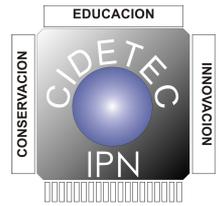




**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**CENTRO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN CÓMPUTO**



**CONTROL PUNTO A PUNTO PARA  
EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE UN  
ROBOT MÓVIL DE RUEDAS TIPO DIFERENCIAL**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE CÓMPUTO**

P R E S E N T A:

**ING. EDGAR ROBERTO RAMOS SILVESTRE**

DIRECTOR DE TESIS:

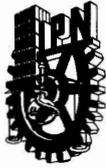
DR. RAMÓN SILVA ORTIGOZA

DR. VICTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN

MÉXICO, D. F.

JUNIO 2011.





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 12:00 horas del día 17 del mes de mayo de 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del CIDETEC para examinar la tesis de grado titulada:

CONTROL PUNTO A PUNTO PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE UN ROBOT  
MÓVIL DE RUEDAS TIPO DIFERENCIAL

Presentada por el alumno:

RAMOS  
Apellido paterno

SILVESTRE  
materno

EDGAR ROBERTO  
nombre(s)

Con registro: 

B	0	9	1	3	7	9
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE CÓMPUTO

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

  
DRA. MAGDALENA MARCIANO MELCHOR  
Presidente

  
M. EN C. JUAN CARLOS GONZÁLEZ ROBLES  
Secretario

  
DR. RAMÓN SILVA ORTIGOZA  
Primer Vocal  
(Director de Tesis)

  
DR. VÍCTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN  
Segundo Vocal  
(Director de Tesis)

  
M. EN C. JUAN CARLOS HERRERA LOZADA  
Tercer Vocal

  
M. EN C. EDUARDO VEGA ALVARADO  
Suplente

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

  
DR. VÍCTOR MANUEL SILVA GARCÍA

  
SEP  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INNOVACION Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN COMPUTO





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### *CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México el día 23 del mes Mayo del año 2011, el (la) que suscribe Edgar Roberto Ramos Silvestre alumno (a) del Programa de Maestría en Tecnología de Cómputo con número de registro B091379, adscrito a Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ramón Silva Ortigoza y el Dr. Victor Manuel Hernández Guzmán, y cede los derechos del trabajo intitulado Control punto a punto para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil de ruedas tipo diferencial, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección robert56@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Edgar Roberto Ramos Silvestre  
Nombre y firma



# Resumen

En robótica móvil se tienen varias problemáticas para abordar como tema de investigación, siendo el objetivo principal dotarla de mayor autonomía posible para que realice una tarea específica. Por tal motivo muchos investigadores abordan estos problemas por separado por la complejidad que presentan. En la presente tesis se aplica un algoritmo generador de trayectorias a un prototipo de robot móvil de ruedas para resolver el problema de seguimiento de trayectorias. A diferencia de los trabajos anteriores que se han desarrollado en el CIDETEC-IPN, ahora se propone un método mas general para que el robot siga una trayectoria y no sólo esté limitado por una curva paramétrica, también se toma el modelo dinámico para el desarrollo de la ley de control y para realizar las simulaciones de desempeño.

Se llevo a cabo el control punto a punto de un robot móvil de ruedas tipo diferencial para resolver el problema de seguimiento de trayectorias paramétricas en el tiempo y trayectorias definidas por puntos que resultan de la generación de trayectorias usando splines cúbicos como método de interpolación. En el primer capítulo se realiza la introducción y el estado del arte relacionado con el tema para luego plantear el objetivo general y los específicos. En el segundo capítulo se realiza el análisis y estudio del modelo dinámico asociado al prototipo de robot móvil que se usó. En el tercer capítulo se realiza el estudio de la ley de control que está basado en el modelo dinámico del robot móvil considerando que se desplaza sobre una superficie horizontal. Asimismo, en este capítulo se plantea un algoritmo para la generación de trayectorias. En el cuarto capítulo se realizan dos experimentos, uno para una trayectoria paramétrica en el tiempo y el otro para una trayectoria definida por puntos, el cual resulta de la interpolación usando splines cúbicos. En el ultimo capítulo, se presentan las conclusiones y perspectivas futuras de este trabajo.



# Abstract

The main goal in mobile robotics is to provide autonomy to a mobile robot and there are several issues to be solved to achieve this. Given the high complexity involved in this task, each of these issues are studied as an isolated problem by most researchers. One of these issues is trajectory tracking and it is related to robot navigation. In this work the trajectory tracking problem in a differential drive wheeled mobile robot is solved. The main contributions with respect to previous works performed at CIDETEC-IPN are 1) mobile robot can track more general trajectories which are not constrained to be parametrized curves and 2) the dynamical model is taken into account during the design stage.

Trajectory tracking is accomplished in a point-to-point mode and a trajectory generator is designed which receives a set of desired points and, as result, a smooth trajectory is generated by using cubic splines to interpolate such desired points. Chapter 1 is concerned with a literature review and with the statement of the general and the specific objectives. The dynamical model of the wheeled mobile robot under study is analyzed in chapter 2. The controller is designed, by taking into account the dynamical model, in chapter 3. In this chapter, the trajectory generator is also presented. A simulation study as well as several real time experimental results are presented in chapter 4. Two experimental tests are presented: using a parametric trajectory and using a trajectory defined by a set of desired points which are interpolated using cubic splines by the trajectory generator. Finally, some concluding remarks are presented in chapter 5 as well as a discussion on future work.



# Agradecimientos

Esta tesis corresponde a los estudios realizados con una beca otorgada por la Secretaría de Relaciones Exteriores del Gobierno de México.

A mis asesores de tesis, el Dr. Ramón Silva Ortigoza y el Dr. Victor Manuel Hernández Guzmán, por la confianza depositada en mi persona y permitirme trabajar con ellos. Les agradezco la oportunidad que me brindaron para crecer profesionalmente.

Al CIDETEC-IPN por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría y a sus docentes que aportaron y compartieron sus experiencias y conocimientos que ayudaron en mi formación académica y profesional.

A mis amigos y compañeros del CIDETEC, por su valiosa amistad a lo largo de toda mi estancia en México, D.F.



# Dedicatoria

A Dios, supremo creador, gracias por todo lo que ahora tengo, por no abandonarme en los momentos difíciles y por permitir la culminación de mis estudios.

A mis padres, hermanas y hermano quienes con su apoyo permitieron la culminación de mis estudios.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Reseña histórica de la robótica . . . . .	1
1.2. Robótica móvil . . . . .	4
1.3. Estado del arte . . . . .	8
1.3.1. Seguimiento de trayectoria de robots móviles . . . . .	9
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	11
1.5. Objetivos de la tesis . . . . .	13
1.5.1. Objetivo general . . . . .	13
1.5.2. Objetivos específicos . . . . .	13
1.6. Recursos empleados en la tesis . . . . .	14
1.7. Contenido de la tesis . . . . .	14
<b>2. Modelo dinámico del robot móvil de ruedas</b>	<b>17</b>
2.1. Aspectos dinámicos en robótica móvil . . . . .	17
2.2. Restricciones no holonómicas . . . . .	18
2.3. Sistema Euler-Lagrange y restricciones no holonómicas . . . . .	19
2.4. Método para incluir las restricciones no holonómicas en la dinámica del sistema Euler-Lagrange . . . . .	20
2.5. Análisis del modelo dinámico del robot móvil de ruedas . . . . .	21
2.6. Descripción del prototipo a utilizar . . . . .	27
2.6.1. Estructura mecánica . . . . .	27
2.6.2. Parámetros del robot móvil de ruedas . . . . .	29
2.6.3. Electrónica de potencia . . . . .	31
2.6.4. Adquisición de datos y control . . . . .	32
<b>3. Estudio de la ley de control y generación de trayectorias</b>	<b>33</b>
3.1. Control del robot móvil de ruedas basado en el modelo dinámico . . . . .	33
3.2. Generación de trayectorias . . . . .	36
3.2.1. Empleo de polinomios cúbicos . . . . .	37
3.2.2. Empleo de polinomios de orden cinco . . . . .	38
3.2.3. Empleo de funciones spline . . . . .	39
3.2.4. Definición paramétrica de algunas curvas de interés . . . . .	42
3.3. Generación de caminos en el plano cartesiano utilizando funciones spline	44

<b>4. Simulación e instrumentación en tiempo real</b>	<b>49</b>
4.1. Diagrama de bloques desarrollado en Simulink para simulación . . . . .	49
4.2. Simulación del sistema en lazo cerrado . . . . .	50
4.2.1. Estacionamiento del robot móvil . . . . .	50
4.2.2. Trayectoria paramétrica en el tiempo . . . . .	51
4.2.3. Trayectoria definida por puntos . . . . .	51
4.3. Diagrama de bloques desarrollado en Simulink para experimentos en tiempo real . . . . .	52
4.4. Experimentos en tiempo real y análisis de los resultados . . . . .	53
4.4.1. Estacionamiento del robot móvil . . . . .	54
4.4.2. Trayectoria paramétrica en el tiempo . . . . .	54
4.4.3. Trayectoria definida por puntos . . . . .	54
<b>5. Conclusiones y trabajos a futuro</b>	<b>65</b>
<b>Referencias</b>	<b>69</b>
<b>A. Publicaciones</b>	<b>73</b>
A.1. Artículos en Revistas de Investigación Internacionales con Arbitraje Estricto no ISI . . . . .	73
A.2. Artículos en Revistas de Divulgación y Difusión Científica y Tecnológica . . . . .	73
A.3. Artículos en Extenso (conferencias internacionales) . . . . .	74
<b>B. Prototipo de robot móvil de ruedas tipo diferencial</b>	<b>75</b>
<b>C. Hoja de datos de la tarjeta de control</b>	<b>77</b>
C.1. DS1104 . . . . .	77
C.2. CLP1104 . . . . .	82
<b>D. Desarrollo de la función arctan en Simulink</b>	<b>83</b>

# Índice de figuras

1.1. Clasificación de los robots. . . . .	4
1.2. Estructuras cinemáticas de robots móviles. . . . .	8
1.3. Kit de robótica y su aplicación . . . . .	12
2.1. Cinemática de un robot no holónimo. . . . .	18
2.2. Robot móvil de ruedas. . . . .	21
2.3. Velocidades de los centros de las ruedas. . . . .	22
2.4. Relación entre las velocidades de $P_0$ y de $P_c$ . . . . .	24
2.5. Diagrama de bloques del robot móvil de ruedas. . . . .	27
2.6. Estructura mecánica del robot móvil. . . . .	28
2.7. Inercias asociadas a la dinámica del robot móvil. . . . .	30
3.1. Aproximación utilizando polinomios cúbicos. . . . .	39
3.2. Aproximación utilizando polinomios de distinto orden. . . . .	39
3.3. Aproximación polinómica fragmentaria. . . . .	40
3.4. Curvas parametrizadas en el tiempo. . . . .	43
3.5. Ejemplos del desempeño del generador de trayectorias. . . . .	47
4.1. Simulación del sistema en Simulink. . . . .	55
4.2. Gráficas de simulación del estacionamiento del robot móvil en el eje $x$ . . . . .	56
4.3. Gráficas de simulación del estacionamiento del robot móvil en el eje $y$ . . . . .	57
4.4. Seguimiento de una trayectoria (circunferencia), simulación. . . . .	58
4.5. Seguimiento de una trayectoria definida por puntos, simulación. . . . .	59
4.6. Experimento en tiempo real. . . . .	60
4.7. Gráficas de experimentos en tiempo real del estacionamiento del robot móvil en el eje $x$ . . . . .	61
4.8. Gráficas de experimentos en tiempo real del estacionamiento del robot móvil en el eje $y$ . . . . .	62
4.9. Seguimiento de una trayectoria (circunferencia), en tiempo real. . . . .	63
4.10. Seguimiento de una trayectoria definida por puntos, en tiempo real. . . . .	64
5.1. Errores asociados a los experimentos de seguimiento de trayectorias . . . . .	66
B.1. Piezas maquinadas. . . . .	75
B.2. Prototipo de robot móvil. . . . .	76

C.1. Tarjeta de control DS1104. . . . .	77
C.2. Panel de conexiones CLP1104. . . . .	82
D.1. Pruebas de la función arctan en el controlador para el seguimiento de una trayectoria . . . . .	84

# Índice de tablas

2.1. Pesos del cuerpo del robot móvil. . . . .	29
2.2. Pesos de las ruedas del robot móvil. . . . .	30
2.3. Inercias de las ruedas del robot móvil. . . . .	30
2.4. Radio de las ruedas del robot móvil y longitud entre estas. . . . .	31
3.1. Puntos que se definen para la interpolación polinomial. . . . .	38
3.2. Puntos que se definen para la interpolación polinomial. . . . .	38
3.3. Puntos que se definen para probar el generador de trayectorias. . . . .	47
4.1. Puntos que definen la trayectoria a seguir. . . . .	52



# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad el avance tecnológico en todo el mundo puede ser considerado como rápido y vertiginoso, debido a que se tienen avances significativos en áreas de la computación, electrónica, telecomunicaciones y robótica. El hablar de robótica y el concepto mismo de esta palabra, que es bastante amplia y conlleva a tener muchas definiciones de la misma, hace referencia a una diversidad de aplicaciones en distintas áreas de la ingeniería, industria, doméstica y academia.

Los robots son utilizados generalmente en la industria con el fin de sustituir al hombre en tareas peligrosas, pesadas y agotadoras, pero este no es el único lugar posible para los robots, en los últimos años comenzaron apareciendo en centros de investigación y universidades para el desarrollo de actividades de investigación. La robótica como materia de estudio en el ámbito académico en entidades educativas de muchos países es muy explotada, diferenciándose unas de otras por los recursos con los que cuentan y la capacidad tecnológica de cada país. Sin embargo, será siempre un objetivo claro de toda entidad educativa estar acorde al avance tecnológico en áreas actuales de estudio como lo es la robótica y sus aplicaciones, orientadas a resolver problemas que se presenten en el entorno regional, nacional e internacional.

Es tanto el avance de la ciencia y tecnología en el área de robótica que es una realidad que puedan efectuarse tareas complejas e interesantes, similares a las que realiza el ser humano, es así que estudiarlos se ha vuelto muy común por investigadores. Adicionalmente a lo anterior, su impacto social, su aparente autonomía y notorio contenido tecnológico origina que a pesar de su popularidad siga siendo admirado.

### 1.1. Reseña histórica de la robótica

En el transcurrir del tiempo y a lo largo de toda la historia no cabe duda que el hombre siempre se ha sentido motivado y fascinado por máquinas o dispositivos capaces de imitar a seres vivos y realizar tareas donde no intervenga el hombre.

Durante los siglos XVII y XVIII se crearon estructuras mecánicas muy ingeniosas que contaban con algunas características de los robots actuales, estos fueron creados en su mayoría por artesanos de la relojería y representaban figuras humanas o animales, la

construcción de máquinas se remonta desde la antigüedad hasta el siglo XIX [1].

Con el desarrollo de la ingeniería en sus diferentes áreas como la mecánica, electrónica, informática y telecomunicaciones ha permitido la construcción de robots modernos, no obstante los acontecimientos de la robótica no se limitan a la ingeniería, también involucran a las matemáticas y la física teórica, de esta forma se utilizan fundamentos matemáticos como los de Lagrange, Newton y Euler que son fundamentales para el desarrollo de las ecuaciones que explican la dinámica de robots [2].

Cabe mencionar también que Asimov fue el primero en utilizar el término “robótica” en los relatos de su libro “*I robot*” [3], donde se formulan las tres leyes de la robótica. Desde años atrás hasta la actualidad la robótica ha ido evolucionando muy rápidamente, lo anterior se presenta a continuación en un resumen de los hechos acontecidos más importantes.

- ✓ En 1938, H. Roselund y W. Pollard de la compañía Devilviss, construyen el primer brazo articulado para realizar una tarea específica lo que permitió incorporar robots a las cadenas de producción industrial [4].
- ✓ En 1954, George Devol estableció las bases de la robótica industrial moderna y patentó un manipulador programable, concibiendo la idea de un dispositivo de transferencia programada de articulaciones. Este fue el primer robot programable.
- ✓ En 1955, J. Denavit y R. S. Hartenberg utilizan el álgebra matricial para describir y representar la geometría espacial de los elementos de un robot [5].
- ✓ En 1978, se introdujo el robot PUMA (Programmable Universal Machine for Assambly) para tareas de montaje por Unimation<sup>1</sup>, basándose en diseños obtenidos en un estudio de la General Motors. En [6] se presentan y se ilustran en forma gráfica los resultados obtenidos a partir de experimentos en un robot PUMA 560, sobre los problemas de las deformaciones que ocurren en un robot que trabaja en contacto con el medio ambiente real y que pueden resolverse.
- ✓ En 1979, se desarrolló el robot tipo SCARA (Selective Compliance Arm for Robotic). En [7] se presentan resultados experimentales para demostrar la viabilidad del enfoque actual para la calibración de los brazos SCARA, y se hacen también recomendaciones prácticas para los usuarios que necesitan calibrar estos robots.
- ✓ En 1982, IBM introdujo el robot RS-1 para montaje, que después de varios años de desarrollo se consigue un robot de estructura de caja que utiliza un brazo constituido por tres dispositivos de deslizamiento ortogonal.
- ✓ En 1997, la nave robótica Pathfinder envió imágenes a nuestro planeta durante su prolongado recorrido sobre la superficie marciana, transmitiendo 17,000 fotografías y 8,000 millones de mediciones meteorológicas.

---

<sup>1</sup>Primera empresa en producir un robot, fundada por George Devol y Joseph F. Engelberger en 1956.

- ✓ En 2000, se crea ASIMO (Advanced Step in Innovative Mobility) desarrollado por Honda que es un robot humanoide capaz de interactuar con los seres humanos y ayudarles, siendo sin duda una de las mayores proezas tecnológicas del siglo XXI.
- ✓ En 2004, se desarrolla el robot “Saya” que fue probada en un aula real en Tokio con un puñado de alumnos de quinto y sexto grado, aunque solo puede pasar lista y dar ordenes. Saya es controlada a distancia por una persona que observa la interacción por medio de cámaras.
- ✓ En 2005, es anunciado el robot humanoide llamado Emiew desarrollado por la empresa japonesa Hitachi para competir con su similar Asimo de Honda. Según sus creadores, mide 1.3 m y es el robot más rápido del mercado moviéndose a 6 km/h.
- ✓ En 2009, unos científicos japoneses dieron a conocer en Tsukuba, al noreste de Tokio, un nuevo modelo de robot “femenino” capaz de caminar y de hablar, siendo mucho más “humano” que cualquiera de sus predecesores.
- ✓ En 2010, La NASA y General Motors están trabajando juntos para acelerar el desarrollo de la próxima generación de robots y de tecnologías relacionadas, para el uso conjunto de las industrias automotriz y aeroespacial. Se construirá un nuevo robot humanoide, capaz de trabajar codo a codo con seres humanos, ya sea en la fabricación de autos más seguros o asistiendo a los astronautas de la NASA en misiones espaciales peligrosas.
- ✓ En 2011, En Japón, se realiza la “Primera Maratón Robótica” singular evento donde compiten cinco robots bípedos que recorrerán más de 42 kilómetros, durante cuatro días. Los pequeños humanoides deberán transitar por un circuito de 100 metros, que está ubicado en un gimnasio, y al que tendrán que dar 423 vueltas completas antes de llegar a la meta.

El futuro de la robótica se visualiza en aumentar su movilidad, destreza y autonomía de acción, tomando en cuenta que la mayoría de los robots actuales cuentan con bases estáticas y son utilizados en tareas industriales repetitivas (ensamblado, soldado, etc.). Aunque cabe decir que existen diversas aplicaciones que han permitido la evolución en gran medida, tanto de la concepción de la robótica, como de su morfología misma, así se han desarrollado robots para aplicaciones específicas que van desde robots espaciales, para aplicaciones submarinas y subterráneas, militares, móviles, de aplicaciones médicas.

En la Figura 1.1, se presenta un cuadro sinóptico de la clasificación de la robótica. En la siguiente sección se abordará el tema de nuestro interés de estudio, el cual versa sobre la robótica móvil de ruedas, en particular la de tracción diferencial. Por lo tanto, el resto de este documento se orientará a esta aplicación de la robótica.

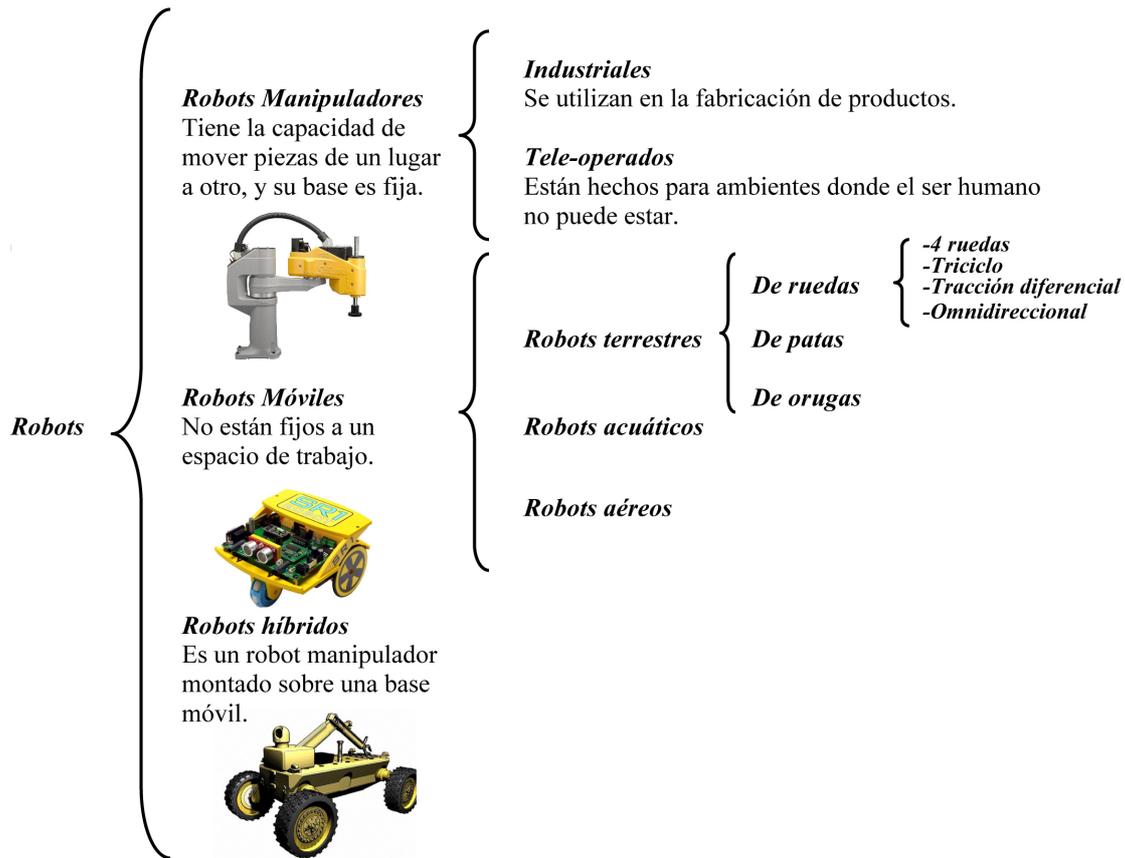


Figura 1.1: Clasificación de los robots.

## 1.2. Robótica móvil

El objetivo de un robot móvil es que pueda moverse y desarrollar tareas en forma autónoma con un propósito determinado, realizando una tarea específica y en beneficio del usuario. Estos robots son programados para que puedan desarrollar sus tareas con la mayor autonomía posible, para lo cual son dotados con sensores y actuadores necesarios para realizar la tarea encomendada, el robot adquiere información de su entorno mediante sus sensores y de esa forma controla sus actuadores de acuerdo a una lógica de programación determinada por el usuario.

En robótica móvil existen diferentes formas de locomoción como son patas, orugas y ruedas. La presente tesis está orientada a los robots móviles de ruedas ya que son una solución más simple para conseguir una buena movilidad en terrenos duros y libres de obstáculos, permitiendo conseguir velocidades relativamente altas, pero también presentan limitaciones debido a que la locomoción en terrenos blandos es poco eficiente [8].

Si realizamos un resumen histórico, de los hechos más importantes, sobre la robótica

móvil de ruedas tomando en cuenta su aplicación, construcción y últimas investigaciones realizadas, que contribuyeron al avance en esta área, podemos tener el siguiente cronograma:

- ✓ En 1953, el primer robot móvil de la historia fue ELSIE (Electro Light Sensitive Internal External), construido en Inglaterra, se limitaba a seguir una fuente de luz utilizando un sistema mecánico realimentado sin incorporar “inteligencia” adicional.
- ✓ En 1968, apareció el robot Shakey del SRI (Stanford Research Institute), que estaba provisto de una diversidad de sensores, así como una cámara de visión y sensores táctiles, y podía desplazarse por el suelo.
- ✓ En 1970, se lanzó el Lunokhod-1, un robot móvil diseñado por los rusos que fue teledirigido desde la tierra, y realizó maniobras sobre la Luna. Desde entonces, la robótica espacial no ha hecho más que crecer y en la actualidad se tienen buenas perspectivas de este sector.
- ✓ En 1984, en el laboratorio de robótica móvil del MIT<sup>2</sup>, Brooks Rodney Allen al terminar su doctorado (1981) en la Universidad de Stanford, EE.UU., construyó robots simples que podían ejecutar acciones imitando insectos, bajo la premisa de que “el aprendizaje práctico se logra por la interacción con el mundo real”.
- ✓ En 1995, Valentino Braitenberg, director del Max Planck Institute en Tübingen Alemania, construyó un robot móvil extremadamente simple, ya que ni siquiera cuenta con un sistema de control que se pueda considerar “inteligente”. Se trata básicamente de dos motores montados en un chasis y un pequeño circuito electrónico que invierte el sentido de movimiento de uno de ellos (polaridad) cuando la intensidad luminosa es detectada por una célula.
- ✓ En 1996, un grupo de estudiantes de la Universidad La Salle, México D.F., crean un robot móvil pequeño y rápido, dicho robot es guiado por fotosensores y es capaz de seguir una trayectoria.
- ✓ En 2002, los ingenieros en sistemas del Computing Culture Department (Departamento de Cultura Informática) del MIT, crean el robot periodista denominado Afghan Explorer que viene equipado con todo lo necesario para llevar a cabo entrevistas y recoger primicias.
- ✓ En 2003, investigadores del Centro de Automatización, Robótica y Tecnologías de la Información y de la Fabricación (CARTIF) de la ciudad de Valladolid en España, desarrollan un robot móvil que puede inspeccionar de forma remota roturas o fugas, en el interior de las tuberías de desagüe de municipios españoles.

---

<sup>2</sup>Estas siglas significan Massachusetts Institute of Thecnology ubicada en Cambridge Massachusetts.

- ✓ En 2004, se envió a Marte el robot móvil Spirit y su gemelo Opportunity con el objetivo de explorar el planeta rojo durante tres meses.
- ✓ En 2005, se desarrolla un robot móvil llamado Horus en la Escuela de Ingeniería de la Universidad Bonaterra de Aguascalientes de México, que fue probado en la exigente competencia internacional de robótica, SAE Robotic Systems Challenge, celebrado en la Ecole Polytechnique en la ciudad de Montreal, Canadá.
- ✓ En 2006, investigadores de la Universidad Carnegie Mellon desarrollan un nuevo tipo de robot móvil que se balancea en una bola en vez de piernas, el creador de la “robopelota”, es el profesor Ralph Hollis presentando de esta manera un nuevo paradigma en la robótica móvil.
- ✓ En 2007, el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) inaugura las instalaciones de su Laboratorio de robótica, en el cual se desarrollarán principalmente proyectos de robots móviles.
- ✓ En 2008, la Delegación Mexicana realizó un proyecto de robótica móvil y mecatrónica, patrocinado por la empresa alemana Festo, se construyó un robot móvil llamado “RoboTino” que luego fue donado a la Universidad del Valle de México (UVM).
- ✓ En 2009, el doctor del departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Zaragoza, Javier Mínguez presentó, en el III Congreso Internacional sobre Domótica, Robótica y Telesistencia para todos celebrado en Barcelona, dos dispositivos robóticos de rehabilitación basados en interfaces cerebro-ordenador: una silla de ruedas y un robot para teleoperación.
- ✓ En 2010, Investigadores de la Universidad de Guanajuato trabajan en el diseño de un control de locomoción para un robot móvil de exterior tipo oruga, con el objetivo de que éste pueda ser utilizado para la exploración de terrenos irregulares. Dicho proyecto parte de la necesidad de contar con un robot móvil capaz de desplazarse en entornos donde no le es posible acceder al ser humano como de difícil acceso o campos minados.
- ✓ En 2011, La NASA enviara un robot móvil llamado Curiosity el cual realizara medidas de temperatura, humedad, presión y nivel de radiación ultravioleta. El robot recogerá datos para hacer posible aterrizar una nave tripulada en el planeta Marte, quizá el siguiente gran reto espacial de la Humanidad y un reto de la NASA. El robot móvil, equipado con una batería nuclear está diseñado para desplazarse a través de todo tipo de terrenos gracias a sus seis ruedas.

Una vez revisado el resumen cronológico de la robótica móvil de ruedas, es necesario también definir los arreglos topológicos de las estructuras cinemáticas más utilizadas para la investigación y aplicación de los mismos, ya que nos permitirán ver las diferencias que existe entre estos. De tal forma, que la elección de una estructura cinemática estará en

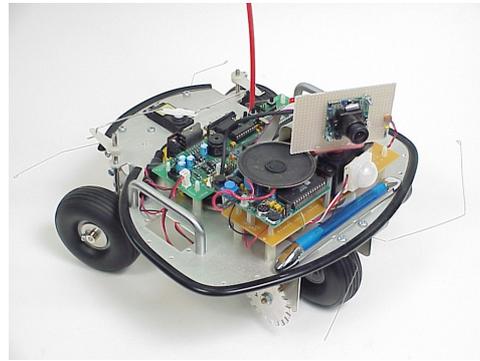
función de las ventajas que presenten y la aplicación para la cual este destinado el robot móvil. A continuación se presenta una descripción breve de dichas estructuras cinemáticas [9]:

- ✓ *Ackerman*. Su locomoción se basa en cuatro ruedas convencionales como se muestra en la Figura 1.2(a), el sistema consta en dos ruedas traseras de tracción y dos ruedas delanteras para el direccionamiento que se utilizan para seguir la trayectoria que se le impone al robot. En esta configuración de robot móvil se tienen dos ángulos de giro, uno asociado a cada rueda, los cuales genera mayor dificultad a la hora de diseñar un control. Por lo anterior, es conveniente unificar los ángulos de direccionamiento de ambas ruedas en uno solo, por lo que los radios de giro para los cuales el robot no muestra deslizamiento lateral son mayores que en otras configuraciones. El mayor problema de esta configuración es la limitación de la maniobrabilidad.
- ✓ *Triciclo clásico*. El sistema de locomoción se basa en una rueda delantera que sirve como de tracción y direccionamiento, las ruedas traseras son pasivas y se mueven libremente, la rueda delantera le da mayor maniobrabilidad pero a su vez causa que presente problemas de estabilidad en terrenos difíciles, una de sus limitaciones es que el centro de gravedad tiende a desplazarse cuando el vehículo se mueve por una pendiente, provocando la falta de tracción, en la Figura 1.2(b) se muestra el robot móvil. Esta configuración puede presentar variantes como el de implementarle tracción en las ruedas traseras, y así presentar ventajas con respecto al de tracción diferencial por su simplicidad.
- ✓ *Tracción diferencial*. Se caracteriza por la diferencia de velocidades de las ruedas laterales, cuenta con dos ruedas que proporcionan tracción y direccionamiento al móvil como se muestra en la Figura 1.2(c). Este sistema es muy útil por la habilidad de movimiento del móvil permitiendo cambiar su orientación sin movimientos de traslación. Las variables a controlar son las velocidades angulares de cada rueda, izquierda y derecha. En este diseño es relativamente simple la programación y construcción. El robot con esta estructura es capaz de moverse sobre su propio eje y de realizar movimientos de diversos tipos de curvas. Una consideración importante es el equilibrio que deberá tener el robot, para lo cual se tiene que buscar un apoyo adicional a las ruedas ya existentes pudiendo implementarse dos ruedas de apoyo en una estructura.
- ✓ *Tracción omnidireccional*. Se basa en la utilización de tres ruedas directrices y motrices, por lo que tiene un amplio rango de movimiento y puede posicionarse en cualquier orientación, se considera que cuenta con tres grados de libertad, el robot móvil se muestra en la Figura 1.2(d). Los robots omnidireccionales han sido ampliamente utilizados en diversas aplicaciones, especialmente académicas, tales como competencias entre universidades. Estos robots son capaces de alcanzar cualquier posición sin necesidad de rotar previamente a través de una trayectoria recta, por

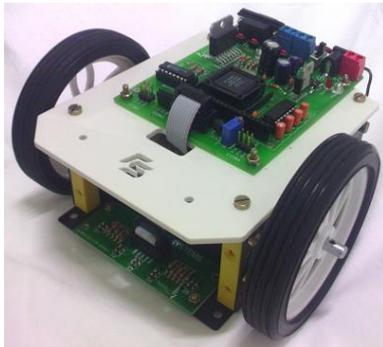
lo que proveen una alta movilidad. Estas estructuras cinemáticas proveen por lo tanto mayor utilidad respecto de aquellos no-omnidireccionales, principalmente en ambientes complejos, tales como ambientes cerrados que presenten obstáculos tanto estáticos como dinámicos.



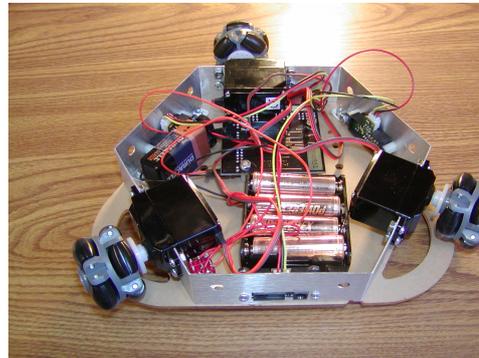
(a) Robot móvil de cuatro ruedas.



(b) Robot móvil tipo triciclo clásico.



(c) Robot móvil de tracción diferencial.



(d) Robot móvil de tracción omnidireccional.

Figura 1.2: Estructuras cinemáticas de robots móviles.

De lo expuesto anteriormente, cabe mencionar que en el presente trabajo se utilizará la estructura cinemática de tracción diferencial que adicionalmente tiene una variante ya que utiliza un par de ruedas de bolas en los extremos ortogonales a la posición de las ruedas de tracción para darle estabilidad y que pueda soportar el peso que tiene encima y así simplificar el movimiento de giro tal como se explica en la tesis [10].

### 1.3. Estado del arte

Como se observó en la anterior sección, en el transcurrir del tiempo se han realizado avances significativos en la robótica móvil, y lo que tienen en común todas las investigaciones es que convergen en el problema de dotarle de total autonomía, para lo cual ya

se han realizado varias tareas de investigación y aun así sigue siendo de interés y digno de estudio el buscar e implementar nuevas leyes de control que le permitan realizar tareas en forma autónoma. Dentro de estas tareas de investigación que se han venido desarrollando en el área de robótica móvil se pueden mencionar las siguientes:

- ✓ Posicionamiento o localización
- ✓ Planificación de caminos o trayectorias
- ✓ Seguimiento de trayectorias
- ✓ Regulación o estabilización a un punto de equilibrio
- ✓ Evasión de obstáculos

En este trabajo el interés se enfoca en darle solución al problema de seguimiento de trayectorias, así sobre este problema se desarrolla el estado del arte. Cabe mencionar que para la realización de esta sección se utilizó material que tiene la característica de ser indizado, así como el uso de referencias bibliográficas.

### 1.3.1. Seguimiento de trayectoria de robots móviles

Antes de la década de los 90's la planificación de caminos se orientaba a soluciones geométricas sin prestar atención a las limitaciones impuestas por la no holonomía de los sistemas móviles. En la actualidad se pueden considerar las restricciones dinámicas de un robot móvil para la planificación de trayectorias [11].

En [12] se presenta una solución a la planificación de caminos basado en el método de ecuaciones diferenciales parciales, donde los resultados obtenidos son aplicados a un robot móvil de ruedas mostrando su efectividad. En [13] se presenta un método para la planificación de caminos basados en obstáculos virtuales obteniendo resultados experimentales en tiempo real.

Desde el punto de vista de la ingeniería de control el principal problema asociado a sistemas no holonómicos es la estabilización, la planificación de un camino y el seguimiento de este camino [14], [15].

En [16] aborda el problema de seguimiento de trayectoria realizando un control para un sistema no holonómico para el seguimiento de un camino pre-planificado, se presenta un enfoque global para resolver este problema, el cual esta determinado de la siguiente manera:

- a) Planificación del camino. En esta etapa se genera un camino desde un punto inicial a un punto final, tomando en cuenta las restricciones no-holonómicas.
- b) Generación de la trayectoria. En esta etapa se impone los perfiles de velocidad angular para convertir el camino planificado en trayectoria deseada.

- c) Seguimiento de la trayectoria. En esta etapa se aplica el control en tiempo real para el seguimiento de trayectorias.

También se han realizado investigaciones en la búsqueda de caminos en términos geométricos introduciendo el concepto de espacio de configuraciones, que define el espacio físico de trabajo del sistema y dentro del cual el robot móvil está localizado por su posición y orientación [17].

En lo referente al control de robots móviles de ruedas, el estudio de la planificación y seguimiento de trayectoria ha sido muy abordado por muchos investigadores, para lo cual han desarrollado diferentes modelos (cinemático y dinámico), así como de diferentes técnicas de control automático que permiten llevar a cabo de forma eficiente su control.

Uno de los métodos más empleados en el problema de seguimiento de trayectorias es aquel que hace uso de métodos geométricos de seguimiento mediante persecución pura (pure pursuit) que consiste en generar arcos entre el punto de desplazamiento del móvil y los puntos de la trayectoria a seguir, dichos arcos son generados de 10 a 15 veces por segundo lo que permite un seguimiento suave [18], otro método para el seguimiento de trayectoria es el de ajuste de polinomios de quinto orden (Quintie Polynomial Fit) [19].

En robótica móvil, es necesario planificar movimientos y controlarlos para garantizar trayectorias seguras y precisas, lo cual conlleva a enfrentar diversos problemas entre los que se destaca el seguimiento de caminos que, para los robots móviles de ruedas, se determina teniendo en cuenta la posición y la orientación actual del vehículo con respecto a un trayecto y coordenadas a seguir [20]. Una técnica empleada para el seguimiento de trayectorias es la linealización de entrada-salida que involucra retroalimentación no lineal con definición de nuevas entradas [21], lo cual impone que las variables de estado tiendan asintóticamente a la trayectoria deseada. En [22] se utiliza esta técnica para definir trayectorias deseadas como las de una línea recta y una curva de forma de espira, en ambas definiciones se emplea un polinomio para el seguimiento de la trayectoria. En [23] se utilizó el modelo cinemático y se desarrolló un control para un robot móvil de ruedas tipo diferencial, sin utilizar medidas de variables mecánicas en el control de sus actuadores, basándose en el método de linealización de entrada-salida aplicada a una trayectoria de una parábola y presentando resultados satisfactorios en simulación.

En algunos trabajos relacionados, para resolver el problema de seguimiento de trayectoria, utilizan mucho el diseño de control por el método de Lyapunov [24], linealización aproximada [25] y linealización por entrada-salida [26], [27]; éste último método es muy utilizado en robots móviles de ruedas.

En [28] se hace una investigación para un robot móvil de ruedas no holonómico en el seguimiento de trayectoria con una ley de control que considere la dinámica del móvil, y pone en evidencia que puede presentar problemas en el diseño del control y en el análisis de estabilidad, mostrando que la dinámica interna del móvil juega un rol importante en el seguimiento de trayectorias. En [29] se realiza el seguimiento de trayectoria para un robot móvil de ruedas considerando las limitaciones del torque de entrada de los actuadores (motores) que se deben a las limitaciones de potencia de los mismos, el diseño del control se basa en la dinámica del móvil que permite planificar perfiles de velocidad restringidas a cumplir limitaciones del torque de los motores del

móvil. También en los trabajos [30], [31] y [32] se proponen métodos de control como son modos deslizantes y estructura variable, ambos métodos están basados en el modelo dinámico del robot móvil para resolver el problema de seguimiento de trayectoria.

En [33] se presenta una estrategia de control en tiempo discreto para el seguimiento de trayectoria de un robot móvil controlado remotamente, donde la estrategia de control se basa en el enfoque de modos deslizantes. En [34] propone un control de seguimiento de trayectoria de un robot móvil de ruedas usando sistemas de estructura variable, donde la posición del móvil es representada por coordenadas polares, y se presenta un algoritmo de control por modos deslizantes para la estabilización asintótica del robot móvil a la trayectoria deseada.

En [35] se presenta un método rápido para planificar una trayectoria y control de la posición de los robots móviles con ruedas en un partido de fútbol de robots, donde se aprovecha una sencilla propuesta de algoritmo de planificación de la trayectoria [36]. En el torneo de fútbol una cámara capta las imágenes del juego que son enviadas y procesadas por un ordenador y basándose en esta información y la estrategia del partido de fútbol puede definir las posiciones de destino para los robots del equipo. Para cada robot, el ordenador genera una referencia de tal forma que se evite cualquier obstáculo y luego calcula las señales de control aplicables a cada rueda y así llegar a su destino.

En la actualidad las nuevas herramientas de software ayudan mucho a la investigación y en este caso específico los lenguajes de programación, que en combinación de algunas herramientas, permiten simular trayectorias deseadas de robots móviles. En [37] se construye un ambiente simulado en computadora para llevar a cabo el seguimiento de trayectoria de un robot móvil utilizando algunas herramientas de programación Basic 7 con rutinas de lectura de pantalla en lenguaje de ensamblador.

En [38] se considera un sistema mecánico no holonómico y se aplica un control basado en pasividad para pruebas de estabilización, que posteriormente es aplicado a robots móviles considerando el modelo dinámico.

Todos los trabajos mencionados anteriormente están orientados a la búsqueda de una sucesión de posiciones de un robot móvil que permiten llevarlo de un estado inicial a uno final, entendiéndose como estado a la ubicación del robot en un plano de coordenadas cartesianas definida por  $x$  y  $y$ , que representan la posición del centro del robot, y  $\varphi$  que es la orientación angular del eje principal del robot móvil.

## 1.4. Planteamiento del problema

En el ámbito académico y de investigación, tanto universidades como tecnológicos y centros de investigación, el resolver problemas asociados a robótica móvil, como lo son la regulación, el seguimiento de trayectorias o la evasión de obstáculos, generalmente conlleva al empleo de kits comerciales, y si bien estos hacen uso extenso de sensores que los hacen amigables y fáciles de programar, y que en ocasiones emplean técnicas de control automático para resolver algunos de los problemas mencionados, estos se caracterizan por ser de arquitectura cerrada. En la Figura 1.3(a) y Figura 1.3(b), se

muestra uno de estos kits de robótica y su aplicación en seguimiento de una trayectoria establecida.



(a) Kit de robótica móvil Lego.



(b) Robot móvil Lego, en el seguimiento de trayectoria.

Figura 1.3: Kit de robótica y su aplicación

A diferencia de lo mencionado anteriormente, la robótica móvil se puede considerar como digna de estudio para aplicar conceptos teóricos de control basados en modelos matemáticos que describan el comportamiento del mismo, y de esta forma dotarle de la mayor autonomía posible.

Se puede decir que para el seguimiento de trayectorias punto a punto existen dos formas de solución: La primera que no se reporta en este trabajo, pero no menos importante se basa en la automatización utilizando sensores instalados en el robot móvil y de esa forma realizar el seguimiento de una trayectoria establecida. En contraparte, la solución a este problema consiste en diseñar leyes de control basadas en el modelo matemático (como se ven en los artículos referenciados) que gobierne a los actuadores del robot móvil y de esa forma realice el seguimiento de una trayectoria deseada con el mínimo de error posible.

El problema de llevar un robot móvil de un punto a otro es que llegue, al punto final, con la misma dirección con la que partió en el punto inicial, si se tiene puntos muy cercanos donde no varía mucho el ángulo de dirección será más fácil que el móvil llegue al otro punto manteniendo su dirección, pero si se tiene un punto más lejano se complica aún más que el móvil llegue al punto final con la dirección inicial, esto se debe que mientras más alejado este el punto final del inicial se incrementan las opciones por donde el robot móvil puede intentar llegar al punto final. Para resolver el problema de seguimiento de trayectoria algunos autores proponen un control muy extenso en cuanto a su ecuación matemática, que son muy difíciles de instrumentar en un prototipo y otros que son muy sencillos pero que carecen de fundamento matemático. El control que se pretende implementar tendrá la característica de ser relativamente sencillo y que se fundamente en un modelo matemático, en este trabajo se utiliza el modelo basado en la dinámica del robot móvil de ruedas a diferencia de otros trabajos donde generalmente se utiliza el modelo basado en la cinemática de la estructura del robot móvil bajo estudio,

de tal manera que la ley de control tome en cuenta el torque asociado a cada motor para realizar la actuación del móvil. Como se pudo observar en el estado del arte el objetivo en robótica móvil seguirá siendo de dotarle de total autonomía al robot móvil, por lo tanto, cada publicación y trabajo realizado referente a este tema contribuye en gran medida en resolver las problemáticas mencionadas anteriormente.

Con base en los trabajos desarrollados en el área de Mecatrónica del CIDETEC-IPN [39] y [10], donde se realizó la construcción de un prototipo del robot móvil de ruedas de tipo diferencial, para ejecutar el seguimiento de trayectorias y la evasión de obstáculos, e incluyendo el presente trabajo, podrán dar lugar a la replica de dicho prototipo y aplicarlo a la enseñanza en universidades y tecnológicos del entorno regional de mi país, permitiendo de esta forma la transferencia tecnológica y de conocimientos en el marco de la cooperación educativa.

## 1.5. Objetivos de la tesis

En esta sección se realiza el planteamiento de los objetivos de la tesis, los cuales se dividen en objetivo general y objetivos específicos. Los objetivos responden a lo que se desea lograr con el desarrollo de este trabajo.

### 1.5.1. Objetivo general

El prototipo de robot móvil de ruedas, del cual se hizo uso en la presente tesis, fue diseñado y construido con fines didácticos y para su aplicación en futuras investigaciones. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo consiste en diseñar una ley de control, basada en el modelo dinámico de un robot móvil de ruedas de tipo diferencial, que permita realizar la tarea de seguimiento de trayectoria punto a punto.

### 1.5.2. Objetivos específicos

Con la intención de lograr el objetivo general, a continuación se describen los objetivos específicos sobre el problema a desarrollar.

1. Estudiar y caracterizar el modelo dinámico del robot móvil de ruedas tipo diferencial.
2. Estudiar un controlador para el seguimiento de trayectoria punto a punto basado en el modelo dinámico del robot móvil, y realizar las simulaciones numéricas con la ayuda de Matlab<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>.
3. Diseñar un generador de trayectorias.
4. Integrar el controlador desarrollado en el numeral 2 con el generador de trayectorias del numeral 3, para el control del robot móvil de ruedas, que permitan realizar la tarea de seguimiento de trayectoria punto a punto. Asimismo, llevar a

cabo las simulaciones correspondientes a la integración del sistema completo, para determinar su desempeño y eficiencia.

5. Conectar el software Matlab®-Simulink® con la tarjeta de control DS1104 junto con el robot móvil y el control diseñado para realizar las pruebas en tiempo real.
6. Realizar las pruebas experimentales de la ley de control diseñada sobre el prototipo y obtener los resultados experimentales.
7. Documentar los resultados obtenidos a nivel simulación y a nivel experimental.

## 1.6. Recursos empleados en la tesis

La presente tesis no contempla el diseño y construcción del robot móvil, debido a que ya se cuenta con este prototipo. Es así que la tesis está orientada a diseñar una ley de control para el seguimiento de trayectorias, así como el obtener los resultados experimentales correspondientes, para validarlos con los obtenidos a nivel de simulaciones numéricas. Una vez mencionado lo anterior, a continuación se enlistan los recursos a emplear en el desarrollo de este trabajo:

- ✓ Prototipo de robot móvil tipo diferencial con la electrónica implementada y lista para funcionar.
- ✓ Tarjeta de control modelo DS1104, la cual interactúa con Matlab®-Simulink® y ControlDesk.
- ✓ Una computadora con los siguientes requisitos mínimos, para un buen funcionamiento y desempeño del DSP, Pentium 4 a 1.75 GHz con 1.50 Gb de RAM.
- ✓ Equipos de laboratorio: Osciloscopio, multímetro y fuente de voltaje regulable.
- ✓ El Software de simulación Matlab®-Simulink®, para realizar pruebas de las leyes de control.

Es importante decir que también se utilizó la infraestructura del CIDETEC-IPN como son los laboratorios, biblioteca y otros.

## 1.7. Contenido de la tesis

A continuación se presenta la estructura de la tesis, la cual consta de cinco capítulos y de tres apéndices, los cuales se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se realiza lo relacionado con historia de la robótica, antecedentes de la investigación, profundizando en robótica móvil. También, se hizo una revisión de trabajos más representativos relacionados con el área, dando lugar a la constitución del

estado del arte. Se plantean los objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo de la presente tesis.

El Capítulo 2 se realiza el modelado dinámico del robot móvil de ruedas de tipo diferencial. Asimismo, se describen las partes principales de las cuales consta el móvil que se empleará en el desarrollo experimental.

En el Capítulo 3 se diseña la ley de control que permita llevar a cabo la tarea de seguimiento de trayectoria punto a punto. Asimismo, se presentará el problema relacionado con la generación de trayectorias.

En el Capítulo 4 se realiza la simulación vía Matlab<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>, así como la implementación experimental de la ley de control, en el prototipo del robot móvil de ruedas tipo diferencial, con la ayuda de Control Desk y la tarjeta DS1104.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y trabajos a futuro sobre la tesis desarrollada.

Finalmente, en el apéndice A se presentan las publicaciones relacionadas con el tema de tesis. En el apéndice B se presenta el prototipo de robot móvil de ruedas tipo diferencial, mostrando la estructura mecánica y los circuitos electrónicos utilizados. En el apéndice C se presentan las hojas técnicas de la tarjeta de control DS1104.



## Capítulo 2

# Modelo dinámico del robot móvil de ruedas

Este capítulo se dedica al estudio del modelo dinámico del robot móvil de ruedas de tipo tracción diferencial. Primero se aborda el problema de las restricciones no holonómicas aplicado a sistemas móviles así como la metodología para incluirlas en la dinámica del sistema Euler-Lagrange. Posteriormente, se presenta el análisis del modelo dinámico del robot móvil bajo estudio. Finalmente se realiza la descripción del prototipo que se utiliza en la presente tesis, así como los parámetros asociados al robot, los cuales serán de gran utilidad en el proceso de validación de la ley de control que se diseñó en el siguiente capítulo, tanto a nivel simulación como a nivel experimental.

### 2.1. Aspectos dinámicos en robótica móvil

Por lo general, en robótica móvil se estudia el movimiento que realizan estos sistemas sin analizar las fuerzas que lo producen. Tomando en cuenta, que las velocidades lineales y angulares vienen dadas por las fuerzas y pares que se aplican a la estructura mecánica y dependen también de las magnitudes de las masas y su distribución, el estudio del modelo dinámico de un robot móvil es por lo general más difícil, y por eso la consideración de dicho modelo complica el desarrollo e implementación de leyes de control, que muchas veces han sido diseñadas utilizando el modelo cinemático, según se pudo ver en el estado del arte presentado en el primer capítulo. La consideración del uso del modelo dinámico en robótica móvil se hace imprescindible cuando se requiere realizar movimientos rápidos involucrando aceleraciones y masas de los mismos. En el estudio del comportamiento dinámico de un robot móvil es necesario tomar en cuenta conceptos relacionados con las distribuciones de masas y las inercias.

## 2.2. Restricciones no holonómicas

En robótica móvil, los robots cuyos movimientos están sujetos a una serie de restricciones no integrables que involucran las derivadas con respecto al tiempo del vector de configuración  $\mathbf{q}$  están clasificados como sistemas no holonómicos [40].

Considere la configuración cinemática de tracción diferencial con un eje en común, pero con actuadores en las llantas en forma independiente como se muestra en la Figura 2.1. Suponiendo que no exista deslizamiento en las llantas, el movimiento en cada llanta está restringida a su dirección longitudinal con velocidades  $v_r$  y  $v_l$ , respectivamente, mediante una simple restricción no holonómica. En resumen, el movimiento no puede acontecer a través del eje coordenado del robot  $y_m$ , pero si en la dirección del eje coordenado  $x_m$ , donde  $v_c$  es la velocidad del centro del robot móvil.

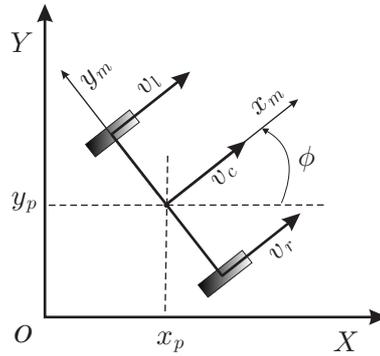


Figura 2.1: Cinemática de un robot no holónomo.

Entonces podemos decir que son aquellas restricciones que dependen de la velocidad, además que exige no sea integrable y no se pueda obtener derivando una restricción holónoma. En un robot de  $n$  grados de libertad, las variables que representan su movimiento se agrupan en un vector  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ . Considerando la siguiente restricción lineal en las velocidades se tiene:

$$a_1(\mathbf{q})\dot{q}_1 + a_2(\mathbf{q})\dot{q}_2 + \dots + a_n(\mathbf{q})\dot{q}_n = 0. \quad (2.1)$$

Si se supone que los términos  $a(\mathbf{q})$  se pueden escribir como:

$$a_1(\mathbf{q}) = \frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial q_1}, \quad a_2(\mathbf{q}) = \frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial q_2}, \dots, \quad a_n(\mathbf{q}) = \frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial q_n}.$$

Entonces, la restricción (2.1) se puede escribir como:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{dh(\mathbf{q})}{dt} = 0, \quad (2.2)$$

si se integra la ecuación (2.2) implica que  $h(\mathbf{q}) = \text{constante}$ . En este caso se dice que la restricción expresada por la ecuación (2.1) es holonómica porque puede ser integrada. Si no existe una función  $h(\mathbf{q})$  que pueda ser obtenida mediante integración de la restricción (2.1) entonces se dice que dicha restricción es no holonómica.

## 2.3. Sistema Euler-Lagrange y restricciones no holonómicas

Si un sistema Euler-Lagrange está sometido a restricciones holonómicas, entonces las configuraciones que puede alcanzar el sistema están restringidas a un “subespacio” no lineal por lo que las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.3)$$

que pueden ser evaluadas en  $h(\mathbf{q}) = \text{constante}$  para obtener un modelo matemático simplificado que generalmente queda expresado en términos de un número más reducido de variables. Se considera sistemas Euler-Lagrange que están sometidos a  $m$  restricciones no holonómicas, las cuales pueden expresarse de manera matricial como:

$$A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.4)$$

nótese que el  $i$ -ésimo reglón de la matriz  $A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , representado por  $A_i$ , constituye la  $i$ -ésima restricción no holonómica. Para incluir las restricciones (2.4) en las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3) se procede del siguiente modo: Se considera que las  $m$  restricciones ejercen fuerzas generalizadas externas,  $\bar{\tau}_i$ , sobre el sistema Euler-Lagrange. Estas fuerzas de restricción deben ser conservativas, es decir, no deben realizar trabajo sobre el sistema, esto significa que

$$T = \bar{\tau}_i \cdot \bar{d} = 0, \quad (2.5)$$

donde  $T$  es el trabajo,  $\bar{\tau}_i$  es la fuerza aplicada por la restricción  $i$  y  $\bar{d}$  es la distancia generalizada recorrida bajo la influencia de la fuerza  $\bar{\tau}_i$ . La condición (2.5) significa que la dirección en que se mueve el sistema Euler-Lagrange debe ser perpendicular a  $\bar{\tau}_i$ , es decir

$$\bar{\tau}_i \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.6)$$

y de acuerdo a  $A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$  esto implica que la fuerza generalizada ejercida por la restricción  $i$ ,  $\bar{\tau}_i$ , debe ser paralela al  $i$ -ésimo reglón de  $A(\mathbf{q})$ . Por tanto, las ecuaciones Euler-Lagrange representadas por (2.3) deben modificarse del siguiente modo:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 + \cdots + \bar{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T, \quad (2.9)$$

donde las  $\lambda_i$ 's son escalares que tienen que ver con la magnitud de la fuerza generalizada ejercida por la restricción  $i$ .

## 2.4. Método para incluir las restricciones no holonómicas en la dinámica del sistema Euler-Lagrange

Un sistema Euler-Lagrange con coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sometido a  $m$  restricciones no holonómicas, linealmente independientes representadas por la ecuación (2.4), donde  $A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tiene un rango  $m$ . Entonces existen  $n - m$  vectores linealmente independientes de  $n$  dimensiones,  $S_i(\mathbf{q})$ , tales que:

$$A(\mathbf{q})S_i(\mathbf{q}) = 0,$$

es decir, existe una matriz  $S(\mathbf{q})$  de  $n \times (n - m)$  tal que

$$A(\mathbf{q})S(\mathbf{q}) = 0, \quad (2.10)$$

nótese que  $S_i(\mathbf{q})$  es la  $i$ -ésima columna de  $S(\mathbf{q})$ . Multiplicando la expresión anterior por un vector  $\boldsymbol{\nu}(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$  se obtiene

$$A(\mathbf{q})S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t) = 0, \quad (2.11)$$

comparando la ecuación (2.11) con (2.4) se observa que se puede escribir

$$\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t). \quad (2.12)$$

Considerando el modelo dinámico del sistema Euler-Lagrange sometido a las  $m$  restricciones:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.13)$$

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) = A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + B(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (2.14)$$

donde  $B(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , con  $r$  el número de entradas y derivando la ecuación (2.12) se tiene:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t) + S(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}(t). \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.12) y (2.15) en (2.14) y multiplicando por  $S^T(\mathbf{q})$  se obtiene:

$$\begin{aligned} & S^T(\mathbf{q}) \left\{ M(\mathbf{q}) \left[ \dot{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t) + S(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t)] + g(\mathbf{q}) \right\} \\ &= S^T(\mathbf{q}) \left\{ A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + B(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Usando la ecuación (2.10) se obtiene:

$$A(\mathbf{q})S(\mathbf{q}) = 0 \implies S^T(\mathbf{q})A^T(\mathbf{q}) = 0. \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16) se tiene:

$$\begin{aligned} & S^T(\mathbf{q}) \left\{ M(\mathbf{q}) \left[ \dot{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t) + S(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t)] + g(\mathbf{q}) \right\} \\ &= S^T(\mathbf{q}) \left\{ B(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

De la ecuación (2.18) obtenemos el siguiente modelo dinámico:

$$\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t), \quad (2.19)$$

$$\bar{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\nu}(t) + \bar{g}(\mathbf{q}) = \bar{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (2.20)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\mathbf{q}) &= S^T(\mathbf{q})M(\mathbf{q})S(\mathbf{q}), \\ \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= S^T(\mathbf{q}) \left[ M(\mathbf{q})\dot{S}(\mathbf{q}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})S(\mathbf{q}) \right], \\ \bar{g}(\mathbf{q}) &= S^T(\mathbf{q})g(\mathbf{q}), \\ \bar{B}(\mathbf{q}) &= S^T(\mathbf{q})B(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

## 2.5. Análisis del modelo dinámico del robot móvil de ruedas

El robot móvil a utilizar cuenta con dos ruedas de radio  $r$ , cada una de las cuales es actuada por un motor eléctrico independiente, y cuya separación entre ambas es igual a  $2b$ . Las ruedas están colocadas simétricamente una a cada lado del robot y giran de forma independiente sobre el mismo eje de simetría. En esta estructura existen una o dos ruedas más del tipo de bolas, las cuales sirven para dar estabilidad a la estructura del robot de tipo diferencial. Además, se supone que el robot bajo estudio se mueve sobre un plano horizontal, por lo que no existe efecto de gravedad. En la Figura 2.2 se muestra el robot móvil de ruedas tipo diferencial. A continuación se detallan el resto de las variables involucradas con el movimiento del robot, las cuales se utilizan más adelante:

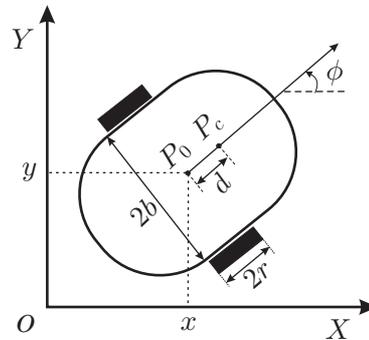


Figura 2.2: Robot móvil de ruedas.

- ✓  $(x, y)$  son las coordenadas del punto  $P_0$ , es decir, el punto común al eje de simetría longitudinal y al eje sobre el que giran ambas ruedas.
- ✓  $\phi$  representa la orientación del móvil. Se mide como el ángulo entre el eje longitudinal perpendicular al eje de simetría de las ruedas del móvil y el eje  $X$  positivo.

- ✓  $\theta_r$  es el ángulo descrito por la rueda derecha cuando se produce un desplazamiento angular (debido a la vista de la Figura 2.2 no se ve esta variable en ella).
- ✓  $\theta_l$  es el ángulo descrito por la rueda izquierda cuando se produce un desplazamiento angular (debido a la vista de la Figura 2.2 no se ve esta variable en ella).
- ✓  $P_c$  representa la ubicación del centro de masa de la plataforma principal del robot móvil. Este punto está sobre el eje longitudinal perpendicular al eje de simetría de las ruedas a una distancia  $d$  respecto al eje de las ruedas.
- ✓  $m_c$  y  $m_w$  son las masas de la plataforma principal del móvil y de cada una de las ruedas con su motor, respectivamente.
- ✓  $I_c$ ,  $I_w$  e  $I_m$  son las inercias de la plataforma principal del móvil alrededor de un eje vertical que pasa por  $P_c$ , de cada rueda con su motor alrededor del eje de la rueda (horizontal) y de cada rueda con su motor alrededor de un eje vertical que pasa diametralmente sobre el centro de la rueda, respectivamente (ver Figura 2.7).

Existen tres restricciones asociadas al robot móvil que involucran a las velocidades de las ruedas. En la Figura 2.3 se muestran las velocidades asociadas a los centros de cada una de las ruedas motrices.

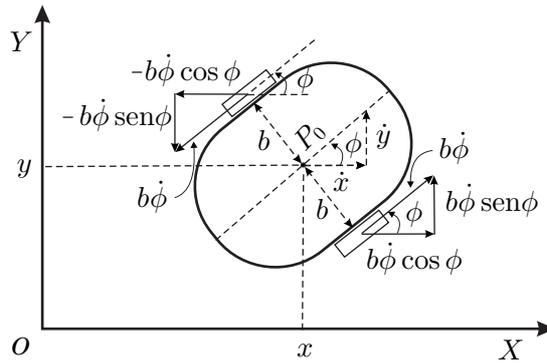


Figura 2.3: Velocidades de los centros de las ruedas.

A continuación se detallan las restricciones no holonómicas impuestas por las velocidades asociadas a las ruedas motrices.

**Restricción 1:** La velocidad del punto  $P_0$  es sobre la dirección del eje longitudinal de simetría

$$\dot{x} = v \cos \phi, \quad (2.21)$$

$$\dot{y} = v \sin \phi, \quad (2.22)$$

donde  $v$  es la velocidad de  $P_0$ . Si multiplicamos la ecuación (2.21) por  $-\sin \phi$  y la ecuación (2.22) por  $\cos \phi$ , y luego de sumar ambas ecuaciones se tiene

$$\dot{y} \cos \phi - \dot{x} \sin \phi = 0, \quad (2.23)$$

**Restricción 2:** La rueda izquierda no debe patinar o resbalar. Sea  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r\dot{\theta}_l$  la velocidad del centro de la rueda izquierda. Entonces, considerando que la plataforma del móvil es rígida y que la velocidad del centro de la rueda medida desde el punto  $P_0$  es  $b\dot{\phi}$ , ver la Figura 2.3 se tiene

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - b\dot{\phi} \cos \phi = r\dot{\theta}_l \cos \phi, \quad (2.24)$$

$$\dot{\tilde{y}} = \dot{y} - b\dot{\phi} \sin \phi = r\dot{\theta}_l \sin \phi, \quad (2.25)$$

calculando  $\dot{\tilde{x}} \cos \phi$  y  $\dot{\tilde{y}} \sin \phi$  y sumando las expresiones resultantes, es decir,

$$\dot{x} \cos \phi - b\dot{\phi} \cos^2 \phi = r\dot{\theta}_l \cos^2 \phi, \quad (2.26)$$

con

$$\dot{y} \sin \phi - b\dot{\phi} \sin^2 \phi = r\dot{\theta}_l \sin^2 \phi, \quad (2.27)$$

se obtiene:

$$\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi - b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_l. \quad (2.28)$$

**Restricción 3:** La rueda derecha no debe patinar o resbalar y procediendo como en el caso anterior se obtiene:

$$\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi + b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_r. \quad (2.29)$$

En resumen tenemos las tres restricciones no holonómicas ( $m = 3$ ):

$$\dot{y} \cos \phi - \dot{x} \sin \phi = 0, \quad (2.30)$$

$$\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi + b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r = 0, \quad (2.31)$$

$$\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi - b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_l = 0, \quad (2.32)$$

que se puede escribir en forma matricial como  $A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$  con cinco columnas y tres filas:

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \phi & -\cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & b & -r & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & -b & 0 & -r \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}.$$

De la condición  $A(\mathbf{q})S(\mathbf{q}) = 0$  con  $S(\mathbf{q})$  una matriz de  $n - m = 2$  columnas linealmente independientes se encuentra:

$$S(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

De la ecuación (2.33) y  $\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t)$  se concluye que:

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l \end{bmatrix}^T.$$

En la mecánica clásica, la energía cinética de una masa puntual depende de su masa  $m$  y sus componentes de movimiento. Para realizar el análisis de esta energía en el robot móvil será conveniente dividir la energía cinética total en la suma de su energía cinética de traslación y la energía de rotación sobre los centros de masa. Por lo tanto la energía cinética total del robot móvil está dado por:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) m_c + \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\phi}^2 \\ & + \frac{1}{2} I_m \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_w r^2 \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} m_w r^2 \dot{\theta}_l^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

que resulta de la suma de: Centro de masa de la plataforma principal (traslacional,  $P_c$ ), plataforma principal (rotacional,  $P_c$ ), inercia de cada rueda con motor (eje de la rueda), inercia de cada rueda con motor (eje vertical diametral) e inercia de cada rueda con motor como partícula (traslacional).

Suponiendo que el robot es rígido y que la velocidad del punto  $P_c$  medida desde el punto  $P_0$  es  $d\dot{\phi}$ , como se muestra en la Figura 2.4, entonces se puede escribir:

$$\dot{x}_c = \dot{x} - d\dot{\phi} \sin \phi \quad (2.35)$$

$$\dot{y}_c = \dot{y} + d\dot{\phi} \cos \phi. \quad (2.36)$$

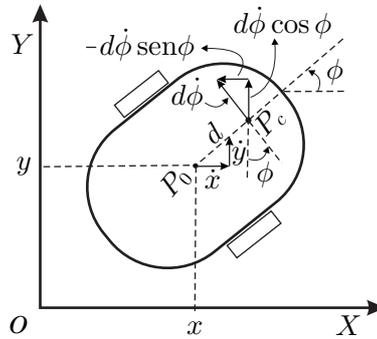


Figura 2.4: Relación entre las velocidades de  $P_0$  y de  $P_c$ .

Sustituyendo las ecuaciones (2.35) y (2.36) en (2.34) se tiene:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} m_c \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_c \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_c d^2 \dot{\phi}^2 - m_c d \dot{\phi} \dot{x} \sin \phi + m_c d \dot{\phi} \dot{y} \cos \phi \\ & + \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\phi}^2 \\ & + \frac{1}{2} I_m \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_w r^2 \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} m_w r^2 \dot{\theta}_l^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

De la ecuación (2.37) se obtiene la siguiente matriz de inercia

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_c & 0 & -dm_c \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & m_c & dm_c \cos \phi & 0 & 0 \\ -dm_c \sin \phi & dm_c \cos \phi & d^2 m_c + I_c + 2I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_w r^2 + I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_w r^2 + I_w \end{bmatrix}.$$

Usando la matriz  $M(\mathbf{q})$  y

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} c_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ c_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \vdots \\ c_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.38)$$

donde la matriz  $C_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está representada por [41]:

$$C_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \bar{C}_i(\mathbf{q})$$

$$\bar{C}_i(\mathbf{q}) = \left( \frac{\partial M_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial M_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial M(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

se encuentra:

$$\bar{C}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2dm_c \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\bar{C}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2dm_c \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\bar{C}_3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & dm_c \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dm_c \cos \phi - dm_c \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dm_c \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$\bar{C}_4(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\bar{C}_5(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Entonces, sustituyendo (2.39)-(2.43) en (2.38) se tiene:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -dm_c \dot{\phi} \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dm_c \dot{\phi} \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,  $g(\mathbf{q}) = [0, 0, 0, 0, 0]^T$  debido a que el robot se mueve en un plano horizontal. En resumen se obtiene el siguiente modelo dinámico asociado al robot móvil de ruedas de tipo tracción diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t), \\ \bar{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\nu}(t) + \bar{g}(\mathbf{q}) &= \bar{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= [\tau_d, \tau_l]^T, \\ \bar{M}(\mathbf{q}) &= S^T(\mathbf{q})M(\mathbf{q})S(\mathbf{q}), \\ \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= S^T(\mathbf{q}) \left[ M(\mathbf{q})\dot{S}(\mathbf{q}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})S(\mathbf{q}) \right], \\ \bar{g}(\mathbf{q}) &= S^T(\mathbf{q})g(\mathbf{q}), \\ \bar{B}(\mathbf{q}) &= S^T(\mathbf{q})B(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Realizando cálculos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 + I) + I_w & \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 - I) \\ \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 - I) & \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 + I) + I_w \end{bmatrix}, \\ \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{r^2}{2b}m_c d \dot{\phi} \\ -\frac{r^2}{2b}m_c d \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} m &= m_c + 2m_w, \\ I &= m_c d^2 + 2m_w b^2 + I_c + 2I_m. \end{aligned}$$

## 2.6. Descripción del prototipo a utilizar

Como se mencionó en el primer capítulo, para la realización de la presente tesis se utilizó un prototipo ya construido y listo para probar diferentes leyes de control desarrolladas en Matlab®-Simulink®. En la Figura 2.5 se muestra un diagrama de bloques que describe la conexión que existe entre las diferentes etapas del robot móvil, a saber: la estructura mecánica, la electrónica de potencia y la etapa de adquisición de datos y control. En esta sección se realiza una breve descripción de estos bloques (para más información ver Apéndice B). Asimismo, se presentan los parámetros del robot móvil construido y presentado en [10] y [39], los cuales serán de utilidad en la realización de las simulaciones numéricas desarrolladas en el Capítulo 4.

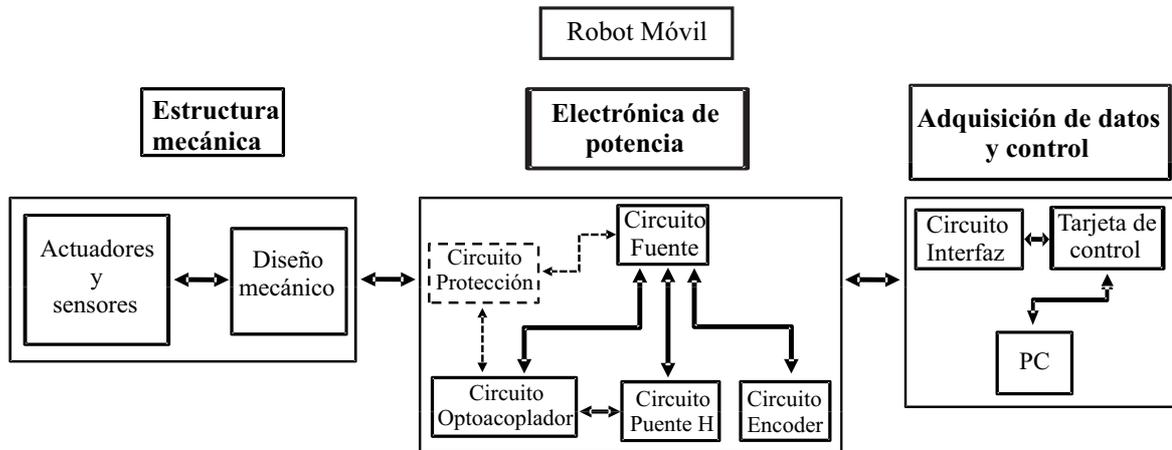


Figura 2.5: Diagrama de bloques del robot móvil de ruedas.

### 2.6.1. Estructura mecánica

La estructura mecánica soporta a todos los componentes del robot móvil (motores, sensores, baterías y tarjetas electrónicas). En la Figura 2.6 se muestra la estructura mecánica diseñada con el software SolidWorks. Las partes que conforman la estructura mecánica del robot móvil que se empleará son las siguientes:

- ✓ Base del robot móvil, está permite el soporte de los actuadores, las baterías y las tarjetas electrónicas.
- ✓ Ruedas motrices, son dos y permiten el desplazamiento del robot móvil. Se vulcanizaron para que existiera mayor fricción con la superficie de contacto.
- ✓ Bujes de unión, estos conectan de forma mecánica a las ruedas motrices con las flechas de los motores independientes.

- ✓ Base para ruedas de bola, esta pieza es la que soporta al par de ruedas de bola que brindan estabilidad al robot.
- ✓ Barras de unión entre soportes y estructura, cuenta con 3 piezas semejantes, las cuales se distribuyen a lo largo del soporte de las ruedas de bolas.
- ✓ Bridas de soporte para el motor, sirven como soporte para los motores permitiendo sujetarlos a la base del robot, con el fin de fijarlos y puedan unirse a los ejes de las ruedas.
- ✓ Bases para el encoder, éstas permiten la sujeción con la base del robot, para que puedan conectarse de forma mecánica a las flechas de los respectivos motores.
- ✓ Motores, los actuadores corresponden al modelo GNM3150 del fabricante MicroMo Electronics Inc., los cuales requieren de un voltaje nominal de 24 V. El par de salida de los mismos es de 3.53 Nm, con un factor de reducción de 20:1.
- ✓ Encoders <sup>1</sup>, estos son de tipo incremental de la marca OMRON, modelo E6A2-CW5, y permiten realizar la medición del desplazamiento angular del móvil, mediante el acoplamiento a través de un buje con las flechas de los respectivos motores.
- ✓ Baterías, el voltaje nominal de estas es de 12 V de capacidad de 12 Ah, se emplearon dos de estas en el prototipo y son de la marca YUASA.

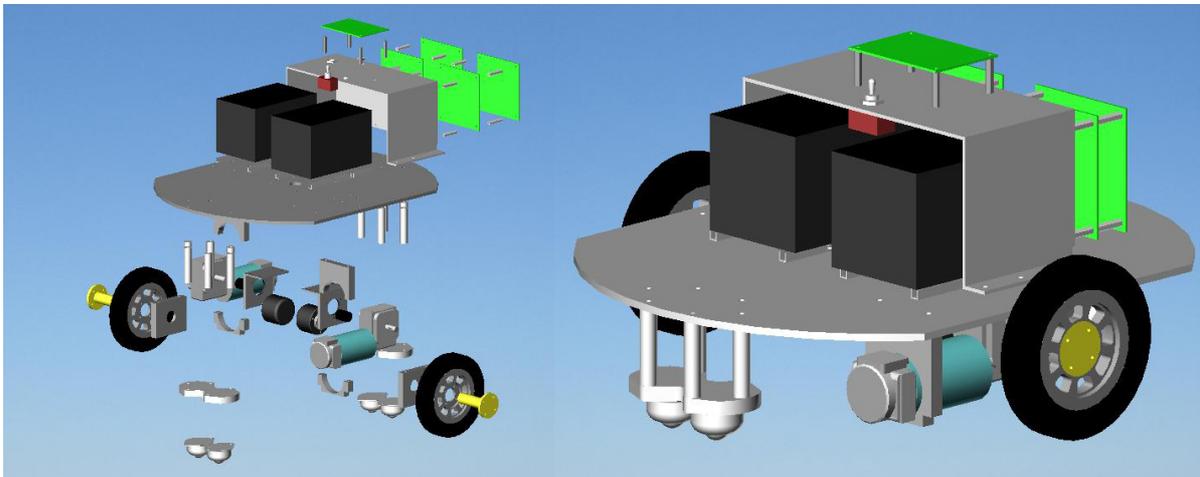


Figura 2.6: Estructura mecánica del robot móvil.

---

<sup>1</sup>El funcionamiento de un encoder consiste en un arreglo de fototransistor y fotodiodo, colocados en ambos extremos de un disco que tiene sectores opacos y libres, el cual se monta en el rotor del motor y al girar el disco, el número de pulsos por revolución, determina la resolución del encoder.

### 2.6.2. Parámetros del robot móvil de ruedas

La identificación de los parámetros que constituyen el modelo dinámico del robot móvil tiene por objeto la estimación precisa de éstos, realizados a partir de mediciones experimentales relativas al desplazamiento del robot. En la presente tesis, para la estimación de los parámetros del robot se utilizó un instrumento de medida (balanza electrónica) y el software SolidWorks el cual calcula tanto las masas como las inercias del robot móvil. La importancia de la identificación de parámetros dinámicos se manifiesta especialmente cuando se realizan las simulaciones numéricas de las leyes de control basadas en el modelo dinámico.

La obtención del peso de los diferentes componentes del robot móvil se realizó con la ayuda de una balanza de precisión, cuya resolución es de 0.001 kg. En las Tablas 2.1 y 2.4 se muestran los valores de los pesos obtenidos de las diferentes partes que conforman al robot móvil, así como de las ruedas del mismo. Un cálculo inmediato muestra que el peso total del prototipo empleado es de 19.7 Kg.

No	Parte	Peso [kg]
1	Base	2.932
2	Motor de CD 1	1.542
3	Motor de CD 2	1.542
4	Encoder tipo incremental 1	0.235
5	Encoder tipo incremental 2	0.235
6	Soporte encoder 1	0.685
7	Soporte encoder 2	0.686
8	Soporte motor superior 1	0.045
9	Soporte motor inferior 1	0.104
10	Soporte motor superior 2	0.045
11	Soporte motor inferior 2	0.106
12	Ruedas de bola	0.129
13	Soporte para ruedas de bola	0.205
14	Barras de unión entre soportes y estructura	0.023
15	Cople del encoder	0.005
16	Tarjetas electrónicas	1.200
17	Baterías (dos unidades)	8.250

Tabla 2.1: Pesos del cuerpo del robot móvil.

El cálculo de las inercias también se obtuvieron con la ayuda de SolidWorks, teniendo de esta forma:  $I_c$ , la inercia del cuerpo del robot alrededor de un eje vertical que pasa por el centro del mismo,  $I_z$ , la inercia de cada rueda alrededor del eje de la rueda,  $I_x$ , la inercia de cada rueda alrededor de un eje vertical que pasa diametralmente sobre el centro de la rueda,  $I_w$ , la inercia de cada rueda con su motor alrededor del eje de cada rueda,  $I_m$ , la inercia de cada rueda con su motor alrededor de un eje vertical que pasa

diametralmente sobre el centro de la rueda. En la Tabla 2.3 se muestran los valores.

No	Parte	Peso [kg]
1	Llanta 1	0.480
2	Buje llanta 1	0.224
3	Soporte buje 1	0.164
4	Llanta 2	0.488
5	Buje llanta 2	0.212
6	Soporte buje 2	0.164

Tabla 2.2: Pesos de las ruedas del robot móvil.

No	Inercias	[kg-m <sup>2</sup> ]
1	$I_c$	0.134982
2	$I_z$	0.000934
3	$I_x$	0.000476
4	$I_w$	0.003745
5	$I_m$	0.001494

Tabla 2.3: Inercias de las ruedas del robot móvil.

De todos los parámetros asociados a los momentos de inercias reportados en la Tabla 2.3, sólo se hará uso de  $I_c$ ,  $I_w$  e  $I_m$ , pues los demás no son requeridos por el modelo dinámico del robot móvil. En la Figura 2.7 se muestran las direcciones de las inercias que se utilizarán en el Capítulo 4, donde se presentan las simulaciones numéricas y los resultados experimentales de la ley de control diseñada.

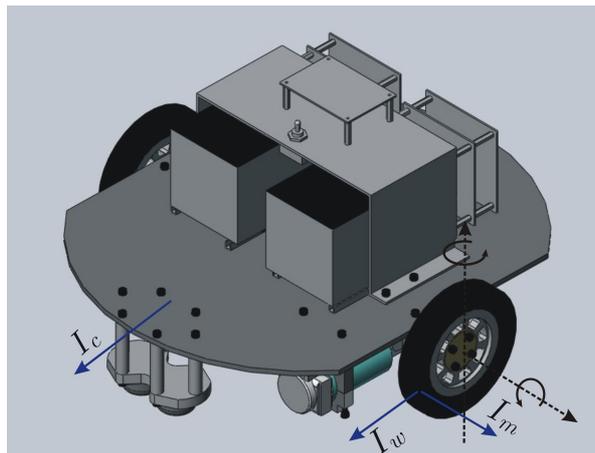


Figura 2.7: Inercias asociadas a la dinámica del robot móvil.

Finalmente otros de los parámetros de interés del sistema que son de gran utilidad a nivel simulación y experimental es el asociado al radio de las ruedas y la distancia entre estas, estos parámetros se muestran en la Tabla 2.4.

No	Descripción	Longitud [m]
1	Radio de las ruedas ( $r$ )	0.0749
2	Distancia entre ruedas ( $L$ )	0.1925

Tabla 2.4: Radio de las ruedas del robot móvil y longitud entre estas.

### 2.6.3. Electrónica de potencia

Un vez revisado la estructura del prototipo construido, se procede a describir la etapa de potencia, la cual se encarga de generar el movimiento de las ruedas por medio de los motores y de alimentar a los circuitos encargados de realizar el control para desarrollar la tarea planteada. Sin duda, la etapa de potencia es parte fundamental para lograr el resultado esperado, ya que por medio de esta etapa el robot es capaz de realizar movimientos y estar en contacto con la tarjeta controladora. Los circuitos que conforman la etapa de potencia del robot móvil construido en [10], son los siguientes:

- ✓ Circuito fuente, este circuito se encarga de suministrar los diferentes niveles de voltaje requeridos por los diferentes circuitos electrónicos asociados al móvil. La fuente de energía primaria de este circuito, como ya se mencionó, consta de dos baterías de 12 V. Para reducir el voltaje de las baterías, se emplearon circuitos reguladores de voltaje 7805 para la fuente de 5 V que alimenta la etapa de optoacopladores en el puente H y la electrónica necesaria, también se hace uso del 7812 para 12 V que suministra energía a los ventiladores que brindan refrigeración al puente H y a los encoders. Como protección en este circuito se integran un par de fusibles de 1 A en caso de presentarse una sobrecarga de corriente en el sistema.
- ✓ Circuito optoacoplador, este circuito tiene la función de acoplar dos señales de medios distintos, es decir su función principal es mantener aislada eléctricamente dos circuitos y proteger a la tarjeta controladora y así evitar el paso directo de corriente que pudiera dañar algún dispositivo. Cabe señalar que cuenta con dos tarjetas de este circuito, debido a que el prototipo utiliza dos motores para realizar movimientos.
- ✓ Circuito puente H, este circuito se construye con cuatro interruptores los cuales permiten la conmutación del sentido de giro de los motores, para el prototipo se emplea un circuito integrado LMD18200 que tiene las características de controlar a un motor de CD con solo dos señales, las cuales están determinadas por PWM y DIR. Como la generación de movimiento genera un consumo de corriente considerable en los motores a través del puente H, con la finalidad de disipar el calor en este dispositivo el prototipo cuenta con un ventilador asociado a cada puente H.

- ✓ Circuito Encoder, este circuito cuenta con optoacopladores y tiene la función de tomar las señales provenientes de los encoders y enviarlas a la tarjeta de control para su procesamiento. El prototipo cuenta con dos de estos circuitos asociados a cada uno de los encoders del robot móvil.

#### 2.6.4. Adquisición de datos y control

La etapa de adquisición de datos y control está formada por una tarjeta de control DS1104 más su panel de conexiones modelo CPL1104, un circuito interfaz y una computadora de escritorio (ver Apéndice C).

- ✓ Tarjeta de control, la tarjeta utilizada corresponde al modelo DS1104 de la marca dSPACE® y es la encargada de la adquisición de los datos provenientes de los encoders del robot móvil y de controlar sus actuadores, dicha tarjeta cumple con los requerimiento para realizar experimentos en tiempo real con el prototipo del robot móvil, esto debido a que los programas que se realizan en Matlab luego de ser compilados pasan a ser descargados en la tarjeta de control y así realizar la interacción con el hardware conectado a sus puertos de entrada/salida.
- ✓ Circuito interfaz, este circuito permite el envío y recepción de información entre la tarjeta de control y el robot móvil.
- ✓ Computadora, es la encargada de compilar y descargar los programas desarrollados en Matlab®-Simulink®.

# Capítulo 3

## Estudio de la ley de control y generación de trayectorias

En este capítulo se presenta el estudio de la ley de control basada en el modelo dinámico del robot móvil de ruedas de tipo diferencial, así como lo relativo a la generación de trayectorias. Primero se desarrolla el controlador del robot móvil basado en el modelo dinámico. Posteriormente, se realiza un análisis sobre la generación de trayectorias en el plano cartesiano tanto de curvas paramétricas en el tiempo como de curvas definidas por puntos, para lo cual se presentan algunos métodos de interpolación. Finalmente, en base a lo anterior, se presenta un algoritmo generador de trayectorias basado en splines cúbicos.

### 3.1. Control del robot móvil de ruedas basado en el modelo dinámico

La configuración del robot móvil de tipo diferencial, mostrada en la Figura 2.2 puede ser descrita por la generalización de cinco coordenadas  $\mathbf{q} = [x, y, \phi, \alpha_1, \alpha_2]^T$ , donde  $(x, y)$  son las coordenadas de  $P_0$ ,  $\phi$  es el ángulo de inclinación del robot móvil y  $\alpha_1, \alpha_2$  son los ángulos de las ruedas derecha e izquierda. El modelo dinámico del robot móvil, de acuerdo al capítulo anterior, está dado por:

$$\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}(t), \quad (3.1)$$

$$\overline{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \overline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\nu}(t) = \overline{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (3.2)$$

donde:

$$S(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \operatorname{sen} \phi & \frac{r}{2} \operatorname{sen} \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\overline{M}(q) = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 + I) + I_w & \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 - I) \\ \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 - I) & \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 + I) + I_w \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\overline{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{r^2}{2b}m_c d \dot{\phi} \\ -\frac{r^2}{2b}m_c d \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\overline{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

y  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_d, \tau_i]^T$  son los torques  $\tau_d$  y  $\tau_i$  aplicados a las ruedas derecha e izquierda, respectivamente. Asimismo,  $\boldsymbol{\nu} = [\nu_d, \nu_i]^T$  representa las velocidades angulares derecha e izquierda de cada rueda. Además, se ha hecho  $m = m_c + 2m_w$  e  $I = m_c d^2 + 2m_w b^2 + I_c + 2I_m$ . Si se define  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ,  $w = \dot{\phi}$  se puede obtener de (3.1):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{r}{2b} & \frac{r}{2b} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Considerando las ecuaciones (3.1)-(3.7) se propone la siguiente ley de control.

$$\boldsymbol{\tau} = -A^T \mathbf{g} - \beta_4 \boldsymbol{\nu}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 (x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2 (y - y^*) \sin(\phi) - \beta_3 f \\ \beta_3 (\phi - \phi^*) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$f = (\phi - \phi^*) \frac{(x - x^*) \sin(\phi) - (y - y^*) \cos(\phi)}{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2},$$

donde  $x^*$  y  $y^*$  son los valores deseados,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$  son constantes positivas arbitrarias y representan la ganancia del controlador, también:

$$\phi^* = \arctan \left( \frac{y - y^*}{x - x^*} \right). \quad (3.10)$$

Se supone que  $(x(0) - x^*)^2 + (y(0) - y^*)^2 > \epsilon_0$ , para algún  $\epsilon_0 > 0$ . Donde  $(x - x^*, y - y^*, \phi - \phi^*, \nu^T) = (0, 0, 0, 0)$ .

**Demostración:** Hacemos incapie en que  $A$  es una matriz no singular. Reemplazando (3.8) en (3.2) se obtiene:

$$\overline{M}(q)\dot{\boldsymbol{\nu}} + \overline{C}(q, \dot{q})\boldsymbol{\nu} = -A^T \mathbf{g} - \beta_4 \boldsymbol{\nu}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, de (3.10) obtenemos:

$$\dot{\phi}^* = \frac{(x - x^*) \sin(\phi) - (y - y^*) \cos(\phi)}{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} v, \quad (3.12)$$

así la dinámica de lazo cerrado está dado por (3.7), (3.11) y

$$\dot{\phi} - \dot{\phi}^* = w - \frac{(x - x^*) \sin(\phi) - (y - y^*) \cos(\phi)}{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} v. \quad (3.13)$$

La dinámica de lazo cerrado representado por las ecuaciones (3.7), (3.11), (3.13) es autónoma y pueden ser escritas como  $\dot{\xi} = f(\xi)$  donde  $\xi = (x - x^*, y - y^*, \phi - \phi^*, \nu^T) \in \mathbb{R}^5$ . Los puntos de equilibrio de esta dinámica de lazo cerrado pueden ser encontrados de la siguiente manera. Recordando que  $x^*$  y  $y^*$  son constantes, se tiene que  $\dot{x} - \dot{x}^* = \dot{x}$  y  $\dot{y} - \dot{y}^* = \dot{y}$ . Por lo tanto, de la ecuación (3.7) se tiene  $v = 0$  por que las funciones  $\sin(\phi)$  y  $\cos(\phi)$  no pueden ser cero simultáneamente. Tomando en cuenta lo anterior y si  $\phi - \phi^* = 0$  en la ecuación (3.13) se encuentra que  $w = 0$ . Así de la ecuación (3.7) se concluye que todo lo anterior implica que  $\nu = 0$ . Finalmente, de la ecuación (3.11) se encuentra que  $g_1 = 0$  y  $g_2 = 0$ . De la última condición si tenemos que  $\phi - \phi^* = 0$ , esto implica que:

$$\tan(\phi) = \tan(\phi^*) = \frac{(x - x^*)}{(y - y^*)}, \quad (3.14)$$

y de la primera condición se obtiene:

$$\tan(\phi) = -\frac{\beta_1 (x - x^*)}{\beta_2 (y - y^*)} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}. \quad (3.15)$$

Igualando las ecuaciones (3.14) y (3.15) se tiene:

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} (x - x^*)^2 = (y - y^*)^2. \quad (3.16)$$

Debido a que  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son positivos, entonces  $\frac{\beta_1}{\beta_2} > 0$ , por lo tanto la única solución para (3.16) es  $x = x^*$  y  $y = y^*$ . Por lo tanto, el origen  $(x - x^*, y - y^*, \phi - \phi^*, \nu^T) = (0, 0, 0, 0)$  es el único punto de equilibrio de la dinámica de lazo cerrado dado por las ecuaciones (3.7), (3.11), (3.13).

Si se consideran la siguiente función escalar definida positiva y radialmente desacotada como una función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\beta_1(x - x^*)^2 + \frac{1}{2}\beta_2(y - y^*)^2 + \frac{1}{2}\beta_3(\phi - \phi^*)^2 + \frac{1}{2}\nu^T \overline{M}(\mathbf{q})\nu. \quad (3.17)$$

Si obtenemos la derivada temporal de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (3.7), (3.11) esta dado por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \beta_1(x - x^*)\dot{x} + \beta_2(y - y^*)\dot{y} + \beta_3(\phi - \phi^*)(\dot{\phi} - \dot{\phi}^*) + \nu^T \overline{M}(\mathbf{q})\dot{\nu}, \\ \dot{V} &= [\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) - \beta_3 f] v + \beta_3(\phi - \phi^*) w \\ &\quad + \nu^T [-\overline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\nu - A^T \mathbf{g} - \beta_4 \nu], \\ \dot{V} &= \mathbf{g}^T [v, w]^T + \nu^T [-\overline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\nu - A^T \mathbf{g} - \beta_4 \nu]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De la ecuación (3.5) se puede ver que la matriz  $\overline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , es anti-simétrica, por lo tanto  $\nu^T \overline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\nu = 0$ ,  $\forall \nu \in \mathbb{R}^2$ , y  $\nu^T A^T \mathbf{g} = \mathbf{g}^T A \nu = \mathbf{g}^T [v, w]^T$ , en virtud de (3.7), de ahí se obtiene

$$\dot{V} = -\beta_4 \nu^T \nu. \quad (3.19)$$

siempre y cuando ambos  $x - x^* \neq 0$  y  $y - y^* \neq 0$ . Así, si  $\beta_4 > 0$  en la ecuación (3.19) implica estabilidad y que  $\nu$  se aproxime a cero siempre y cuando  $(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 > \epsilon_0$  para  $\epsilon_0 > 0$ . Así, aplicando el principio de invarianza de LaSalle, obtenemos la siguiente cadena de implicaciones  $\nu \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{g} \rightarrow 0$ ,  $\phi \rightarrow \phi^*$  y  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow \beta_3 f$ .

Si se consideran los siguientes casos:

- i)* Se supone que  $x - x^*$  y  $y - y^*$  permanecen lejos de cero, entonces  $f \rightarrow 0$  por que  $\phi \rightarrow \phi^*$ , lo cual significa que  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow 0$  por que  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow \beta_3 f$ .
- ii)* Se supone que ambos  $x - x^*$  y  $y - y^*$  se aproximan a cero, entonces  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow 0$  y  $f \rightarrow 0$  por que  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow \beta_3 f$ .
- iii)* Se supone que solo uno de  $x - x^*$  o  $y - y^*$  tiende a cero, entonces  $f \rightarrow 0$  por que el denominador de  $f$  esta lejos de cero y  $\phi - \phi^* \rightarrow 0$ . Por otra parte, se tiene que  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow 0$  y  $f \rightarrow 0$  por que  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow \beta_3 f$ .

Se concluye que  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow 0$  y  $\tau \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la variable  $\tau$  esta bien definida, a pesar de que  $(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2$  se aproxime a cero. Estos hechos permiten eliminar la condición de  $x - x^* \neq 0$ ,  $y - y^* \neq 0$  y  $(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 > \epsilon_0$  introducido en el párrafo después de la ecuación (3.19). Aún más si  $\beta_1(x - x^*) \cos(\phi) + \beta_2(y - y^*) \sin(\phi) \rightarrow 0$  y  $\phi - \phi^* \rightarrow 0$  implica que  $\tan(\phi) = \tan(\phi^*) = -\frac{\beta_1(x - x^*)}{\beta_2(y - y^*)} = \frac{y - y^*}{x - x^*}$  el cual crece con el tiempo, esto significa que ambos tanto  $x - x^* \rightarrow 0$  y  $y - y^* \rightarrow 0$ . Por lo tanto, solo el caso *ii)* es verdad y se concluye que  $(x - x^*, y - y^*, \phi - \phi^*, \nu^T) = (0, 0, 0, 0)$  es asintóticamente estable siempre y cuando la condición inicial sea seleccionada tal que  $(x(0) - x^*)^2 + (y(0) - y^*)^2 > \epsilon_0$ , para un  $\epsilon_0 > 0$ .

## 3.2. Generación de trayectorias

Generalmente cuando se realiza el control de seguimiento de trayectorias de robots móviles esta generalmente es conocida y específica, determinada por una ecuación matemática, sin embargo tambien es deseable que el móvil siga cualquier otra trayectoria como una definida por puntos en el plano. Se puede ver que existen dos formas básicas para especificar la trayectoria [20]:

- ✓ Suministrando puntos consecutivos e ignorando la trayectoria espacial que describe el robot entre cada dos puntos.
- ✓ Especificando la trayectoria por una curva paramétrica en el tiempo, tal como una recta o una parábola, que debe describir el robot en el espacio de trabajo.

La primera alternativa, denominada tradicionalmente control punto a punto, sólo tiene interés práctico cuando los puntos están suficientemente separados, ya que en caso

contrario, sería muy laborioso especificar todos los puntos intermedios. Su contraparte es que los puntos tampoco puedan estar muy separados ya que existe un alto riesgo de que se generen movimientos imprevisibles o no controlados. En este control punto a punto y en particular para resolver este problema, se propone un algoritmo que realiza la interpolación, utilizando splines cúbicos, entre los puntos específicos de esa forma es posible realizar el control del robot móvil para que pase por dichos puntos. La segunda forma para realizar el seguimiento de trayectorias es utilizando curvas paramétricas en el tiempo como trayectoria deseada que se denomina tradicionalmente control de trayectoria continua, el control debe hacer que el robot móvil reproduzca lo más exacto posible la trayectoria especificada. Para la generación de trayectorias, en ambos casos, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- ✓ Las restricciones cinemáticas y dinámicas involucradas.
- ✓ Las trayectorias generadas deben ser suaves, lo que implica restricciones sobre las derivadas.
- ✓ Al menos la primera derivada debe ser continua, pudiendo exigirse también la continuidad en derivadas de orden superior.
- ✓ La generación de trayectorias deben ser computacionalmente eficientes.

En la presente sección, para la generación de trayectorias, se estudiará la interpolación de puntos en el plano cartesiano. Se verán dos tipos de interpolación: la interpolación polinomial, en particular el empleo de polinomios de tercer y quinto orden, y la interpolación segmentaria o splines<sup>1</sup>. Es importante mencionar, que si bien existen muchos otros tipos de interpolación como la de Lagrange, Taylor, Hermite, etc., pero no se mencionan en este trabajo, debido que se basan en aproximar a un polinomio de grado  $n$  el cual crece mientras más puntos se tengan y por tanto se tiene muchas oscilaciones que producen datos erróneos para el seguimiento de la trayectoria.

### 3.2.1. Empleo de polinomios cúbicos

Teniendo una trayectoria cualquiera definida y continua en un intervalo se puede encontrar una función que se aproxime lo más posible a esta trayectoria. Una de las funciones más conocidas para realizar esto son los polinomios algebraicos de la forma  $P_m(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_1 x + a_0$  donde  $n$  es un número entero no negativo y  $a_0 \dots a_n$  son constantes reales.

Empleando polinomios cúbicos se puede aproximar lo más posible a una trayectoria definida por puntos, pero si la trayectoria tiene muchos puntos de inflexión el polinomio cúbico ya no es representativo. Para demostrar lo anterior, se utilizó Matlab y con ayuda de las instrucciones *polyfit* y *polyval*, se evaluará el polinomio cúbico. Si se define los puntos en el plano cartesiano dados por la Tabla 3.1 obtenemos el siguiente polinomio

---

<sup>1</sup>En el sub campo matemático del análisis numérico, un spline es una curva definida en porciones mediante polinomios.

cúbico  $P(x) = 0.0099x^3 - 0.3109x^2 + 2.8292x + 0.0192$  que pasa por dichos puntos, como se muestra en la Figura 3.1(a).

No	Valores de $x$	Valores de $y$
1	0	0
2	3	6
3	6	8
4	10	7
5	14	6
6	18	8

Tabla 3.1: Puntos que se definen para la interpolación polinomial.

Ahora si se definen otros puntos dados por la Tabla 3.2 se obtiene un polinomio cúbico  $P(x) = 0.0209x^3 - 0.6051x^2 + 4.4395x + 0.1830$ , como se muestra en la Figura 3.1(b), donde se puede ver que al hacer la aproximación no llega a pasar por todos los puntos. De lo anterior se concluye que emplear polinomios cúbicos no aproximan con la misma exactitud a todas las trayectorias arbitrarias, solo a algunas de ellas.

No	Valores de $x$	Valores de $y$
1	0	0
2	2	7
3	6	10
4	10	4
5	14	2
6	18	6

Tabla 3.2: Puntos que se definen para la interpolación polinomial.

### 3.2.2. Empleo de polinomios de orden cinco

Después de haber visto que el polinomio cúbico no aproxima a algunas trayectorias, una solución elemental es aumentar el grado del polinomio, para lo cual retomando los puntos de la anterior subsección y aproximaremos un polinomio de quinto para los puntos de la Tabla 3.2, obteniendo el siguiente polinomio  $P(x) = -0.0002x^5 + 0.0064x^4 - 0.0593x^3 - 0.2636x^2 + 4.216x$ . En la Figura 3.2(a), se puede ver como este polinomio de quinto orden aproxima mejor que el cúbico pasando por todos los puntos.

Ahora aumentando el número de puntos y si el polinomio de quinto orden no aproxima correctamente se puede seguir subiendo el grado del polinomio hasta encontrar uno que sí pase por todos los puntos. En la Figura 3.2(b), se muestra una comparación de tres polinomios donde  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  y  $P_3(x)$  son polinomios de quinto, séptimo y noveno

orden, y se puede ver que mientras más se aumenta el grado del polinomio más exacto resulta la aproximación pero también tiende mucho a oscilar [20].

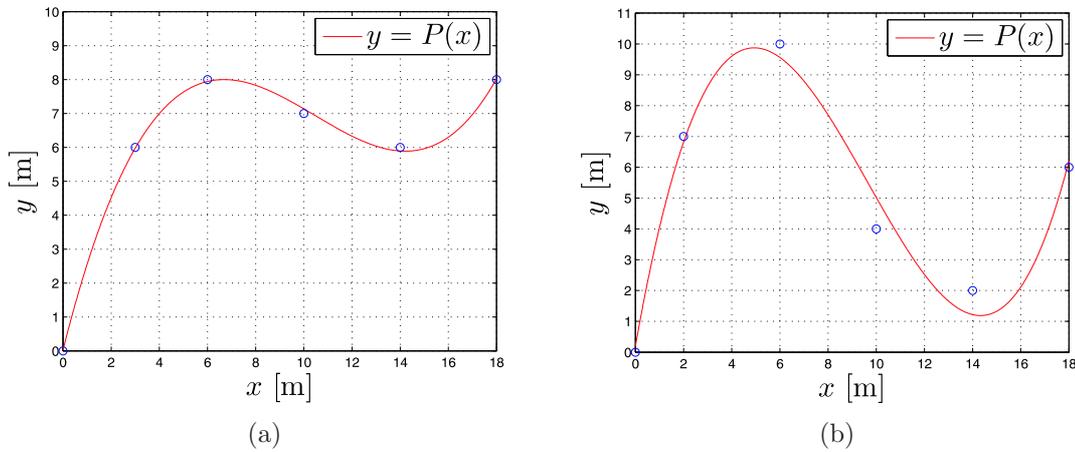


Figura 3.1: Aproximación utilizando polinomios cúbicos.

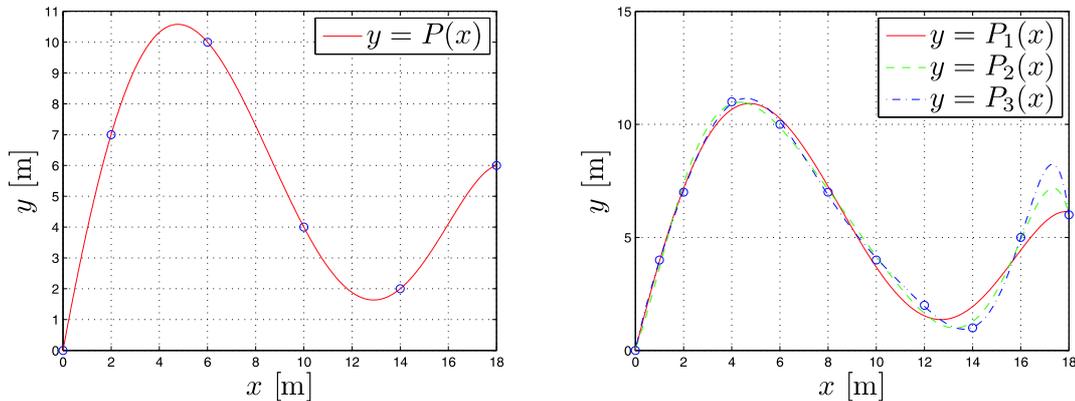


Figura 3.2: Aproximación utilizando polinomios de distinto orden.

### 3.2.3. Empleo de funciones spline

La interpolación polinómica se basa en la sustitución de una función o una tabla de valores por un polinomio que toma dichos valores. Cuando el número de puntos aumenta, también aumenta el grado del polinomio, que se hace más oscilante, lo cual se traduce en un aumento de errores en la trayectoria generada. Un enfoque alternativo a la utilización de polinomios de grado alto es el uso de polinomios de grado menor en subintervalos. Esta es la base de la interpolación con splines [42], [43], [44]. El procedimiento consiste en dividir el intervalo en una serie de sub intervalos, y en cada subintervalo definir un polinomio cúbico. A este método se le conoce como aproximación polinómica fragmentaria, o splines. Esta aproximación consiste en unir una serie de puntos dados mediante una serie de polinomios cúbicos, tal como se muestra en la Figura 3.3.

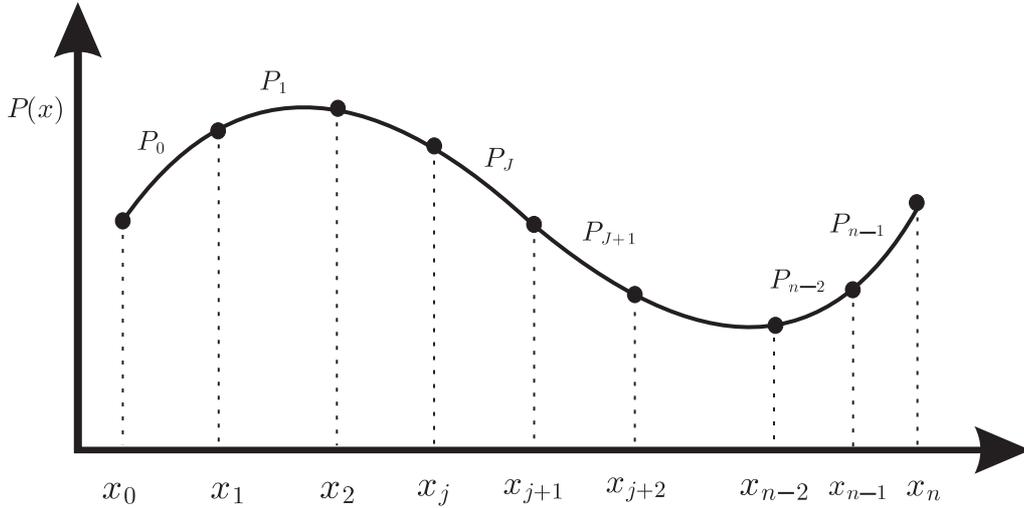


Figura 3.3: Aproximación polinómica fragmentaria.

Definición: Dada una función  $f$  definida en  $[a, b]$  y los puntos  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  tales que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . La abscisa no es necesario equidistante pero se supone ordenado. Una función  $S(x)$  es una interpolante cúbica por tramos en  $[x_0, x_n]$ , que satisface las siguientes condiciones:

1.  $P(x)$  es un polinomio cúbico, denotado  $P_j(x)$ , en el subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
2.  $P_{j+1}(x_{j+1}) = P_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;
3.  $\dot{P}_{j+1}(x_{j+1}) = \dot{P}_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;
4.  $\ddot{P}_{j+1}(x_{j+1}) = \ddot{P}_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;

Para construir el interpolante trazador cúbico de una función aplicamos las condiciones de la definición a los polinomios cúbicos expresados por la siguiente ecuación:

$$P_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Ahora calculamos los valores de los coeficientes  $a_j, b_j, c_j, d_j$ . Para lo cual hacemos que:

$$\begin{aligned} P_j(x_j) &= a_j = f(x_j), \\ P_{j+1}(x_{j+1}) &= a_{j+1}, \\ P_j(x_{j+1}) &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3, \end{aligned}$$

aplicando la condición 2 se tiene:

$$a_{j+1} = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3, \quad (3.20)$$

debido a que el termino  $x_{j+1} - x_j$  es usado continuamente, es conveniente introducir la siguiente notación más simple

$$h_j = x_{j+1} - x_j. \quad (3.21)$$

De esta forma sutituyendo (3.21) en (3.20) se obtiene

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3. \quad (3.22)$$

De manera similar como se hizo para  $a_j$ , se define  $\dot{P}_j(x_j) = b_j$ , entonces

$$\dot{P}_j(x_j + 1) = b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) + 3d_j(x_{j+1} - x_j)^2, \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Aplicando la condición 3 se obtiene

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2. \quad (3.25)$$

De manera similar como en los anteriores procedimientos ahora se define  $\ddot{P}_j(x_j) = 2c_j$  y aplicando la condición 4 para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  se tiene

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j. \quad (3.26)$$

Despejando  $d_j$  de (3.26) y sustituyendo el valor en las ecuaciones (3.22) y (3.25), se tiene las nuevas ecuaciones

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1}), \quad (3.27)$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j (c_j + c_{j+1}). \quad (3.28)$$

Despejando  $b_j$  de (3.27) se tiene

$$b_j = \frac{1}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1}), \quad (3.29)$$

y reduciendo el índice para  $b_{j-1}$

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3} (2c_{j-1} + c_j). \quad (3.30)$$

Sustituyendo (3.30) en (3.28) con el índice reducido se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1}), \quad (3.31)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Este sistema tiene solo  $c_j$  como incógnitas y si se conoce estos valores se puede encontrar las constantes restantes mediante las ecuaciones (3.27) para  $b_j$  y (3.26) para  $d_j$ , y así construir el polinomio cúbico  $P_j(x)$ . Para resolver el sistema (3.31) se plantea un sistema de ecuaciones lineales de la forma  $Ax = b$  y aplicando la

condición de frontera  $\ddot{P}(x_0) = 0$  y  $\ddot{P}(x_n) = 0$  se tiene que  $c_0 = 0$  y  $c_n = 0$  y junto con el sistema (3.31) se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

donde  $A$  es una matriz diagonal  $(n-1) \times (n-1)$  y aplicando un método numérico se puede encontrar los valores de  $c_0, c_1, \dots, c_n$ .

### 3.2.4. Definición paramétrica de algunas curvas de interés

Se puede usar las coordenadas  $x$  y  $y$  para describir la ubicación del robot móvil en cualquier punto de su recorrido. Sin embargo, las coordenadas no incidían en el recorrido cuando el móvil se encuentra en diferente ubicación, por tal motivo en ocasiones, dos variables no son suficientes para describir completamente una situación de gráfica. Una alternativa de solución es usar ecuaciones paramétricas para describir las coordenadas  $x$  y  $y$  de un punto como funciones de una tercera variable, tiempo, que se denomina parámetro. Por tanto una curva paramétrica es la que esta definida por ecuaciones paramétricas.

A continuación se definen algunas de las curvas paramétricas en el tiempo más comunes.

$$y(t) = mx(t), \quad (3.32)$$

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right), \quad (3.33)$$

$$y(t) = x^2(t), \quad (3.34)$$

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right), \quad (3.35)$$

$$y(t) = r \cos\left(\frac{2\pi}{P}t + C\right) + k, \quad (3.36)$$

$$x(t) = r \sin\left(\frac{2\pi}{P}t + C\right) + h, \quad (3.37)$$

$$y(t) = r \cos\left(\frac{\pi}{P}t\right), \quad (3.38)$$

$$x(t) = r \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right). \quad (3.39)$$

Las ecuaciones (3.32) y (3.33) representan a la recta donde  $m$  es la pendiente,  $A$  es la amplitud y  $P$  es el tiempo en el que la curva completa su recorrido. Un extremo de la recta es el punto  $(A, mA)$  y el otro es  $(-A, -mA)$ . Las ecuaciones (3.34) y (3.35), representan a la parábola con un extremo en el punto  $(A, A^2)$  y otro en el punto  $(-A, A^2)$  y  $P$  es el mismo que el usado en la ecuación (3.33). Las ecuaciones (3.36) y (3.37), representan a la circunferencia con centro en la coordenada  $(h, k)$  y radio  $r$ . La constante  $C$  permite definir la posición de partida de la circunferencia y  $P$  es el mismo que el usado en la ecuación (3.33). Las ecuaciones (3.38) y (3.39), representan una curva en forma de ocho que pasa por el origen y tiene un radio  $r$  y  $P$  es el mismo que el usado en la ecuación (3.33). En la Figura 3.4 se muestran todas las curvas mencionadas anteriormente.

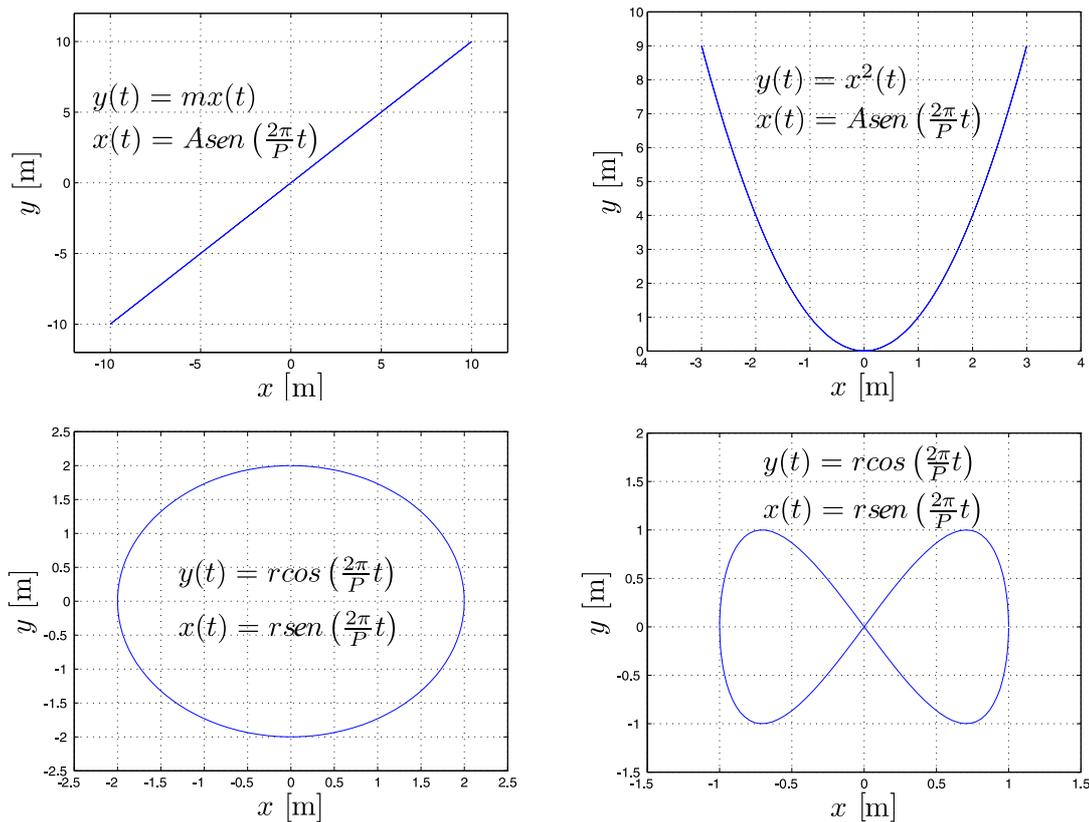


Figura 3.4: Curvas parametrizadas en el tiempo.

### 3.3. Generación de caminos en el plano cartesiano utilizando funciones spline

Después de haber revisado la teoría sobre la interpolación de puntos utilizando splines cúbicos, en esta sección se plantea un algoritmo que pueda generar un camino en el plano cartesiano el cual este formado por una o más ecuaciones cúbicas. El algoritmo será capaz de entregar puntos  $(x, y)$  a lo largo de toda la trayectoria de tal forma que el controlador descrito en la ecuación (3.8) pueda realizar el control a ese punto y completar de esta forma la trayectoria formada por puntos.

Se requiere que en base a puntos en el plano cartesiano el algoritmo pueda interpolar cada uno de estos puntos con trayectorias suaves es decir un polinomio cúbico. La salida del algoritmo deberá ser un par ordenado  $(x, y)$  en cada instante del tiempo y a lo largo de toda la trayectoria no solo de un tramo.

**Algoritmo:** Para construir el interpolante cúbico  $P(x)$  se define el número de puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  que satisface  $\ddot{P}(x_0) = \ddot{P}(x_n) = 0$ . A continuación se detallan los pasos que se deben seguir para que se generen los puntos  $x$  y  $y$  de una trayectoria determinada.

1. Se leen los valores de los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , en un vector, siendo  $n$  el número de puntos
2. Se asigna  $a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n)$
3. Para  $i = 0$  hasta  $n - 1$ , se asigna  $h_i = x_{i+1} - x_i$
4. Para  $i = 1$  hasta  $n - 1$ , se asigna  $\alpha_i = \frac{3}{h_i} (a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}} (a_i - a_{i-1})$
5. Se asigna  $l_0 = 1, \mu_0 = 0, z_0 = 0$ .
6. Para  $i = 1$  hasta  $n - 1$ , se asigna

$$\begin{aligned} l_i &= 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}, \\ \mu_i &= \frac{h_i}{l_i}, \\ z_i &= \frac{(\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1})}{l_i}. \end{aligned}$$

7. Se asigna  $l_n = 1, z_n = 0, c_n = 0$
8. Para  $j = n - 1$  hasta 0, se asigna

$$\begin{aligned} c_j &= z_j - \mu_j c_{j+1}, \\ b_j &= \frac{(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{h_j(c_{j+1} + 2c_j)}{3}, \\ d_j &= \frac{(c_{j+1} - c_j)}{3h_j}. \end{aligned}$$

9. Si  $x \leq x_0$  entonces  $j = 1$ ; caso contrario si  $x \geq x_0$  y  $x \leq x_1$  entonces  $j = 2$ ; caso contrario si  $x \geq x_{n-1}$  y  $x \leq x_n$  entonces  $j = n - 1$ .
10. Si  $x \leq x_n$

$$y = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

11. Escribe los valores de  $x$  y  $y$ .

En el paso 1 se asigna puntos por los cuales deberá de pasar la trayectoria deseada. En los pasos 2, 3 y 4 se realizan las asignaciones correspondientes a las variables que se utilizarán mas adelante. En los pasos 5, 6 y 7 las asignaciones realizadas son utilizados para resolver el sistema lineal triangular, utilizando un método numérico [42]. En el paso 8 se encuentran los coeficientes del polinomio cúbico, tomando en cuenta que  $a_j$  ya se asigno en el paso 1. En los puntos 9, 10 y 11 se encuentran los valores de  $x$  y  $y$ .

La codificación del algoritmo se realizó en Matlab<sup>®</sup>, inicialmente se codificó en un archivo con extension \*.m para efectos de prueba y simulación. Posteriormente este código se programó en un bloque “Embedded Matlab Function” de Simulink para ser probado con el prototipo en un experimento de seguimiento de trayectoria. El programa esta diseñado para aceptar como entrada un vector de puntos  $[x_1, x_2 \dots x_n; y_1, y_2 \dots y_n]$  y entrega a la salida un par ordenado  $(x, y)$  para cada instante de tiempo. Si se gráfica los pares ordenados que entrega el programa, se obtiene una curva suave que pasa por todos los puntos que recibió como entrada, a continuación se presenta el código desarrollado en Matlab.

```
function Trayectoria=Robot_spline(u)
t1=t/10;
X=[0 2 6 8 11 14; 0 5 7 5 3 5];
n=length(X(1,:));
for i=1:n;
a(i)=X(2,i);
end
for i=1:n-1;
h(i)=X(1,i+1)-X(1,i);
end
for i=2:n-1;
alfa(i)=3/h(i)*(a(i+1)-a(i))-3/h(i-1)*(a(i)-a(i-1)));
end
l(1)=1;
mu(1)=0;
z(1)=0;
for i=2:n-1;
l(i)=2*(X(1,i+1)-X(1,i-1))-h(i-1)*mu(i-1);
mu(i)=h(i)/l(i);
```

```

z(i)=(alfa(i)-h(i-1)*z(i-1))/l(i);
end
l(n)=1;
z(n)=0;
c(n)=0;
for i=n-1:-1:1;
c(i)=z(i)-mu(i)*c(i+1);
b(i)=(a(i+1)-a(i))/h(i)-(h(i)*(c(i+1)+2*c(i)))/3;
d(i)=(c(i+1)-c(i))/(3*h(i));
end
if (t1<=2)
i=1;
else
    if (t1>=2) && (t1<=6)
    i=2;
    else
        if (t1>=6)&&(t1<=8)
        i=3;
        else
            if (t1>=8)&&(t1<=11)
            i=4;
            else
                if (t1>=11)&&(t1<=14)
                i=5;
                end
            end
        end
    end
end
end
y=a(i)+b(i)*(t1-X(1,i))+c(i)*(t1-X(1,i)).^2+d(i)*(t1-X(1,i)).^3;
Trayectoria=[t1;y];

```

Cabe mencionar que el algoritmo tiene una limitación, por lo que sólo funciona para valores de  $x$  que cumpla lo siguiente  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , en la Figura 3.5(a) se muestra un ejemplo de una trayectoria generada a partir de los puntos de la Tabla 3.3 donde muestra dicha limitación. Ahora bien, si invertimos las variables en el algoritmo generador de trayectorias podemos conseguir una trayectoria que supere la limitación mencionada anteriormente, pero también estará restringida para valores de  $y$  que cumpla lo siguiente  $y_0 < y_1 < \dots < y_n$ , en la Figura 3.5(b) se muestra un ejemplo de lo mencionado anteriormente.

No	Valor de $x$	Valor de $y$
1	0	0
2	2	5
3	6	7
4	8	5
5	11	3
6	14	5

Tabla 3.3: Puntos que se definen para probar el generador de trayectorias.

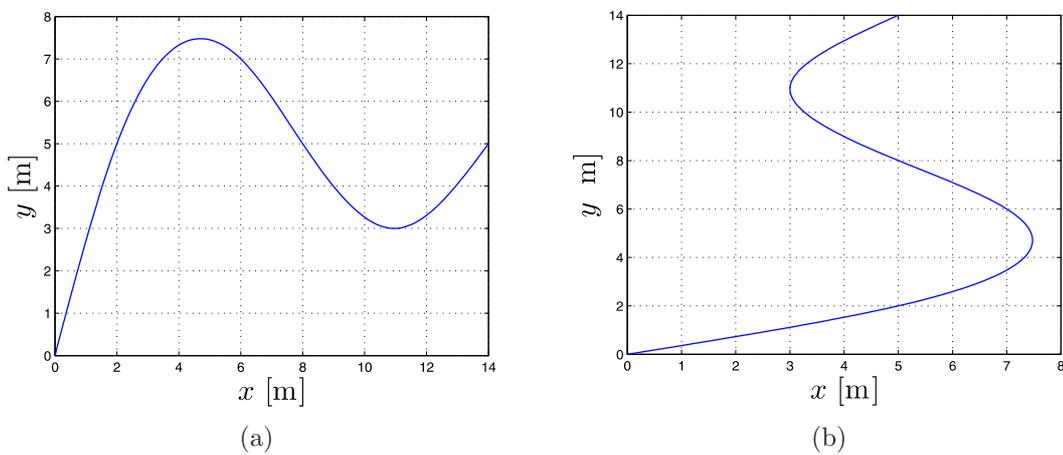


Figura 3.5: Ejemplos del desempeño del generador de trayectorias.



# Capítulo 4

## Simulación e instrumentación en tiempo real

En este capítulo se presentan las simulaciones numéricas y los experimentos en tiempo real de la ley de control y el generador de trayectorias aplicadas al robot móvil de ruedas. Primero se realiza el experimento de estacionamiento del robot móvil con la finalidad de mostrar que el móvil puede alcanzar un punto deseado tanto en posición como en dirección. Posteriormente se realiza el experimento de seguimiento de una trayectoria parametrizada (circunferencia). Finalmente, se realiza el experimento de seguimiento de trayectoria de una curva definida por puntos. Todos los experimentos mencionados anteriormente son tanto a nivel simulación numérica como en tiempo real, también se realizó el siguiente cambio de variables  $\nu_d = \omega_d$  y  $\nu_i = \omega_i$  para no confundir con las variables  $v_d$  y  $v_i$  en todos los experimentos.

### 4.1. Diagrama de bloques desarrollado en Simulink para simulación

En esta sección se realizan las simulaciones numéricas, con la finalidad de evaluar el desempeño del controlador. Las simulaciones se realizaron en el entorno Matlab®-Simulink®, el cual provee de un ambiente gráfico que permite la construcción y simulación de ecuaciones diferenciales. Para simular el control y el modelo dinámico del robot móvil de ruedas se utilizaron bloques y funciones embebidas. El diagrama de bloques desarrollado para realizar las simulaciones del sistema en lazo cerrado se muestra en la Figura 4.1, los bloques que lo conforman son los siguientes:

- ✓ Bloque A: Corresponde a la asignación de los parámetros asociados al sistema y al controlador, entre los cuales están la posición inicial del robot  $(x_0, y_0, \phi_0)$ , el radio de las ruedas  $r$  y la distancia entre estas  $L = 2b$  (ver Tabla 2.4), la masa del cuerpo  $m_c$ , la masa de cada rueda con motor  $m_w$  y los parámetros del controlador  $\beta_1 = 1000$ ,  $\beta_2 = 1000$ ,  $\beta_3 = 1000$  y  $\beta_4 = 1$ , los cuales corresponden a (3.8) y (3.9).

- ✓ Bloque B: Representa la síntesis de la ley de control aplicada al robot, determinada por la ecuación (3.8). Se puede observar que el bloque acepta como entradas las coordenadas deseadas  $(x^*, y^*)$  generadas en el bloque C y como salida entregan los valores de torque  $\tau_d$  y  $\tau_i$  para la rueda derecha e izquierda respectivamente. El valor deseado de  $\phi^*$  se calcula utilizando la ecuación (3.10), donde hace uso de una función arctan la cual presenta algunas indeterminaciones, cuando el denominador se hace cero, ya que hace uso de valores de  $(x, y)$  y  $(x^*, y^*)$ . Para solucionar lo mencionado anteriormente se programó otro bloque de Simulink para la función arctan como se explica en el Apéndice D.
- ✓ Bloque C: Es el encargado de generar las trayectorias deseadas  $(x^*, y^*)$ , pudiendo estas ser definidas por curvas paramétricas en el tiempo (recta, parábola, circunferencia, etc) Véase las ecuaciones (3.32)-(3.38) o curvas arbitrarias, definidas a partir de puntos en el plano cartesiano (Véase la Sección 3.3).
- ✓ Bloque D: Representa la síntesis del modelo dinámico del robot móvil de ruedas tipo diferencial, determinada por la ecuación (3.2). El bloque tiene como entradas los torques derecho e izquierdo  $\tau_r$  y  $\tau_l$  respectivamente y como salida entrega valores de  $(x, y, \phi, \omega_d, \omega_i)$ .
- ✓ Bloque E: Permite llevar los valores de cada variable al “Workspace” de Matlab permitiendo la visualización gráfica de las variables de interés del sistema controlado.

## 4.2. Simulación del sistema en lazo cerrado

A continuación se presentan las simulaciones realizadas del sistema en lazo cerrado. Primero se muestra el estacionamiento del robot móvil, luego se presenta el seguimiento de una trayectoria paramétrica en el tiempo y finalmente el seguimiento de una trayectoria definida por puntos.

### 4.2.1. Estacionamiento del robot móvil

Se presenta la simulación del estacionamiento del robot móvil. La idea es que el robot puede alcanzar un punto deseado tanto en posición como en orientación partiendo de cualquier condición inicial. Las simulaciones se realizaron en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano, dando al robot móvil una posición inicial distinta del origen y una orientación inicial que fuese múltiplo de  $\pi/2$ , según se muestra a continuación.

- ✓ En las Figuras 4.2 (a) y (b) se muestra como el móvil parte de la posición inicial  $(x_0, y_0, \phi_0) = (1.5, 0, -3\pi/2)$  y retorna al origen  $(x, y) = (0, 0)$  con una orientación aproximada de  $\phi = -2\pi$ .

- ✓ Se realiza el experimento en el eje  $x$  negativo como se muestra en las Figuras 4.2 (c) y (d) donde el móvil tiene una posición inicial  $(x_0, y_0, \phi_0) = (-1.5, 0, -\pi/2)$  y retorna al origen  $(x, y) = (0, 0)$  con una orientación aproximada de  $\phi = -\pi$ .
- ✓ En las Figuras 4.3 (a) y (b) se puede observar que el móvil parte de una posición inicial  $(x_0, y_0, \phi_0) = (0, 1.5, -3\pi/2)$  y retorna al origen  $(x, y) = (0, 0)$  con una orientación aproximada de  $\phi = -2\pi$ .
- ✓ Se repite el experimento en el eje  $y$  negativo como se muestra en las Figuras 4.3 (c) y (d) para una posición inicial de  $(x_0, y_0, \phi_0) = (0, -1.5, -5\pi/2)$  y retorna al origen con una orientación aproximada de  $\phi = -3\pi$ .

### 4.2.2. Trayectoria paramétrica en el tiempo

En este apartado se presenta la simulación para el seguimiento de una trayectoria paramétrica en el tiempo definida por la ecuación (3.36), siendo está una circunferencia de radio  $r = 0.8$  y centro en el punto  $h = 0.8, k = 0$ . Para hacer que el punto de partida de la circunferencia sea en  $(0, 0)$  se elige una constante de  $C = -\pi/2$ . El robot móvil parte de una posición inicial de  $(x_0, y_0) = (-0.05, -0.05)$  y después de unos 2 segundos empieza a seguir a la trayectoria y orientación deseados. Los valores de  $\omega_d, \omega_i, v_d, v_i, \tau_d, \tau_i$  y  $v$  permanecen constantes después de un tiempo de establecimiento de 4 segundos. De los resultados obtenidos en simulación se observa que los valores de  $(x, y, \phi)$  siguen a los valores deseados  $(x^*, y^*, \phi^*)$ , en consecuencia el seguimiento de la trayectoria se realiza satisfactoriamente. También, se observa que los voltajes aplicados a los motores  $v_d$  y  $v_i$  nunca sobrepasan el intervalo de voltaje (+24 V, -24 V), cumpliendo de esta manera con las especificaciones técnicas de los motores. Además, se observa que los pares aplicados a los motores derecho e izquierdo  $\tau_d = -4.9$  N-m y  $\tau_i = -2.9$  N-m respectivamente, tiene valores mayores a los voltajes esto debido a la caja de reducción que tienen los motores, permitiendo tener mayor torque con poco voltaje. Finalmente, de los resultados obtenidos se tiene un máximo de velocidad lineal de  $v = -0.08$  m/s. De esta manera los resultados obtenidos a nivel simulación del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figura 4.4.

### 4.2.3. Trayectoria definida por puntos

Ahora se definen puntos en el plano cartesiano y con la ayuda del generador de trayectorias, implementado en un capítulo anterior, se generan curvas suaves entre cada punto, así el robot móvil seguirá la trayectoria generada. Los puntos que se proponen para este experimento son los que se muestran en la Tabla 4.1, estos puntos pueden ser cambiados por el usuario en el algoritmo. De los resultados obtenidos en simulación se observa que los valores de  $(x, y, \phi)$  siguen a los valores deseados  $(x^*, y^*, \phi^*)$ , en consecuencia el seguimiento de la trayectoria definida por puntos se realiza satisfactoriamente. También, se observa que el voltaje derecho  $v_d$  presenta dos picos de voltaje de -7 V y

4 V y el voltaje izquierdo  $v_i$  presenta otros picos de -6 V y 2 V pero nunca sobrepasan el intervalo de voltaje (+24 V,-24 V), cumpliendo de esta manera con las especificaciones técnicas de los motores. Además, se observa que los pares aplicados a los motores derecho e izquierdo  $\tau_d$  y  $\tau_i$  respectivamente, tiene valores mayores a los voltajes como se explicó en la anterior subsección. Finalmente, de los resultados obtenidos se tiene un pico máximo de velocidad lineal de  $v = -0.28$  m/s. De esta manera los resultados obtenidos a nivel simulación del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figura 4.5.

No.	Valor de $x$	Valor de $y$
1	0	0
2	0.2	2
3	0.4	2.8
4	0.8	2
5	1.2	0.3
6	1.6	2

Tabla 4.1: Puntos que definen la trayectoria a seguir.

### 4.3. Diagrama de bloques desarrollado en Simulink para experimentos en tiempo real

Después de haber realizado las simulaciones utilizando el modelo dinámico del robot móvil, ahora se pone en práctica la ley de control y el generador de trayectorias. Se sustituye el modelo dinámico por los motores reales para actuar sobre ellos y de esta forma realice la tarea de seguimiento de trayectoria. Debido a que el móvil no cuenta con sensores de localización se utilizó el modelo cinemático para obtener una aproximación de la localización del móvil. Es importante mencionar que en todos los experimentos presentados en esta sección, el robot móvil realiza su tarea en dirección de reversa y no de frente, esto se debe a las características del controlador presentado en la ecuación (3.8) y más específicamente por la ecuación (3.10), donde se puede ver que si el móvil parte del origen y el valor de  $x^*$  y  $y^*$  son 1, entonces se tendrá que en la función arctan se presente un número negativo en el numerador y denominador, esto hace referencia que el ángulo deseado está en el tercer cuadrante. A continuación se describen los bloques que la componen:

- ✓ Bloque A: Corresponde a la asignación de los parámetros como la posición inicial del robot  $(x_0, y_0, \phi_0)$ , el radio de las ruedas  $r$ , la distancia entre las ruedas  $L = 2b$  (ver Tabla 2.4) y parámetros del controlador  $\beta_1 = 1000$ ,  $\beta_2 = 1000$ ,  $\beta_3 = 1000$  y  $\beta_4 = 1$ . Como se puede observar el controlador no hace uso de los valores de las masas del robot móvil.
- ✓ Bloque B: Este bloque es el mismo que se utilizó en la simulación, sección 4.1.

- ✓ Bloque C: Este bloque es el mismo que se utilizó en la simulación, sección 4.1.
- ✓ Bloque D: Está compuesta de dos bloques que permiten realizar la conversión de torque a voltaje. De acuerdo a [10], el par de carga del motor está dado por:

$$\tau = nk_m i,$$

donde  $n = 30$  es la relación entre el número de dientes de los engranes del eje del motor y del eje de la carga,  $k_m = 0.051$  N-m es la constante de par del motor e  $i$  es la corriente de armadura del motor. Utilizando la ley de Ohm que está dado por:

$$v = Ri,$$

donde  $R = 0.68 \Omega$  es la resistencia de armadura del motor, así se puede deducir que:

$$v = \frac{R}{nk_m} \tau.$$

Obteniendo de esta forma una relación entre el torque y voltaje del motor de CD.

- ✓ Bloque E: A su vez este bloque está conformado por dos bloques que son los motores del robot móvil, estos reemplazan al modelo dinámico el cual se utilizó en la simulación, que aceptan voltaje como entrada y entregan velocidad angular como salida. Debido a que el motor tiene un rango de zona muerta<sup>1</sup> es necesario introducir un voltaje de compensación a cada uno de los motores,  $v_{comp.d}$  y  $v_{comp.i}$  son los voltajes de compensación de los motores derecho e izquierdo respectivamente.
- ✓ Bloque F: Está compuesto por el modelo cinemático y un pequeño bloque que permite calcular la velocidad lineal del robot móvil. El modelo cinemático permite realizar la aproximación de la localización del móvil es decir calcular los valores de  $x$ ,  $y$  y  $\phi$ .

## 4.4. Experimentos en tiempo real y análisis de los resultados

A continuación se presentan los experimentos realizados en tiempo real y en lazo cerrado. Primero se muestra el estacionamiento del robot móvil, luego se presenta el seguimiento de una trayectoria paramétrica en el tiempo y finalmente el seguimiento de una trayectoria definida por puntos. Los parámetros que se utilizan en estos experimentos son los mismos que se usaron en simulación.

---

<sup>1</sup>La zona muerta de un motor es el rango en el que, a pesar de ser alimentado con un voltaje, el motor no se mueve a causa de las fricciones involucradas en su accionamiento.

### 4.4.1. Estacionamiento del robot móvil

Después de realizar las simulaciones numéricas, en esta subsección se presentan los experimentos en tiempo real del estacionamiento del robot móvil. En las Figuras 4.7 (a), (b), (c) y (d) se presentan los experimentos en el eje  $x$ , donde se puede ver que son similares a las presentadas en simulación, en ambos casos el móvil retorna al origen de reversa. En las Figuras 4.8 (a), (b), (c) y (d) se presentan los experimentos en el eje  $y$  y de igual forma que en los anteriores experimentos son similares a los obtenidos en simulación y logrando que el móvil retorne al origen. De esta manera se demuestra que el controlador tiene un buen desempeño.

### 4.4.2. Trayectoria paramétrica en el tiempo

En esta subsección se presenta el experimento en tiempo real del seguimiento de una trayectoria definida por una circunferencia, donde los parámetros son los mismos que los utilizados en simulación de la subsección 4.2.2. De los resultados obtenidos a nivel de simulación y experimentales se observa que son similares. En las Figuras 4.9 (a) y (b) se pueden observar como el robot móvil sigue a la trayectoria y orientación deseados al igual que en la simulación presentada en una sección anterior. Las velocidades angulares, voltajes y torques de los motores derecho e izquierdo mostrados en las Figuras 4.9 (c), (d) y (e) presentan una oscilación alrededor de un valor constante durante todo el experimento y nótese también que el valor de estas variables del motor derecho es mayor que el izquierdo, es así que se puede deducir que el robot móvil realiza una circunferencia. Es importante mencionar que el signo negativo en los valores de estas variables denotan la dirección del móvil. Finalmente, en la Figura 4.9(f) se presenta la velocidad lineal que adquiere el móvil donde se puede ver que es constante a lo largo de todo el experimento.

### 4.4.3. Trayectoria definida por puntos

Se presenta el experimento en tiempo real del seguimiento de una trayectoria definida por los puntos de la Tabla 4.1 donde los parámetros son los mismos que los utilizados en la simulación de la subsección 4.2.3. De los resultados obtenidos a nivel de simulación y experimentales se observa que son similares. En la Figura 4.10 (a) y (b) se puede ver como el robot móvil sigue a la trayectoria y orientación deseados, también el móvil pasa por cada uno de los puntos que se definió al principio. Las velocidades angulares, voltajes y torques de los motores derecho e izquierdo mostrados en las Figuras 4.10 (c), (d) y (e) presentan unas formas de onda similares a las de simulación y en las que se puede ver como cambian de valores a lo largo del experimento y no permanecen constantes, en el periodo de tiempo comprendido entre  $10 \text{ s} \leq t \leq 25 \text{ s}$  se puede ver que el móvil realiza el primer giro en la primera curva de la trayectoria y en el periodo de tiempo de  $40 \text{ s} \leq t \leq 50 \text{ s}$  el móvil realiza el segundo giro en la segunda curva de la trayectoria. Finalmente, en la Figura 4.10(f) se presenta la velocidad lineal del móvil donde se puede ver que en los momentos donde el robot realiza el giro en una curva de la trayectoria baja su velocidad para realizar un buen seguimiento de la trayectoria.

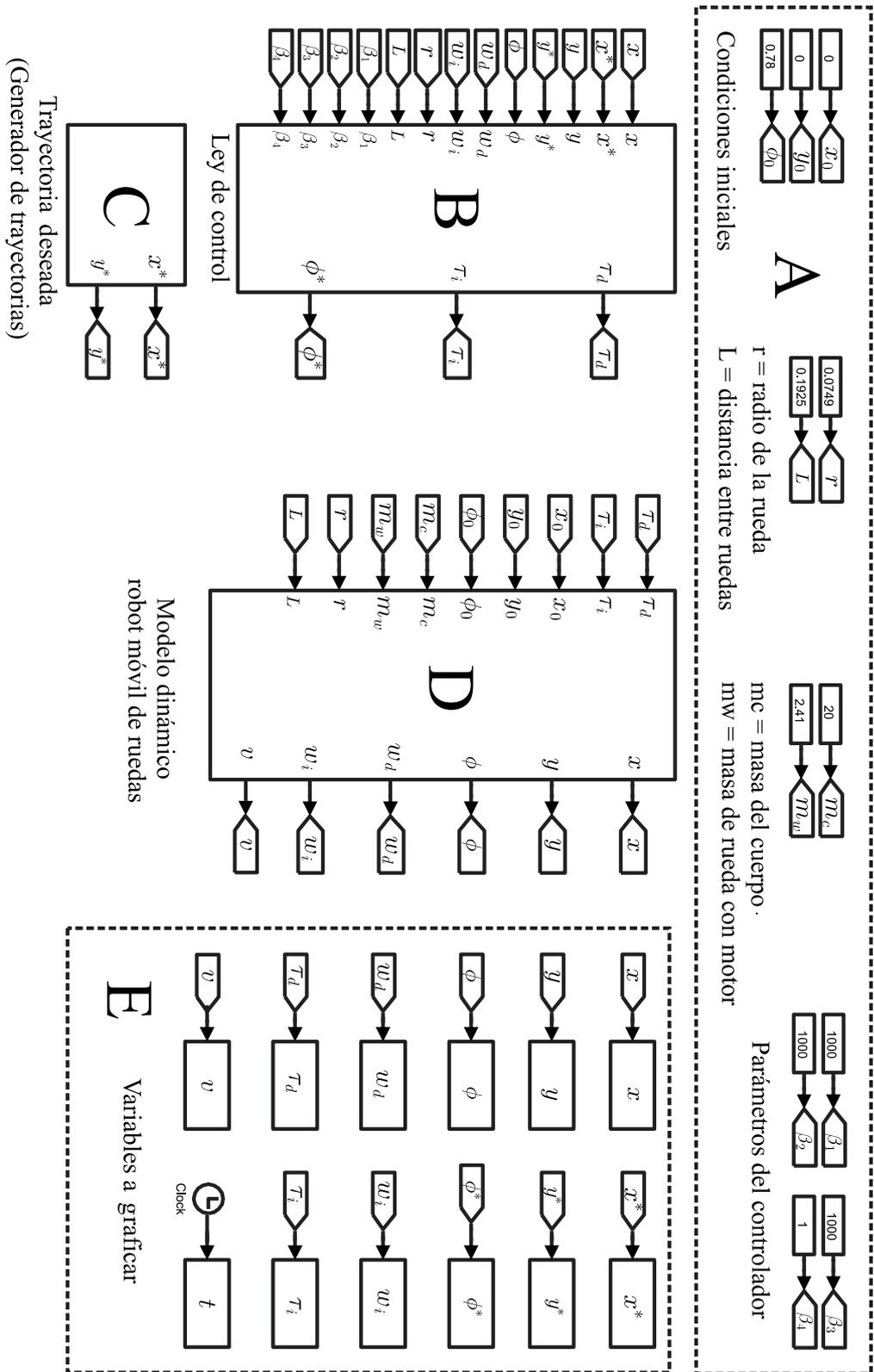
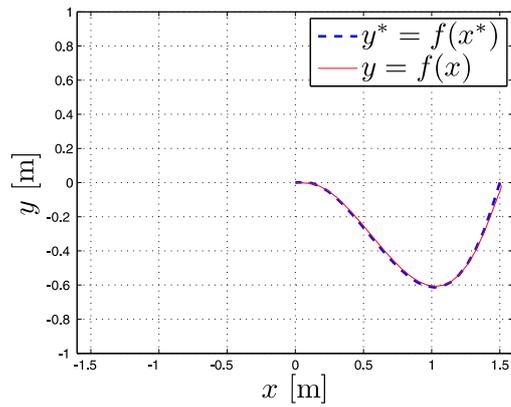
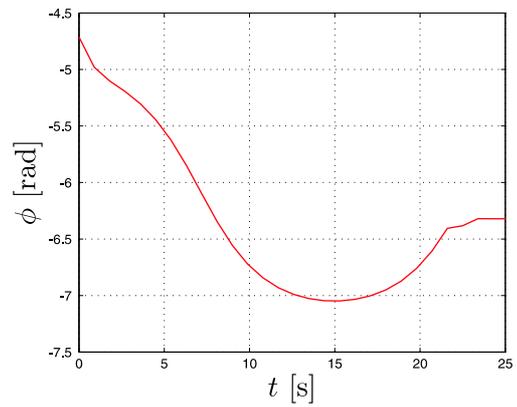


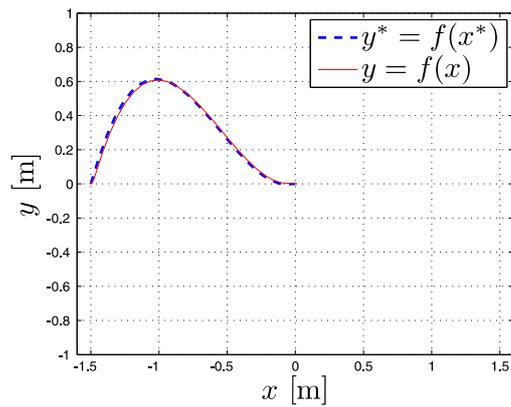
Figura 4.1: Simulación del sistema en Simulink.



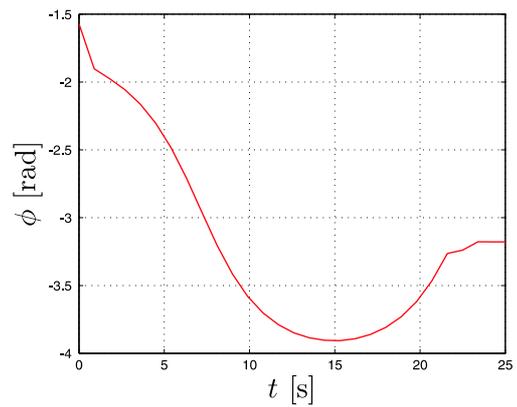
(a)



(b)

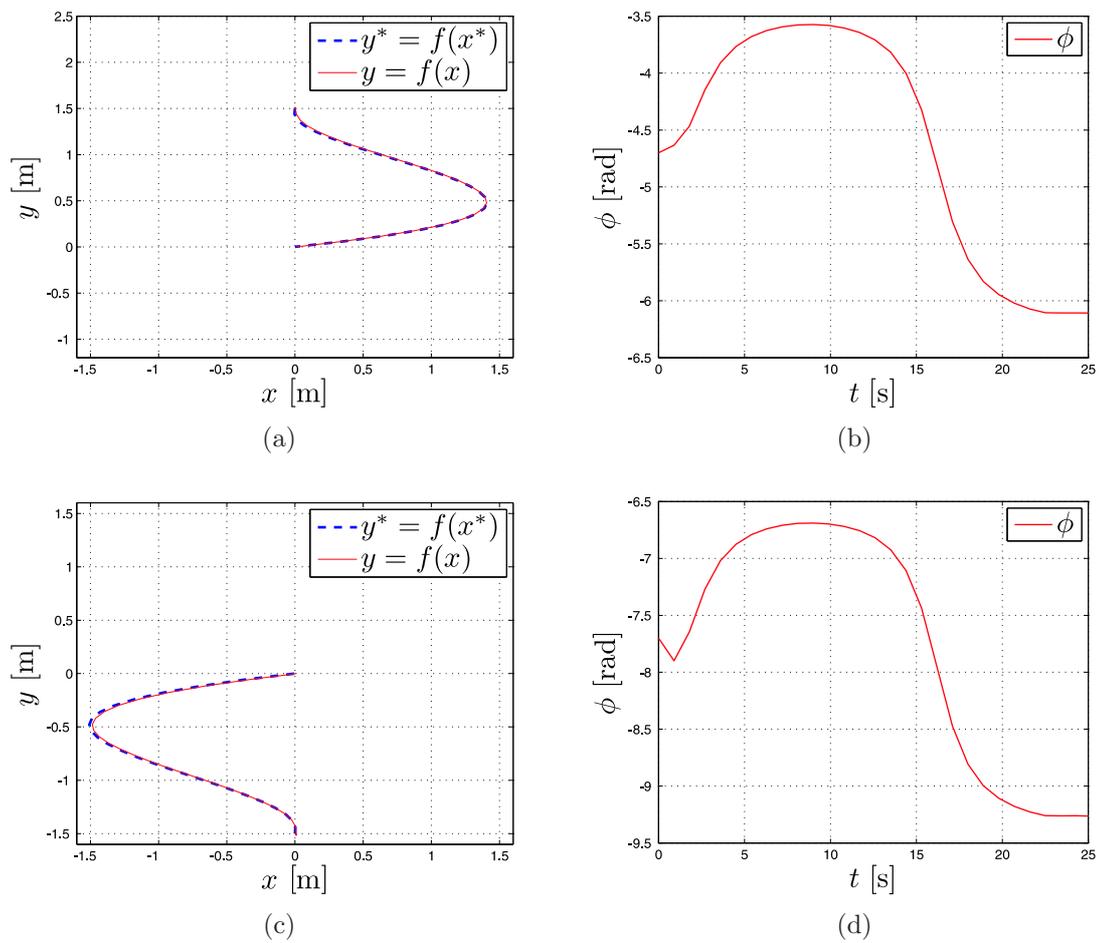


(c)



(d)

Figura 4.2: Gráficas de simulación del estacionamiento del robot móvil en el eje  $x$

Figura 4.3: Gráficas de simulación del estacionamiento del robot móvil en el eje  $y$

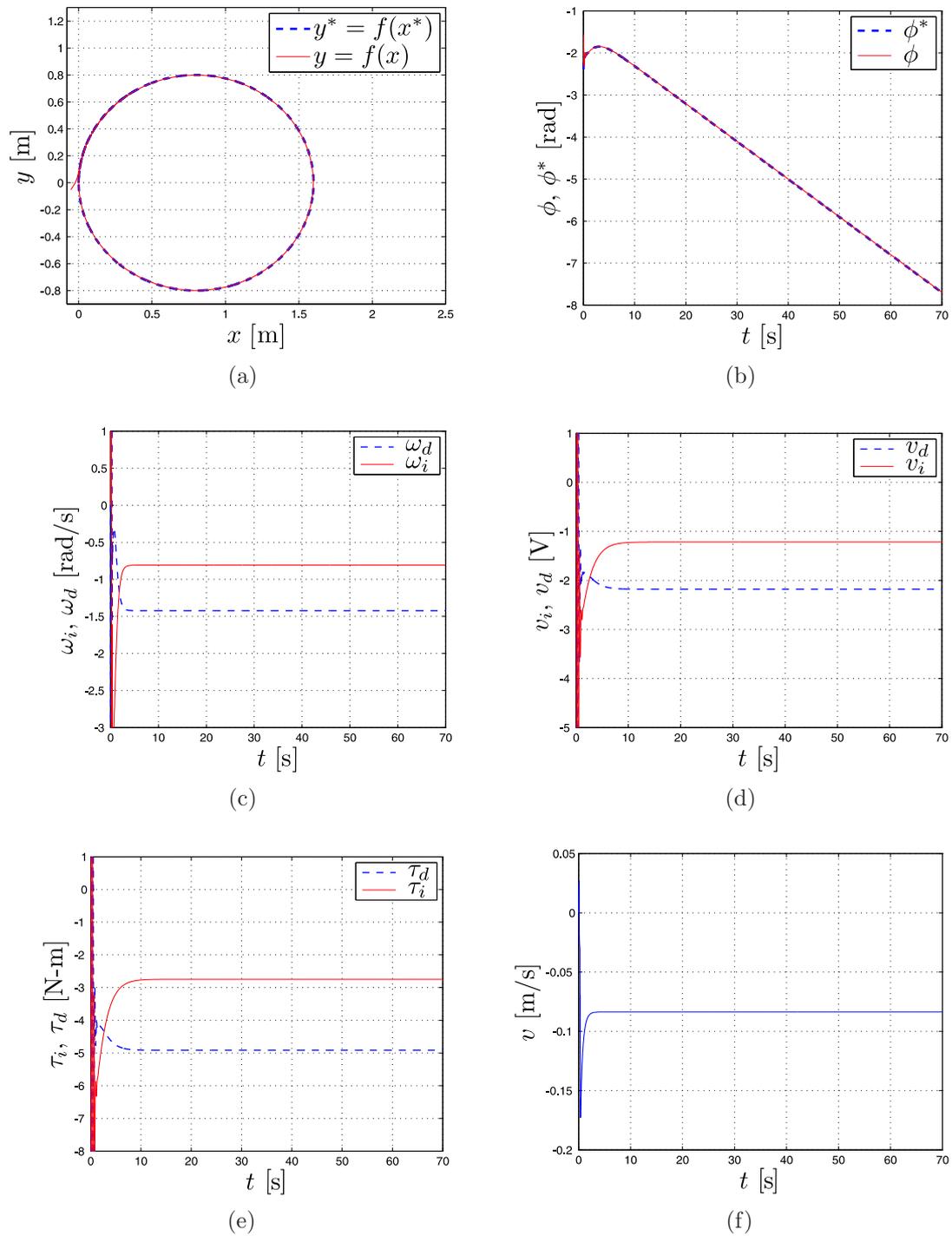


Figura 4.4: Seguimiento de una trayectoria (circunferencia), simulación.

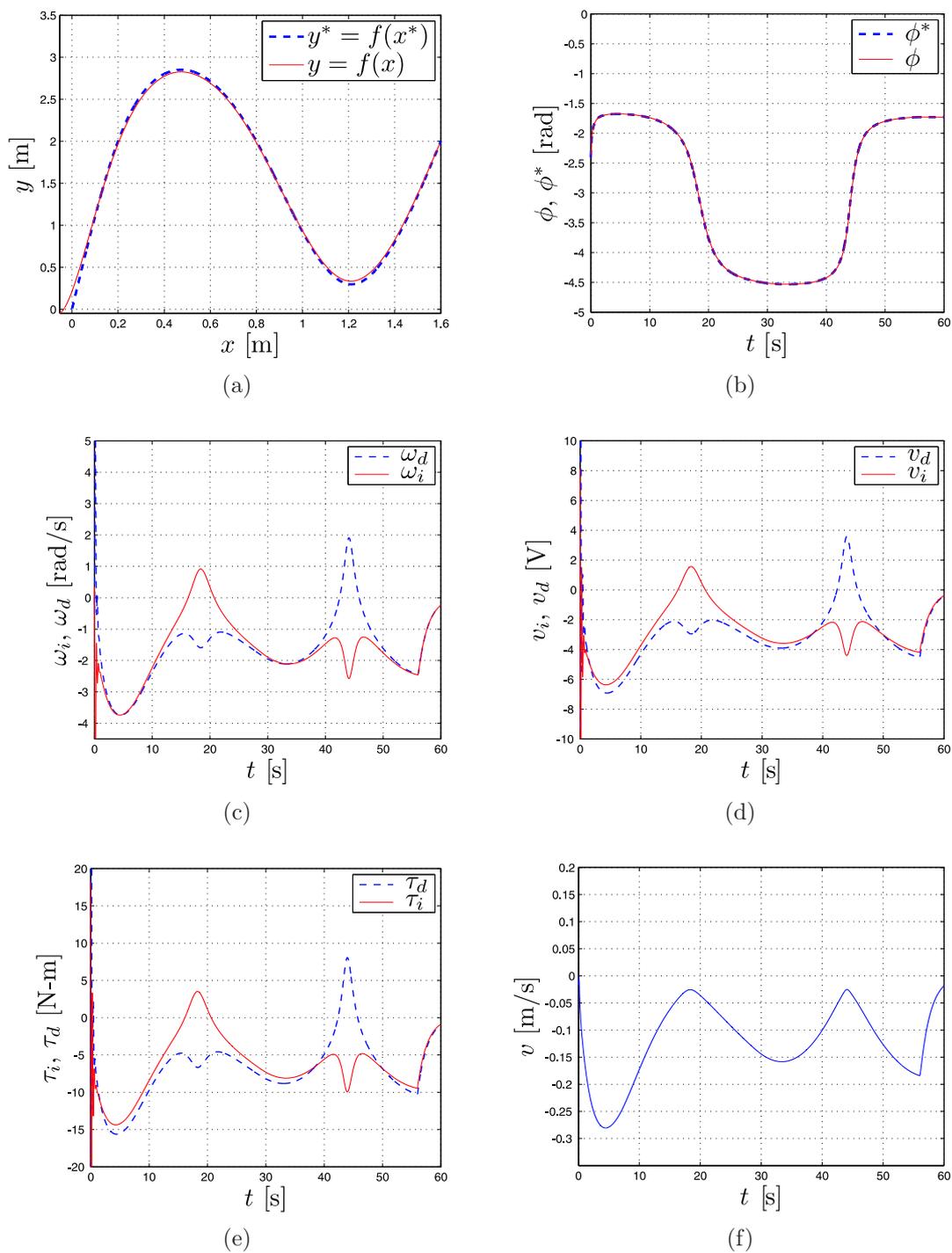


Figura 4.5: Seguimiento de una trayectoria definida por puntos, simulación.

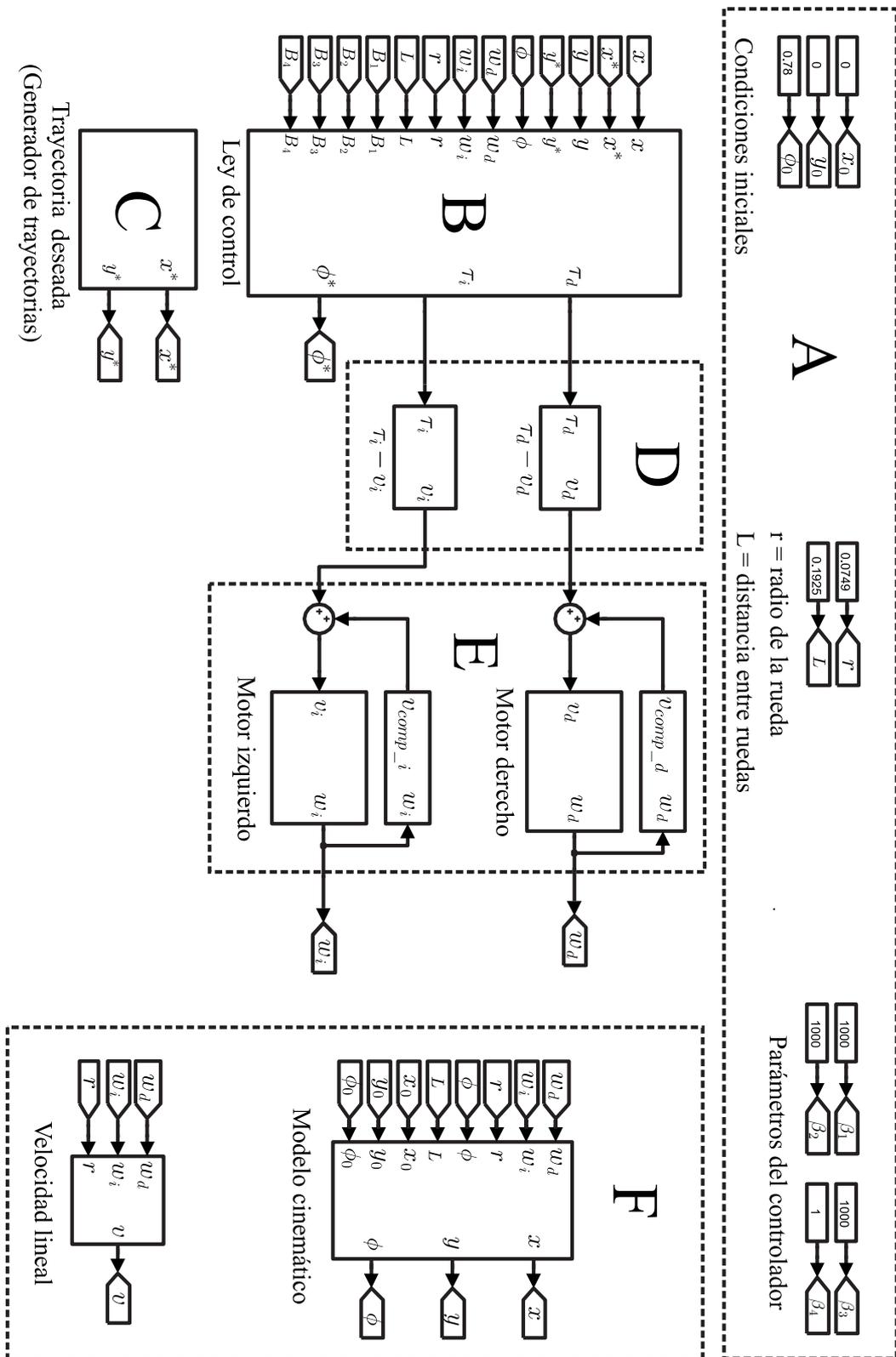


Figura 4.6: Experimento en tiempo real.

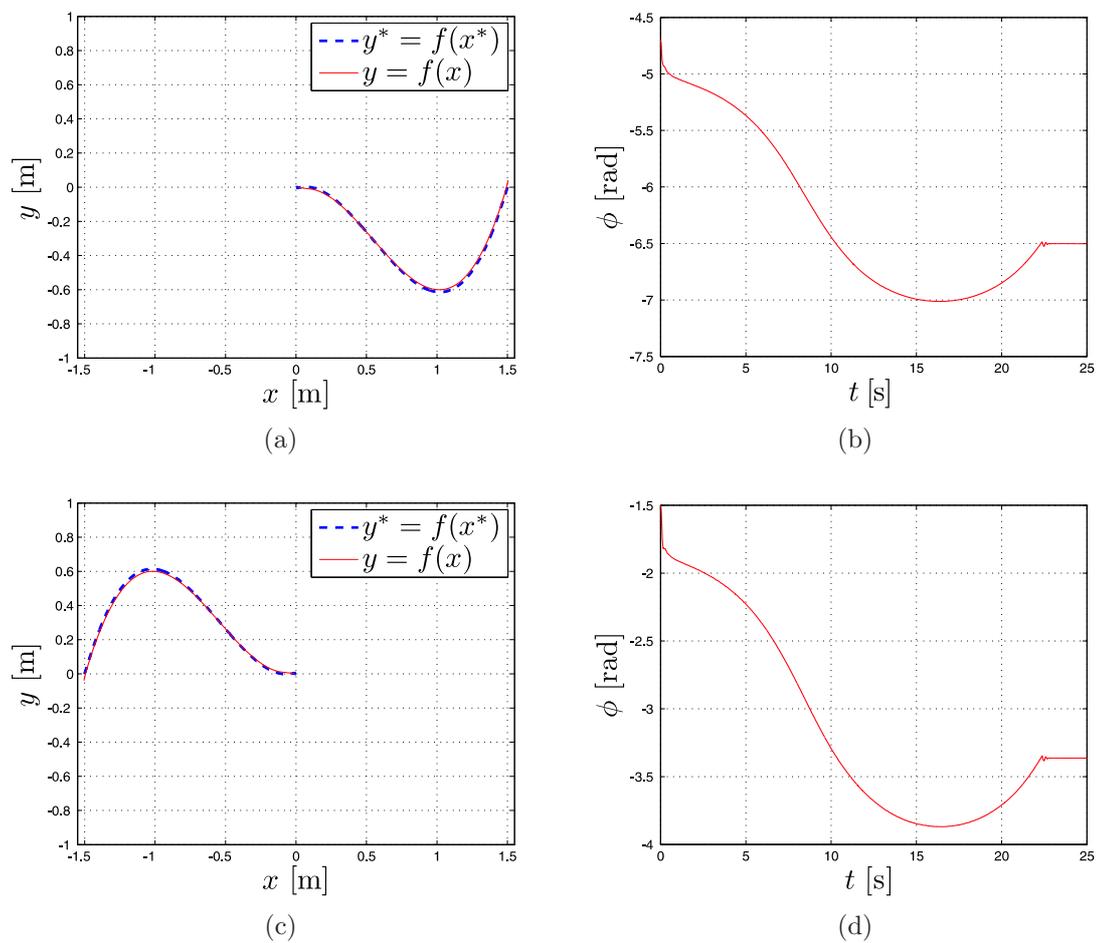
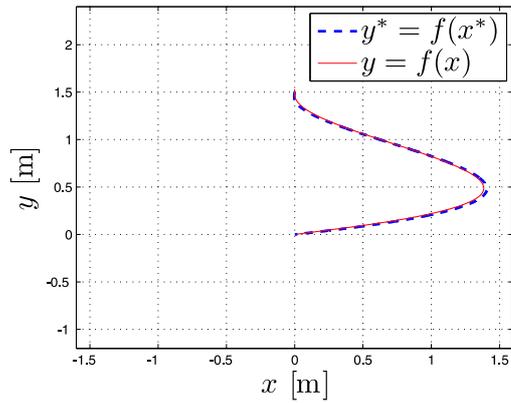
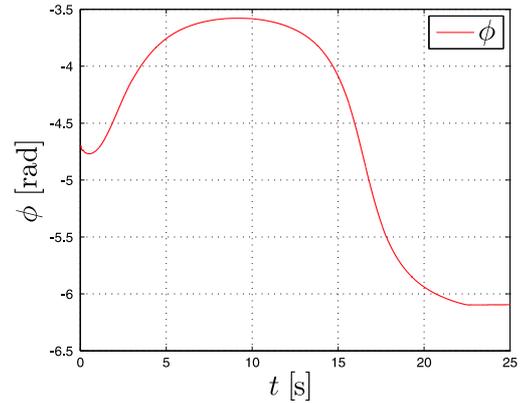


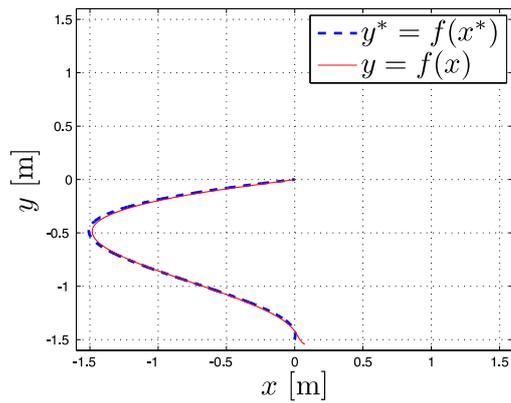
Figura 4.7: Gráficas de experimentos en tiempo real del estacionamiento del robot móvil en el eje  $x$



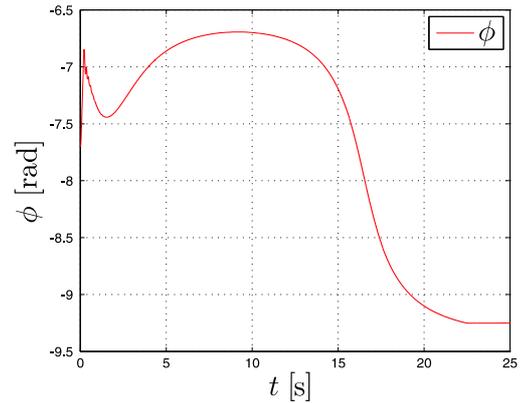
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.8: Gráficas de experimentos en tiempo real del estacionamiento del robot móvil en el eje  $y$

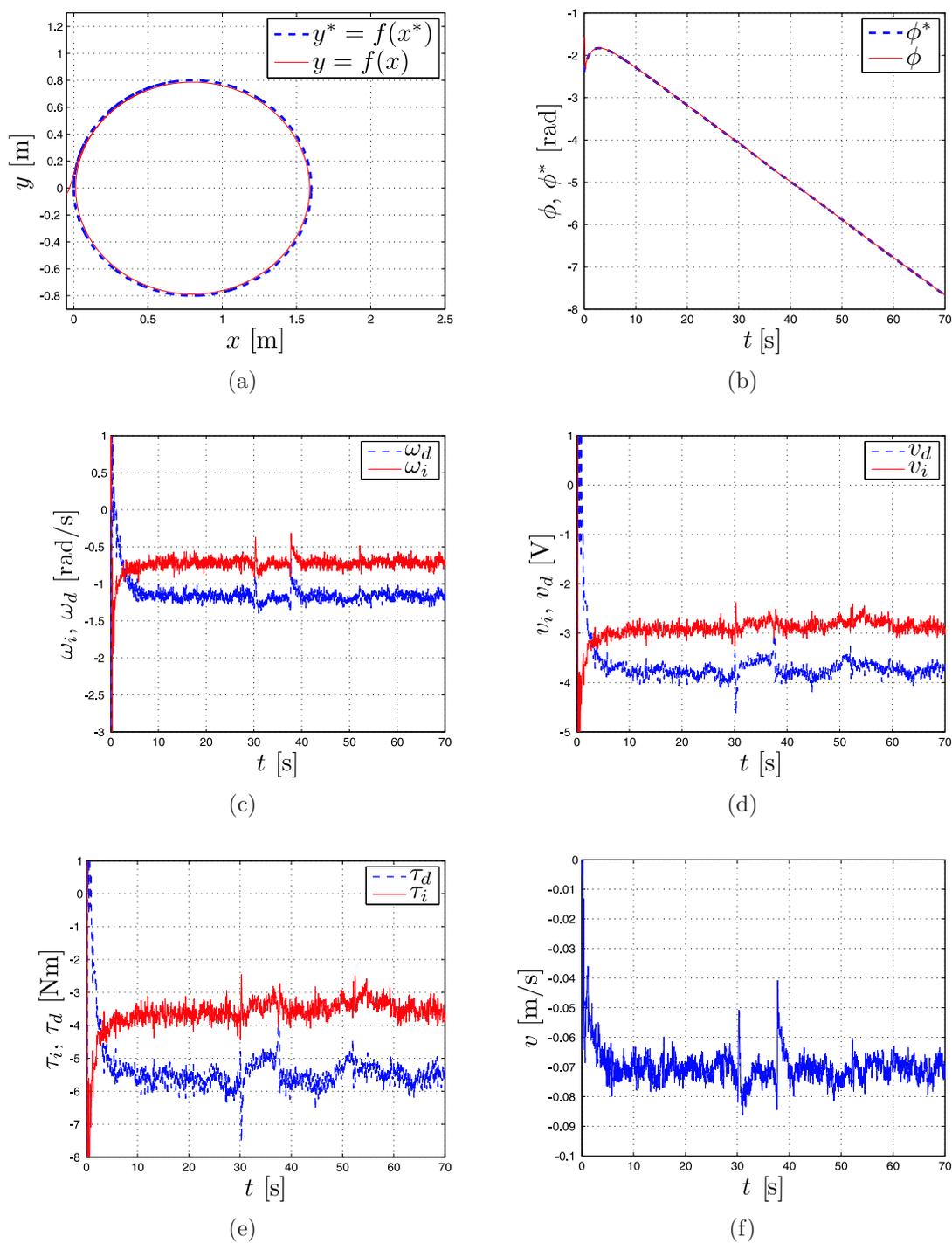


Figura 4.9: Seguimiento de una trayectoria (circunferencia), en tiempo real.

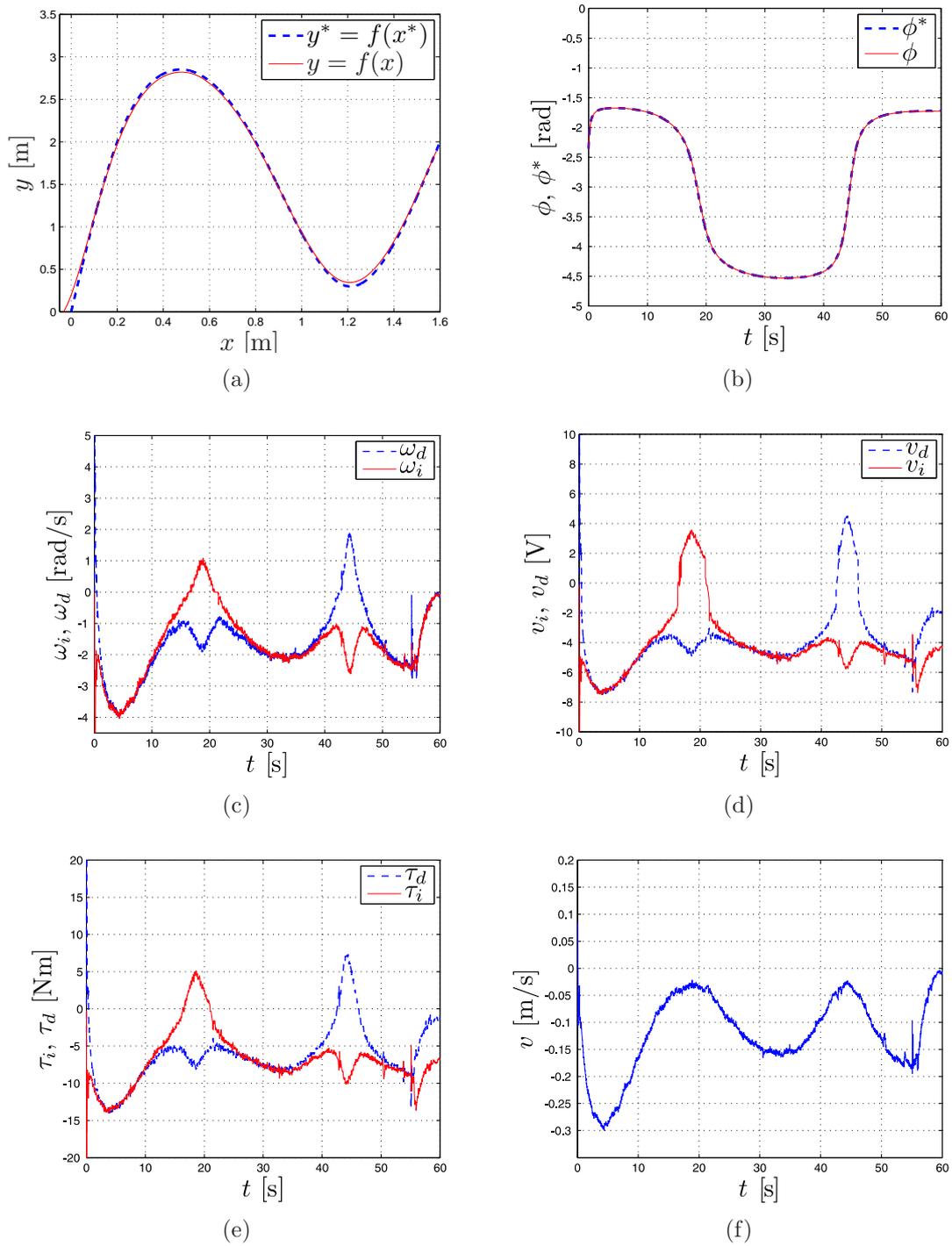


Figura 4.10: Seguimiento de una trayectoria definida por puntos, en tiempo real.

# Capítulo 5

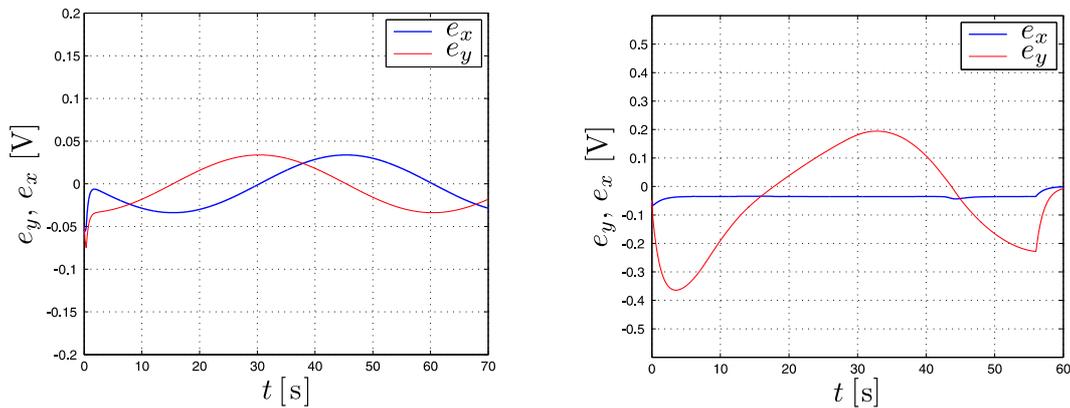
## Conclusiones y trabajos a futuro

Como conclusión de este trabajo se debe decir que se cumplió con el objetivo general, el cual consistió en el diseño de una ley de control basada en el modelo dinámico de un robot móvil de ruedas de tipo diferencial, que permitiera realizar la tarea de seguimiento de trayectorias punto a punto. El estado del arte que se realizó fue importante porque sentó las bases para abordar la investigación. Así, teniendo la información relacionada con el tema se procedió a resolver el problema planteado. Primero se propuso un esquema de control que dió solución al problema de seguimiento de trayectorias. Posteriormente, se diseñó un algoritmo que permitió la generación de trayectorias arbitrarias basadas en puntos, ya que el controlador diseñado así lo requería. Después se realizaron las simulaciones asociadas al esquema de control propuesto junto con el generador de trayectorias. Finalmente, se procedieron a validar estos resultados a nivel experimental. A continuación se enlistan algunas de las conclusiones y actividades que se realizaron en este trabajo, con la finalidad de lograr el objetivo inicialmente planteado:

- ✓ En el presente trabajo se utilizó un prototipo de robot móvil de ruedas ya construido y listo para funcionar [45]. Se estudió y caracterizó el modelo dinámico de este prototipo, determinando sus parámetros físicos.
- ✓ Se diseñó un controlador basado en el modelo dinámico del robot móvil. Puesto que el control diseñado está determinado por los pares de carga  $\tau_d$  y  $\tau_i$ , mediante el empleo de la ley de Ohm y la relación que existe entre el par de carga  $\tau$  y la corriente de armadura  $i$  de un motor de CD ( $v = \frac{R}{nk_m}\tau$ ), se pudo realizar la conversión de par  $\tau$  a voltaje  $v$ , ya que los motores de CD admiten como entrada voltajes. Mencionar también que el controlador es capaz de lograr que  $(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$ , pero no así a la variable  $\phi$ . No obstante el controlador muestra un buen desempeño haciendo que todas las variables tiendan a sus valores deseados, ie.,  $(x, y, \phi) \rightarrow (x^*, y^*, \phi^*)$ .
- ✓ Se diseñó un generador de trayectorias a partir de un algoritmo de interpolación basado en spline cúbicos. El algoritmo se codificó en un bloque Embebido de Matlab<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>. Este generador entrega puntos  $(x, y)$ , tales que la trayectoria suave resultante contiene a los puntos que se desea siga el móvil. Es importante

mencionar que el algoritmo tiene una limitación, por lo que sólo funciona para valores de  $x$  que cumpla lo siguiente  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Ahora bien, si invertimos las variables en el algoritmo generador de trayectorias podemos conseguir una trayectoria que supere la limitación mencionada anteriormente, pero también estará restringida para valores de  $y$  que cumpla lo siguiente  $y_0 < y_1 < \dots < y_n$ .

- ✓ Se realizó la medida de los errores en el seguimiento de trayectorias, donde podemos ver que se presenta un error cuando el robot móvil llega al punto final. Esto se debe a que el robot no tiene sensores de posición y orientación instalados, por lo tanto sólo se hace una estimación de estos valores por medio de la integración numérica del modelo cinemático. Para dar solución a los anterior es necesario instrumentar sensores adicionales en el robot móvil y leerlos con la tarjeta controladora DS1104 y así determinar la posición y orientación exacta del robot en el espacio de trabajo. Mencionar también, que en tesis anteriores se tenían errores mayores en el seguimiento de trayectorias, esto debido a que hacían uso del modelo cinemático para diseñar la ley de control. En las Figuras 5.1 (a) y (b) se muestran las gráficas de los errores asociados a los experimentos de seguimiento de trayectorias.



(a) Error en el seguimiento de una trayectoria paramétrica (b) Error en el seguimiento de una trayectoria definida por puntos

Figura 5.1: Errores asociados a los experimentos de seguimiento de trayectorias

- ✓ Se integró el controlador y el generador de trayectorias para que el robot móvil pudiera realizar el seguimiento de trayectorias definidas por puntos en el plano cartesiano. De esta forma, el robot móvil no sólo está limitado a seguir trayectorias definidas por curvas paramétricas como son una recta, parábola o circunferencia. El robot móvil ahora puede seguir cualquier trayectoria en el plano  $XY$ , mediante el generador de trayectorias desarrollado.
- ✓ Se realizó la conexión de Matlab<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup> con la tarjeta de control DS1104, para realizar los experimentos en tiempo real. Con la ayuda de Control Desk se

pudo graficar las variables que intervienen en el experimento, y así posteriormente analizarlos.

- ✓ Se codificó un programa con extensión \*.m en Matlab<sup>®</sup> para poder presentar las gráficas resultantes de los experimentos en un formato adecuado para la presentación y documentación de resultados.

Los resultados obtenidos en la presente tesis se pueden evaluar como satisfactorios y buenos. Se logró cumplir el objetivo general y los específicos, al haber mostrado cómo la ley de control diseñada mostró un buen desempeño a nivel experimental. En las gráficas presentadas en el capítulo anterior se puede ver cómo el robot móvil en lazo cerrado realiza de forma correcta la tarea de seguimiento de trayectorias, tanto de tipo continuo como las generadas a partir de puntos en el plano  $XY$ .

En todo proceso de investigación se presentan dificultades de distintos tipos, como pueden ser el aprendizaje de nuevos conceptos o el de realizar pruebas experimentales, para verificar el correcto funcionamiento de lo que se empleará en el desarrollo del mismo. A continuación se presentan algunos problemas que se superaron en el desarrollo de este trabajo de investigación.

- ✓ Aplicar el método para incluir las restricciones no-holonómicas en la dinámica del sistema de Euler-Lagrange.
- ✓ Representar, simular e interpretar modelos matemáticos y leyes de control en Matlab<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>.
- ✓ Utilizar la tarjeta controladora DS1104 e interactuar con el software integrado ControlDesk, en el entorno de Matlab<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>.
- ✓ Minimizar los errores en el seguimiento de trayectoria punto a punto, y de esa forma tener un control más eficaz del robot móvil, de tal forma que se desplazara de un punto a otro con la mayor precisión posible.
- ✓ En cuanto a la parte electrónica, fue necesario conocer y analizar el funcionamiento de cada una de las tarjetas implementadas en el robot móvil, realizando medidas con los instrumentos adecuados (multímetro y osciloscopio) para verificar su correcto funcionamiento.

Si bien es cierto que el tema de robótica móvil es muy estudiado y existe bastante información sobre el tema, no obstante hablar de robótica móvil, es hablar de una transición que poco a poco ha ido evolucionando y que hasta nuestros días, continua siendo un tema de gran interés a nivel internacional. Las investigaciones que día a día se van sucediendo, son sólo un nuevo aporte significativo al tema en cuestión, pues el límite en el desarrollo y concepción de un robot móvil, aún se divisa lejos. Por lo anterior, dentro de los trabajos a futuro que podrían desarrollarse, en esta área de la robótica, se podrían mencionar los siguientes:

- ✓ Mejorar el algoritmo para la generación de trayectorias para que no tenga restricciones en cuanto a los puntos que se le ingresan como datos.
- ✓ Sustituir el cable que conecta la tarjeta de control con el robot móvil por una conexión inalámbrica, y de esta manera ampliar el espacio de trabajo del robot. En la actualidad está limitado a la longitud del cable, siendo esto una limitante cuando se seleccionan los puntos que el móvil debe de seguir, pues en los resultados presentados en este trabajo se propusieron coordenadas que conllevan una longitud limitada.
- ✓ Se podría aplicar el generador de trayectorias para que el robot móvil realice la tarea de evasión de obstáculos que encuentre en su recorrido. Para esto, los obstáculos deberán ser fijos en el plano para que cuando se le ingresen los puntos a seguir al controlador vea la forma en que los evada.
- ✓ Es conveniente que se instalen sensores para la localización del robot móvil y así determinar su posición en tiempo real. En los experimentos realizados hasta ahora se utilizó el modelo cinemático y mediante la integración numérica de éste, se determinó la posición y orientación del robot móvil, es decir  $(x, y, \phi)$ .

# Referencias

- [1] M. Sanchez, M. Rodriguez, S. Bayarri, P. Redorta, E. Rodriguez, E. Fernández y M. Villavicencio, “Historia de la robótica: de Arquitas de Tarento al robot Da Vinci (Parte I)”, *Actas Urol.*, Vol. 31, No. 2, pp. 69-76, España, 2007.
- [2] G. Campion, G. Bastin and B. D’Andréa-Novel, “Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 1, pp. 47-62, Febrero, 1996.
- [3] Asimov, *I robot*, Edhasa, Barcelona, 1979.
- [4] R. Iñigo y E. Vidal, *Robots industriales manipuladores*, Edición UPC, Barcelona 2002.
- [5] J. M. Angulo, *Historia y evolución de la robótica. En robótica practica. Tecnología y aplicaciones*, Ed. Paraninfo, 5 ed., Madrid, 1999.
- [6] E. Dégoulange, E. Dauchez and P. Pierrot, “Force control of an industrial PUMA 560 robot under environmental constraints: implementation issues and experimental results ”, *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Vol. 1, No. 2, pp. 213-218, Mayo, 1993.
- [7] Z. Hanqi, W. Wen-Chiang and Z. S. Roth, “Camera-assisted calibration of SCARA arms ”, *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Vol. 3, No. 4, pp. 46-53, Agosto, 1995.
- [8] A. Bañó-Azcón, “Análisis y diseño del control de posición de un robot móvil con tracción diferencial”, Tesis de maestría dirigida por A. Oller Pujol, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Automática, Universitat Rovira I Virgili, España, Junio, 2003.
- [9] J. A. Vicente-Lober, “Técnicas de inteligencia artificial en la construcción de robots móviles autónomos”, Tesis de maestría dirigida por V. M. Rodilla y B. C. Diego, Departamento de Informática y Automática Universidad de Salamanca, España, Julio, 2003.
- [10] J. R. García-Sánchez, “Diseño y construcción de un robot móvil aplicando el método de campos potenciales en la evasión de obstáculos”, Tesis de maestría dirigida por

- R. Silva Ortigoza y V. M. Hernández Guzmán, Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Diciembre, 2008.
- [11] L. Solaque-Guzmán, N. Muños-Ceballos y P. Niño-Zuáres, “Planificación de trayectorias para un robot tipo diferencial con restricciones dinámicas”, *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, Vol. 18, No 1, pp. 75-94, Junio, 2008.
- [12] K. Liang y W. Jian-Jun, “The Solution for Mobile Robot Path Planing Based on Partial Differential Equations Method”, *International Conference on Electrical and Control Engineering*, Vol. 10, No 5, pp. 5741-5745, 2010.
- [13] S. Lining, L. Rui, W. Weidong y D. Zhijiang, “Mobile Robot Real-time Path Planning Based on Virtual Targets Method”, *International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*, Vol. 12, No 15, pp. 568-572, 2011.
- [14] Z. Li and J. F. Canny, *Nonholonomic Motion Plannig*, Boston, MA: Kluwer, 1993.
- [15] S. S. Sastry, R. M. Murray and Z. Li, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulations*, CRC Press LLC, 2000 N. W. Corporate Blvd, Boca Raton, FLorida, 1993.
- [16] A. W. Divilbiss and J. T. Wen, “Trajectory Tracking Control of a Car-Trailer System”, *IEEE Trans. Control System Technology*, Vol. 5, No. 3, pp. 269-278, Mayo, 1997.
- [17] T. Lozano-Pérez, “Spatial planning: a configuration space approach”, *IEEE Trans. Computer*, Vol. 32, No. 2, pp. 108-120, Febrero, 1983.
- [18] O. Amidi, “Integrated Mobile Robot Control”, *Robotics Institute*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RI-TR-90-17.
- [19] R. Silva-Ortigoza, J. R. García-Sánchez, V. R. Barrientos-Sotelo, M. A. Molina-Vilchis, V. M. Hernández-Guzmán y G. Silva-Ortigoza, “Una panorámica de los robots móviles”, *Télematique*, Vol. 6, No. 3, pp. 1-14, 2007.
- [20] A. Ollero, *Robótica Manipuladores y robots móviles*, Marcombo, Barcelona, 2001.
- [21] H. Sira-Ramírez, R. Márquez, F. Rivas-Echeverría y O. Llanes-Santiago, *Control de sistemas no lineales*, España, Pearson Prentice Hall, 2005.
- [22] J. M. Albarrán-Jimenez, “Diseño, contrucción y control de un robot móvil articulado”, Tesis de maestría dirigida por E. Aranda Bricaire y M. Velasco Villa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Octubre, 2003.

- [23] R. Silva-Ortigoza, G. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, V. R. Barrientos-Sotelo, J. M. Albarrán-Jiménez y V. M. Silva-García, “Trajectory Tracking in a Mobile Robot without Using Velocity Measurements for Control of Wheels”, *IEEE Latin America Transactions*, Vol. 6, No. 7, pp. 598-607, Diciembre, 2008.
- [24] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, “A stable tracking control method for an autonomous mobile robot”, *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Vol. 1, No. 13, pp. 384-389, Mayo, 1990.
- [25] G. Walsh, D. Tibury, S. Sastry, R. Murray and J. P. Laumond, “Stabilization of trajectory for system with nonholonomic constraints”, *IEEE Trans. Automation and Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 216-222, junio, 1994.
- [26] N. Sarkar, X. P. Yun and V. Kumar, “Control of mechanical system with rolling constraints: Applications to dynamic control of mobile robots”, *Int. J. Robot Res.*, Vol. 13, pp. 55-69, 1994.
- [27] B. D’Andréa Novel, G. Campion and G. Bastin, “Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization”, *Int. J. Robot Res.*, Vol. 14, No 6, pp. 543-559, Diciembre 1995.
- [28] D. Wang and G. Xu, “Full-State Tracking and Internal Dynamics of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots”, *IEEE ASMAE Transactions on Mechatronics*, Vol. 8 No. 2, pp 203-214, Junio, 2003.
- [29] C. Canudas-de Wit and R. Roskam, “Path following of a 2-DOF wheeled mobile robot under path and input Torque Constraints”, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 2, No. 9, pp. 1142-1147, Abril, 1991.
- [30] M. Corradini and G. Orlando, “Robust tracking control of mobile robots in the presence of uncertainties in the dynamical model”, *Journal of Robotic and Systems*, Vol. 18, No. 6, pp. 317-323, Junio, 2001.
- [31] S. Hyun-Sik, K. Jong-Hwan and K. Kwangill, “Variable Structure Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots”, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 2, No. 21, pp. 1694-1699, Mayo, 1995.
- [32] J. Yang and J. Kim, “Sliding mode motion control fo nonholonomic mobile robots”, *IEEE Control and System*, Vol. 19, No. 2, pp. 15-23, Abril, 1999.
- [33] P. Niño-Suárez, E. Aranda-Bricaire and M. Velasco-Villa, “Control mediante modos deslizantes en tiempo discreto para el seguimiento de trayectorias en un robot móvil”, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, Vol. 4, No. 4, pp. 31-38, Octubre, 2007.
- [34] Y. Jung-Min, Ch. In-Hwan and K. Jong-Hwan, “Sliding mode control of nonholonomic wheeled mobile robot for trajectory tracking”, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automations*, Vol. 4, pp. 2983-2988 Mayo, 1998.

- [35] T. H. Lee, H. K. Lam, F. H. F. Leung and P. K. S. Tam, “A Fast Path Planning-and-Tracking Control for Wheeled Mobile Robots”, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 1736-1741, Mayo, 2001.
- [36] T. H. Lee, H. K. Lam, F. H. F. Leung and P. K. S. Tam, “A path planning method for micro robot soccer game”, *IEEE Industrial Electronics Society*, Vol. 1, No 27, pp. 626-629, 2001.
- [37] E. Mariscal-Garcia, “Planeación y seguimiento de trayectorias de robots móviles en una simulación de un ambiente real”, *Ra Ximhai*, Vol. 1, No. 1, pp. 177-200, Enero, 2005.
- [38] D. Lee, “Passive Configuration Decomposition and Practical Stabilization of Non-holonomic Mechanical Systems with Symmetry”, *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 17, No. 15, pp. 3620-3625, Diciembre, 2010.
- [39] V. R. Barrientos Sotelo, “Análisis, diseño, construcción y control en tiempo real de un robot móvil tipo shakey en el seguimiento de trayectoria”, Tesis de maestría dirigida por R. Silva Ortigoza y J. M. Albarrán Jiménez, Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Diciembre, 2008.
- [40] A. M. Bloch, J. Baillieul, P. Crouch, J. Marsden, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer, USA, 2003.
- [41] R. R. Kelly y V. Santibañez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Pearson Prentice Hall, Madrid, 2003.
- [42] R. L. Burden y D. Faires, *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1980.
- [43] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Jhon Wiley, New York, 2nd. Edition, 1989.
- [44] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill Internacional, New York, 2nd. Edition, 1989.
- [45] R. Morales Guerrero, “Construcción y localización de un robot móvil diferencial para la evasión de obstáculos mediante campos potenciales artificiales y control automático”, Tesis de maestría dirigida por R. Silva Ortigoza y H. Taud, Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Noviembre, 2010.

# Apéndice A

## Publicaciones

Durante el proceso de estudios de maestría, relativo al análisis, estudio y la solución de problemas que se presentaron en el desarrollo de la misma se identificaron otros problemas interesantes. Sin embargo, debido a la extensión de estos no se presenta en forma detallada. En cambio, se considera conveniente citar los trabajos a los cuales dieron lugar estas otras investigaciones.

### A.1. Artículos en Revistas de Investigación Internacionales con Arbitraje Estricto no ISI

1. E. R. Ramos-Silvestre, R. Morales-Guerrero, R. Silva-Ortigoza, “Modelado, simulación y construcción de un robot móvil de ruedas tipo diferencial”, Latin American Journal of Physics Education. Vol. 4, No. 3, pp. 812-821, Septiembre 2010. ISSN 1870-9095. México, D.F.

<http://journal.lapen.org.mx/sep10.html>

2. H. M. Maldonado-Del Toro, R. Silva-Ortigoza, E. R. Ramos-Silvestre, V. M. Hernández-Guzmán y J. C. Rivera-Díaz, “Modelado y simulación de un robot rígido de dos grados de libertad ”, Latin American Journal of Physics Education. Vol. 5, No. 1, pp. 321-327, March 2011. ISSN 1870-9095. México, D.F.

<http://www.journal.lapen.org.mx/march11.html>

### A.2. Artículos en Revistas de Divulgación y Difusión Científica y Tecnológica

1. E. R. Ramos-Silvestre, R. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández, R. Morales-Guerrero, “Diseño y Construcción de un Robot Móvil Tipo Diferencial ”, Boletín UPIITA. No. 23, Septiembre 2010. Propiedad Ante Derechos de Autor. Reserva: 04-2007-060113250500-203. México.

[http://www.boletin.upiita.ipn.mx/num\\_ant\\_Index.asp?id\\_boletin=23](http://www.boletin.upiita.ipn.mx/num_ant_Index.asp?id_boletin=23)

### **A.3. Artículos en Extenso (conferencias internacionales)**

1. E. R. Ramos-Silvestre, “Automatización y supervisión de un proceso neumático usando herramientas alternativas aplicadas al aprendizaje y la enseñanza ”, V Congreso Internacional de Tendencias Tecnológicas en Computación”, México, DF. Octubre 2010. CIDETEC.

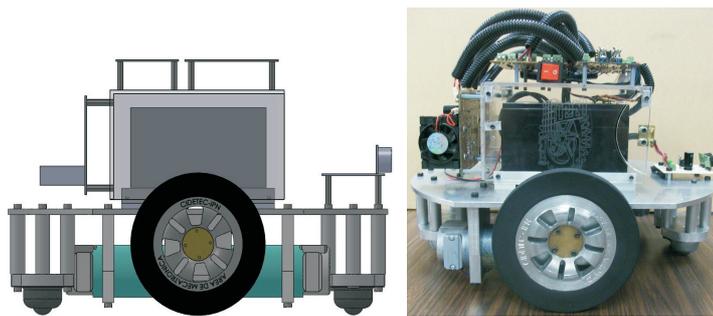
## Apéndice B

# Prototipo de robot móvil de ruedas tipo diferencial

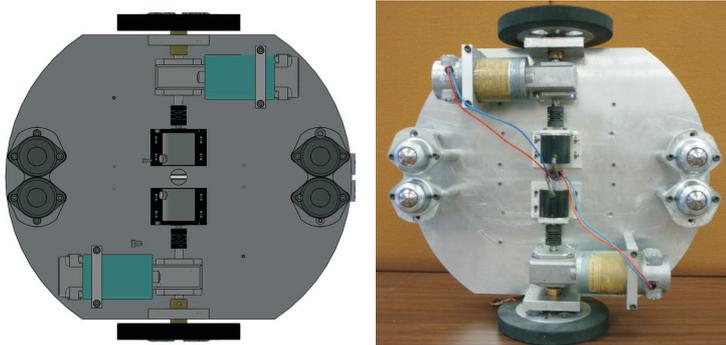
El prototipo de robot móvil está conformado por dos subsistemas, el correspondiente a los actuadores y el correspondiente al diseño mecánico. Para controlar cada uno de estos subsistemas, son necesarias una etapa de potencia y una etapa de control. La etapa de potencia permite la interacción entre las etapas de control y de los subsistemas, es decir, la comunicación entre ambas etapas al momento del envío y recepción de información; de igual forma, la alimentación de voltaje de cada dispositivo electrónico y la protección de los actuadores, así como también la protección de la tarjeta de control a cualquier sobrecarga ya sea de voltaje o bien de corriente eléctrica. Finalmente, en la etapa de control se lleva a cabo la programación de las leyes que gobernarán el funcionamiento asociado a cada uno de estos subsistemas, es decir, es la etapa en la que se imponen ciertas restricciones al funcionamiento del sistema en general. De manera general, en la Figura B.1, se presentan las piezas maquinadas del robot. En la Figura B.2, se muestran diferentes vistas del robot móvil ensamblado



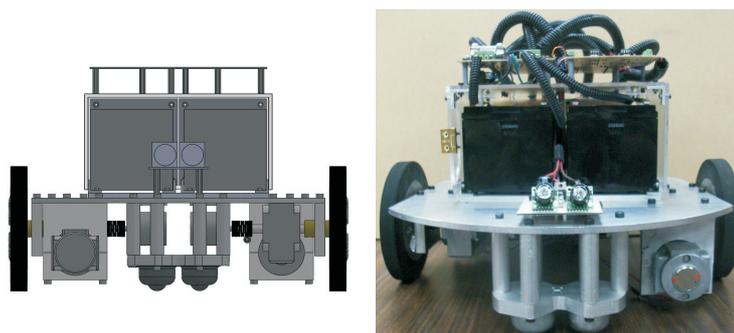
Figura B.1: Piezas maquinadas.



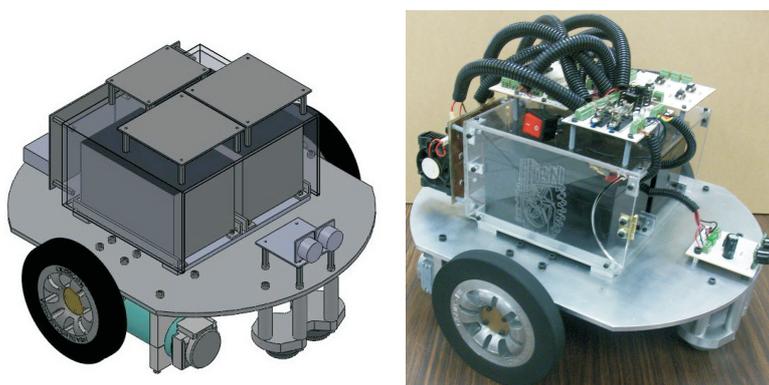
(a) Vista lateral.



(b) Vista inferior.



(c) Vista frontal.



(d) Vista isométrica.

Figura B.2: Prototipo de robot móvil.

# Apéndice C

## Hoja de datos de la tarjeta de control

### C.1. DS1104

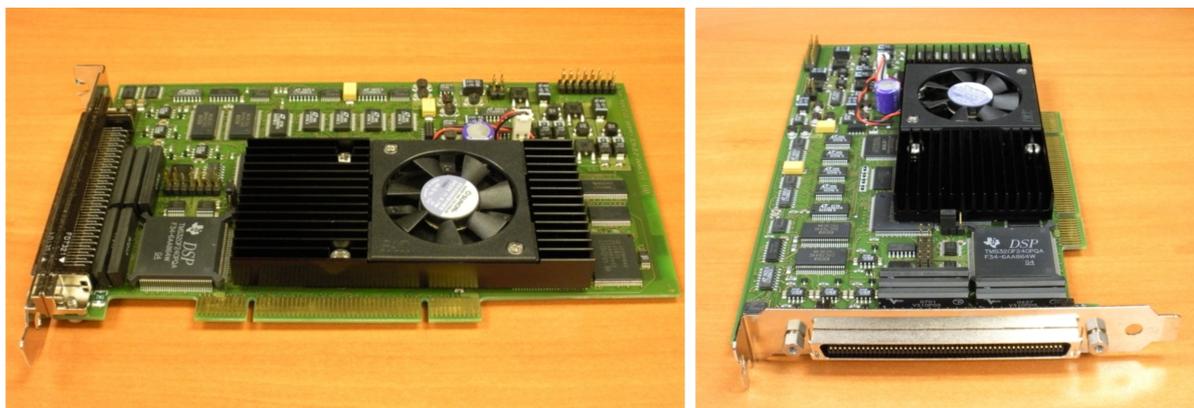


Figura C.1: Tarjeta de control DS1104.

Entre las características más importantes están los siguientes:

- ✓ Procesador PowerPC603 de 64 bits y reloj interno de 250 MHz, el cual le da la capacidad de procesar los datos en forma independiente del procesador de la computadora en la cual esta instalada la tarjeta.
- ✓ Memoria física de 32 MB y memoria flash de 8 MB, que permite almacenar las instrucciones para ejecutar una determinada aplicación.
- ✓ Temporizador 32 bits, permitiendo realizar un muestreo de 40 ns de resolución.
- ✓ Cuatro temporizadores de propósito general de 80 ns de resolución.

- ✓ Amplia gama de interrupciones configurables por el usuario, facilitando la interacción con el hardware externo.
- ✓ Cuatro convertidores A/D multiplexados con resolución de 16 bits y cuatro convertidores A/D paralelos con resolución de 12 bits.
- ✓ Ocho convertidores D/A con resolución de 16 bits.
- ✓ Veinte señales digitales configurables (entrada/salida) con resolución de 1 bit.
- ✓ Diez señales de PWM con frecuencia máxima de 20 MHz.
- ✓ Dos canales independientes para encoders incrementales con resolución de 24 bits.
- ✓ Dos interfases seriales.
- ✓ DSP esclavo Texas Instrument<sup>®</sup> TMS320F240.

**Technical data**

The following table shows the data sheet of the DS1104 R&D Controller Board.

Parameter	Characteristics
Processor	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ MPC8240 processor with PPC603e core and on-chip peripherals</li> <li>◦ 64-bit floating-point processor</li> <li>◦ 250 MHz CPU</li> <li>◦ 2 x 16 KB cache; on-chip</li> <li>◦ On-chip PCI bridge (33 MHz)</li> </ul>
Memory	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ Global memory: 32 MB SDRAM</li> <li>◦ Flash memory: 8 MB</li> </ul>
Timer	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 1 sample rate timer (decrementer): 32-bit down counter, reload by software, 40 ns resolution</li> <li>◦ 4 general purpose timer: 32-bit down counter, reload by hardware, 80 ns resolution</li> <li>◦ 1 time base counter: 64-bit up counter, 40 ns resolution, range 23400 years</li> </ul>
Interrupt controller	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 5 timer interrupts</li> <li>◦ 2 incremental encoder index line interrupts</li> <li>◦ 1 UART interrupt</li> <li>◦ 1 slave DSP interrupt</li> <li>◦ 1 slave DSP PWM interrupt</li> <li>◦ 5 ADC end of conversion interrupts</li> <li>◦ 1 host interrupt</li> <li>◦ 4 user interrupts from the I/O connector</li> </ul>
ADC 1 x 16-bit ADC with mux	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 4 muxed channels equipped with one 16-bit sample &amp; hold ADC</li> <li>Note: 5 ADC channels (1 x 16-bit + 4 x 12-bit) can be sampled simultaneous</li> <li>◦ 16-bit resolution</li> <li>◦ ±10 V input voltage range</li> <li>◦ 2 µs conversion time</li> <li>◦ ±5 mV offset error</li> <li>◦ ±0.25 % gain error</li> <li>◦ 4 ppm/K offset drift</li> <li>◦ 25 ppm/K gain drift</li> <li>◦ &gt;80 dB signal-to-noise ratio (SNR)</li> </ul>

Parameter	Characteristics
ADC 4 x 12-bit ADC	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 4 channels each equipped with one 12-bit sample &amp; hold ADC</li> <li>Note: 5 ADC channels (1 x 16-bit + 4 x 12-bit) can be sampled simultaneous</li> <li>◦ 12-bit resolution</li> <li>◦ <math>\pm 10</math> V input voltage range</li> <li>◦ 800 ns conversion time</li> <li>◦ <math>\pm 5</math> mV offset error</li> <li>◦ <math>\pm 0.5</math> % gain error</li> <li>◦ 4 ppm/K offset drift</li> <li>◦ 25 ppm/K gain drift</li> <li>◦ <math>&gt;65</math> dB signal-to-noise ratio (SNR)</li> </ul>
DACs 8 x 16-bit DAC	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 16-bit resolution</li> <li>◦ <math>\pm 10</math> V output voltage range</li> <li>◦ <math>\pm 5</math> mA maximum output current</li> <li>◦ Max. 10 <math>\mu</math>s settling time (full scale, accuracy 1/2 LSB)</li> <li>◦ <math>\pm 1</math> mV offset error</li> <li>◦ <math>\pm 0.1</math> % gain error</li> <li>◦ 13 ppm/K offset drift</li> <li>◦ 25 ppm/K gain drift</li> <li>◦ <math>&gt;80</math> dB signal-to-noise ratio (SNR)</li> </ul>
Digital I/O	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 20-bit parallel I/O</li> <li>◦ Single bit selectable for input or output</li> <li>◦ <math>\pm 5</math> mA maximum output current</li> <li>◦ TTL output/input levels</li> </ul>
Digital Incremental Encoder Interface (2 x 24 bit)	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 2 channels</li> <li>◦ Selectable single-ended (TTL) or differential (RS422) input</li> <li>◦ Fourfold line subdivision</li> <li>◦ Max. 1.65 MHz input frequency, i.e. fourfold pulse counts up to 6.6 MHz</li> <li>◦ 24-bit loadable position counter</li> <li>◦ Reset on index</li> <li>◦ 5 V/0.5 A sensor supply voltage</li> </ul>
Serial interface	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 1 serial UART (universal asynchronous receiver and transmitter)</li> <li>◦ Selectable transceiver mode: RS232/RS422/RS485</li> <li>◦ Max. baudrate RS232: 115.2 kBaud</li> <li>◦ Max. baudrate RS422/RS485: 1 MBaud</li> </ul>

Parameter	Characteristics
Slave DSP subsystem	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ Texas Instruments TMS320F240 DSP</li> <li>◦ 16-bit fixed-point processor</li> <li>◦ 20 MHz clock frequency</li> <li>◦ 64 K x 16 external program memory</li> <li>◦ 28 K x 16 external data memory</li> <li>◦ 4 K x 16 dual-port memory for communication</li> <li>◦ 16 K x 16 flash memory</li> <li>◦ 1 x 3-phase PWM output</li> <li>◦ 4 x 1-phase PWM output</li> <li>◦ 4 capture inputs</li> <li>◦ SPI (serial peripheral interface)</li> <li>◦ Max. 14-bit digital I/O</li> <li>◦ TTL output/input levels for all digital I/O pins</li> <li>◦ <math>\pm 13</math> mA maximum output current</li> </ul>
Host interface	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 32-bit PCI host interface</li> <li>◦ 5 V PCIslot</li> <li>◦ 33 MHz <math>\pm 5</math> %</li> </ul>
Physical size	PCI 185 x 106.68 mm (7.28 x 4.2 in)
Ambient temperature	0 ... 55 °C (32 ... 131 °F)
Cooling	Active cooling by fan
Power supply	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ +5 V <math>\pm 5</math> %, 2.5 A</li> <li>◦ +12 V <math>\pm 5</math> %, 0.3 A</li> <li>◦ -12 V <math>\pm 5</math> %, 0.2 A</li> </ul>
Power consumption	18.5 W

## C.2. CLP1104

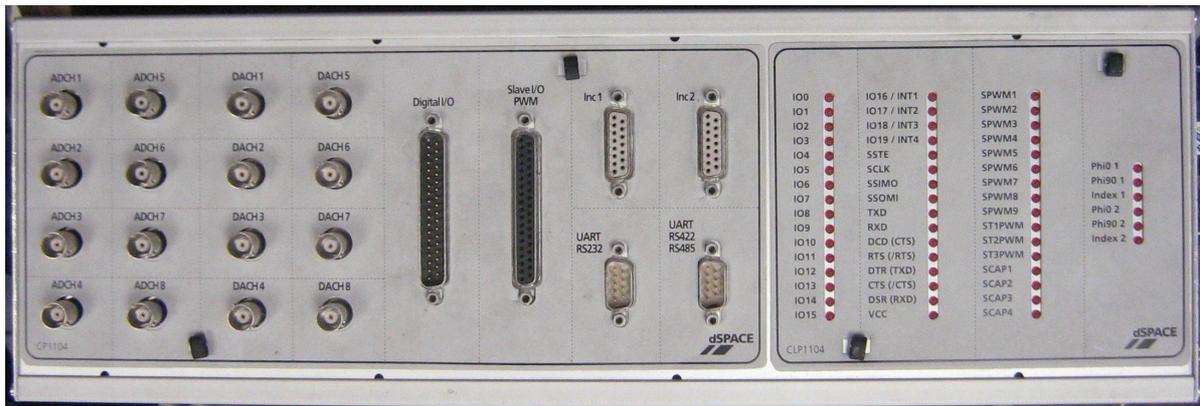


Figura C.2: Panel de conexiones CLP1104.

### CLP1104 Data Sheet

#### Technical data

The following table shows the data sheet of the CLP1104 Connector/LED Combi Panel.

Parameter	Characteristics
Power consumption	5 V; max. 100 mA (via DS1104 board)
Grounding	The enclosure and the front panel are not grounded.
Cable length	2 m (6.6 ft) standard
Physical size (with desktop enclosure) (length x depth x height)	433.5 x 142.5 x 70 mm (17.07 x 5.61 x 2.75 in)
Space needed for 19" rack mount	Height 3 U; width 16.8"
Weight	Approx. 2.5 kg (5.5 lbs); incl. enclosure and shielded ribbon cables

# Apéndice D

## Desarrollo de la función arctan en Simulink

Cabe mencionar que en todos los experimentos presentados en esta sección, el robot móvil realiza su tarea en dirección de reversa y no de frente, esto se debe a las características del controlador presentado en la ecuación (3.8) y más específicamente por la ecuación (3.10), donde se ve que si el móvil parte del origen y el valor de  $x^*$  y  $y^*$  son mayores a 0, entonces se tendrá que en la función arctan se presente un número negativo en el numerador y denominador, esto hace referencia que el ángulo deseado está en el tercer cuadrante.

Si se utilizó el bloque de la función arctan, que tiene por defecto Simulink, se asumirá que tanto el numerador y denominador son negativos por lo tanto realiza el cálculo de un valor positivo dando como resultado una dirección deseada  $\phi^*$  del robot móvil en el primer cuadrante, lo cual no es cierto y también ocasiona errores en el seguimiento de la trayectoria cuando el móvil pasa por  $\pi/2$ . En la Figura D.1(a) se muestra lo mencionado anteriormente. En contra parte, se codificó una función en un bloque Embedded de Simulink para el cálculo de la función arctan donde se superan estos problemas que presenta el cálculo de la dirección deseada. A continuación se presenta el código desarrollado para el cálculo de la función.

```
if (y-yd)>=0
    if (x-xd)>0
        atnfunc=atan((y-yd)/(x-xd));
    else
        if (x-xd)==0
            atnfunc=pi/2;
        end
        atnfunc=pi-atan((y-yd)/abs(x-xd));
    end
else
    if (x-xd)>=0
```

```

atnfunc=-atan(abs(y-yd)/(x-xd));
else
    if (x-xd)==0
        atnfunc=-pi/2;
    end
    atnfunc=atan(abs(y-yd)/abs(x-xd))-pi;
end
end
end

```

En la Figura D.1(b) se muestra el desempeño del controlador en el seguimiento de una trayectoria con la función arctan modificada para superar los errores que presentaba.

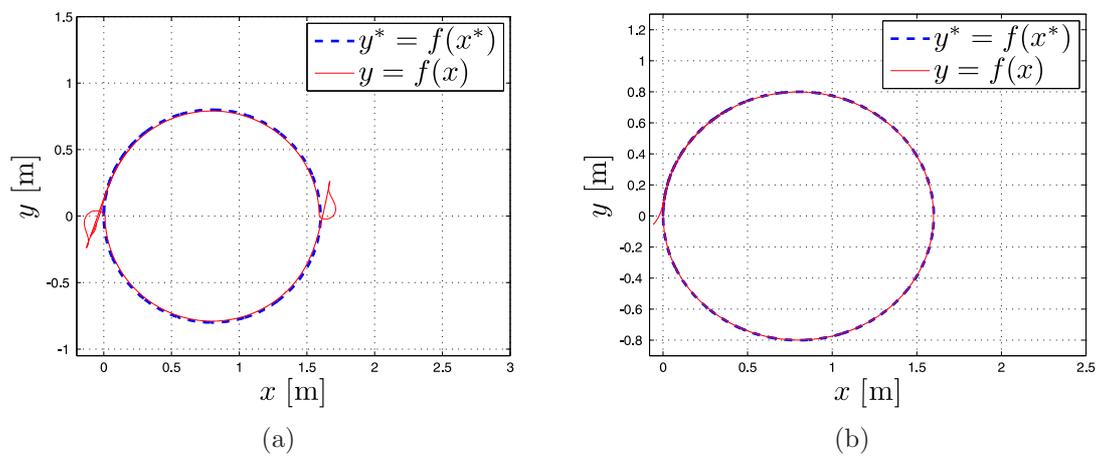


Figura D.1: Pruebas de la función arctan en el controlador para el seguimiento de una trayectoria