cuándo?
____
____
____
____

¿Ha notado alguna(s) dificultades en los estudiantes en el tema de *funciones trigonométricas*?
____
____
____

Página 1 de 6

Proyecto de investigación educativa IPN 2008: SIP20080424

Actividad 1

¿Cómo le explicaría a un estudiante el valor de las siguientes expresiones?

a) sin (-3) =

b) cos (5) =

c) sin (-10) =

d) sin (-580) =

e) cos (680)=

Página 2 de 6

Proyecto de investigación educativa IPN 2008: SIP20080424

Actividad 2

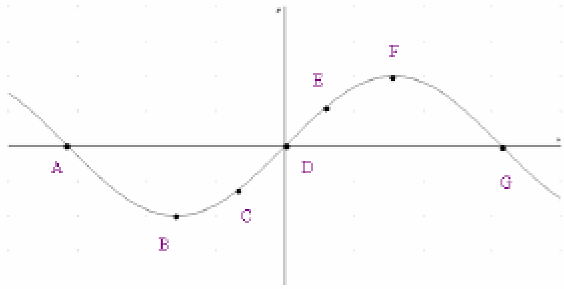
¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función $y = f(x) = \cos x$?

Página 3 de 6

Proyecto de investigación educativa IPN 2008: SIP20080424

Actividad 3

La siguiente figura es la gráfica de la función. $y = f(x) = \sin x$. Encuentre las coordenadas de los puntos señalados:



Página 4 de 6

Proyecto de investigación educativa IPN 2008: SIP20080424

Actividad 4

¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función $y = f(x) = x + \sin x$?

Página 5 de 6

Proyecto de investigación educativa en el área de las matemáticas / Cuestionario para alumnos de Nivel Medio Superior

Estimado compañero(a):

A continuación le presentamos una serie de actividades matemáticas que le agradecemos realice con todo el detalle que le sea posible. Sus respuestas, que serán de carácter confidencial, nos servirán para tener información sobre *la vida escolar de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior mexicano.*

Atentamente
Investigadores responsables

Datos generales

Nombre:____
Edad: ____________ Sexo: ______________ Grupo: ______________
Escuela:____

Actividad 1

¿Cuál es el valor de cada una de las siguientes expresiones?

a) sin (-3) =

b) cos (5) =

c) sin (-10) =

d) sin (-580) =

e) cos (680) =

Proyecto de investigación educativa en el área de las matemáticas / Cuestionario para alumnos de Nivel Medio Superior

Actividad 2

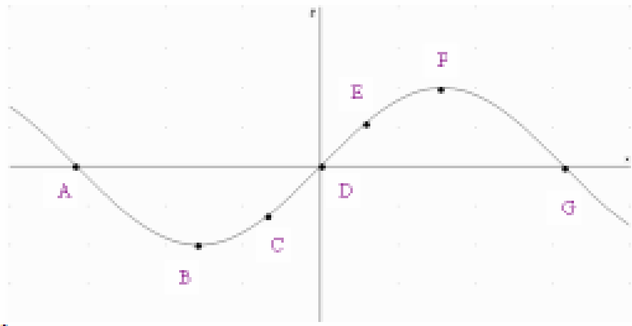
Construye un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = \cos x$. Si lo deseas utiliza la siguiente tabla como ayuda.

x	$y = \cos x$

Proyecto de investigación educativa en el área de las matemáticas / Cuestionario para alumnos de Nivel Medio Superi

Actividad 3

La siguiente figura es la gráfica de la función. $y = f(x) = \sin x$. Encuentra las coordenadas de los puntos señalados:



Coordenadas de A …

Coordenadas de B …

Coordenadas de C …

Coordenadas de D …

Coordenadas de E …

Coordenadas de F …

Coordenadas de G …

Actividad 4

Construye un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = x + \sin x$. Si lo deseas utiliza la siguiente tabla como ayuda.

x	$y = x + \sin x$

Proyecto de investigación educativa en el área de las matemáticas / Cuestionario para alumnos de Nivel Medio Superior

Actividad 4

Construye un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = x + \sin x$. Si lo deseas utiliza la siguiente tabla como ayuda.

x	$y = x + \sin x$