LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Por Jorge José Osés Recio

Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes – Bogotá – Colombia - 2004

Cuando se estudió la solución de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ se analizó el signo del discriminante b^2-4ac y su relación con las soluciones. Si el discriminante era negativo se dijo que la ecuación no tenía raíces reales sino que las raíces eran imaginarias o complejas. Vamos ahora a estudiar los *números complejos* que nos darán la idea completa de la solución de la ecuación de segundo grado y una extensión de los conjuntos numéricos. Realizaremos lo que se llama la definición axiomática del conjunto de los números complejos.

Sección 1

Definición y operaciones en el conjunto de los números complejos.

Definición. Llamamos *conjunto de los números complejos* y lo denotamos con la letra $\mathbb{C}$ al conjunto de los pares de números reales (a,b) en el cual definimos las siguientes operaciones:

Suma. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
Multiplicación. $(a,b)(c,d)=(ac-bd\,,\,ad+bc)$

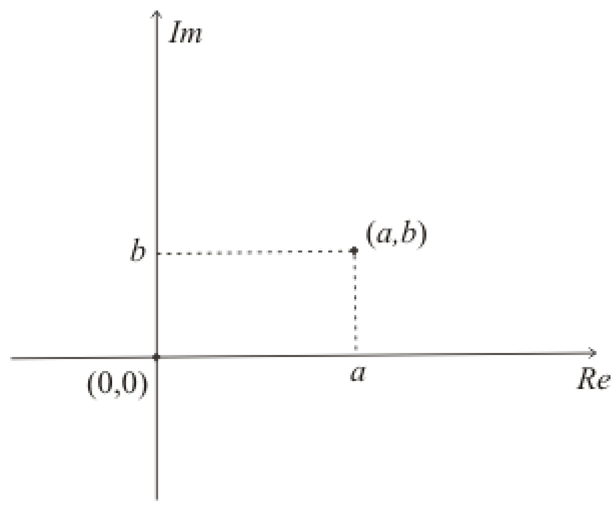
En el número complejo (a,b) llamaremos a a la *parte real* y a b la *parte imaginaria*. Note que la suma y producto de pares no está definida en $\mathbb{R}^2$.

Dos propiedades que cumplen los pares de números reales y que se mantienen para los complejos son:

Igualdad. $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \ \wedge \ b=d$
Multiplicación por un escalar. $\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Dados $(2,1)$ y $(0,-3)$, hallar:
a) $(2,1)+(0,-3)=(2+0,1+(-3))=(2,-2)$
b) $(2,1)(0,-3)=(2(0)-1(-3),\ 2(-3)+1(0))=(3,\ -6)$
c) $(2,1)(0,-3)-2(-1,1)=(3,-6)+(2,-2)=(5,-8)$

Como los números complejos son pares de números reales podemos efectuar una representación de los mismos mediante el plano $\mathbb{R}^2$ (*Gráfica 1*) En esta representación se le dice *eje real* (*Re*) al eje de las x y *eje imaginario* (*Im*) al eje de las y .



Gráfica 1: Representación del número complejo (a,b).

Podemos considerar que los números reales están contenidos en los números complejos puesto que en el plano $\mathbb{R}^2$ el número complejo $(a,0)$ coincide con el número real a. De este modo tenemos $a=(a,0)$ cuando $a\in\mathbb{R}$. Los números complejos de la forma $(0,b)$ son llamados *imaginarios puros*.

Vamos a demostrar la propiedad de la multiplicación por un escalar $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$$

Para eso escribimos el número real α en la forma $(\alpha,0)$ y aplicamos la definición de multiplicación:

$$\alpha(a,b)=(\alpha,0)(a,b)=(\alpha a-0b\ ,\ \alpha b+0a)=(\alpha a,\alpha b).$$

Denotaremos el número complejo $(0,1)$ con la letra i y lo llamaremos *unidad imaginaria*. Es fácil demostrar que $i^2=-1$.

$$i^2=(0,1)^2=(0,1)(0,1)=\big(0(0)-1(1),0(1)+1(0)\big)=(-1,0)=-1$$

Ahora estamos en condiciones de resolver la sencilla ecuación $x^2+1=0$.

$$x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x^2=i^2\Rightarrow x=\pm i$$

Forma binómica de un número complejo

Sea $z=(a,b)$ un número complejo. Entonces podemos escribirlo en la forma:

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a(1,0)+b(0,1)$$

Pero como $(1,0)=1$ y $(0,1)=i$, entonces $(a,b)=a+bi$. En este caso $a+bi$ se llama *forma binómica o binomia* del número complejo.

Suma y multiplicación de números complejos en la forma binómica

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$, puesto que a,b,c,d son todos números reales.

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$ porque $i^2=-1$.

Ahora observe que los resultados son los mismos que las definiciones de suma y producto dados al inicio; por lo que la realización de las operaciones de suma y multiplicación con números complejos se puede realizar en la forma de pares o en la forma binómica**,** con la ventaja a favor de la forma binómica que se trabaja con las reglas del álgebra y no es necesario memorizar nada nuevo.

Ejemplo. Si $z_1=(3,2)$ y $z_2=(4,-1)$, halle z_1+z_2 y z_1z_2.

$z_1+z_2=(3,2)+(4,-1)=(3+2i)+(4-i)=7+i$

$z_1\,z_2=(3,2)(4,-1)=(3+2i)(4-i)=12-3i+8i-2i^2=(12+2)+(-3+8)i=14+5i$

Conjugado de un número complejo

Si $z=x+yi$ es un número complejo llamaremos *conjugado del número z***,** al número $\bar{z}=x-yi$, es decir, al número complejo que tiene la misma parte real que z pero la parte imaginaria de signo opuesto.

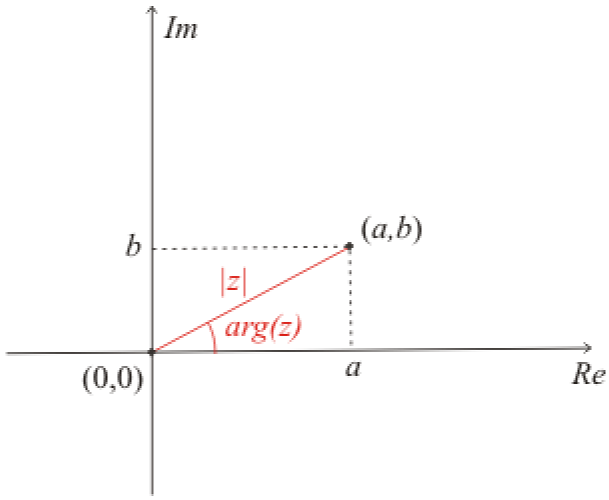
Ejemplo. Si $z=3+2i$, entonces $\bar{z}=3-2i$ y si $z=3-2i$, entonces $\bar{z}=3+2i$.

Módulo y argumento de un número complejo

Sea $z=(a,b)=a+bi$ un número complejo cualquiera. Llamaremos *módulo* del número complejo z, al número real dado por $\sqrt{a^2+b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El módulo se interpreta como la distancia al origen del número z (*Gráfica 2*).

Por otra parte, llamaremos *argumento* del número complejo $z=a+bi$, al ángulo comprendido entre el eje x y el radio vector que determina a $|z|$. El argumento de z se denota por $\arg(z)$ y se calcula mediante la expresión:

$$\arg(z)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$



Gráfica 2: Módulo y argumento de un número complejo.
Propiedad: $z\,\overline{z} = |z|^2$

Demostración:

$$z\,\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - y^2 i^2 =$$
$$= \left(a^2 + b^2\right) + \left(-ab + ab\right) i = a^2 + b^2 + 0i = a^2 + b^2 = |z|^2$$

División de números complejos

La división de números complejos se realiza mediante la multiplicación y división por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{|z_2|^2}$$

Ejemplo. Dados $z_1 = 2-3i$ y $z_2 = -1+2i$, halle: (a) $\overline{z}_2$ y (b) $\frac{z_1}{z_2}$.

(a) Como $z_2 = -1+2i$ entonces $\overline{z}_2 = -1-2i$

(b) Para hallar $\frac{z_1}{z_2}$ multiplicamos y dividimos por el conjugado $\overline{z}_2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-1+2i} = \frac{2-3i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{(2-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$
$$= \frac{-2-4i+3i+6i^2}{(-1)^2+(2)^2} = \frac{-8-i}{5} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5} i$$

Raíces complejas de la ecuación de segundo grado

Si el discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es negativo, debe sustituirse el signo negativo por i^2 y de esa forma se obtienen las raíces complejas de la ecuación.

Ejemplo. Resolver la ecuación $x^2-2x+6=0$.

Aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

Se puede ver que el discriminante es -20 lo cual puede escribirse como $20\,i^2$. Por lo tanto:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}\,i}{2} = 1 \pm \sqrt{5}\,i$$

Así, las raíces complejas de la ecuación son: $x_1 = 1 - \sqrt{5}\,i$ y $x_2 = 1 + \sqrt{5}\,i$.

Ejercicios de la Sección 1.

1) Dados los números complejos $z = (3,2)$ y $w = (-1,-4)$, halle:

   (a) $z + w$, (b) $z\,w$, (c) $3z - 4w$, (d) $(-1,0)w$, (e) $(0,-2)z$.

2) Muestre que $(0,0)$ es el elemento neutro para la suma de números complejos.

3) Muestre que $(1,0)$ es el elemento neutro para la multiplicación de números complejos.

4) Calcule:

   (a) i^3 , (b) i^4 , (c) i^5 , (d) $\frac{1}{i}$, (e) $\frac{1}{i^2}$.

5) Calcule:

   (a) i^{4n} , (b) i^{4n+1} , (c) i^{4n+2} , (d) i^{4n+3} .

6) Dado el número complejo (x,y) halle el par (u,v) tal que $(x,y)(u,v) = (1,0)$. Al par se le llama inverso multiplicativo de (x,y). Concluya que el par (u,v) es único y que el $(0,0)$ no tiene inverso multiplicativo.

7) Verifique que $\overline{\overline{z}} = z$.

8) Verifique que $\bar{u}v$ y $u\bar{v}$ son conjugados.

9) Calcule:

   (a) $\frac{3+3i}{2-4i}$, (b) $\frac{1-3i}{-2-2i}$.

10) Resuelva la ecuación $(-2+i)\,z = 3+i$.

11) Halle z tal que $(2+i)(1+i)=2+zi$.

12) Calcule y represente en el plano complejo los números $z=x+yi$, tales que:

(a) $|z|=5$, (b) $|z|\leq 5$.

13) Calcule y represente en el plano complejo los números $z=x+yi$ tales que:

(a) $|z-2|\leq 5$, (b) $|z-i|\leq|z+i|$, (c) $z+\overline{z}=|z|^2$.

14) Resuelva la ecuación cuadrática $x^2+3x+3=0$.

15) Resuelva la ecuación cuadrática $2x^2+4x+5=0$.

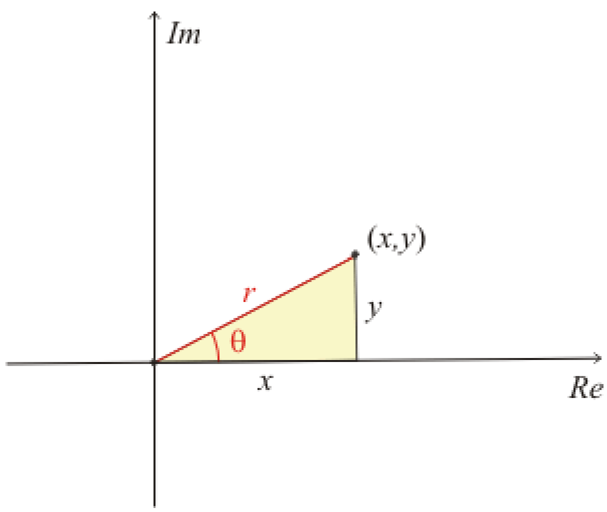
16) Resuelva la ecuación cuadrática $x^2+3x+8=0$.

17) Resuelva la ecuación $x^4+13x^2+36=0$.

Sección 2

Forma trigonométrica o polar de un número complejo

La forma trigonométrica de un número complejo se establece observando el triángulo amarillo de la *Figura 3*:



Gráfica 3: Forma trigonométrica de un número complejo.

En este caso se tiene que $r=|z|=|(x,y)|$ y que $\theta=\arg(z)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Luego:

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ésta es la llamada *forma trigonométrica o polar* del número complejo, la cual está en términos del módulo y el argumento. Se denota comúnmente por $z = r\,\text{cis}\,\theta$.

Ejemplo: Halle la forma trigonométrica de $z = 1 - i$.

Hallemos $r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{-1}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Note que θ está en el cuarto cuadrante. Por lo tanto:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica

Sean $u = r\,\text{cis}\,\alpha$ y $v = s\,\text{cis}\,\beta$, entonces $u\,v = (rs)\text{cis}(\alpha + \beta)$. En otros términos:

$$uv = (rs)\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} u\,v &= r\,\text{cis}\,\alpha \cdot s\,\text{cis}\,\beta \\ &= (rs)(\text{cis}\,\alpha\,\text{cis}\,\alpha) \\ &= (rs)(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (rs)\big(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta\big) \\ &= (rs)\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta)\big) \\ &= (rs)\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big) \\ &= (rs)\,\text{cis}(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la multiplicación de dos números complejos en su forma trigonométrica da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y cuyo argumento es igual a la suma de los argumentos.

Ejemplo. Sea $u = 2\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $v = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - i\,sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 3cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Entonces $u\,v = 6\,\text{cis}(0) = 6\big(\cos(0) + i\sin(0)\big) = 6$

Fórmula de Moivre

Empleando el resultado del *Ejercicio 3b* de esta sección, $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$, y tomando $r=1$, tenemos:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,.$$

Esta expresión es la llamada *fórmula de Moivre.*

Forma exponencial de un número complejo

Vamos a asumir que se siguen cumpliendo, como en los números reales, los conceptos de función, derivadas, series, etc. Vamos a demostrar la *fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,.$$

Empleemos el desarrollo en serie de potencias de la función $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, suponiendo que sea válido para cuando la variable x es un número complejo z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.. + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Si tomamos $z = i\theta$, nos queda:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots.. + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \ldots \\
&= 1 + i\frac{\theta}{1!} + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \ldots.
\end{aligned}$$

Agrupando tendremos:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots.\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots.\right)$$

Estos son los desarrollos de $\cos\theta$ y $\sin\theta$ respectivamente. Así que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Sea $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un número complejo donde r es su módulo y θ su argumento. Entonces mediante el empleo de la fórmula de Euler se obtiene:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}\,.$$

Esta expresión es la llamada *forma exponencial* del número complejo. Note que la forma exponencial es equivalente a la trigonométrica pues dependen de los mismos elementos: módulo y argumento del número complejo z. Esta forma es muy cómoda pues podemos efectuar la multiplicación, división y potenciación empleando las leyes del álgebra.

Multiplicación y división de números complejos en su forma exponencial

Sean $u = re^{i\alpha}$ y $v = se^{i\beta}$. Entonces:

$$uv = re^{i\alpha}\,se^{i\beta} = (rs)e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{re^{i\alpha}}{se^{i\beta}} = \left(\frac{r}{s}\right)e^{i(\alpha-\beta)}$$

Ejemplo: Sea $u = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $v = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Entonces $uv = 18e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$ y $\frac{u}{v} = 2e^{i(0)} = 2$.

Ejercicios de la Sección 2.

1) Represente:

   (a) en la forma trigonométrica el número complejo $-3+3i$.

   (b) en la forma binómica el número complejo $2(\cos\pi - i\sin\pi)$.

2) Represente:

   (a) en la forma trigonométrica el número complejo $-2-2i$.

   (b) en la forma binómica el número complejo $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

3) Multiplicando el mismo número complejo n veces, efectúe y emplee identidades trigonométricas para comprobar que si

   $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,
   $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
   , …,
   $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

   entonces

   (a) $z_1^2 = r_1^2\left(\cos(2\theta_1) + i\sin(2\theta_1)\right)$

(b) $z_1^n = r_1^n\left(\cos(n\theta_1)+i\sin(n\theta_1)\right)$

(c) $z_1z_2\ldots z_n = (r_1r_2\ldots r_n)\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)$.

Extienda el resultado a las potencias enteras negativas.

4) Calcule:

(a) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^9$, (b) $\dfrac{1}{(2+2i)^7}$

5) Dados $u=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ y $v=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, emplee la forma exponencial para hallar:

(a) uv, (b) u/v.

6) Dados $u=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ y $v=2-i\sqrt{3}$, emplee la forma exponencial para hallar:

(a) uv, (b) u/v.

7) Halle $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^4}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^6}$.

8) Halle $\dfrac{(1+i)^{84}}{(-1-i)^9}$

Sección 3

Raíces *n*-ésimas de un número complejo

En la forma binómica de un número complejo la representación es única, mientras que en la forma trigonométrica o exponencial un mismo número complejo tiene infinitas representaciones diferentes, $z = r\,e^{i(\theta+2k\pi)}$ con $k\in\mathbb{Z}$. Para cada valor de k habrá una representación diferente del número complejo z.

Definamos la radicación como la operación inversa de la potenciación, esto es:

$$z=\sqrt[n]{w}\Leftrightarrow z^n=w.$$

Supóngase que $w=re^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento θ y que $z=se^{i\phi}$ un número complejo de módulo s y argumento ϕ. Entonces $z^n=w$ equivale a:

$$z^n = s^n e^{in\phi} = re^{i\theta} = r\,e^{i(\theta+2k\pi)} = w.$$

De esta manera:

(1) $s^n = r$

(2) $n\phi = \theta + 2k\pi$

Por lo tanto, $z = se^{i\phi}$ donde $s = \sqrt[n]{r}$ y $\phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Estas son las fórmulas para hallar las n raíces *n*-ésimas de cualquier número complejo. Compruebe que para todo otro valor de k, con $k \in \mathbb{Z}$, se obtienen las mismas n raíces que para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ejemplo. Hallar $\sqrt{1+i}$.

$1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Por lo tanto $s = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ y $\phi = \dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{2}$, con $k = 0,1$. Entonces:

Para $k = 0$, tenemos $z_1 = \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Para $k = 1$, tenemos $z_2 = \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

El logaritmo de un número complejo

Al igual que para los reales, vamos a definir el logaritmo de un número complejo como la operación inversa de la exponencial, esto es:

$$z = \log w \Leftrightarrow e^z = w.$$

Supóngase que $w = re^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento θ, entonces:

$$e^z = r\,e^{i(\theta+2k\pi)} = w \Leftrightarrow z = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi).$$

Ejemplo. Sea $1 = 1e^{i(0)}$. Por tanto $\log(1) = \ln(1) + i\,(2k\pi) = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios de la Sección 3

1) Halle las raíces cuadradas de -1 y verifique que son i y $-i$.

2) Halle las raíces cúbicas de 1.

3) Halle las raíces cúbicas de -1.

4) Halle las raíces cuadradas del número $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ y expréselas en la forma binómica.

5) Halle las raíces cúbicas del número $-1-i\sqrt{3}$ y expréselas en la forma binómica.

6) Halle las raíces cuadradas de $-2-2i$ y represéntelas en el plano complejo.

7) Muestre que $\log(-1)=\pi i$.

8) Halle:

(a) $\log(e)$, (b) $\log(i)$, (c) $\log(-ei)$.

9) Muestre que $\log(1-i)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}i$.

Respuestas

Sección 1

1) a) $(2,-2)$, b) $(5,-14)$, c) $(13,22)$, d) $(1,4)$, e) $(4,-6)$

6) $(u,v)=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$

9) a) $\dfrac{-3+9i}{10}$

11) $3+i$

13) a) $(x-2)^2+y^2\leq 25$, círculo de radio 5 centrado en $(2,0)$ y su interior.

15) $-1\pm\dfrac{1}{2}i$

17) $\pm 2i$, $\pm 3i$

Sección 2

1 a) $3\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

5) a) 2, b) i

7) $\dfrac{1}{4}e^{-\frac{10}{3}i}$

Sección 3

3) $\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

5) $2e^{i\frac{4}{9}\pi}, 2e^{i\frac{10}{9}\pi}, 2e^{i\frac{16}{9}\pi}$

8) a) $1+2k\pi i$, c) $1-\dfrac{\pi}{2}i$