



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

“PROPAGACIÓN CONTRADIRECCIONAL DE DOS ONDAS  
EN UN MATERIAL FOTORREFRACTIVO”

TESIS

Que para obtener el título de  
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS  
presenta

ANGEL ADALBERTO DURAN LEDEZMA



DIRECTOR: DR. ARTURO ZÚÑIGA SEGUNDO

México D.F., enero del 2009

# Indice.

Indice .....	1
Introducción .....	3
1. Ecuaciones del material para $\text{LiNbO}_3$ .....	8
1.1 Evolución temporal de $E_{sc}(x, t)$ , y $N_D^+(x, t)$ .....	13
2. Ecuaciones de acoplamiento .....	15
2.1 Propagación en rejillas de reflexión .....	17
3. Aplicaciones .....	21
3.1 Cálculo de la eficiencia de difracción .....	21
3.2 Cálculo de la ganancia .....	22
3.3 Mezcla de cuatro ondas .....	26
4. Conclusiones .....	27
Referencias .....	28

## **“DEDICATORIA”**

Le dedico este trabajo a mi Madre y mi Padre por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida, y que gracias a ellos he podido lograr todos los objetivos que me he propuesto.

A mis hermanas y familiares que me han dado cariño, compañía y comprensión.

A todas las personas que me brindaron su amistad y han estado conmigo en esta etapa de mi vida.

## **“AGRADECIMIENTOS”**

**Agradesco al Instituto Politécnico Nacional y a la Escuela Superior de Física y Matemáticas por la formación que me a dado. De igual forma a mis comapañeros que compartieron conmigo todo este tiempo. Al profesor Arturo Zúñiga Segundo por el apoyo en la realización de este trabajo.**

# Introducción

Las redes de fibra óptica son la parte medular de las comunicaciones telefónicas y el internet. Y como no serlo, si con la simple reflexión interna se guía luz en fibras monomodo de silica con una velocidades de 40Gbit/s. Sus bajas absorciones permiten la transmisión por más de 100 km sin la necesidad de aditamentos amplificadores. Es claro que una señal puede ser repetida y amplificada muchas veces, hasta alcanzar su destino final.

En los últimos diez años, la WDM (Wavelength Division Multiplexing) o multiplexación por división en longitud de onda, ha sido empleada como la única tecnología capaz de explotar todo el ancho de banda ofrecido por la fibra óptica. En la WDM, muchas ondas con longitudes de onda ligeramete distintas son transmitidas simultáneamente con el fin de incrementar la capacidad de transmisión de la fibra óptica. A este conjunto de ondas se les llama canales; más de 128 de estos canales forman el nucleo de una red de comunicaciones donde los anchos de banda exceden 1 Tbit/s. Toda esta información es impulsada por fibras ópticas dopadas con Erblio, que se utilizan como amplificadores en los muchos canales de diferentes longitudes de onda, que han hecho de la WDM una tecnología económicamente exitosa [1].

Para el perfeccionamiento de la flexibilidad y el parámetro costo-eficiencia de una red, se requiere de componentes ópticos avanzados. Los cristales fotorrefractivos pueden ser usados para este fin en el diseño de filtros y commutadores de luz [2]. El efecto fotorrefractivo se define como el cambio local del índice de refracción, que se produce por la variación espacial de la intensidad de la luz en el interior del material.

En comunicaciones ópticas, existen muchas y muy variadas areas potenciales de aplicación para las rejillas de Bragg grabadas en materiales fotorrefractivos como se muestran en la figura i-1 [3]. De donde destacan las aplicaciones para: (a) Filtrado; una longitud de onda pude ser bloqueada y otras pueden transmitirse. (b) Interconexiones; los canales

de diferentes longitudes de onda pueden multiplexarse. (c) Acoplador; luz de diferente longitud de onda puede ser guiada dentro de una fibra monomodal. (d) Retrolimentador de láser; la reflexión parcial de la luz con una alta selectividad tanto angular como de longitud de onda puede utilizarse para fijar la longitud de onda del láser, reduciendo su ancho de banda espectral y mejorando el perfil del haz del diodo láser.

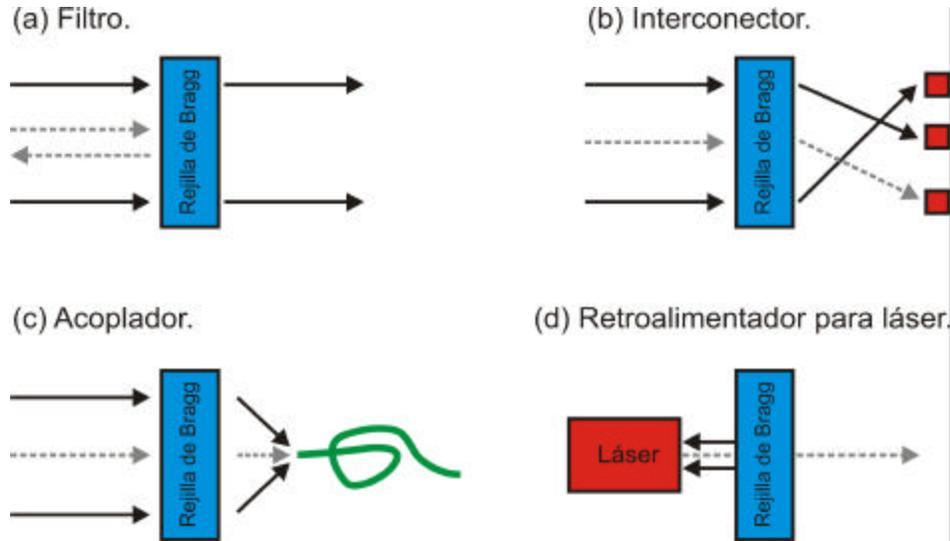


Fig. i.1. Areas de aplicación de las rejillas de Bragg; (a) filtrado y separación de luz, (b)-(c) acoplamiento de la luz dentro y fuera de fibras, (d) también como componentes que mejoran las características de emisión de láseres semiconductores.

Como se ha podido observar, la Holografía de volumen (grabado de rejillas de Bragg), ha suscitado el interés de un gran número de investigadores, como consecuencia de las extensas aplicaciones que ésta técnica posee en distintos campos. Entre estas aplicaciones, podemos destacar el uso de la Holografía para la fabricación de filtros complejos, o el de almacenamiento de la información, debido a la capacidad de almacenar muchas ondas objeto en un único holograma. Como mencionamos, la Holografía a su vez juega un papel relevante en el campo de las comunicaciones ópticas, a través de interconectores ópticos fabricados con técnicas holográficas. Si bien de todas las aplicaciones de la Holografía son quizás las relacionadas con los elementos ópticos holográficos y de almacenamiento óptico

de la información, en realidad son las que han alcanzado un mayor desarrollo [4].

Para poder comprender con exactitud el funcionamiento de los elementos holográficos descritos anteriormente es necesario entender la forma en que la luz se propaga en el interior del holograma de volumen. En este sentido han surgido distintas teorías que explican el comportamiento de las ondas electromagnéticas cuando éstas atraviesan medios materiales que presentan algún tipo de periodicidad en sus propiedades. Por ejemplo, la teoría modal, desarrollada por Burkhardt [5], permite realizar un tratamiento riguroso del comportamiento de un medio holográfico frente a la luz. Más utilizada que la teoría modal, es la teoría rigurosa de ondas acopladas introducida por Magnusson y Gaylord [6-7] que permite realizar simulaciones numéricas en las que en principio no se impone ningún grado de aproximación. Las dos teorías son exactas y se han mostrado ser equivalentes [8]. Por otro lado, el análisis realizado por Kogelnik [9] en 1969, es quizás el más citado en la literatura.

Esto se debe a varias razones: tiene la ventaja respecto a otras teorías en que es fácil de entender desde el punto de vista físico, el contenido matemático es más sencillo que el de otras teorías y además permite la obtención de expresiones analíticas para la eficiencia de difracción y ganancias de rejillas de difracción holográficas en las configuraciones de transmisión y reflexión [10]. En la primera ambos haces inciden por la misma cara del cristal fotorrefractivo, mientras que en el segundo caso, cada haz incide por una de las caras opuestas del cristal.

Hace aproximadamente 40 años, Arthur Ashkin y sus colaboradores de los laboratorios Bell, tuvieron las primeras experiencias del efecto fotorrefractivo, considerándolo una curiosidad, una molesta experiencia y una “demencia” óptica [11]. Hoy los materiales fotorrefractivos han sido la esencia para la construcción de componentes de una nueva generación de computadoras que utilizan la luz en lugar de la electricidad [12-13]. Ashkin experimentó con un cristal de Niobato de Litio ( $\text{LiNbO}_3$ ), donde esperaba cambiar el color de un rayo láser incidente por otro, proceso llamado generación de segundo armónico. Como parte de sus pruebas, dirigió un rayo a través del cristal. En un principio el cristal ejecutó un comportamiento normal, permitiendo el paso de la luz a través de él sin distorsión. Pero después de algunos minutos, el cristal comenzó a distorsionar el rayo,

esparciéndolo alrededor del laboratorio. De alguna manera la luz del láser había alterado las propiedades ópticas del cristal. Este efecto persistió en el cristal por días. Sin embargo, si se iluminaba uniformemente el cristal con luz blanca intensa, el cristal volvía a transmitir el rayo sin distorsión.

El efecto fotorrefractivo es un fenómeno óptico no lineal [10]; sin embargo, los fenómenos no lineales por efecto fotorrefractivo no son causados directamente por el campo eléctrico de la luz que perturba el material, como sucede en los materiales no lineales puros; esta especial característica de los materiales fotorrefractivos permite generar efectos de orden superior con intensidades de la radiación electromagnética igual o inferior a  $1.0\text{mW}/\text{cm}^2$ .

En términos microscópicos, esta radiación electromagnética espacialmente no homogénea, provoca transiciones electrónicas hacia la banda de conducción. Así, se crea una distribución de carga espacial y por ende un campo de carga espacial. Tal campo induce entonces un cambio local de índice de refracción, modulado por efecto Pockels. De esta forma, es posible utilizar estos materiales como memorias ópticas, que permiten registrar-borrar y/o fijar la información.

Como hemos comentado, los materiales fotorrefractivos han sido objeto de muchos estudios debido a la gran variedad de aplicaciones que tienen en la transmisión y manipulación de información óptica. Algunos materiales fotorrefractivos ferroeléctricos como el niobato de litio ( $\text{LiNbO}_3$ ) y el titanato de bario ( $\text{BaTiO}_3$ ) y no ferroeléctricos como el silicato de bismuto ( $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ) (BSO), titanato de bismuto ( $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ ) (BTO), germato de bismuto  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  (BGO), han sido utilizados en el procesamiento óptico de señales, en holografía dinámica, en óptica de fase conjugada y en interconexión óptica de redes entre otras aplicaciones tecnológicas [2,4].

Las aplicaciones constan básicamente de dos partes; la primera es la solución a las ecuaciones materiales [14] para encontrar el campo de carga espacial. Segundo, por medio de la electro-óptica encontramos los cambios en el índice de refracción, que permitirá calcular la propagación de la luz dentro del material o la mezcla de dos ondas. La mayor parte de los estudios de la mezcla de dos ondas están encaminados a la mezcla co-direccional; con respecto a los estudios de mezcla de dos ondas en el caso contra direccional, Pochi Yeh

presenta un resultado de solución analítica, restringida a la condición de absorción nula, y un resultado numérico bajo la condición de muy baja absorción del medio [10]; bajo esta condición del medio, es cómodo resolver analíticamente el sistema de ecuaciones acopladas para el intercambio de energía entre las dos ondas.

En este trabajo, presentamos una solución analítica para la mezcla de dos ondas contra-direccionales, considerando el caso general de cualquier valor de absorción del material; a partir de estas expresiones generales es posible encontrar los casos de absorción baja y nula resueltos por Pochi Yeh. Además, presentamos algunos cálculos numéricos del campo de carga espacial  $E_{sc}$  obtenidos al resolver las ecuaciones de Kukhtarev aplicando un campo eléctrico externo constante (**DC** o de corriente directa) para  $\text{LiNbO}_3$ . Al igual que en la referencia 15, presentamos resultados para modulaciones grandes y una longitud de onda de la rejilla de interferencia. Por último utilizaremos la teoría de Kogelnik para calcular la ganancia y la eficiencia de difracción  $\eta$  en la configuración de reflexión y transmisión y hacemos unos comentarios sobre la mezcla de cuatro ondas.

## Ecuaciones del material para $\text{LiNbO}_3$

Si dos haces de la misma frecuencia se intersectan dentro de un cristal, ellos interferirán y producirán un patrón estacionario de regiones iluminadas y oscuras, o más específicamente un patrón de interferencia con periodo espacial  $\Lambda$  y cuya intensidad varíe sinusoidalmente con la posición en el cristal, ver Fig. 1.1(a).

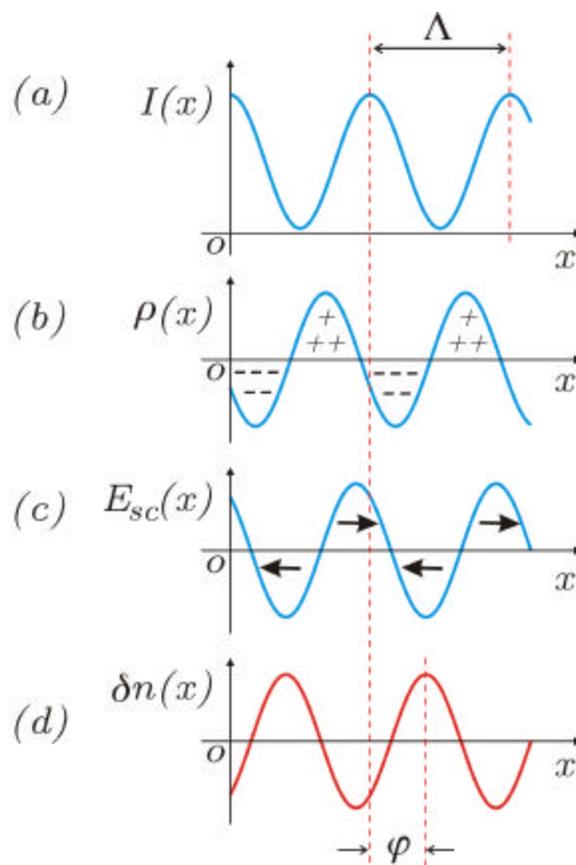
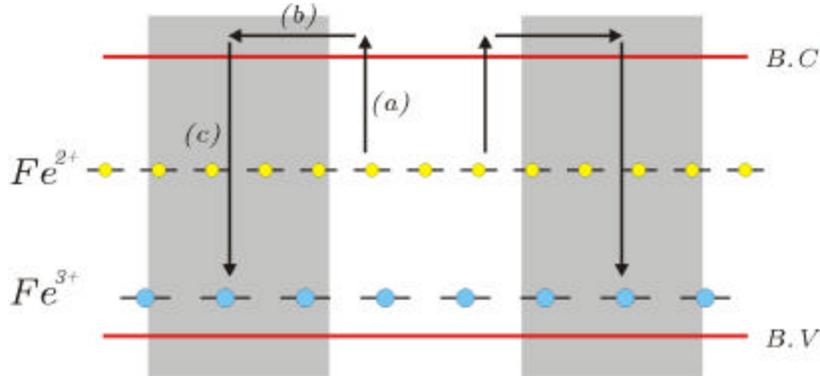


Fig. 1.1. El efecto Fotorrefractivo. (a) Formación del patrón de interferencia. (b) Redistribución de la densidad de carga. (c) Formación del campo de carga espacial  $E_{sc}$  y (d) Por efecto electro-óptico cambios en el índice de refracción del cristal.

Con una iluminación promedio  $I_o$ , la forma funcional del patrón de interferencia se escribe

$$I(x) = I_o(1 + m \cos kx) , \quad (1.1)$$

donde,  $m$  es la modulación y  $k = 2\pi/\Lambda$ . Este patrón sinusoidal formado dentro del cristal, moverá las cargas eléctricas generando una densidad de carga eléctrica cuya magnitud también variará sinusoidalmente, (Fig. 1.1(b)). Por electrostática se produce un campo de carga espacial (Fig. 1.1(c)), que “distorsionará” la estructura de la red cristalina periódicamente, produciendo cambios en el índice de refracción (Fig. 1.1(d)), calculados por medio del efecto electro-óptico. El patrón de interferencia (el campo de carga espacial) y la rejilla de índice de refracción, tendrán la misma periodicidad, pero ellos estarán desfasados por un ángulo  $\phi$  mostrado en la Fig. 1.1(d). Cuando este ángulo sea de un cuarto de periodo, es decir cuando se tenga un desfase de 90 grados, será la configuración más óptima para el intercambio de energía entre los dos rayos láser [10,12,13].



**Fig. 1.2.** Modelo de transporte de banda para el efecto fotorrefractivo. Las regiones oscuras corresponden a las zonas de poca iluminación del patrón de interferencia.

El modelo de transporte de banda propuesto por N. Kukhtarev es el más utilizado para explicar el efecto fotorrefractivo y aunque implica varias aproximaciones contiene la física del comportamiento de los materiales fotorrefractivos al ser iluminados por luz coherente [12-14]. Las aproximaciones son la consideración de un sólo tipo de portadores de carga (electrones) y un sólo tipo de centros involucrados en la donación y captura de los portadores de cargas eléctricas. El modelo está basado en un sistema de ecuaciones

diferenciales parciales no lineales y acopladas que constituyen las llamadas ecuaciones materiales. Estas ecuaciones incluyen la descripción de los procesos de excitación, transporte y recombinación que ocurre en los materiales fotorrefractivos al formarse dentro de ellos un patrón de interferencia de tipo senoidal producido por dos haces de luz linealmente polarizados. A continuación se describen con ayuda de la Fig.1.2, los procesos de; excitación y recombinación, transporte, campo de carga espacial y cambios del índice de refracción.

La excitación y recombinación corresponden a las flechas indicadas por (a) y (c) en la Fig. 1.2. Suponemos que en el material existe un sólo tipo de centros activos donde ocurre tanto la fotoionización como la recombinación. Los centros activos en muchos materiales son impurezas de hierro ( $F_e$ ) que crean un nivel de energía entre la banda de valencia (BV) y la banda de conducción (BC). Estos centros son donadores potenciales inmóviles que tienen una densidad volumétrica  $N_D$ , de los cuales una fracción  $N_D^+$  de estas impurezas ( $F_e^{2+}$ ) son centros para la fotoexcitación de electrones y los restantes ( $N_D - N_D^+$ ) de impurezas no ionizadas ( $F_e^{3+}$ ) son centros para la recombinación de los electrones.

Así la rapidez de cambio de la densidad de donadores ionizados dependerá de la rapidez de generación de donadores ionizados por la iluminación  $(sI + \beta)(N_D - N_D^+)$  y de la rapidez de recombinación  $\gamma n N_D^+$

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (sI + \beta)(N_D - N_D^+) - \gamma n N_D^+ , \quad (1.2)$$

donde  $s$  es la sección transversal de fotoionización,  $I$  es la intensidad de la iluminación,  $\beta(N_D - N_D^+)$  es la rapidez de generación térmica de los portadores,  $n$  la densidad de electrones o portadores de carga en la banda de conducción y  $\gamma$  la constante de recombinación.

El transporte corresponde a la flecha indicada por (b) en la Fig. 1.2. La densidad de electrones móviles en la banda de conducción que migra de las regiones luminosas a las oscuras está dada por

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla \cdot J , \quad (1.3)$$

donde  $e$  es la carga del electrón y  $J$  es la densidad de corriente. Esta corriente se establece a lo largo de la dirección  $x$  y tiene tres contribuciones; la componente de difusión,

$\mu D \nabla n$  que se establece debido al gradiente de concentración de cargas, que depende de la movilidad electrónica  $\mu$ , de la constante de Boltzman y de la temperatura  $T$  ( $D = K_B T$ ). Adicionalmente también depende de la componente de deriva  $e \mu n E$  que representa la corriente de conducción originada por el campo eléctrico total que incluye el campo eléctrico de carga espacial fotoinducido  $E_{sc}$  y el campo eléctrico externo  $E_a$  y finalmente la componente fotovoltaica  $\kappa s I (N_D - N_D^+)$  que se establece en algunos materiales debido al proceso anti-simétrico de transferencia de carga, característica del Niobato de Litio, por lo tanto escribimos

$$J = \mu D \nabla n + e \mu n E + \kappa s I (N_D - N_D^+) . \quad (1.4)$$

Como hemos mencionado, la densidad de la distribución de carga  $\rho(x, t)$  dada por  $e(N_D^+ - N_A - n)$  genera un campo de carga espacial  $E_{sc}$  que de acuerdo con la ley de Gauss es

$$\nabla \cdot (\epsilon_o \epsilon E_{sc}) = e(N_D^+ - N_A - n) , \quad (1.5)$$

donde  $\epsilon_o$  es la permitividad del vacío y  $\epsilon$  es la constante dieléctrica del material. La ecuación de la variación temporal del campo de carga espacial  $E_{sc}(x, t)$  se obtiene derivando la ecuación anterior respecto del tiempo. El movimiento de los portadores es a lo largo de  $x$ ,  $N_D^+$  y  $n$  es la concentración de aceptores y electrones al instante de tiempo  $t$  respectivamente.

Como ya fué mencionado la distribución de campo de carga espacial, que aparece dentro del cristal, genera una modulación en la variación del índice de refracción debido al efecto electro-óptico lineal de tal manera que

$$\delta n(x) = \frac{1}{2} n_o^3 r_{eff} E_1(x) , \quad (1.6)$$

donde  $E_1$  es la primera componente de Fourier del campo de carga espacial,  $n_o$  el índice de refracción y  $r_{eff}$  el coeficiente electro-óptico efectivo.

Las cuatro ecuaciones (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) constituyen las llamadas ecuaciones del material y no pueden ser desacopladas ni tienen una solución analítica para el caso gen-

eral y de mayor interés tecnológico, es decir, cuando involucran campos eléctricos intensos y altas modulaciones en el patrón de iluminación.

El cálculo numérico lo realizamos en dos partes; la primera es la solución numérica de las ecuaciones materiales o de Kukhtarev; para obtener básicamente la amplitud del campo de carga espacial ( $E_{sc}(x)$ ) en la rejilla de interferencia como función de  $m$  y  $\Lambda$ . Los detalles se encuentran en la referencia [15]. Los cálculos fueron realizados para un material de Niobato de Litio con los parámetros definidos en la tabla 1.1, y un campo eléctrico aplicado  $E_a$  [16].

$E_a = 5.0\text{KV/cm}$	Campo aplicado
$I_o = 3.0\text{W/cm}^2$	Intensidad promedio de la luz
$\epsilon = 30.0$	Constante dieléctrica
$n = 2.32$	Índice de refracción
$r_{eff} = 8.6 \times 10^{-12}\text{m/V}$	Coefficiente electro-óptico
$\lambda = 0.4880\mu\text{m}$	Longitud de onda del haz
$\mu = 8.0 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$	Movilidad
$\gamma = 8.89 \times 10^{-14}\text{m}^3/\text{s}$	Coefficiente de atrapamiento
$\beta = 0.0$	Razón de ionización térmica
$s = 3.55 \times 10^{-4}\text{m}^2/\text{J}$	Sección eficaz de ionización
$\kappa = 1.5681 \times 10^{-26}\text{A}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}$	Constante de Glass
$N_D = 1.8 \times 10^{25}\text{m}^{-3}$	Densidad de trampas
$N_A = 1.0 \times 10^{24}\text{m}^{-3}$	Densidad de aceptores

Tabla 1.2. Parámetros utilizados en el material fotorrefractivo de  $\text{LiNbO}_3$ .

## 1.1 Evolución temporal de $E_{sc}(x, t)$ , y $N_D^+(x, t)$

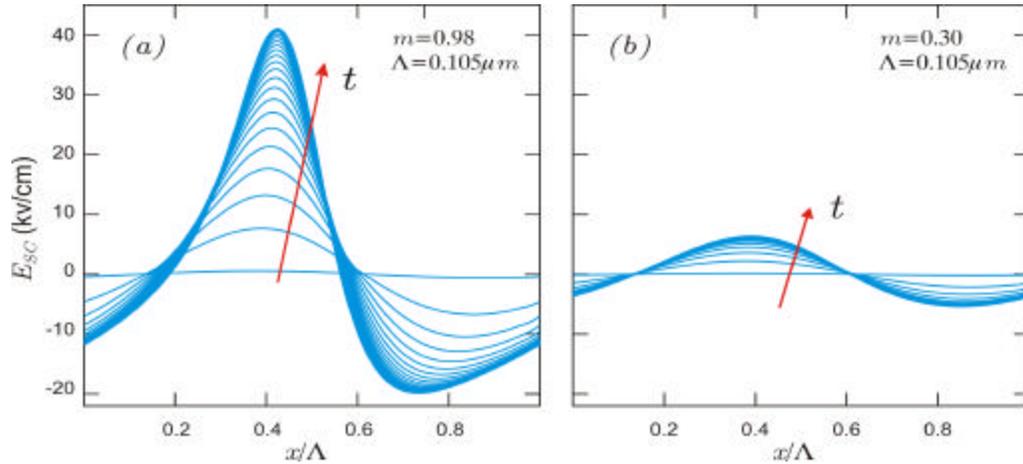


Fig.1.3. Evolución temporal del campo de carga espacial  $E_{sc}$ . Para:  $\Lambda = 0.105\mu m$  y (a)  $m = 0.98$  y (b)  $m = 0.3$ . Observe que el incremento de los tiempos está determinada por la flecha de color rojo.

En las Figs. 1.3(a) y 1.3(b) mostramos la evolución temporal del campo de carga espacial  $E_{sc}(x, t)$ , para  $m = 0.98$  y  $m = 0.3$  respectivamente. El incremento de los tiempos es mostrado por la flecha de color rojo. La coordenada  $x$  por simplicidad se normalizó a la longitud de onda  $\Lambda = 0.105\mu m$ , ya que las soluciones son periódicas.

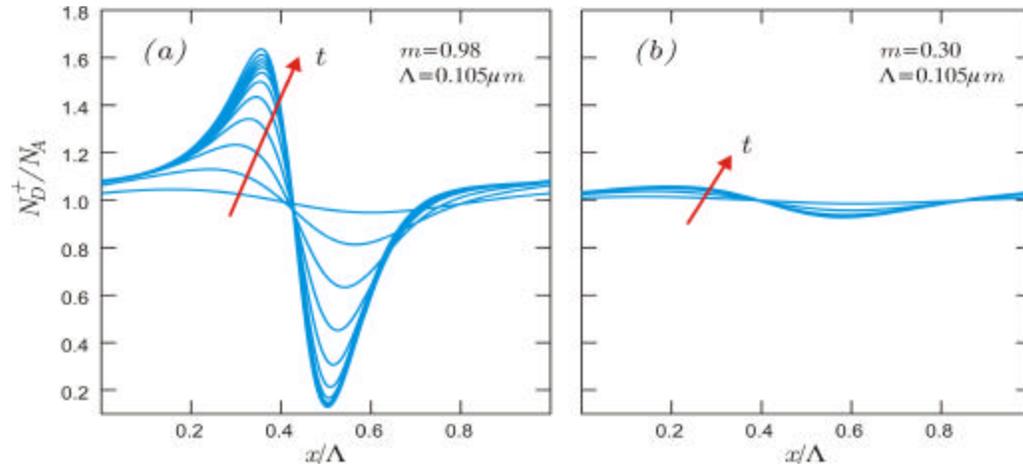


Fig.1.4. Evolución temporal de  $N_D^+(x, t)/N_A(x, t)$ . Para:  $\Lambda = 0.105\mu m$  y (a)  $m = 0.98$  y (b)  $m = 0.3$ . Observe que el incremento de los tiempos está determinado por la flecha de color rojo.

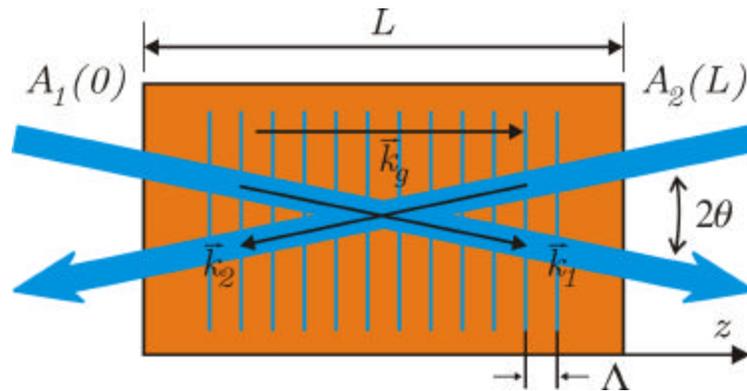
Finalmente en las Figs. 1.4(a) y 1.4(b), mostramos la evolución temporal de la

relación  $N_D^+(x, t)/N_A(x, t)$ , para las modulaciones (a)  $m = 0.98$  y (b)  $m = 0.3$  respectivamente.

Observamos de la Fig. 1.3(a), que el campo de carga espacial no es ni una función seno ni coseno además de ser periódica en  $\Lambda$ , por lo tanto es posible encontrar tres o más armónicos o componentes de Fourier, siendo la característica más importante de las rejillas fotorrefractivas de volumen. Esta propiedad permite tener una amplia gama de aplicaciones tales como las mencionadas en la introducción. Cabe mencionar que el comportamiento de nuestros cálculos numéricos son muy similares a los mostrados en referencia [17], para el caso de las condiciones de circuito abierto. Además, en dicha referencia no se realizan evoluciones temporales del campo de carga espacial, ni de la concentración de aceptores y electrones; únicamente se realizan calculos en estado estacionario, (cuando  $t \rightarrow \infty$ ).

## Ecuaciones de acoplamiento

Para acrecentar el efecto fotorrefractivo, se ha aprendido a controlar el flujo de carga dentro del material. Los dos mecanismos que controlan el flujo de la carga en el cristal son la difusión y el arrastre. La simple difusión de cargas desde las regiones brillantes a las oscuras de un cristal no produce el intenso campo eléctrico necesario. En 1981 Jean Pierre Huignard y Abdellatif Marrakchi de los laboratorios Thomson en Orsay, Francia, aplicaron un campo eléctrico externo a un cristal fotorrefractivo para producir un campo eléctrico de carga espacial, más intenso que el producido solamente por difusión [12]. En nuestro caso el campo aplicado está en la dirección de propagación de la luz ya que estamos en la configuración reflexión como lo indica la figura 2.1.



**Fig.2.1.** Configuración de reflexión para el grabado de una rejilla de volumen. Observe que el patrón de interferencia es perpendicular al vector  $\vec{k}_g = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ , y que el campo aplicado está en la dirección  $\vec{k}_g$ .  $A_1(0)$  y  $A_2(L)$  son los campos incidentes por la derecha e izquierda respectivamente. La propagación de los campos es a lo largo del eje  $z$ .

Observamos que cuando  $\theta = 0$  el campo aplicado está en la misma dirección que el de propagación de la luz, es decir, a lo largo del eje  $z$  ( $C$ -eje). En la referencia [18] se desarrolló un dispositivo que cuenta con capas de ITO (Indium Tin Oxide) que permite el paso libre de la luz y aplicar campo eléctricos del orden de  $\pm 20$  KV/cm a la muestra de

Niobato de Litio, este diseño lo mostramos en la figura 2.2.

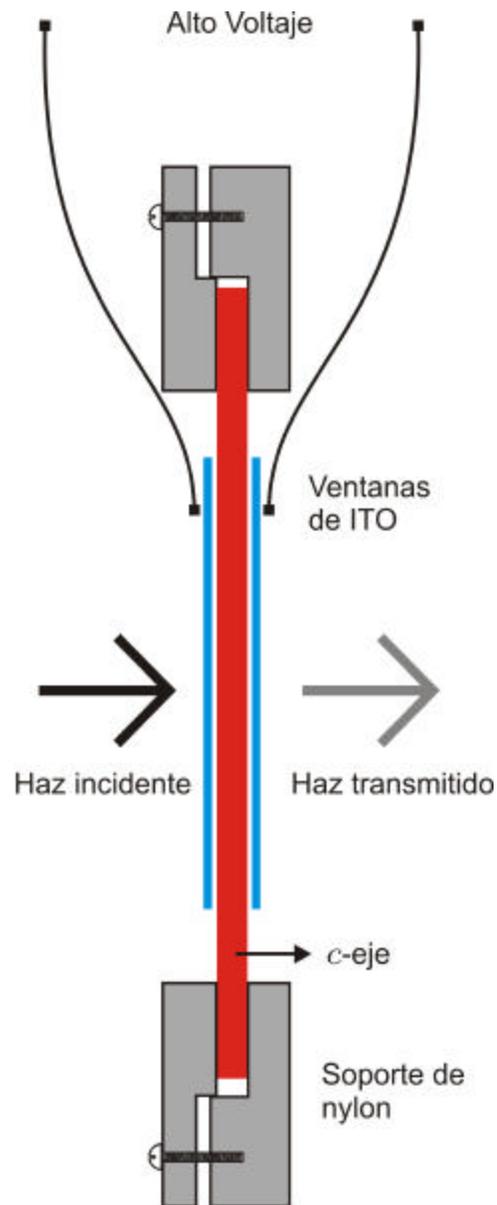


Fig.2.2. Arreglo experimental para la grabación en la configuración de reflexión de una rejilla fotorrefractiva de volumen. La lectura puede ser en la configuración de reflexión o transmisión

## 2.1 Propagación en rejillas de reflexión

El objetivo es propagar dos ondas planas de magnitud  $A_1$  y  $A_2$  a lo largo de una guía de longitud  $L$ , ver la Fig 2.1. Ya que conocemos únicamente sus intensidades  $I_1 = |A_1(0)|^2$  e  $I_2 = |A_2(L)|^2$ , es posible determinar la intensidad inicial  $I_0 = I_1 + I_2$  y determinar la modulación inicial  $m_o$ , por medio de la relación

$$m_o = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_o}, \quad (2.1)$$

que es un caso particular de

$$m = 2 \frac{A_1 A_2^*}{I_o} = |m| \exp(i\psi_m), \quad (2.2)$$

donde la modulación  $m$  es una cantidad compleja y  $\psi_m$  es su fase. Con estos datos podemos determinar las magnitudes de las ondas  $A_1$  y  $A_2$ , por medio de las relaciones

$$A_1 = \sqrt{\frac{I_o}{2} (1 - \sqrt{1 - m^2})} \exp(i\phi_1), \quad (2.3)$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{I_o}{2} (1 + \sqrt{1 - m^2})} \exp(i\phi_2), \quad (2.4)$$

donde las fases  $\phi_1$  y  $\phi_2$  las determinamos arbitrariamente.

Las ecuaciones de acoplamiento serán [10]

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = -i\kappa^* A_2(z) - \frac{\alpha}{2} A_1, \quad (2.5)$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = +i\kappa A_1(z) + \frac{\alpha}{2} A_2, \quad (2.6)$$

cuyas soluciones son

$$A_1(z) = \frac{iC_1}{2\kappa} (\alpha - \beta) \exp\left(\frac{1}{2}\beta z\right) + \frac{iC_2}{2\kappa} (\alpha + \beta) \exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right), \quad (2.7)$$

$$A_2(z) = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\beta z\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\beta z\right). \quad (2.8)$$

donde  $\beta$  y  $\kappa$  son respectivamente,

$$\beta = (\alpha^2 + 4 |\kappa|^2)^{1/2}, \quad (2.9)$$

$$\kappa = \frac{\pi}{\lambda \cos \theta} \frac{n_o^3 r_{eff} |E_1|}{2} \exp i[\Phi + \psi_m]. \quad (2.10)$$

En esta última expresión, se involucran la fase  $\Phi$  de la primera componente de Fourier de campo de carga espacial, la fase de la modulación  $\psi_m$ , el coeficiente electro-óptico  $r_{eff}$  y dos constantes  $C_1$  y  $C_2$  que se determinan de las condiciones iniciales  $A_1(0)$  y  $A_2(L)$ .

Cabe mencionar que Pochi Yeh presenta un resultado de solución analítica a las ecuaciones (2.5) y (2.6), restringida a la condición de absorción nula ( $\alpha = 0$ ), y un resultado numérico bajo la condición de muy baja absorción del medio [10]; bajo estas condiciones, es posible plantear y resolver analíticamente el sistema de ecuaciones acopladas en términos de las intensidades  $I_1$ ,  $I_2$  y las fases  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  para el intercambio de energía entre las intensidades de las dos ondas como:

$$\frac{dI_1(z)}{dz} = -\gamma \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} - \alpha I_1, \quad (2.11)$$

$$\frac{dI_2(z)}{dz} = -\gamma \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \alpha I_2, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\psi_1(z)}{dz} = \beta' \frac{I_2}{I_1 + I_2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\psi_2(z)}{dz} = -\beta' \frac{I_1}{I_1 + I_2}, \quad (2.14)$$

donde

$$\gamma = \frac{2\pi n_1}{\lambda \cos \theta} \sin \Phi, \quad (2.15)$$

$$\beta' = \frac{2\pi n_1}{\lambda \cos \theta} \cos \Phi, \quad (2.16)$$

$n_1$  está definida por la relación (1.6), donde resulta claro que  $\gamma$  y  $\beta'$  se relacionen con la parte imaginaria y real de la componente  $E_1$ , respectivamente. Las soluciones propuestas por Pochi Yeh, son

$$I_1(z) = \left[ -C + \sqrt{C^2 + B \exp(-\gamma z)} \right] \exp(-\alpha z), \quad (2.17)$$

$$I_2(z) = \left[ C + \sqrt{C^2 + B \exp(-\gamma z)} \right] \exp[\alpha(z - L)], \quad (2.18)$$

donde  $B = I_1(0)/I_2(0)$  y  $C = [I_2(0) - I_1(0)]/2$ . Observamos que es complicado trabajar con las intensidades, pero es muy sencillo observar que cuando la absorción es cero ( $\alpha = 0$ ), restando las ecuaciones (2.11) y (2.12) tenemos la característica más importante de los gratings de reflexión

$$I_1 - I_2 = cte . \quad (2.19)$$

Rueda y Mendoza, han abordado el problema de resolver las ecuaciones (2.11)-(2.14) [19], sin resolver las Ecuaciones del material, simplemente suponen que existe una componente armónica del campo de carga espacial y su fase. Las tres soluciones propuestas coinciden cuando  $\alpha = 0$ , pero cuando  $\alpha \neq 0$  tenemos algunas diferencias. Esto lo mostramos en la figura 2.3, donde hacemos una comparación con los datos propuestos por Pochi Yeh [20].

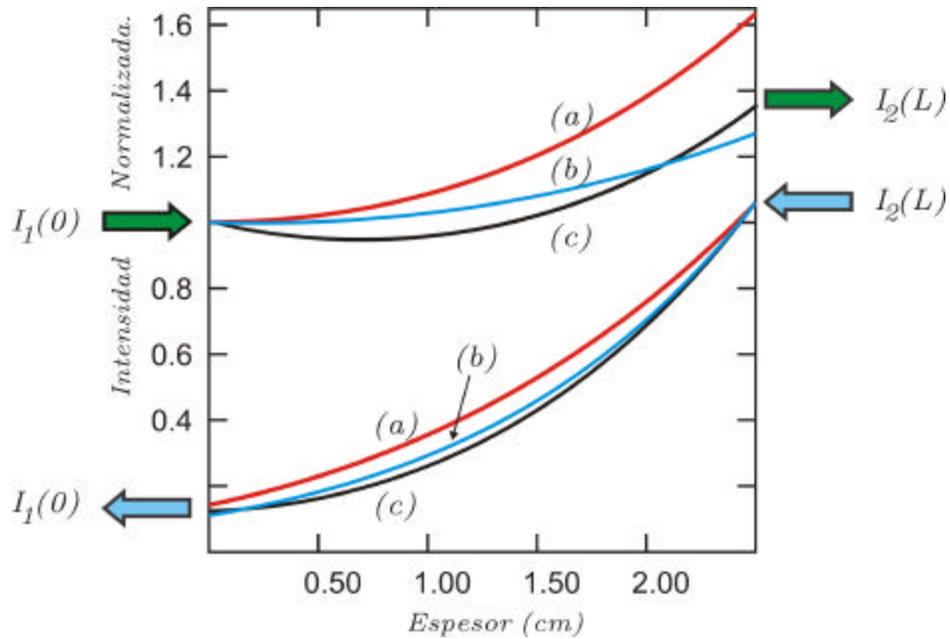


Fig.2.3. Comparación entre las soluciones de: (a) Rueda, (b) Nosotros y (c) Phochi Yeh. para  $\gamma = -10\text{cm}^{-1}$ ,  $\alpha = 1.6\text{cm}^{-1}$ ,  $L = 0.25\text{cm}$ .

En la referencia [20], no se definen los datos exactos de las intensidades iniciales, pero se definen las transmitancias de ambas ondas

$$t_1 = \frac{I_1(L)}{I_1(0)} = 1.27 , \quad t_2 = \frac{I_2(0)}{I_2(L)} = 0.11 ,$$

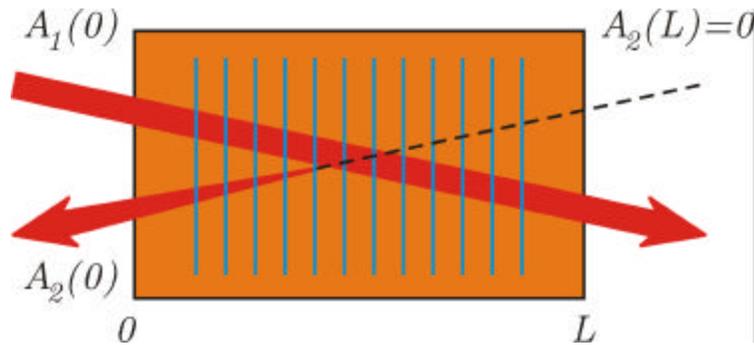
con esta información hemos trazado las curvas de la figura 2.3. Observe que en este caso de absorción distinta de cero, no se cumple la condición (2.19).

Cuando  $\alpha = 0$ , el cálculo de la eficiencia de difracción es muy simple. Ya que conocemos los valores de los campos  $A_1(0)$  y  $A_2(L)$ , es fácil determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$  necesarias en las ecuaciones (2.7) y (2.8), para determinar los campos a la salida  $A_1(L)$  y  $A_2(0)$ , que se escriben como

$$A_1(L) = \left[ A_1(0) - i \frac{|\kappa|}{\kappa} A_2(L) \sinh(|\kappa| L) \right] / \cosh(|\kappa| L), \quad (2.20)$$

$$A_2(0) = \left[ A_2(L) - i \frac{|\kappa|}{\kappa} A_1(0) \sinh(|\kappa| L) \right] / \cosh(|\kappa| L). \quad (2.21)$$

En el proceso de lectura, se utiliza un haz de luz menos intenso ( $\lambda = 0.6328 \mu m$ ) para evitar borrar la rejilla de volumen. La eficiencia de difracción se define en términos de las intensidades del haz reflejado y la intensidad del haz incidente en una cara del cristal, cuando no está iluminada la otra cara de dicho cristal. En la Figura 2.4, mostramos tal situación.



**Fig.2.4.** Configuración de lectura para medir la eficiencia de difracción  $\eta = |A_2(0)/A_1(0)|^2$ .

Si definimos la eficiencia de difracción  $\eta = |A_2(0)/A_1(0)|^2$  cuando  $A_2(L) = 0$ , de la última relación (2.21), escribimos:

$$\eta = \tanh^2(|\kappa| L), \quad (2.22)$$

que es la misma expresión obtenida por Kogelnik [9,10].

### 3.1 Cálculo de la eficiencia de difracción

Una vez resueltas las ecuaciones materiales, es posible conocer la primera componente de Fourier y la fase del campo de carga espacial; como consecuencia es posible calcular la constante de acoplamiento  $\kappa$  definida en la ecuación (2.10), y así numéricamente calcular la eficiencia de difracción para distintas modulaciones iniciales, como se muestra en la figura 3.1,

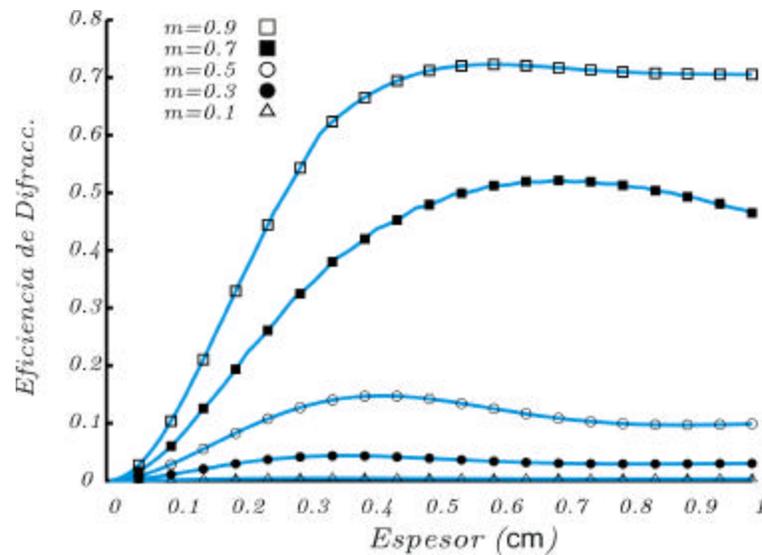


Fig.3.1. Eficiencia de difracción para distintas modulaciones iniciales en función del espesor de la muestra.

Cabe mencionar que dividimos la muestra en intervalos pequeños de tamaño  $\Delta z$ , en donde aplicamos las soluciones (2.7) y (2.8), hasta completar el espesor finito de 1.0 cm. Observamos que la eficiencia de difracción depende sensiblemente de la modulación inicial. Observamos también, que es posible optimizar la eficiencia de difracción con el espesor de la muestra, ya que sus máximos son alcanzados en el interior de la muestra. Esta situación nos es posible realizar con la teoría de Kogelnik, donde la eficiencia de difracción siempre

es creciente cuando la absorción es cero y tiende a un valor constante cuando la absorción es distinta de cero.

Cabe mencionar que la rejilla fue grabada y leída en la configuración de reflexión. La lectura se realizó con luz de longitud de onda  $\lambda = 0.4880\mu\text{m}$  donde la absorción es de  $\alpha = 3.0\text{cm}^{-1}$ . La lectura fue realizada con luz de longitud de onda  $\lambda = 0.5328\mu\text{m}$  ( $\alpha = 0.25\text{cm}^{-1}$ ) [18].

### 3.2 Cálculo de la ganancia

En la figura 3.2 mostramos la ganancia normalizada de los dos haces incidentes en la geometría de reflexión. En la referencia [20], se definen las transmitancias de ambas ondas incidentes, por lo tanto resulta natural definir la ganancia normalizada en función del espesor  $z$  como:

$$G_1 = \frac{I_1(z)}{I_1(0)}, \quad G_2 = \frac{I_2(z)}{I_2(L)},$$

para los haces incidentes por la izquierda y derecha respectivamente.

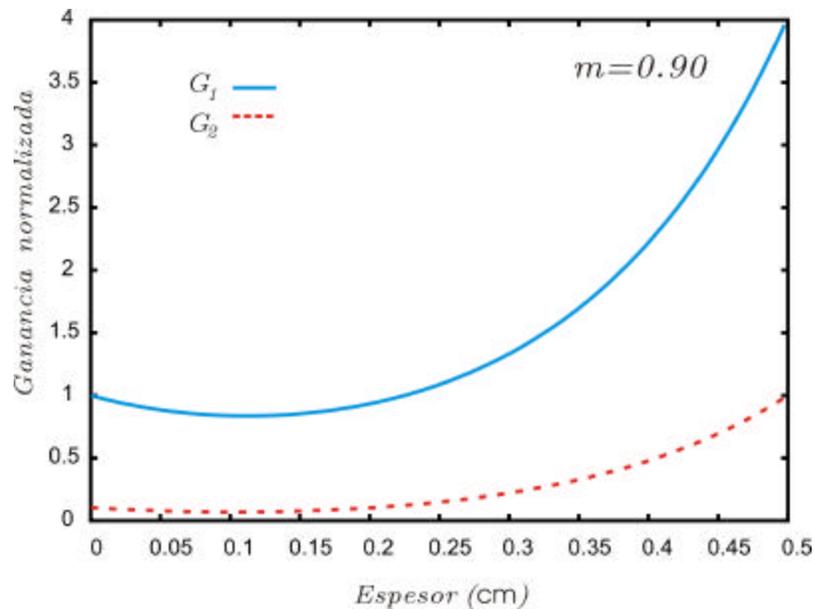


Fig.3.2. Ganancia normalizada en la configuración de contrapropagación. Para una modulación inicial de  $m = 0.9$ .

Los valores de la ganancia, los interpretamos de la siguiente manera: Al parecer el

haz por la izquierda es amplificado cuatro veces de su valor inicial y, el haz incidente por la derecha es atenuado hasta un decimo de su valor inicial. Con ayuda de las relaciones (2.3) y (2.4), escribimos

$$I_2(L) = \frac{I_1(0)}{G_2(0)} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - m^2}}{1 - \sqrt{1 - m^2}} \right)^{1/2},$$

donde, si  $G_2(0) = 0.1$  tenemos que  $I_2(L) = 15.9I_1(0)$ . Entonces resulta simple definir la evolución de las intensidades dentro del material imponiendo la condición,  $I_1(0) + I_2(L) = I_T$ , donde  $I_T$  es la iluminación total.

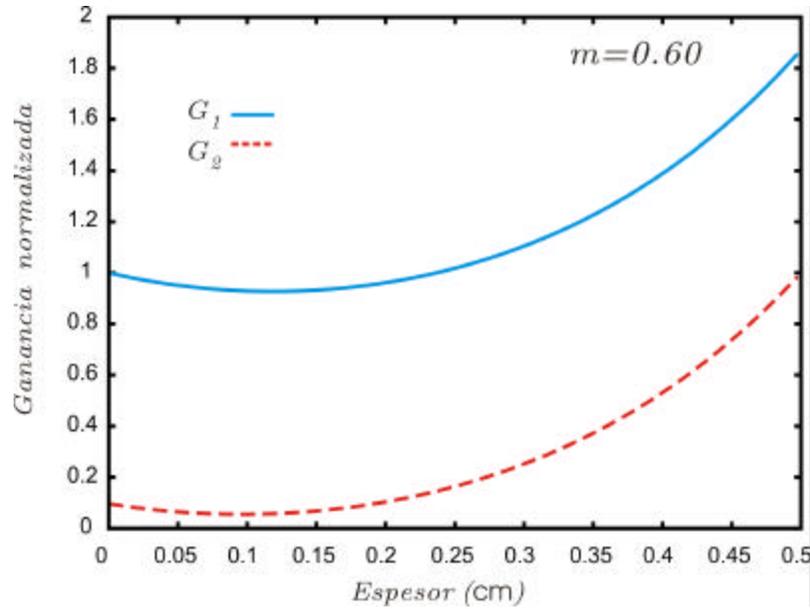
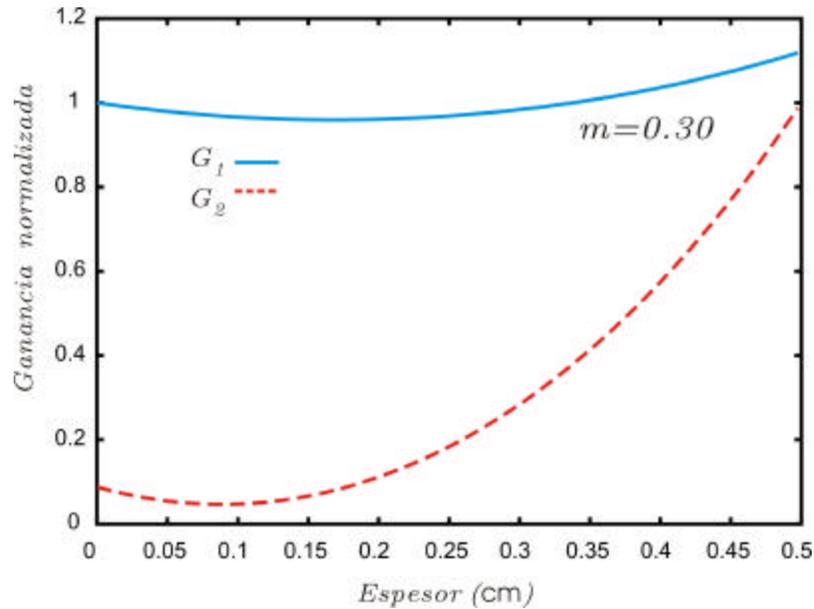


Fig.3.3. Ganancia normalizada en la configuración de contrapropagación. Para una modulación inicial de  $m = 0.6$ .

En las figuras 3.3 y 3.4 mostramos las ganancias normalizadas para  $m = 0.6$  y  $m = 0.3$ , respectivamente. Los valores de la ganancia  $G_2(0)$ , son 0.096 y 0.087 respectivamente. Nuevamente con estos datos podemos calcular la evolución espacial de las intensidades dentro de la muestra. Observe, que las ganancias no dependen de la iluminación total, ya que se supone que la muestra fue grabada previamente en la configuración de reflexión con un haz láser energético (azul) y es leída en la misma configuración con un haz menos energético (verde) y con menos absorción.



**Fig.3.4.** Ganancia normalizada en la configuración de contrapropagación. Para una modulación inicial de  $m = 0.3$ .

Una pregunta interesante está realacionada con la posibilidad de leer la muestra en la configuración de transmisión. Esta situación es experimentalmente posible [18]. Pero, hay que resaltar una situación importante; que la muestra ya ha sido grabada con una cierta modulación  $m_o$ , entonces para leerla vamos a iluminarla con un sólo haz en una cierta polarización, digamos vertical, es decir, que la intensidad inicial con polarización horizontal es nula. En este caso se define una cantidad llamada incremento en la densidad óptica ( $\Delta OD$ ) [18], que creemos relacionada con la actividad óptica. La actividad óptica es el poder que tienen los medios para rotar el plano de polarización. Entonces si existe esta variable, es posible observar el intercambio de energía entre los dos modos de polarización. En la figura 3.5, mostramos la evolución de las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  en función del espesor de la muestra. Claramente observamos un gran intertambio de energía entre estos los dos modos de polarización. Esta actividad óptica, es muy sensible con la modulación de grabado  $m_o$ , ya que en la figura 3.6, observamos que cuando la  $m_o$  disminuye el intercambio en la energía es menor.

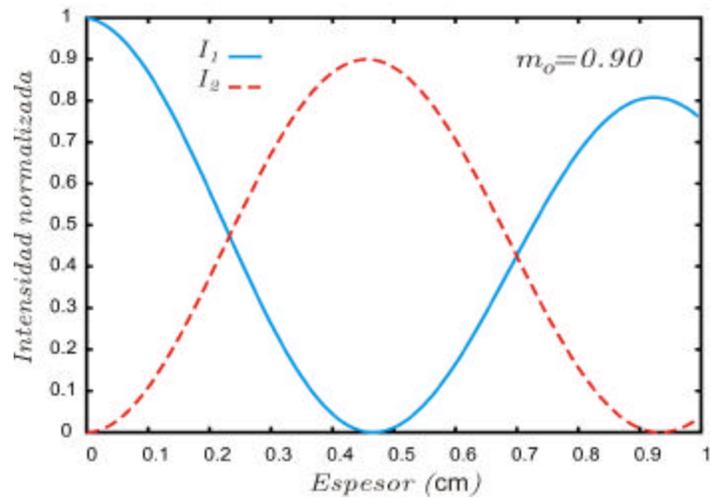


Fig.3.5. Lectura de la muestra en la configuración de transmisión. Observe que el haz  $I_2$  es cero. Note el intercambio de energía entre los modos de polarización.

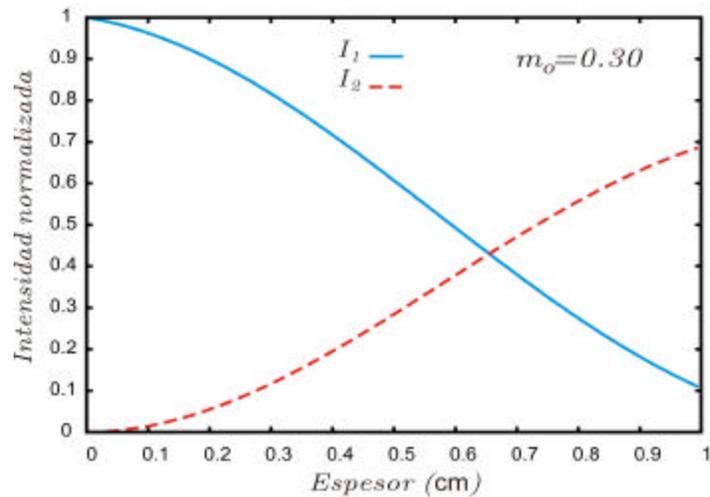


Fig.3.6. Lectura de la muestra en la configuración de transmisión. Observe que el haz  $I_2$  es cero. Note el intercambio de energía entre los modos de polarización es menor que en la figura 3.5.

### 3.3 Mezcla de cuatro ondas

Las investigaciones actuales sobre rejillas dinámicas grabadas por medio de saturación local de absorción/ganancia de fibras ópticas dopadas con tierras raras, empezó hace más de diez años. Su análisis por medio de acoplamiento de dos ondas no está todavía bien desarrollado. En especial la relacionada con interferometría adaptiva [21], que tiene muchas aplicaciones.

Consideramos que nuestro análisis puede ser implementado para estos casos, ya que el grabado en estas fibras ópticas se hace por medio de la mezcla de dos ondas en la configuración de reflexión. Posteriormente se envía otro haz de la misma longitud de onda que los de grabado, que es reflejado por la rejilla de interferencia generando una mezcla dinámica de cuatro ondas. Este trabajo lo tenemos planeado en corto plazo.

## Conclusiones

Hemos resuelto numéricamente las ecuaciones materiales que definen el efecto fotorrefractivo para el Niobato de Litio, donde mostramos la evolución espacial y temporal de las soluciones para modulaciones grandes con las mínimas aproximaciones, sólo las referidas al modelo de transporte de banda. Además, resolvimos las ecuaciones de acoplamiento las que aplicamos para el cálculo de la eficiencia de difracción utilizando la teoría de Kogelnik modificada. Aquí la constante de acoplamiento  $\kappa$  no es fija y se considera la absorción del material.

## Referencias

- [1] A. K. Dutta, N. K. Dutta, and M. Fujiwara, *WDM Technologies, Active Optical Components*, San Diego, Academic Press, (2002).
- [2] P. Boffi, D. Pccinin, and M. C. Ubaldi, *Infrared holography for optical communications*, Springer, Berlin, (2003).
- [3] K. Buse, F. Havermeier, W. Liu, C. Moser, and D. Psaltis, *Holographic Filters*, Photorefractive materials and their applications 3, Springer Series in Optical Sciences, by Peter Gnter and Jean-Pierre Huignard (Eds.). New York, NY, (2007).
- [4] E. G. Loewen and E. Popov, *Diffraction Gratings and Applications*, Marcel Dekker, New York, (1997).
- [5] C. B. Burckhardt, "Diffraction of a plane wave at a sinusoidally stratified dielectric grating", *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1502-1509, (1966).
- [6] R. Magnusson, and T. K. Gaylord, "Analysis of multiwave diffraction by thick gratings", *J. Opt. Soc. Amer.* **67**, 1165-1170, (1977).
- [7] T. K. Gaylord and M. G. Moharam, "Analysis and applications of optical diffraction by gratings", *Proc. IEEE*, **73**, 894-937, (1985).
- [8] R. Magnusson and T.K. Gaylord, "Equivalence of multiwave coupled-theory and modal theory for periodic-media diffraction", *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1777-1779, (1978).
- [9] H. Kogelnik, "Coupled wave theory for thick hologram gratings", *The Bell System Technical Journal*, **48**, 2909-2947, (1969).
- [10] P. Yeh, *Introduction to Photorefractive Nonlinear Optis.* John Wiley, New York. (1993).
- [11] A. Askin, G. D. Boyd, J. M. Dziedzic, R. G. Smith, A. A. Ballman, J. J. Levinstein, and K. Nassau, "Optically induced refractive index inhomogeneities in LiNbO<sub>3</sub> and LiTaO<sub>3</sub>", *Appl. Phys. Lett.* **9**, 72-74 (1966).
- [12] Jack Feinberg, "Photorefractive nonlinear optics". *Physics Today*, 46-52 (Oct. 1988).

- [13] D. M. Pepper, J. Feinberg, and N. V. Kukhtarev, “*The Photorefractive Effect*”. *Scientific American*, 34-40 (Oct. 1990).
- [14] N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odulov, M. S. Soskin, and V. L. Vinetskii, “Holographic storage in electro-optic crystals, beam coupling and light amplification”, *Ferroelectrics*, **22**, 961-964 (1979).
- [15] J. G. Murillo, L. F. Magaa, M. Carrascosa, and F. Agulló-López, “Temporal evolution of the physical response during photorefractive grating formation and erasure for BSO” *J. Appl. Phys.* **78**, 5686-5690 (1995).
- [16] O. Salas-Torres, “Eficiencia de difracción en rejillas de reflexión de  $\text{LiNbO}_3$  ” Tesis Maestro en Ciencias, ESFM-IPN (2008).
- [17] W. K. Lee, and T. S. Chan, “Photorefractive hologram writing with high modulation depth in photovoltaic media under different boundary conditions” *Opt. Comm.* **281**, 5884-5888 (2008).
- [18] G. Cook, J. P. Duignan, and D. C. Jones, “Photovoltaic contribution to counter-propagation two-beam coupling in photorefractive lithium nobate”, *Opt. Comm.* **192**, 393-398 (2001).
- [19] P. J. E. Rueda, L. J. Mendoza, “Solución exacta de la configuración mezcla contradireccional de dos ondas en un material fotorefractivo”, *Bistua.* **5-2**, 116-122 (2007).
- [20] P. Yeh, “Two-Wave mixing in nonlinear media”, *IEEE J. Quantum Electron.* **25**, 484-519 (1989).
- [21] S. Stepanov, “Two-wave mixing via reflection population gratings”, *Optics* **117**, 151-162 (2006).