



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco**

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

“Súper Caída Libre en Conos”

Presenta:

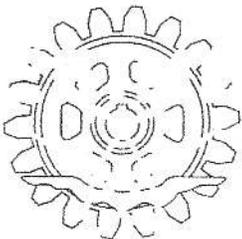
Ing. Ayax Hernando Torres Victoria

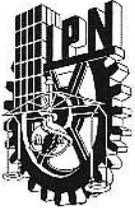
DIRECTOR:

DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO



MÉXICO D. F. JUNIO DEL 2011





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D.F. siendo las 14 horas del día 28 del mes de Junio del año 2011, se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME- Unidad Profesional Azcapotzalco para examinar la tesis titulada:

Súper Caída Libre en Conos

Presentada por el alumno:

Torres

Apellido paterno

Victoria

Apellido materno

Ayax Hernando

Nombre(s)

Con registro:

A	1	0	0	5	8	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante :

al Grado de Maestro en Ciencias en Termofluidos

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA DEFENSA DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Abraham Medina Ovando

Primer vocal

Dr. Abel López Villa

Segundo vocal

M en C. José Rubén Aguilar Sánchez

Secretario

Dr. Erick Emanuel Luna Rojero

Tercer vocal

Dr. Alejandro Zacarías Santiago

Presidente

Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar

Suplente

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Jaime Pacheco Martínez





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 29 del mes de julio del año 2011, el que suscribe Ajax Hernando Torres Victoria alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Termofluidos con número de registro A100585, adscrito a Unidad de Posgrado Esime Azcapotzalco manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Abraham Medina Ovando y cede los derechos del trabajo intitulado "Súper Caída Libre en Conos", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección higherintellect@hotmail.com y amedina@ipn.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Ajax Hernando Torres Victoria
Nombre y firma

Part I

Resumen

Nosotros hemos analizado y caracterizado la superficie libre de una columna de líquido que es liberada en reposo en un tubo. Y el otro contenedor placas paralelas cuya sección transversal se incrementa en dirección hacia abajo en dictinción con el trabajo de Villermoux y Pomeau (2010) para un contenedor conico, tenemos dos tubos con áreas diferentes $a_u > a_b$ en la parte media tenemos una transición muy marcada debido a la diferencia de áreas y de las placas compuestas inclinadas. para tiempos pequeños en el cual los efectos viscosos son despreciados, la superficie libre que se mueve hacia abajo con una aceleración mayor a la gravedad. la existencia de un niple en la superficie libre (en placas planas) con amplitud que se incrementa como función del tiempo, es un modelo en una sola dirección con una aceleración instantánea inicial, las paredes que se expanden (no en el tubo) la súper caída libre se reproduce muy bien.

1 Abstract

We have analyzed experimentally the characteristics of the upper free surface of a liquid column released from the rest in a vertical container (tube). In the other container (parallel plates) whose cross-section varies slowly in the downward direction in distinction with the work of Villermaux and Pomeau (2010) for a conical container, we have two tubes interconnected with different areas $a_u > a_b$ and in the middle a great transition due to the difference of areas and a composed of a slightly inclined flat surfaces. At small times for which viscous effects can be neglected, the free surface moves downward with an acceleration larger than gravity. The existence of a nipple centered on the upper free surface (flat plates) with amplitude an increasing function of time is observed, a one dimensional model of initial acceleration, walls expanding (not in tube) reproduces the observed super free fall fairly well.

Índice general

1. 1. Introducción	1
2. Súper caída libre en sistemas mecánicos	3
2.1. Introducción	3
2.2. Modelo de la cadena que cae y sus ecuaciones de movimiento.	4
2.3. Experimentos numéricos	6
3. Súper caída libre (Villaermaux y Pomeau)	10
3.1. Introducción	10
3.2. Desarrollo experimental y observaciones	11
3.3. Caída libre con sección transversal variable	12
4. Modelo para pequeños cambios en el ángulo	16
4.1. Introducción	16
4.2. Modelo teórico	16
4.3. Solución numérica	19
4.4. Conclusiones	23
5. Experimentos Cualitativos	25
A. Desarrollo del modelo Teórico	27
A. Apéndice II	31
A. Apéndice 3	32
B. Bibliografía	34

Índice de figuras

2.1. Representación esquemática de el modelo; φ_i corresponde a el ángulo de inclinación, m la masa de cada segmento de la cadena, y g es la aceleración gravitacional.	4
2.2. Figura 5. Comparación de las distancias de las componentes vertical h y horizontal w del extremo de la cadena cayendo encontradas experimentalmente (círculos) y numéricas (líneas sólidas). La parábola característica de la caída libre es además mostrada (líneas punteadas). La separación inicial entre los extremos de la cadena es la misma que en la figura 2.3[].	7
2.3. Figura 2.3. Tomas sucesivas referentes a diferentes experimentos de la cadena que cae en contra del tiempo. El extremo final izquierdo permanece fijo en las tomas, cuando el extremo derecho se encuentra en caída libre debido a la gravedad en diferentes tiempos. Para (b), (c) y (d), las líneas blancas han sido añadidas a la secuencia fotográfica para conectar el extremo final de la cadena en caída libre justo antes de que esta desarrolle su máxima extensión. La longitud $L = 1,0022m$, el tiempo tomado entre las imágenes sucesivas es $1/50s$, y la separación inicial entre los extremos de la cadena es (a) $x_o = 1,019m$ (b) $0,765m$ (c) $0,510m$ y (d) $0,255m$	8
3.1. Caída libre de un balón de acero en comparación con la superficie libre del líquido en el Tubo 1, con etanol. Las fotografías están igualmente espaciadas en tiempo.	12
3.2. La trayectoria de la superficie libre (o) en rojo, y la del balón (o) en negro referentes al experimento mostrado en la figura 3.1, utilizando el tubo 1. La trayectoria del balón está gobernada por $\dot{h}(t) = -g \text{ cong} = 9,81m s^{-2}$, y la superficie libre por $\ddot{h}(t) = -g/(1 - \beta)$ con $\beta = 0,33$ (ver Tabla 1).	13
4.1. Proyección bidimensional de una probeta cónica vertical llenada con un líquido invíscido. En la figura se muestra el sistema coordenado y las posiciones de la superficie libre superior ($z=H2(0)$) y la superficie libre inferior ($z=H1$) la cual aparece cuando la probeta es súbitamente abierta.	17

4.2. Figura 4.2 Velocidades adimensionales instantáneas de las superficies libres, ξ' , como función del tiempo τ . Las diferentes curvas corresponden a las posiciones iniciales de ξ	20
4.3. Figura 4.3 Velocidades instantáneas de las superficies libres ξ' , como funciones del tiempo. Los diferentes valores corresponden a las posiciones iniciales de ξ	21
4.4. Figura 4.4 Gráficas de las aceleraciones instantáneas de las superficies libres, g^*/g , como funciones del tiempo. Las gráficas corresponden a los casos dados en la figura 4.1	21
4.5. Figura 4.5 Gráfica de las aceleraciones instantáneas de las superficies libres como función de la posición.	22
4.6. Figura 4.6 Gráficas de la aceleración promediada de la superficie libre, $\langle g^* \rangle/g$, como función de la posición inicial de la superficie libre H_2	23
5.1. Gráficas log-log de los resultados experimentales mostrando valores de posición en función del tiempo.	26

Índice de cuadros

Capítulo 1

1. Introducción

En la presente tesis estudiaremos el comportamiento de la superficie libre de una columna de líquido confinada en una geometría de sección transversal variable para este caso cónica, la cual es dejada caer súbitamente aguas abajo desde la condición inicial de reposo, mediante la apertura de la parte inferior de la probeta. Para este trabajo hemos confrontado dos importantes desarrollos teóricos. Además analizaremos el fenómeno mediante el desarrollo de un modelo experimental apoyado de una cámara rápida.

Ahora como parte fundamental para entender el por qué se da el fenómeno de supercaída libre en sistemas que se encuentran únicamente bajo la acción de la gravedad, primero estudiaremos el problema en sistemas mecánicos.

Consideremos una cadena de longitud L sujeta por ambos extremos de forma horizontal. Cuando uno de los dos extremos es soltado, la cadena comienza a caer debido únicamente a la acción del campo gravitacional. Además si la distancia inicial entre los dos extremos es más cercana a L , es decir, cuando la cadena es inicialmente desplegada a su máxima longitud, el movimiento vertical de la punta de la cadena se comporta idénticamente al de un cuerpo sujeto a caída libre [1]. Sin embargo, cuando la separación Δl entre los extremos de la cadena es mucho menor a L , es decir que cuando la cadena se encuentra ciertamente plegada y un extremo es soltado, el extremo de la cadena logrará, una aceleración que es mayor a la aceleración de la gravedad g , es decir que el extremo de la cadena logrará una súpercaída libre. Todos estos resultados han sido confirmados experimentalmente así como con simulaciones numéricas [1] [2].

Por otro lado, el problema de caída libre de la masa de un líquido de baja viscosidad confinado en una geometría expandida suavemente (cónica) [3] es analizado. Para este caso, recientemente se ha encontrado que el movimiento de la superficie libre de un líquido logra una aceleración efectiva que sobrepasa la aceleración debida a la gravedad [3]. Ellos han argumentado que el movimiento en una geometría cónica superacelera

el fluido aguas abajo debido a la fuerza originada por un gradiente de presión positiva localizado en la interface superior. Así, la fuerza de presión agregada a las fuerzas de cuerpo gravitacionales induce este tipo de movimiento.

El modelo teórico aquí desarrollado, basado en la aproximación de pendientes pequeñas (slender-slope), permite mostrar que esta condición es innecesaria. En cambio, encontramos que los diferentes niveles relativos de llenado son muy importantes para obtener superaceleración en esta geometría.

Capítulo 2

Súper caída libre en sistemas mecánicos

2.1. Introducción

El problema de cuerpos cayendo bajo la acción del campo gravitacional es tan viejo que es difícil imaginar algo nuevo para ser agregado. Sin Embargo, el desarrollo de métodos de simulación han permitido el estudio de unos cuantos pero interesantes casos que difícilmente podrían ser analizados analíticamente. La dinámica de la cadena que cae está entre estos.

En este trabajo, describiremos los resultados de experimentos análogos a los presentados por [2]. Para la conformación inicial, los extremos de la cadena de longitud L se encuentran localizados al mismo nivel pero su separación horizontal Δx es variable. Del desarrollo de nuestros experimentos seremos capaces de extraer datos cuantitativos acerca del comportamiento de la velocidad y la aceleración del extremo de la cadena con respecto al tiempo. Es claro que nuestro modelo no es válido para valores largos de Δx . Para superar esta dificultad, hemos formulado las ecuaciones ompletas de movimiento para la cadena y las hemos integrado numéricamente, llegando así a una comparación cuantitativa entre los resultados numéricos y experimentales. Así demostraremos para el caso (que no ha sido estudiado antes) en el cual la distancia inicial entre los extremos de la cadena es muy cercano a L , que es, cuando la cadena está inicialmente estirada a su máxima longitud, es muy interesante debido a que el movimiento vertical de la cadena es idéntico al de un cuerpo en caída libre.

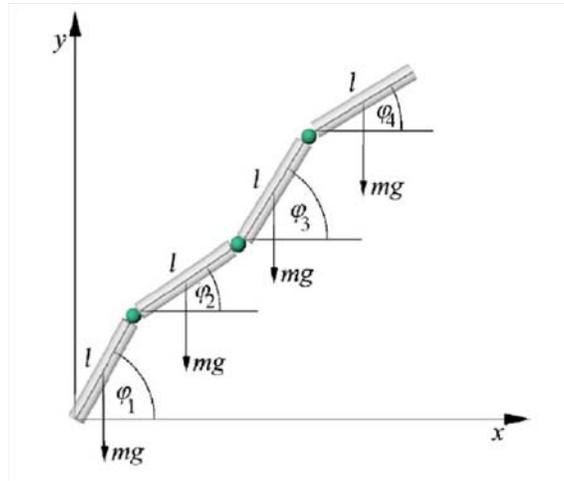


Figura 2.1: Representación esquemática de el modelo; φ_i corresponde a el ángulo de inclinación, m la masa de cada segmento de la cadena, y g es la aceleración gravitacional.

2.2. Modelo de la cadena que cae y sus ecuaciones de movimiento.

Podemos definir ahora algunos modelos de la cadena; en lo sucesivo, presentaremos uno de ellos. Sus ecuaciones de movimiento serán formuladas para el caso para el cual uno de los extremos de la cadena está sujeto a un soporte fijo y el otro se encuentra libre.

El extremo final de la cadena se mueve bajo la acción de el campo gravitacional. Para simplificar el modelo, asumiremos primero que la cadena está diseñada para moverse únicamente sobre el plano vertical denotado por (x,y) . La cadena tiene una masa M , longitud L , y consiste de n número de eslabones cilíndricos delgados con masas individuales $m_i = m = M/n$, $i = 1..n$, y longitudes $l_i = l = L/n$. Todos los segmentos son considerados rígidos y no pueden ser deformados. Segmentos consecutivos están conectados por juntas y desarrollan fricción. La Figura 2.1 muestra la representación geométrica de nuestro modelo.

Para formular las ecuaciones de movimiento, debemos de especificar nuestras coordenadas generales. Siguiendo el trabajo de Robson [4] describiremos nuestro sistema utilizando coordenadas angulares indicando la inclinación de los segmentos consecutivos con respecto al eje horizontal x .

La posición del primer elemento es determinada por el ángulo φ_1 . Similarmente, la posición del segundo elemento es descrita por el ángulo φ_2 La conformación global

de la cadena en el plano es únicamente expresada por los ángulos φ_i , $i = 1 \dots n$.

Las coordenadas cartesianas de el *iavo* centro de masa (x_i, y_i) pueden ser escritas como:

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} l \cos \varphi_j + \frac{1}{2} l \cos \varphi_i. \quad (2.1)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} l \sin \varphi_j + \frac{1}{2} l \sin \varphi_i. \quad (2.2)$$

Utilizaremos las coordenadas generalizadas φ_i para derivar las ecuaciones Lagrangianas de movimiento. El movimiento de la cadena es considerado una combinación de movimientos de rotación y de traslación en cada segmento. Cada segmento tiene un momento de inercia $I_i = 1/12ml^2$ calculado alrededor del eje perpendicular a el plano (x, y) y pasando a través del centro de masa del segmento. Si tomamos en consideración las relaciones dadas en las ecuaciones 2.1 y 2.2, la energía cinética de la cadena está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [m(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + I_i \dot{\varphi}_i^2], \quad (2.3)$$

donde el punto representa la derivada con respecto a el tiempo t . La energía potencial del *iavo* segmento está dada por mgy_i , donde g es la aceleración debida al campo gravitacional. Así la energía potencial de la cadena podría expresarse como:

$$U = \sum_{i=1}^n mgy_i, \quad (2.4)$$

Para hacer nuestro modelo más general, introduciremos amortiguaciones a través de de la función de disipación de Raleigh:

$$R = \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^n (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1})^2, \quad (2.5)$$

donde r es el coeficiente de disipación. Asumimos también que las juntas que conectan al primer elemento del soporte de la cadena están libres de disipación, lo cual es equivalente a asumir que $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_1$. Una condición similar de disipación ha sido utilizada.

El movimiento de la cadena que cae es gobernado por el sistema de las Ecuaciones de Lagrange de segunda clase:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0, \quad (i = 1 \dots n) \quad (2.6)$$

donde $\mathcal{L} = T - U$ que es el Lagrangiano del sistema. Aplicando las ecuaciones 2.3 a la 2.6, encontramos un set de n ecuaciones describiendo el movimiento de la cadena:

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} c_{i,j} \ddot{\varphi}_j = - \sum_{j=1}^n m_{i,j} s_{i,j} \dot{\varphi}_j^2 + \frac{r}{ml^2} (\dot{\varphi}_{i-1} - 2\dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_{i+1}) - \frac{g}{l} a_i c_i \quad (2.7)$$

donde $c_i = \cos(\varphi_i)$, $c_{i,j} = \cos(\varphi_i - \varphi_j)$, $s_{i,j} = \sin(\varphi_i - \varphi_j)$,

$a_i = n - i + \frac{1}{2}$, además:

$$m_{i,j} \left\{ n - i + \frac{1}{3}, \quad (i=j) \right\}$$

y

$$m_{i,j} \left\{ n - \max(i, j) + \frac{1}{2}, \quad (i \neq j) \right\}$$

2.3. Experimentos numéricos

Las ecuaciones de movimiento en la ecuación 2.7 pueden ser integradas numéricamente, de este modo permitiéndonos simular el movimiento de la cadena cayendo. En la presencia de disipación, el sistema resultante de ecuaciones se convierte rígido y requiere métodos numéricos específicos. Hemos seleccionado el algoritmo RADAU5 desarrollado por Harrier y Wanner [5]. Este algoritmo está basado en un esquema implícito del método de Runge-Kutta de orden cinco con una estimación de error del orden 4.

Ahora analizaremos la relación entre la dependencia del tiempo de las distancias verticales en la caída del extremo de la cadena de la figura 3.3 . Nótese que en el caso (a), donde la conformación inicial de la cadena es casi horizontal, así la caída vertical del extremo de la cadena es idéntica a la de la caída libre, habiendo logrado su máxima elongación el extremo final de la cadena comienza a subir. Esta observación se vuelve más clara cuando notamos que durante la caída el extremo final se mantiene horizontal. El extremo final de la cadena permanece horizontal debido a que la cadena no muestra elasticidad y no hay energía almacenada en las regiones curvadas. Este fenómeno, encontrado experimentalmente y confirmado por simulaciones sugiere la existencia de un tratamiento analítico apropiado para el problema. Sin embargo, aún no podemos formular una solución analítica para el problema.

Para los casos (b),(c) y (d) la distancia vertical en la caída del extremo de la cadena, hasta el tiempo en que la distancia de la punta de la cadena alcanza su máximo valor $t_{h_{\max}}$, esto es visto por delante de la caída libre vertical de la masa de equilibrio, esta observación a veces es resumida por lo general que la caída de la cadena es mucho mas rápida que la caída libre.

Figura 2.2: Figura 5. Comparación de las distancias de las componentes vertical h y horizontal w del extremo de la cadena cayendo encontradas experimentalmente (círculos) y numéricas (líneas sólidas). La parábola característica de la caída libre es además mostrada (líneas punteadas). La separación inicial entre los extremos de la cadena es la misma que en la figura 2.3[].

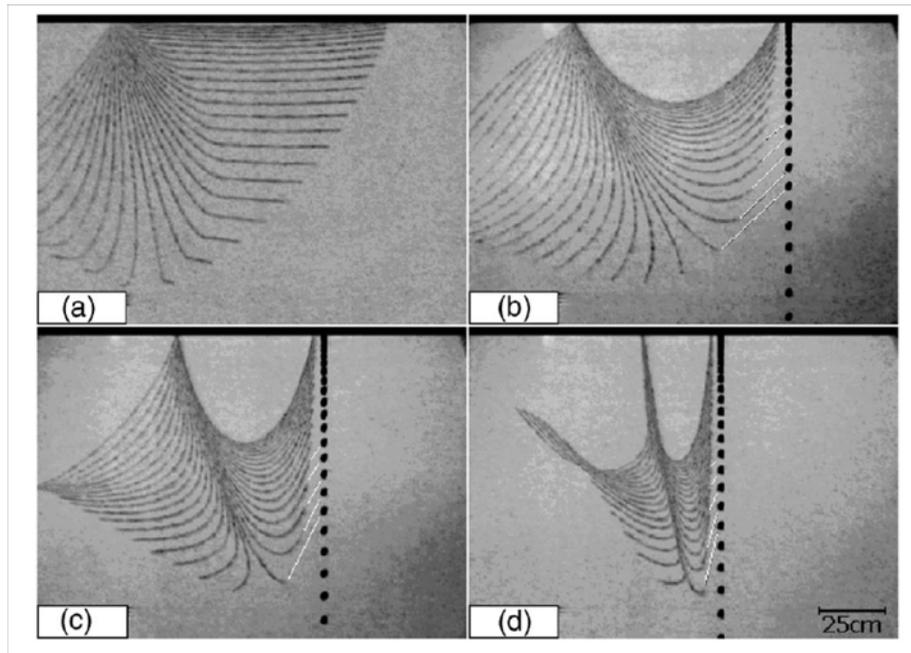


Figura 2.3: Figura 2.3. Tomas sucesivas referentes a diferentes experimentos de la cadena que cae en contra del tiempo. El extremo final izquierdo permanece fijo en las tomas, cuando el extremo derecho se encuentra en caída libre debido a la gravedad en diferentes tiempos. Para (b), (c) y (d), las líneas blancas han sido añadidas a la secuencia fotográfica para conectar el extremo final de la cadena en caída libre justo antes de que esta desarrolle su máxima extensión. La longitud $L = 1,0022m$, el tiempo tomado entre las imágenes sucesivas es $1/50s$, y la separación inicial entre los extremos de la cadena es (a) $x_o = 1,019m$ (b) $0,765m$ (c) $0,510m$ y (d) $0,255m$.

Por lo tanto nuestros experimentos indican que cuando la conformación inicial de la cadena es plegada, la aceleración del extremo suelto de la cadena cayendo es siempre más alta que g . La explicación es dada por la conservación de la energía. La cadena cayendo es dividida en dos partes: El extremo fijo por un lado y el otro extremo que cae por la acción de la gravedad. Por último podríamos decir que el mismo experimento utilizando una sogá exhibiría también gran interés, debido a que la disipación jugaría un rol importante junto con la elasticidad que se convertiría en un factor crucial.

Capítulo 3

Súper caída libre (Villaermaux y Pomeau)

3.1. Introducción

¿Puede un objeto, únicamente movido por fuerzas gravitacionales, caer más rápido que la gravedad?. La respuesta podría ser no, pero un análisis más detallado muestra que la respuesta correcta es obviamente si. En un sistema conservativo, si la energía disponible es concentrada en una pequeña fracción de la masa del sistema, esta acelerará sin límites. Esto es, por instancia, el caso de la cadena que cae (Calkin & March 1989 [2]; Schager [6], Steindl & Troger [7]) donde la aceleración del extremo final de una cadena plegada que al ser soltada diverge de la gravedad al final de la caída.

Súperaceleraciones espontáneas en fluidos movidos por la gravedad no han sido exploradas intensamente, incluyendo trabajos experimentales, con la notable excepción de Penney & Price [9]. Dichos autores estudiaron la forma y dinámica de una onda gravitacional bidimensional, y encontraron que en la cresta de la onda se extendía de manera afilada, la cual se esperaba que cayera más rápido que la gravedad, situación que fué llamada "físicamente insostenible". Taylor [10] confirmó experimentalmente algunas de estas predicciones, y notó una fuerte inestabilidad al momento en que la cresta de la onda se extendía afiladamente, asumiendo que el problema era de carácter tridimensional. Aceleraciones mas grandes que g pueden ser posibles en circunstancias especiales (Clavin & Williams [?]; Duchemin [8]). Aquí gracias a un experimento especialmente diseñado mostramos que las súperaceleraciones pueden ocurrir como resultado de combinar la inercia y una geometría apropiada.

3.2. Desarrollo experimental y observaciones

La idea de nuestro experimento es simple: consideremos una columna uniforme de fluido en caída libre dentro de un tubo cilíndrico vertical. En la ausencia de viscosidad, su aceleración será exactamente g . Supongamos ahora que el tubo tiene una sección transversal no constante. Hagamos esta sección transversal casi constante, igual a a_b en la parte inferior del tubo y a_u en la parte superior del tubo donde $a_u < a_b$. Después el tubo es llenado con un fluido invíscido, abrimos súbitamente la parte inferior a la atmósfera donde la sección transversal es mas grande, la sección transversal superior permanecr siempre abierta. Debido a que $a_u < a_b$, la aceleración será dominada por la mayor masa de fluido, es decir la masa que llena la parte inferior del tubo. El fluido se encontrará entonces en caída libre, con una aceleración "aguas abajo" muy cercana a g . Debido a la conservación de masa, y haciendo valer la condición de mojado (es decir el líquido es forzado a pegarse a la pared del tubo), la aceleración "aguas abajo" del fluido en la superficie libre de este será $g(a_u < a_b)$, mas grande que g . Experimentalmente, sin embargo, esta idea no puede ser realizada de manera tan simple. Los fluidos reales son viscosos y una discontinuidad de la sección transversal será la mayor fuente de disipación a un no despreciable número de Reynolds. Prácticamente el factor generado por un incremento súbito de lla sección-transversal es sobrelanceado por la disipación cercana a la discontinuidad. Hemos elegido por consiguiente una expansión suave en la sección transversal del tubo, con una tasa de expansión menor al 10%. Una tasa de expansión mayor incrementaría el crecimiento y separación de la capa de la frontera viscosa a lo largo de las paredes del tubo, y harían que prácticamente el fenómeno desapareciera.

Utilizamos dos diferentes líquidos, agua y etanol, además de dos tubos de vidrio. Nuestros tubos cónicos será caracterizado por su ángulo de apertura α , el radio en la parte inferior $R(0)$ y el radio referente a la altura de llenado $R(h(0))$ detallados en la tabla 1 (ver además la figura 3)

	$\tan(\alpha)$	$R(0)(cm)$	$\beta = 1 - R(h(0))/R(0)$
Tubo 1	0.03	3.3	0.33
Tubo2	0.07	3.7	0.52

Tabla 1. Geometría de dos tubos cónicos de vidrio usados en los experimentos

El experimento consiste en abrir abruptamente la parte inferior del tubo que ha sido llenado anteriormente con un líquido. Como se puede observar en la figura 1, el tiempo de vaciado del tubo es mas corto que el esperado por pura gravedad: la comparación

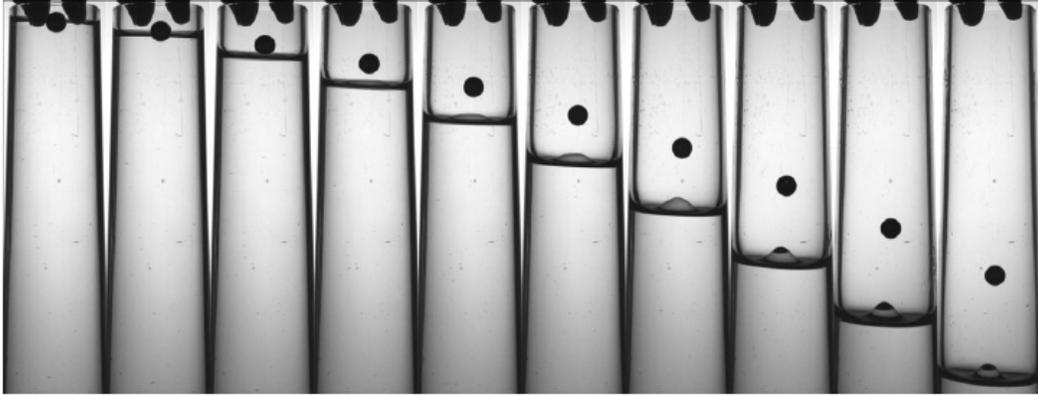


Figura 3.1: Caída libre de un balón de acero en comparación con la superficie libre del líquido en el Tubo 1, con etanol. Las fotografías están igualmente espaciadas en tiempo.

con la caída libre de un balón grabada y sobrepuesta con la del fluido muestra que la superficie libre del fluido precede a la del balón. La trayectoria del balón exhibe la parábola característica, la parábola formada por superficie libre del fluido experimenta aparentemente una curvatura mayor (figura 2), signo de superaceleración. Además es visible en las fotografías instantáneas una pequeña protuberancia centrada que se incrementa como función del tiempo. La siguiente sección intentará describir este fenómeno.

3.3. Caída libre con sección transversal variable

Guiados por nuestras observaciones, las ecuaciones dinámicas de las que partimos son para el componente vertical $\omega(r, z, t)$ y para el componente radial $u(r, z, t)$ las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas, sin dependencia azimutal. Las variables de posición son la coordenada vertical z (apuntando hacia arriba) y el radio r . Las ecuaciones del fluido para ω y u siendo p la presión, ρ la densidad del fluido y g la aceleración de la gravedad apuntando hacia abajo:

$$\partial_t \omega + \omega \partial_z \omega + u \partial_r \omega = -\partial_z p / \rho - g \quad (3.2)$$

$$\partial_t u + \omega \partial_z u + u \partial_r u = -\partial_r p / \rho \quad (3.3)$$

$$r \partial_z \omega + \partial_r (ru) = 0 \quad (3.4)$$

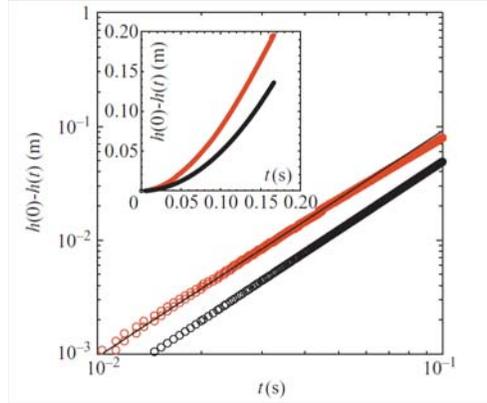


Figura 3.2: La trayectoria de la superficie libre (o) en rojo, y la del balón (o) en negro referentes al experimento mostrado en la figura 3.1, utilizando el tubo 1. La trayectoria del balón está gobernada por $\ddot{h}(t) = -g$ con $g = 9,81m s^{-2}$, y la superficie libre por $\ddot{h}(t) = -g/(1 - \beta)$ con $\beta = 0,33$ (ver Tabla 1).

La viscosidad puede ser despreciada: para tiempos de vaciado del orden de $t=0.1$ s, el espesor típico de la frontera viscosa $\sqrt{\nu t}$ es una fracción de milímetro, mucho menor que el radio del tubo. Debido a que la sección transversal cambia lentamente como función de la distancia vertical, utilizamos la aproximación de pendientes suaves "slender slope approximation". Ahora consideramos la dinámica de la velocidad vertical promediada sobre la sección transversal de área $a(z)=\pi R^2(z)$:

$$\omega(z, t) = \frac{2}{R^2(z)} \int_0^{R(z)} r\omega(r, z, t) dr \quad (3.5)$$

la cual de 3.4 y con la condición cinemática en la pared del tubo $dR / dt = \partial_t R + \omega(R, z, t)\partial_z R$ nos da:

$$\partial_t R^2 + \partial_z(\omega(z, t)R^2) = 0 \quad (3.6)$$

Siendo el tubo rígido, con radio $R(z)$ independiente del tiempo, encontramos de 3.6 que solamente el flujo vertical depende del tiempo

$$j(t) = a(z)\omega(z, t) \quad (3.7)$$

es constante a lo largo de z .

Llevando a cabo la aproximación de pendientes suaves, las ecuaciones de Euler ceden a una ecuación para $\omega(z, t)$ la cual se escribe, junta con sus condiciones de frontera cuando el tubo es abierto en $z=0$ y en la interface superior en $z=h(t)$,

$$\partial_t \omega + \omega \partial_z \omega + u \partial_r \omega = -\partial_z p / \rho - g \quad (3.8)$$

con $p(0) = p(h(t)) = 0$

$$\partial_z(a(z)\omega) = 0 \quad (3.9)$$

Denotando $dh(t)/dt = h'$ y del flujo constante $j(t)$, tenemos:

$$\omega(z, t) = \frac{a(h)}{a(z)} h', \quad (3.10)$$

Insertando la expresión de arriba para $w(z,t)$ dentro de 3.8 tenemos que:

$$\frac{a(h)}{a(z)} h'' - \frac{a^2(h) \partial_z a}{a^3(z)} (h')^2 = -\frac{1}{\rho} \rho - g, \quad (3.11)$$

Integrando entre $z=0$ y $z=h(t)$ y con la condición de la presión igual a cero en estas dos fronteras, 3.11 cede a la clásica solución (Paterson 1983):

$$\left(a(h) \int_0^h \frac{dz}{a(z)} \right) h'' + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a(h)^2}{a(0)^2} \right) (h')^2 = -gh. \quad (3.12)$$

Esto mismo cede a la condición de caída libre para $a(z)=a(0)$ constante. Comenzando desde el reposo ($h'(t=0)=0$) 3.12 prediciendo que la aceleración inicial de la interface será:

$$h'' = -g \frac{h}{a(h) \int_0^h \frac{dz}{a(z)}} \quad (3.13)$$

Esta aceleración es mas grande (en valor absoluto) que la aceleración provista por la gravedad:

$$\frac{h}{a(h)} > \int_0^h \frac{dz}{a(z)} \quad (3.14)$$

Una condición cumplida cuando el área de la sección transversal $a(z)$ decrece a mayores elevaciones. El origen de esta superaceleración es fácilmente entendido desde la estructura del campo de presiones inducido por el movimiento del fluido. Insertando la dinámica para tiempos iniciales de 3.13 dentro de 3.11, vemos que el gradiente de presión a tiempos iniciales es:

$$\frac{\partial_z p}{\rho g} = \frac{h}{a(z) \int_0^h \frac{dz}{a(z)}} - 1 \quad (3.15)$$

Cuando la condición en 3.14 se cumple, que es cuando la interface superior acelera, el gradiente de presión en la interface para $z=h(t)$ es positivo, demostrando que el

fluido es succionado "aguas abajo", con una fuerza debida a la presión sumándose a las fuerzas de cuerpo gravitacionales. Recíprocamente, el fluido es frenado en la interface inferior donde, como puede ser visto en 3.15, $\partial_z p$ es negativa. Para un área $a(z)$ disminuyendo suavemente con z , la presión $p(z,t)$ es negativa en todas partes. El movimiento es así acompañado por reacomodos de las partículas de fluido dentro del volumen de confinamiento las cuales están obligadas a llenarlo debido a la condición de adherencia. Como esperábamos, la consecuencia es un movimiento mas lento en la sección de mayor área en el volumen, y un movimiento mas rápido en la región mas cercana a la superficie libre.

Para el caso de tubos cónicos divergentes con un ángulo constante α como los usados en los presentes experimentos con radio $R(z) = R(0) - z \tan \alpha$, tenemos

$$a(z) = a(0)(1 - \beta z/h(0))^2 \quad (3.16)$$

con $a(0) = \pi R^2(0)$

donde:

$$\beta = \frac{h(0)}{R(0)} \tan \alpha = 1 - \frac{R(h(0))}{R(0)} \quad (3.17)$$

con $h(0)$ como la altura inicial a la que el tubo es llenado en $t=0$. Como el tubo es mas estrecho en la parte superior, $0 < \beta < 1$. De 3.13 y 3.15 tenemos para este caso que:

$$h''|_{t=0} = -\frac{g}{1 - \beta} \quad (3.18)$$

y

$$\frac{\partial_z p}{\rho g}|_{z=h(0)} = \frac{\beta}{1 - \beta} > 0 \quad (3.19)$$

Para los tubos mostrados en la tabla 1, la aceleración a tiempos iniciales puede ser así apreciablemente más grande que la gravedad. Esto es cuantitativamente confirmado por las mediciones en la interface superior, como pueden apreciarse en la figura 2 mostrando que la trayectoria inicial no es solo del tipo gravitacional (es decir $h'' = -g$).

Capítulo 4

Modelo para pequeños cambios en el ángulo

4.1. Introducción

En este capítulo profundizaremos en el análisis de el problema de caída libre referente a una masa de líquido confinado dentro de una probeta cónica, esto mediante el estudio de un modelo alternativo al desarrollado por Villaermaux y Pomeau [3] que fue presentado en el capítulo anterior; obviamente retomando el estudio de la supercaída libre de líquidos inviscidos confinados en geometrías cónicas.

Para el desarrollo del modelo teórico se ha considerado el flujo de un líquido inviscido en un plano unidimensional.

Al final del capítulo se hará una estricta comparación de la solución analítica desarrollada por (Villaermaux y Pomeau) [3] en contra de la solución numérica obtenida del modelo aquí analizado en el presente capítulo. Cabe mencionar que los resultados obtenidos son comparados de acuerdo a probetas que se encuentran construidas en dimensiones reales.

4.2. Modelo teórico

Cuando un líquido ideal se encuentra confinado en una geometría cónica colocada de manera vertical donde la parte inferior es abierta súbitamente, la gravedad acelerará el líquido. De acuerdo a la figura 4.1 tenemos:

Ahora consideremos un líquido contenido en un tubo cónico colocado de manera vertical donde el nivel de la superficie libre $H_2(0)$ es medido desde el vértice y la posición de la salida inferior es H_1 (ver 4.1). Cuando la parte inferior del cono es abierta súbitamente el líquido cae debido a la acción de la gravedad. Así las ecuaciones de

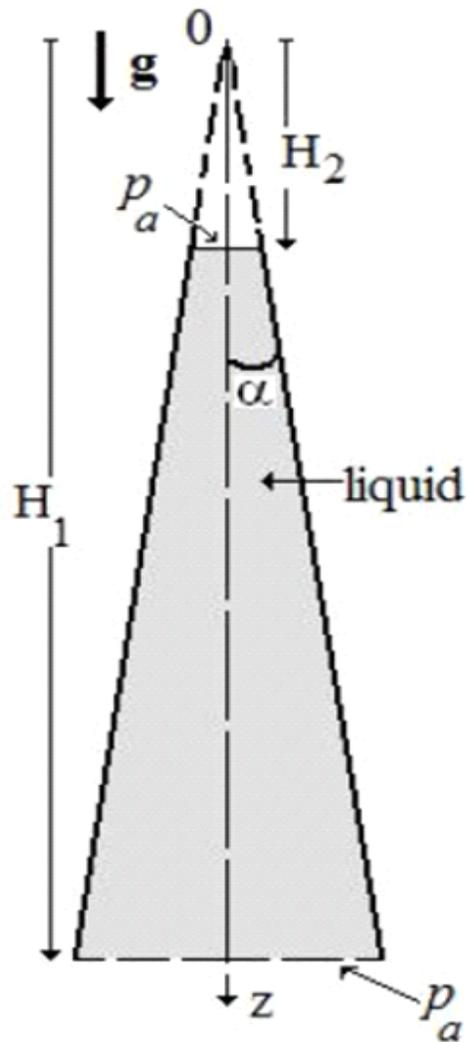


Figura 4.1: Proyección bidimensional de una probeta cónica vertical llena con un líquido inviscido. En la figura se muestra el sistema coordenado y las posiciones de la superficie libre superior ($z=H_2(0)$) y la superficie libre inferior ($z=H_1$) la cual aparece cuando la probeta es súbitamente abierta.

continuidad y momento en la aproximación de la línea suave ("slender slope approximation"), es decir cuando el ángulo de apertura α es muy pequeño, lo cual es válido para una expansión suave del tubo son ahora:

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 u) = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \quad (4.2)$$

En este caso la velocidad puede ser obtenida de la ecuación 4.1, de la forma $z^2 u = A(t)$ y de este modo:

$$u = \frac{A(t)}{z^2} \quad (4.3)$$

Utilizando este último resultado en la Eq.(4.2), tenemos que:

$$\frac{\rho}{z^2} \left[\frac{dA}{dt} - 2 \frac{A^2}{z^3} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \quad (4.4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{A(t)}{z^2} \right] + \frac{A(t)}{z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{A(t)}{z^2} \right] \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \quad (4.5)$$

si:

$$u = \frac{dH}{dt} \quad (4.6)$$

entonces integrando la ecuación 4.5

$$\int_{H_2}^{H_1} \frac{dz}{z^2} = \int_{H_2}^{H_1} z^{-2} dz = \left[\frac{z^{-1}}{-1} \right] = \left[-\frac{1}{z} \right]_{H_2}^{H_1} = \frac{-1}{H_1} + \frac{1}{H_2} = \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_1} = \frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \quad (4.7)$$

$$\int_{H_2}^{H_1} \frac{dz}{z^5} = \int_{H_2}^{H_1} z^{-5} dz = \left[\frac{z^{-4}}{-4} \right] = \left[-\frac{1}{4z^4} \right]_{H_2}^{H_1} = -\frac{1}{4H_1^4} + \frac{1}{4H_2^4} = \frac{1}{4H_2^4} - \frac{1}{4H_1^4} \quad (4.8)$$

De este modo tenemos la ecuación de momento (4.5) promediada en las alturas como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \right) - \frac{A^2}{2} \left(\frac{H_1^4 - H_2^4}{H_1^4 H_2^4} \right) = g (H_1 - H_2) \quad (4.9)$$

Como se había mencionado la velocidad de la superficie libre del líquido está dada por:

$$u = \frac{dH_2}{dt} \quad (4.10)$$

y utilizando la relación expresada en la ecuación (4.3) es fácil encontrar que:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{A(t)}{H_2^2} \quad (4.11)$$

6

$$\frac{dH_2^3}{dt} = 3A(t) \quad (4.12)$$

Una segunda derivada de la ecuación anterior nos da:

$$\frac{d^2H_2^3}{dt^2} = 3\frac{dA}{dt} \quad (4.13)$$

Así sustituyendo la ecuación (4.13) dentro de la ecuación (4.9) nos da:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{d^2H_2^3}{dt^2} \right) \left(\frac{H_1 - H_2}{H_1H_2} \right) - \frac{1}{18} \left(\frac{dH_2^3}{dt} \right)^2 \left(\frac{H_1^4 - H_2^4}{H_1^4H_2^4} \right) = g(H_1 - H_2) \quad (4.14)$$

Reacomodando términos y utilizando la identidad

$$\left(\frac{d^2H_2^3}{dt^2} \right) = 3H_2^2 \frac{d^2H_2}{dt^2} + 6H_2 \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \quad (4.15)$$

En la ecuación (4.14) finalmente encontramos que:

$$\frac{d^2H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2}g + \frac{1}{2} \left[\frac{dH_2}{dt} \right]^2 \left[\frac{1}{H_1} + \frac{H_2}{H_1^2} + \frac{H_2^2}{H_1^3} - \frac{3}{H_2} \right] \quad (4.16)$$

Esta ecuación de forma adimensional está expresada como:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^2 \left[1 + \xi + \xi^2 - \frac{3}{\xi} \right] \quad (4.17)$$

En esta última ecuación podemos notar que el término del lado izquierdo es la aceleración de la superficie libre del líquido, H_2 . Así del lado derecho aparece el término $(H_1/H_2)g$ el cual puede ser mucho más grande que g si $H_2 \ll H_1$. El segundo término tiene unidades de aceleración e involucra al cuadrado de la velocidad de la superficie libre. Esta ecuación altamente no lineal puede ser resuelta numéricamente dando condiciones iniciales de caída libre en la superficie libre en $t = 0$ y $H_2(0)$ con una velocidad inicial $(dH_2/dt)_{t=0} = 0$.

4.3. Solución numérica

La solución de la ecuación [4.17] fué obtenida utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Para demostrar los efectos del nivel de llenado ξ , en el comportamiento del líquido, tres cantidades fueron elegidas: $\xi = 0,20$, $\xi = 0,55$ y

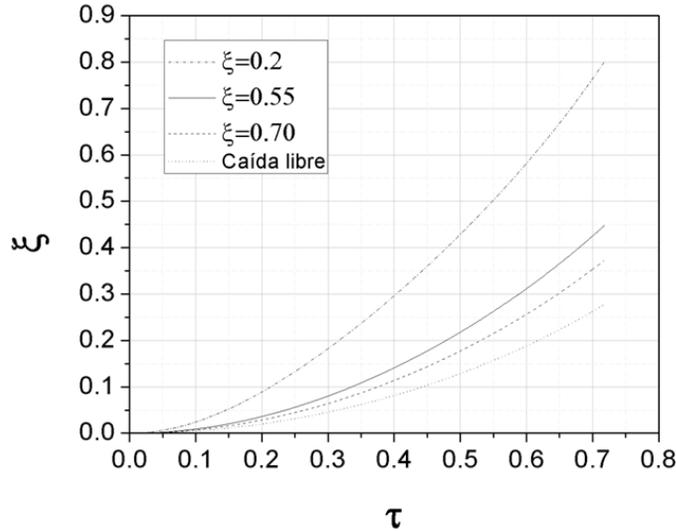


Figura 4.2: Figura 4.2 Velocidades adimensionales instantáneas de las superficies libres, ξ' , como función del tiempo τ . Las diferentes curvas corresponden a las posiciones iniciales de ξ .

$\xi = 0,70$. Nuestro primer valor $\xi = 0,20$ corresponde al valor más alto de llenado de estos tres, ya que $\xi = 0,70$ nos indica que el nivel de llenado está próximo a la salida inferior de nuestra probeta.

Como resultado en la figura 4.2 ha sido graficada la evolución espacial de las diferentes superficies libres ξ , además han sido comparadas con el caso de caída libre. De este modo podemos notar que para estos tres casos la tasa de cambio de la posición como función del tiempo es más rápida que la correspondiente a la de caída libre. Esto puede ser confirmado a través de la figuras 4.3 y 4.4 ; donde han sido graficadas las velocidades y aceleraciones correspondientes a estos tres diferentes valores de superficie libre.

De la Figura 4.3 es se podría ver que para $\xi = 0,55$ y $\xi = 0,70$ las velocidades se comportan como funciones lineales de τ . Pero como lo muestran las siguientes figuras concluiremos que al igual que para $\xi = 0,20$ estas velocidades no tienen un comportamiento lineal como lo marca el Movimiento Uniformemente Acelerado, sino que el comportamiento de la superficie libre es no lineal y por lo tanto para cualquier llenado el movimiento que experimenta la superficie libre es no uniformemente acelerado.

En la Figura 4.4 se muestran las aceleraciones en función del tiempo. Estas gráficas nos muestran de manera más precisa que la cinemática de la superficie libre para nuestros tres diferentes llenados ($\xi = 0,20$, $\xi = 0,55$ y $\xi = 0,70$) es muy compleja. En

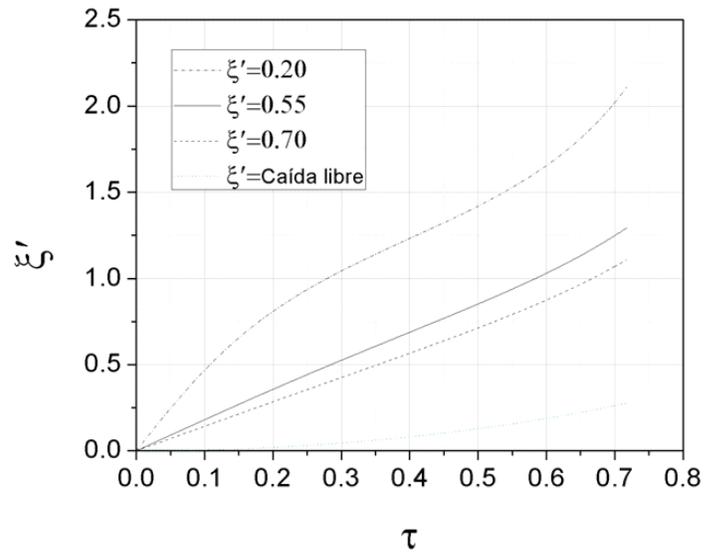


Figura 4.3: Figura 4.3 Velocidades instantáneas de las superficies libres ξ' , como funciones del tiempo. Los diferentes valores corresponden a las posiciones iniciales de ξ .

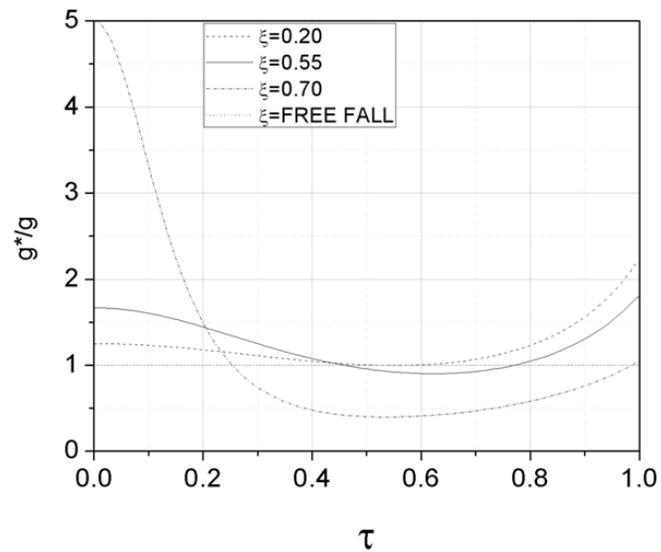


Figura 4.4: Figura 4.4 Gráficas de las aceleraciones instantáneas de las superficies libres, g^*/g , como funciones del tiempo. Las gráficas corresponden a los casos dados en la figura 4.1

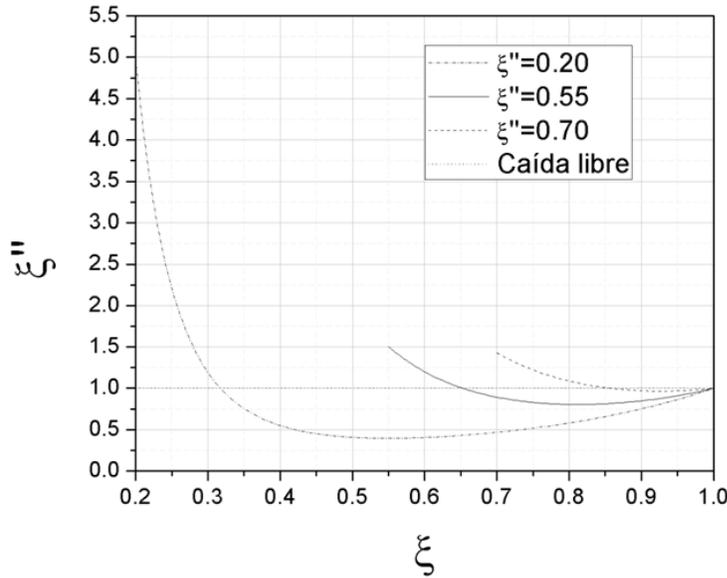


Figura 4.5: Figura 4.5 Gráfica de las aceleraciones instantáneas de las superficies libres como función de la posición.

un primer instante el movimiento es muy rápido, con una muy alta aceleración, pero después esta misma aceleración decrece uniformemente cayendo por debajo de g^* , recuperándose nuevamente hasta volver a alcanzar el valor de g^* a la salida de nuestra probeta. En este caso la descripción del movimiento puede hacerse a través del cálculo de la aceleración promediada en el tiempo la cual es definida como:

$$g^* = \frac{\int_{\Delta t} g^*}{\int_{\Delta t} dt}$$

donde Δt es el intervalo de tiempo durante el cual ocurre el movimiento. Encontrando de este modo para cada caso que para $\xi = 0,20$, $\xi = 0,55$ y $\xi = 0,70$ los valores promediados de aceleración son $g^* = 5,00$, $g^* = 1,54$, y $g^* = 1,42$ respectivamente.

Por último para comparar nuestros resultados aquí obtenidos y los presentados por [Villaermaux y Pomeau] es conveniente recordar que ellos nos dan una aceleración inicial de la forma $g^* = g/(1 - \beta)$, donde en nuestro presente contexto tendríamos: $\beta = 1 - \xi$. Recordando del capítulo 3 del presente trabajo, Villaermaux y Pomeau estudiaron dos casos. Para el caso 1: $\beta = 0,33$, $\alpha = 1,71^\circ$, $H_1 = 1,1m$ y $H_2 = 0,737m$. Así para el caso 2: $\beta = 0,52$, $\alpha = 4,00^\circ$, $H_1 = 0,52m$ y $H_2 = 0,25m$. Usando estos valores, en la figura 4.6 están graficadas las aceleraciones promediadas en el tiempo asumiendo los valores constantes de H_1 y tomando en cuenta distintos valores para H_2 ;

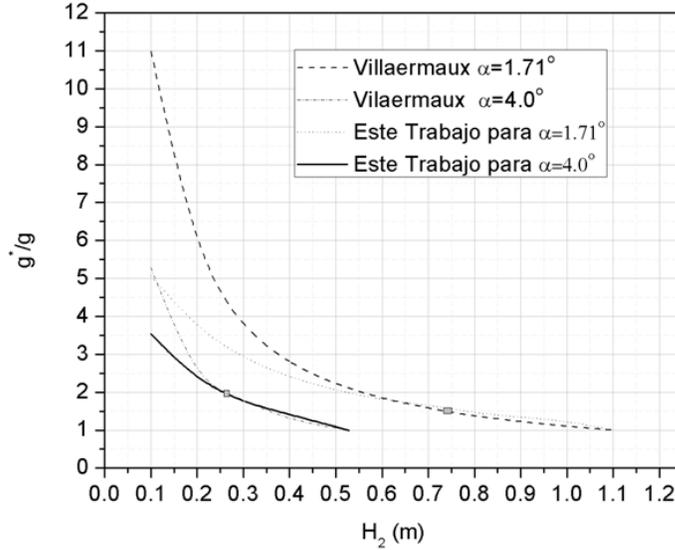


Figura 4.6: Gráficas de la aceleración promediada de la superficie libre, $\langle g^* \rangle / g$, como función de la posición inicial de la superficie libre H_2 .

es decir distintos valores de llenado. Para nuestro caso las aceleraciones instantáneas han sido graficadas con respecto al modelo aquí desarrollado. Ambos modelos nos dan resultados similares para los distintos niveles de llenado.

La figura 4.6 nos muestra dos diferentes tamaños de tubos cónicos con diferentes niveles de llenado produciendo diferentes regímenes de super caída libre. Cabe destacar que cuando el valor de H_1 es muy cercano al vértice la tasa de superaceleración $\langle g^* \rangle / g$ incrementa su valor y, lógicamente cuando H_2 tiende a H_1 es decir a la parte inferior de la probeta, $\langle g^* \rangle / g \rightarrow 1$. Esto significa que un mayor nivel de llenado nos dará un valor de aceleración promedio alto. La diferencia sustancial entre las curvas dadas por el modelo de Villaermaux y Pomeau y las obtenidas con este modelo para valores de H_2 puede deberse a que el primer caso nos entrega aceleraciones instantáneas a cortos tiempos y el modelo aquí entregado nos ofrece aceleraciones promediadas.

4.4. Conclusiones

Es aparente que el modelo teórico aquí entregado predice súper caída libre en superficie libre de un líquido confinado en un contenedor cónico cuando éste es dejado caer debido a la acción de la gravedad. Además, ha sido demostrado que la aceleración

efectiva depende fuertemente del nivel de llenado H_2 y de la longitud del contenedor es decir H_1 . En los experimentos realizados se ha mostrado que durante el desarrollo de la súper caída libre se ha observado la formación de una pequeña protuberancia localizada en la parte central de la superficie libre la cual incrementa su tamaño durante el desarrollo del fenómeno, esto ya ha sido reportado por [3]. El simple modelo aquí mostrado no nos permite cuantificar las propiedades de esta pequeña estructura, pero seguramente el incremento de esta misma durante el flujo puede ser debido al incremento de la sección transversal.

Capítulo 5

Experimentos Cualitativos

En esta parte discutiremos los resultados obtenidos a raíz de la de la observación del fenómeno de súper aceleración. Para este experimento utilizamos un tubo cónico de vidrio montado sobre un soporte que alberga un pistón alimentado por un dispositivo neumático para efectos del sellado; el tubo tiene las siguientes dimensiones: longitud $L = 48$ cm, diámetro de la base de 7 cm y 4 cm de diámetro superior, el tubo es llenado con Etanol (densidad $\rho = 810$ kg m⁻³, tensión superficial $\gamma = 22E - 03$ N m⁻¹, viscosidad $\nu = 1,52E - 06$ m²s⁻¹). La figura figura (5.1) muestra el esquema del montaje con la probeta y el dispositivo de sellado. En la figura (5.2) se han incluido dos gráficas log-log refertes a los experimentos, en la gráfica superior $H_2(0) = 0,36$ m y $\langle g^* \rangle / g = 2,3$. Para la gráfica inferior $H_2(0) = 0,65$ m y $\langle g^* \rangle / g = 1,2$. Podemos decir con esto que ambos resultados muestran que la súper aceleración es efectivamente una función del nivel inicial de llenado.

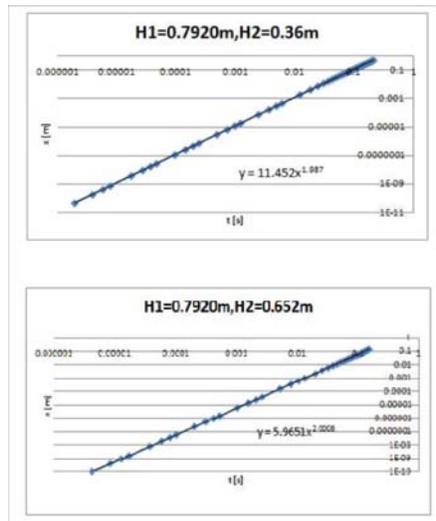


Figura 5.1: Gráficas log-log de los resultados experimentales mostrando valores de posición en función del tiempo.

Apéndice A

Desarrollo del modelo Teórico

Las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas son de acuerdo a nuestras consideraciones para el componente de velocidad (u_z):

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.1})$$

La ecuación de continuidad(A.1) nos permite encontrar que

$$u = u(t)$$

Conservación de Momentum toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 u) = 0, \quad (\text{A.2})$$

así $z^2 u = A(t)$ y por consiguiente:

$$u = \frac{A(t)}{z^2}$$

usando este último resultado en la Ecuación [3].

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g. \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\rho}{z^2} \left(\frac{\partial A}{\partial t} - 2 \frac{A^2}{z^3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g. \quad (\text{A.4})$$

Si

$$u = \frac{dH}{dt}$$

entonces integrando la ecuación [6] (A.4)

$$\frac{\rho}{z^2} \left(\frac{\partial A}{\partial t} - 2 \frac{A^2}{z^3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g. \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{H_2}^{H_1} \frac{dz}{z^2} = \int_{H_2}^{H_1} z^{-2} dx = \left[\frac{z^{-1}}{-1} \right] = \left[\frac{-1}{z} \right]_{H_2}^{H_1} = \frac{-1}{H_1} + \frac{1}{H_2} = \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_1} = \frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2}$$

$$\int_{H_2}^{H_1} \frac{dz}{z^5} = \int_{H_2}^{H_1} z^{-5} dx = \left[\frac{z^{-4}}{-4} \right] = \left[-\frac{1}{4z^4} \right]_{H_2}^{H_1} = -\frac{1}{4H_1^4} + \frac{1}{4H_2^4} = \frac{1}{4H_2^4} - \frac{1}{4H_1^4} =$$

el resultado de promediar la Ecuación [7]. (A.5) es:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \right) - \frac{A^2}{2} \left(\frac{H_1^4 - H_2^4}{H_1^4 H_2^4} \right) = g(H_1 - H_2). \quad (\text{A.6})$$

de este modo asumimos que las Velocidades pueden expresarse como:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{A(t)}{H_1^2} \quad (\text{A.7})$$

o:

$$\frac{dH_1^3}{dt} = 3A(t) \quad (\text{A.8})$$

Derivando denuevo tenemos:

$$\frac{d^2 H_1^3}{dt^2} = 3 \frac{dA}{dt} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{A(t)}{H_2^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{A(t)}{H_2^2} \quad (\text{A.11})$$

o:

$$\frac{dH_2^3}{dt} = 3A(t) \quad (\text{A.12})$$

Derivando denuevo tenemos:

$$\frac{d^2 H_2^3}{dt^2} = 3 \frac{dA}{dt} \quad (\text{A.13})$$

Sumando la Ecuación [10] y [11](A.8) y (A.10)

$$\frac{d(H_1^3 - H_2^3)}{dt} = 0 \quad (\text{A.14})$$

o

$$H_1^3 - H_2^3 = \text{const.}$$

La Ecuación puede ser reescrita como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \right) - \frac{A^2}{2} \left(\frac{H_1^4 - H_2^4}{H_1^4 H_2^4} \right) = g (H_1 - H_2). \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{d^2 H_2^3}{dt^2} \right) \left(\frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2} \right) - \frac{1}{18} \left(\frac{dH_2^3}{dt} \right)^2 \left(\frac{H_1^4 - H_2^4}{H_1^4 H_2^4} \right) = g (H_1 - H_2). \quad (\text{A.16})$$

$$\left(\frac{d^2 H_2^3}{dt^2} \right) \left(\frac{1}{3H_1 H_2} \right) - \frac{1}{18} \left(\frac{dH_2^3}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4 H_2^4} \right) = g. \quad (\text{A.17})$$

$$\left(\frac{d^2 H_2^3}{dt^2} \right) = 3H_1 H_2 \left[g + \frac{1}{18} \left(\frac{dH_2^3}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4 H_2^4} \right) \right]. \quad (\text{A.18})$$

usando:

$$\left(\frac{d^2 H_2^3}{dt^2} \right) = 3H_2^2 \frac{d^2 H_2}{dt^2} + 6H_2 \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

Finalmente tenemos:

$$3H_2^2 \frac{d^2 H_2}{dt^2} + 6H_2 \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 = 3H_1 H_2 \left[g + \frac{1}{18} \left(\frac{dH_2^3}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4 H_2^4} \right) \right]$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} + \frac{2}{H_2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{1}{18} \left(\frac{dH_2^3}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4 H_2^4} \right) \right]$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{1}{18} \left(\frac{dH_2^3}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4 H_2^4} \right) \right] - \frac{2}{H_2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{1}{18} \left(3H_2^2 \frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4 H_2^4} \right) \right] - \frac{2}{H_2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{H_2^4}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4 H_2^4} \right) \right] - \frac{2}{H_2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) \right] - \frac{2H_1}{H_1 H_2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \right]$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} \right\} \right]$$

$$\frac{d^2 H_2^2}{dt^2} = 2H_2 \frac{d^2 H_2}{dt^2} + 2 \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

o

$$H_2 \frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 H_2^2}{dt^2} - \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

Entonces:

$$H_2 \frac{d^2 H_2}{dt^2} = H_1 \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} \right\} \right]$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 H_2^2}{dt^2} - \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 = H_1 \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} \right\} \right]$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 H_2^2}{dt^2} = H_1 \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} \right\} \right] + \frac{H_1}{H_1} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 H_2^2}{dt^2} = H_1 \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} \right\} + \frac{2}{2H_1} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 H_2^2}{dt^2} = H_1 \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} + \frac{2}{H_1} \right\} \right]$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 H_2^2}{dt^2} = H_1 \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) \right]$$

La variable es H_2 y t es el tiempo

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \frac{H_1}{H_2} \left[g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{(H_1 + H_2)(H_1^2 + H_2^2)}{H_1^4} \right) - \frac{2}{H_1} \right\} \right]$$

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \left[\frac{H_1}{H_2} g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{1}{H_1} + \frac{H_2}{H_1^2} + \frac{H_2^2}{H_1^3} - \frac{3}{H_2} \right\} \right]$$

bajo las condiciones iniciales

$$\text{Para } t = 0 : H_2 = 0 \text{ a } H_1 \text{ y } \frac{dH_2}{dt} = 0$$

Apéndice A

Apéndice II

ADIMENSIONALIZACIÓN DEL MODELO DESARROLLADO

Tomando nuestra ecuación original en dimensiones reales procedemos a su adimensionalización.

$$\frac{d^2 H_2}{dt^2} = \left[\frac{H_1}{H_2} g + \frac{1}{2} \left(\frac{dH_2}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{1}{H_1} + \frac{H_2}{H_1^2} + \frac{H_2^2}{H_1^3} - \frac{3}{H_2} \right\} \right]$$

Considerando nuestras variables adimensionales:

$$\xi = \frac{H_2}{H_1} \quad y \quad \tau = \frac{\tau}{\sqrt[2]{\frac{H_1}{g}}}$$

Sustituyendo estas mismas en nuestra ecuación original:

$$\frac{H_1}{\left(\sqrt{\frac{H_1}{g}}\right)^2} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{H_1 g}{H_1 \xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{H_1^2}{\left(\sqrt{\frac{H_1}{g}}\right)^2} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^2 \right] \left[\frac{1}{H_1} + \frac{H_1 \xi}{H_1^2} + \frac{H_1^2 \xi^2}{H_1^3} - \frac{3}{H_1 \xi} \right]$$

$$g \left[\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right] = \frac{g}{\xi} + \frac{g H_1}{2} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^2 \left[1 + \frac{\xi}{H_1} + \frac{\xi^2}{H_1} - \frac{3}{H_1 \xi} \right]$$

Eliminando Términos tenemos:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^2 \left[1 + \xi + \xi^2 - \frac{3}{\xi} \right]$$

Modelo Adimensional

Apéndice A

Apéndice 3

CÓDIGO NUMÉRICO PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^2 \left[1 + \xi + \xi^2 - \frac{3}{\xi} \right]$$

```
%*****
```

```
%PROBETA CÓNICA ADIMENSIONALIZADA
```

```
%19_MAYO_2011
```

```
%*****
```

```
% d^2E      1      1      dE      2      2      3
%  ——  =  ——  +  ——  [ —— ]      [1 + E + E - —— ]
% dT^2      E      2      dT      E      E      E
```

```
%*****
```

```
%Convertir la ecuación no -lineal de segundo orden en un sistema de ecuaciones
```

```
%de primer orden y declararlo en una función
```

```
%*****
```

```
function[out]=conicaltube(t,in)
```

```
    out = zeros(2,1);
```

```
    out(1)= in(2);
```

```
    out(2)= (1/in(1))+((0.5*(in(2)^2))*(1+(in(1))+(in(1)^2)-(3/(in(1)))));
```

```
%*****
```

```
%Solución de un sistema de ecuaciones adimensionales para el problema del cono  
semiinfinito.
```

```
%Utilizando un método de Runge-Kutta 4 integrado en la función ode45
```

```
%para un problema de valores iniciales.
%Resolviendo la función 'conicaltubes'
%*****

%    h0    = condiciones iniciales
%    tspan = intervalo de integración

clc,clear,clf
h0 = [0.2 ; 0 ];
tspan= [0.0:0.001:1.0];
[t,H]=ode45('cónicaltube',tspan,h0);

plot(t,H,'k')
axis([0 5 0 1]):
grid on; hold on
[t H]
hold on

%Creación de archivos
save conicaltube _tiempo.dat t /ascii;
save conicaltube _H.dat H /ascii;
```

Apéndice B

Bibliografía

Bibliografía

- [1] W. Tomaszewski, P. Pieranski, and J.-C. Géminard, “The motion of a freely falling chain tip,” *Am. J. Phys.* 74, 776–783 2006
- [2] Calkin, M. G. & March, R. H. "The dynamics of a free falling chain: I". (1989) *Am. J. Phys.* 57 (2),154.
- [3] E. Villaermaux & Pomeau, "Super free fall", *J. Fluid Mechanics* (2010), **642**, 147.
- [4] J. M. Robson, “The physics of fly casting,” (1990) *Am. J. Phys.* 58, 234 .
- [5] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II:Stiff and Differential Algebraic Problems*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [6] Phillips, O. M. 1958 The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *J. Fluid,Mech.* 4 (4), 426–434.
- [7] Schager,M., Steindl, A. & Troger, H. 1997 On the paradox of the free falling folded chain. *Acta Mech.* 125, 155–168.
- [8] Duchemin, L. 2008 Self-focusing of thin liquid jets. *Proc. R. Soc. A* 464, 197–206.
- [9] Penney, W. G. & Price, A. T. 1952 Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. *Phil. Trans. R. Soc. A* 244, 254–284.
- [10] Taylor, G. I. 1953 An experimental study of standing waves. *Proc. R. Soc. A* CCXVIII, 44–59.
- [11] Ames, W.F. (1965), *Nonlinear Partial Differential Equationsn in Engineering*, Academic, New York.
- [12] Anderson, J. D., (1995), *Computational Fluid Dynamics: The basis with Applications*, McGraw Hill, New York.
- [13] Blazek, J. (2001),*Computational Fluid Dynamics:Principles and Applications*, Elsevier, New York.

-
- [14] White, F.M., (2006), Viscous Fluid Flow, International Edition, McGraw Hill, New York.
- [15] Landau, L. D., and E. M. Lifschitz (1959), Fluid Mechanics, Pergamon, London.
- [16] Chapra, S. C., and Canale Raymond P.,(2005), Métodos Numéricos para Ingenieros, Mc Graw Hill, México.
- [17] Etter, Delores M. (1998), Solución de Problemas en Ingeniería con MATLAB, Pearson prentice Hall, México.
- [18] Register, H. A., (2006),A Guide to Matlab Object-Oriented programing, Chapman and Hall, Atlanta.
- [19] Guibbings, J. C., (2011), Dimensional analysis, Spiringer, New York.
- [20] Zill, Dennis, G., (2009), Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Cenage Learning, México.
- [21] Larson, H. E., (2006), Cálculo, McGraw Hill Interamericana, México.