

CAPÍTULO

5. EXPERIMENTACIÓN

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al probar el funcionamiento de las memorias asociativas geométricas propuestas en esta tesis. Por cada modelo desarrollado se presentan dos tipos de problemas, uno numérico y otro con patrones reales. Por simplicidad, y para clarificar los resultados, los problemas numéricos se presentan en dos y tres dimensiones.

Para resolver el problema de optimización, en todos los casos se utiliza la función “*quadprog*” del *toolbox* de optimización del programa MatLab. Esta función resuelve problemas de programación cuadrática. Permite encontrar una solución viable al resolver el problema como uno de programación lineal.

También, para clarificar los resultados, se decidió ajustar el valor de ε a 1.0^{-10} para todos los experimentos; sin embargo, los resultados se muestran con dos centésimas de precisión.

5.1 Experimentación para el modelo de clasificación

5.1.1 Ejemplos numéricos

Ejemplo 1. Sean las siguientes clases linealmente separables en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}
\text{Clase 1} \quad & x^1 = 1 \ 1, \quad x^2 = 2 \ 1, \quad x^3 = 3 \ 2, \quad x^4 = 2 \ 2, \\
\text{Clase 2} \quad & x^5 = 2 \ -1, \quad x^6 = 1 \ -3, \quad x^7 = 3 \ -1, \quad x^8 = 2 \ -2, \\
\text{Clase 3} \quad & x^9 = -1 \ 3, \quad x^{10} = -3 \ 2, \quad x^{11} = -2 \ 2, \quad x^{12} = -4 \ 1, \\
\text{Clase 4} \quad & x^{13} = -2 \ -2, \quad x^{14} = -1 \ -3, \quad x^{15} = -1 \ -1, \quad x^{16} = -3 \ -1.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

La siguiente figura muestra una representación gráfica de estos patrones en el plano:

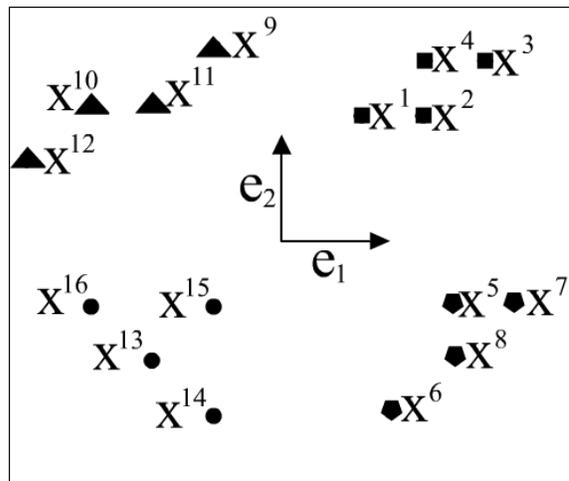


Figura 1. Representación gráfica de las clases del Ejemplo 1. Los cuadrados, pentágonos, círculos y triángulos son puntos pertenecientes a las clases 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

Al usar la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, por cada clase, se obtienen las hiper-esferas respectivas. Ya que se está trabajando en un espacio de dos dimensiones las hiper-esferas, en este ejemplo, son, en realidad, círculos. Los centros y radios son, respectivamente:

$$c^1 = 0.65 \ 1.11, \quad \gamma^1 = 2.51.$$

$$c^2 = 1 \ -1, \quad \gamma^2 = 2.$$

$$c^3 = -1.5 \ 1.5, \quad \gamma^3 = 2.55.$$

$$c^4 = -0.8 \ -0.6, \quad \gamma^4 = 2.41.$$

Finalmente, la memoria es:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} S^1 = C^1 - \frac{1}{2} \gamma^1{}^2 e_\infty \\ \cdot \\ \cdot \\ S^4 = C^4 - \frac{1}{2} \gamma^4{}^2 e_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^1 = 0.65e_1 + 1.11e_2 - 2.31e_\infty + e_0 \\ S^2 = e_1 - e_2 - e_\infty + e_0 \\ S^3 = -1.5e_1 + 1.5e_2 - e_\infty + e_0 \\ S^4 = -0.8e_1 - 0.6e_2 - 2.4e_\infty + e_0 \end{bmatrix}. \quad (0.2)$$

En la Figura 2 se presentan las hiper-esferas (en este caso círculos) de cada clase. Se puede observar que las hiper-esferas son óptimas, porque si alguna de ellas crece un poco más, algunos puntos de otras clases estarían dentro. Por el contrario, si alguna de ellas decrece un poco, algunos puntos se quedarían fuera.

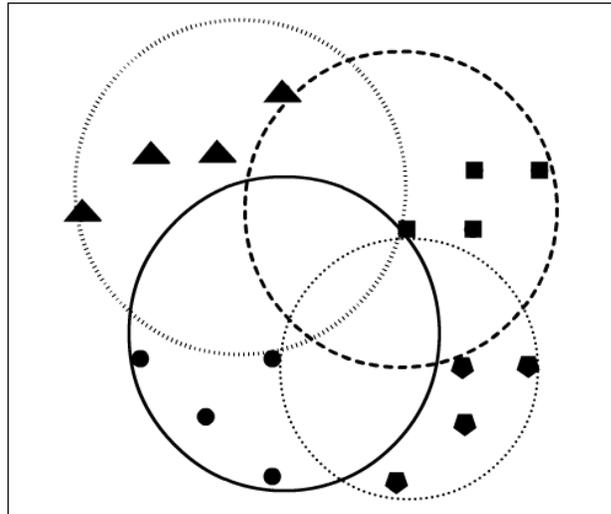


Figura 2. Círculos óptimos de las clases del Ejemplo 1.
Funcionan como superficies de separación.

Al clasificar todos los patrones de (0.1) siempre se obtiene una clasificación perfecta. Ahora, sean los patrones mostrados a continuación, éstos son patrones pertenecientes al conjunto fundamental, pero han sido contaminados con ruido aditivo, sustractivo o mixto.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^1 &= x^1 + 0 \quad 2 \quad = 1 \quad 3 . \\
\tilde{x}^8 &= x^8 + -2 \quad 0 \quad = 0 \quad -2 . \\
\tilde{x}^9 &= x^9 + -1 \quad 1 \quad = -2 \quad 4 . \\
\tilde{x}^{15} &= x^{15} + 0 \quad -1 \quad = -1 \quad -2 .
\end{aligned}
\tag{0.3}$$

Al aplicar la ecuación **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se obtiene el siguiente resultado para cada patrón:

$$\mathbf{u}^1 = \begin{bmatrix} 1.31 \\ -6 \\ -1 \\ -5.2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}^8 = \begin{bmatrix} -1.92 \\ 1 \\ -4 \\ 1.6 \end{bmatrix}, \mathbf{u}^9 = \begin{bmatrix} -4.53 \\ -15 \\ 0 \\ -8.4 \end{bmatrix}, \mathbf{u}^{15} = \begin{bmatrix} -3.07 \\ -0.5 \\ -3 \\ 1.9 \end{bmatrix},
\tag{0.4}$$

el siguiente paso es aplicar la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** para obtener el vector v , por cada vector:

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} -1.83 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}, \mathbf{v}^8 = \begin{bmatrix} -\infty \\ 1 \\ -\infty \\ -1.3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}^9 = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -3.25 \\ -\infty \end{bmatrix}, \mathbf{v}^{15} = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -1 \end{bmatrix}.
\tag{0.5}$$

Finalmente, el índice de cada clase se obtiene por medio de la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, por lo tanto, para \tilde{x}^1 , \tilde{x}^8 , \tilde{x}^9 y \tilde{x}^{15} se obtiene $j=1,2,3,4$ respectivamente, lo cual es correcto. En estos casos la clasificación es correcta aún cuando los patrones han sido afectados con ruido (mixto) y aún cuando \tilde{x}^8 aparece dentro de dos hiper-esferas. Sin embargo, al considerar el siguiente patrón:

$$\tilde{x}^3 = x^3 + 0.05 \quad 0 \quad = 3.05 \quad 2 ,
\tag{0.6}$$

En este caso el ruido es muy poco, pero al aplicar las expresiones **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se obtienen los siguientes vectores:

$$u^3 = \begin{bmatrix} -0.12 \\ -4.6 \\ -7.23 \\ -7.89 \end{bmatrix}, v^3 = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}. \quad (0.7)$$

En este caso, la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** no puede clasificarlo, ya que se encuentra fuera de todas las hiper-esferas. Como se mencionó en la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, si se aplica la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** sobre u^3 la clasificación sería correcta; sin embargo, no se tomaría en cuenta la vecindad esférica.

Ejemplo 2. Sean, ahora, las siguientes clases no linealmente separables en \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \text{Clase 1} & \begin{cases} x_1 = 0.5 & 0.5 & 0, & x_3 = 2.5 & 2 & -1, \\ x_2 = -0.5 & 2.5 & 1.5, & x_4 = 1 & 3 & 0. \end{cases} \\ \text{Clase 2} & \begin{cases} x_5 = 2 & 0 & -0.5, & x_7 = 2 & -1.5 & 0.5, \\ x_6 = 0.5 & -2 & 0, & x_8 = 1 & -1 & -0.5 \end{cases} \\ \text{Clase 3} & \begin{cases} x_9 = -0.5 & 0.5 & 0, & x_{11} = -1 & 0 & -0.5, \\ x_{10} = -1 & -1 & 0, & x_{12} = 0 & -0.5 & 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (0.8)$$

La Figura 3 muestra una representación gráfica de estos patrones en el espacio.

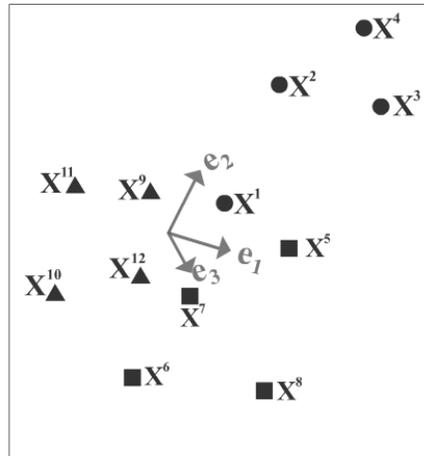


Figura 3. Representación gráfica de las clases del Ejemplo 2. Los círculos, cuadrados y triángulos son puntos pertenecientes a las clases 1, 2, y 3, respectivamente.

Al aplicar **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, a cada clase, se obtienen las respectivas híper-esferas, en este caso esferas, cuyos centros y radios son:

$$\begin{aligned} c^1 &= 1.19 \quad 1.60 \quad 0.61, & \gamma^1 &= 2.11 \\ c^2 &= 1.75 \quad -0.75 \quad 1.72, & \gamma^2 &= 2.47 \\ c^3 &= -0.29 \quad -0.20 \quad 0.05, & \gamma^3 &= 1.06 \end{aligned}$$

La memoria asociativa geométrica correspondiente se observa a continuación.

$$M = \begin{bmatrix} S^1 = C^1 - \frac{1}{2} \gamma^1 e_\infty \\ \vdots \\ S^3 = C^3 - \frac{1}{2} \gamma^3 e_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^1 = 1.19e_1 + 1.6e_2 + 0.61e_3 - 0.04e_\infty + e_0 \\ S^2 = 1.75e_1 - 0.75e_2 + 1.72e_3 + 0.25e_\infty + e_0 \\ S^3 = -0.29e_1 - 0.2e_2 + 0.05e_3 - 0.5e_\infty + e_0 \end{bmatrix} \quad (0.9)$$

En la Figura 4 se observan las híper-esferas de cada clase. Al igual que en el ejemplo anterior, éstas son óptimas.

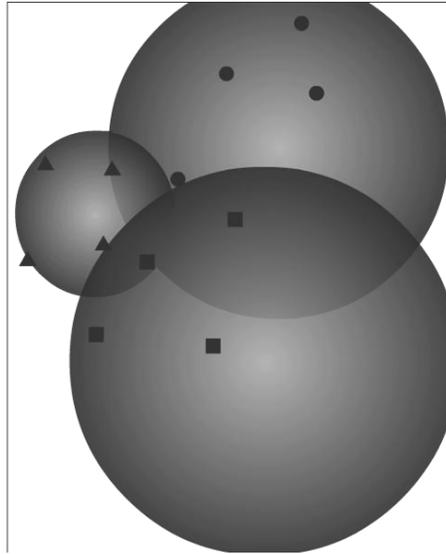


Figura 4. Esferas óptimas de las clases del Ejemplo 2.
Éstas funcionan como superficies de separación.

Como se puede ver, al clasificar los patrones fundamentales se obtiene clasificación perfecta en todos los casos. Sean, ahora, los patrones afectados con ruido mostrados a continuación:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}^1 &= x^1 + 0.5 \quad -0.5 \quad -1 \quad = 0.5 \quad 0.5 \quad 0 . \\
 \tilde{x}^7 &= x^7 + -1 \quad 0.5 \quad -0.5 \quad = 1 \quad -1 \quad 0 . \\
 \tilde{x}^{10} &= x^{10} + 1 \quad 1 \quad 0 \quad = 0 \quad 0 \quad 0 .
 \end{aligned}
 \tag{0.10}$$

Al aplicar la ecuación **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se obtiene el siguiente resultado:

$$u^1 = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -0.27 \\ -0.65 \end{bmatrix}, u^7 = \begin{bmatrix} -1.36 \\ 1.25 \\ -0.59 \end{bmatrix}, u^{10} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ -0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}.
 \tag{0.11}$$

Al Aplicar la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se obtiene el vector v :

$$v^1 = \begin{bmatrix} -0.97 \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}, v^7 = \begin{bmatrix} -\infty \\ -1.79 \\ -\infty \end{bmatrix}, v^{10} = \begin{bmatrix} -2.19 \\ -\infty \\ -0.06 \end{bmatrix} \quad (0.12)$$

El índice de clase se obtiene por medio de la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, por lo tanto, para \tilde{x}^1 , \tilde{x}^7 y \tilde{x}^{10} el valor de j es 1, 2 y 3 respectivamente. Al igual que en el Ejemplo 1, la clasificación es correcta para algunos patrones alterados con ruido.

Como se pudo observar en ambos ejemplos, aunque las memorias asociativas geométricas pueden clasificar perfectamente algunos patrones alterados con ruido, son muy sensibles en ciertos casos; principalmente cuando se trata de patrones localizados cerca del borde de la hiper-esfera.

5.1.2 Ejemplos con patrones reales

Se realizaron dos ejemplos más, pero ahora con datos reales. Las dos bases de datos se obtuvieron de (Asuncion y Newman 2007). Se hicieron tres pruebas, tomando 15, 25 y 30 instancias respectivamente para formar el conjunto fundamental, para entrenar la memoria asociativa geométrica. Las instancias restantes se utilizaron para formar el conjunto de prueba.

Ejemplo 3. Para este ejemplo se utilizó la bien conocida base de datos de la planta del iris. Esta base de datos consiste de tres clases con 50 instancias cada una; cada clase hace referencia a un tipo de planta. Una de las clases es linealmente separable de las otras dos, las otras no son linealmente separables entre sí. Cada instancia tiene cuatro atributos numéricos: longitud y ancho del sépalo, y longitud y ancho del pétalo.

Los resultados de la clasificación se observan en la Tabla 1. La primera columna muestra el número de patrones utilizados para la fase de aprendizaje, la segunda y tercera columnas muestran el porcentaje de patrones correctamente clasificados para el conjunto fundamental y el conjunto de prueba, respectivamente.

Tabla 1. Resultados de la clasificación para el Ejemplo 3

Patrones en el conjunto	Clasificación del conjunto	Clasificación del conjunto
-------------------------	----------------------------	----------------------------

fundamental	fundamental	de prueba
15	100%	90.4%
25	100%	93.3%
30	100%	95.0%

Como se puede apreciar, de esta tabla, la memoria presenta clasificación perfecta debido a que los patrones usados en el conjunto fundamental son esféricamente separables. Además, la clasificación del conjunto de prueba incrementa cuando el número de patrones en el conjunto fundamental también aumenta (ver gráfica de la Figura 5). Esto se debe a que cuando el conjunto fundamental tiene más patrones, el radio de la hiper-esfera aumenta; por lo tanto, una mayor cantidad de patrones del conjunto de prueba se encuentran dentro de la hiper-esfera.

Ejemplo 4. En el segundo ejemplo se utilizó una base de datos de vinos. Estos datos son el resultado de análisis químicos de vinos procesados en la misma región de Italia pero derivados de diferentes cultivos. Los análisis determinaron 13 constituyentes encontrados en cada uno de los tres tipos de vinos. Esta base de datos contiene tres clases de 59, 48 y 71 instancias cada una; donde cada clase se refiere a un tipo de vino. A su vez, cada instancia tiene 13 atributos.

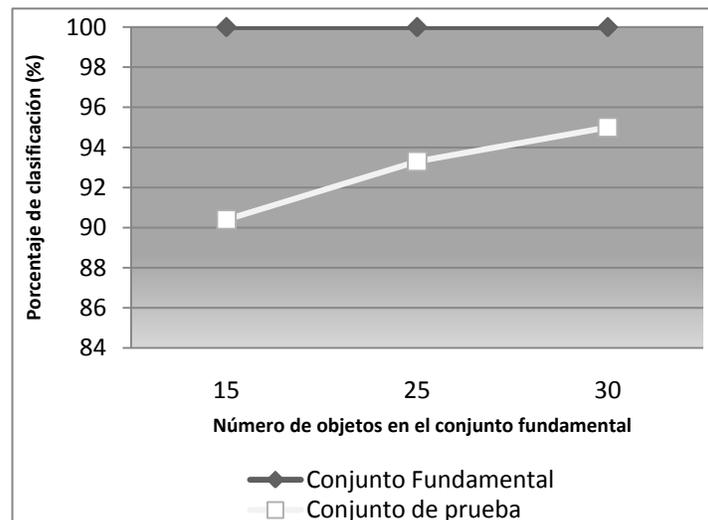


Figura 5. Gráfica con los resultados de la clasificación para el Ejemplo 3.

Los resultados de la clasificación para este ejemplo se observan en la Tabla 2. Las columnas de la Tabla 2 representan lo mismo que las de la Tabla 1.

Tabla 2. Resultados de la clasificación para el Ejemplo 4

Patrones en el conjunto fundamental	Clasificación del conjunto fundamental	Clasificación del conjunto de prueba
15	91.1%	72.1%
25	92.0%	80.5%
30	97.7%	85.2%

Como se puede ver en esta tabla, la memoria no presenta clasificación perfecta. Esto se debe a que los patrones de esta base de datos, a diferencia de la base de datos de la planta del iris, no son esféricamente separables. Y, como en el Ejemplo 3, el porcentaje de clasificación correcto del conjunto de prueba incrementa cuando el número de patrones en el conjunto fundamental también aumenta (ver la gráfica de la Figura 6).

Ambos experimentos se repitieron cien veces, modificando las instancias en el conjunto fundamental. Se obtuvieron, en promedio, los valores que se muestran en la Tabla 1 y en la Tabla 2.

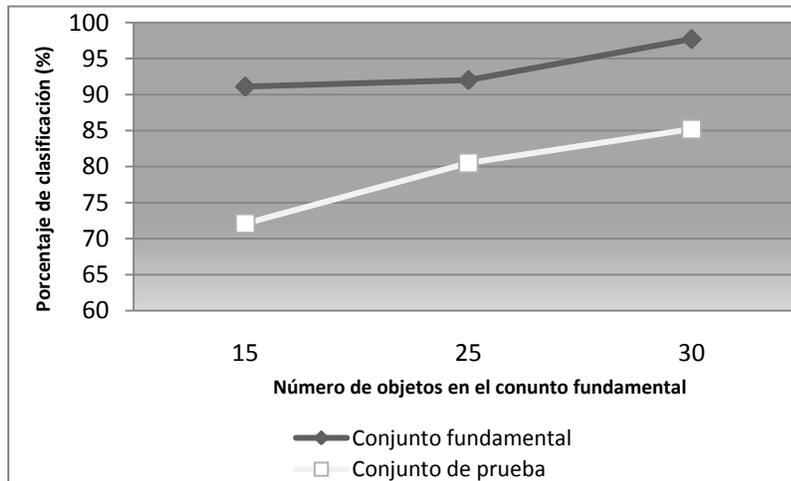


Figura 6. Gráfica con los resultados de la clasificación para el Ejemplo 4.

5.2 Experimentación para el modelo de restauración

5.2.1 Ejemplos numéricos

Ejemplo 5. Sean los siguientes patrones en \mathbb{R}^2 :

$$x^1 = 1 \ 1, x^2 = -1 \ 1, x^3 = 1 \ -1, x^4 = -1 \ -1. \quad (0.13)$$

La Figura 7 muestra una representación gráfica de estos patrones.

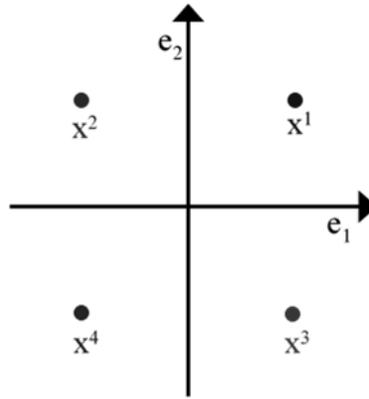


Figura 7. Representación gráfica de los puntos del Ejemplo 5.

Al utilizar el método descrito en las secciones **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se obtuvieron las hiper-esferas correspondientes a cada patrón. Los centros y radios fueron los esperados:

$$\begin{aligned} c^1 &= 1 \ 1, & \gamma^1 &= 1.99. \\ c^2 &= 1 \ -1, & \gamma^2 &= 1.99. \\ c^3 &= -1 \ 1, & \gamma^3 &= 1.99. \\ c^4 &= -1 \ -1, & \gamma^4 &= 1.99. \end{aligned}$$

Como se puede observar, los centros de las hiper-esferas son sus correspondientes patrones. Otra forma de obtener estos valores, como se explicó al final de la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, es encontrando el mínimo de la función **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, pero tomando en cuenta las restricciones correspondientes, como se observa en la gráfica de la Figura 8, el círculo y el cuadrado representan las restricciones para los puntos dentro y fuera de la hiper-esfera, respectivamente; el triángulo es el valor mínimo.

Por cualquiera de los dos métodos se obtiene el mismo resultado. La memoria asociativa correspondiente es, por tanto:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} S^1 = C^1 - \frac{1}{2} \gamma^{1^2} e_\infty \\ \cdot \\ \cdot \\ S^4 = C^4 - \frac{1}{2} \gamma^{4^2} e_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^1 = e_1 + e_2 - 0.98e_\infty + e_0 \\ S^2 = e_1 - e_2 - 0.98e_\infty + e_0 \\ S^3 = -e_1 + e_2 - 0.98e_\infty + e_0 \\ S^4 = -e_1 - e_2 - 0.98e_\infty + e_0 \end{bmatrix}. \quad (0.14)$$

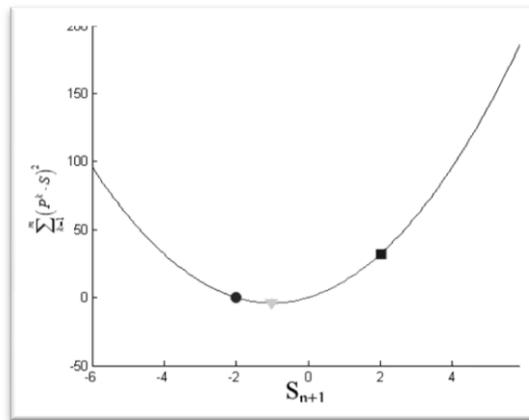


Figura 8. Solución gráfica al problema de minimización.

En la Figura 9 se presentan las hiper-esferas (círculos) de cada patrón.

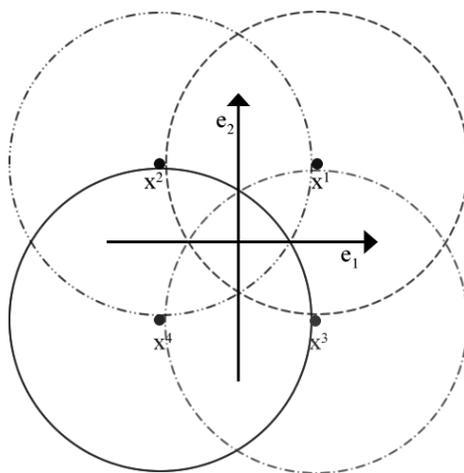


Figura 9. Híper-esferas correspondientes para los patrones del Ejemplo 5.

Nótese que los círculos mostrados en la Figura 9 son óptimos. Al restaurar los puntos del conjunto fundamental siempre se obtiene restauración perfecta. Al considerar los siguientes patrones afectados con ruido:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}^1 &= x^1 + 0 \quad 1.5 &= 1 \quad 2.5 . \\
 \tilde{x}^2 &= x^2 + 0 \quad -1.9 &= 1 \quad -2.9 . \\
 \tilde{x}^3 &= x^3 + 0.5 \quad -0.5 &= -0.5 \quad 0.5 . \\
 \tilde{x}^4 &= x^4 + -1 \quad -0.5 &= -2 \quad -1.5 .
 \end{aligned}
 \tag{0.15}$$

Se puede ver que para todos estos patrones se cumple la condición **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** Al aplicar la ecuación **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se obtiene:

$$v^1 = \begin{bmatrix} -1.13 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}, v^2 = \begin{bmatrix} -\infty \\ -1.81 \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}, v^3 = \begin{bmatrix} -1.25 \\ -\infty \\ -0.25 \\ -1.25 \end{bmatrix}, v^4 = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -0.63 \end{bmatrix}.
 \tag{0.16}$$

Finalmente, los patrones restaurados se obtienen gracias a la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, para $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$ y \tilde{x}^4 se obtiene $j=1,2,3,4$ respectivamente. Por lo cual se regresa el correspondiente centro de la hiper-esfera. En estos casos la restauración es correcta aún cuando los patrones están afectados con ruido (mixto).

Ejemplo 6. Sea, ahora, el siguiente conjunto fundamental de patrones en \mathbb{R}^3 :

$$x^1 = 2 \quad 2 \quad 2, x^2 = 2 \quad 2 \quad -2, x^3 = -2 \quad -2 \quad 2.
 \tag{0.17}$$

La representación gráfica de estos patrones se observa en la Figura 10. Al utilizar el método descrito en las secciones **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se obtuvieron las hiper-esferas (esferas) cuyos radios se presentan a continuación.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 2 \quad 2 \quad 2 & \gamma_1 &= 3.99. \\
 c_2 &= 2 \quad 2 \quad -2 & \gamma_2 &= 3.99. \\
 c_3 &= -2 \quad -2 \quad 2 & \gamma_3 &= 4.61.
 \end{aligned}$$

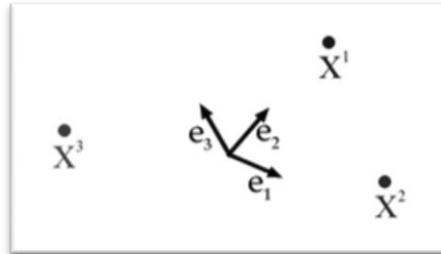


Figura 10. Híper-esferas correspondientes para los patrones del Ejemplo 6.

Como se puede observar, los centros corresponden a los patrones correspondientes. Al igual que en el ejemplo anterior, estos centros se pueden obtener al calcular analíticamente el mínimo. En la gráfica de la Figura 11 se presenta la solución para las híper-esferas S^1 y S^2 .

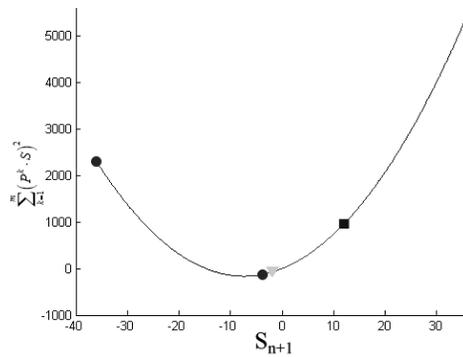


Figura 11. Solución gráfica para las híper-esferas 1 y 2.

En la gráfica de la Figura 12 se presenta la solución para la híper-esfera restante.

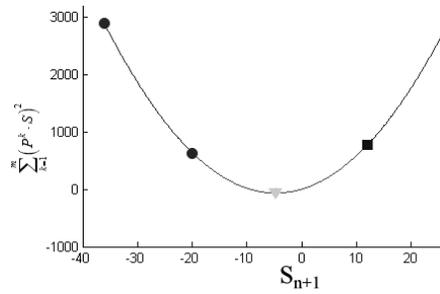


Figura 12. Solución gráfica para la hiper-esfera 3.

La memoria asociativa geométrica es:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} S^1 = C^1 - \gamma^1 \cdot e_\infty \\ S^2 = C^2 - \gamma^2 \cdot e_\infty \\ S^3 = C^3 - \gamma^3 \cdot e_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^1 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 1.99e_\infty + e_0 \\ S^2 = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 1.99e_\infty + e_0 \\ S^3 = -2e_1 - 2e_2 + 2e_3 - 4.67e_\infty + e_0 \end{bmatrix}. \quad (0.18)$$

Las hiper-esferas, en este caso esferas como tales, correspondientes se observan en la Figura 13, como se puede observar, al igual que en los ejemplos anteriores, las hiper-esferas son óptimas.

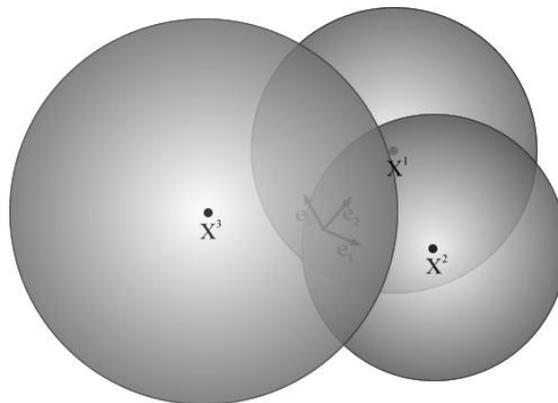


Figura 13. Híper-esferas correspondientes a los patrones del Ejemplo 6

Ahora, sean los siguientes patrones a ser restaurados. Éstos son patrones, del conjunto fundamental, afectados con algún tipo de ruido.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^1 &= x^1 + 2 \quad -1 \quad 2 & = 4 \quad 1 \quad 4 . \\
\tilde{x}^2 &= x^2 + -2 \quad -1 \quad -3 & = 0 \quad 1 \quad -5 . \\
\tilde{x}^3 &= x^3 + -1 \quad 3 \quad 0 & = -3 \quad 1 \quad 2 .
\end{aligned}
\tag{0.19}$$

Si se aplican las expresiones **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se obtienen los siguientes vectores:

$$v^1 = \begin{bmatrix} -4.5 \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}, v^2 = \begin{bmatrix} -\infty \\ -7 \\ -\infty \end{bmatrix}, v^3 = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -5 \end{bmatrix}.
\tag{0.20}$$

Los patrones restaurados se obtienen al regresar el centro de la j -ésima hiper-esfera. En este caso j es el valor obtenido por la expresión **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, que en este caso para \tilde{x}^1 , \tilde{x}^2 y \tilde{x}^3 se obtiene $j = 1, 2, 3$ respectivamente. Lo cual es correcto.

5.2.2 Ejemplos con patrones reales

Para probar el método propuesto se utilizaron tres conjuntos de imágenes.

Ejemplo 7. Para este ejemplo se utilizaron fotografías de animales. Se trata de 25 imágenes, de 300 píxeles de ancho por 300 de alto en escala de grises. Algunas muestras se pueden observar en la Figura 14. En este caso no se utilizó ningún pre-procesamiento a las imágenes.

Los patrones se obtuvieron al hilar fila a fila de cada imagen hasta formar un vector de tamaño 90,000 (300×300). Con estos vectores se formó el conjunto fundamental.

Se construyeron seis conjuntos de prueba, cada uno formado por las mismas imágenes del conjunto fundamental, pero afectadas con 5%, 10%, 15%, 30%, 40%, y 50%, respectivamente, de ruido mezclado aleatorio. Al igual que con el conjunto fundamental, se formaron los vectores con las filas de las imágenes.



Figura 14. Muestras de algunas de las imágenes utilizadas para el Ejemplo 7.

Ejemplo 8. Adicionalmente, se realizó un segundo experimento con las mismas características que el Ejemplo 7. Solo que en este caso se usaron 22 retratos de matemáticos y científicos famosos, como los mostrados en la Figura 15. En este caso, las imágenes son de 300 por 400 píxeles, también en escala de grises.

De la misma forma que en el Ejemplo 7, los patrones se formaron al unir las filas de cada imagen, hasta formar un vector de tamaño 12,000 (300×400) para el conjunto fundamental. Y, para los conjuntos de prueba se afectaron las imágenes con la misma cantidad de ruido que en el ejemplo anterior.



Figura 15. Muestras de algunas de las imágenes utilizadas para el Ejemplo 8.

En la Figura 16 se puede observar una imagen afectada por los porcentajes de ruido mencionados, por cada ejemplo.

Los resultados de la restauración se muestran en la Tabla 3. La primera columna presenta el conjunto de imágenes utilizado, las siguientes columnas muestran el número de imágenes recuperadas, en forma correcta, para los conjuntos de prueba correspondientes.



Figura 16. Muestras de imágenes afectadas con ruido para el Ejemplo 7 (arriba) y el Ejemplo 8 (abajo). De izquierda a derecha, imagen con 0% (conjunto fundamental), 5%, 10%, 15%, 30%, 40% y 50% de ruido, respectivamente.

Como se puede observar, la recuperación para el caso de las imágenes de animales fue correcta cuando las imágenes fueron afectadas hasta con 30% de ruido. Solo una

imagen para el caso de matemáticos y científicos no fue recuperada para el caso de un 30% de ruido. En ambos casos se puede observar que al aumentar la cantidad de ruido en las imágenes, la cantidad de patrones recuperados tiende a disminuir considerablemente (ver gráfica de la Figura 17).

Tabla 3. Resultados de la restauración para los Ejemplo 7 y Ejemplo 8

Conjunto	0%	5%	10%	15%	30%	40%	50%
Animales	25	25	25	25	24	12	7
Científicos	22	22	22	22	22	15	10

Este experimento se repitió cien veces variando la posición de los píxeles de ruido sobre las imágenes. Los resultados fueron los mismos que los que se muestran en la Tabla 3 para 0% a 25% de ruido. Esto ocurre porque el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se cumple para esas imágenes con esa cantidad de ruido. Para 30% de ruido los resultados oscilan entre 25 y 21 imágenes restauradas (el promedio fue de 24) para el conjunto uno. Para el conjunto dos, los resultados son entre 22 y 21 imágenes restauradas (en este caso el promedio fue de 22). Para 40% y 50% de ruido el promedio de las imágenes restauradas es el que se observa en la Tabla 3.

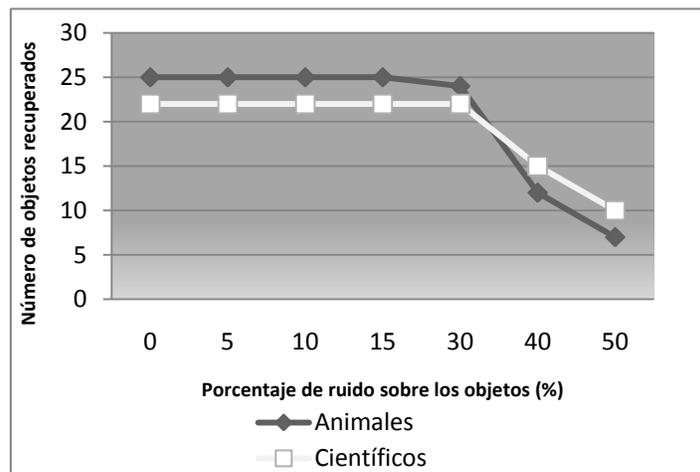


Figura 17. Gráfica con los resultados de la clasificación para los conjuntos de animales y científicos.

Algo que hay que notar, como una característica de las memorias asociativas geométricas, es que la restauración es correcta o incorrecta solamente. No es posible

llegar a una recuperación parcial, como sucede cuando se utiliza algún tipo de filtro, como se verá en la siguiente sección.

Ejemplo 9. Para mostrar la eficacia de modelo ante perturbaciones en imágenes como el desenfoque o el difuminado se decidió hacer este experimento. En este caso se utilizaron 18 imágenes como las mostradas en la Figura 18.



Figura 18. Muestras de las imágenes utilizadas en el Ejemplo 9.

Estas imágenes se caracterizan por ser las más utilizadas en la comunidad de procesamiento de imágenes. Dichas imágenes son de 200 X 200 píxeles y, al igual que en los ejemplos previos, están en escala de grises.

De la misma forma que en los ejemplos anteriores, los patrones en este ejemplo se formaron encadenando las filas de cada imagen hasta formar un vector de tamaño 40,000. Estos patrones se utilizaron para formar el conjunto fundamental.

Para formar los conjuntos de prueba se distorsionaron las imágenes con desenfoque artificial mediante la herramienta *desenfoque Gaussiano* del programa Macromedia Fireworks, la cual permite variar el radio de desenfoque (k) de una imagen. Algunos ejemplos de este desenfoque en las imágenes de la Figura 18 se presentan en la Figura 19. En este caso el valor de k fue de 8.

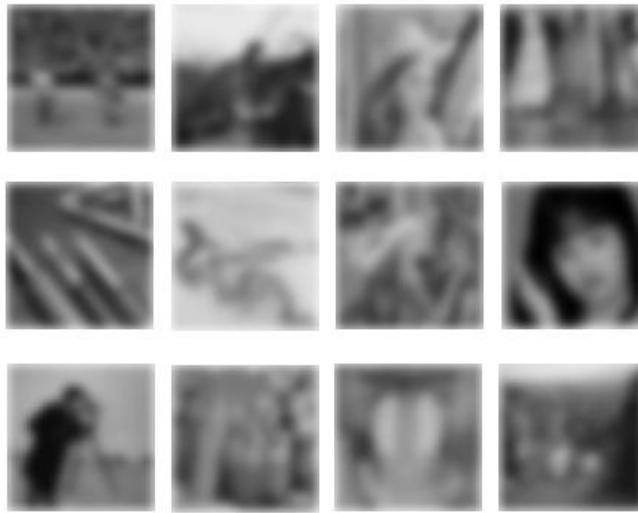


Figura 19. Muestras de imágenes desenfocadas.

Para realizar las pruebas se utilizó el desenfoco variando el valor del radio k con esa herramienta. Se obtuvieron 10 conjuntos de imágenes desenfocadas, para eso se modifico el valor de k desde 0 (conjunto fundamental) hasta 18 con intervalos de 2. Ejemplo de dos imágenes con estos desenfocos se observan en la Figura 20 para esos valores de k . Note el nivel de desenfoco de las imágenes con el valor de $k = 12, \dots, 18$.

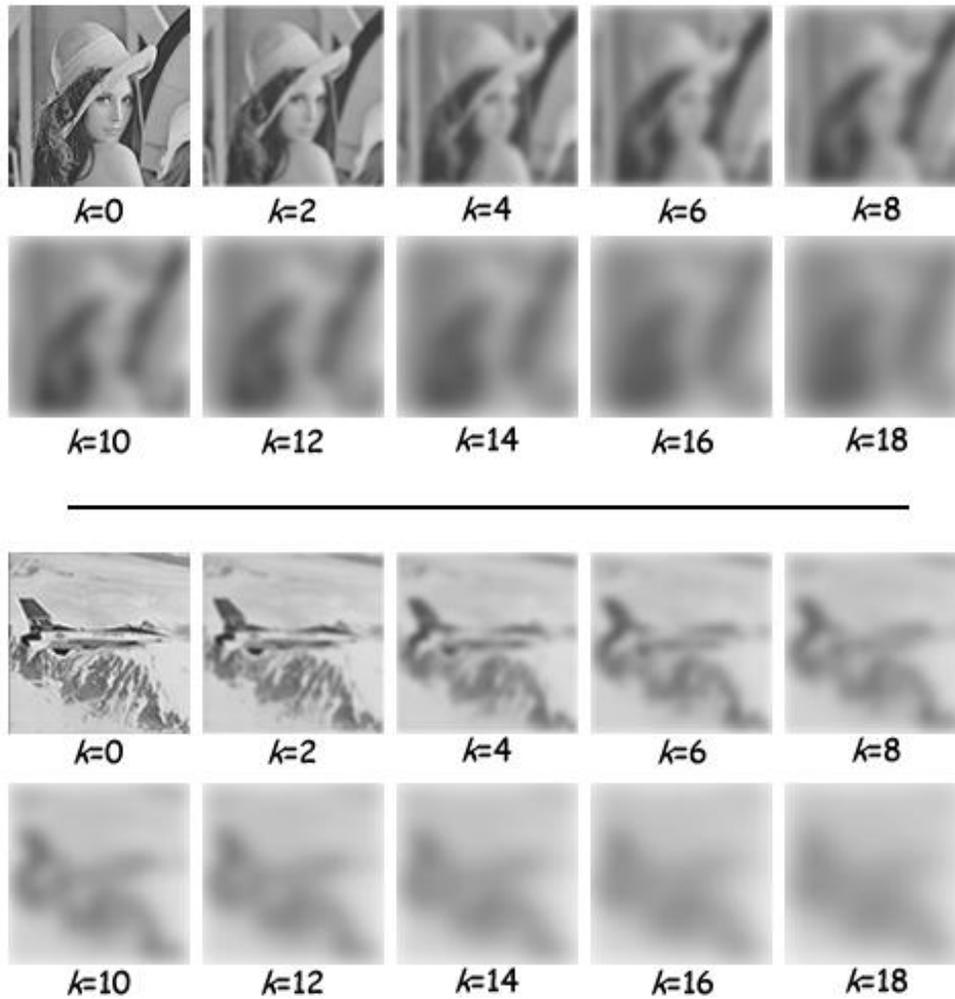


Figura 20. Dos imágenes desenfocadas para distintos valores de k .

La memoria asociativa geométrica se entrenó con el conjunto fundamental. Los demás conjuntos de imágenes desenfocadas se utilizaron para realizar la fase de restauración. Los resultados se observan en la gráfica de la Figura 21. Se puede observar que, hasta el nivel de desenfoco con $k=10$, la recuperación es correcta. Con un valor de $k=12$ solamente una de las imágenes no puede ser recuperada, conforme aumenta el nivel de distorsión, el número de imágenes recuperadas correctamente disminuye hasta casi un 55%.

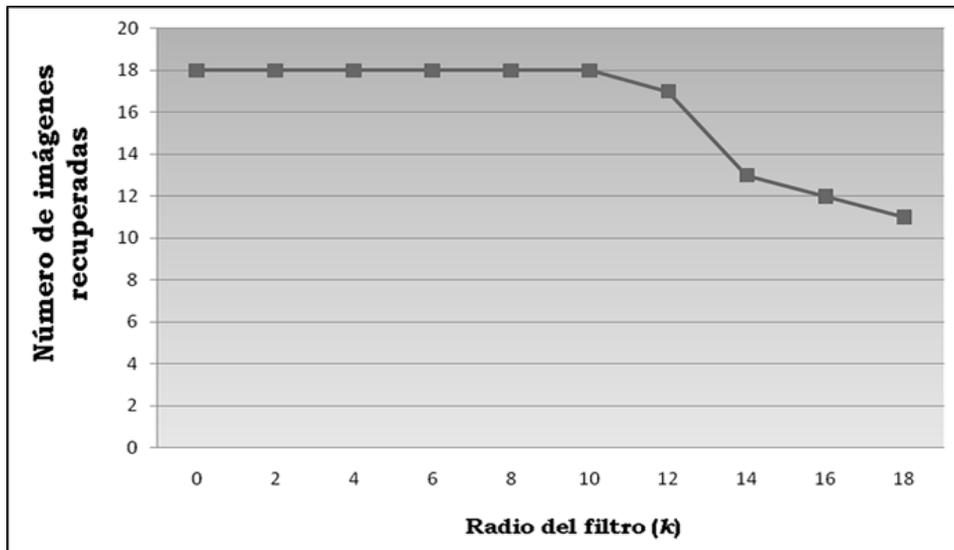


Figura 21. Resultado de la recuperación de las imágenes de los conjuntos de prueba en imágenes desenfocadas.

5.2.3 Comparación con otros modelos

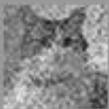
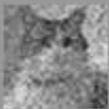
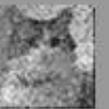
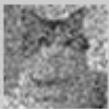
En esta sección se presentan los resultados obtenidos al realizar la restauración de los dos conjuntos de imágenes utilizados en el Ejemplo 7 y en el Ejemplo 8. En este caso se utilizaron los mismos conjuntos de imágenes, afectadas con las mismas proporciones de ruido (Figura 16), para probar la funcionalidad con los ya conocidos filtros de promedio, mediana, morfológico (apertura-clausura) (información sobre estos filtros puede verse en (Gonzalez y Woods 2008)); se utilizaron, también, dos herramientas del programa comercial Paint Shop Pro X2: *removedor de puntos* y *removedor de polvo*; además, se utilizó la memoria asociativa basada en el método de sub-patrones (Cruz, Sossa y Barrón 2007).

En la Tabla 4 y en la Tabla 5 se observan los resultados de la restauración de una de las imágenes de cada conjunto. La primera columna muestra la imagen utilizada, las siguientes columnas, de izquierda a derecha, muestran las imágenes restauradas usando el filtro de promedio, la herramienta remover polvo, la herramienta remover puntos, el filtro de mediana, el filtro morfológico (apertura-clausura), la técnica de los sub-patrones y, por último, la memoria asociativa geométrica (MAG). Cada renglón de arriba hacia abajo representa los resultados obtenidos, para todos los métodos

mencionados, al restaurar una imagen con 5%, 10%, 15%, 30%, 40% y 50% de ruido sal y pimienta aleatorio, respectivamente.

A partir de estas tablas se puede observar que las imágenes recuperadas con las memorias asociativas geométricas presentaron los mejores resultados ya que se recuperó fielmente la imagen original; a diferencia de los otros métodos donde se recupera parte de la información original.

Tabla 4. Comparación, entre varios modelos, para la restauración de una imagen, afectada con ruido, del conjunto de animales.

Porcentaje de ruido	Imagen con ruido	Filtro de promedio	Remover polvo	Remover puntos	Filtro de mediana	Filtro morfológico	Sub-patrones	MAG
5%								
10%								
15%								
30%								
40%							NA	
50%							NA	

El método de sub-patrones presenta resultados similares a los de la memoria asociativa geométrica debido a que la información de los patrones (las imágenes) se codifica, precisamente, dentro de la propia memoria. Por lo tanto, al restaurar un objeto afectado con ruido, la memoria regresa la información del objeto que previamente había codificado.

Tabla 5. Comparación, entre varios modelos, para la restauración de una imagen, afectada con ruido, del conjunto de científicos.

Porcentaje de ruido	Imagen con ruido	Filtro de promedio	Remover polvo	Remover puntos	Filtro de mediana	Filtro morfológico	Subpatrones	MAG
5%								
10%								
15%								
30%							NA	
40%							NA	
50%							NA	

A diferencia de los filtros, en donde no es posible restaurar al cien por ciento el objeto original, una memoria asociativa permite restaurarlo completamente. Sin embargo, esto puede tener inconvenientes; ya que, si el objeto está muy afectado por ruido, la memoria podría regresar un objeto completamente diferente al original. En el caso de una memoria asociativa no es posible hablar de una restauración con cierto porcentaje de error, como en el caso de algún filtro; es decir, con memorias asociativas solo hay dos posibles resultados: a) o se restaura bien (al cien por ciento) el objeto original, o b) no se restaura y, en este caso, regresa un objeto diferente.

En la Tabla 6 se puede observar el error cuadrático medio de las imágenes restauradas de la Tabla 4. Las columnas de esta tabla muestran el error obtenido entre

las imágenes restauradas de cada método utilizado y su correspondiente imagen original. Cada renglón de esta misma tabla corresponde a una imagen con 5%, 10%, 25%, 30%, 40% y 50% de ruido respectivamente, como en la Tabla 4 y en la Tabla 5. La Tabla 7 muestra la misma información que la Tabla 6 pero con las imágenes de la Tabla 5. Como se puede observar, el error cuadrático medio para las memorias asociativas geométricas y para los sub-patrones siempre es cero, esto se debe a que las imágenes originales están codificadas dentro de la memoria. Ésta es, precisamente, la principal ventaja de las memorias asociativas.

Los otros modelos muestran buenos resultados, pero cuando los patrones presentan pérdida parcial de la información, estos métodos no funcionan correctamente. Por ejemplo, las imágenes mostradas en la Figura 26 no se pueden restaurar por medio de esos métodos, pero las memorias asociativas geométricas son capaces de hacerlo.

Tabla 6. Error cuadrático medio para las imágenes de la Tabla 4

Ruido	Filtro de promedio	Remover polvo	Remover puntos	Filtro de mediana	Filtro morf.	Sub-patrones	MAG
5%	1165529	632256	328043	461169	3352608	0	0
10%	1833253	894465	503496	509266	4980297	0	0
25%	2858467	1312237	1312237	717805	6712505	0	0
30%	6306509	3498588	2893229	1730484	12392659	0	0
40%	8877902	6272391	4837072	3252628	15759837	NA	0
50%	12031332	10442603	8683319	6375399	19111305	NA	0

Como se puede observar, el error cuadrático medio para las memorias asociativas geométricas y para los sub-patrones siempre es cero, esto se debe a que las imágenes originales están codificadas dentro de la memoria. Ésta es, precisamente, la principal ventaja de las memorias asociativas.

Los otros modelos muestran buenos resultados, pero cuando los patrones presentan pérdida parcial de la información, estos métodos no funcionan

correctamente. Por ejemplo, las imágenes mostradas en la Figura 22 no se pueden restaurar por medio de esos métodos, pero las memorias asociativas geométricas son capaces de hacerlo.

Tabla 7. Error cuadrático medio para las imágenes de la Tabla 5

Ruido	Filtro de promedio	Remover polvo	Remover puntos	Filtro de mediana	Filtro morf.	Sub-patrones	MAG
5%	738906	673584	331396	516934	754959	0	0
10%	926361	686920	435422	562626	1058108	0	0
25%	1187129	703110	512046	572439	1397366	0	0
30%	2109969	963170	1058996	801835	2692502	NA	0
40%	2988743	1410100	1534965	1079258	3620676	NA	0
50%	3911128	2018000	2263242	1578445	4812627	NA	0

Ejemplo 10. Se realizó otro experimento para probar el potencial de las memorias asociativas geométricas contra los filtros. En este caso las imágenes de la Figura 14 fueron afectadas con una excesiva cantidad de ruido con el propósito de eliminar parte de su información. Ejemplos de este tipo de imágenes se observan en la Figura 22. Se utilizó, también, la misma memoria asociativa geométrica de los experimentos anteriores.

El experimento en sí consiste en tomar cada una de las imágenes de la Figura 14 y, quitarle parte de su información. Este efecto se logra de varias maneras, la que se utilizará en este experimento consiste en elegir un pixel al azar en la imagen, que será el centro de la distorsión. Usando dicho punto como centro, a continuación se dibuja un círculo o un rectángulo de tamaño, también, aleatorio (usualmente un número grande), al cual se le agregará un efecto de difuminado en los bordes. Este proceso repite dos o tres veces en una misma imagen, para eliminar varias regiones de la imagen.

En todos los casos, siempre que el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se cumpla, las imágenes se restauraron correctamente con las memorias asociativas geométricas. Es decir, siempre y cuando el ruido agregado a la imagen no

sobrepase el radio de la esfera, siempre habrá recuperación correcta y total de la imagen.

También se realizaron experimentos con el conjunto de científicos aplicando el mismo procedimiento para obtener distorsiones similares. Al igual que con el conjunto de animales, si el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se cumple, las memorias asociativas geométricas son capaces de restaurar correctamente y completamente las imágenes.



Figura 22. Muestras de imágenes con información parcialmente eliminada

A partir de estos resultados se puede observar que, usando una memoria asociativa, es posible recuperar imágenes a partir de una parte de ellas. Una posible aplicación de este experimento es la restauración de imágenes a partir de una versión más pequeña de la misma.

5.3 Experimentación para el modo de clasificación no supervisada

Se va a probar, ahora, el desempeño de las memorias asociativas propuestas en la tarea de clasificación no supervisada. Esta tarea es importante ya que muchas veces no se tiene una *etiqueta* para los patrones de entrada; el objetivo de la clasificación no

supervisada es, precisamente, encontrar esa etiqueta o clase para los patrones de entrada a partir de las características de los mismos.

Ejemplo 11. Sea el conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 mostrados en la Figura 23. Se puede observar que dicha imagen presenta dos cúmulos visibles de puntos. Estos puntos se generaron por medio de dos distribuciones gaussianas, una con centro en $4,4$ y otra con centro en $-4,-4$.

Al aplicar el algoritmo de la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se obtienen las gráficas mostradas en las imágenes de la Figura 24, Figura 25 y la Figura 26. La solución en cada caso, como en la mayoría de los algoritmos de clasificación no supervisada, depende, principalmente, de la posición de los primeros centros generados aleatoriamente. La mejor solución se presenta en la gráfica de la Figura 26.

Ya que los puntos se generaron a través de una distribución gaussiana, se considera la mejor solución aquella que aproxime, precisamente, a esa gaussiana. De ahí que el mejor resultado sea el que se presenta en la Figura 26. Este experimento se repitió 100 veces, variando en cada caso los centros de inicio, la mejor solución se obtuvo 34 veces, con diferentes valores de inicio, las otras 64 veces se obtuvieron resultados a las gráficas de la Figura 24 y la Figura 25.

Sin embargo, como los centros de inicio se generan aleatoriamente, no se puede hablar de un desempeño correcto o incorrecto del algoritmo, simplemente se desea mostrar que el algoritmo logra soluciones correctas en algún momento.

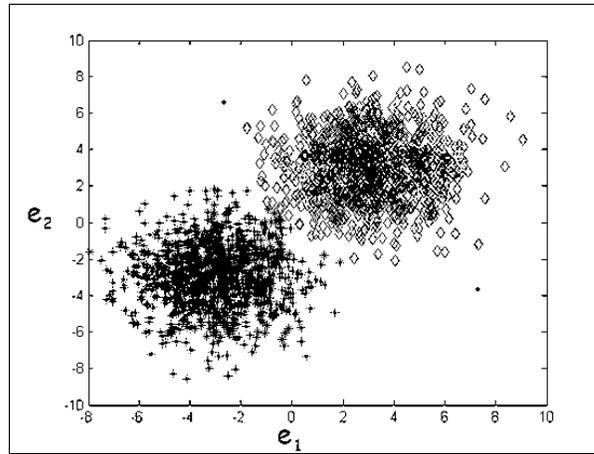


Figura 23. Conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 a agrupar.

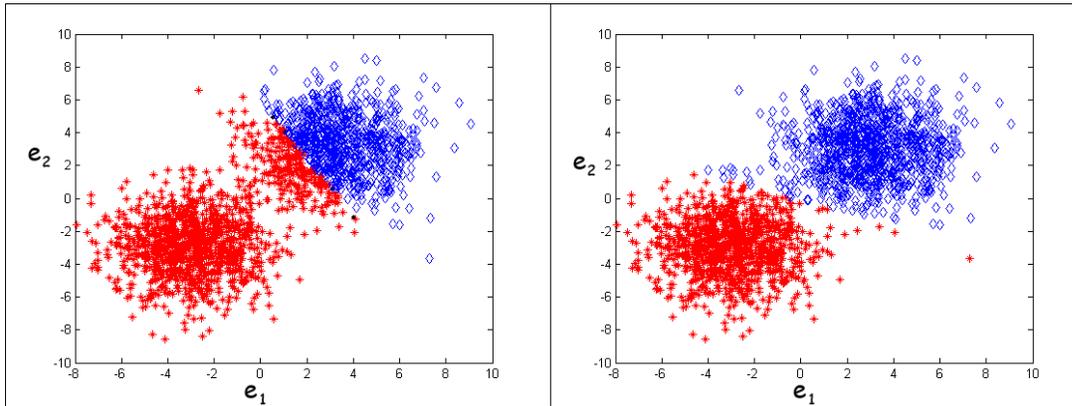


Figura 24. Diferentes soluciones que resuelven el problema de agrupamiento de la Figura 23.

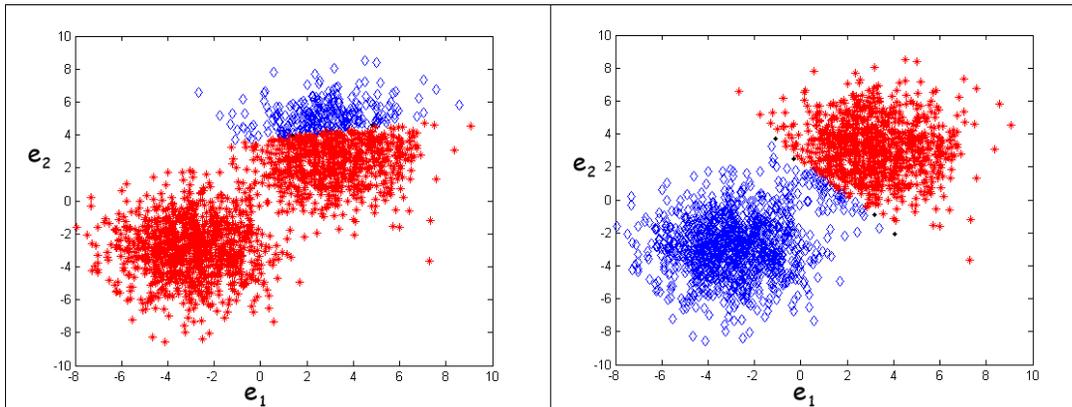


Figura 25. Otras soluciones que resuelven el problema de agrupamiento de la Figura 23.

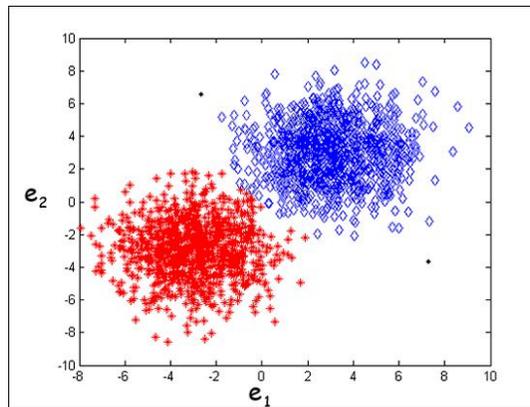


Figura 26. Mejor solución que resuelve el problema de agrupamiento de la Figura 23.

Ejemplo 12. Ahora sean los puntos en \mathbb{R}^2 mostrados en la. En dicha gráfica se pueden observar, a primera vista, cuatro cúmulos de puntos principales. En este caso se utilizaron cuatro distribuciones gaussianas con centros en $4,4$, $4,-4$, $-4,4$ y $-4,-4$.

Si se aplica el algoritmo de la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se obtienen las gráficas mostradas en las imágenes de la Figura 28, la Figura 29 y la Figura 30. De nuevo, la solución en cada caso, depende, principalmente, de la posición de los primeros centros generados aleatoriamente. La mejor solución se presenta en la gráfica de la Figura 30.

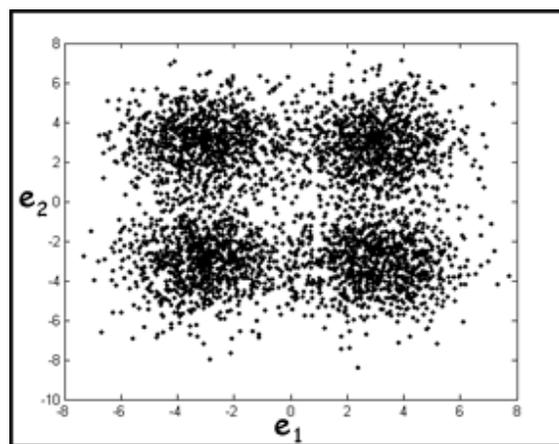


Figura 27. Conjunto de puntos para el Ejemplo 12.

Al igual que en el Ejemplo 11, como los puntos de inicio se generaron por medio de una distribución gaussiana, se considera la mejor solución aquella que aproxime, precisamente, a esas gaussianas. De ahí que el mejor resultado sea el que se presenta en la Figura 30. Este experimento también se repitió 100 veces, variando en cada caso los centros de inicio, la mejor solución se obtuvo 41 veces, con diferentes valores de inicio, las otras 59 veces se obtuvieron resultados similares a las gráficas de la Figura 28 y la Figura 29.

Sin embargo, al igual que con el ejemplo anterior, como los centros de inicio se generan aleatoriamente, el algoritmo logra encontrar soluciones correctas en algún momento.

En algunas de las gráficas presentadas, se presentan algunos puntos que no pertenecen a ningún agrupamiento; son puntos que se encuentran afuera de todas las hiper-esferas, por lo tanto, no pertenecen a una clase específica. Esto se debe, en algunos casos, al tipo de superficies de separación que se están utilizando. Dependiendo del tipo de problema esto puede ser o no una ventaja.

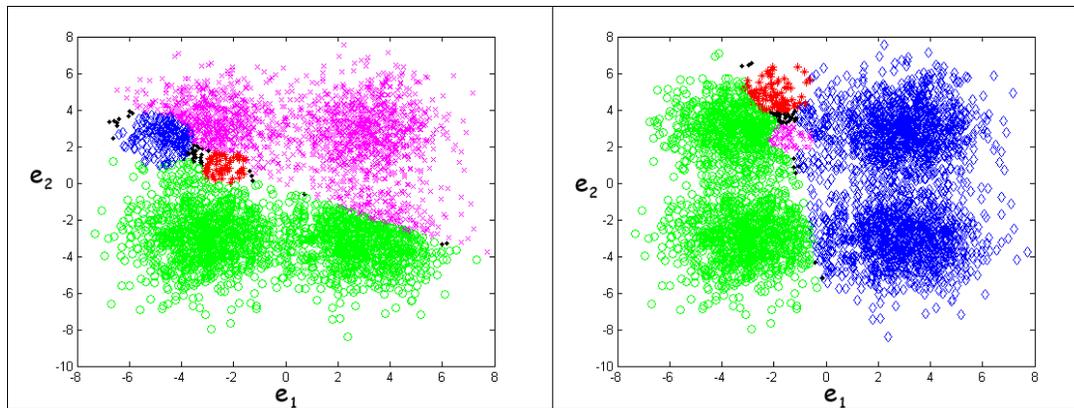


Figura 28. Diferentes soluciones que resuelven el problema de agrupamiento de la Figura 27.

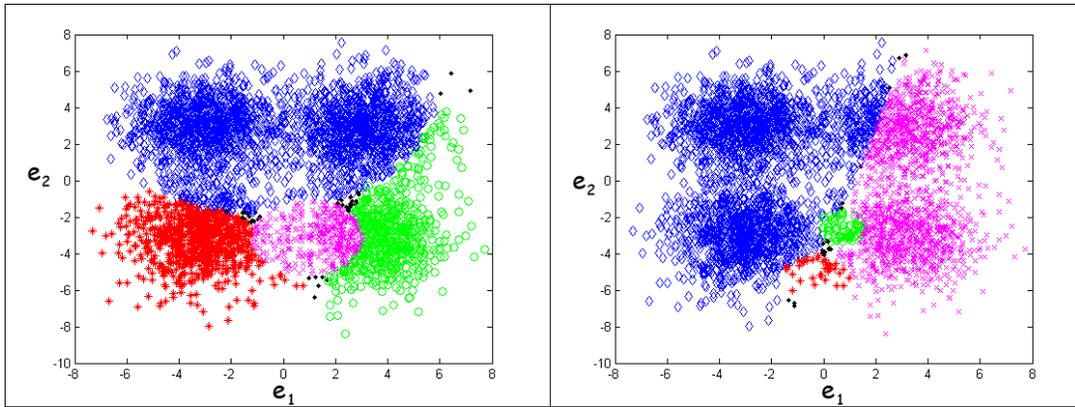


Figura 29. Otras soluciones que resuelven el problema de agrupamiento de la Figura 27.

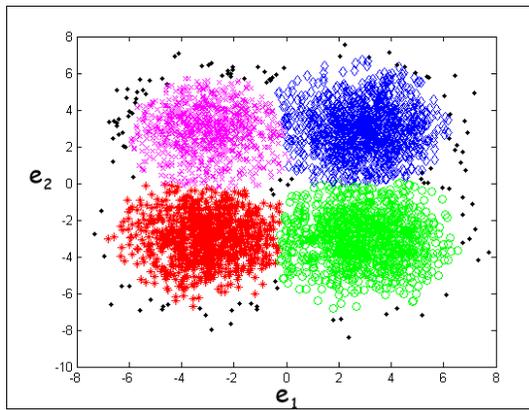


Figura 30. Mejor solución que resuelve el problema de agrupamiento de la Figura 27.

5.4 Discusión

Con los ejemplos numéricos se puede observar más claramente el carácter geométrico de las memorias propuestas. A diferencia de otros modelos de memorias asociativas, o inclusive de otros modelos de clasificación o restauración, la solución de las memorias asociativas geométricas está basada en la geometría de los patrones, ya que se utilizan hiper-esferas como superficies de separación. Además, para determinar que un patrón dado pertenece a una clase específica simplemente es necesario determinar si el patrón está dentro de la hiper-esfera que representa, precisamente, a esa clase.

Los tres modelos presentados son, de alguna manera, similares entre sí. Los tres se dividen en dos fases. En la fase de entrenamiento se construyen las hiper-esferas de separación, mediante una función de optimización, pero tomando en cuenta las

restricciones de cada modelo. Para la fase de clasificación o restauración se utiliza un producto interior entre el patrón nuevo a clasificar y la memoria, y una función de máximo.

Como se pudo observar, por medio de los experimentos, el modelo de restauración es muy similar al modelo de clasificación. Las hiper-esferas obtenidas con el proceso descrito son óptimas, en algún sentido. Como se pudo observar, por los experimentos presentados, el modelo siempre presenta ya se recuperación correcta o incorrecta. A diferencia de un filtro tradicional que recupera la información parcialmente, una memoria asociativa recupera la información original. Esto se puede comprobar al observar la Tabla 6 y la Tabla 7, donde el error cuadrático medio obtenido en las memorias asociativas es siempre cero y en los demás modelos es mayor que cero.

En cuanto al modo de clasificación supervisada se mostró que, al igual que los métodos tradicionales, depende, en gran medida, de los primeros centros generados. Una diferencia del modelo presentado es que puede considerar algunos puntos como no pertenecientes a alguna de las clases seleccionadas. Esto puede ser, dependiendo de la naturaleza del problema a resolver, una ventaja o una desventaja.

Aunque el modelo de clasificación no supervisada no es perfecto, se puede considerar como un nuevo algoritmo de agrupamiento que utiliza, además de una memoria asociativa, operadores y operaciones del álgebra geométrica conforme para su funcionamiento.

También se mostró que el algoritmo generó, en algún momento, la solución correcta al problema.