



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Sobre la Clasificación Topológica de Curvas Algebraicas

Tesis que presenta

César Adrián Lozano Huerta

Para obtener el Grado de
Licenciado en Física y Matemáticas
con especialidad en Matemáticas

Asesor de Tesis

Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino

Ciudad de México

Otoño 2006

A mi madre, hermana, abuela, tíos...
todos ellos se funden en un solo ser
al cual amo y al cual decirle que le agradezco y que me
debo a él...
sería decirle muy poco.

*Debe ser simple para ser cierto, si no es simple, probablemente no
podremos descifrarlo.¹*

Relativity: the Especial and General Theory, Albert Einstein.

¹Sobre la Teoría de la Relatividad General y Especial. Miguel Paredes (Traductor.)
Alianza Editorial.

Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción	IX
1. Secciones Cónicas en el Plano Projectivo	1
1.1. Geometría Projectiva	1
1.2. Plano Projectivo Real	3
1.3. Curvas en el Plano Projectivo Real	5
1.4. Cónicas en el Plano Projectivo Real	10
2. Curvas Algebraicas Complejas	21
2.1. Curvas afines	22
2.2. Sobre La Clasificación Topológica De Curvas	25
2.2.1. Plano Projectivo Complejo	26
2.2.2. Curvas Projectivas en $\mathbb{CP}^2$	30
2.2.3. Curvas Projectivas y Afines	31
2.2.4. Conexidad y Orientabilidad de Curvas Algebraicas	34
3. Fórmula de Grado y Género	39
3.1. Fórmula de Grado y Género	40
3.2. Cubiertas ramificadas de $\mathbb{P}^1$	41
3.3. Fórmula de Grado y Género	45
3.3.1. Demostración de la Fórmula de Grado y Género	46
Conclusiones	57
Índice Alfabético	61

.

Agradecimientos

Creo en la generosidad, y deseo agradecer por ella a la sociedad mexicana que me ha permitido a través del **Instituto Politécnico Nacional** concluir una educación universitaria. A profesores que terminaron siendo amigos en la **Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN**, para así referirme a todas las personas que conocí a mi paso por esta escuela, como esto último, todos muy buenos amigos.

Por supuesto agradezco de manera honesta y profunda todo lo aportado para la conclusión de este trabajo a mi asesor de tesis el Dr. Miguel Alejandro Xicotécatl, y a mi co-asesor el Dr. Ernesto Lupercio Lara quien me ha orientado y al cual le estoy profundamente agradecido. En torno a una formación profesional sería ingrato no mencionar al **Centro de Investigación y Estudios Avanzados** donde me orientan de manera atinada para ser un mejor matemático en formación.

Más que una misiva elocuente, deseo plasmar en este apartado un pensamiento honesto, dirigido a las personas que ahora estimo y que sin pedírselos me ayudaron de forma oportuna y atinada. Sé que omitiré muchos nombres, pero sépase que la falta de espacio me limita de manera indeseada. Especialmente recordaré a profesores como Emigdio Salazar Cordero y Marco Antonio Rodríguez Andrade, a quienes admiro y desde luego respeto. No olvidaré la ayuda, ni el consejo, gracias Luis Martínez, Constantino Angel, gente valiosa en la que se puede confiar, en mi tienen alguien que los quiere. Con mucho cariño agradezco a Ma. Eugenia Vega Flores y a su familia; son personas que llevo siempre conmigo.

Desearía tener nitidez a la hora de escribir como en el sentir, para así poder decir más con menos símbolos; sin embargo, mis carencias como escritor me obligan a no mencionar nombres de gente que me apoyó, y que sin duda, contribuyó de manera significativa en el cause que ha tomado mi vida. En

todas las personas que he hecho presente, con su nombre o con mi silencio, veo una invitación a convertir este agradecimiento en algo no estéril: hacer nuestro trabajo lo mejor posible, es una forma real de agradecer.

Introducción

Mathematics knows no races or geographic boundaries; for mathematics the cultural world is one country.
David Hilbert.

El estudio de las curvas algebraicas versa alrededor de ceros de polinomios sobre un campo k . Estos objetos aparentemente algebraicos, viven como punto de contacto de al menos dos teorías relevantes y actualmente muy activas: geometría algebraica y superficies de Riemann.

El espíritu de este trabajo es tratar de entender la naturaleza de estos objetos. Utilizando herramientas topológicas, intentaremos iluminar aspectos sobre la estructura y las características de las curvas algebraicas, las cuales emanan de la teoría de ecuaciones polinomiales.

Por otro lado, a partir de la segunda mitad del trabajo no hemos podido (ni deseábamos), ocultar el fantasma que rondaba tras las líneas. Un concepto que pone de manifiesto que las curvas algebraicas no viven únicamente en la intersección del álgebra y la topología, relata que, de manera paralela, las curvas algebraicas están regidas por propiedades analíticas y por tanto locales, a diferencia de las propiedades topológicas que tienen un carácter global. Este concepto lleva por nombre superficie de Riemann.

Las Superficies de Riemann son originarias del análisis complejo, como medio para tratar problemas de funciones multivaluadas de una variable compleja. Tales funciones multivaluadas nacen como continuación analítica de un cierto elemento de función holomorfa, usualmente llamado germen.

La idea de Riemann fue reemplazar el dominio de este elemento de función holomorfa, por ramas cubrientes del plano complejo, de modo que se tenga una función univaluada.

Considerar curvas algebraicas definidas sobre un campo arbitrario k es un tema profundo que para cada elección de un campo abre posibilidades nuevas donde aplicar la teoría de curvas algebraicas. Si el campo es $\mathbb{C}$, el teorema de existencia de Riemann nos garantiza que es exactamente equivalente a la teoría de superficies de Riemann compactas. Este mismo contexto, donde el campo es $\mathbb{C}$, tiene aplicaciones en la resolución de integrales abelianas. Por ejemplo, intentar resolver la ecuación diferencial de péndulo simple:

$$y'' = -k \sin(y).$$

arroja una integral abeliana. Una integral se dice abeliana si es de la forma:

$$\int_{\gamma} R(z, w(z)) dz,$$

con $R(x, y)$ una función racional, tal que $w(z)$ y z satisfacen una relación polinomial $P(z, w(z)) = 0$. Este polinomio es determinante para saber si es posible resolver dicha integral mediante funciones elementales, podemos pensar en la curva algebraica que define en $\mathbb{CP}^2$. Si este polinomio es de grado a los más dos, es posible hacer una sustitución de manera ingeniosa y entonces la integral se vuelve una expresión de funciones racionales que podemos integrar. Sin embargo, si el grado del polinomio es mayor o igual a tres, esto no es posible. La diferencia entre estos dos casos es, en esencia, que las curvas proyectivas no singulares de grado uno o dos en $\mathbb{CP}^2$ son homeomorfas a la esfera S^2 . Mientras que las curvas proyectivas no singulares de grado al menos tres, tienen género por lo menos uno, y por tanto no son homeomorfas a la esfera S^2 .

Cuando consideramos el campo $\mathbb{Q}$, existe vínculo con la teoría de los números. Los puntos sobre la curva algebraica son soluciones racionales a la ecuación $P(x, y) = 0$, donde propiedades topológicas se codifican en información de interés para saber si tal ecuación tiene soluciones en los números racionales. Por citar un ejemplo $P(x, y) = x^n + y^n - 1$, es una curva de grado n . Actualmente se conocen características de puntos racionales sobre la curva algebraica en términos de su género.

En suma, la teoría de curvas algebraicas es una maquinaria que dependiendo del enfoque, puede iluminar algunas preguntas de los más variados intereses en matemáticas. Por tanto, entender la naturaleza de estos objetos matemáticos lo podemos pensar como punto de partida hacia diversas ramas de la matemática.

El material a tratar en esta tesis está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 tratamos con curvas algebraicas reales de grado dos: cónicas. Para el final del capítulo concluimos que si compactificamos estas curvas en $\mathbb{RP}^2$, obtenemos curvas proyectivas siempre homeomorfas a la 1-esfera.

Para el capítulo 2 tratamos con curvas algebraicas complejas de grado n y al igual que en el capítulo que le precede deseamos clasificarlas topológicamente. Para esto hacemos uso de un teorema en topología de superficies, que da una clasificación de estas últimas. Así a lo largo del capítulo observamos qué tipo de curvas algebraicas tiene las propiedades demandadas por la hipótesis de dicho teorema. Por dicha hipótesis compactificamos las curvas afines, incluyéndolas en el proyectivo. Cerramos el capítulo exhibiendo la clasificación de dichas curvas.

El tercer capítulo refina la clasificación hecha en el capítulo precedente, exhibiendo y demostrando una relación entre un invariante topológico y el grado de una curva algebraica. A esta expresión le llamamos “fórmula de grado y género”. Con esto dada la curva algebraica podemos decidir qué superficie topológica define.

En el camino para alcanzar la conclusión de esta tesis, hemos demandado conceptos de topología, álgebra lineal y análisis complejo, mostrando a las curvas algebraicas como punto de contacto entre estas ramas de la matemática. De este modo se evidencia de forma modesta, pero contundente, que la matemática como realidad platónica no posee divisiones internas reales, más que las impuestas para la tranquilidad de los hombres.

Capítulo 1

Secciones Cónicas en el Plano Projectivo

In Euclidian Geometry, constructions are made with the ruler and compass.

Projective geometry is simpler: its constructions require only the ruler.

Projective Geometry, H.S.M. Coxeter.

En este capítulo estudiaremos una clase muy particular de curvas algebraicas en el plano proyectivo real: las cónicas. Veremos que la estructura afín ó de $\mathbb{R}^2$, no es la más simétrica desde un punto de vista algebraico. Existe una estructura algebraica y un espacio más simétricos, ésto en el sentido de que me permitirá hacer simplificaciones acerca de la geometría de las curvas, adicionales a las simetrías que ya poseíamos con la estructura de $\mathbb{R}^2$. Además sus principios son formalmente más sencillos: “cualesquiera par de rectas en $\mathbb{RP}^2$ se intersecan en al menos un punto”. Esta estructura es estudiada en la Geometría Projectiva.

1.1. Geometría Projectiva

La geometría projectiva tiene sus orígenes en un problema renacentista de perspectiva. Cómo debe pintar un artista un cuadro de un paisaje tridimensional, para que una persona al momento de ver dicho cuadro sienta estar viendo el paisaje original. La idea para resolver esto es imaginar que vemos el sitio a retratar a través de un trozo de cristal. Si de momento

imagináramos que estamos viendo una imagen plana, que el cristal no es ya transparente. Dibujado, éste sería un retrato, un retrato fiel. Pero este ejercicio mental ¿cómo lo entendemos? Al cristal sobre el que quedaría el retrato, únicamente habría que pigmentarlo. Para ello consideremos a nuestro ojo y a todos los puntos del paisaje que para nuestra visión estén detrás del cristal, (a éstos últimos llamémosles los puntos de fondo). Ahora unamos, mediante una línea recta, nuestro ojo con un punto de fondo. A esta línea y al punto de fondo, les corresponde un único punto en el cristal, el punto de intersección de la línea y el cristal, al que damos la misma pigmentación del punto de fondo. Así cuando recorramos todos los puntos de fondo, obtendremos el retrato buscado, pues habremos pigmentado el trozo completo de cristal.

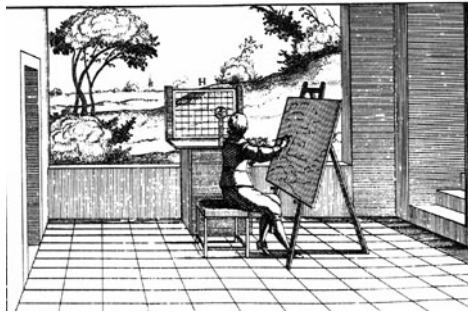


Figura 1.1: Proyectando a un lienzo.

Analicemos un ejemplo en concreto que nos nutrirá la intuición. Esto lo haremos según lo descrito en el párrafo anterior, uniendo nuestro ojo y un punto de fondo mediante una línea recta. Deseamos representar en perspectiva una superficie llana: un par de vías de tren, las cuales sabemos en el “suelo” horizontales. El sitio al cual proyectaremos será un cuadro que estará colgado verticalmente.

Al pasar del paisaje modelo a la proyección en el cuadro, las rectas siguen siendo rectas, pero las vías que en principio eran paralelas, en el cuadro dejan de serlo y concurren en un punto de una línea situada a la altura del ojo la línea del horizonte. Observemos que los puntos de esta línea no corresponden a la proyección de ningún punto en el paisaje. Notamos que los puntos situados detrás del cuadro se biyectan con los puntos bajo la línea del horizonte. Los puntos situados delante del cuadro pero posteriores al pie del observador se biyectan con los del cuadro situados bajo el suelo.

si sustituimos el suelo por un cristal que nos permitiera ver la parte del cuadro situada bajo tierra, el efecto óptico sería que el cuadro vertical llega hasta nuestros pies. Por otro lado, la línea paralela al cuadro y que pasa por nuestros pies no tiene cabida en el cuadro, pues las líneas que unen sus puntos con el ojo son paralelas al cuadro. Entendemos que la correspondencia entre los puntos de ambos planos puede extenderse de forma natural asignando a los puntos situados detrás del ojo los puntos situados sobre la línea del horizonte, siguiendo el mismo criterio. De este modo tenemos una biyección entre ambos planos salvo por dos excepciones: en el cuadro ha aparecido la línea del horizonte y ha desaparecido la línea situada al pie del observador.

La interpretación de estos fenómenos desde el punto de vista de la geometría projectiva es: todos los planos (projectivos) tienen una línea adicional, invisible en el sentido ordinario, donde concurren todas las paralelas. Las **transformaciones projectivas** biyectan los planos projectivos y pueden hacer “finitas” las líneas infinitas como ocurre en nuestro ejemplo. La recta del horizonte es la proyección de la línea infinita del plano horizontal y el cuadro muestra cómo, efectivamente, concurren a ella todas las rectas paralelas. La recta situada al pie del observador ha desaparecido pues la proyección la ha enviado al infinito. En efecto dos líneas que concurren en un punto de esta recta en el cuadro aparecerán como paralelas. Una excelente referencia puedo consultarse en [HV52].

Esta mecánica tratada solamente en una línea en vez de como se hace aquí, para todo un plano, da lugar al concepto de “línea projectiva”. Obsérvese que rectas bajo perspectiva van a parar a rectas, es decir, las rectas son invariantes bajo proyecciones perspectivas.

1.2. Plano Projectivo Real

Generalicemos el procedimiento que comentamos al principio, y hagamos el modelo para todo $\mathbb{R}^3$.

Consideremos el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen (aquí el origen jugará el papel del ojo) y los subconjuntos U_1, U_2, U_3 , de $\mathbb{R}^3$, que nos ayudarán a definir una **topología** en el conjunto de líneas. Considerando $\vec{a} = (x, y, z)$ y sean

$$U_1 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$$

$$U_2 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$$

$$U_3 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}.$$

Diremos que un conjunto de líneas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen es un abierto si y sólo si la intersección con uno de los planos U_1, U_2, U_3 , es abier-

to, con la topología del plano de $\mathbb{R}^2$. Llamemos a este conjunto de líneas, con esta topología; Plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$. Este conjunto es un **espacio topológico**. De manera inmediata, observamos que todo punto p en este conjunto, tiene una vecindad abierta que es básicamente igual a un abierto en uno de los planos U_1, U_2, U_3 , pues existe una biyección natural entre ambos subconjuntos. Esto es, localmente $\mathbb{RP}^2$ es muy parecido a una vecindad en $\mathbb{R}^2$. Concluimos que $\mathbb{RP}^2$ forma parte de un conjunto de espacios que localmente *son* como $\mathbb{R}^2$: *variedad de dimensión dos real*. También notamos que toda línea que pasa por el origen, interseca al menos a uno de estos planos definidos arriba. Esto es, la unión de estos tres planos forman de manera natural una cubierta abierta para el plano proyectivo. Más adelante veremos hasta qué grado $\mathbb{RP}^2$ contiene una copia de $\mathbb{R}^2$.

Obsérvese que la siguiente construcción nos describe el mismo espacio topológico. Consideremos el siguiente conjunto:

$$S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| = 1\}$$

y definamos en S^2 una relación $\sim$ como sigue:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } y = -x.$$

Esta relación identifica los puntos antipodales de la esfera, es más, esta identificación es una relación de equivalencia.

Como bien sabemos, teniendo un espacio topológico X y una relación de equivalencia R en él definida, podemos considerar X/R el conjunto de clases de equivalencia, y lo podemos dotar de una topología. Una referencia clásica de topología es [Mun75].

La relación entre este espacio topológico y $\mathbb{RP}^2$ está enunciada en la siguiente:

Proposición 1 Sean $\mathbb{RP}^2$ y $S^2/\sim$ espacios topológicos, entonces existe una función $f: S^2/\sim \rightarrow \mathbb{RP}^2$ homeomorfismo.

Demostración. Bastará mostrar que f es biyectiva y continua, pues $S^2/\sim$ es compacto, y $\mathbb{RP}^2$ es Hausdorff. Esta función f la construiremos de la siguiente manera: Sea $g: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ tal que a un punto $x \in S^2$ asocie la recta que pase por x y $-x$. La función g es continua, pues la imagen inversa de una abierto V en $\mathbb{RP}^2$ $g^{-1}(V)$ es el abierto sobre la esfera S^2 (con la topología de subespacio), que resulta de interceptar las rectas con la esfera.

Luego, el siguiente diagrama se tiene:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{RP}^2 \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ S^2/\sim & & \end{array}$$

Considerando aquí la proyección canónica $\pi(x) = [x]$. Dado que la función g es constante en clases de equivalencia, induce una función f biyectiva. $f(x) = g(\pi^{-1}([x]))$ es claramente continua pues g es continua. ■

Corolario 1 $\mathbb{RP}^2$ es compacto.

Entonces ya podemos pensar a $\mathbb{RP}^2$ de dos maneras: como el conjunto de subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1 dotados de la topología descrita al principio, o como el conjunto de puntos antipodales en la esfera S^2 con la topología cociente.

1.3. Curvas en el Plano Projectivo Real

Para introducir la noción de curva algebraica proyectiva, en esta sección visualizaremos cómo se comportan en $\mathbb{RP}^2$ un tipo de curvas muy especiales: las cónicas.

Empecemos por la definición de cónica en el plano euclidiano. Sabemos que la línea y circunferencia son objetos fundamentales en la geometría Euclidiana plana. Hemos visto que podemos tener un concepto de “línea proyectiva” (invariante bajo perspectiva). No obstante para el caso de la circunferencia encontramos un problema, pues las perspectivas la achatán o alargan, esto es, una circunferencia no es un objeto invariante bajo perspectiva. Más aún para definir una circunferencia en el plano euclidiano como lugar geométrico consideramos el concepto de distancia, el cual no tenemos en $\mathbb{RP}^2$. Esto nos imposibilita de primera instancia para definir cónica en $\mathbb{RP}^2$ como lugar geométrico de manera análoga a como se hace en $\mathbb{R}^2$. Pensemos entonces en una circunferencia C en el plano euclidiano como $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Luego C es el conjunto donde se anula el polinomio $P(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. En general, podemos pensar a una cónicas en $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de puntos donde se anula un cierto polinomio. Más adelante veremos que definir las cosas de esta manera da cabida a un contexto mucho más general.

Sea $P(x, y)$ un polinomio no constante en dos variables con coeficientes en los reales. Diremos que $P(x, y)$ no tiene factores repetidos si no se puede

escribir como

$$P(x, y) = (Q(x, y))^2 R(x, y)$$

donde $Q(x, y)$ y $R(x, y)$ son polinomios y $Q(x, y)$ es no constante.

Definición 1 Sea $P(x, y)$ un polinomio no constante con coeficientes en los reales que no tiene factores repetidos. Entonces una curva algebraica en $\mathbb{R}^2$ definida por $P(x, y)$ es

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\}.$$

Si los polinomios no tienen factores repetidos, los únicos polinomios que definan el mismo conjunto de ceros, serán los que difieran por una constante.

Definición 2 El grado d de una curva C definida por un polinomio $P(x, y)$ es el grado del polinomio P es decir

$$d = \max\{r + s : c_{r,s} \neq 0\}$$

donde

$$P(x, y) = \sum_{r,s} c_{r,s} x^r y^s.$$

Definición 3 Cónica en $\mathbb{R}^2$ llamaremos a una curva algebraica de grado dos.

Introduciendo un sistema de referencia (coordenadas homogéneas), en $\mathbb{RP}^2$ podemos pensar en trasladar el concepto de curva algebraica así mismo el de cónica, considerando a ésta como los puntos del plano proyectivo para los cuales sus coordenadas homogéneas anulan un polinomio dado.

Definición 4 Cualquier vector no cero (x_1, x_2, x_3) en $\mathbb{R}^3$ representa un elemento x en $\mathbb{RP}^2$. Llamaremos a (x_1, x_2, x_3) coordenadas homogéneas para x y las denotamos por $[x_1, x_2, x_3]$. Entonces

$$\mathbb{RP}^2 = \{[x_1, x_2, x_3] : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}\}$$

y

$$[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3]$$

si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ de tal manera que $x_j = \lambda y_j$ para toda j .

Observemos que en este sistema de referencia las coordenadas para un punto en el proyectivo no son únicas. Además, dada la definición los valores sobresalientes de x_3 son 0 y 1.

Ahora consideremos la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ dada por

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$$

Definamos los subconjuntos U_1, U_2, U_3 de $\mathbb{RP}^2$ como

$$U_j = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{RP}^2 : x_j \neq 0\}$$

Observemos que la condición $x_j \neq 0$ es independiente de la elección de las coordenadas homogéneas, y que estos son los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ mediante los cuales definimos la topología en $\mathbb{RP}^2$ al principio de la sección anterior. Además

$$\pi^{-1}(U_j) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} : x_j \neq 0\}$$

es un subconjunto abierto de $\mathbb{RP}^2$.

Definamos ahora $\phi_3 : U_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\phi_3[x_1, x_2, x_3] = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right).$$

Esta función está bien definida y tiene por inversa

$$(y_1, y_2) \mapsto [y_1, y_2, 1].$$

A las coordenadas (y_1, y_2) les llamaremos **coordenadas inhomogéneas** sobre U_3 .

La función ϕ_3 es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en U_3 , abierto de $\mathbb{RP}^2$. De manera análoga se definen homeomorfismos ϕ_1 y ϕ_2 .

El complemento de U_3 en $\mathbb{RP}^2$ es el hiperplano

$$\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{RP}^2 : x_3 = 0\}.$$

Este puede ser identificado con $\mathbb{RP}^1$, mediante la función

$$[x_1, x_2, 0] \mapsto [x_1, x_2].$$

Lo anterior lo entendemos pensando que $\mathbb{RP}^2$ es el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ con una copia de $\mathbb{RP}^1$ en el *infinito*. En este ejemplo vemos como el plano proyectivo real puede ser descompuesto como la union de una parte afín y una parte proyectiva, a saber $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{RP}^1$.

Observación 1 *Esto es cierto para espacios proyectivos de dimensión n , éstos pueden ser descompuestos de manera similar en un subespacio afín de cierta dimensión y un subespacio proyectivo de dimensión menor, para el caso del plano proyectivo tenemos $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{RP}^1$.*

Así, podemos interceptar las curvas en $\mathbb{RP}^2$ con el abierto U_3 y obtener una curva en el plano de la manera usual, y cuando consideremos los puntos de intersección con U^c obtendremos “los puntos al infinito” que posé esta curva. Veremos que en el caso proyectivo al considerar puntos “infinitos” nos permitirá evitar la asimetría que provoca la distinción entre puntos finitos e infinitos, con lo que tres tipos de cónicas en el plano euclídeo no degeneradas, en el plano proyectivo real pueden ser tratadas topológicamente como una sola curva. Definamos entonces curva proyectiva y formalicemos el comentario anterior.

Sea $P(x, y, z)$ un polinomio no constante en tres variables con coeficientes reales. Decimos que no tiene factores repetidos si no podemos escribir

$$P(x, y, z) = (Q(x, y, z))^2 R(x, y, z)$$

donde $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son polinomios y el primero es no constante. A un polinomio $P(x, y, z)$ lo llamaremos homogéneo de grado d si

$$P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$$

para toda $\lambda \in \mathbb{R}$

Definición 5 *Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo no constante en tres variables con coeficientes reales y sin factores repetidos. Entonces diremos que $P(x, y, z)$ define una curva proyectiva $\tilde{C}$ en $\mathbb{RP}^2$ dada por*

$$\tilde{C} = \{[x, y, z] \in \mathbb{RP}^2 : P(x, y, z) = 0\}.$$

Sabemos $P(x, y, z)$ es una función continua y $\tilde{C} = P^{-1}\{0\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{RP}^2$, se sigue que *cualquier curva proyectiva es un conjunto compacto en $\mathbb{RP}^2$.*

Pensemos por un momento en el caso general para un poco más adelante regresar al caso de las cónicas y observemos la relación entre las curvas algebraicas y proyectivas. Sea con $\tilde{C}$ una curva proyectiva definida por el polinomio homogéneo $P(x, y, z)$. Mediante la identificación de U con $\mathbb{R}^2$ descrita anteriormente la intersección $\tilde{C} \cap U$ es una curva algebraica definida por el polinomio inhomogéneo en dos variables, $P(x, y, 1)$ si $\tilde{C}$ no contiene la línea $z = 0$.

Recíprocamente, sea $Q(x, y)$ un polinomio de grado d en dos variables, digamos:

$$Q(x, y) = \sum_{r+s \leq d} C_{r,s} x^r y^s$$

definiendo una curva C .

A $\mathbb{R}^2$ lo podemos identificar con el abierto $U \subset \mathbb{RP}^2$ mencionado anteriormente, y en éste las coordenadas las podemos pensar como coordenadas inhomogéneas

$$U = \left\{ \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right) \in \mathbb{R}^2 : x_3 \neq 0 \right\}$$

entonces el polinomio $Q(x, y)$ lo podemos pensar valuado en coordenadas inhomogéneas: $Q\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$. Notemos que Q pasó de ser un polinomio en dos variables a ser una función racional en tres variables x_1, x_2, x_3 . Para hacer compatible la definición de curva proyectiva definida por este polinomio necesitamos que Q pase de ser una función racional a un polinomio, esto lo compensamos observando que Q tiene grado d y escribiendo:

$$x_3^d Q\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

No es difícil mostrar que esta expresión define un polinomio homogéneo. Además cuando $x_3 = 1$ recuperamos $Q(x, y)$. Luego si consideramos $\tilde{C}$ es la curva proyectiva definida por:

$$\begin{aligned} x_3^d Q\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) &= \sum_{r+s \leq d} C_{r,s} x_1^r x_2^s x_3^{d-r-s} \\ &= \tilde{Q}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{1.1}$$

tenemos que $\tilde{C} \cap U = C$.

Cuando $x_3 = 0$ todos los factores que se multiplican por una potencia de x_3 se anularán, excepto cuando $d - r - s = 0$. Luego la intersección de esta curva proyectiva con la línea $x_3 = 0$ es el conjunto de puntos

$$\{[x_1, x_2, 0] \in \mathbb{RP}^2 : \sum_{0 \leq r \leq d} C_{r,d-r} x_1^r x_2^{d-r} = 0\}. \tag{1.2}$$

Este es el conjunto de puntos a “añadir.^a C para así obtener $\tilde{C}$. Si este conjunto es no vacío, entonces la línea al infinito $x_3 = 0$ intercepta a la curva

$\tilde{C}$. En este caso, mediante una transformación proyectiva, podemos mapear la línea al infinito $x_3 = 0$ en una línea finita, y de esta forma la curva $\tilde{C}$ en uno de subconjuntos abiertos U_1, U_2 ó U_3 , de tal forma que en este abierto U_i al cual sea mapeada la curva $\tilde{C}$, ésta no intercepte a la línea al infinito. Así, la curva estará en un subconjunto abierto del plano proyectivo que como hemos visto es básicamente $\mathbb{R}^2$.

Hemos visto que curvas algebraicas y proyectivas, aunque muy distintas estás estrechamente relacionadas: Dada una curva algebraica C en el plano euclidiano, podemos obtener una curva proyectiva $\tilde{C}$ añadiéndole a C ciertos puntos al infinito, esto es pasando del polinomio $P(x, y)$ al polinomio homogéneo $\tilde{P}(x_1, x_2, x_3)$. A este procedimiento le llamaremos **proyektivización** de la curva C o del polinomio $P(x, y)$. Recíprocamente, dada una curva proyectiva $\tilde{G}$ podemos obtener a partir de ella una curva algebraica G , considerando $G = \tilde{G} \cap U$.

1.4. Cónicas en el Plano Projectivo Real

En el plano $\mathbb{R}^2$ sabemos las cónicas en los casos degenerados son: un punto, una línea, dos líneas que se intersectan en un punto. en el caso no degenerado son: elipse, hipérbola, parábola. Observemos que estas tres últimas curvas, son esencialmente distintas, en el sentido de que no existe una función continua que mande una en la otra. Cuando hablamos de cónicas en $\mathbb{R}^2$ sin más detalle sabemos nos referimos a una de las antes listadas. Si tratamos de llevar el concepto de cónica a un espacio distinto al plano euclídeo, debemos contemplar todos los casos posibles en $\mathbb{R}^2$.

Volvamos al ejemplo de la circunferencia C en $\mathbb{R}^2$ definida por el polinomio $P(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, proyectivizando obtenemos $\tilde{P}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Luego de manera tentativa podemos definir una circunferencia $\tilde{C}$ en $\mathbb{RP}^2$: el conjunto de puntos en el plano proyectivo cuyas coordenadas homogéneas satisfagan el polinomio $\tilde{P}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Lema 1 Sea $\tilde{C}$ curva en $\mathbb{RP}^2$ definida por el polinomio

$$P(x, y, z) = x^2 + a^2 y^2 - b^2 z^2$$

con $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Luego existe

$$f : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \tilde{C}$$

homeomorfismo.

Demostración. Considérese la función

$$[x, y] \mapsto [2x, \frac{x^2 - y^2}{a}, \frac{x^2 + y^2}{b}]$$

esta es una biyección continua de un compacto en un espacio Hausdorff. ■

De manera similar al párrafo anterior, pensemos la parábola definida por $Q(x, y) = x^2 - y$. Proyectivizando tenemos $\tilde{Q}(x, y, z) = x^2 - yz$, cuyas soluciones diremos que definen una parábola en $\mathbb{RP}^2$. Finalmente para la hipérbola $R(x, y) = xy - 1$ su proyectivización $\tilde{R}(x, y, z) = xy - z^2$, define a la hipérbola en $\mathbb{RP}^2$. Notemos que la circunferencia, la parábola y la hipérbola en $\mathbb{RP}^2$ corresponden al conjunto de soluciones de un polinomio de grado dos. Extrapolando podemos pensar en definir cónica en $\mathbb{RP}^2$ como el conjunto solución de un polinomio homogéneo de grado dos.

Observemos que al parecer, el proceso de proyectivización sí depende del sistema de coordenadas, pues hemos considerado el abierto U_3 , las coordenadas inhomogéneas $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ y la función ϕ_3 . Veremos que para sortear esto, el álgebra lineal nos brinda una herramienta poderosa para poder desarrollar el estudio sin tener que escoger un sistema de referencia especial.

Si pensamos en polinomios homogéneos de grado dos en general, entonces consideremos:

$$R(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$$

Es claro que $R(x, y, z)$ define una forma cuadrática. Del álgebra lineal sabemos que las formas cuadráticas y las matrices simétricas se determinan unas a las otras [HK73]. Luego a R le podemos asociar una matriz simétrica a saber:

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix}$$

Por ejemplo: El polinomio $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ puede representarse como $P(X) = XAX^t$ donde $X = (x, y, z)$ y A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación 2 *Notemos que con lo anterior estamos transformamos nuestro problema geométrico a uno algebraico.*

El resultado de poder diagonalizar una matriz simétrica, nos dará información geométrica de las curvas de grado dos. Más aún nos permitirá mapear de manera homeomorfa una curva $\tilde{C}$ que posiblemente interseque la línea al infinito, en un abierto que básicamente sea $\mathbb{R}^2$ y sin intersecciones ya con dicha línea.

Teorema 1 *Dada una matriz simétrica A , ésta es congruente a una matriz diagonal, es decir, existe matriz P invertible de tal forma que $A = P^{-1}DP$.*

Sabemos que existe una base v_1, v_2, v_3 en la cual la forma canónica de la matrix A es $[1,1,1]$, $[1,1,-1]$, $[1,1,0]$, $[1,-1,0]$ o $[1,0,0]$. Esto en el contexto que estamos trabajando dice: los puntos de la curva C definida por esta matriz son aquellos cuyas coordenadas homogéneas cumplen con $x^2 + y^2 + z^2$, $x^2 + y^2 - z^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, $x^2 = 0$. La primera ecuación no la cumple ningún punto, la segunda es nuestra definición de circunferencia en $\mathbb{RP}^2$ la tercera la cumple sólo el punto $[0,0,1]$ la cuarta los puntos de las rectas $x + y = 0$ y $x - y = 0$ y la quinta los puntos de la recta $x = 0$. Así, la ecuación de segundo grado puede representar en los casos degenerados, una recta, un par de rectas, un punto o el conjunto vacío. Puesto que estos casos degenerados son muy sencillos, podemos omitirlos. En el caso no degenerado, la única curva que figura es la circunferencia. Es no es casual, nos sugiere que la representación de una cónica en $\mathbb{RP}^2$ no depende del sistema de coordenadas pues las coordenadas homogéneas de una cónica en $\mathbb{RP}^2$ no degenerada *salvo una transformación proyectiva*, siempre anularán la ecuación, $x^2 + y^2 = z^2$. Finalizaremos el capítulo observando esta característica de las cónicas en el proyectivo, por lo pronto para considerar todos los posibles casos, empecemos por la siguiente

Definición 6 *En $\mathbb{RP}^2$ llamaremos cónica a una curva definida por un polinomio homogéneo de grado 2.*

El comentario anterior cobra sentido cuando en el teorema 1 nos preguntamos por las implicaciones geométricas de la matrix P . Esta matriz induce una transformación proyectiva, transformación a la que hace referencia el comentario arriba expuesto. Ahora podemos afirmar parte de la conclusión de este capítulo: *en el plano proyectivo real, todas las cónicas son homeomorfas a la circunferencia S^1 .* Formalicemos esto último.

Definición 7 *Sea $f: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ una función biyectiva entre planos proyectivos, diremos que f es una transformación proyectiva si para algún isomorfismo*

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tenemos que

$$f[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3]$$

donde

$$(y_1, y_2, y_3) = T(y_1, y_2, y_3).$$

Observación 3 *Puesto que transformación proyectiva, es composición de un isomorfismo, el cual es continuo, la transformación proyectiva es continua.*

Ejemplo: consideremos los ceros del polinomio $f(x, y) = x^2 - y$ que define una parábola en el plano euclidiano. Projectivizando obtenemos $\tilde{f}(x, y, z) = x^2 - yz$. A esta forma cuadrática definida por $\tilde{f}$ le asociamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 4 *La intersección de esta curva con la línea $z = 0$ es no vacía, consiste de un punto. De la expresión 1.2 los puntos de intersección de la curva definida por $\tilde{f}$ con la línea al infinito deben satisfacer la ecuación $x^2 = 0$. Luego $x = 0$ teniendo $[0, y, 0]$ y $y \in \mathbb{R}$ que puede pensarse como $[0, 1, 0]$.*

ahora podemos diagonalizar a la matriz A como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos la matriz P la cual da la congruencia de A con la matriz diagonal:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz define una transformación lineal, a saber,

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x, y - z, y + z)$$

que es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Por tanto esta transformación induce a su vez, una transformación proyectiva

$$\tilde{P}: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$$

$$\tilde{P}[x, y, z] = [x, y - z, y + z].$$

Observamos que la matriz diagonal $[1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ sugiere que la parábola proyectivizada y después mapeada bajo la transformación proyectiva $\tilde{P}$, satisface el polinomio

$$\tilde{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{y}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{z}^2.$$

Haciendo el cálculo, tenemos que los puntos con coordenadas homogéneas $[x, y - z, y + z]$ deben anular a $\tilde{Q}$ sabiendo que $[x, y, z]$ anulan a $\tilde{f}(x, y, z) = x^2 - yz$ esto es claro:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{4}[y - z]^2 - \frac{1}{4}[y + z]^2 &= x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}yz + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}yz - \frac{1}{4}z^2 \\ &= x^2 + yz \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Advertimos que la parábola proyectivizada con un punto en el infinito, bajo la transformación proyectiva $\tilde{P}$, satisface la ecuación $\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{y}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 = 0$. Lo cual nos dice que es homeomorfa a la circunferencia S^1 . Más aún si hacemos $\mathbf{z} = 1$ obtenemos una elipse en el sentido usual, la cual es la visualización en el plano euclídeo de la parábola sin su punto al infinito.

En el caso general, tenemos una curva $\tilde{C}$ de grado dos en el plano proyectivo, la cual determina una matriz A . Bajo ciertas hipótesis e invariantes como los son el índice y la signatura, siempre podemos diagonalizar, a $[1, 1, -1], [1, -1, 1]$ o $[-1, 1, 1]$. Luego, según la matriz diagonal obtenida, la cónica en cuestión satisface una de las ecuaciones correspondientes. Esto nos sugiere sobre qué elemento de la cubierta: $\{U_1, U_2, U_3\}$, proyectaremos nuestra curva y tendremos un conjunto en el plano U_j homeomorfo a la circunferencia S^1 . Esto pues la matriz diagonal nos dirá según sea el caso que la cónica en $\mathbb{RP}^2$ satisface una de las ecuaciones: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ o $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Ahora como sabemos que las matrices que inducen estas ecuaciones son congruentes, bastará decir las coordenadas homogéneas de la curva $\tilde{C}$ satisfacen mediante una transformación proyectiva (la inducida por la matriz que P tal que $A = P^1 D P$) la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

Ejemplo: Consideremos la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 + 1 = 0$ proyectivizando obtenemos la forma cuadrática:

$$H(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

Observación 5 *La intersección de esta curva con la línea $z = 0$ es no vacía. Veamos que de la expresión 1.2 obtenemos que los puntos de intersección de la curva definida por $Q(x, y, z)$ con la línea al infinito $z = 0$, deben satisfacer la ecuación $x^2 - y^2 = 0$, luego esta intersección contiene dos puntos, a saber: $[1, 1, 0]$ y $[1, -1, 0]$.*

Ahora a la forma cuadrática $H(x, y, z)$ le podemos asociar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que diagonalizamos de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

define el isomorfismo

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (z, x - y, x + y)$$

Con éste definimos la transformación proyectiva

$$\tilde{H}[x, y, z] = [z, x - y, x + y]$$

Mediante un cálculo similar al hecho en el ejemplo para la parábola y un cambio de variable (el cambio de variable se debe a una rotación en el plano), encontramos que estas coordenadas homogéneas $[z, x - y, x + y]$ anulan un polinomio de la forma $R(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, con lo cual podemos afirmar: lo mismo que sucede para la parábola proyectiva, la hipérbola proyectivizada es homeomorfa a S^1 . Sobre este tema se puede leer [Mir95].

Observación 6 Sabemos que la relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia, luego obtenemos: la parábola proyectiva y la hipérbola proyectiva son homeomorfas. Ésto mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & H \\ h \downarrow & \nearrow f & \\ P & & \end{array}$$

donde g y h son los respectivos homeomorfismos a la circunferencia.

Observación 7 En $\mathbb{R}^2$ circunferencia, parábola e hipérbola, son esencialmente distintas. si bien hemos visto en $\mathbb{RP}^2$ son topológicamente lo mismo, la diferencia que impone el plano euclídeo se refleja también en el plano proyectivo: circunferencia, la parábola y la hipérbola tienen respectivamente, cero uno y dos puntos de intersección con la línea al infinito.

Analicemos qué ocurre geoméricamente en los dos ejemplos anteriores. Para este último tenemos que los puntos donde se anula el polinomio $x^2 - y^2 + z^2$ nos definen en $\mathbb{R}^3$ un **cono**, con eje sobre el eje Y . La hipérbola se dibuja como curva de nivel cuando tomamos el corte con el plano $z = 1$, como se muestra en la figura:

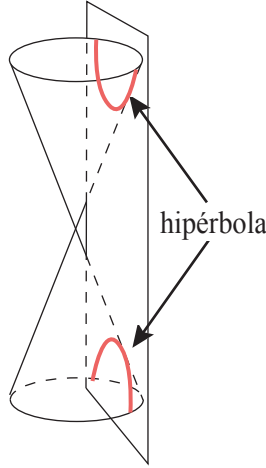


Figura 1.2: Cono en $\mathbb{R}^3$

Notamos que las curvas contenidas en los planos de corte a este cono, (la hipérbola en el caso anterior) son perspectivas que tenemos de una sola curva

1.4. Cónicas en el Plano Proyectivo Real 1. Secciones Cónicas en el Plano Proyectivo

que vive en $\mathbb{RP}^2$ y que es homeomorfa a S^1 . El isomorfismo que nos define la transformación proyectiva

$$T(x, y, z) = (z, x - y, x + y)$$

manda al plano en $\mathbb{R}^3$ definido por $z = 1$ al plano $x = 1$. La intersección del cono con dicho plano es la circunferencia. Esto es, el isomorfismo T mapea al plano $z = 1$ en un plano cuya intersección con el cono sea una curva homeomorfa a la circunferencia.

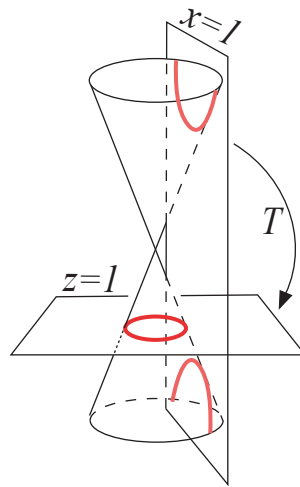


Figura 1.3: Mapeado la hipérbola en S^1

Para el ejemplo de la parábola la ecuación $x^2 = yz$ nos define en $\mathbb{R}^3$ conjunto M como lo muestra la figura.

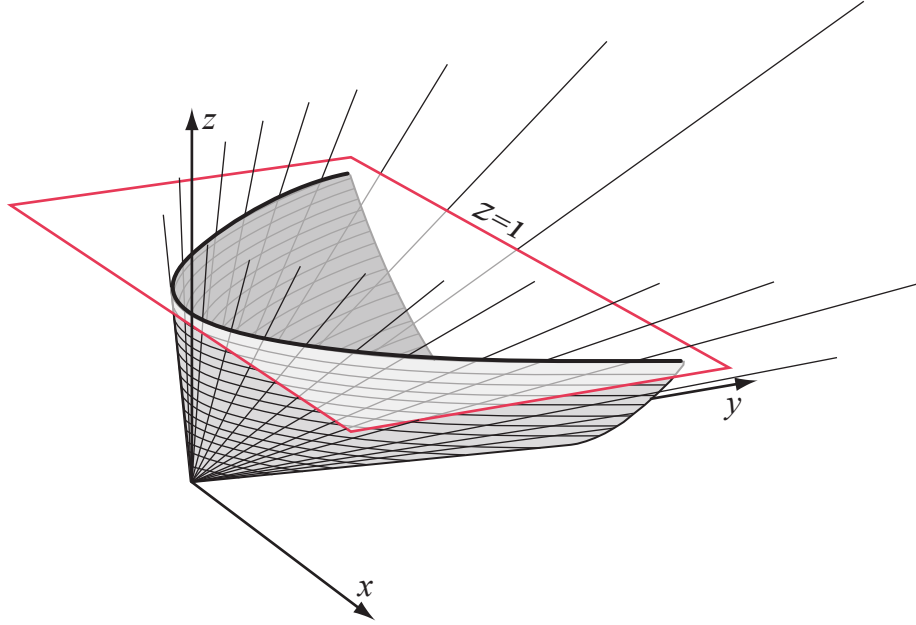


Figura 1.4: Parábola en el plano afín $z = 1$.

Ahora el isomorfismo T que nos induce la transformación proyectiva, está dado por

$$T(x, y, z) = (x, y - z, y + z).$$

De de igual manera vemos que el plano $z = 1$ es mapeado bajo T al plano *ecuacion* en el cual hemos comprobado, que la intersección con el conjunto M es homeomorfo a la circunferencia.

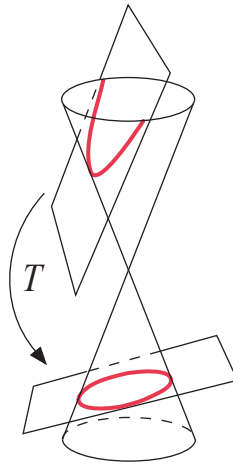


Figura 1.5: Transformación Proyectiva

Conclusión

Hemos construido un espacio topológico, el cual tiene subconjuntos abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^2$. A dicho espacio le hemos llamado plano proyectivo real y lo denotamos $\mathbb{RP}^2$. Analizamos el comportamiento de las secciones cónicas compactificadas inmersas en $\mathbb{RP}^2$. Observamos que pese a no ser homeomorfas en $\mathbb{R}^2$, sus compactificaciones sí son homeomorfas en $\mathbb{RP}^2$. Al final analizamos la ecuación general de 2° grado en el plano proyectivo. Observamos que la familia de curvas de grados dos en $\mathbb{RP}^2$ consta de un sólo elemento, hasta por homeomorfismo. En los casos no degenerados.

Hacia el próximo capítulo. *No restringiéndonos a las curvas de grado dos, estudiaremos la familia de curvas de grado d en el plano proyectivo, esta vez definido sobre los números complejos.*

1.4. Cónicas en el Plano Proyectivo Real 1. Secciones Cónicas en el Plano Proyectivo

Capítulo 2

Curvas Algebraicas Complejas

Se ve que la experiencia desempeña una función indispensable en la génesis de la geometría, pero sería un error concluir con ello que la geometría es una ciencia experimental. El objeto de la geometría es el estudio de un grupo en particular. La experiencia nos guía en la elección de entre todos los grupos posibles. Esta elección no nos impone y tampoco nos permite reconocer cuál es la geometría más verdadera, sino cuál es la más cómoda.
Filosofía de la Ciencia, Henri Poincaré.¹

En el capítulo anterior ejemplificamos como curvas algebraicas reales, cónicas, “inmersas” en un espacio “correcto” presentan más simetrías que cuando las estudiamos como curvas en $\mathbb{R}^2$. En este sentido llamamos “correcto.” al espacio $\mathbb{RP}^2$. Vimos que en ese espacio ambiente las propiedades topológicas de estas curvas se funden en las de una sola: S^1 . El camino para poder alcanzar esta simetría de las cónicas en $\mathbb{R}^3$ consistió básicamente en eliminar distinciones entre puntos “finitos” e “infinitos”. Para ello definimos cónica en el sentido usual y le agregamos ciertos puntos, que llamamos “puntos al infinito”. La idea medular es cómo añadir estos puntos a la curva de manera correcta y pensar a la curva inmersa en un espacio adecuado para que esta “añadidura” tenga sentido.

¹Edición U.N.A.M. 1964.

Estos mismo procedimiento nos disponemos a formalizar en este apartado para conjuntos más generales que las cónicas del capítulo anterior. Definiremos curvas algebraicas complejas, las cuales en el caso de estar inmersas en $\mathbb{C}^2$ llamaremos **curva afín**. Añadiéndole a ésta sus puntos al infinito obtendremos lo que llamaremos **curva proyectiva** compleja.

2.1. Curvas afines

En lo subsecuente, decidimos trabajar sobre el campo de los números complejos puesto que $\mathbb{C}$ es un campo algebraicamente cerrado. De seguir en el campo de los números reales, dado que las curvas afines y proyectivas son ceros de polinomios, podría darse el caso, de estar en algún momento tratando con el conjunto vacío,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 1 = 0\}.$$

Sea $P(x, y)$ un polinomio no constante en dos variables con coeficientes complejos. Diremos que $P(x, y)$ no tiene factores repetidos si no lo podemos escribir como $P(x, y) = (Q(x, y))^2 R(x, y)$ donde Q y R son polinomios y $Q(x, y)$ no es constante.

Definición 8 Sea $P(x, y)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos y sin factores repetidos, entonces una curva algebraica afín en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definida por P es:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}.$$

Llamamos a C curva algebraica afín en analogía con las curvas reales. Consideramos polinomios sin factores repetidos, pues deseamos con esto eliminar el caso de una curva C definida por dos polinomios distintos. Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ no tienen factores repetidos entonces definen la misma curva afín si y sólo si existe un $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ de tal forma que $P(x, y) = \lambda Q(x, y)$.

Definición 9 El grado de una curva afín C definida por el polinomio $P(x, y)$ será el grado de P . Esto es:

$$d = \max\{r + s : C_{r,s} \neq 0\}$$

donde

$$P(x, y) = \sum_{r,s} C_{r,s} x^r y^s.$$

Un punto $(a, b) \in C$ es llamado singular (o singularidad), de C si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Denotaremos al conjunto de singularidades de C como $\text{Sing}(C)$, C es llamada no singular si $\text{Sing}(C) = \{\emptyset\}$.

Ejemplo: La curva definida por $x^2 + y^2 = 1$ es no singular. En cambio la curva definida por $y^2 = x^3$ es singular en el punto $(0, 0)$.

Como ya mencionamos, un polinomio $P(x, y)$ que define una curva afín, sobre los números complejos, siempre tiene raíces, (así una curva afín nunca es el conjunto vacío). De aquí en pensar que podemos factorizarlo en factores lineales. Veamos bajo qué condiciones esto es cierto.

Definición 10 Una curva definida por una ecuación lineal $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ con α, β, γ números complejos y α y β ambos no cero, es llamada una línea.

Definición 11 Un polinomio $P(x_1, \dots, x_n)$ en n variables con coeficientes en $\mathbb{C}$, es homogéneo de grado d si

$$P(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d P(x_1, \dots, x_n)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Equivalentemente P es de la forma

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r_1 + \dots + r_n} a_{r_1, \dots, r_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$$

con $a_{r_1 \dots r_n} \in \mathbb{C}$.

Lema 2 Si $P(x, y)$ es un polinomio homogéneo es dos variables con coeficientes en $\mathbb{C}$, de grado d . Entonces $P(x, y)$ factoriza como producto de polinomios lineales:

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^d (\alpha_i x + \beta_i y)$$

donde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$

Demostración. La idea será aplicar lo que sabemos de polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{C}$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_0 y^d + \dots + a_d x^d \\ &= y^d \left[a_0 + a_1 \left(\frac{x}{y} \right) + \dots + a_d \left(\frac{x}{y} \right)^d \right] \end{aligned}$$

Observemos que

$$\sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

es un polinomio de una variable, donde los coeficientes a_i no son todos cero simultáneamente. Luego, si $j = \max\{1, \dots, d : a_j \neq 0\}$ por el teorema fundamental del álgebra, existen $\gamma_1, \dots, \gamma_j \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{aligned} P(x, y) &= y^d \left[a_0 + a_1 \left(\frac{x}{y}\right) + \dots + a_d \left(\frac{x}{y}\right)^d \right] \\ &= a_j y^d \left(\frac{x}{y} - \gamma_1\right) \dots \left(\frac{x}{y} - \gamma_j\right) \\ &= a_j y^{d-j} (x - \gamma_1 y) \dots (x - \gamma_j y) \end{aligned}$$

Como el grado de P es d se tiene el resultado. ■

Ahora enunciaremos un par de definiciones que serán de mucha utilidad en los capítulos subsecuentes.

Definición 12 *La multiplicidad de una curva C definida por un polinomio $P(x, y)$ en un punto $(a, b) \in \mathbb{C}$ es el menor entero positivo m tal que:*

$$\frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \neq 0$$

para ciertos $i \geq 0, j \geq 0$ tales que $i + j = m$. El polinomio

$$\sum_{i+j=m} \frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i!j!}$$

es un polinomio homogéneo de grado m que sabemos puede ser factorizado como un producto de m polinomios lineales de la forma

$$\alpha(x-a) + \beta(y-b)$$

donde $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$. Las líneas definidas por estos polinomios lineales son llamadas líneas tangentes a C en (a, b) . El punto (a, b) es no singular si y sólo si su multiplicidad m es 1. En este caso C en (a, b) posee solamente una línea tangente definida por:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)(y-b) = 0$$

Un punto $(a, b) \in C$ es llamado un punto doble si su multiplicidad es dos.

Ejemplos:

Las curvas cúbicas definidas por

$$y^2 = x^3 + x^2$$

y

$$y^2 = x^3$$

ambas tienen un punto doble en el origen.

Con las definiciones dadas hasta ahora podemos contestar ¿para que valores de $a, b \in \mathbb{C}$ la curva

$$y^2 = 4x^3 + ax + b$$

es una curva no singular?

Bastará calcular las derivadas parciales y darnos cuenta de que el problema se reduce a encontrar las soluciones de la ecuación $4x^3 + ax + b = 0$.

En lo subsecuente consideraremos únicamente curvas afines no singulares.

2.2. Sobre La Clasificación Topológica De Curvas

En los capítulos subsecuentes observaremos que una curva afín no singular, es una *2-variedad real*. Aquí es donde hacemos uso de resultados y métodos topológicos para dar luz a problemas que se aprecian a primera vista como puramente algebraicos. Sabemos que las variedades dos-dimensionales compactas, conexas y orientables están clasificadas de manera topológica. Véase [Mun75]

Como primer paso a tratar de clasificar topológicamente las curvas algebraicas, este teorema puede efectuar una clasificación. Veremos que en efecto, mediante algunas simplificaciones, este teorema nos dice que topológicamente, ciertas curvas algebraicas están clasificadas.

Veamos que las curvas afines cumplen con las hipótesis del teorema, salvo un detalle: la compacidad.

Empecemos por observar el comportamiento de este fenómeno en las curvas afines. Aplazando al final la prueba de conexidad y orientabilidad para una curva afín C . Consideremos C curva afín, definida por el polinomio $P(x, y)$ irreducible. Si suponemos a C como un conjunto compacto en $\mathbb{C}^2 (\approx \mathbb{R}^4)$, existe un disco $D \subset \mathbb{C}^2$ tal que $C \subset D$. Existe $x_0 \in \mathbb{C}$ de tal forma que el conjunto $\ell = \{(x_0, y) : y \in \mathbb{C}\} \subset D^c$. Ahora consideremos el polinomio $P(x_0, y)$ en la variable y con coeficientes en $\mathbb{C}$. Por el teorema fundamental del álgebra, existe $y_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(x_0, y_0) = 0$, luego hay puntos

de la curva afín fuera del disco D lo cual es una contradicción. Esto nos dice que ninguna curva afín es un conjunto compacto, pues estos conjuntos no son acotados en $\mathbb{C}^2$. Observemos sin embargo, dado que los polinomios son continuos, $C = P^{-1}\{(0)\}$ es un conjunto cerrado. Por tanto bastará considerarla “inmersa” en un espacio que sea compacto y que contenga al espacio $\mathbb{C}^2$: una compactificación de $\mathbb{C}^2$. Con ello tendremos C compacta.

2.2.1. Plano Projectivo Complejo

Hasta este punto la compactificación de $\mathbb{C}^2$ podría ser arbitraria. Observemos que existe una compactificación sugerida por la geometría de las curvas inmersas en $\mathbb{C}^2$. Tomemos una curva afín C . Sabemos ésta no es compacta en $\mathbb{C}^2$, podemos incluirla en un espacio más grande, digamos $\mathbb{C}^3$. Esto lo hacemos de la siguiente forma. Dibujamos a C en una pantalla 2-dimensional ($\approx \mathbb{C}^2$), que no pase por el origen. A cada $x \in C$ le asociamos $\ell = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C} - 0\}$. Esto es: a cada punto de la curva afín C le asociamos un subespacio de $\mathbb{C}^3$ de dimensión 1. A estos últimos llamémosles *1-subespacios*.

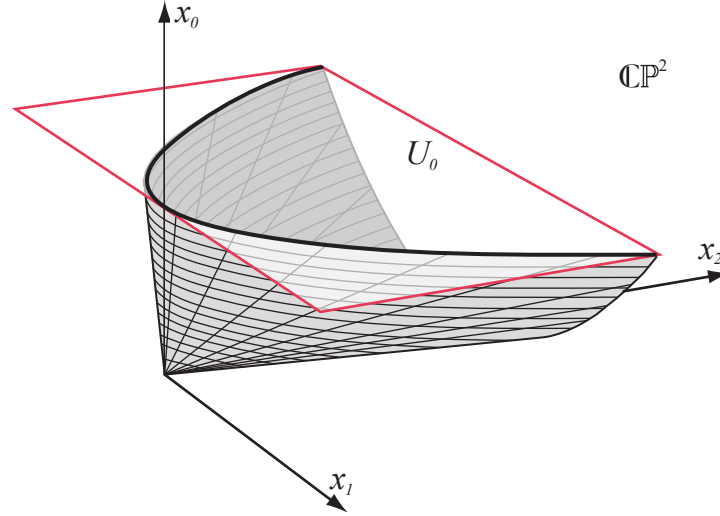


Figura 2.1: $\mathbb{CP}^2$

la relación se ve

$$\{\text{puntos de } C\} \rightarrow \{1\text{-subespacios de } \mathbb{C}^3\} \quad (2.1)$$

Observemos que esta relación es inyectiva, y notemos el siguiente fenómeno: Una vez establecida la relación descrita en (2.1), los subespacios relacionados con los puntos de C se aproximan de manera natural a *1-subespacios de $\mathbb{C}^3$* que ya no están más en correspondencia con puntos de C . Es decir, hay subespacios que “deberían estar” en correspondencia con puntos de C ; estos serán los puntos al infinito de C .

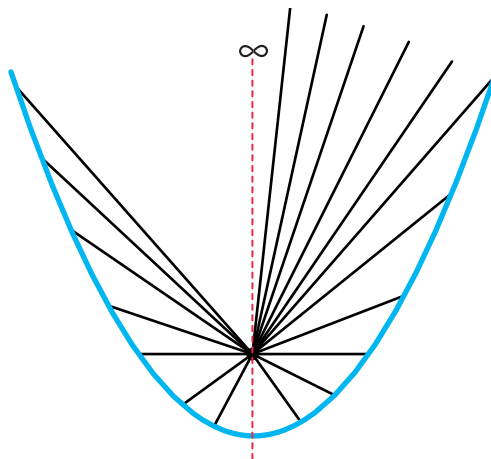


Figura 2.2: Parábola en $\mathbb{P}^2$

Introduzcamos la compactificación de $\mathbb{C}^2$ como el espacio de todos *1-subespacios de $\mathbb{C}^3$* . Construir de esta manera la compactificación de $\mathbb{C}^2$ nos dará la compactificación de todas las curvas afines, inmersas en el espacio de *1-subespacios de $\mathbb{C}^3$* . Todo subespacio de dimensión unitaria que no esté en el plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z = 0\}$ contienen un único elemento de la forma $(x, y, 1)$, los subespacios de dimensión 1 que pertenezcan al plano $\{z = 0\}$ serán pensados como los puntos al infinito. Luego podemos identificar entre puntos “finitos” e “infinitos” si $z \neq 0$ ó $z = 0$ respectivamente.

Definición 13 El plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^2$ es el conjunto de subespacios de dimensión 1 en $\mathbb{C}^3$. Cuando pensamos en los subespacios unidimensionales de $\mathbb{C}^2$ obtenemos la línea proyectiva $\mathbb{CP}^1$.

Observación 8 Con la relación (2.1) entre puntos de la curva afín C y *1-subespacios* nos percatamos que la propiedad de la curva afín en $\mathbb{C}^2$ de no estar acotada, se traduce en que el conjunto de *1-subespacios* no posea uno o algunos puntos de acumulación en $\mathbb{CP}^2$. Por lo tanto cuando compactificamos C , le estamos adicionando esos puntos de acumulación faltantes.

Un subespacio $V \in \mathbb{C}^3$ de dimensión 1, está generado por un elemento no cero $x \in V$. Entonces $\mathbb{CP}^2$ lo podemos identificar con el conjunto de clases de equivalencia en $\mathbb{C}^3$ donde para $x, y \in \mathbb{C}^3$ decimos que $x \sim y$ si y sólo si existe un $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ de tal forma que $x = \lambda y$. Esto es, $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3 / \sim$. Por tanto para un elemento $[x] \in \mathbb{CP}^2$ podemos elegir un representante de clase $x \in \mathbb{C}^3$. Este elemento no cero tiene coordenadas, las cuales nos servirán para dar coordenadas al conjunto de clases de equivalencia: coordenadas en $\mathbb{CP}^2$.

Definición 14 *Cualquier vector no cero $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$ representa un elemento $x \in \mathbb{CP}^2$, llamemos a $[x_0, x_1, x_2]$ coordenadas homogéneas de $x \in \mathbb{CP}^2$. Entonces*

$$\mathbb{CP}^2 = \{[x_0, x_1, x_2] : (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}\}$$

y

$$[x_0, x_1, x_2] = [y_0, y_1, y_2]$$

si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ de tal forma que $x_j = \lambda y_j$ para toda j .

Para dar una topología a $\mathbb{CP}^2$ consideramos la función $\pi : \mathbb{C}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ que a cada punto lo manda a su clase de equivalencia. Se define que $U \subset \mathbb{CP}^2$ es abierto si su imagen inversa $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^3$ es abierto con la topología usual.

Con las coordenadas homogéneas definidas, y dado que éstas no son únicas, podemos pensar en los siguientes conjuntos U_0, U_1, U_2 subconjuntos de $\mathbb{CP}^2$ tales que $U_j = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{CP}^2 : x_j \neq 0\}$ donde la condición $x_j \neq 0$ no depende de la elección de coordenadas. Además U_j es abierto en $\mathbb{CP}^2$. Sin pérdida de generalidad supongamos $x_0 \neq 0$

Definamos $\varphi_0 : U_0 \subset \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ como

$$\varphi_0[x_0, x_1, x_2] = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right)$$

donde la inversa está dada por

$$(y_1, y_2) \mapsto [1, y_1, y_2]$$

Tenemos que esta función es un **homeomorfismo**. Notemos que para cada $x \in \mathbb{CP}^2$, $x = [x_0, x_1, x_2]$ donde no todas las coordenadas son cero simultáneamente. Como U_j es abierto y $\varphi_j : U_j \subset \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es homeomorfismo, para cada $x \in \mathbb{CP}^2$ existe un abierto U_j que lo contiene, de tal manera que $U_j \approx \mathbb{C}^2$. Esto es, $\mathbb{CP}^2$ es una variedad topológica de dimensión 2 compleja.

Proposición 2 $\mathbb{CP}^2$ es compacto.

Demostración. Sea $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{CP}^2$. Consideremos

$$\lambda = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2$$

,

$$[x_0, x_1, x_2] = [\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0, \lambda^{-\frac{1}{2}}x_1, \lambda^{-\frac{1}{2}}x_2]$$

,

$$|\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0|^2 + |\lambda^{-\frac{1}{2}}x_1|^2 + |\lambda^{-\frac{1}{2}}x_2|^2 = 1$$

. Esto nos dice que

$$[x_0, x_1, x_2] \in \pi(S^3)$$

donde S^3 es la esfera unitaria en $\mathbb{CP}^2 \approx \mathbb{R}^4$ por tanto es imagen de un compacto y tenemos el resultado. ■

Definición 15 Una transformación proyectiva de $\mathbb{CP}^2$ en sí mismo, es una biyección $f : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ tal que para algún isomorfismo $g : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tenemos que

$$f[x_0, x_1, x_2] = [y_0, y_1, y_2]$$

donde

$$(y_0, y_1, y_2) = g(x_0, x_1, x_2)$$

Lema 3 Una transformación proyectiva es continua.

Demostración. Sea un abierto $U \subset \mathbb{P}^2$. Veamos que $f^{-1}(U)$ es abierto. Tenemos para algún isomorfismo g :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}^3 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

y dado que $\pi_1(g^{-1}(\pi_2^{-1}(U)))$ es abierto. Se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto y por tanto f es continua. ■

2.2.2. Curvas Projectivas en $\mathbb{CP}^2$

Definimos curva afín en $\mathbb{C}^2$: ceros de un polinomio $P(x, y)$. Para trasladar el concepto de curva afín a $\mathbb{CP}^2$ y seguir con este enfoque, debemos considerar polinomios que tomen en cuenta que para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, la coordenada $[x_0, x_1, x_2]$ es la misma que $[\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2]$. Recordemos que un polinomio $P(x, y, z)$ es homogéneo de grado d si

$$P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$$

Definición 16 Sea $P(x, y, z)$ polinomio homogéneo no constante con coeficientes complejos. Asumamos que P no tiene factores repetidos. Entonces la curva projectiva C definida por $P(x, y, z)$ es

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : P(x, y, z) = 0\}$$

En este caso pensamos en polinomios homogéneos que no tengan factores repetidos por la misma razón que en el caso de curvas afines: Dos polinomios homogéneos que no tienen factores repetidos definirán la misma curva projectiva si y sólo si uno de estos polinomios es múltiplo escalar del otro.

Notemos que como el polinomio es homogéneo, si éste se anula en un $x \in V \subset \mathbb{C}^3$ donde V es un subespacio de dimensión 1. Entonces $P(x, y, z)$ se anulará en todo el subespacio U pues $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z) = 0$. Así, estará bien definido el pensar que se anula en $\mathbb{P}^2$.

Definición 17 El grado de una curva projectiva C en $\mathbb{CP}^2$ definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ es el grado del polinomio P . La curva C es llamada irreducible si el polinomio es irreducible.

Definición 18 Un punto $[a, b, c]$ de una curva projectiva C en $\mathbb{CP}^2$ definida por el polinomio $P(x, y, z)$ es llamado singular si:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

El conjunto de puntos singulares de C lo denotaremos por $Sing(C)$. La curva C es llamada no singular si $Sing(C) = \emptyset$

Ejemplos La curva projectiva en $\mathbb{CP}^2$ definida por $x^2 + y^2 = z^2$ es una curva no singular. En cambio la curva definida por $y^2 z = x^3$ tiene un punto singular en $[0, 0, 1]$

Definición 19 Una curva proyectiva definida por la ecuación lineal

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

donde α, β, γ no son cero simultáneamente, es llamada línea proyectiva. La línea tangente a la curva C definida por el polinomio $P(x, y, z)$ en un punto no singular $[a, b, c] \in C$, es la línea

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c)z = 0.$$

Ahora por cómo construimos la compactificación de $\mathbb{C}^2$ contamos con intuición para la veracidad del siguiente:

Lema 4 (Compacidad) Una curva proyectiva en $\mathbb{CP}^2$

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : P(x, y, z) = 0\}$$

es un conjunto compacto.

Demostración. Dado que $\mathbb{CP}^2$ es compacto, bastará ver que C es un conjunto cerrado en $\mathbb{CP}^2$. Esto se sigue de considerar

$$\pi^{-1}(C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : P(x, y, z) = 0\}$$

el cual es un subconjunto cerrado en $\mathbb{C}^3$ puesto que los polinomios son continuos. Por lo tanto C es un subconjunto de $\mathbb{CP}^2$ cerrado y con esto, compacto. ■

Del lema anterior podemos anticipar que el tipo de curvas que podemos clasificar mediante el teorema mencionado en un principio serán las curvas proyectivas. Dado que hemos empezado este capítulo pensando en curvas afines, antes de probar la conexidad y la orientabilidad de una curva afín y por tanto el de una proyectiva, observemos la relación existente entre estas últimas.

2.2.3. Curvas Proyectivas y Afines

Empezamos este capítulo en $\mathbb{C}^2$ deseando clasificar los objetos a estudiar: Curvas afines. Compactificamos el espacio $\mathbb{C}^2$ considerando una compactificación “natural”, en el sentido de que los puntos añadidos a $\mathbb{C}^2$ (para volverlo compacto), fueron “sugeridos” por las curvas afines inmersas en él. Con ello arribamos a los conceptos de plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^2$ y de curva proyectiva. Entre $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{CP}^2$ sabemos existe una diferencia; la construimos.

Observemos más de cerca esta diferencia. Podemos considerar a $\mathbb{C}^2$ inmerso en $\mathbb{CP}^2$. Sabemos que para $[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2$ al menos una coordenada es distinta de cero, supongamos sin pérdida de generalidad $z \neq 0$. Entonces mediante el mapeo $[x, y, z] \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ el cual sabemos homeomorfismo, obtenemos que $\mathbb{C}^2$ está identificado con el abierto $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\}$. Luego, el complemento de U en $\mathbb{CP}^2$, $U^c = \{[x, y, 0] \in \mathbb{CP}^2\}$ lo podemos identificar como los puntos agregados a $\mathbb{C}^2$ para que este fuese compacto, lo que llamamos “puntos al infinito”. Notemos que mediante el mapeo $[x, y, 0] \mapsto [x, y]$ identificamos estos puntos con $\mathbb{CP}^1$: la línea proyectiva compleja. En suma, tenemos que $\mathbb{CP}^2$ es una unión disjunta de una copia de $\mathbb{C}^2$ y una copia de $\mathbb{CP}^1$. Como ya vimos esta “añadidura” hace de $\mathbb{C}^2$ un espacio compacto.

Ahora, ¿qué relación existe entonces entre curva afín y curva proyectiva? Sabemos que una curva afín en $\mathbb{C}^2$ nunca es un conjunto compacto. Por cómo construimos la compactificación de $\mathbb{C}^2$ tenemos que toda curva afín C en $\mathbb{C}^2$ se extiende de manera natural a una curva proyectiva $\tilde{C} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : P(x, y, z) = 0\}$ donde el polinomio P es homogéneo y los puntos adicionados a C son los “puntos al infinito”. El recíproco también es cierto, dada una curva proyectiva $\tilde{C}$ que no contenga la línea proyectiva $\{z = 0\}$ no singular en $\mathbb{CP}^2$ ésta define una curva afín (no singular), C en $\mathbb{C}^2$. Esto es, existe una biyección

$$\{C \subset \mathbb{C}^2 \text{ afín}\} \longleftrightarrow \{\tilde{C} \subset \mathbb{CP}^2 \text{ no conteniendo la línea } \{z = 0\}\}. \quad (2.2)$$

Veamos por qué esto último es cierto.

Consideremos una curva afín C . Lo afirmado es, que podemos obtener a raíz de C una curva proyectiva $\tilde{C}$, añadiendo a C sus puntos al infinito. Como vimos $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\}$ puede ser identificado con $\mathbb{C}^2$, luego los puntos que debemos añadir a C en $\mathbb{CP}^2$ (que es un conjunto finito), viven en U^c , en la línea $z = 0$. Así C con sus respectivos puntos al infinito se torna en una curva proyectiva $\tilde{C} \subset \mathbb{CP}^2$. Con la propiedad $\tilde{C} \cap U = C$. Veamos que esta “extensión” sigue siendo algebraica.

Sea $P(x, y)$ el polinomio de grado d que define a C en $\mathbb{C}^2$. Exhibamos un $\tilde{P}(x, y, z)$ polinomio homogéneo de grado d que defina una curva $\tilde{C}$ de tal suerte que si $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\}$ tengamos que $C = \tilde{C} \cap U$. Observemos $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\} = \{[x, y, 1] \in \mathbb{CP}^2\}$

Pensando en coordenadas inhomogéneas $(x', y') \in \mathbb{C}^2$

$$P(x', y') = P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = Q\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} z^d P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) &= z^d Q\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) \\ &= \tilde{P}(x, y, z) \end{aligned}$$

De esta forma dada la curva afín $C \subset \mathbb{C}^2$ definida por el polinomio $P(x, y)$, obtenemos su compactificación en $\mathbb{CP}^2$, la curva proyectiva $\tilde{C} \subset \mathbb{CP}^2$ y el polinomio $\tilde{P}(x, y, z)$ que la define. La intersección de $\tilde{C}$ con la línea $z = 0$ son los puntos añadidos a C y es el conjunto de puntos

$$\{[x, y, 0] \in \mathbb{CP}^2 : \sum_{0 \leq r \leq d} a_{r, d-r} x^r y^{d-r} = 0.\}$$

Notemos que este último polinomio es homogéneo y por el lema 1, factoriza en términos lineales

$$\prod_{0 \leq i \leq d} (\alpha_i x + \beta_i y).$$

Las líneas definidas por $(\alpha_i x + \beta_i y) = 0$ son las asíntotas de la curva afín definida por $P(x, y)$ en $\mathbb{C}^2$. Estas líneas nos dicen qué puntos debemos agregar a C de $\mathbb{CP}^1$, a saber, $[-\beta_i, \alpha_i]$ estos puntos son precisamente $\tilde{C} - C$.

Para el caso donde empezamos con una curva proyectiva $\tilde{C}$ definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$, el hecho de hacer $\tilde{C} \cap U = C$, donde $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\}$, y obtener una curva afín C , se refleja algebraicamente en hacer $P(x, y, 1)$. Este polinomio es de grado d si z no es factor de $P(x, y, z)$; esto es, $\tilde{C}$ no contiene la línea $\{z \neq 0\}$. Así, dada una curva proyectiva $\tilde{C}$ la cual no contiene la curva $\{z = 0\}$, obtenemos una curva afín C , y por tanto la biyección

$$\{C \subset \mathbb{C}^2 \text{ afín}\} \longleftrightarrow \{\tilde{C} \subset \mathbb{P}^2 \text{ no conteniendo la línea } \{z = 0\}\}. \quad (2.3)$$

Esta curva C obtenida a raíz de $\tilde{C}$ no es única, hasta por homeomorfismo, pues recordemos que para $C \subset \mathbb{C}^2$, la curva proyectiva asociada depende de cómo está C encajada en $\mathbb{C}^2$. Por tanto, si empezamos con $\tilde{C}$ curva proyectiva y hacemos $\tilde{C} \cap U_j$ podemos obtener para cada abierto U_j una curva afín distinta (no homeomorfas), para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Esto lo entendemos de la forma que al ir de $\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{C}^2$ y así hacer distinción entre puntos finitos e infinitos, dependiendo de cuales puntos de $\tilde{C}$ escojamos para ser los “puntos infinitos” en $\mathbb{C}^2$, al variar esta elección obtenemos curvas en $\mathbb{C}^2$ esencialmente distintas.

2.2.4. Conexidad y Orientabilidad de Curvas Algebraicas

Discutiremos ahora la conexidad y orientabilidad de curvas afines y proyectivas. Sabemos que dada una curva proyectiva $\tilde{C}$ podemos obtener una curva afín $C = \tilde{C} \cap \mathbb{C}^2$. Ahora en virtud de un resultado básico en topología: si el conjunto A es conexo, y

$$A \subset B \subset \bar{A}$$

entonces el conjunto B es conexo, a la vez que $\bar{A}$ también es conexo. Para probar la conexidad de $\tilde{C}$ y C bastará probar la conexidad de $C = \tilde{C} \cap \mathbb{C}^2$ pues $\tilde{C} = \bar{C}$.

Lema 5 *Sea C curva proyectiva no singular de grado d . Entonces existe un sistema coordenado en $\mathbb{CP}^2$ de tal suerte que C posea una ecuación afín de la forma:*

$$f(x, y) = y^d + a_1(x)y^{d-1} + \dots + a_d(x).$$

Donde $a_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $\deg a_j(x) \leq j$ ó $a_j(x) = 0$.

Demostración. Sea una la curva afín C definida por un polinomio $P(x, y)$ de grado d . Si $P(x, y)$ no es de la forma necesaria, consideremos un cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x' + \lambda y' \\ y &= y' \end{aligned}$$

consideremos el coeficiente $b(\lambda)$ del término que involucra a y'^d en

$$P(x' + \lambda y', y'),$$

este polinomio no es el polinomio cero en λ , por tanto tiene un cantidad finita de raíces. Podemos elegir λ de tal suerte que $b(\lambda) \neq 0$. Para esta elección podemos escribir

$$f(x', y') = \left(\frac{1}{b(\lambda)} \right) P(x' + \lambda y', y'),$$

en el sistema coordenado (x', y') la ecuación de C es $f(x', y') = 0$ como deseamos. ■

En la siguiente argumentación hay una bifurcación para probar las dos propiedades: conexidad y orientabilidad. El comienzo de una de estas ramas las señalaremos con letras **negritas**, para después regresar al punto de bifurcación retomar el argumento y finalizar concluyendo lo deseado.

Empecemos suponiendo a C una curva afín definida por un polinomio $f(x, y) = P(1, x, y)$ irreducible. Por el lema 5 podemos pensar a $f(x, y)$ de la forma especial descrita en este lema. Consideremos el discriminante $\mathcal{D}(f)$ de f denotamos el subconjunto cero de $\mathcal{D}(f)$ como

$$D = \{x \in \mathbb{C} : \mathcal{D}(f)(x) = 0\}.$$

Sea

$$\pi : C \rightarrow \mathbb{C}$$

la proyección de C al eje x . Sabemos que $\pi^{-1}(D)$ es un conjunto finito. Véase [Gri80] pág.59. Por tanto para $x \in \mathbb{C} \setminus D$, tenemos d puntos distintos

$$(x, y_i(x)) \in C \setminus \pi^{-1}(D)$$

para $i = 1, \dots, d$ de tal forma que

$$f(x, y_i(x)) = 0.$$

Además para los puntos en $C \setminus \pi^{-1}(D)$, $f_y \neq 0$, por el teorema de la función implícita, cada $y_i(x)$ puede ser considerada como una función analítica definida en una vecindad en la curva algebraica.

Orientabilidad. Esto es, una función $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ donde $U \subset C$. Este argumento nos dice que dada una curva algebraica no singular, mediante el teorema de la función implícita, la podemos dotar de un atlas complejo.

Observación 9 *En este punto de la teoría podríamos continuar estudiando a las curvas algebraicas no singulares mediante análisis complejo: Teoría de superficies de Riemann.*

El atlas $\{U_j, \phi_j\}$ hace de la curva afín C , para la cual sabemos $\text{Sing}(C) = \{\emptyset\}$ una **superficie de Riemann**. La compatibilidad de las cartas coordenadas $\{U_j, \phi_j\}$ en términos de funciones holomorfas, nos dicen que la curva C es orientable. Supongamos la función de transición $\phi^{-1} \circ \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ esta función debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que la curva afín, no singular es orientable.

Conexidad. Volviendo al contexto del inicio. Consideremos una línea Λ la cual conecte los puntos en D y la cual no sea acotada. Cortemos el plano complejo $\mathbb{C}$ a lo largo de esta línea. Obtendremos una región simplemente conexa Ω . Considerando que todas las funciones $y_i(x)$ pueden ser continuadas a toda la región Ω , denotemos estas funciones extendidas mediante $y_i(x)$ una vez más. Por el teorema de identidad de análisis complejo las funciones $y_i(x)$ aún deben satisfacer

$$f(x, y_i(x)) = 0.$$

Ahora continuamos $y_i(x)$ a lo largo de la curva γ la cual cruza $\Lambda \setminus D$. La función extendida y_i^* aún satisface la ecuación

$$f(x, y_i^*(x)) = 0$$

y por tanto debe ser una de las funciones $y_1(x), \dots, y_d(x)$. Si la función inicial satisface que

$$y_i(x) \neq y_j(x),$$

entonces después de la continuación analítica, se debe tener

$$y_i^*(x) \neq y_j^*(x).$$

De no ser así podríamos obtener $y_i(x) = y_j(x)$ continuando analíticamente a lo largo de la curva $-\gamma$. Si existe una curva γ en $\mathbb{C} \setminus D$ de tal suerte que continua analíticamente la curva $y_i(x)$ puedo obtener la función $y_j(x)$, en este caso diremos que las curvas están relacionadas, escribimos

$$y_i(x) \sim y_j(x).$$

Esta relación es claramente una relación de equivalencia. Usando esta relación dividimos la familia $y_1(x), \dots, y_d(x)$ en clases de equivalencia: $E_1, \dots, E_l$.

Un lema técnico que no demostraremos. Véase [Gri80] pág. 63, afirma: para cada E_j tenemos que

$$\prod_{y_i(x) \in E_j} (y - y_i(x)) \in \mathbb{C}[x, y]$$

además

$$f(x, y) = \prod_{j=1}^l \prod_{y_i(x) \in E_j} (y - y_i(x)).$$

Por tanto como $f(x, y)$ es irreducible, se debe tener que $l = 1$, esto es lo mismo que decir $y_1(x), \dots, y_d(x)$ pertenecen a una misma clase de equivalencia, todas son la continuación analítica de cualquier $y_j(x)$ en la familia, esto a lo largo de curvas en $\mathbb{C} \setminus D$. Por tanto podemos decir que cuales quiera dos puntos $(x_0, y_i(x_0))$ y $(x_1, y_j(x_1))$ en $C \setminus \pi^{-1}(D)$ pueden ser conectados mediante una curva. Luego $\mathbb{C} \setminus D$ y por tanto C son conjuntos conexos.

Conclusión

Concluimos este capítulo, entendiendo que las curvas afines cumplen con las propiedades topológicas de conexidad, orientabilidad, más no son conjuntos compactos de $\mathbb{C}^2$. En el camino observamos cómo asoma el concepto de compatibilidad del atlas de una superficie de Riemann a la hora de mostrar la orientabilidad de la curva, y el concepto de continuación analítica a la hora de mostrar la conexidad. Para poder acceder a una clasificación topológica, compactificamos las curvas afines. Luego trabajamos con conjuntos ahora en $\mathbb{CP}^2$ que cumplen con las hipótesis del teorema de clasificación topológica de superficies. Por lo tanto tenemos que las curvas proyectivas son: superficies compactas conexas orientables de género g .

Hacia el próximo capítulo. *Sabemos que las curvas proyectivas no singulares en $\mathbb{CP}^2$ son superficies conexas, orientables, compactas, de género g . Esta familia de superficies topológicamente tienen únicamente un invariante discreto: el género. Por lo tanto para saber qué superficie es en particular, basta conocer su género. Observemos que la clasificación hecha en este capítulo no nos da información del tipo: Si empiezo con una curva proyectiva particular C , ¿qué superficie es? ó lo que es lo mismo ¿qué género tiene?. La respuesta a esta pregunta la estudiaremos en el capítulo III.*

Capítulo 3

Fórmula de Grado y Género

Las buenas matemáticas son hechas por muy poca gente. Las buenas orientaciones son las dictadas por estas pocas personas, ejemplos: Riemann, Elie Cartan, Siegel, siete u ocho en el siglo XVIII. Treinta en el siglo XIX. Los “seguidores” deben de tratar de explicar, de vulgarizar lo que los líderes no se han tomado el tiempo en desarrollar. Este oficio no tiene nada de deshonroso, se emplearon cien años en penetrar en el pensamiento de Riemann...
Jean Dieudonné.

Del capítulo anterior, haciendo uso de un teorema de clasificación topológica, sabemos que las curvas proyectivas no singulares, forman parte de una familia de superficies las cuales, tienen únicamente un invariante discreto: El Género. A una curva de esta familia la denotamos como S_g .

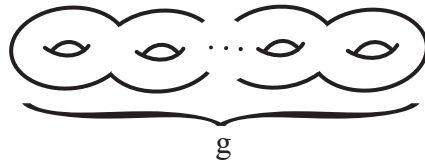


Figura 3.1: Superficie de género g

En este capítulo refinaremos nuestra clasificación. Dada una curva proyectiva de grado d concretaremos qué topología tiene, es decir qué superficie

S_g define. Estableceremos la relación existente entre el grado de la curva y este invariante discreto. La cual se lee:

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

En la demostración que presentaremos, el argumento modular fue confectionado por Francis Kirwan en [Kir95]. En dicha prueba está filtrado el concepto de superficie de Riemann, el cual no nos ocupa en esta tesis. Pero cabe destacar que este ente matemático de estructura analítica, y por tanto local, está muy relacionado con curvas algebraicas. Al grado de poder pensar a la teoría de superficies de Riemann “isomorfa.^a la teoría de curvas algebraicas compactas. Éstos pueden ser considerados dos lenguajes para describir el mismo sistema de relaciones lógicas. [Sha74]

3.1. Fórmula de Grado y Género

Nuestro objetivo es demostrar que una curva proyectiva no singular de grado d en $\mathbb{CP}^2$, es topológicamente una curva S_g . Donde el género satisface la fórmula de grado y género:

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Pensemos en la ideas que motivarán la demostración.

Sea

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : P(x, y, z) = 0\}$$

una curva no singular de grado d en $\mathbb{CP}^2$ no conteniendo al punto $[0, 1, 0]$. Entonces la ecuación $P(x, y, 1) = 0$ define a y como una función multivaluada de x . Para cada valor de $x \in \mathbb{C}$ le corresponden exactamente d valores de y . Esto para puntos que no sean “ramificados”, estos son los valores de x para los cuales existe un valor de y satisfaciendo

$$P(x, y, 1) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, 1).$$

El punto ∞ es considerado como punto de ramificación si existe un valor de y satisfaciendo

$$P(1, y, 0) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(1, y, 0).$$

Si $p_1, \dots, p_r$ son puntos de ramificación, entonces podemos cortar el plano complejo $\mathbb{C}$ a lo largo de los segmentos de recta

$$[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{r-1}, p_r]$$

y definir funciones holomorfas $f_1, \dots, f_d$ en cada plano cortado, (estas funciones resultan ser ramas de una función holomorfa global), de tal suerte que si y es un elemento del plano cortado entonces

$$P(x, y, 1) = 0$$

si y sólo si $y = f_i(x)$ para alguna $i \in \{1, \dots, d\}$. Para cada plano recortado, unión el punto al infinito, podemos construir la curva C topológicamente “pegando” las d copias de el plano cortado a lo largo de los segmentos mencionados. Este procedimiento siempre da como resultado una superficie S_g . Para una prueba geométrica de esto usando polígonos véase [Thu97]. Sin embargo el cálculo de este número g requiere más información de los puntos de ramificación. (la información de cómo pasar de una rama f_i a otra f_j). Esto nos lleva la siguiente subsección.

3.2. Cubiertas ramificadas de $\mathbb{P}^1$

Empecemos con un ejemplo donde veremos concretamente los objetos a definir. La curva no singular $C \in \mathbb{CP}^2$ definida por $y^2 = xz$ admite una suprayección $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ definida por $\phi[x, y, z] = [x, z]$ de tal suerte que si tenemos $[x, z] \in \mathbb{P}^1$ entonces $\phi^{-1}[x, z]$ consiste exactamente de dos puntos, excepto si $x = 0$ o $z = 0$. A tal mapeo le llamaremos **doble cubierta ramificada** de $\mathbb{P}^1$ en los puntos $[0, 1]$ y $[1, 0]$. Los puntos de la curva C que son mapeados a los puntos $[0, 1]$, $[1, 0]$ son llamados **puntos de ramificación** de ϕ . En esta sección veremos que cualquier curva proyectiva no singular de grado $d > 1$ en $\mathbb{CP}^2$ puede considerarse como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$. Mostraremos que si escogemos adecuadamente coordenadas para $\mathbb{CP}^2$ entonces el número de puntos ramificados de ϕ es precisamente $d(d-1)$ esto último lo usaremos para demostrar la relación *grado y género* que buscamos.

En lo subsecuente consideraremos C una curva proyectiva no singular definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ de grado $d > 1$. Aplicando una transformación proyectiva adecuada, podemos asumir que $[0, 1, 0]$ no está en la curva C . Entonces consideremos el mapeo $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ dado por

$$\phi[x, y, z] = [x, z].$$

Definición 20 *El índice de ramificación $\nu_\phi[a, b, c]$ de ϕ en el punto $[a, b, c] \in C$ es el orden del cero del polinomio $P(a, y, c)$ en $y = b$. El punto $[a, b, c]$ es llamado punto de ramificación de ϕ si $\nu_\phi[a, b, c] > 1$.*

(i) $\nu_\phi[a, b, c] > 0$ si y sólo si $[a, b, c] \in C$.

(ii) $\nu_\phi[a, b, c] > 1$ si y sólo si $P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)$. Esto es Si y sólo si $[a, b, c] \in C$ y la línea tangente a C en $[a, b, c]$ contiene el punto $[0, 1, 0]$.

(iii) $\nu_\phi[a, b, c] > 2$ si y sólo si

$$P(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a, b, c) = 0.$$

Esto es, si y sólo si $[a, b, c]$ es un punto de inflexión de C y la línea tangente a C en $[a, b, c]$ contiene al punto $[0, 1, 0]$.

Para probar esto notemos que $[a, b, c] \neq [0, 1, 0]$ entonces $a \neq 0$ o $c \neq 0$. Supongamos lo segundo. Consideremos $P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)$ sabemos que [Kir95]

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_P(a, b, c) &= \frac{d-1^2}{c^2} \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_x \\ P_{yx} & P_{yy} & 0 \\ P_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{d-1^2}{c^2} (P_x)^2 P_{yy} \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{H}_P$ es el resultante del polinomio P , y las derivadas parciales son evaluadas en (a, b, c) . Ahora por las relaciones de Euler, si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = 0$$

entonces como $c \neq 0$ y $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = 0$ el punto $[a, b, c] \in C$ seria un punto singular, lo cual es una contradicción, pues suponemos a C curva no singular. Por tanto $\mathfrak{H}_P(a, b, c) = 0$ si y sólo si

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a, b, c) = 0.$$

Lema 6 *La imagen inversa $\phi^{-1}[a, c]$ de cualquier $[a, c] \in \mathbb{P}^1$ bajo ϕ contiene exactamente*

$$d - \sum_{p \in \phi^{-1}[a, c]} (\nu_\phi(p) - 1)$$

Observación 10 *Observemos que $\phi^{-1}[a, c]$ contendrá exactamente d puntos si y sólo si $\phi^{-1}[a, c]$ no contiene puntos de ramificación.*

Demostración.

Un punto de C está contenido en $\phi^{-1}[a, c]$ si y sólo si es de la forma $[a, b, c]$ donde $b \in \mathbb{C}$ satisface $P(a, b, c) = 0$. Como supusimos que $[0, 1, 0] \notin C$ entonces $P(0, 1, 0) \neq 0$. Podemos asumir que $P(0, 1, 0) = 1$. Entonces $P(a, y, c)$ es un polinomio mónico en la variable y y de grado d luego

$$P(a, y, c) = \prod_{1 \leq i \leq r} (y - b_i)^{m_i}$$

donde $b_1, \dots, b_r$ son números complejos distintos, y $m_1, \dots, m_r$ son enteros positivos de tal forma que

$$m_1 + \dots + m_r = d.$$

Por tanto

$$\phi^{-1}[a, c] = \{[a, b_i, c] : 1 \leq i \leq r\}$$

y el índice de ramificación de ϕ en $[a, b_i, c]$ es

$$\nu_\phi[a, b_i, c] = m_i.$$

■

Definición 21 Sea R el conjunto de puntos de ramificación de ϕ . La imagen $\phi(R)$ de R bajo la función ϕ es llamada conjunto ramal de ϕ , y $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ es llamada una cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$.

Lema 7 (i) ϕ tiene a lo más $d(d-1)$ puntos de ramificación.

(ii) Si $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para cada $[a, b, c] \in C$ entonces la curva C tiene exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación.

Demostración. En el desarrollo de esta prueba usaremos un teorema de estructura algebraica de las curvas proyectivas: El teorema de Bézout [Kir95]. Consecuencia de este teorema es, sea C es no singular, entonces C es una curva irreducible. Por la afirmación $[0, 1, 0] \notin C$, el coeficiente $P(0, 1, 0)$ de y^d es no cero. Luego el polinomio homogéneo

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a, b, c) = 0$$

no es idénticamente cero, y tiene grado $d-1$. Ahora considerando la curva D de grado $d-1$ definida por este polinomio, no tiene componentes comunes

con C . Luego (i) se sigue de la forma débil del teorema de Bézout. Ahora supongamos

$$\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$$

para cada $[a, b, c] \in C$. Por la forma fuerte del teorema de Bézout para probar (ii) es suficiente mostrar que si $[a, b, c] \in R$ donde recordemos que $R = C \cap D$ entonces $[a, b, c]$ es un punto no singular de D y las líneas tangentes a C y a D en $[a, b, c]$ son distintas. Si suponemos lo contrario, entonces $[a, b, c]$ debe satisfacer

$$P(a, b, c) = 0 = P_y(a, b, c)$$

y el vector

$$(p_{xy}(a, b, c), P_{yy}(a, b, c), P_{zy}(a, b, c))$$

es cero o bien un múltiplo escalar del vector

$$(P_x(a, b, c), P_y(a, b, c), P_z(a, b, c)).$$

Esto implica que

$$P(a, b, c) = P_y(a, b, c) = P_{yy}(a, b, c) = 0$$

esto como vimos en las observaciones del principio del capítulo, es lo mismo que decir que

$$\nu_\phi[a, b, c] > 2$$

lo cual es una contradicción. Por tanto tenemos lo buscado. ■

Lema 8 *Existe una transformación proyectiva T , de tal forma que la curva C bajo la transformación T podemos asumir que*

$$\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$$

para todo $[a, b, c] \in C$.

Demostración.

Sabemos que C tiene un cantidad finita de puntos de inflexión [Kir95]. Aplicando una transformación proyectiva adecuada podemos asumir que $[0, 1, 0] \notin C$ ni en ninguna de las líneas tangentes a C en sus puntos de inflexión. El resultado ahora se sigue de la afirmación (3.2) ■

Observación 11 *Podemos afirmar que para una curva proyectiva C en una vecindad $U \subset C$ de un punto de ramificación $x \in C$ de ϕ , la curva se “ve como una doble cubierta ramificada de la esfera $\mathbb{P}^1$ ”.*

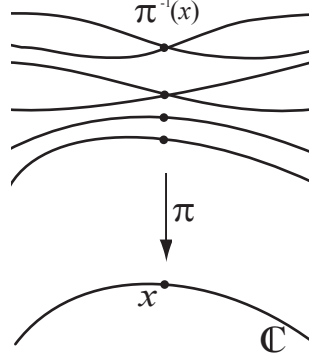


Figura 3.2: Cubierta Ramificada.

3.3. Fórmula de Grado y Género

En esta última sección, nos proponemos a demostrar la relación existente entre el grado de una curva proyectiva no singular en $\mathbb{CP}^2$ y el género de la misma, vista como superficie orientable conexa, compacta. Usaremos los resultados obtenidos acerca de cubiertas ramificadas de $\mathbb{P}^1$ y probaremos

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

donde g es el género de la curva no singular en $\mathbb{CP}^2$ y d su grado.

Idea de la Demostración 1 *La idea general es lograr triangular de manera adecuada (esto en el sentido que nos permita contar), de la curva proyectiva no singular C . Con dicha triangulación calcular su característica de Euler y por consiguiente su género. Esto en los siguientes pasos.*

Género Definir el concepto preciso de género de una superficie compacta, conexa, orientable. Para este propósito nos auxiliaremos del concepto triangulación de una superficie. De esta forma podremos definir el género de la curva en términos de su característica de Euler.

Triangular $\mathbb{P}^1$ Triangulando $\mathbb{P}^1$ y mediante la cubierta ramificada $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, salvo una cantidad finita de puntos, para $[x, z] \in \mathbb{P}^1$, $\phi^{-1}[x, z]$ consiste exactamente de d elementos *i.e.* el grado de la curva. Con esto podemos pensar en trasladar la triangulación de $\mathbb{P}^1$ a C mediante

la imagen inversa de ϕ . Como mencionamos, existe un número finito de puntos(conjunto ramal de ϕ), donde la imagen inversa no se comporta como lo anterior descrito.

Puntos de Ramificación Tomando en cuenta la información de los puntos de ramificación de $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ obtenemos un caso particular de la fórmula de Riemann-Hurwitz y con ello una triangulación para C .

Triangulación de la curva C Con lo anterior resuelto obtenemos una triangulación adecuada para la curva C en términos de su grado. Con esta triangulación calculamos su característica de Euler y con ello su género.

3.3.1. Demostración de la Fórmula de Grado y Género

Comenzamos por definir en términos precisos el género de una curva C . Como dijimos anteriormente nos auxiliaremos del concepto de triangulación. La idea de triangular la curva C pensando de manera intuitiva, es dividir a la curva en triángulos.

Consideremos el siguiente conjunto

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

como el triángulo estándar en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Sea

$$\Delta^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

el interior de Δ .

Definición 22 Sea C una curva proyectiva no singular. Una triangulación de C está constituida por los siguientes datos:

- (a) Un conjunto distinto del vacío y finito V que llamaremos **vértices**,
- (b) Un conjunto distinto del vacío y finito E de mapeos continuos $e : [0, 1] \rightarrow C$ llamados **aristas**,
- (c) Un conjunto distinto del vacío y finito F de mapeos continuos $f : \Delta \rightarrow C$ llamados **caras**, satisfaciendo
- (i) $V = \{e(0) \in E\} \cup \{e(1) \in E\}$, los vértices son los puntos finales de las aristas;

- (ii) Si $e \in E$ entonces la restricción de e al intervalo abierto $(0, 1)$ es un homeomorfismo en su imagen contenida en C , y esta imagen no contiene puntos de V ni de la imagen de alguna otra arista $\tilde{e} \in E$;
- (iii) Si $f \in F$ entonces la restricción de f a Δ^0 es un homeomorfismo en la componente conexa K_f de $C - \Gamma$ donde

$$\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0, 1])$$

es la unión de imágenes de las aristas, y si $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow \Delta$ para $1 \leq i \leq 3$ están definidas por

$$r(t) = 1 - t, \quad \sigma_1(t) = (t, 0), \quad \sigma_2(t) = (1 - t, t), \quad \sigma_3(t) = (0, 1 - t)$$

entonces $f \circ \sigma_i$ ó $f \circ \sigma_i \circ r$ es una arista $e_f^i \in E$ para $1 \leq i \leq 3$;

- (iv) El mapeo $f \mapsto K_f$ de F al conjunto de componentes conexas de $C - \Gamma$ es una biyección;
- (v) Para toda $e \in E$ existe una y sólo una cara $f_e^+ \in F$ de tal suerte que $e = f_e^+ \circ \sigma_i$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$ y exactamente una cara $f_e^- \in F$ de tal suerte que $e = f_e^- \circ \sigma_i \circ r$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.

Observación 12 Esta no es una manera muy estándar de definir triangulación, estándar en el sentido de cómo es enunciada en los libros de topología algebraica. Cabe mencionar que tomando en cuenta nuestro propósito ésta es una manera conveniente. Podemos asumir que los conjuntos V, E y F los podemos asumir finitos pues estamos tratando con espacios compactos. La propiedad (v) nos dice que la triangulación está orientada.

Definición 23 La característica de Euler χ de una triangulación es un entero definido como

$$\chi = \#V - \#E + \#F$$

donde el símbolo $\#S$ denota la cardinalidad del conjunto finito S .

La característica de Euler toma importancia, cuando sabemos que es un invariante incompleto del tipo de homotopía del espacio, y por tanto se vuelve un entero que nos da información acerca de cuando dos espacios topológicos no son homeomorfos. Al hablar de que este número nos da información de la topología del espacio, podemos conjeturar que la característica de Euler de un espacio no depende de la triangulación por la cual la calculamos.

Teorema 2 (i) *Cualquier curva proyectiva no singular C en $\mathbb{CP}^2$ es triangulable.*

(ii) *La característica de Euler χ de una triangulación de C depende sólo de C y no de la triangulación.*

Para una demostración del teorema anterior puede consultarse excelentes referencias [Thu97] y [Hat02]. En virtud de este teorema podemos definir la característica de Euler $\chi(C)$ de C para cualquier triangulación de C .

Definición 24 *El género de una curva proyectiva no singular C es*

$$g = \frac{1}{2}(2 - \chi)$$

donde χ es la característica de Euler de C .

Observación 13 *Si $f : C \rightarrow D$ es un homeomorfismo entre dos curvas no singulares C y D , y C tiene por triangulación a V, E, F , vértices, aristas y caras respectivamente, entonces D tiene una triangulación con vértices*

$$\{f(v) : v \in V\}$$

aristas

$$\{f \circ e : e \in E\}$$

y como caras

$$\{f \circ h : h \in F\}.$$

Luego C y D tienen la misma característica de Euler y el mismo género. Como ya habíamos mencionada esto afirma que la característica de Euler y el género de una curva proyectiva no singular es un invariante topológico: éstos solamente dependen de la topología de la curva y no de su estructura algebraica.

Lema 9 *Sean $\{p_1, \dots, p_r\}$ al menos tres puntos en $\mathbb{P}^1$. Entonces existe una triangulación de $\mathbb{P}^1$ con $\{p_1, \dots, p_r\}$ como vértices y con $3r - 6$ aristas y $2r - 4$ caras.*

Demostración. Recordemos que $\mathbb{P}^1$ lo identificamos con la compactificación unipuntual $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Probaremos este lema por inducción sobre $r \geq 3$. Cuando tenemos $r = 3$, tres puntos $\{p_1, p_2, p_3\}$ sobre la esfera $\mathbb{P}^1$, siempre podemos considerar $\mathbb{P}^1 - \{z\} \approx \mathbb{C}$ con $z \notin \{p_1, p_2, p_3\}$, luego podemos pensar en $\{p_1, p_2, p_3\} \in \mathbb{C}$ y sabemos existe una transformación de Möbius T tal

que mapea p_1 en 1, p_2 en $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y p_3 lo manda a $e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Unamos estos tres puntos por segmentos del disco unitario en $\mathbb{C}$. El exterior del disco unitario junto con el punto al infinito, es mapeado bajo la transformación proyectiva $z \mapsto \frac{1}{z}$ en el interior del disco unitario. Dado que existe un homeomorfismo

$$\Delta \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

el cual podemos pensar que manda a los vértices del triángulo Δ en 1, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ y que manda de manera adecuada las aristas del triángulo Δ en la circunferencia unitaria. Con esto conseguimos una triangulación para $\mathbb{P}^1$ con tres aristas y dos caras cuando $r = 3$. Supongamos ahora que $r \geq 3$ y que tenemos una triangulación con vértices $\{p_1 \dots, p_{r-1}\}$ y $3r - 9$ aristas y $2r - 6$ caras. Si $p_r \in f(\Delta^0)$ podemos agregar tres aristas mas y unir p_r con los demás vértices de la cara f . Así obtenemos una nueva triangulación con un nuevo vértice, p_r estas nuevas aristas, subdividen la cara f en tres nuevas caras. Si p_r no es un elemento del interior de una cara, entonces vive en una arista e , esto es $p_r = e(t)$ para algún $t \in (0, 1)$. Podemos entonces reemplazar e por dos aristas que unan p_r con $e(0)$ y $e(1)$ y añadir dos aristas más uniendo p_r con los demás vértices de las caras f_e^+ y f_e^- . Esto nos da una triangulación con un nuevo vértice p_r y dos aristas extra y una arista inicial que la pensamos como dos, además de dos viejas caras que cada una es reemplazada por dos nuevas. Por tanto obtenemos una nueva triangulación y el resultado se tiene.

■

Proposición 3 (Riemann-Hurwitz) *Sea*

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : P(x, y, z) = 0\}$$

una curva proyectiva no singular, tal que $[0, 1, 0] \notin C$ y sea $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ una cubierta ramificada definida por $\phi[x, y, z] = [x, z]$. Supongamos que (V, E, F) es una triangulación de $\mathbb{P}^1$ de tal suerte que el conjunto de vértices V contiene al conjunto ramal $\phi(R)$ de ϕ . Entonces existe triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de C tal que

$$\tilde{V} = \phi^{-1}(V),$$

$$\tilde{E} = \{\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C : \tilde{e} \text{ continua}, \phi \circ \tilde{e} \in E\}$$

y

$$\tilde{F} = \{\tilde{f} : \Delta \rightarrow C : \tilde{f} \text{ continua}, \phi \circ \tilde{f} \in F\}.$$

Además si $\nu_\phi(p)$ es el índice de ramificación de ϕ en p y d es el grado de C entonces

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1),$$

$$\#\tilde{E} = d\#E$$

y

$$\#\tilde{F} = d\#F.$$

Demostración. Debemos demostrar que la triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ satisfacen las condiciones (a)–(d) de la definición 22. Además veremos que las fórmulas para $\#\tilde{V}$, $\#\tilde{E}$ y $\#\tilde{F}$ son correctas. Para esto seguiremos un argumento similar al que se expone en el teorema del levantamiento de trayectorias en la teoría de espacios recubridores. Éste no será probado en esta tesis. Si $f \in F$, $p \in C$ y

$$\phi(p) = f(t)$$

para algún $t \in \Delta$ que no sea igual a ninguno de los vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, entonces existe un único mapeo continuo

$$\tilde{f} : \Delta \rightarrow C$$

de tal manea que $\phi \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f} = p$. Por lema6 $\phi^{-1}\{f(t)\}$ consiste de exactamente d puntos de C . Recordemos que la imagen de f no toca los vértices. Luego afirmamos que existen exactamente d mapeos continuos $\tilde{f} : \Delta \rightarrow C$ de tal forma que $\phi \circ \tilde{f} = f$. Esto nos dice

$$\#\tilde{F} = d\#F.$$

Podemos también deducir que

$$\begin{aligned} C - \phi^{-1}(V) &= \phi^{-1}\{f(t) : f \in F, t \in \Delta, t \neq ((0, 0), (1, 0), (0, 1))\} \\ &= \{\tilde{f}(t) : \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \Delta, t \neq ((0, 0), (1, 0), (0, 1))\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

En particular observamos que

$$G = \bigcup_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \tilde{f}(\Delta)$$

contiene a $C - \phi^{-1}(V)$ además es denso en C pues $\phi^{-1}(V)$ es finito por el lema6. Observemos que Δ es compacto, luego $\tilde{f}(\Delta)$ es compacto y de igual

forma G es compacto y por tanto cerrado en C . Por lo tanto $G = C$, lo cual implica que

$$\phi^{-1}(V) = \{\tilde{f}(t) : \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}\}.$$

Si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ entonces $\phi \circ \tilde{f}$ luego $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \in E$ ó $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in E$ para $1 \leq i \leq 3$ donde σ_i y r son definidos como en la definición de triangulación. Entonces si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ tenemos una de las opciones $\tilde{f} \circ \sigma_i \in \tilde{E}$ ó $\tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in \tilde{E}$ así

$$\tilde{f}(t) \in \{\tilde{e}(0) : \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) : \tilde{e} \in \tilde{E}\}$$

esto si $t \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$. Lo cual nos indica que

$$\phi^{-1}(V) = \{\tilde{e}(0) : \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) : \tilde{e} \in \tilde{E}\}$$

y con esto vemos que satisface la propiedad (i) de la definición de triangulación. Siguiendo el argumento anterior, consideremos las aristas y contemos. Si $e \in E$, $p \in C$ y

$$\phi(p) = e(t)$$

para algún $t \in (0,1)$, entonces(aquí usamos levantamiento de trayectoria a modo espacio recubridor), existe un único mapeo continuo

$$\tilde{e} : [0,1] \rightarrow C$$

de tal forma que $\phi \circ \tilde{e} = e$ y $\tilde{e}(t) = p$ además la restricción de este mapeo al intervalo $(0,1)$ es un homeomorfismo en su imagen contenida C . la condición (ii) referente a la finitud de los mapeos $\tilde{e}$ de la definición 22 se sigue de la unicidad del levantamiento del mapeo e . Así por cada mapeo e obtenemos un único $\tilde{e}$. Se sigue también que

$$\phi^{-1}\{e(t) : e \in E, t \in (0,1)\} = \{\tilde{e}(t) : \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0,1)\}.$$

Ahora si

$$\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0,1]) = V \cup \{e(t) : e \in E, t \in (0,1)\}$$

entonces

$$\phi^{-1}(\Gamma) = \phi^{-1}(V) \cup \{\tilde{e}(t) : \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0,1)\} = \tilde{\Gamma}$$

donde

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{\tilde{e} \in \tilde{E}} \tilde{e}([0,1]).$$

y ahora de nuevo por el lema 6 si $t \in (0, 1)$ y $e \in E$ entonces $\phi^{-1}\{e(t)\}$ consiste exactamente de d puntos en C . Esto pues recordemos que hemos restringido el dominio de e y por tanto no contiene puntos de $\phi(R)$. Por lo tanto existen exactamente d mapeos continuos $\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C$ de tal suerte que $\phi \circ \tilde{e} = e$. Con esto tenemos

$$\#\tilde{E} = d\#E.$$

Si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ entonces la restricción al interior del triángulo Δ^0 es una homeomorfismo en su imagen, la cual a su vez es una componente conexa de $\phi^{-1}(f(\Delta^0))$ donde $f = \phi \circ \tilde{f}$. Como $f(\Delta^0)$ es una componente conexa de $\mathbb{P}^1 - \Gamma$ tenemos que $\tilde{f}(\Delta^0)$ es una componente conexa de

$$\phi^{-1}(\mathbb{P}^1 - \Gamma) = C - \phi^{-1}(\Gamma) = C - \tilde{\Gamma}.$$

Esto muestra la condición (iii) de la definición. Condiciones (iv) y (v) se siguen del hecho de poder encontrar una triangulación coherente para la curva, pues esta sabemos es orientable. Más aún, comentamos al principio de este capítulo, la curva se puede construir topológicamente pegando planos recortados. Como estamos en el caso donde únicamente nos interesa la topología siempre podemos triangular el polígono fundamental. Esto nos da una triangulación orientada para la curva C . Ahora como los vértices contiene al conjunto $\phi(R)$ se sigue del lema 6 que

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1)$$

como afirmábamos. ■

Observación 14 *De la proposición anterior tenemos ya la expresión*

$$\chi(C) = \#\tilde{V} - \#\tilde{E} + \#\tilde{F} = d\chi(\mathbb{P}^1) - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1).$$

*Esta expresión es llamada **fórmula de Riemann-Hurwitz** para la cubierta ramificada $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$.*

Damos paso al teorema que resuelve el problema que buscamos resolver en este capítulo.

Teorema 3 *Sea C una curva proyectiva no singular de grado d en $\mathbb{CP}^2$. Si r es un entero positivo y $r \geq d(d-1)$ y $r \geq 3$ entonces C tiene una triangulación con $rd - d(d-1)$ vértices, $3d(r-2)$ aristas y $2d(r-2)$ caras.*

Demostración. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d el cual define una curva proyectiva C . Por lema8 podemos asumir que el mapeo $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ dado por

$$\phi[x, y, z] = [x, z]$$

está bien definido ($[0, 1, 0] \notin C$) y que el índice de ramificación $\nu_\phi[a, b, c]$ de ϕ para todo $[a, b, c] \in C$ satisface

$$\nu_\phi[a, b, c] \leq 2.$$

Ahora por lema7 sabemos que ϕ tiene exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación. Esto es, $\#R = d(d-1)$. Por el lema 9 si $r \geq 3$ y $r \geq d(d-1)$ podemos escoger una triangulación de $\mathbb{P}^1$ de tal suerte que

$$V \supseteq \phi(R)$$

y $\#V = r$, $\#E = 3r - 6$ y $\#F = 2r - 4$. así por la proposición3 existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de C de tal manera que

$$\#\tilde{E} = d\#E = 3d(r-2),$$

$$\#\tilde{F} = d\#F = 2d(r-2)$$

y

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1).$$

Dado que $\#R = d(d-1)$ y $\nu_\phi(p) = 2$ para todo $p \in R$ tenemos que

$$\#\tilde{V} = rd - d(d-1).$$

■

La implicación inmediata de este teorema haciendo un breve cálculo es la expresión que estamos buscando.

Corolario 2 (Fórmula de Grado y Género) *La característica de Euler χ y el género g de una curva proyectiva no singular de grado d en $\mathbb{CP}^2$ están dadas por*

$$\chi(C) = d(3-d)$$

y

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\chi(C) &= \#\tilde{V} - \#\tilde{E} + \#\tilde{F} \\ &= rd - d(d-1) - 3d(r-2) + 2d(r-2) \\ &= -d(d-1) + 2d \\ &= d(3-d)\end{aligned}\tag{3.2}$$

para el género tenemos

$$\begin{aligned}g &= \frac{1}{2}(2 - d(3-d)) \\ &= \frac{1}{2}(d-1)(d-2)\end{aligned}\tag{3.3}$$

■

Conclusión

Al final de este capítulo, mediante la fórmula de grado y género, dada una curva proyectiva de grado d , hemos podido decidir qué género tiene y con ello saber con precisión qué superficie S_g define. En el camino nos encontramos con el concepto de función multivaluada, y cubiertas ramificadas de la esfera. Este último punto toca un asunto central en la teoría de superficies de Riemann. En este capítulo tratamos con una curva proyectiva (superficie de Riemann), y la exhibimos como cubierta ramificada de la esfera. Este problema en general para superficies de Riemann arbitrarias es un problema por demás difícil de resolver. El proceso que seguimos de pegar planos recortados con información de los puntos de ramificación, es el proceso que se sigue para hacer de una función multivaluada una función univaluada, esto es, como construir la superficie de Riemann asociada a la función multivaluada. En suma, los problemas tratados en este capítulo tienen un análogo analítico, y exhibe el punto de contacto entre teoría de curvas algebraicas y superficies de Riemann.

Conclusiones

Anhelamos más o menos vehementemente concluir todo lo que emprendemos; sentimos impaciencia por acabar y somos felices acabando. Sólo deseamos, por lo común, retardar lo más posible el fin general, el fin de todos los fines.

En Torno a la Filosofía, Arthur Schopenhauer.

Empezamos este trabajo planteándonos un problema de perspectivas: proyectar un plano A en algún otro plano B . Un tema abordado por artistas antes que por matemáticos. Observamos que ya hecha la proyección, ciertos puntos del primer plano desaparecen, y puntos que no tenía el plano, ahora se ven en la proyección. Esto relata la existencia de una línea invisible en el sentido ordinario, pero que en las proyecciones siempre se hace presente: la línea al infinito. Con esto en mente construimos un espacio topológico, el cual contiene al plano $\mathbb{R}^2$ como subconjunto abierto, y posee además una línea proyectiva extra. A este nuevo espacio lo llamamos plano proyectivo: $\mathbb{RP}^2$. Así, a las proyecciones arriba citadas las entendimos como transformaciones proyectivas del plano proyectivo en él mismo. Observamos simetrías en este nuevo plano, que en $\mathbb{R}^2$ no existían. Pasamos a estudiar en el plano proyectivo, un tipo particular de curvas algebraicas para cuales su topología en $\mathbb{R}^2$ es bien conocida: las cónicas. La inclusión de estas cónicas en $\mathbb{RP}^2$ nos sugiere la adición de ciertos puntos, los cuales llamamos puntos al infinito; y al proceso de adición le nombramos proyectivización de las curvas. Las simetrías de este nuevo plano $\mathbb{RP}^2$ se reflejan en la conclusión del primer

capítulo. Ésta nos habla de que las cónicas en plano proyectivo real son homeomorfas entre sí. En este sentido pensamos al plano proyectivo como adecuado para incluir a las curvas algebraicas, pues incluidas en este espacio, las compactificamos y con ello se simplifica estudiar su topología.

Para el segundo capítulo, ahora pensando en el plano proyectivo complejo, esta inmersión de las curvas algebraicas en $\mathbb{P}^2$ nos permite clasificarlas. Para ello recurrimos a un teorema de caracterización topológica de superficies. Para el tercer capítulo demostramos la relación existente entre el grado de la curva y el género de la superficie que define. Así podemos decidir con precisión de que superficie S_g estamos hablando al considerar una curva definida por un polinomio de grado d .

Este estudio lo hemos hecho para curvas sin singularidades, curvas donde en todos sus puntos al menos una derivada parcial no se anula. Para el caso de curvas que tienen singularidades, su topología es más intrincada, pero aún así existe una relación similar a la fórmula grado y género. Esta fórmula, llamada fórmula de Noether, nos permite saber qué superficie S_g define una curva singular de grado d . Cabe mencionar, que en esta curva, para “omitir” sus singularidades, le asociamos una superficie de Riemann. Esto nos habla de que $C - \text{Sing}(C)$ tiene estructura de superficie de Riemann. Por tal motivo, estando al final de este trabajo, podemos pensar en adentrarnos en el estudio de este tipo de superficies con estructura compleja. En el estudio de este tema para considerar problemas de clasificación, un invariante topológico, no basta. Sobre las superficies de Riemann podemos medir ángulos, tienen estructura conforme además de topología. Para clasificarlas B. Riemann, en 1857, introdujo el término “moduli”. Pensar en una clasificación conforme de estas superficies nos lleva al estudio de una variedad que las parametriza. Esta variedad es llamada espacio modular de curvas.

Por otra parte este trabajo nos pone en contexto para estudiar la generalización de las curvas algebraicas. Conjuntos de ceros definidos no únicamente por un polinomio, sino por varios polinomios: variedad algebraica. La observación, hecha por la escuela francesa del siglo pasado, fue que las características geométricas y topológicas de estas variedades, están codificadas de manera puramente algebraica en su anillo coordenado, si tomamos en cuenta los polinomios que definen a la variedad y considero el ideal que generan; el anillo coordenado se define como el cociente de este ideal y anillo total de polinomios del cual provienen. Esta codificación de las características topológicas se refiere a la posibilidad de recuperar un espacio homeomorfo a la variedad, con el puro conocimiento del anillo coordenado. Esto nos da una regla de asociación del espacio de anillos al de espacios topológicos, misma

que se estudia en la teoría de esquemas de Alexandre Grothendieck.

Por último deseamos comentar que en este trabajo se maneja de manera clandestina el concepto de variedad diferenciable, el cual es central en geometría diferencial y en particular en los fundamentos matemáticos de la teoría de la relatividad general. La noción de variedad captura la idea de un espacio que puede estar curvado y tener una topología complicada, pero que en regiones locales es como un $\mathbb{R}^n$. Dependiendo de la dimensión de la variedad, pensando en el deseo de medir distancias, áreas, etc. sobre dicha variedad diferenciable arribamos a la génesis de la geometría Riemanniana, en donde, la compatibilidad del atlas diferenciable, puede ser pensado como una formulación matemática del principio de equivalencia de Einstein en relatividad general. Dicho principio es medular en la integración del campo gravitacional a la teoría de la relatividad especial.

Por las diferentes bifurcaciones que puede seguir el estudio de las curvas algebraicas, estando al final de este trabajo, estamos situados en un punto que tienen como primeras miras topología, teoría de los números, análisis complejo, geometría algebraica ó geometría diferencial. Con la intuición ganada en el desarrollo de este trabajo podemos pensar en caminar hacia una de estas opciones.

.

Índice alfabético

- índice
 - de ramificación, 41
- cónica, 6
- cónica real, 12
- cónicas degeneradas, 10
- característica de Euler, 47
- conjunto ramal, 43
- coordenadas
 - homogéneas, 6
 - inhomogéneas, 7
- coordenadas homogéneas
 - complejas, 28
- cubierta ramificada, 41
- curva
 - afín, 22
 - algebraica real, 6
 - irreducible, 30
 - no singular, 23
 - proyectiva no singular, 30
 - proyectiva real, 8
- Espacio
 - Topológico, 4
- fórmula
 - grado y género, 53
 - Riemann-Hurwitz, 52
- forma cuadrática, 11
- género de una curva, 48
- grado
 - curva afín, 22
 - curva algebraica real, 6
 - curva proyectiva compleja, 30
- línea
 - proyectiva, 31
 - afín, 23
 - al infinito, 9
 - tangente, 24
- matriz
 - simétrica, 11
- multiplicidad
 - de un punto, 24
- plano proyectivo
 - complejo, 27
 - real, 4
- polinomio
 - homogéneo complejo, 23, 30
- polinomio homogéneo, 8
- polinomio inhomogéneo, 8
- proyección, 7
- proyectivización, 10
- punto
 - de ramificación, 41
 - las infinito, 8

singular, 23

singularidad, 23

Superficie

de Riemann, 35

topología, 3

transformación

proyectiva, 3, 12, 29

triangulación, 46

variedad

compleja, 28

real, 4

Bibliografía

- [AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison – Wesley, Massachusetts, 1969.
- [Gri80] Phillip A. Griffiths, *Introduction to Algebraic Curves*, Translations of Mathematical Monographs vol. 76, American Mathematical Society, USA, 1980.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, Heidelberg, Alemania, 1977.
- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, USA, 2002.
- [HK73] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice Hall, USA, 1973.
- [HV52] David Hilbert and Cohn Vossen, *Geometry and Imagination*, Translation, Addison – Wesley, New York, USA, 1952.
- [Kir95] F. Kirwan, *Complex Algebraic Curves*, London Mathematical Society Student Texts 23, Cambridge University Press, Great Britain, 1995.
- [Kos89] Czes Kosniowski, *A first Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, England, 1989.
- [Mir95] Rick Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 5, American Mathematical Society, USA, 1995.

-
- [Mun75] James R. Munkres, *Topology: A first course*, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1975.
- [Sha74] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Heidelberg, Alemania, 1974.
- [Thu97] William P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, New Jersey, USA, 1997.