

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA
UNIDAD PROFESIONAL TICOMÁN**

“ANÁLISIS DINAMICO DE UNA SEMIALA SEMIMONOCOQUE DE DOBLE FLECHADO”

T E S I S
**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL EN INGENIERÍA
AERONÁUTICA**

PRESENTAN

**GALVEZ ZAVALA GUILLERMO BERNARDO
VALLE MELENDEZ GILBERTO EFRAIN**

DIRECTORES DE TESIS

**ING. ABEL HERNANDEZ GUTIERREZ
ING. ADELAIDO I. MATIAS DOMINGUEZ**



MÉXICO D.F.

MARZO

2009

ÍNDICE

RELACIÓN DE FIGURAS	I
RELACIÓN DE TABLAS	V
NOMENCLATURA	VI
RESUMEN	VIII
ABSTRACT	VIII
INTRODUCCIÓN	IX
 CAPITULO I CONSIDERACIONES TEÓRICAS	 1
1.1 Estado del arte de las semialas.	2
1.2 Introducción a la dinámica estructural.	4
1.2.1 Sistemas de un grado de libertad.	5
1.2.1.1 Grados de libertad.	5
1.2.1.2 Sistemas no amortiguados.	6
1.2.1.3 Ley de newton para el movimiento.	6
1.2.1.4 Diagrama de cuerpo libre.	7
1.2.1.5 Principio de d' alembert.	8
1.2.1.6 Solución de la ecuación diferencial de movimiento.	9
1.2.2 Sistemas de varios grados de libertad.	10
1.2.2.1 Ecuación de rigidez para el edificio cortante.	10
1.2.2.2 Ecuación de flexibilidad para el edificio cortante.	13
1.2.2.3 Relación entre las matrices de rigidez y flexibilidad.	15
1.2.2.4 Vibración libre de un edificio cortante.	15
1.2.2.4 .1 Frecuencias naturales y modos normales.	15
1.3 Método experimental fotoelástico.	17
1.3.1 Relación de la luz y la óptica con la fotoelasticidad.	17
1.3.1.1 Teorías de la luz.	17
1.3.1.2 Luz polarizada.	19
1.3.1.3 Polarizador plano.	21
1.3.1.4 Placa de ondas.	22
1.3.1.5 Acondicionamiento de luz para una serie de combinaciones de un polarizador lineal y una placa de onda.	24
1.3.1.6 arreglo de elementos ópticos en un polariscopio.	25
1.3.2 Teoría de fotoelasticidad.	27
1.3.2.1 Ley del esfuerzo óptico en dos dimensiones para una incidencia normal.	27
1.3.2.2 Efectos de un modelo sometido a esfuerzos en un polariscopio plano.	29
1.3.2.3 Efectos de un modelo sometido a esfuerzos en un	

polariscopio plano (campo oscuro - arreglo a).	35
1.3.2.4 Efectos de un modelo sometido a esfuerzos en un polariscopio (campo luminoso - arreglo b).	40
1.3.3 Técnicas de análisis.	42
1.3.3.1 Patrón de franjas isocromáticas.	42
1.3.3.2 Patrón de franjas isoclinas.	43
1.3.3.3 Métodos de calibración.	44
1.3.3.4 Interferómetro.	46
1.3.3.5 Criterios de selección de materiales.	46
1.3.4 Fotoelasticidad tridimensional.	47
1.3.4.1 El método de esfuerzos congelados.	47
1.4 Método del elemento finito.	49
1.4.1 Breve historia	50
1.4.2 Pasos generales del método de elementos finitos	50
1.4.3 Aplicaciones del método de elemento finito.	57
1.4.4 Ventajas del método del elemento finito.	58
 CAPITULO II ANALISIS TEORICO	 60
2.1 Análisis del modelo teórico.	61
2.2 Frecuencias naturales de vibración.	63
2.3 Modos de vibración.	67
 CAPITULO III ANALISIS NUMERICO	 70
3.1 Simulación computacional de semiala.	71
3.1.1 Modelado de semiala en NX.	72
3.1.2 Extracción de frecuencias y modos de vibración en NX.	75
3.1.3 Modelado de semiala en Ansys.	79
3.1.4 Extracción de frecuencias y modos de vibración en Ansys.	81
 CAPITULO IV ANALISIS EXPERIMENTAL	 89
4.1 Descripción del método experimental de esfuerzos y vibraciones.	90
4.2 Desarrollo del modelo para experimentación.	91
4.3 Experimentación con el modelo.	104
 CAPITULO V INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS	 107
5.1 Resultados del análisis teórico.	108
5.2 Resultados del análisis numérico.	110
5.3 Resultados del análisis experimental.	115
5.3.1 Visualización de esfuerzos por medio de la fotoelasticidad.	115
5.3.2 Interpretación del campo completo de deformaciones.	125

5.3.2 Identificación de las franjas	126
5.3.4 Relación entre los órdenes de franjas y magnitud de los esfuerzos y las deformaciones.	129
5.3.5 Análisis experimental de vibraciones.	130
5.4 Comparación de resultados teórico, numérico y experimental.	133
CONCLUSIONES	136
RECOMENDACIONES	138
REFERENCIAS	139
APÉNDICES	140

RELACION DE FIGURAS

Figura	Título	Página
Fig. 1.1.1	Elementos de ala semimonocoque.	2
Fig. 1.1.2	Fuerzas aerodinámicas que actúan en un perfil.	
Fig. 1.1.3	Difusor de flujo "Winglet".	3
Fig. 1.1.4	Formulación del modelo matemático.	3
Fig. 1.2.1	Estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad.	4
Fig. 1.2.2	Modelo matemático para un sistema de un grado de libertad.	5
Fig. 1.2.3	Representación de modelos matemáticos de sistemas masa resorte no amortiguados.	5
Fig. 1.2.4	Diagramas de cuerpo libre.	6
Fig. 1.2.5	Representación de un oscilador simple y su correspondiente diagrama de cuerpo libre.	8
Fig. 1.2.6	Representación de un edificio cortante.	8
Fig. 1.2.7	Representación de un edificio cortante como columna simple.	11
Fig. 1.2.8	Modelo masas – resortes representando un edificio cortante.	11
Fig. 1.2.9	Coeficientes de flexibilidad para un edificio cortante de tres pisos.	12
Fig. 1.2.10	Fuerzas actuando en un edificio cortante.	13
Fig. 1.3.1	Vectores de luz aleatorios asociados con luz ordinaria.	14
Fig. 1.3.2	Amplitud del vector de luz como una función de la posición a través del eje de propagación.	18
Fig. 1.3.3	Luz polarizada planamente.	19
Fig. 1.3.4	Luz polarizada circularmente.	20
Fig. 1.3.5	Absorción y transmisión características de un polarizador plano.	20
Fig. 1.3.6	Vector de luz polarizado planamente entrando a una placa doblemente refractante.	21
Fig. 1.3.7	Retraso producido por una placa de onda.	22
Fig. 1.3.8	Arreglo de elementos ópticos.	23
Fig. 1.3.9	Modelo fotoelástico en un plano polarizado.	26
Fig. 1.3.10	Acercamiento de los vectores de luz cuando entran a un modelo en un plano polarizado.	30
Fig. 1.3.11	Componentes del vector de luz que son transmitidas a través	

	del analizador de un plano polarizado	30
Fig. 1.3.12	Patrón superpuesto de franjas isocromáticas e isoclinas.	31
Fig. 1.3.13	Modelo fotoelástico en un polarizador circular.	34
Fig. 1.3.14	Componentes del vector de luz.	35
Fig. 1.3.15	Acercamiento de las componentes del vector de luz.	36
Fig. 1.3.16	Componentes del vector de luz que son transmitidas a través del analizador.	37
Fig. 1.3.17	Patrón de franjas isocromáticas en campo oscuro.	38
Fig. 1.3.18	Componentes del vector de luz que son transmitidos a través del analizador.	39
Fig. 1.3.19	Patrón de franjas isocromático en campo claro.	40
Fig. 1.3.20	Curva típica de calibración usando una probeta a tensión.	41
Fig. 1.3.21	Cadenas moleculares primarias y secundarias en un polímero.	44
Fig. 1.4.1	Tipos de elementos finitos.	48
Fig. 1.4.2	Discretización de una torre de control en elementos finitos.	52
Fig. 2.1.1	Modelo de semiala.	58
Fig. 2.1.2	Sistema masa – resorte de la semiala.	61
Fig. 3.1.1	Distribución de las costillas de la semiala.	62
Fig. 3.1.2	Puntos unidos por líneas para formar el perfil.	71
Fig. 3.1.3	Contornos de la semiala con áreas como almas de viga.	73
Fig. 3.1.4	Modelo final de la semiala semimonocoque.	74
Fig. 3.1.5	Ventana de selección del tipo de solución.	74
Fig. 3.1.6	Ventana de propiedades de los materiales.	75
Fig. 3.1.7	Mallado y empotre de la semiala.	76
Fig. 3.1.8	Primer modo de vibración a un frecuencia de 7.32 Hz.	76
Fig. 3.1.9	Segundo modo de vibración a un frecuencia de 9.96 Hz.	77
Fig. 3.1.10	Tercer modo de vibración a un frecuencia de 13.14 Hz.	78
Fig. 3.1.11	Cuarto modo de vibración a un frecuencia de 15.81 Hz.	78
Fig. 3.1.12	Quinto modo de vibración a un frecuencia de 20.55 Hz.	78
Fig. 3.1.13	Costilla de semiala modelada en Ansys.	79
Fig. 3.1.14	Modelo final de la semiala semimonocoque en Ansys.	80
Fig. 3.1.15	Geometría del elemento SHELL63.	80
Fig. 3.1.16	Constantes reales para las costillas y viga.	81
Fig. 3.1.17	Constantes reales para la piel.	82
Fig. 3.1.18	Definición de las propiedades del acrílico material.	83
Fig. 3.1.19	Semiala Mallada.	83
Fig. 3.1.20	Acercamiento de la malla de la costilla y piel.	84
Fig. 3.1.21	Empotre de la semiala.	84
Fig. 3.1.22	Costilla de semiala.	85
Fig. 4.2.1	Empotre de la semiala	87

Fig. 4.2.2	Detalle del empotre de la semiala.	92
Fig. 4.2.3	Conjunto de piezas maquinadas con LASER y router.	93
Fig. 4.2.4	Fresadora CNC DENFORD TRIAC VMC.	94
Fig. 4.2.6	Maquinado de vigas para el empotre y piezas de sujeción.	95
Fig. 4.2.7	Piezas Maquinadas.	96
Fig. 4.2.8	Borde de ataque en campo claro y oscuro.	96
Fig. 4.2.9	Sección media del perfil en campo claro y oscuro.	97
Fig. 4.2.10	Perfil seccionado en campo claro y oscuro.	97
Fig. 4.2.11	Ensamble de los bordes de ataque a la viga principal.	97
Fig. 4.2.12	Pegado de la sección media de los perfiles.	98
Fig. 4.2.13	Ensamble final de secciones medias de las costillas.	98
Fig. 4.2.14	Sección de la viga donde se realizo el ángulo.	99
Fig. 4.2.15	Esfuerzos residuales en campo claro.	99
Fig. 4.2.16	Esfuerzos residuales en campo oscuro.	100
Fig. 4.2.17	Ensamble de viga trasera y bordes de salida.	100
Fig. 4.2.18	Atiesadores de fibra de carbono.	100
Fig. 4.2.19	Maquinado de material birrefringente.	101
Fig. 4.2.20	Precarga en los paneles de material birrefringente.	101
Fig. 4.2.21	Ensamble final del material birrefringente en la semiala.	102
Fig. 4.2.22	Forrado de la semiala.	102
Fig. 4.3.1	Equipo utilizado en el experimento.	103
Fig. 4.3.2	Túnel de viento de la ESIME TICOMAN.	104
Fig. 4.3.3	Posicionamiento del polariscopio en el túnel.	105
Fig. 5.1.1	Primer modo de vibración a una frecuencia natural de 7.13 Hz.	105
Fig. 5.1.2	Segundo modo de vibración a una frecuencia natural de 16.48 Hz.	108
Fig. 5.1.3	Tercer modo de vibración a una frecuencia natural de 32.009 Hz.	109
Fig. 5.1.4	Cuarto modo de vibración a una frecuencia natural de 83.55 Hz.	109
Fig. 5.2.1	Primer modo de vibración de la semiala con piel.	110
Fig. 5.2.2	Primer modo de vibración de la semiala sin piel.	111
Fig. 5.2.3	Detalle de la zona del esfuerzo máximo.	112
Fig. 5.2.4	Segundo modo de vibración de la semiala con piel.	113
Fig. 5.2.5	Segundo modo de vibración de la semiala sin piel.	113
Fig. 5.2.6	Tercer modo de vibración de la semiala sin piel.	114
Fig. 5.2.7	Cuarto modo de vibración de la semiala sin piel.	114
Fig. 5.2.8	Quinto modo de vibración de la semiala sin piel.	115

Fig. 5.3.1 a	vista del material refrigerante con los motores apagados.	117
Fig. 5.3.1 b	Polariscopio a 0° con un motor encendido.	117
Fig. 5.3.1 c	Polariscopio a 90° con un motor encendido.	117
Fig. 5.3.1 d	Polariscopio a 0° con motor 1 y 2 encendidos.	118
Fig. 5.3.1 e	Polariscopio a 90° con un motor 1 y 2 encendidos.	118
Fig. 5.3.1 f	Polariscopio a 0° con un motor 1, 2 y 3 encendidos.	118
Fig. 5.3.1 g	Polariscopio a 90° con un motor 1, 2 y 3 encendidos.	119
Fig. 5.3.1 h	Polariscopio a 0° con un 4 motores encendidos.	119
Fig. 5.3.1 i	Polariscopio a 90° con un 4 motores encendidos.	119
Fig. 5.3.2 a	Semiala a 5° con motores apagados.	120
Fig. 5.3.2 b	Polariscopio a 0° con un motor 1 encendido.	120
Fig. 5.3.2 c	Polariscopio a 90° con un motor 1 encendido.	120
Fig. 5.3.2 d	Polariscopio a 0° con dos motores encendidos.	121
Fig. 5.3.2 e	Polariscopio a 90° con dos motores encendidos.	121
Fig. 5.3.2 f	Polariscopio a 0° con tres motores encendidos.	121
Fig. 5.3.2 g	Polariscopio a 90° con tres motores encendidos.	122
Fig. 5.3.2 h	Polariscopio a 0° con un motores.	122
Fig. 5.3.2 i	Polariscopio a 90° con cuatro motores.	122
Fig. 5.3.3 a	Polariscopio a 0° con motores apagados.	123
Fig. 5.3.3 b	Polariscopio a 0° con un motor encendido.	123
Fig. 5.3.3 c	Polariscopio a 90° con un motor encendido.	123
Fig. 5.3.3 d	Polariscopio a 0° con dos motores encendidos.	124
Fig. 5.3.3 e	Polariscopio a 90° con dos motores encendidos.	124
Fig. 5.3.3 f	Polariscopio a 0° con tres motores encendidos.	124
Fig. 5.3.3 g	Polariscopio a 90° con tres motores encendidos.	125
Fig. 5.3.3 h	Polariscopio a 0° con cuatro motores encendidos.	125
Fig. 5.3.4	Detalle de las franjas.	128
Figura 5.3.5	Dirección del aumento de los esfuerzos en el eje Y.	128
Fig. 5.3.6	Colocación del acelerómetro.	130
Fig. 5.3.7	Grafica del movimiento de la semiala.	131
Fig. 5.3.8	Ajuste de curvas.	131
Fig. 5.4.1	Franjas de colores en los tres primeros claros de la viga de la semiala	134
Fig. 5.4.2	Contorno de colores de esfuerzos en los tres primeros claros de la viga de la semiala con piel.	134
Fig. 5.4.3	Contorno de colores de esfuerzos en los tres primeros claros de la viga de la semiala sin piel.	135

RELACION DE TABLAS

Tabla	Título	Página
Tabla 1.3.1	Arreglo de elementos en un polariscopio circular.	27
Tabla 2.2.1	Momento de inercia y rigidez en la viga frontal.	65
Tabla 2.2.2	Momento de inercia y rigidez en la viga trasera.	65
Tabla 2.2.3	Rigideces equivalentes.	65
Tabla 2.2.4	Masas concentradas del sistema.	66
Tabla 2.2.5	Frecuencias naturales del sistema.	67
Tabla 2.3.1	Modos de vibración del sistema.	69
Tabla 3.1.1	Puntos del perfil.	72
Tabla 3.1.2	Resultados de la simulación en Nx.	77
Tabla 3.1.3	Constante reales del elemento SHELL63.	82
Tabla 3.1.4	Métodos de obtención de los modos de vibración.	86
Tabla 3.1.5	Tamaño y número de elementos en el modelo.	87
Tabla 3.1.6	Frecuencias de los 5 primeros modos de vibración.	88
Tabla 3.1.7	Porcentaje de error dependiendo el tamaño de elementó.	88
Tabla 4.2.1	Características de la maquina cortadora LASER.	93
Tabla 4.2.2	Características de la maquina router CNC.	94
Tabla 4.2.3	Características del equipo CNC.	95
Tabla 5.1.1	Modos de vibración del sistema	108
Tabla 5.2.1	Frecuencias de los 5 primeros modos de vibración sin piel	110
Tabla 5.2.2	Frecuencias de los 5 primeros modos de vibración con piel.	111
Tabla 5.3.1	Condiciones atmosféricas del laboratorio.	116
Tabla 5.3.2	Velocidades del túnel de viento y densidad del aire.	116
Tabla 5.3.3	Características de las franjas isocromáticas.	127
Tabla 5.3.4	Valores del orden de franja	129
Tabla 5.3.5	Promedio de frecuencias para el experimento con 1 motor.	132
Tabla 5.3.6	Promedio de frecuencias para el experimento con 2 motores.	132
Tabla 5.3.7	Promedio de frecuencias para el experimento con 3 motores	132
Tabla 5.3.8	Promedio de frecuencias para el experimento con 4 motores.	132
Tabla 5.4.1	Comparación de frecuencias resultantes	133
Tabla B1	Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 1 motor.	140
Tabla B2	Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 2 motores.	141
Tabla B3	Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 3 motores.	142
Tabla B4	Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 4 motores.	143

NOMENCLATURA

Símbolo	Descripción
a	Aceleración
A	Amplitud del vector luz
A	Área
c	Velocidad de la luz
D	Diámetro del disco
$\{d\}$	Vector de grados de libertad desconocidos
$[D]$	Matriz dinámica
E	Modulo de elasticidad
f	Frecuencia
F	Fuerza
$[f]$	Matriz de flexibilidad
$\{F\}$	Vector fuerza
f_{σ}	Valor de la franja en términos de esfuerzo
f_{ε}	Valor de la franja en términos de deformación
G	Centro de masa del cuerpo
h	Espesor
I	Intensidad de luz
I	Momento de inercia
k	Rigidez
K	Índice de refracción
$[K]$	Matriz de rigidez
m	Masa
$[M]$	Matriz de masa
M	Momento,
n	Índice de refracción del aire
N	Orden de franja
N	Reacción normal
P	Presión
r	Radio
t	tiempo
T	Periodo
V	Velocidad
Z	posición

Letras Griegas	Descripción
α	Aceleración angular
β	Orientación del ángulo

δ	Ángulo entre el eje de polarización y el vector de luz
Δ	Cambio finito de cantidad
ε	Deformación m
γ	Angulo de salida
λ	Ancho de onda de luz
ν	Relación de Poisson
ρ	Densidad
σ	Esfuerzo normal
τ	Esfuerzo cortante
$\tau_{\text{máx.}}$	Esfuerzo cortante máximo
ω	Frecuencia angular

RESUMEN

El presente trabajo tuvo como finalidad calcular las frecuencias naturales de una semiala semimonocoque de doble flechado, el objetivo de este estudio es comprender de manera analítica, numérica y experimental como actúa este tipo de elementos estructurales en vibración libre. El trabajo lo podemos dividir en tres grandes secciones, la primera sería aquella que concierne a la parte analítica-numérica, en cada una de ellas mostramos metodologías precisas que permiten la obtención de las frecuencias y los modos naturales de vibración. La segunda parte la podemos comprender como una fuente de información para aquellas personas interesadas en entender como son los procesos de manufactura para modelos experimentales de tipo aeronáutico. Por último el lector verá en las partes finales del trabajo la manera de obtener frecuencias de forma experimental, así como la comparación de los resultados matemáticos, numéricos y experimentales de las frecuencias. Y como un valor agregado podrá visualizar los esfuerzos inducidos por la acción fluido-estructura a partir del método experimental fotoelástico.

ABSTRACT

The objective of this thesis was to calculate the natural frequencies of a semimonocoque semi-wing with double sweep, the aim of this study is to understand with analytical, numerical and experimental methods; the behavior of structural elements in free vibration. The work can be divided into three main sections; the first would be the analytical-numerical sections, where in each one, its show precise methodologies that obtain the frequencies and natural modes of vibration. The second part can be understand as a source of information for those interested in the process for manufacturing experimental models of aircraft type. The reader will see in the final part how to obtain an experimental frequencies and the comparison of the mathematical, numerical and experimental results. And as an added value you can view the efforts by the action of tresses induced by the interaction fluid-structure with the use of the experimental photoelastic method.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el ala de una aeronave se ve sometida a efectos dinámicos asociados a la alta velocidad en donde se desempeñan, por tal razón estas necesitan ser valoradas y estudiadas puesto que existe el riesgo de encontrar deformaciones, esfuerzos y fenómenos resonantes en la estructura.

Por lo tanto en el presente trabajo se desarrollará el comportamiento dinámico de una semiala basándose en la teoría básica de la dinámica estructural, donde se analizarán los fenómenos ocasionados debido a cargas dinámicas, de las cuales podemos mencionar las cargas por: viento, impacto y explosiones, que pueden ocasionar fracturas repentinas de la estructura debido a las vibraciones en la etapa subsónica.

Puesto que es necesario verificar, como en todo estudio de este tipo, que el modelo matemático, pueda simular con buena aproximación la respuesta de la estructura real, será construido un modelo experimental de la semiala, además de realizarse una simulación numérica.

Finalmente se integraran e interpretaran los resultados con el fin de compararlos y obtener información que nos permita en trabajos posteriores realizar modificaciones estructurales (reingeniería).

Este trabajo se fundamenta en que actualmente en nuestro país y gran parte de América latina no existen trabajos relacionados con el estudio teórico y experimental aplicado a aeronaves. Esto es debido en gran parte a la falta de presupuesto y en otros casos por falta de interés para desarrollar una metodología propia de diseño que permita la construcción de aeronaves, ya que en la actualidad, los estudios de este tipo, hechos en túneles de viento convencionales y simulados en software que hoy en día esta al alcance de cualquier país, son realizados por compañías o universidades extranjeras de gran renombre que cobran cantidades enormes de dinero por esta información.

Con el presente se innova en la metodología de diseño conceptual logrando reducción de costos, tiempo y optimización de geometrías de software CAD, CAE especializado.

Con el desarrollo de este trabajo se promueve la realización de experimentos para visualizar estos comportamientos y dar continuidad a la investigación de estos fenómenos dentro del instituto y así contribuir al desarrollo científico, tecnológico y a la no dependencia de nuestro país de otros.

Este trabajo se encuentra dividido en cinco capítulos de la siguiente forma

En el capítulo I, se dará una introducción de lo que es: la dinámica estructural, los métodos experimentales que se usaran (fotoelasticidad) y los métodos numéricos; para conocer su campo de acción.

En el capítulo II, se realizará el análisis de la semiala, idealizada como edificio cortante con diferentes varios grados de libertad, así mismo desarrollaremos la matriz de rigidez y de masa para obtener los modos de vibración y las frecuencias naturales en vibración libre.

En el capítulo III, se mostrarán las fases del proceso de modelado en CAD, así como de la simulación por computadora de la semiala en la cual se obtendrán frecuencias naturales y modos de vibración.

En el capítulo IV, se describirá y mostrará el proceso de construcción del modelo experimental, además de hablar de las fases de experimentación a las que será sometido el modelo y en el que intervendrán el método de la fotoelasticidad.

Finalmente en el capítulo V, se recopilará los resultados de cada uno de los análisis, (teórico, numérico y experimental), para interpretarlos y compararlos entre ellos.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

CAPITULO I

CONSIDERACIONES TEORICAS

1.1 ESTADO DEL ARTE DE LAS SEMIALAS

Desde que tuvo comienzo la aviación lograda por los hermanos Wright en 1903 los componentes de los aviones han cambiado drásticamente, uno de estos componentes son las alas y desde entonces, las alas distan mucho de ser lo que en aquella ocasión fueron, la madera y tela dieron lugar al hierro, al aluminio y sus aleaciones, el titanio y sus aleaciones, y estos a su vez a materiales avanzados como la fibra de vidrio, de carbono y el aramida.

El diseño y la construcción actualmente representa todo un reto de ingeniería, las estructuras deben de poder resistir los esfuerzos inducidos por las cargas que se presentan durante el vuelo, por el tanque de combustible y los componentes alojados en ella, como los trenes de aterrizaje, sistemas antihelio, cableado eléctrico y sistemas hidráulicos; por último el propio peso de la estructura contando con sus pasajeros.

De manera paradójica y no obstante que deben ser lo suficientemente resistentes estas tienen que ser lo más ligeras posibles para no agregar peso muerto al ala de una aeronave, esto repercute en el consumo de combustible, en la resistencia al avance de la aeronave provocando que el avión pueda volar con menor potencia, mayor autonomía y un alcance superior.

Una forma en la que los ingenieros han logrado cubrir estas necesidades ha sido por medio de las alas de tipo semimonocoque, (figura 1.1.1); esta clase de alas tiene como objetivo lograr que la piel de ala trabaje estructuralmente hablando como una placa delgada de tal manera que el peso es reducido al mínimo; la configuración des estas alas incluye atiesadotes, costillas, patines, almas y piel.

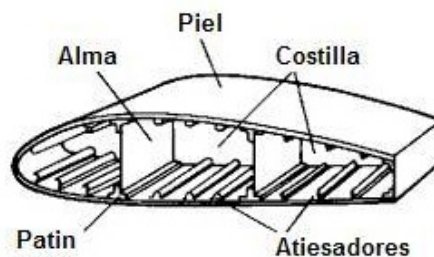


Fig. 1.1.1 Elementos de ala semimonocoque

Los patines y las almas son vigas que soportan la mayor parte de los esfuerzos, los atiesadotes sirven como una caja de torsión y las costillas trabajan como una placa delgada y sirven para dar forma y proveer características aerodinámicas al ala.

En el momento en que las alas tuvieron una configuración adecuada que les permitió lograr la sustentación, aparecieron también efectos aerodinámicos que han sido positivos o negativos para el vuelo, (figura 1.1.2). El hombre empezó a estudiar y comprender estos fenómenos, poco a poco ha logrado en el caso de los efectos negativos minimizarlos o erradicarlos, y para los efectos positivos maximizarlos. Esto se

ha logrado con el uso de túneles de viento más complejos, que logran reproducir los efectos aerodinámicos producidos durante el vuelo bajo condiciones casi reales. El desarrollo de software especializado en la dinámica de fluidos que abaratan costos y tiempos permitiendo realizar experimentos de manera continua dando la capacidad al ingeniero de modificar proponiendo nuevos diseños y configuraciones.

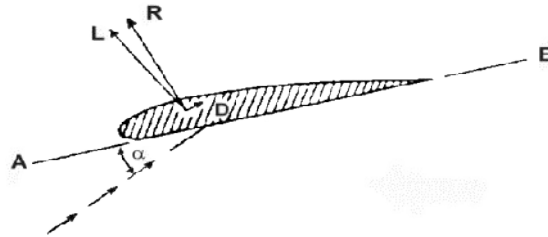


Fig. 1.1.2 Fuerzas aerodinámicas que actúan en un perfil

Entre los fenómenos que se presentan en el ala en el instante del ascenso y durante el vuelo encontramos el efecto suelo al momento del despegue y aterrizaje, el vórtice inducido en la punta, la pérdida de la capa límite a ciertos ángulos de ataque, la resistencia al avance producida por la forma de el ala, los efectos de compresibilidad que pueden llegar a presentarse en puntos específicos alrededor del la piel del extradós e intrados, las vibraciones que son producidas por: las turbulencias del flujo, los motores, los ascensos y descensos, las modificaciones que llegan a presentarse en la estructura debidas a las cargas aerodinámicas. Todo esto llega a afectar el desempeño de la semiala durante el vuelo y poco a poco se ha comprendido cada uno de estos efectos.

Actualmente se sabe que los efectos del vortice pueden ser disminuidos terminando el ala con un difusor de flujo "winglet", (figura 1.1.3 a), no los erradica pero los arroja afuera del cuerpo y permite el ahorro de combustible y reduce resistencia al avance, (figura 1.1.3 b). Las vibraciones producidas por el motor y las turbulencias del flujo pueden llegar a excitar el ala hasta el punto de entrar en resonancia, pero también se ha descubierto la manera de evitarlo. Reducir la resistencia al avance sin perder sustentación u optimizar la estancia de la capa límite en el ala por más tiempo.

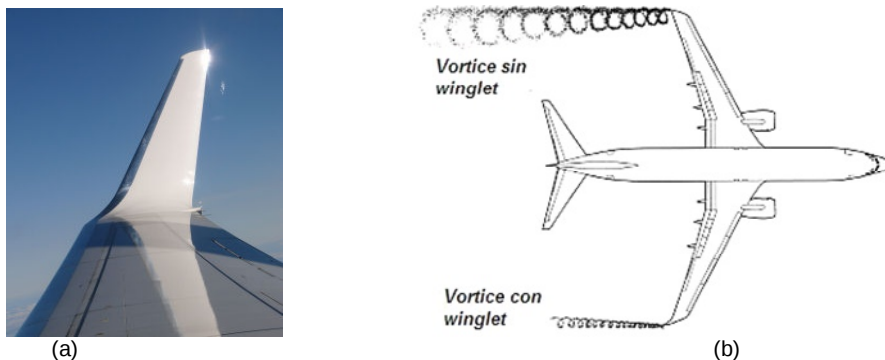


Fig. 1.1.3 (a) Difusor de flujo "Winglet", (b) Disminución de los vortices con winglet o sin el.

Varias de estas investigaciones sobre estos efectos son presentadas en las revistas especializadas, gacetas de universidades, microfilme y medios electrónicos que serán nombradas en la bibliografía.

1.2 INTRODUCCION A LA DINAMICA ESTRUCTURAL

La dinámica estructural será la base del presente trabajo, así pues es una necesidad darla a conocer. Primero definiremos una carga dinámica, podemos decir que es aquella en donde la magnitud, dirección o punto de aplicación varían con el tiempo como por ejemplo las cargas de nieve, sismos, viento, lluvias, granizadas; así también, las deflexiones resultantes estarán en función del tiempo, y los esfuerzos vienen a ser parte de la respuesta dinámica.

Si la carga aplicada es una función conocida del tiempo, se dice que la carga es preescrita y su análisis se conoce como determinístico. Si la historia del tiempo de la carga no esta completamente conocida, sino que solo se conoce en un sentido estadístico, la carga se dice que es aleatoria y el tipo de análisis se le conoce como no determinístico.

Para plantear un problema dentro de la dinámica estructural se necesita la idealización la cual consiste en definir el modelo matemático es decir una idealización del sistema, en el que plantearemos el comportamiento, para poder obtener una respuesta lo mas exacta posible.

El modelo analítico consiste en definir suposiciones simplificadas que reduzcan el sistema real al sistema analítico, dibujos que representen el modelo analítico y una lista de parámetros de diseño. Existen dos tipos de modelo analítico los modelos continuos y los modelos discretos. Un modelo continuo representa un sistema con infinitos grados de libertad, uno discreto maneja un número finito de grados de libertad representados por masas puntuales concentradas.

Para formular el modelo matemático se hace uso de la dinámica y la teoría elástica, (figura 1.1.4), que combinadas llevan a las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de la estructura deformable. Formulado el modelo matemático, hay que resolver la ecuación o ecuaciones diferenciales para obtener la respuesta dinámica que nos da el movimiento resultante de la estructura en la historia del tiempo.

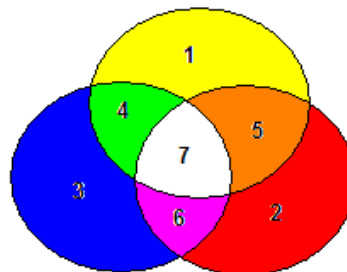


Fig. 1.1.4 Formulación del modelo matemático; 1. Aerodinámica, 2. Elástica, 3. Dinámica, 4. Mecánica de vuelo, 5. Aeroelasticidad estática, 6. Dinámica estructural, 7. Aeroelasticidad dinámica.

Existen dos tipos de comportamiento dinámico de primordial importancia en aplicaciones estructurales, los cuales son: vibración libre y vibración forzada. El primero viene siendo el movimiento resultante de las condiciones iniciales dadas, donde las

Únicas fuerzas que actúan sobre la masa del sistema, son aquellas impuestas por las fuerzas elásticas internas; y la segunda, viene siendo el movimiento resultante de la entrada al sistema de fuerzas externas. La fase de análisis de investigación dinámica se puede resumir en tres pasos: la definición del modelo analítico, la formulación del modelo matemático y la solución de este o respuesta dinámica.

Las ecuaciones de movimiento definen el comportamiento dinámico, y existen principalmente, tres formas de generarlas:

- Planteando el equilibrio dinámico a través de la segunda ley de Newton y del principio de D'Alembert.
- Aplicando el principio de los desplazamientos virtuales.
- Haciendo uso del principio de Hamilton, o bien, de las ecuaciones de Lagrange.

1.2.1 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

1.2.1.1 GRADOS DE LIBERTAD.

En dinámica estructural el número de coordenadas independientes necesarias para especificar la configuración o posición de un sistema en un tiempo dado es llamado grados de libertad.

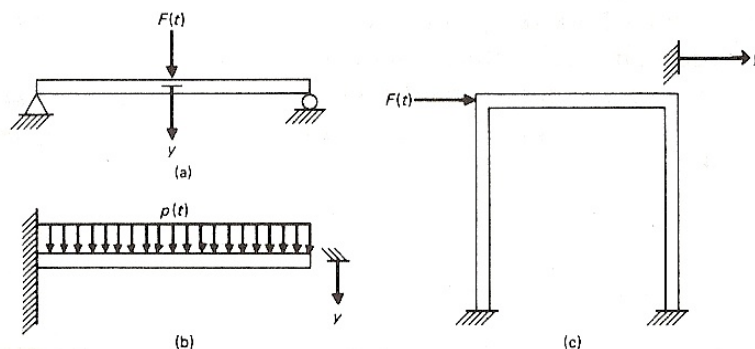


Fig. 1.2.1 Estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad; a) Viga simplemente apoyada con carga puntual, b) Viga empotrada con carga uniformemente distribuida, c) Marco con carga puntual

En general, una estructura continua tiene un número infinito de grados de libertad. Sin embargo el proceso de idealización o selección de un modelo matemático permite la reducción de grados de libertad en un número pequeño de ellos y en algunos casos a solo un grado de libertad (figura 1.2.1).

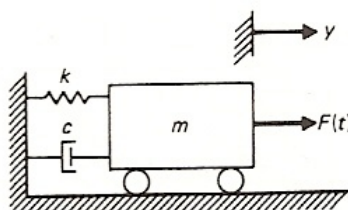


Fig. 1.2.2 Modelo matemático para un sistema de un grado de libertad

Estos sistemas de un solo grado de libertad pueden ser descritos correctamente por el modelo matemático mostrado en la figura 1.2.2, este cuenta con los siguientes elementos: (1) un elemento masa m que representa la masa y las características inerciales de la estructura; (2) un elemento resorte k que representa la fuerza elástica y la capacidad de energía potencial de la estructura; (3) un elemento amortiguador c representando las pérdidas de energía y las fuerzas de fricción de la estructura; y (4) un fuerza de excitación $f(t)$ que representa las fuerzas externas que actúan en el sistema. El modelo mostrado en la figura 1.2.2 asume que cada elemento en el sistema representa una sola propiedad, si bien, físicamente no existen estos elementos y debido a que un modelo matemático es solo una idealización conceptual de la estructura real, este nos proporcionar información limitada del comportamiento del sistema real. Sin embargo desde un punto de vista práctico la información que obtenemos del análisis matemático puede ser suficiente para poder entender la conducta del sistema real.

1.2.1.2 SISTEMA NO AMORTIGUADO.

Es el sistema de n grados de libertad en donde se desprecia las fuerzas de fricción o amortiguamiento, se considera al sistema cuando esta en movimiento o vibración, libre de la acción de fuerzas externas, bajo estas condiciones, el movimiento del sistema esta gobernado solo por la influencia de las condiciones iniciales. El sistema no amortiguado, es usualmente representado como muestra la figura 1.2.3(a), 1.2.3 (b). Estas dos figuras representan modelos matemáticos que son dinámicamente equivalentes. En estos modelos la masa m es sujeta por el resorte k y limitada para el movimiento rectilíneo en alguna de las direcciones.

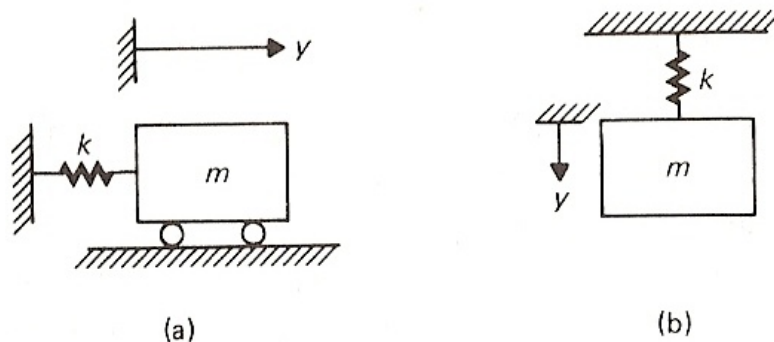


Fig. 1.2.3 Representación de modelos matemáticos de sistemas masa resorte no amortiguados.

1.2.1.2.1 LEY DE NEWTON PARA EL MOVIMIENTO.

Para predecir el desplazamiento o la velocidad de la masa m para cualquier tiempo t , dadas las condiciones en un tiempo $t = 0$. La relación analítica entre el desplazamiento, y , y el tiempo, t , esta dado por la segunda ley de Newton para el movimiento, que puede ser expresada como:

$$F = ma \quad (1.1)$$

Donde F es la fuerza resultante actuando sobre una partícula de masa m y a es la resultante de la aceleración; esta ecuación puede ser presentada en término de componentes en los ejes coordenados X, Y, Z como:

$$\sum F_x = ma_x \quad (1.2a)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad (1.2b)$$

$$\sum F_z = ma_z \quad (1.2c)$$

La aceleración es definida como la segunda derivada del vector de posición con respecto al tiempo, lo que significa que las ecuaciones (1.2) son ecuaciones diferenciales; estas ecuaciones son solo aplicables a cuerpos idealizados como partículas, no obstante la mecánica ha comprobado que las leyes de Newton para el movimiento pueden ser aplicables a cuerpos de dimensiones finitas bajo movimiento de traslación. Para el movimiento de un cuerpo rígido que es simétrico al plano en que se mueve, las ecuaciones de Newton para el movimiento quedan:

$$\sum F_x = m(a_G)_x \quad (1.3a)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad (1.3b)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (1.3c)$$

En la ecuaciones anteriores $(a_G)_x$ y $(a_G)_y$ son las componentes de la aceleración en los ejes X y Y ; G es el centro de masa del cuerpo; α es la aceleración angular; I_G es el momento de inercia; y $\sum M_G$ es la suma de momentos de todas las fuerzas actuando sobre el cuerpo. Las ecuaciones (1.3) son aplicables también a cuerpos rígidos en rotación pura. Para este tipo de movimiento, en particular la ecuación (1.3c) puede ser reemplazada por:

$$\sum M_o = I_o \alpha \quad (1.3d)$$

En la cual el momento de inercia I_o y los momentos M_o son determinados con respecto al eje fijo de rotación. El movimiento de un cuerpo rígido es descrito por dos ecuaciones vectoriales donde una expresa la relación entre fuerza y aceleración del centro de masa y la otra relaciona los momentos y el movimiento angular del cuerpo.

1.2.1.3 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

Para poder estudiar un problema es aconsejable seguir un método organizado y sistemático que nos lleve a encontrar una solución. El primer paso y probablemente el más importante en el análisis dinámico es dibujar un diagrama de cuerpo libre del sistema. El diagrama de cuerpo libre es un esquema del cuerpo o de una parte del mismo donde todas las fuerzas externas son mostradas. Para el caso mostrado en la figura 1.2.4 se describe el diagrama de cuerpo libre de la masa m del oscilador,

desplazándose en dirección positiva en el eje Y , y actuando en sentido contrario a la fuerza $F_s = ky$ generada por el resorte.

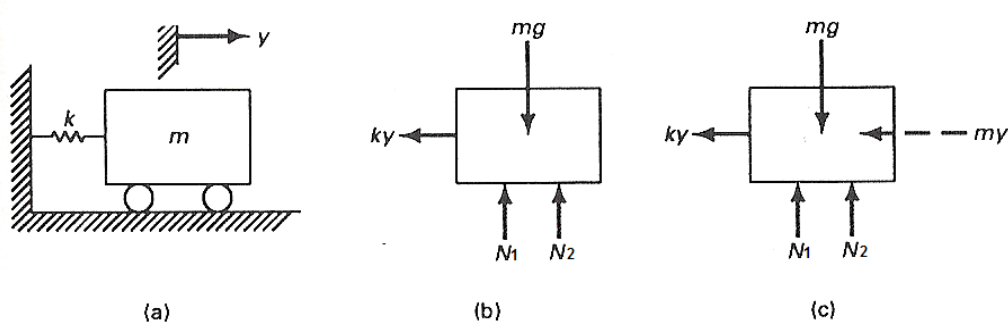


Fig. 1.2.4 Diagramas de cuerpo libre: (a) Sistema de un grado de libertad. (b) Mostrando fuerzas externas. (c) Mostrando fuerzas internas y externas.

El peso del cuerpo mg y las reacciones normales N_1 y N_2 también son mostradas, sin embargo debido a que el equilibrio es en dirección Y estas no son tomadas en cuenta dentro de la ecuación (1.2 b) por lo que nos queda:

$$-ky = m\ddot{y} \quad (1.4)$$

Donde la fuerza del resorte actúa en sentido negativo y la aceleración es indicada por $\ddot{y}$ donde la doble diéresis indica la segunda derivada con respecto al tiempo.

1.2.1.4 PRINCIPIO DE D' ALEMBERT.

Una alternativa diferente para encontrar la ecuación (1.4) es haciendo uso del principio de D' Alembert que establece que un sistema puede ser puesto en equilibrio dinámico adicionando a las fuerzas externas una fuerza ficticia conocida como fuerza interna.

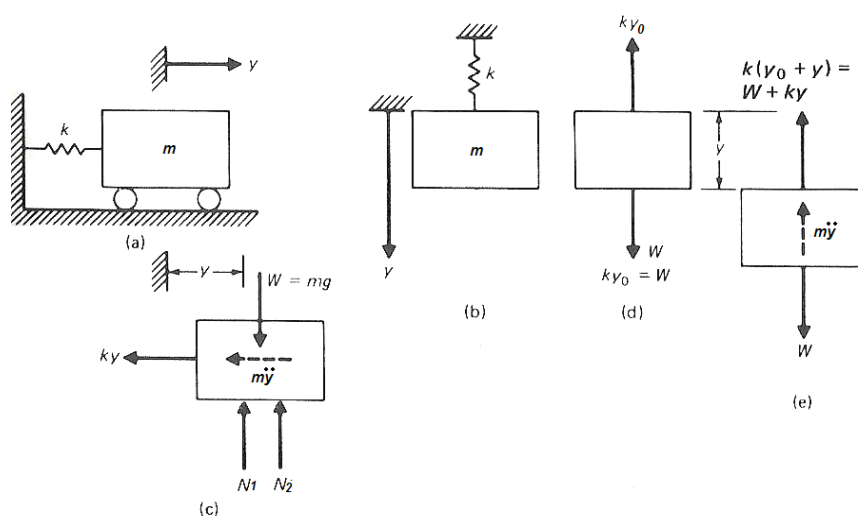


Fig. 1.2.5 Representación de un oscilador simple y su correspondiente diagrama de cuerpo libre.

La figura 1.2.5(c) muestra el diagrama de cuerpo libre con la fuerza interna $m\ddot{y}$. Esta fuerza es igual a la masa multiplicada por la aceleración, y debe ser siempre contraria al

movimiento. La aplicación del principio de D'Alembert permite obtener la ecuación de movimiento haciendo uso de la ecuación de equilibrio. Por ejemplo en la figura 1.2.5(c), la suma de fuerzas en dirección Y da directamente:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (1.5)$$

Que naturalmente es equivalente a la ecuación (1.4). El uso del principio de D'Alembert en este caso parece ser sencillo; Pero esto no es el caso para problemas mas complejos, en los cuales el principio de D'Alembert, en conjunto con el principio del trabajo virtual constituyen una poderosa herramienta en el análisis.

1.2.1.5 SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO.

El siguiente paso es encontrar la solución de la ecuación diferencial (1.5). Que es una ecuación lineal, de segundo orden, homogénea con coeficientes constantes. Para esta ecuación asumimos que la solución esta dada por

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad (1.6)$$

Donde A y B son constantes que indican la iniciación del movimiento, mientras que ω es una cantidad que denota una característica física del sistema que será mostrada más adelante. La sustitución de la ecuación (1.6) en la ecuación (1.5) nos da:

$$(-m\omega^2 + k)A\cos\omega t = 0 \quad (1.7)$$

Para que esta ecuación sea satisfecha para cualquier tiempo, el factor en el paréntesis debe de ser igual a cero de forma que

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.8)$$

La raíz positiva de la ecuación (1.8), es conocida como la frecuencia natural del sistema.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La expresión para la velocidad así como para la aceleración se obtienen derivando con respecto al tiempo la ecuación (1.6) una y dos veces respectivamente.

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -A\omega \sin\omega t + B\omega \cos\omega t \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = -A\omega^2 \cos\omega t - B\omega^2 \sin\omega t \quad (1.10)$$

Finalmente para obtener una ecuación general debemos conocer las constantes de integración A y B , estas se obtienen sustituyendo condiciones iniciales del sistema en la ecuación (1.6) y (1.9), sabemos que en $t = 0$, el desplazamiento y la velocidad serán, Y_0 y V_0 respectivamente de tal modo que si sustituimos los datos antes mencionados obtenemos:

$$Y_0 = A$$

$$V_0 = B\omega$$

Despejando y sustituyendo estos valores en la ecuación (1.6) tenemos la expresión del desplazamiento en y de un sistema simple sin amortiguar como función del tiempo t .

$$y = Y_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1.11)$$

1.2.2 SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

Anteriormente se analizó y se obtuvo una ecuación para la respuesta dinámica de estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad. Solo si la estructura se mantiene de una sola forma durante el movimiento, el modelo para un grado de libertad proveerá una respuesta dinámica exacta. De tal forma que cuando la estructura tome más de una sola forma durante el movimiento, la solución obtenida del modelo de un grado de libertad será aproximada pero no exacta al verdadero comportamiento dinámico.

Las estructuras no siempre pueden ser representadas por un modelo de un solo grado de libertad y, en general, deben de ser representadas por un modelo de varios grados de libertad. De hecho, las estructuras son sistemas continuos y como tal poseen un infinito número de grados de libertad. Existen métodos analíticos para describir el comportamiento dinámico de las estructuras que poseen geometrías regulares y propiedades del material uniforme. Estos métodos, aunque nos dan información relevante para el modelado de las estructuras, son bastante complejos y son solo aplicables a estructuras relativamente simples. Estos métodos requieren un análisis matemático considerable, incluyendo la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Para el presente se considerará uno de los más prácticos tipos de estructuras de varios grados de libertad, llamado el edificio cortante de varios pisos.

1.2.2.1 ECUACION DE RIGIDEZ PARA EL EDIFICIO CORTANTE.

Un edificio cortante puede ser definido como una estructura que no tiene rotación en ninguna de las secciones horizontales de sus pisos. La deflexión del edificio puede tomar diferentes formas, asemejándose a una viga en cantiliver que es deflectada solo por fuerzas cortantes, de aquí su nombre de edificio cortante.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

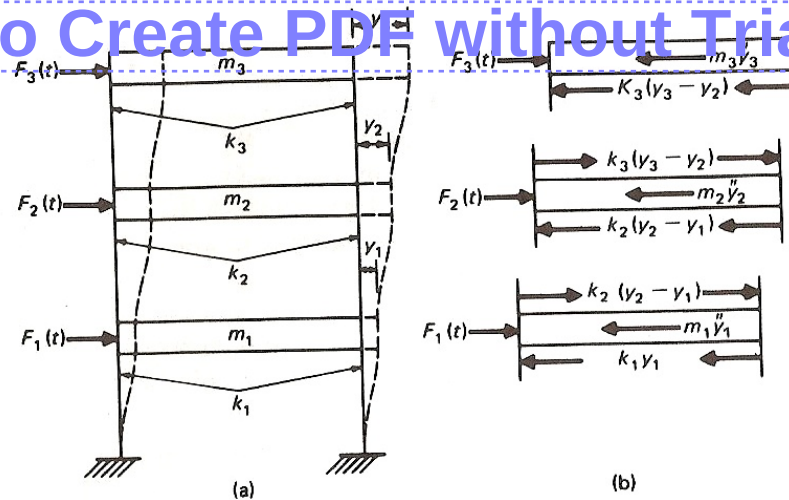


Fig. 1.2.6 Representación de un edificio cortante.

Para realizar tal deflexión en un edificio, debemos asumir que: (1) la masa total de la estructura esta concentrada en los diferentes niveles de los pisos; (2) las vigas de los pisos son infinitamente rígidas comparadas con las columnas; y (3) la deformación de la estructura es independiente de las fuerzas axiales que se presentan en las columnas. Estas consideraciones transforman el problema de una estructura con un número infinito de grados de libertad a una estructura que tiene tantos grados de libertad como pisos tenga el edificio. Para ejemplificar lo anterior en la figura 1.2.6 se muestra una estructura modelada como un edificio de 3 pisos que por lo tanto tendrá 3 grados de libertad, esto es, un desplazamiento horizontal por cada piso del edificio.

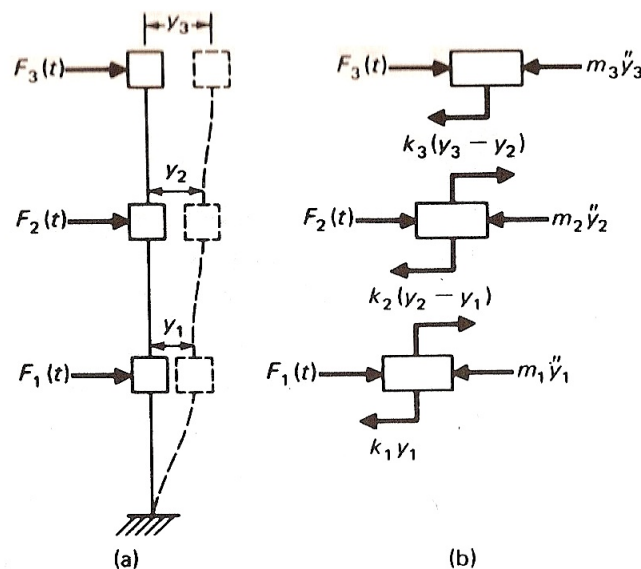


Fig. 1.2.7 Representación de un edificio cortante como columna simple

Nótese que la figura 1.2.6 es solo una forma de representar el edificio cortante, ya que en realidad se puede representar de diferentes formas; una de ellas es idealizar como solo una columna el sistema (figura 1.2.7 a), o sea, colocando masas concentradas en cada uno de los niveles con el entendimiento de que solo los desplazamientos horizontales son posibles para estas masas. Otra alternativa es adoptar un sistema

multimasas – resortes mostrados en la figura 1.2.8. Para cualquiera de esas tres representaciones mostradas en las figuras, el coeficiente de rigidez o constante del resorte k_i mostrado entre cada una de las masas es la fuerza requerida para producir un desplazamiento relativo entre dos niveles de pisos.

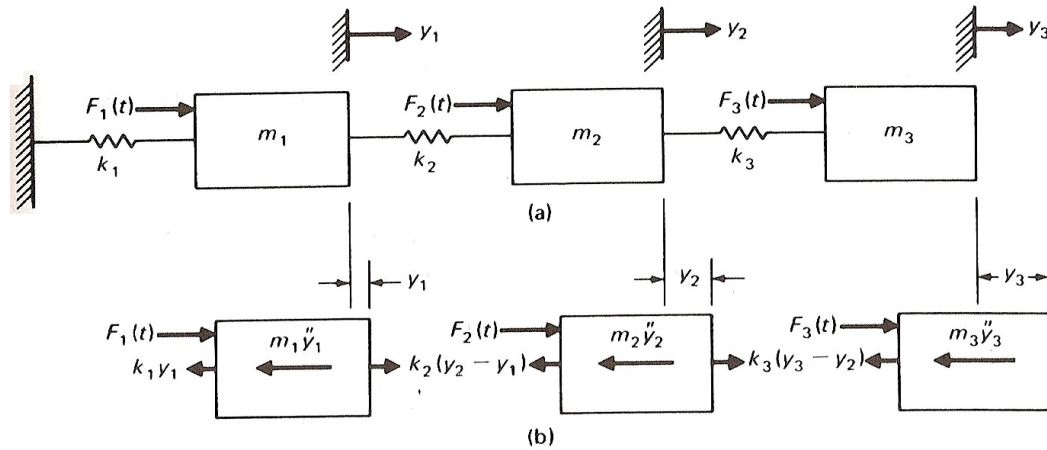


Fig. 1.2.8 Modelo masas – resortes representando un edificio cortante

Para una columna uniforme con sus dos apoyos empotrados, la constante de rigidez esta dada por:

$$k = \frac{12EI}{L^3}$$

Y para una columna con un apoyo empotrado y otro simplemente apoyado la constante esta dada por:

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

Donde E es el modulo de elasticidad del material, I es el momento de inercia de la sección transversal, y L es la longitud de la columna.

Debe ser claro que las tres representaciones mostradas en las figuras 1.2.6 a 1.2.8 son equivalentes. Por consiguiente, las siguientes ecuaciones de movimiento para un edificio cortante de tres pisos son obtenidas de cualquiera de los diagramas de cuerpo libre de las figuras anteriores y realizando la sumatoria de fuerzas que actúan sobre cada masa e igualándola a cero. Obteniendo:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) - F_2(t) = 0$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) - F_3(t) = 0$$

Este sistema de ecuaciones puede ser representado en notación matricial como:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = [F] \quad (1.12)$$

Donde $[M]$ y $[K]$ son respectivamente las matrices de masas y rigidez dadas por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Y $\{y\}$, $\{\ddot{y}\}$ y $\{F\}$ son el desplazamiento, aceleración y el vector de fuerza respectivamente y están dados por:

$$\{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \{\ddot{y}\} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix}, \{F\} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Se debe observar que la matriz de masas, ecuación (1.13), es una matriz diagonal (donde los elementos de la diagonal principal son los únicos diferentes de cero). Los elementos de la matriz de rigidez, ecuación (1.14), son designados como coeficientes de rigidez.

1.2.2.2 ECUACION DE FLEXIBILIDAD PARA EL EDIFICIO CORTANTE.

Una alternativa aproximada en el desarrollo de la ecuación de movimiento de una estructura es la formulación de la flexibilidad. En esta aproximación, las propiedades elásticas de la estructura son descritas por los coeficientes de flexibilidad, los cuales están definidos como las deflexiones producidas por una unidad de carga aplicada en un eje.

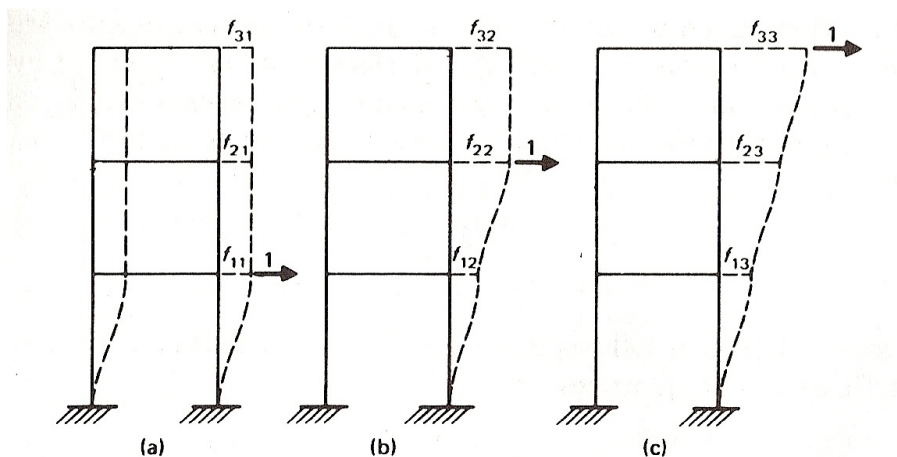


Fig. 1.2.9 Coeficientes de flexibilidad para un edificio cortante de tres pisos

La figura 1.2.9 describe los coeficientes de flexibilidad correspondientes a una fuerza aplicada a un piso de un edificio cortante. Usando estos coeficientes y aplicando la superposición, podemos decir que el desplazamiento en cualquier dirección es igual a la suma del producto de los coeficientes de flexibilidad en cada eje multiplicados por la fuerza correspondiente.

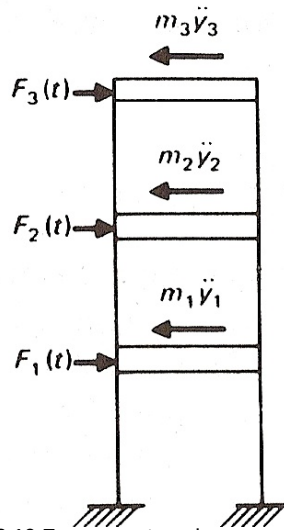


Fig. 1.2.10 Fuerzas actuando en un edificio cortante

Las fuerzas mencionas anteriormente que se encuentran actuando sobre el edificio cortante de tres niveles (incluyendo las fuerzas internas) son mostradas en la figura 1.2.10 Por lo tanto, los desplazamientos del edificio pueden ser expresados en términos de los coeficientes de flexibilidad como

$$y_1 = (F_1(t) - m_1 \ddot{y}_1) f_{11} + (F_2(t) - m_2 \ddot{y}_2) f_{12} + (F_3(t) - m_3 \ddot{y}_3) f_{13}$$

$$y_2 = (F_1(t) - m_1 \ddot{y}_1) f_{21} + (F_2(t) - m_2 \ddot{y}_2) f_{22} + (F_3(t) - m_3 \ddot{y}_3) f_{23}$$

$$y_3 = (F_1(t) - m_1 \ddot{y}_1) f_{31} + (F_2(t) - m_2 \ddot{y}_2) f_{32} + (F_3(t) - m_3 \ddot{y}_3) f_{33}$$

Reordenado los términos en estas ecuaciones y utilizando notación matricial, obtenemos:

$$\{y\} = [f]\{F\} - [f][M]\{\ddot{y}\} \quad (1.16)$$

Donde $[M]$ es la matriz de masas, ecuación (1.13), $[f]$ es la matriz de flexibilidad dada por:

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Y $\{y\}$, $\{\ddot{y}\}$ y $\{F\}$ son los vectores de desplazamiento, aceleración y fuerza respectivamente mostrados en la ecuación (1.15).

1.2.2.2 RELACION ENTRE LAS MATRICES DE RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD.

La definición dada para los coeficientes de rigidez y flexibilidad esta basada en consideraciones estáticas en las cuales el desplazamiento es producido por fuerzas estáticas. La relación entre las fuerzas estáticas y los desplazamientos pueden ser obtenidos por medio de las ecuaciones (1.12) o (1.16) al igualar a cero el vector aceleración $\{\ddot{y}\}$, de tal modo que:

$$[K]\{y\} = \{F\} \quad (1.18)$$

$$[f]\{F\} = \{y\} \quad (1.19)$$

De esta relación se entiende que la matriz de rigidez $[K]$ y la de flexibilidad $[f]$ son matrices inversas una de la otra, de forma que:

$$[K] = [f]^{-1} \quad (1.20 a)$$

O

$$[f] = [K]^{-1} \quad (1.20 b)$$

Por consiguiente, la matriz de flexibilidad $[f]$ puede ser obtenida de ambas formas, por medio del cálculo de la inversa de la matriz de rigidez o directamente del concepto de coeficientes de flexibilidad.

1.2.2.4 VIBRACION LIBRE DE UN EDIFICIO CORTANTE.

Cuando la vibración libre esta bajo consideración, la estructura no esta sujeta a ninguna excitación externa y el movimiento es solo gobernado por las condiciones iniciales. El análisis de la estructura en movimiento libre provee las más importantes propiedades dinámicas de dicha estructura las cuales son la frecuencia natural y los correspondientes modos de vibración.

1.2.2.4.1 FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS NORMALES.

El problema de la vibración libre requiere que el vector de fuerza $\{F\}$ sea igual a cero en las ecuaciones de rigidez (1.12) y flexibilidad (1.16). Para la ecuación de rigidez con $\{F\} = 0$, tenemos:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (1.21)$$

Para vibración libre de estructuras sin amortiguar, asumimos que las soluciones de la ecuación (1.21) son de la forma:

$$y_i = a_i \sin(\omega t - \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

O en notación vectorial!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

$$\{y\} = \{a\} \sin(\omega t - \alpha) \quad (1.22)$$

Donde a_i es la amplitud de movimiento del plano i y n es el número de grados de libertad. La substitución de la ecuación (1.22) en la ecuación (1.21) muestra

$$-\omega^2 [M] \{a\} \sin(\omega t - \alpha) + [k] \{a\} \sin(\omega t - \alpha) = \{0\}$$

O reordenando términos

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{a\} = \{0\} \quad (1.23)$$

Para el caso general, la ecuación es puesta para n sistemas algebraicos homogéneos de una ecuación lineal con n desplazamientos desconocidos a_i , y un parámetro desconocido ω^2 . La formulación de la ecuación (1.23) es un importante problema matemático conocido como un eigenproblema. Donde existe una solución trivial, esto es, la solución para el cual no todos los valores $a_i = 0$, para esto se requiere que el determinante de la matriz $\{a\}$ sea igual a cero; por lo tanto:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (1.24)$$

En general, la ecuación (1.24) resulta una ecuación polinomial de grado n en ω^2 el cual debe ser satisfecho por n valores de ω^2 . Este polinomio es conocido como la ecuación característica del sistema. Para cada uno de los valores de ω^2 que satisfagan la ecuación (1.24), podremos resolver la ecuación (1.23) para $a_1, a_2, \dots, a_n$ en términos de una constante arbitraria.

Análogamente, para la formulación de flexibilidad en vibración libre, de la ecuación (1.16), igualando $\{F\} = 0$, tenemos que:

$$\{y\} + [f][M]\{\ddot{y}\} = \{0\} \quad (1.25)$$

Asumimos de nuevo que el movimiento armónico esta dado por la ecuación (1.22) substituyéndola en la ecuación (1.25) para obtener:

$$\{a\} = \omega^2 [f][M]\{a\} \quad (1.26)$$

O bien

$$\frac{1}{\omega^2} \{a\} = [D]\{a\} \quad (1.27)$$

Donde $[D]$ es conocido como la matriz dinámica y está definida como:

$$[D] = [f][M] \quad (1.28)$$

Por lo que la ecuación (1.27) puede también ser escrita como:

$$\left[[D] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right] \{a\} = 0 \quad (1.29)$$

Donde $[I]$ es la matriz unitaria. Para no tener una solución trivial de la ecuación (1.29), se requiere que el determinante de la matriz $\{a\}$ sea igual a cero, esto es:

$$\left| [D] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right| = 0 \quad (1.30)$$

La ecuación (1.30) es un polinomio de grado n en $1/\omega^2$. Este polinomio es la ecuación característica del sistema para la formulación de flexibilidad. Para cada una de las n soluciones de $(1/\omega^2)$ de la ecuación (1.30), podemos obtener de la ecuación (1.29) las soluciones correspondientes para las amplitudes a_i en términos de una constante arbitraria.

1.3 METODO DE FOTOELASTICIDAD

1.3.1 RELACION DE LA LUZ Y LA OPTICA CON LA FOTOELASTICIDAD

1.3.1.1 TEORÍA DE LA LUZ.

El fenómeno de la luz ha atraído la atención desde los tiempos más tempranos de la historia. Empedocles (484 - 424 a.c.) sugirió que la luz tomaba cierto tiempo para viajar de un punto a otro; sin embargo, Aristóteles (384 – 130 a.c.) desechó esta idea dado que se debían asumir muchas cosas, las ideas de Aristóteles concernientes a la naturaleza de la luz persistió por aproximadamente 2000 años. En el siglo XVII, Huygens (1629 – 1695 d.c.) y Hooke (1635- 1703 d.c.) trataron de explicar algunos de estos efectos con la “teoría de onda”. En la teoría de onda se hace uso de una masa hipotética de llamada “El Éter”, la cual fue asumida para ocupar todo el espacio. Inicialmente, la propagación de la luz fue asimilada como un disturbio longitudinal moviéndose a través del éter. La idea de ondas secundarias, en el que cada punto en un frente de onda podía ser remitido como una nueva fuente de onda, fue propuesta por Huygens para explicar la refracción. Al mismo tiempo Newton (1642 – 1727 d.c.) propuso su teoría corpúscula en la que la luz es visualizada como un flujo de pequeñas pero rápidas emanaciones de partículas hacia cuerpos brillantes. Esta teoría fue aplicable a la mayoría de los efectos ópticos observados en ese tiempo. El mayor paso dado en la teoría de la luz fue dado por Maxwell (1831 – 1879 d.c.). Su teoría electromagnética predice la presencia de dos vectores de campo en las ondas de luz, un campo eléctrico y el otro magnético. La teoría de ondas electromagnéticas también

unía la luz con todas las otras emicades del espectro electromagnético y el poder de transmisión de onda.

La teoría electromagnética de Maxwell establece que la luz es un disturbio electromagnético donde la perturbación puede ser expresada como un vector de luz que es normal a la dirección de propagación. En el caso de luz ordinaria emitida, por ejemplo, de un bulbo de filamento de tungsteno, el vector de luz no es restringido en ningún sentido y puede ser considerado a ser compuesto de un número arbitrario de vibraciones transversales, como es ilustrado en la figura 1.3.1.

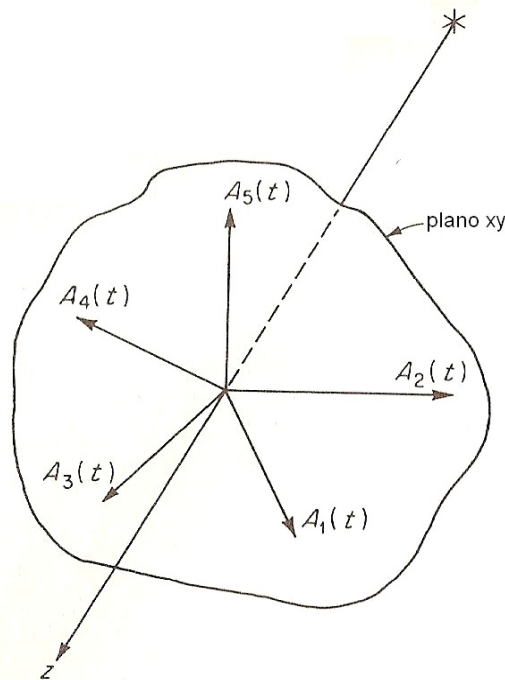


Fig. 1.3.1 Vectores de luz aleatorios asociados con luz ordinaria

Desde que la perturbación produjo luz, puede ser considerada como un movimiento de onda, haciendo posible expresar la amplitud del vector de luz en términos de la solución de la ecuación de onda de una dimensión.

$$a = f(z - ct) + g(z + ct) \quad (1.31)$$

Donde A es la amplitud del vector de luz o una de sus componentes, z es la posición a través del eje de propagación, t el tiempo y c es la velocidad de propagación (3×10^{10} cm./seg. en vacío).

Una descripción simple del efecto de foto elasticidad es obtenido considerando una componente senosoidal de la propagación de la luz en dirección positiva de z . Pudiendo describir la ecuación (1.31) como:

$$a = f(z - ct) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \quad (1.32)$$

Una presentación grafica de la amplitud del vector de luz (o una de sus componentes) propagándose a lo largo del eje positivo z es mostrado en la figura 1.3.2.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

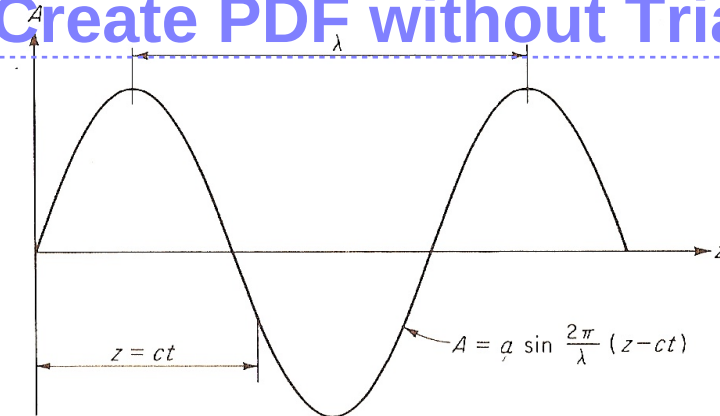


Fig. 1.3.2 Amplitud del vector de luz como una función de la posición a través del eje de propagación

La distancia de pico a pico en la grafica de la amplitud senosoidal del vector de luz es definido como la longitud de onda λ . El tiempo requerido para pasar de pico a pico en un valor definido de z es definido como el periodo T y esta dado por

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (a)$$

La frecuencia del vector de luz o de una de sus componentes esta definido por el número de oscilaciones de la amplitud por segundo. Así la frecuencia f esta dada por el inverso del periodo

$$f = \frac{1}{T} \quad (b)$$

El color de la luz que el ojo puede reconocer esta determinado por la frecuencia de las componentes del vector de luz. Los colores que están en el intervalo del espectro visible van desde el rojo profundo, con una frecuencia de 390×10^{12} cps, al violeta profundo, con una frecuencia de 770×10^{12} cps. Si bien la mayoría de las investigaciones foto elásticas están desarrolladas dentro de la porción visible del espectro, los principios de foto elasticidad son validos dentro de la región infrarroja y ultravioleta de energía radiante.

Cuando el vector de luz esta compuesto de vibraciones A_1, A_2, A_3 , etc., las cuales tienen la misma frecuencia, el color observado por el ojo, en orden de mayor a menor frecuencia, son violeta, índigo, azul, verde, amarillo, anaranjado y rojo. Cuando las componentes del vector de luz están a diferentes frecuencias, los colores se encuentran combinados y el ojo reconoce esta mezcla como luz blanca.

1.3.1.2 LUZ POLARIZADA.

Desde un punto el punto de vista clásico de la física, la luz ordinaria se conforma de ondas electromagnéticas cuyas vibraciones son transversales a la dirección de propagación. Cuando el patrón de vibración de la onda electro magnética muestra alguna preferencia como la dirección transversal de la vibración, entonces la luz se dice que está polarizada. Existen tres diferentes formas de luz polarizada. Nos podemos

referir a estos tres tipos como (1) luz polarizada lineal o plana, (2) luz polarizada circularmente, y (3) luz polarizada elípticamente. El tipo elíptico incluye a otros casos especiales; sin embargo, debido a la importancia de esto en el entendimiento básico a la foto elasticidad, cada tipo de luz polarizada será discutida con detalle.

1. La luz polarizada plana es obtenida por la restricción del vector de luz a la vibración en un plano conocido como el plano de polarización, como se ilustra en la figura 1.3.3.
2. La luz polarizada circularmente se obtiene cuando la punta del vector de luz describe una hélice circular cuando la luz se propaga a través del eje z , como se muestra en la figura 1.3.4.
3. La luz elípticamente polarizada se puede obtener cuando la punta del vector de luz describe un hélice elíptica cuando la luz se propaga bajo el eje z .

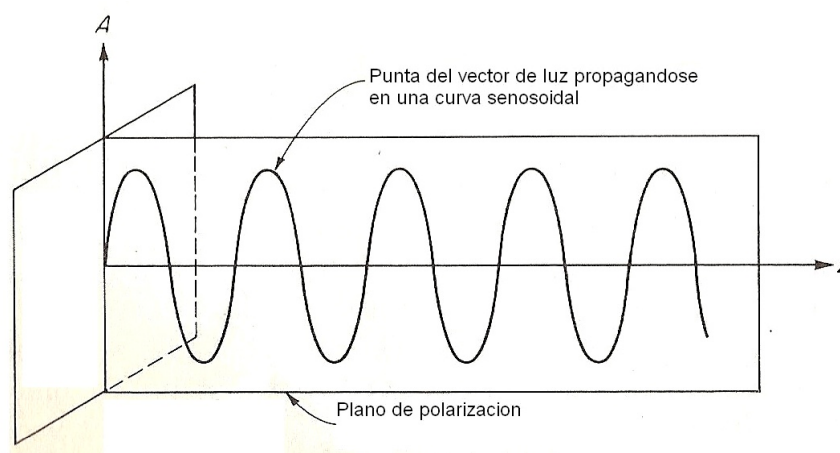


Fig. 1.3.3 Luz polarizada planamente

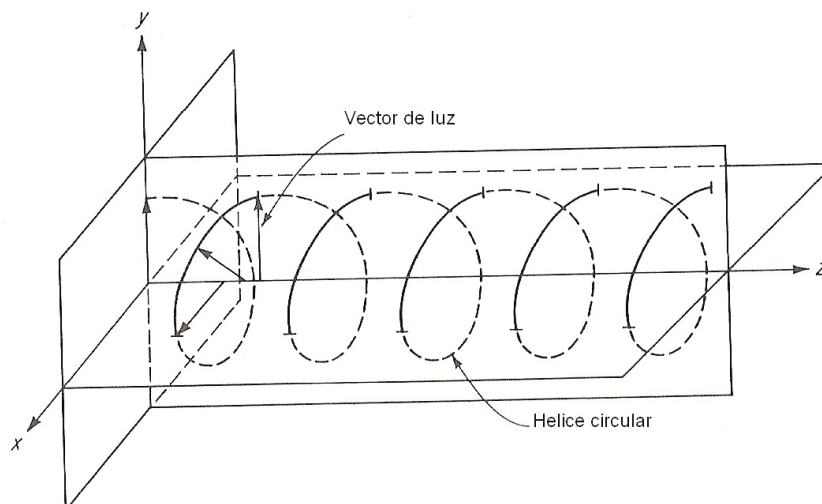


Fig. 1.3.4 Luz polarizada circularmente

En realidad, la polarización elíptica describe las condiciones generales de la luz polarizada, y la luz polarizada plana y circularmente son casos especiales. Considere que el mayor y menor eje de un elipse está denotado por a y b . Cuando $a = b$, la luz polarizada elípticamente se vuelve polarización circular. También, si $a = 0$ y b es finito, la luz polarizada elípticamente cambia a polarización plana, con el plano yz como el plano de polarización. Finalmente, si $b = 0$ y a es un número finito, la luz es polarizada en forma plana, pero ahora con el plano xz como el plano de polarización.

En la práctica, la polarización plana puede producirse con un elemento óptico conocido como un polariscopio plano o lineal. La producción de luz polarizada circularmente o elípticamente requiere el uso de dos elementos ópticos.

1.3.1.3 POLARIZADOR PLANO.

Los polarizadores planos son elementos ópticos que absorben las componentes del vector de luz que no oscilan en la dirección del eje de polarización. Cuando un vector de luz pasa a través de un polarizador plano, este elemento óptico absorbe las componentes del vector de luz que son perpendiculares al eje de polarización y transmite la componente paralela, como se muestra en la figura 1.3.5.

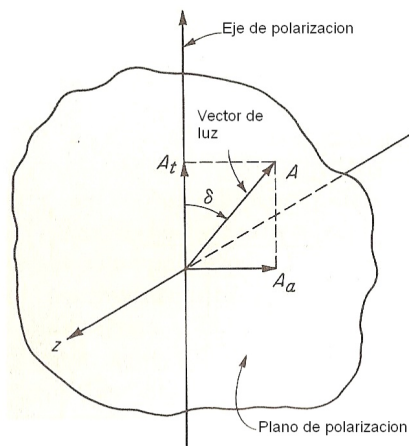


Fig. 1.3.5 Absorción y transmisión características de un polarizador plano

Si el polarizador plano está fijo en cualquier punto a lo largo del eje de z , la ecuación para la amplitud del vector de luz es dada en la ecuación (1.32) y puede ser escrita como:

$$A = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} ct$$

Que puede ser simplificada usando (a) y (b) a

$$A = a \sin 2\pi ft = a \sin \omega t \quad (1.33)$$

Donde $\omega = 2\pi f$, es la frecuencia circular de la luz. La componente del vector de luz que es absorbida y transmitida es:

$$\begin{aligned} A_a &= a \sin \omega t \sin \delta \\ A_t &= a \sin \omega t \cos \delta \end{aligned} \quad (1.34)$$

Donde δ es el ángulo entre el eje de polarización y el vector de luz.

En los primeros días de la foto elasticidad la producción de luz plana polarizada fue un problema difícil, y como consecuencia un gran número de métodos fueron empleados,

entre los cuales estaban reflejar luz con un ángulo de incidencia de 57° , una pila de vidrio, y el prisma de Nicol. Sin embargo estos métodos de producción de luz polarizada plana han sido principalmente desplazados con la llegada de los filtros polaroid. Estos filtros tienen la ventaja de proveer un gran campo de buena luz polarizada a un costo relativamente bajo.

1.3.1.4 PLACA DE ONDAS.

Ciertos materiales tienen la capacidad para descomponer el vector luz en dos componentes ortogonales y, también, también para transmitir cada uno de estos componentes a diferentes velocidades. Un material que tiene esta propiedad se le denomina doblemente reflejante. La placa doblemente reflejante ilustrada en la figura 1.3.6 tiene dos ejes principales marcados como 1 y 2. La transmisión de la luz a lo largo del eje 1 ocurre a una velocidad c_1 y a lo largo del eje 2 a una velocidad c_2 . Como $c_1 > c_2$, el eje 1 a menudo es llamado el eje rápido y el 2 el eje lento.

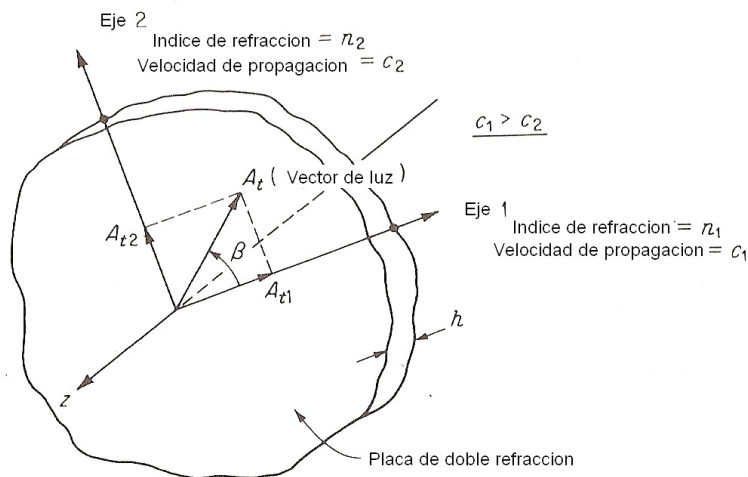


Fig. 1.3.6 Vector de luz polarizado planamente entrando a una placa doblemente refractante

Si esta placa doblemente reflejante se situara en un campo sobre un plano de luz polarizada tal que el vector de luz A_t formara un ángulo β con el eje 1 (el eje rápido), entonces en el momento en que la placa entra y toca la luz, el vector se dividirá en dos componentes A_{t1} y A_{t2} a lo largo de los ejes 1 y 2, respectivamente. Las magnitudes de los componentes individuales de A_{t1} y A_{t2} están dadas por:

$$A_{t1} = A_t \cos \beta = a \cos \delta \sin \omega t \cos \beta = k \sin \omega t \cos \beta \quad (1.35 a)$$

$$A_{t2} = A_t \sin \beta = a \cos \delta \sin \omega t \sin \beta = k \sin \omega t \sin \beta \quad (1.35 b)$$

Donde $k = a \cos \delta$. Las componentes de la luz A_{t1} y A_{t2} viajan a través de la placa con diferentes velocidades c_1 y c_2 respectivamente. Por esta diferencia, las dos componentes surgirán de la placa en diferentes tiempos. En otras palabras, una

componente se ve retardada un periodo de tiempo en comparación con la otra. Este atraso puede ser manejado de manera mas efectiva considerando la fase de cambio relativa entre las dos componentes, como se muestra en la figura 1.3.7. Para obtener esta fase, se considera la retardación angular para cada componente, como se muestra en seguida:

$$\Delta_1 = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_1 - n) \quad (1.36 a)$$

$$\Delta_2 = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_2 - n) \quad (1.36 b)$$

Donde n es el índice de refracción del aire.

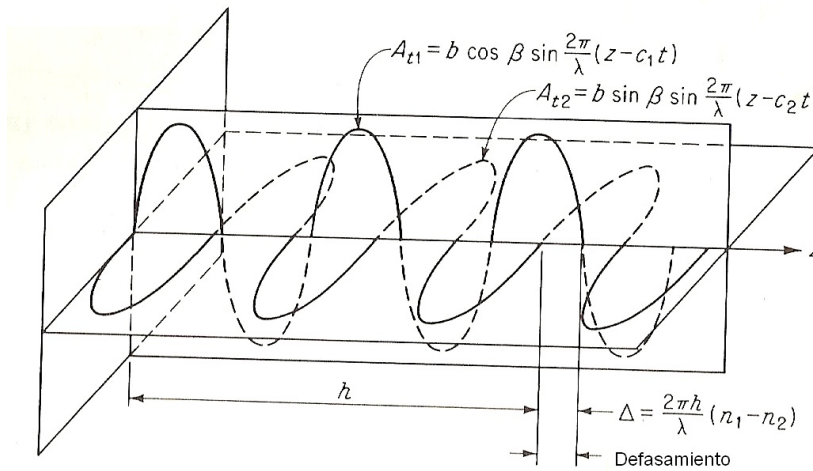


Fig. 1.3.7 Retraso producido por una placa de onda

La diferencia entre $\Delta_1 - \Delta_2$ representa la fase de cambio o la diferencia entre las dos componentes de la luz cuando estas surgen desde la placa de onda. Por lo que.

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_1 - n_2) \quad (1.37)$$

La fase de cambio relativa Δ producida por una placa doblemente reflejante es dependiente del espesor h , del ancho de onda de la luz λ , y de las propiedades de la placa descritas por $(n_1 - n_2)$. Cuando la placa doblemente reflejante es diseñada para dar un retardo angular de $\pi/2$, se le suele llamar como placa de cuarto de onda. Las placas doblemente reflejante que son diseñadas para dar un retardo angular de π y 2π son conocidas como placas de media onda y de onda entera, respectivamente. Cuando se emerge desde una placa de onda general exhibiendo un retraso en Δ , las dos componentes de la luz se describen por estas ecuaciones:

$$A'_{t1} = k \cos \beta \sin(\omega t + \Delta) \quad (1.38 a)$$

$$A'_{t2} = k \sin \beta \sin \omega t \quad (1.38 b)$$

La amplitud del vector de luz producida por estas dos componentes puede ser expresada como:

$$A_t' = \sqrt{A_{t1}'^2 + A_{t2}'^2} = k \sqrt{\sin^2(\omega t + \Delta) \cos^2 \beta + \sin^2 \omega t \sin^2 \beta} \quad (1.39)$$

Así como también, el ángulo que crea el vector de luz emergente con el eje 1 (el eje rápido) esta dado por:

$$\tan \gamma = \frac{A_{t1}'}{A_{t2}'} = \frac{\sin \omega t}{\sin(\omega t + \Delta)} \tan \beta \quad (1.40)$$

Por esto, es claro que tanto la amplitud como la rotación del vector de luz emergente pueden ser controladas por una placa de onda. Los factores que los controlan son la fase relativa de diferencia Δ y la orientación de ángulo β .

1.3.1.5 ACONDICIONAMIENTO DE LUZ PARA UNA SERIE DE COMBINACIONES DE UN POLARIZADOR LINEAL Y UNA PLACA DE ONDA.

Las ecuaciones para la amplitud y la dirección del vector de luz que emergen de una serie de combinaciones de polarizadores lineales y placas de ondas han sido presentadas anteriormente [ecuación (1.39) y (1.40)]. La luz que emerge de esta combinación de elementos ópticos es siempre polarizada; sin embargo, el tipo de polarización puede ser plana, circular, o elíptica. Los factores que controlan el tipo de polarización de la luz producida por estas combinaciones son las diferentes fases de Δ impuestas por la placa de onda y el ángulo de orientación β . Los tres casos bien definidos que existen son:

1. LUZ POLARIZADA PLANA

Si el ángulo β es colocado en cero y la retardación relativa Δ no esta restringida en ningún sentido, Las ecuaciones de amplitud y dirección del vector emergente de luz, [ecuaciones (1.39) y (1.40)], pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} A_t' &= k \sin(\omega t + \Delta) \\ \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Como $\lambda = 0$, el vector de luz no es girado cuando pasa por la placa de onda; por tal motivo la luz que emerge es aun polarizada en forma plana. La placa de onda en esta

circunstancia no influye a la luz excepto que se retarda en un ángulo igual a Δ . Resultados idénticos son obtenidos al poner $\beta = \pi/2$.

2. LUZ POLARIZADA CIRCULARMENTE

Si una placa de onda es escogida de tal forma que $\Delta = \pi/2$ y β es colocado en $\pi/4$, Las ecuaciones de amplitud del vector de luz emergente estarán dadas por:

$$A'_t = \frac{\sqrt{2}}{2} k \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = \frac{\sqrt{2}}{2} k \quad (1.42)$$

Así pues, el vector de luz que emerge tiene una constante de amplitud. Empleando la ecuación (1.42) es posible mostrar que:

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan \omega t \\ \gamma &= \omega t \end{aligned} \quad (1.43)$$

La ecuación (1.43) muestra que el ángulo de salida incrementa con t . Por su parte la ecuación (1.42) indica que la amplitud del vector de luz es una constante independiente de t . Por esta razón la punta del vector de luz forma un círculo. Como la luz se propaga a lo largo del eje z , este círculo es convertido en una hélice circular con el eje coincidiendo con z .

3. LUZ POLARIZADA ELIPTICAMENTE

Si un cuarto de placa de onda ($\Delta = \pi/2$) es elegida y β es colocada a cualquier ángulo exceptuando $0, \pi/4, \pi/2$, o múltiplos de ellos, por medio de la ecuación (1.39) el vector de luz emergente tendrá una amplitud que estará dado por

$$A'_t = k \sqrt{\cos^2 \omega t \cos^2 \beta + \sin^2 \omega t \sin^2 \beta} \quad (1.44 \text{ a})$$

Y el ángulo del vector que emerge estará dado por

$$\tan \gamma = \tan \omega t \tan \beta \quad (1.44 \text{ b})$$

1.3.1.6 ARREGLO DE ELEMENTOS ÓPTICOS EN UN POLARISCOPIO.

A. POLARISCOPIO PLANO

El polariscopio plano es el sistema óptico más simple usado en fotoelasticidad, consiste en dos polarizadores lineales y una fuente de luz organizadas en la forma en que la figura 1.3.8a lo presenta.

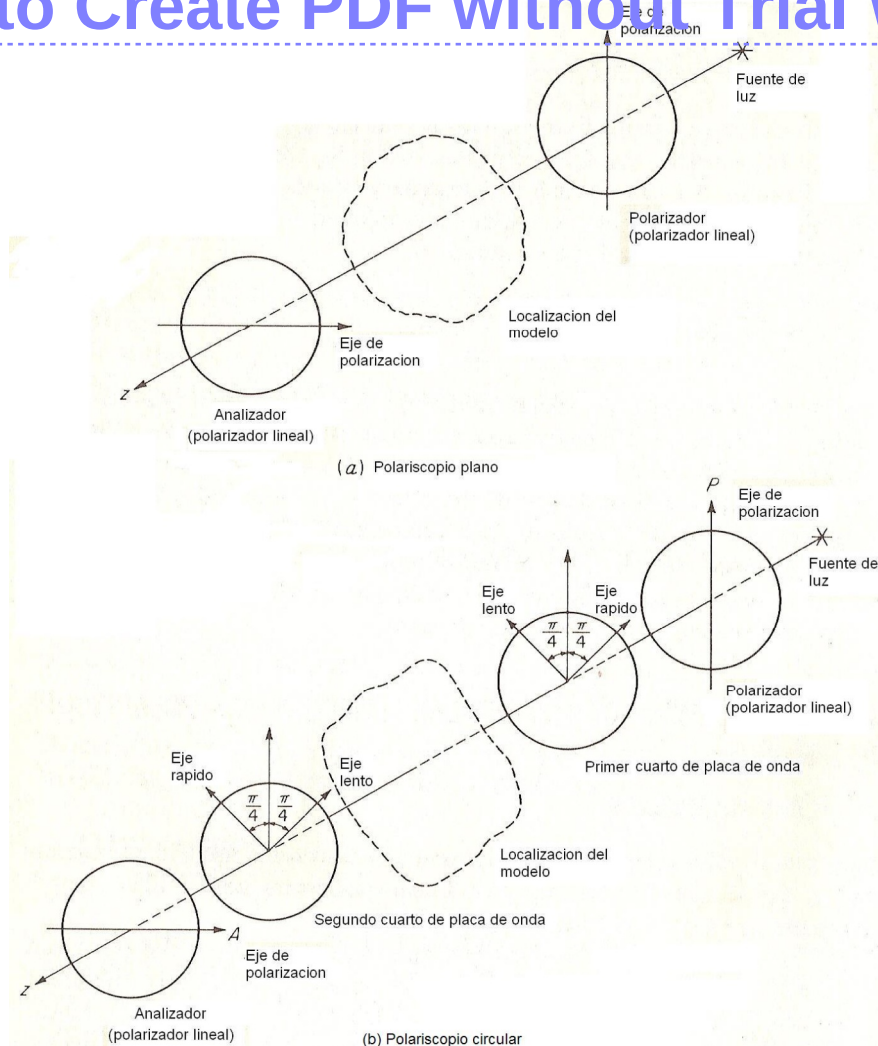


Fig. 1.3.8 Arreglo de elementos ópticos

El polarizador lineal más cercano a la fuente de luz es llamado el polarizador, mientras que el segundo polarizador lineal es conocido como el analizador. En el polariscopio plano los dos ejes de polarización están siempre cruzados, por eso ninguna luz es transmitida a través del analizador, y este sistema óptico produce un campo oscuro. Cuando opera el sistema un modelo fotoelástico es insertado entre los elementos cruzados y vistos a través del analizador.

B. POLARISCOPIO CIRCULAR

Como su nombre lo dice, el polariscopio circular emplea luz polarizada circularmente; de tal forma que, el aparato fotoelástico contiene cuatro elementos ópticos y una fuente de luz, la cual se ilustra en la figura 1.3.8b.

El primer elemento seguido de la fuente de luz es el polarizador. Este convierte la luz ordinaria en luz de polarización plana. El segundo elemento es un cuarto de placa de onda situado a un ángulo $\beta = \pi/4$ al plano de polarización. Este cuarto de placa de onda convierte la luz planamente polarizada en luz de polarización circular. El segundo

cuarto de placa de onda es situado con el eje más rápido paralelo al eje lento del primer cuarto de placa de onda. El propósito de este elemento es convertir la luz circularmente polarizada en luz planamente polarizada, la cual esta otra vez vibrando en el plano vertical. El último elemento es el analizador, que esta en el eje de polarización en el plano horizontal y su propósito es apagar la luz. Esta serie de elementos ópticos constituyen un arreglo estándar para un polariscopio circular, y esto produce un campo oscuro. En realidad es posible tener cuatro arreglos de elementos ópticos en el polariscopio, dependiendo de si el polarizador y el cuarto de placa de onda esta cruzado o paralelo. Estos cuatro arreglos ópticos están descritos en la tabla 1.3.1.

Tabla 1.3.1 Arreglo de elementos en un polariscopio circular.

Arreglo	Placas de Cuarto de Onda	Polarizador y Analizador	Campo
A*	Cruzado	Cruzado	Oscuro
B	Cruzado	Paralelo	Luminoso
C	Paralelo	Cruzado	Luminoso
D	Paralelo	Paralelo	Oscuro

1.3.2 TEORIO DE FOTOELASTICIDAD

1.3.2.1 LEY DEL ESFUERZO ÓPTICO EN DOS DIMENSIONES PARA UNA INCIDENCIA NORMAL.

Se considera un modelo fotoelástico bidimensional maquinado a partir de una lámina apropiada de plástico transparente. Inicialmente, el modelo se encuentra en un estado libre de esfuerzos y muestra un índice de refracción n_0 el cual es el mismo en todos los puntos y todos los planos de modelo. Sin embargo, cuando un sistema de cargas es colocado en el modelo, un estado bidimensional de esfuerzos es inducido, el cual cambia sus propiedades ópticas. El modelo se vuelve doblemente reflejante y muestra propiedades semejantes a las de las placas de onda, descritas en los párrafos anteriores. Los ejes principales de esfuerzos en cualquier punto en el modelo se vuelven el eje rápido y el eje lento de la placa; por esta razón es aparente que los índices de refracción del modelo hayan cambiado en relación al sistema de esfuerzos aplicado al mismo. Esta es la propiedad óptica tan inusual en la cual los fundamentos de la foto elasticidad están basados. El polariscopio es simplemente un instrumento óptico que mide los cambios del índice de refracción.

La teoría que relaciona los cambios del índice de refracción al estado de esfuerzos es debida a Maxwell, quien reporto este fenómeno en 1853. Maxwell notó que los cambios en lo índices de refracción eran linealmente proporcionales a los esfuerzos inducidos en el modelo y dedujo estas relaciones:

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &= c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 \\ n_2 - n_0 &= c_1 \sigma_2 + c_2 \sigma_1 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Donde n_0 es el índice de refracción del modelo en el estado libre de esfuerzos; n_1 y n_2 son los índices de refracción a lo largo de los ejes principales asociados con σ_1 y σ_2 , respectivamente, c_1 y c_2 son los coeficientes de esfuerzos ópticos.

Si las ecuaciones (1.45) presentadas anteriormente son restadas para eliminar n_0 tenemos

$$n_1 - n_2 = (c_1 - c_2)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.46)$$

Recordando que un modelo fotoelástico con esfuerzos se comporta temporalmente como una placa de onda con las propiedades ópticas que fueron descritas por la diferencia de los índices de refracción $n_1 - n_2$ en la ecuación (1.41) la ecuación (1.46) se convierte en:

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (c_1 - c_2)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.47)$$

Si el coeficiente de esfuerzos ópticos relativos $c_1 - c_2$ es igualado a c , la retardación relativa Δ esta dada por:

$$\Delta = \frac{2\pi hc}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.48)$$

Donde c es expresada en términos de Brewsters ($1 \text{ Brewster} = 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dina}$). La ecuación (1.48) es la notación clásica de la ley de esfuerzos ópticos. La retardación relativa Δ es linealmente proporcional a la diferencia entre los esfuerzos principales $(\sigma_1 - \sigma_2)$. El coeficiente de esfuerzo relativo c es una propiedad del material que depende de la selección del material empleado en la fabricación del modelo foto elástico. Así como también, el atraso relativo es linealmente proporcional al espesor del modelo h e inversamente proporcional a la longitud de onda de la luz que pasa a través del modelo.

Las unidades asociadas con el Brewsters no son comúnmente empleadas en la práctica de la ingeniería, es conveniente reescribir la ecuación (1.48) y redefinir ciertas cantidades, como se muestra enseguida

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N f_\sigma}{h} \quad (1.49)$$

Donde $N = \Delta/2\pi$ es el retraso relativo en términos de un ciclo completo de atraso 2π , $f_\sigma = \lambda/c$ es el valor de la franja del material en psi-in y h es el espesor del modelo en pulgadas. Es inmediatamente apreciable que de la ecuación (1.49) la diferencia de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ en un modelo bidimensional puede ser determinada si el atraso relativo N puede ser medido, y si el valor de la franja del material puede ser establecido por

mediante una calibración. De hecho, la función de polariscopio es determinar el valor de N en cada punto del modelo.

Si un modelo foto elástico muestra un comportamiento completamente elástico, la diferencia en las principales deformaciones $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ también puede medirse estableciéndole orden de la franja N . Las ecuaciones para la de deformación están dadas por:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad (1.50 \text{ a})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \quad (1.50 \text{ b})$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad (1.51)$$

Y sustituyendo la ecuación (1.51) en la (1.49) se obtiene

$$\frac{Nf_\sigma}{h} = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (1.52)$$

Si la ecuación anterior la reescribimos como

$$\frac{Nf_\varepsilon}{h} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (1.53)$$

Es claro que tenemos que

$$f_\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} f_\sigma \quad (1.54)$$

Donde f_ε es el valor de la franja del material expresada en términos de deformación. Para un modelo foto elástico perfectamente elástico, la determinación de N es suficiente para establecer ambas $(\sigma_1 - \sigma_2)$ y $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ si tres de estas propiedades del material E, ν, f_σ o f_ε son conocidas. Sin embargo, muchos materiales fotoelásticos tienen propiedades viscoelásticas, y la ecuación (1.54) no siempre es válida.

1.3.2.2 EFECTOS DE UN MODELO SOMETIDO A ESFUERZOS EN UN POLARISCOPIO PLANO.

Se considera primero el caso de modelo sometido a esfuerzos dentro de un campo de un polariscopio plano que coincide de forma normal con el eje del polariscopio, como se ilustra en la figura 1.3.9.

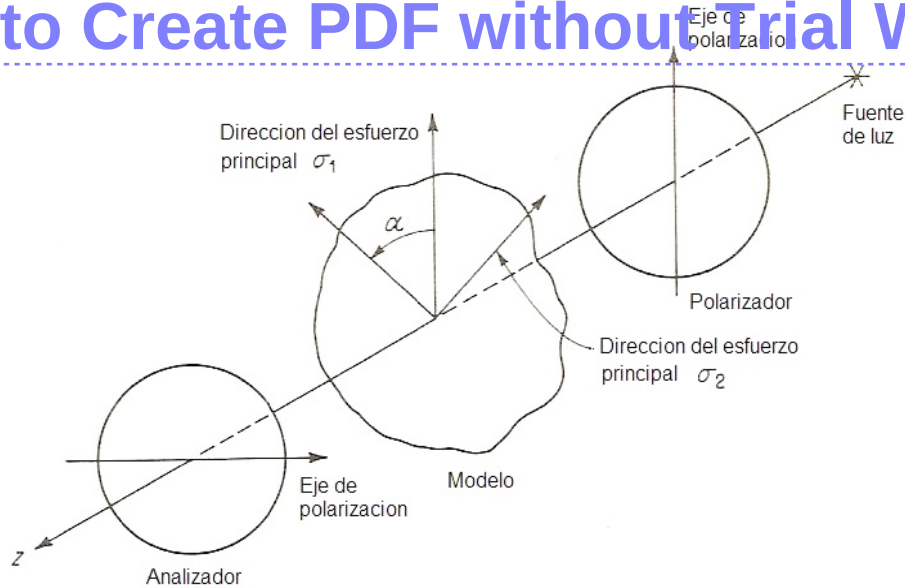


Fig. 1.3.9 Modelo fotoelástico en un plano polarizado.

Se debe notar que la dirección del esfuerzo principal en este punto del modelo esta bajo la consideración de que crea un ángulo α con lo ejes de polarización del polariscopio. A continuación, se considera que la luz emerge del polarizador y se propaga a través del modelo y el analizador. De acuerdo De acuerdo con la ecuación (1.33), la luz emerge desde el polarizador en un estado de plano polarizado, vibrando en el plano vertical con una amplitud que varia con el tiempo de la siguiente forma:

$$A = k \sin \omega t$$

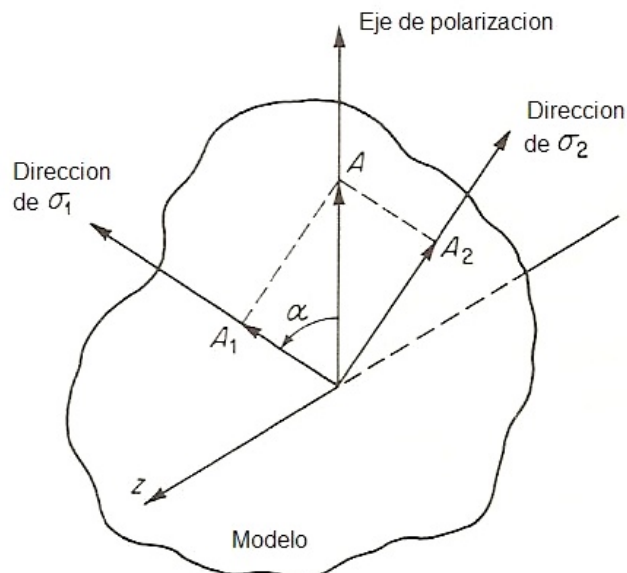


Fig. 1.3.10 Acercamiento de los vectores de luz cuando entran a un modelo en un plano polarizado.

Esta luz del plano polarizado entra en el modelo como se muestra en la figura 1.3.10. Desde que el modelo sometido a esfuerzos muestra las propiedades ópticas de una placa de onda, el vector luz que colisiona puede resolverse en sus dos componentes A_1 y A_2 como se muestra a continuación:

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

$$\begin{aligned} A_1 &= k \sin \phi \cos \alpha \\ A_2 &= k \sin \phi \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.55)$$

Estas dos componentes del vector de luz se propagan a través del modelo sometido a esfuerzos a diferentes velocidades, y como consecuencia las dos componentes se encuentran fuera de fase cuando emergen del modelo. La diferencia relativa entre las dos componentes esta dada por la ecuación (1.49) como:

$$\Delta = 2\pi N = \frac{h}{f_\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.56)$$

Si esta fase relativa es dividida igualmente entre las dos componentes A_1 y A_2 ($\Delta/2$ sumado a la componente A_1 y restando $\Delta/2$ a la componente A_2), las amplitudes de las componentes del vector de luz que emergen desde el modelo se vuelven:

$$\begin{aligned} A'_1 &= k \cos \alpha \sin \left(\omega t + \frac{\Delta}{2} \right) \\ A'_2 &= k \sin \alpha \sin \left(\omega t - \frac{\Delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Luego las componentes A'_1 y A'_2 se propagan fuera de fase por un ángulo Δ hasta que alcanzan el analizador. Estas entran en el analizador de la manera mostrada en la figura 1.3.11.

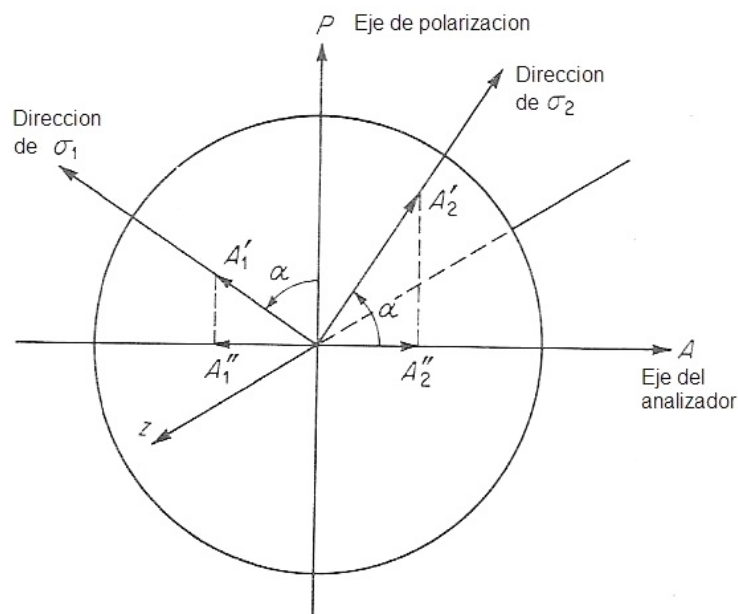


Fig. 1.3.11 Componentes del vector de luz que son transmitidas a través del analizador de un plano polarizado

Las componentes de la luz A'_1 y A'_2 son resueltas cuando entran al analizador como componentes horizontales, A''_1 y A''_2 como componentes verticales. Desde que la componente vertical se absorbe por causa de las características del polarizador lineal del plato analizador, estas no fueron mostradas en la figura 1.3.11 Las componentes

horizontales de la luz transmitida a través del analizador es superpuesta y resulta en un vector de luz emergente A con su amplitud dado por:

$$A = A_2'' - A_1'' = A_2' \cos \alpha - A_1' \sin \alpha \quad (1.58)$$

Substituyendo la ecuación, (1.57) en (1.58) hace claro que

$$A = k \sin \alpha \cos \alpha \left[\sin \left(\omega t - \frac{\Delta}{2} \right) - \sin \left(\omega t + \frac{\Delta}{2} \right) \right] \quad (1.59)$$

A través del uso de identidades trigonométricas la ecuación (1.59) se reduce a:

$$A = -k \sin 2\alpha \cos \omega t \sin \frac{\Delta}{2} \quad (1.60)$$

La intensidad de la luz como la percibe el ojo humano es proporcional al cuadrado de la amplitud del vector de luz emergente del analizador; por esta razón; la intensidad de la luz emergente I en este punto del modelo se da por:

$$I = K \sin^2 2\alpha \cos^2 \frac{\Delta}{2} \cos^2 \omega t \quad (1.61)$$

Examinando la ecuación (1.61) podemos observar que la extinción (que es, $I = 0$) puede ser alcanzada de tres diferentes maneras:

- CASO 1: EFECTOS POR FRECUENCIA

Cuando $\omega t = \left[(2n+1)\pi \right] / 2$, donde $n = 0, 1, 2$, etc., $\cos^2 \omega t = 0$ y la intensidad I se vuelve 0, produciendo una condición de extinción. Sin embargo, la frecuencia circular ω es tan alta (de la magnitud de 10^{15} rad/seg) que el ojo o cualquier otro tipo de equipo fotográfico de alta velocidad existente no puede grabar esta extinción periódica. Por consecuencia para aplicaciones estáticas foto elásticas este efecto puede ser ignorado por el completo y la ecuación (1.61) puede ser escrita como:

$$I = K \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (1.62)$$

Este efecto puede ser considerado en la determinación de la frecuencia dinámica de respuesta del polariscopio cuando es empleado en la solución de problemas de impacto. Actualmente, la respuesta dinámica de un polariscopio es extremadamente alta (del orden de 10^{12} cps), y a la fecha ningún problema de esfuerzo dinámico ha podido ser hecho donde la frecuencia de respuesta del polariscopio se ha encontrado que es inadecuada. En vez, de la aplicación de foto elasticidad dinámica, los problemas

encontrados son asociados en cargar el modelo grabando el patrón de franja, y seleccionando un modelo con un material adecuado.

- CASO 2: EFECTOS POR LAS DIRECCIONES DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES.

Cuando $2\alpha = n\pi$, donde $n = 0, 1, 2, 3$, etc., $\sin^2 2\alpha = 0$ y la intensidad I tiende a cero, produciendo una condición de extinción. Este hecho implica que cuando $\alpha = 0, \pi/2$, o un múltiplo exacto de $\pi/2$, cualquiera de las dos direcciones principales de σ_1 o σ_2 coinciden con el eje del polarizador. Desde que este análisis puede ser extendido para cubrir cada punto en el modelo, todos los puntos en el modelo en donde la extinción ocurre debido a este efecto pueden ser determinados. Cuando el modelo completo es visto, el resultado del patrón de franjas donde son centrados los puntos en los cuales las direcciones de los esfuerzos principales (ya sea σ_1 o σ_2) coinciden con los ejes del polarizador. El patrón de franja producido por el término del $\sin^2 2\alpha$ en las ecuaciones (1.61) o (1.62) es conocido como el patrón de franja isoclinas. Este patrón de franjas isoclinas es empleado para determinar las direcciones de los esfuerzos principales en un modelo foto elástico. Estos representan un importante segmento de los datos que pueden ser obtenidos en un análisis foto elástico.

- CASO 3: EFECTO DE LA DIFERENCIA PRINCIPAL DE ESFUERZOS.

Cuando $\Delta/2 = n\pi$, donde $n = 0, 1, 2, 3$, etc., $\sin^2 (\Delta/2) = 0$ y la intensidad I tiende a cero, produciendo una condición de extinción. Por consecuencia, es claro que cuando $\Delta/2\pi = n$, la extinción ocurre.

Por la ecuación (1.49) y las antecedentes se puede mostrar que

$$\frac{\Delta}{2\pi} = n = N = \frac{h}{f_\sigma}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.63)$$

Cuando la diferencia principal de esfuerzos es tal que

$$\frac{h}{f_\sigma}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0, 1, 2, 3 \quad (1.64)$$

etc., las condiciones para la extinción están satisfechas. El orden de la extinción ($N = 0, 1, 2, 3$, etc.) es controlado por la magnitud de la diferencia de los esfuerzos principales, por el espesor del modelo y por la sensibilidad del material foto elástico, como el denotado por el valor de f_σ .

En general, la diferencia principal de esfuerzos ($\sigma_1 - \sigma_2$) y la dirección del esfuerzo principal varían desde un punto a otro en el modelo foto elástico. El análisis presentado

proviamente ha tratado con la luz pasando a través de un solo punto en el modelo. Si el análisis se extiende para cubrir cada punto y si los resultados de todos los puntos son combinados para obtener un campo completamente cubierto, las líneas de extinción pueden ser obtenidas donde $\sigma_1 - \sigma_2 = Nf_\sigma/h$, con N variando como 0, 1, 2, 3, etc., y donde cualquiera de las dos direcciones principales del esfuerzo coinciden con el eje de polarización del polarizador. Estos dos estados de las líneas de extinción son llamados franja y los dos diferentes patrones de franjas son formados y superpuestos uno sobre el otro. Las líneas de este primer tipo, se conocen como franjas isocromáticas, son líneas a lo largo en las cuales $(\sigma_1 - \sigma_2)$ equivale a una constante dependiendo del orden de N sobre la franja. El segundo tipo de patrón de franja que esta relacionado a la dirección de los esfuerzos principales es llamado patrón de franja isoclina. Desafortunadamente estos dos patrones de franjas son superpuestos, como se muestra en la figura 1.3.12, y su separación requiere técnicas especiales.

Teóricamente se ha establecido que las franjas isoclinas e isocromáticas deben ser de un ancho cero; sin embargo, la fotografía presentada en la figura 1.3.12 muestra las franjas como bandas que tienen un ancho considerable. Además, un examen visual directo del patrón de franja en el polariscopio mostrará de nuevo que las franjas son bandas y no líneas.

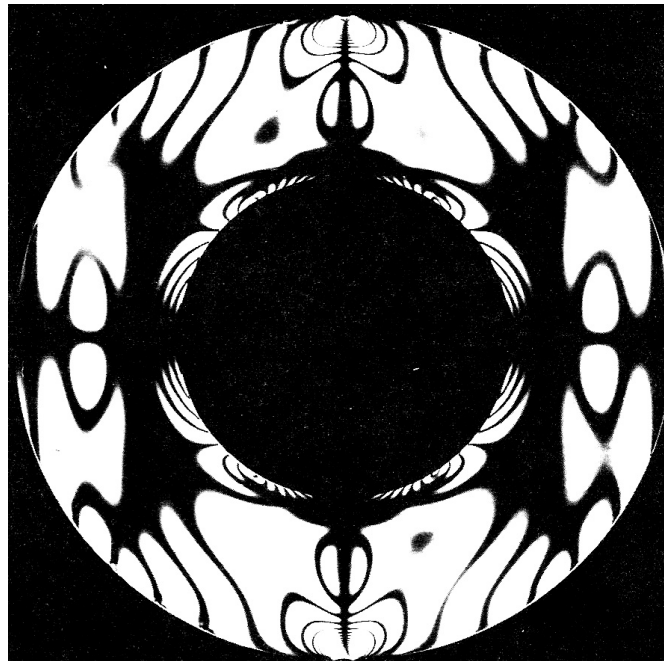


Fig. 1.3.12 Patrón superpuesto de franjas isocromáticas e isoclinas

Estas observaciones no implican que la derivación presentada sea inexacta, por que el ancho de la franja se debe a las características de percepción del grabado tanto del ojo como de la película fotográfica. Si la intensidad de la luz emerge desde el analizador de donde fue grabado usando una celada foto elástica adecuada, las franjas mostraran una intensidad mínima en un punto cerca del centro en el cual coincidirá con la línea exacta de extinción.

1.3.2.2 EFECTOS DE UN MODELO SOMETIDO A ESFUERZOS EN UN POLARISCOPIO PLANO (CAMPO OSCURO - ARREGLO A).

Cuando un modelo foto elástico sometido a esfuerzos es localizado en un campo de un polariscopio plano con su coincidencia normal con el eje z del polariscopio, los efectos difieren un poco de aquellos obtenidos en un polariscopio plano. El uso de un polariscopio circular elimina el patrón de franjas isoclinas mientras mantiene el patrón de franjas isocromáticas y como resultado el polariscopio circular es mas comúnmente usado que el plano.

Para ilustrar este efecto, considere el modelo sometido a esfuerzos en un polariscopio circular mostrado en la figura 1.3.13.

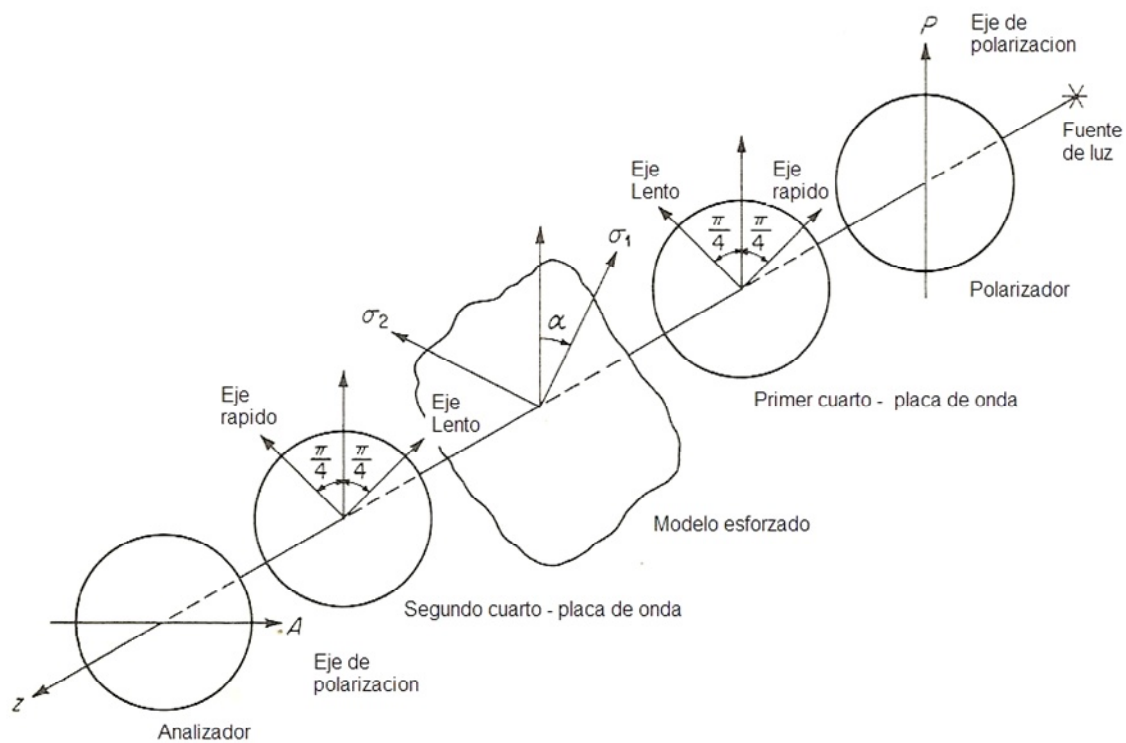


Fig. 1.3.13 Modelo fotoelástico en un polarizador circular,

Empleando las ecuaciones (1.38), la luz emergente del primer cuadrante de la placa de onda puede ser expresada como:

$$A'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} k \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \omega t \quad (\text{a lo largo de eje rápido})$$

$$A'_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2} k \sin \omega t \quad (\text{a lo largo de eje lento})$$
(a)

Como se mostró previamente, este vector luz como emerge del primer cuadrante de la placa de onda es circularmente polarizado. El vector luz obtenido combinando las componentes A'_1 y A'_2 son de amplitud constante, y su punta es barrida a una hélice circular que se propaga abajo del eje del polariscopio.

En este análisis las componentes se han tratado de manera individual mientras pasan a través de los elementos que sobran en el polariscopio.

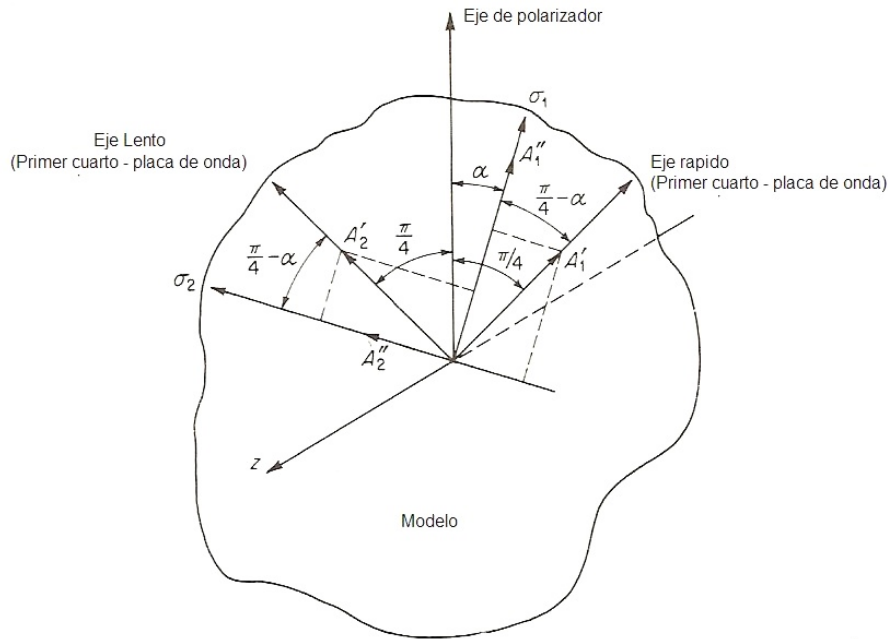


Fig. 1.3.14 Componentes del vector de luz

Las componentes de la luz se propagan desde el primer cuadrante de la placa de onda y entran al modelo de la manera ilustrada en la figura 1.3.14. Las componentes A'_1 y A'_2 se resuelven de manera adicional cuando chocan sobre el modelo dentro de dos nuevas componentes A''_1 y A''_2 a lo largo de los ejes σ_1 y σ_2 . Las componentes A''_1 y A''_2 pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} A''_1 &= A'_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + A'_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ A''_2 &= A'_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - A'_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \end{aligned} \quad (b)$$

Al combinar la ecuaciones (a) y (b)

$$\begin{aligned} A''_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos \omega t \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin \omega t \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \\ A''_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\sin \omega t \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos \omega t \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \end{aligned} \quad (c)$$

Desde que el modelo sometido a esfuerzos tiene las características de una placa de onda, las dos componentes A''_1 y A''_2 se propagan a través del modelo con diferentes velocidades y emergen fuera de fase por una cantidad relativa Δ que es proporcional a la diferencia de esfuerzos $(\sigma_1 - \sigma_2)$, como lo indica la ecuación (1.56). Si esta

a la componente A_1 y $-\Delta/2$ aplicada a la componente A_2 ; entonces las amplitudes de estas dos componentes de donde emerge del modelo se vuelve

(d)

La luz que emerge del modelo se propaga al segundo cuadrante de la placa de onda y entra en ella de acuerdo al diagrama mostrado en la figura 1.3.15.



Fig. 1.3.15 Acercamiento de las componentes del vector de luz

Las componentes A_1''' y A_2''' se resuelven dentro de los ejes rápido y lento del segundo cuarto de la placa de onda y se denotan como A_1^{iv} y A_2^{iv} . Estas pueden ser descritas por las siguientes ecuaciones:

(e)

Y sustituyendo las ecuaciones (d) en las (e)

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

$$A_1^{iv} = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\begin{aligned} & \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ & + \cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \end{aligned} \right] \quad (f)$$

$$A_2^{iv} = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\begin{aligned} & \cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ & - \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \end{aligned} \right]$$

Se asume que el cambio en la fase relativa $\pi/2$ que ocurre cuando la luz pasa por a través de este cuarto de placa de onda es aplicado en un sentido positivo a la componente A_1^{iv} , entonces los componentes de luz emergentes A_1^v y A_2^v pueden expresarse como:

$$A_1^v = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\begin{aligned} & \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ & - \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \end{aligned} \right] \quad 1.65)$$

$$A_2^v = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\begin{aligned} & \cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ & - \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \end{aligned} \right]$$

Finalmente, la luz entra al analizador como se muestra en la figura 1.3.16. Los componentes de la luz A_1^v y A_2^v después son resueltas en componentes verticales y horizontales.

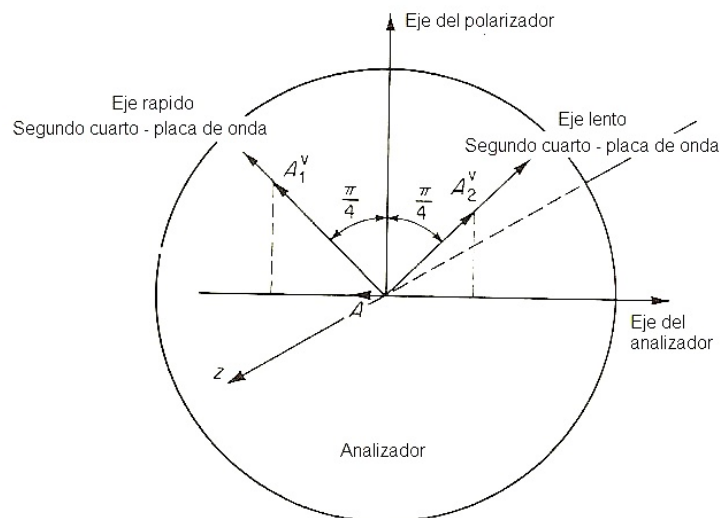


Fig. 1.3.16 Componentes del vector de luz que son transmitidas a través del analizador

Las componentes verticales son absorbidas por el analizador y las horizontales son transmitidas para dar el vector luz A .

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

Substituyendo la ecuación (1.65) en (1.66) expandiéndola y simplificando se obtiene.

$$A = \frac{1}{2} k \sin \frac{\Delta}{2} [\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha + \omega t)] \quad (1.67)$$

2π La intensidad I de la luz es proporcional al cuadrado de la amplitud; por lo tanto

$$I = K \sin^2 \frac{\Delta}{2} [\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha + \omega t)]^2 \quad (1.68)$$

Observando la ecuación (1.68) encontramos que la extinción (que es $I = 0$) es posible solo cuando el $\sin^2(\Delta/2) = 0$ o que $[\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha + \omega t)]^2 = 0$. El término $[\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha + \omega t)]^2$ no produce una extinción que pueda ser grabada, debido a que la frecuencia angular de la luz ω se encuentra más allá del intervalo de cualquier equipo de grabación. Por lo tanto para fines prácticos este término puede ser ignorado, y la ecuación (1.77) puede ser escrita como:

$$I = K \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (1.69)$$

En este punto se debe notar que las direcciones de los esfuerzos no producen extinción, desde que el ángulo α es combinado con el término ωt en los argumentos de las funciones seno y coseno. De hecho, el polariscopio circular es empleado solamente para eliminar el patrón de franjas isoclinas desde el superpuesto patrón de franja isoclina- isocromático obtenido con el polariscopio plano.

Ahora retomando el término $\sin^2(\Delta/2)$ de la ecuación (1.69), es claro que $I = 0$ cuando $\sin^2(\Delta/2) = 0$. Este hecho implica que la extinción solo es posible cuando $\Delta/2 = n\pi$, donde $n = 0, 1, 2, 3$, etc. Es aparente que este tipo de extinción es idéntica a la que se describe en la sección 1.3.4.1 del caso 3. La localización de estos puntos de extinción produce un patrón de franjas conocido como isocromáticas. Un ejemplo de este patrón de franjas es mostrado en la figura 1.3.17.

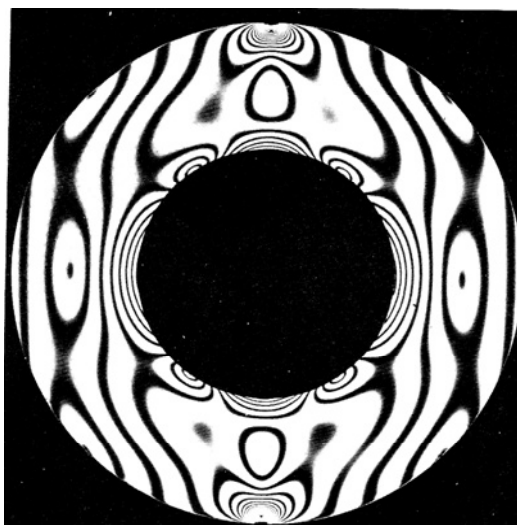


Fig. 1.3.17 Patrón de franjas isocromáticas en campo oscuro.

1.3.2.4 EFECTOS DE UN MODELO SOMETIDO A ESFUERZOS EN UN POLARISCOPIO (CAMPO LUMINOSO - ARREGLO B).

Un polariscopio circular es usualmente empleado con cualquiera de los arreglos de campo ya sea el oscuro o el luminoso (A y B). El polariscopio puede convertirse desde el campo oscuro (arreglo A) al luminoso (arreglo B) simplemente rotando el analizador 90° . La ventaja de utilizar ambas es que puede obtenerse el doble de información o mucho más en la determinación del campo completo de $\sigma_1 - \sigma_2$. Debemos recordar de la sección 1.3.2.2 que el número de franjas N coinciden con n , y tanto como las franjas son contadas en la secuencia 0, 1, 2, 3, etc. Con el arreglo de campo luminoso del polariscopio, n y N no coincidirán. En lugar, $N = \frac{1}{2} + n$, por lo tanto con el arreglo de campo luminoso el orden de las franjas son contados $\frac{1}{2}$, $1 \frac{1}{2}$, $2 \frac{1}{2}$, $3 \frac{1}{2}$, etc.

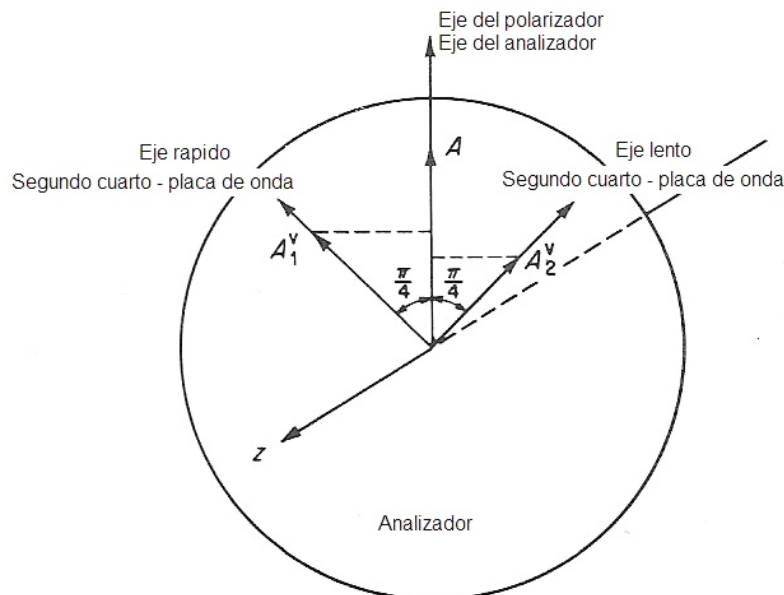


Fig. 1.3.18 Componentes del vector de luz que son transmitidos a través del analizador

Para establecer el efecto de un modelo sometido a esfuerzos en el campo luminoso de un polariscopio circular, solo es necesario considerar los componentes de la luz A_1^v y A_2^v cuando entran al analizador en su nueva orientación como se indica en la figura 1.3.18. Las componentes horizontales de A_1^v y A_2^v serán absorbidas, mientras la componente vertical será transmitida tanto como la luz se propague a través del analizador. Por lo tanto el vector de luz emergente estará en el plano vertical, con una amplitud dada por:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} (A_1^v + A_2^v) \quad (1.70)$$

Substituyendo las ecuaciones (1.65) en (1.70) expandiendo y simplificando

$$A = 2k \cos \omega t \cos \frac{\Delta}{2} \quad (1.71)$$

Y una intensidad de

$$I = K \cos^2 \omega t \cos^2 \frac{\Delta}{2}$$

De nueva cuenta el término del coseno que contiene ω en el argumento puede ser despreciado por las razones anteriormente citadas; por lo tanto la ecuación de intensidad puede ser rescrita como:

$$I = K \cos^2 \frac{\Delta}{2} \quad (1.72)$$

La ecuación (1.72) muestra la extinción ($I = 0$) ocurrirá cuando

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{1+2n}{2} \pi \quad \text{Para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Pero por la ecuación (1.49)

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{1}{2} + n \quad (1.73)$$

La cual implica que el orden de la primera franja que se observa en el campo luminoso del polariscopio es $\frac{1}{2}$, la cual corresponde a $n = 0$. Un ejemplo de un patrón de franja isocromática de campo luminoso es presentado en la figura 1.3.19.

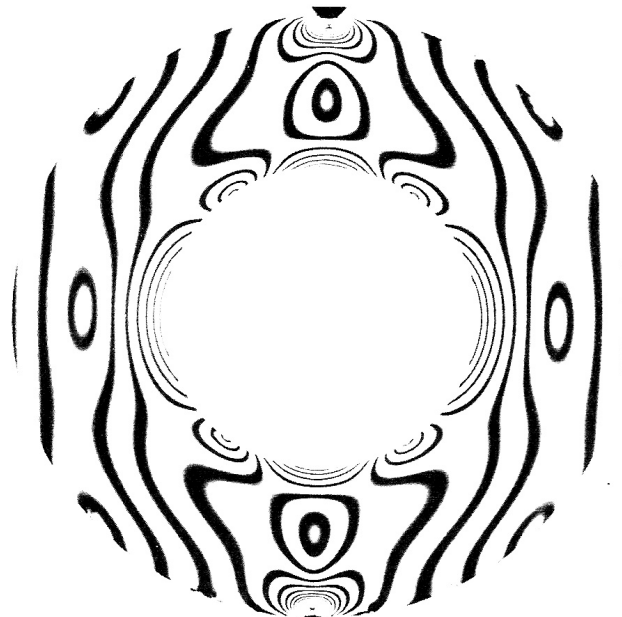


Fig. 1.3.19 Patrón de franjas isocromático en campo claro.

Si se usa un polariscopio circular ya sea con en el campo oscuro o en el campo luminoso, es posible obtener dos fotografías de la resultante del patrón de franjas isocromáticas. Los datos así obtenidos dará una completa representación del campo y el orden de las franjas más cercanas al orden de $\frac{1}{2}$. Interpolando entre franjas a menudo permite un estimado del orden de la franjas un ± 0.1 , lo cual resulta en acercase de una manera muy exacta al esfuerzo principal aproximadamente $\pm 0.1 f_{\sigma} / h$.

1.3.3 TÉCNICAS DE ANÁLISIS.

1.3.3.1 PATRÓN DE FRANJAS ISOCROMÁTICAS.

En un análisis foto elástico convencional una vez que el modelo se fabrica, se le colocan las cargas, y es observado en un polariscopio, los patrones de franjas son examinados y fotografiados, el siguiente paso en la investigación foto elástica es la interpretación de los patrones de franjas, que en la realidad representan los datos de prueba.

El patrón de franja isocromático obtenido en un análisis de un modelo, da las líneas a lo largo de las cuales la diferencia de esfuerzos principales $(\sigma_1 - \sigma_2)$ es igual a una constante y poseen el mismo valor. Esto significa que una franja isocromática es el lugar geométrico de los puntos de igual diferencia de los esfuerzos principales.

En este caso el empleo del polariscopio circular es requerido, y debe obtenerse la información de todo el sistema empleando el arreglo de campo oscuro y el luminoso; esto ayuda a obtener una lectura más completa del orden de franja N .

A continuación se describen seis puntos que se deben tomar en cuenta en la interpretación de patrones de franjas isocromáticas.

La diferencia de esfuerzos principal $\sigma_1 - \sigma_2$ puede ser determinada en cualquier punto del modelo usando la siguiente ecuación:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_{\sigma}}{h} \quad (1.74)$$

Si $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0$, $\sigma_1 - \sigma_2$ puede ser relacionado al esfuerzo cortante máximo a través de la siguiente ecuación:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nf_{\sigma}}{2h} \quad (1.75)$$

Si $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ o si $0 > \sigma_1 > \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_2$ no puede ser relacionado con el esfuerzo cortante máximo y será necesario determinar σ_1 y σ_2 y relacionar $\tau_{\max}$ a σ_1 y σ_2 por las ecuaciones:

$$\tau_{\max} \begin{cases} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_1 & \text{si } \sigma_1 \text{ y } \sigma_2 \text{ son positivas} \\ \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma_2 & \text{si } \sigma_1 \text{ y } \sigma_2 \text{ son negativas} \end{cases} \quad (1.76)$$

Si la frontera se considera como libre (lo que es que si σ_1 o $\sigma_2 = 0$), El otro esfuerzo principal puede ser determinado directamente por:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{Nf_{\sigma}}{h} \quad (1.77)$$

Si la frontera no es libre, pero la carga normal aplicada es conocida la frontera tangente de esfuerzos desconocida puede ser determinada aplicando:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 + p = \frac{Nf_{\sigma}}{h}$$

O bien

$$\sigma_1 = \frac{Nf_{\sigma}}{h} - p \quad (1.78)$$

Donde la presión $\sigma_2 = -p$ dado que la presión aplicada p es considerada como una cantidad positiva.

1.3.3.2 PATRÓN DE FRANJAS ISOCLINAS.

El patrón de franjas isoclinas obtenido en un polariscopio plano es empleado primeramente para dar la dirección de los esfuerzos principales en cualquier punto en el modelo, esto se basa en que la inclinación de los esfuerzos principales a los largo de una franja isoclina es la misma; por lo que una isoclina es el lugar geométrico de los puntos con la misma inclinación de esfuerzos principales.

Con la finalidad de identificar el patrón de franjas isoclinas es necesario el empleo de un polariscopio plano en campo oscuro. Utilizando materiales transparentes en los cuales sea necesario aplicar mucha carga para que aparezca la primera isocromática (estos pueden ser vidrio, acrílico, etc.)

El primer procedimiento es obtener un número de patrones isoclinos a diferentes puestas del polariscopio y combinar estos patrones de franjas para dar una fotografía compuesta que muestre los parámetros isoclinos sobre todo el modelo. El segundo procedimiento es aislar los puntos de interés y después individualmente determinar la puesta del polariscopio asociada con cada uno de estos puntos.

A continuación se muestran reglas para el bosquejo de patrones de franjas isoclinos compuestos desde un patrón de franjas isoclines individual:

1. Los parámetros isoclinos deberán pasar a través de puntos singulares o isotrópicos.
2. Una isoclina de un parámetro debe coincidir con un eje de simetría en el modelo si es que dicho eje existe.
3. El parámetro de una isoclina que intersecta una frontera es determinado por una cuesta de la frontera en un punto de intersección.
4. Las isoclinas de todos los parámetros pasando a través de los puntos de carga concentrada.

Finalmente con el parámetro de isoclina se puede calcular el esfuerzo cortante a partir del círculo de Mohr con las siguientes ecuaciones:

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta = -\frac{Nf_\sigma}{2h} \sin 2\theta \quad (1.79)$$

Donde θ es el ángulo entre el eje x y la dirección de σ_1 dado por el parámetro isoclino. También

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta_1 = \frac{Nf_\sigma}{2h} \sin 2\theta_1 \quad (1.80)$$

Donde θ_1 es el ángulo entre el eje x y la dirección de σ_2 dado por el parámetro isoclino.

1.3.3.3 MÉTODOS DE CALIBRACIÓN.

En la mayoría de los análisis fotoelásticos la distribución de esfuerzos en un modelo complejo es buscada como una función de la carga. Para determinar esta distribución de esfuerzos de manera precisa se requiere de una calibración cuidadosa del material en su valor de franja f_σ (en la literatura y en trabajos de publicación el nombre de valor de franja puede ser encontrado también como constante de franja). Por esta razón es siempre necesario calibrar cada hoja de material con que se pretende llevar acabo la experimentación, así el patrón de franja obtenido será valido para todas la piezas fabricadas el mismo material.

En un método de calibración se debe seleccionar un cuerpo del cual la distribución de esfuerzos teórica es precisa y conocida. Preferentemente el modelo también tendría que ser fácil de maquinar y simple de cargar. El modelo de calibración es cargado por incrementos, y el orden de la franja y las cargas serán anotadas. Por medio de estos datos el valor de la franja f_σ del material puede ser determinado.

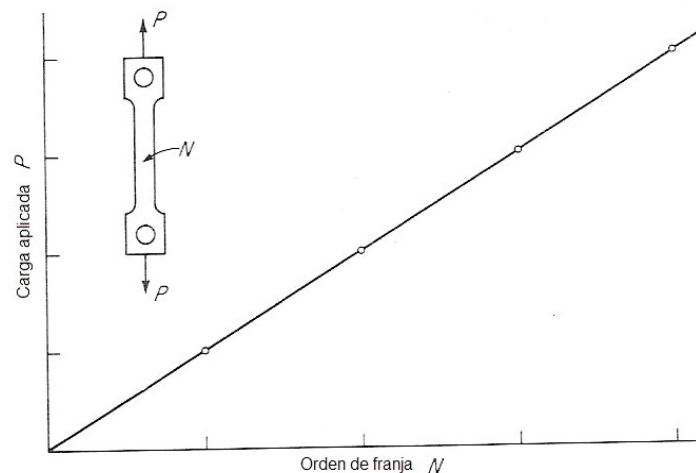


Fig. 1.3.20 Curva típica de calibración usando una probeta a tensión.

Se considera primero una probeta a tensión que posea un ancho w y su espesor h , los cuales son empleados a menudo como partes en la calibración. El esfuerzo axial

inducido en la región del cuello de la probeta sometida a tensión por la carga P puede ser expresada como:

$$\sigma_1 = \frac{P}{wh} \quad y \quad \sigma_2 = 0 \quad (1.81)$$

Si se substituye la ecuación (1.79) en (1.49) nos da

$$\frac{P}{wh} = \frac{Hf_\sigma}{h} \quad o \quad f_\sigma = \frac{P}{wN} \quad (1.82)$$

Esta ecuación nos muestra que el valor de la franja f_σ obtenido de la probeta sometida a tensión es totalmente independiente de su espesor h . En la practica, se debe graficar una curva de la carga P como una función de N como se muestra en la figura 1.3.20 para cinco o seis diferentes puntos.

A. VIGA SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSIÓN PURA.

Se tiene que someter la viga a la acción de dos cargas simétricas, apoyadas libremente, para observar el patrón de franjas isocromáticas. Con esto se puede determinar el orden de la franja que coincida con el borde inferior o superior de la viga en la zona de flexión pura, para esto se emplea la siguiente ecuación:

$$f_\sigma = \frac{6M}{Nwh^2} \quad (1.83)$$

Donde M es el momento flexionante en kg / cm.

B. DISCO SOMETIDO A COMPRESIÓN DIAMETRAL.

El disco es de alguna manera más sencillo de maquinar y de cargar que la probeta a tensión; sin embargo, se requieren de varios puntos de calibración que son obtenidos de una sola carga con este tipo de probeta.

Al ser sometido a una compresión diametral; se puede observar el patrón de franjas isocromáticas (en un campo oscuro) y cuando la franja $N = 1$ se encuentre en el centro del disco se registra la carga y se substituye

$$f_\sigma = \frac{8P}{\pi DN} \quad (1.84)$$

Donde P es la carga aplicada en kg y D es el diámetro del disco en cm. De nueva cuenta se puede ver que el valor de la franja f_σ es independiente del espesor h . El valor de P/N substituido en la ecuación es determinado al graficar varios puntos de P contra N .

1.3.3.4 INTERFERÓMETRO.

La aplicación del interferómetro al problema de separación de esfuerzos esta basada en la medición de ε_{zz} , el esfuerzo normal al plano del modelo. Este esfuerzo esta relacionado con la suma de los esfuerzos principales como se muestra a continuación:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.85)$$

También, el esfuerzo ε_{zz} es una función lineal del cambio en el espesor del modelo así que:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu h}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.86)$$

El interferómetro es un instrumento óptico empleado para medir las variaciones del espesor de Δh sobre la superficie del modelo. El patrón de franjas obtenido en un interferómetro es llamado patrón isopático, donde el número de franjas son proporcional a Δh , como se muestra abajo

$$N = k\Delta h$$

Por lo tanto con la ecuación (1.86)

$$N = K(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.87)$$

Donde K es una constante de calibración.

Valores individuales de σ_1 y σ_2 son obtenidos por la simple suma y resta de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ que son valores obtenidos de la ecuación (1.49) y $(\sigma_1 + \sigma_2)$ valores obtenidos de la ecuación (1.87). Así los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 pueden ser separados de manera independiente a las determinaciones experimentales de los patrones de franja isocromáticos e isoclinicos.

1.3.3.5 CRITERIO DE SELECCIÓN DE MATERIALES.

Uno de los más importantes factores en un análisis fotoelástico es la selección de las propiedades para el modelo fotoelástico. Desafortunadamente, un material fotoelástico ideal no existe, y el investigador debe de seleccionar de una lista de polímeros disponibles que pocas veces se ajusta a las necesidades del investigador. La cantidad de plásticos foto elásticos usados cada año no es suficiente para atraer a una compañía química en el desarrollo y producción subsiguiente de un polímero especialmente diseñado para aplicaciones foto elásticas. Como consecuencia, el investigador especializado en foto elasticidad debe seleccionar un material diferente que usualmente es elaborado para propósitos diferentes a la foto elasticidad.

Las propiedades son muy importantes en cualquier material. Así mismo, un material foto elástico debe tener unas características especiales para que su funcionamiento sea el adecuado, por lo que el material debe:

1. Ser transparente a la luz empleada en el polariscopio.
2. Ser sensible a esfuerzo o a deformación.
3. Debe mostrar características lineales con respecto a:
 - Las propiedades esfuerzo-deformación
 - Las propiedades en el orden de limite de esfuerzos
 - Las propiedades en el orden del límite de las deformaciones.
4. Tener isotropía y homogeneidad mecánica y óptica.
5. No poseer una conducta visco elástica.
6. Tener un alto modulo de elasticidad y un alto esfuerzo ultimo.
7. No debe ser sensible a pequeñas variaciones de temperatura.
8. Ser capaz de maquinarse por métodos convencionales.
9. Estar libre de esfuerzos residuales.
10. Estar disponible a costos razonables.

1.3.4 FOTOELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL

La aplicación de foto elasticidad la mayoría de veces es limitada a técnicas de dos dimensiones para determinar esfuerzos en modelos planos, sin embargo en la practica existen muchos cuerpos que son tridimensionales y no es muy efectivo estudiarlos usando técnicas bidimensionales. Sin embargo seria posible el construir un modelo tridimensional y analizarlo foto elásticamente si la deformación debido a la aplicación de la carga puede ser capturada en el modelo. En realidad, la base de la foto elasticidad tridimensional es el proceso de encerrar permanentemente las deformaciones en el modelo. Tres diferentes técnicas han sido desarrolladas para que las deformaciones puedan ser encerradas permanentemente en el modelo. Estas técnicas son: esfuerzos congelados, arrastramiento, curado. En todos estos métodos la deformación es encerrada dentro del modelo en una escala molecular, permitiendo a los modelos ser divididos sin cambiar las deformaciones encerradas. De todos estos el método de los esfuerzos congelados es por mucho la más efectiva y popular técnica para encerrar la deformación en el modelo. La técnica de curado y arrastrado no serán tratados debido a que son raramente empleados en practicas actuales.

1.3.4.1 EL METODO DE ESFUERZOS CONGELADOS

El método de los esfuerzos congelados para encerrar en el modelo deformaciones debido a una carga aplicada esta basado en el desfazamiento del comportamiento de muchos materiales polímeros cuando estos son calentados.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

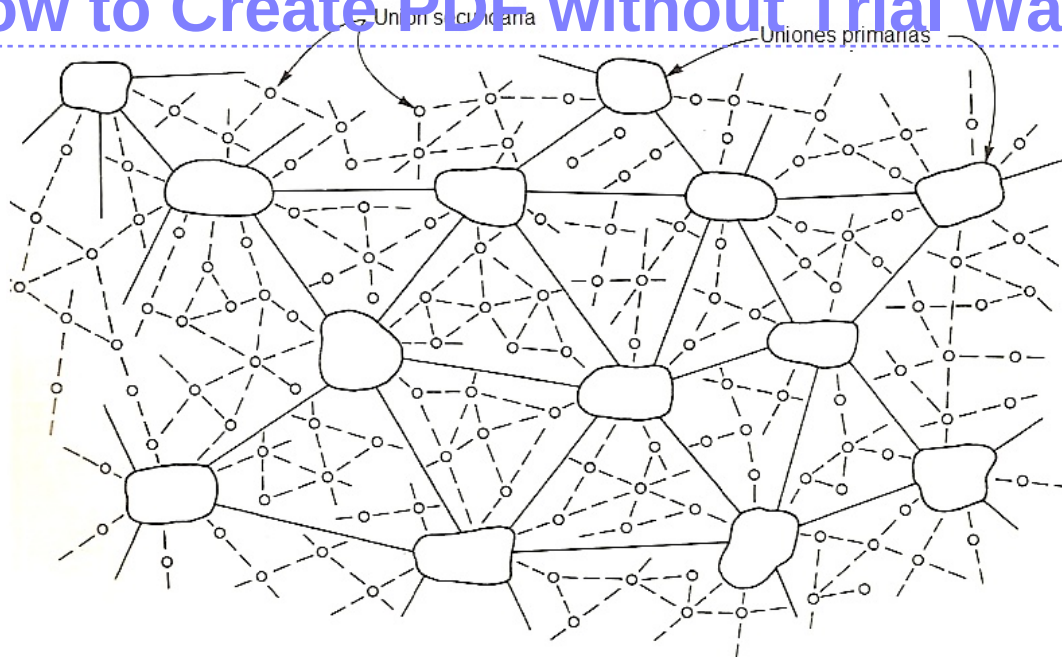


Fig. 1.3.21 Cadenas moleculares primarias y secundarias en un polímero.

Los materiales polímeros están compuestos de largas cadenas de moléculas de hidrocarburos, como es ilustrado en la figura 1.3.21. Algunas de las cadenas de moléculas están bien unidas dentro de una red tridimensional en uniones primarias. Sin embargo, un gran número de moléculas están solidamente menos unidas en pequeñas cadenas secundarias. Cuando el polímero está a su temperatura normal, ambos conjuntos de uniones de moléculas, las primarias y secundarias, actúan para resistir las deformaciones ocasionadas por la aplicación de alguna carga. Sin embargo, en cuanto la temperatura del polímero es aumentada, las uniones secundarias se separan y las uniones primarias soportan toda la carga aplicada. Como las uniones secundarias constituyen una gran porción del polímero, las deflexiones sobre las uniones primarias son un poco más grandes y elásticas en carácter. Si la temperatura del polímero es bajada a temperatura del cuarto mientras la carga es mantenida sobre el modelo, las uniones secundarias se vuelven a formar entre las uniones primarias que se encuentran con una gran elongación lo que provoca que las uniones primarias se queden en su posición extendida. Cuando la carga es removida, las uniones primarias disminuyen su tamaño, pero la mayoría de las deformaciones sobre ellas no vuelven a su estado inicial. Las deformaciones elásticas de las uniones primarias se quedan permanentemente encerradas en el modelo debido a las uniones secundarias.

La temperatura a la cual el modelo es calentado para romper las uniones secundarias es llamada temperatura crítica. Realmente, este nombre es un tanto equivoco ya que la temperatura requerida para romper las uniones secundarias no es del todo crítica. En su lugar, el proceso de rompimiento de las uniones secundarias depende mas tanto de la temperatura como del tiempo bajo en el cual el modelo está cargado.

El comportamiento de los materiales polímeros descrito anteriormente constituye la base del proceso de los esfuerzos congelado frecuentemente utilizado en la foto elasticidad tridimensional.

El proceso de los esfuerzos congelados es usado hoy en día para capturar los patrones de franja en la mayoría de los análisis foto-elásticos tridimensionales. El método es extremadamente sencillo de aplicar, y el modelo puede ser seccionado para su análisis sin distorsionar el patrón de franjas. El proceso para los esfuerzos congelados lo podemos describir en los siguientes seis puntos:

1. Colocar el modelo dentro un horno para esfuerzos congelados.
2. Calentar el modelo rápidamente hasta alcanzar la temperatura crítica.
3. Aplicar las cargas requeridas.
4. Poner el modelo a reposar de 2 a 4 horas hasta que una temperatura uniforme se obtenida en el modelo.
5. Enfriar el modelo lo suficientemente lento para que los gradientes sean minimizados.
6. Remover las cargas y seccionar el modelo.

1.4 METODO DEL ELEMENTO FINITO

La técnica del elemento finito es un método numérico aplicado resolver problemas de ingeniería entre otras ramas. Los problemas típicos donde es ocupado el método del elemento finito incluyen el análisis estructural, transferencia de calor, flujo de fluidos, transporte de masa, y el potencial electromagnético.

Para problemas que envuelven geometrías complicadas, cargas, y propiedades de materiales, generalmente no es posible obtener una solución analítica. Estas soluciones analíticas están dadas por una expresión matemática que proporciona los valores de las cantidades desconocidas deseadas en cualquier punto de un cuerpo (Estructura total, o sistema físico de interés) y estos son validos para un número infinito de localizaciones en el cuerpo. Estas soluciones analíticas generalmente requieren la solución de una ecuación diferencial ordinaria o parcial, la cual, debido a las complicadas geometrías, cargas, y propiedades, no son fácilmente resueltas. Por esta razón, nosotros necesitamos de un método numérico, tal como el método del elemento finito, para obtener soluciones aceptables. La formulación del elemento finito del problema resulta en un sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas para la solución, bastantes como requiere la solución de ecuaciones diferenciales. Estos métodos numéricos proporcionen valores aproximados de un sin número de puntos en el continuo. Por lo tanto este proceso de modelar un cuerpo dividiéndolo en un sistema equivalente de unidades o cuerpos mas pequeños (elementos finitos) interconectados en puntos comunes a dos o mas elementos (puntos nodales o nodos) y/o líneas de frontera y/o superficies es llamado discretización. En el método de elemento finito, en lugar de resolver el problema para el cuerpo completo en una operación, nosotros formulamos las ecuaciones para cada elemento finito y se combinan para obtener la solución de todo el cuerpo.

1.1.1 BREVE HISTORIA

El desarrollo moderno del método de elemento finito comienza en los 40s en el campo de la ingeniería estructural con el trabajo de Hrennikoff en 1941 y McHenry en 1943, quienes usaron una red de elementos lineales (barras y vigas) para encontrar la solución de esfuerzos en sólidos continuos. En un artículo publicado en 1943 pero no reconocido ampliamente por muchos años, Courant propuso establecer la solución de esfuerzos de una forma variacional, después el introduciría la interpolación de funciones a través de subregiones triangulares hechas dentro la región total como un método para obtener una solución numérica aproximada. En 1947 Levy desarrolla el método de flexibilidades o fuerzas, y en 1953 su trabajo influencia para que otro método (método de los desplazamientos) pueda ser una alternativa prometedora para su uso en el análisis estático de estructuras de aeronaves. Sin embargo, sus ecuaciones eran sumamente complejas como para resolverse a mano, y este método solo comenzó a ser popular con los avances de las computadoras digitales de alta velocidad.

En 1954 Argyris y Kelsey desarrollaron el método de análisis de una matriz estructural usando el principio de energía. Este desarrollo mostraba la importancia del rol que jugaría el principio de energía en el método de elementos finitos.

El primer acercamiento que hubo con elementos de dos dimensiones fue por Turner y su equipo en 1956. Ellos derivaron la matriz de rigideces para elementos lineales, elementos viga, y para elementos triangulares y rectangulares en esfuerzo plano y sintetizaron el proceso conocido como el método directo de rigideces obteniendo así la matriz de rigideces total de una estructura. En conjunto con el desarrollo de las computadoras digitales de alta velocidad en los primeros años de los 50's, el trabajo de Turner provoca desarrollos adicionales de la ecuación de rigidez de elemento finito expresadas en notación matricial. La frase "elemento finito" fue introducida por Clough en 1960 cuando utilizó elementos triangulares y rectangulares para el análisis del esfuerzo plano.

Una extensión del método de elementos finitos a problemas de tres dimensiones se realizó con el desarrollo de una matriz de rigideces tetraédrica hecha por Martin en 1961, por Gallagher en 1962, y por Melosh en 1963. El caso especial de sólidos axisimétricos fue considerado por Clough, Rashid y Wilson en 1965.

Desde los primeros años de 1950 hasta el presente, muchos avances han sido hechos en la aplicación del método de los elementos finitos. Ingenieros, matemáticos, y científicos, continuaron con el desarrollo de nuevas aplicaciones para resolver nuevos problemas que surjan en la ingeniería.

1.1.2 PASOS GENERALES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Típicamente, para el análisis del problema de esfuerzo deformación de una estructura, los ingenieros buscan determinar desplazamientos y esfuerzos a través de la estructura,

a cual se encuentra en equilibrio y es sujeta a aplicársle cargas. Para muchas estructuras, es difícil encontrar su distribución de deformaciones usando los métodos convencionales, y así el método del elemento finito es usado necesariamente.

Existen dos aproximaciones asociadas con el método de los elementos finitos. Una aproximación, llamada método de fuerzas, o de flexibilidades, usa fuerzas internas como incógnitas del problema. Para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento, primero la ecuación de equilibrio es usada. Después son encontradas ecuaciones adicionales necesarias introduciendo ecuaciones de compatibilidad. El resultado es colocado en una ecuación algebraica para determinar las fuerzas desconocidas o redundantes. La segunda aproximación, llamada método de los desplazamientos o de las flexibilidades, asume el desplazamiento de los nodos como la incógnita del problema. Por ejemplo, las condiciones de compatibilidad requieren que antes de que una carga sea aplicada y después de que las deformaciones tomen lugar en los elementos conectados a un nodo común, a lo largo de un vértice común, o sobre una superficie común estén inicialmente satisfechos. Después las ecuaciones gobernantes son expresadas en términos de desplazamientos nodales usando la ecuación de equilibrio y una ley aplicable relacionando fuerzas y desplazamientos.

Estas dos aproximaciones no entregan diferentes resultados (Fuerzas o desplazamientos) en el análisis y diferentes matrices asociadas con su tipo de formulación (flexibilidades o rigideces), ha sido demostrado que el método de los desplazamientos (rigideces) para propósitos computacionales es mas deseable por debido a que su formulación es mas simple para la mayoría de los problemas de análisis estructural.

El método del elemento finito incluye el modelado de la estructura usando elementos pequeños interconectados llamados elementos finitos. Una función de desplazamiento es asociada con cada elemento finito. Cada elemento interconectado es conectado, directa o indirectamente, a cada uno de los otros elementos a través de una interfase común, que incluye nodos y/o líneas de frontera y/o superficies. Usando propiedades conocidas de esfuerzo – deformación del material de la estructura, uno puede determinar el comportamiento de un nodo dado en términos de propiedades de cada uno de los otros elementos en la estructura. El total de las ecuaciones que describen el comportamiento de cada nodo resultan en una serie de ecuaciones algebraicas mejor expresadas en notación matricial.

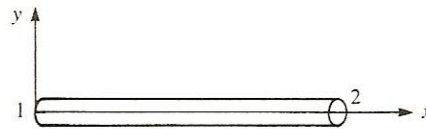
Ahora se presentaran los pasos usados en el método del elemento finito y en la solución de un problema estructural.

1. DISCRETIZACION Y SELECCIÓN DEL TIPO DE ELEMENTO

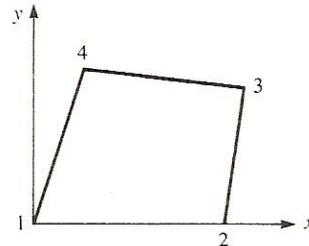
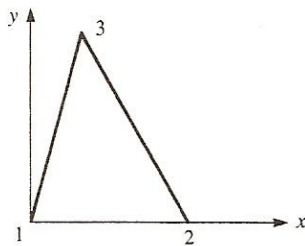
El paso uno envuelve la división del elemento en un sistema equivalente de elementos finitos con nodos asociados y escogiendo el tipo de elemento mas apropiado al modelo. El número total de elementos usados y su variación en tamaño y tipo dentro de un cuerpo dado son el primer parámetro de juicio de ingeniería. Los elementos deben ser

o suficientemente pequeños para proporcionar resultados utilizables y lo suficientemente largos para reducir el trabajo computacional. Los elementos pequeños son generalmente deseables donde la geometría cambia y donde existen los mayores gradientes; los elementos largos pueden ser usados donde los resultados son relativamente constantes.

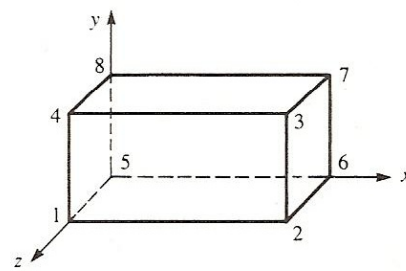
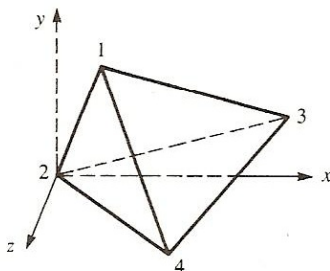
La selección de elementos usados en el análisis de elemento finito depende de la apariencia física del cuerpo, como este vaya a ser cargado y que tan exacto el analista quiera que sean los resultados. Además se debe seleccionar el tipo de idealización, (una, dos o tres dimensiones), si esta es necesaria. Lo que es mas, la elección del elemento mas apropiado para un problema en particular es una de las mayores tareas que un ingeniero o analista tiene.



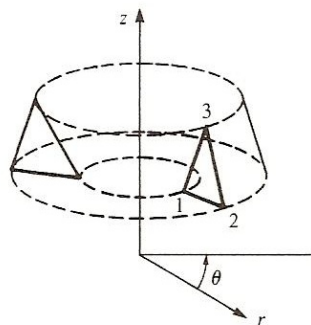
(a) Elemento unidimensional utilizado para representar un elemento viga o un elemento barra



(b) Elementos bidimensionales utilizados para representar esfuerzo y deformaciones en el plano



(c) Elementos tridimensionales utilizados para representar esfuerzos en las tres dimensiones



(d) Elemento axisimétrico utilizado para problemas axisimétricos

Fig. 1.4.1 Tipos de elementos finitos

Los elementos lineales principales mostrados en la figura 1.4.1a consisten en elemento barra y el elemento viga. Estos poseen área en su sección transversal pero son usualmente representados por un segmento de línea. En general, el área de su sección transversal puede cambiar. Este elemento es frecuentemente usado para modelar estructuras como marcos o armaduras como la que se ve en la figura 1.4.2. El elemento lineal mas simple tiene dos nodos, uno en cada uno de sus puntas, sin embargo existen elementos de un mayor grado que tienen tres o más nodos.

Los elementos básico bidimensionales mostrados en la figura 1.4.1 b son cargados por fuerzas en su propio plano (esfuerzos en el plano o condiciones de deformación en el plano). Son elementos triangulares y cuadrangulares. Los elementos bidimensionales más simples solo poseen nodos en las esquinas (elementos lineales) con lados rectos o fronteras, además también hay elementos de orden mayor, generalmente con nodos de tamaño mediano (llamado elementos cuadráticos) y lados curvos. Los elementos pueden variar en su espesor total o ser constantes. Son generalmente usados para modelar un amplio rango de problemas en la ingeniería.

Los elementos tridimensionales más comunes (figura 1.4.1.c) son tetraédricos y hexaédricos; estos son usados cuando se vuelve necesario realizar un análisis tridimensional de esfuerzos. Los elementos básicos tridimensionales poseen solo nodos en las esquinas y lados rectos, mientras que elementos de orden superior con nodos a mitad de aristas (y posiblemente nodos en la mitad de las caras) tiene superficies curvas por cada lado.

El elemento axisimétrico (figura 1.4.1 d) se obtiene al rotar un triángulo o un cuadrilátero alrededor de un eje fijo localizado en el plano del elemento a través de 360° . Este elemento puede ser usado cuando la geometría y a carga del problema es axisimétrico.

2. SELECCIÓN DE LA FUNCIÓN DE DESPLAZAMIENTO.

El paso dos involucra la selección de una función de desplazamiento dentro de cada elemento. La función es definida dentro del elemento usando su valor nodal. Funciones de polinomios lineales, cuadráticos y cúbicos son frecuentemente usadas por que son sencillas de trabajar con la formulación del elemento finito. Sin embargo, pueden ser usadas de igual manera funciones trigonométricas. Para un elemento bidimensional, la función de desplazamiento es una función de las coordenadas en ese plano. Las funciones son expresadas en términos de una incógnita nodal (en un problema bidimensional, en términos de componentes de x y y).

La misma función general de desplazamiento puede usarse en cada elemento. Así el método del elemento finito en uno en el que una cantidad continua, como el desplazamiento a través de un cuerpo, se aproxima por un modelo compuesto que ha sido discretizado en funciones continuas en cada una de sus partes en un arreglo de definido por cada dominio finito o elemento finito.

3. DEFINICION DE LAS RELACIONES DE DEFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO Y ESFUERZO – DEFORMACION.

Las relaciones deformación / desplazamiento y esfuerzo/ deformación son necesarias para poder derivar las ecuaciones de cada elemento. En el caso de una deformación unidimensional, digamos, en la dirección x , tendremos el esfuerzo ε_x es relacionado a un desplazamiento por

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1.88)$$

Para deformaciones pequeñas. En suma, los esfuerzos deben ser relacionados con las deformaciones a través de la ley constitutiva. La habilidad de definir el comportamiento del material es de mayor importancia en la obtención de resultados aceptables. La simplificación de las leyes esfuerzo/ deformación, la ley de Hooke, la cual es a menudo usada en el análisis de esfuerzos, esta dado por

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (1.89)$$

Donde σ_x = al esfuerzo en dirección x y E = al modulo de elasticidad.

4. OBTENER LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ Y LAS ECUACIONES.

Inicialmente, el desarrollo de los elementos de la matriz de rigidez y las ecuaciones de los elementos fue basado en el concepto de la influencia por los coeficientes de rigidez, lo cual presupone un respaldo en el análisis estructural. Sin embargo existen otros métodos que no requieren este respaldo como son:

- MÉTODO DE EQUILIBRIO DIRECTO

De acuerdo con este método, la matriz de rigidez y las ecuaciones que relacionan las fuerzas en los nodos con sus desplazamientos son obtenidos usando las fuerzas para las condiciones de equilibrio para un elemento básico, junto con las relaciones fuerza/deformación. Por que este método es más adaptable para elementos lineales o unidimensionales.

- MÉTODOS DE TRABAJO O ENERGÍA.

Para desarrollar la matriz de rigidez y sus ecuaciones para elementos bi y tridimensionales, resulta más sencillo aplicad un método ya sea de energía o de trabajo. El principio de trabajo virtual (usando desplazamientos virtuales), el principio de energía

potencial mínima, y el teorema de Castigliano son métodos frecuentemente usados con el propósito de derivar las ecuaciones de los elementos.

El principio de trabajo virtual es aplicable para cualquier comportamiento de material, mientras que el principio de energía potencial mínima y el teorema de Castigliano son aplicables solo a materiales elásticos. Además, el principio de trabajo virtual puede ser usado incluso cuando una función potencial no existe. Sin embargo, los tres principios producen ecuaciones idénticas de los elementos para materiales lineales – elásticos; así el uso de cualquier método por el tipo de material en el análisis estructural es simplemente una cuestión de conveniencia y de preferencia personal.

• MÉTODOS DE CARGAS RESIDUALES

Los métodos de cargas residuales son útiles en el desarrollo de las ecuaciones de los elementos; un método particularmente popular es el de Galerkin. Este método da los mismos resultados que los métodos de energía donde quiera que sean aplicables. Son de especial ayuda cuando una funcional¹ tal como la energía potencial no se encuentra realmente disponible. El método de cargas residuales permite al método del elemento finito ser aplicable directamente a cualquier ecuación diferencial.

Usando cualquiera de los elementos descritos anteriormente podremos crear las ecuaciones que describen el comportamiento de los elementos. Estas ecuaciones se escriben convenientemente en matrices como la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{n1} & & & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \\ \vdots \\ dn \end{Bmatrix} \quad (1.90)$$

O como matriz compacta

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (1.91)$$

Donde $\{f\}$ es el elemento del vector fuerza en nodos, $[k]$ es la matriz de rigidez, y $\{d\}$ es el elemento del vector de los grados de libertad desconocidos o los desplazamientos generales, n .

¹ Una funcional es una expresión integral que implícitamente contiene ecuaciones diferenciales que describen el problema. Una funcional típica es de la forma $I(u) = \int f(x, u, u') dx$.

5. ENSAMBLE DE LAS ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS PARA OBTENER LAS ECUACIONES TOTALES O GLOBALES E INTRODUCCIÓN DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

Las ecuaciones individuales de los elementos generadas en el paso 4 pueden ser ahora sumadas y puestas usando un método de superposición (llamado el método de rigidez directo, que esta basado en el equilibrio de fuerza en los nodos) para obtener las ecuaciones globales de toda la estructura. Implícito dentro del método directo de rigidez se encuentre el concepto de continuidad, o compatibilidad, el cual requiere que la estructura permanezca unida y que no llegue a ocurrir una separación en cualquier parte de la estructura.

El ensamble final o la ecuación global escrita en su forma matricial es:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (1.92)$$

Donde $\{F\}$ es el vector global de fuerza en nodos, $[K]$ es la matriz de rigidez global o total de la estructura, y $\{d\}$ es ahora el elemento del vector de los grados de libertad desconocidos o conocidos de la estructura o los desplazamientos generales. Se puede demostrar en esta etapa, que la matriz global de rigidez $[K]$ es una matriz singular por que su determinante es igual a cero. Para remover este problema de singularidad, se debe involucrar cierta condición de frontera (o restricciones o apoyos) para que la estructura pueda mantenerse en su lugar en vez de moverse como un cuerpo rígido. En este momento se puede apreciar que el hecho de agregar condiciones de frontera o de apoyos repercute en una alteración de la ecuación global (1.92). También se debe notar que las cargas aplicadas se han explicado en la matriz de fuerza global $\{F\}$.

6. SOLUCIÓN DE LOS GRADOS DE LIBERTAD DESCONOCIDOS.

La ecuación (1.92), modificada para explicar las condiciones de frontera, es un arreglo de ecuaciones algebraicas que pueden ser descritas en una matriz expandida desde

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (1.93)$$

Donde ahora n es el número de incógnitas totales de los grados de libertad. Estas ecuaciones pueden ser resueltas desde el ds usando un método de eliminación (como el Método de Gauss) o un método iterativo (como el método Gauss – Seidel). Las dos son llamas incógnitas primarias, por que son las primeras cantidades determinadas usando el método de rigidez (o desplazamiento) en el método del elemento finito.

7. SOLUCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE ESFUERZOS Y DEFORMACIÓN

Para los problemas de análisis de esfuerzos estructurales, las incógnitas secundarias de esfuerzo y deformación (o momento y esfuerzo cortante) pueden ser obtenidas por que estas pueden ser directamente expresadas en términos de desplazamientos determinadas en el paso 6. Relaciones comunes entre deformación y desplazamiento y entre esfuerzo y deformación – tal como las ecuaciones (1.88) y (1.89) para un esfuerzo unidimensional dados en el paso 3 – pueden ser usadas.

8. INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS.

El objetivo final es la interpretación y análisis de resultados para su uso en el diseño/ proceso de análisis. Determinación de zonas en la estructura en donde grandes deformaciones y esfuerzos de gran magnitud ocurren es generalmente importante en la toma de decisiones y en el proceso de diseño. Programas de post proceso ayudan al usuario a interpretar resultados mostrándolos en forma gráfica.

1.4.3 APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.

El método del elemento finito puede ser usado para analizar tanto problemas estructurales como no estructurales. Las áreas estructurales típicas incluyen

- Análisis de esfuerzos, incluyendo marcos y armaduras, y problemas típicos de concentración de esfuerzos asociados a barrenos, ángulos, o cualquier otro cambio en la geometría de un cuerpo.
- Análisis de vibraciones.
- Dilatación.

Problemas de tipo no estructural incluyen

- Transferencia de calor.
- Flujo de fluidos, incluyendo el paso a través de medios porosos.
- Distribución del potencial magnético eléctrico.

Finalmente, algunos problemas de ingeniería biomecánica (los cuales incluyen análisis de esfuerzos) comúnmente se incluye análisis de espina dorsal, cráneo, implantes, corazón, y ojos.

Ahora presentaremos un sencillo ejemplo. Esta aplicación muestra la variedad, tamaño y complejidad de los problemas que puede ser resuelto usando el método y los procesos de discretización comunes y los tipos de elementos usados.

La figura 1.4.2 ilustra una torre. La torre es un marco tridimensional que comprime una serie de elementos tipo viga. Los 48 elementos están marcados por los números inscritos en círculos, mientras que los 28 nodos están indicados simplemente por el número. Cada nodo tiene tres componentes de rotación y desplazamiento asociados a

el. La rotación (θ_s) y los desplazamientos (d_s) se llaman grados de libertad. La razón de usar un modelo tridimensional obedece a las condiciones de carga a las que la estructura se somete.

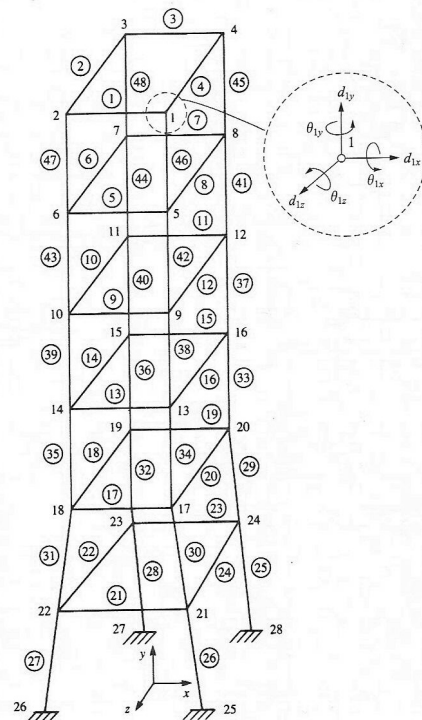


Fig. 1.4.2 Discretización de una torre de control en elementos finitos

El método del elemento finito usado para este marco permite al diseñador o analista obtener rápidamente los desplazamientos y esfuerzos en la torre para caso comunes de cargas, como lo requieren las normas de diseño. Antes del desarrollo del método del elemento finito y las computadoras, incluso este problema de aparente sencillez llevaba horas encontrar su solución.

1.4.4 VENTAJAS DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO.

Como se ha mostrado previamente, el método del elemento finito ha sido aplicado a numerosos problemas, ya sea de índole estructural o no estructural. Este método posee un número significativo de ventajas que han hecho de él una herramienta muy popular. Entre las cuales se destacan:

- Facilita el modelado de geometrías irregulares.
- Manejo de condiciones de carga generales sin ningún problema.
- Modelo de geometrías compuestas de diversos materiales por que permite que las ecuaciones de los elementos sean evaluadas de manera individual.
- Manejo de un número ilimitado y tipos de condiciones de frontera.
- Varía el tamaño de los elementos para hacer posible el uso de elementos pequeños cuando sea necesario.
- Altera el modelo del elemento finito de manera barata y sencilla.

- Incluye efectos dinámicos.
- Manejo del comportamiento no lineal existente con grandes deformaciones y materiales no lineales.

El método del elemento finito de análisis estructural permite al diseñador detectar esfuerzos, vibraciones, y problemas térmicos durante el proceso de diseño y evaluar los cambios en el diseño antes de la construcción de un posible prototipo. Así la confianza en la aceptación del prototipo se puede realizar. También, si se usa adecuadamente, el método reduce el número de prototipos

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

CAPITULO II

ANÁLISIS TEORICO

2.1 ANALISIS DEL MODELO TEORICO.

El proceso de diseño de una aeronave inicia con un cálculo aerodinámico el cual brinda las geometrías adecuadas del fuselaje, ala, empenaje horizontal y vertical, y de las superficies hipersustentadoras que cubran las características para la que ha sido pensada, una vez que estas geometrías son obtenidas se necesita una estructura que se adecue a dichas geometrías y que además sea capaz de soportar los esfuerzos, deformaciones y vibraciones que se inducen antes, durante y después del vuelo. La estructura de una aeronave se encuentra restringida por las características de los materiales, el costo, proceso de manufactura, instalaciones y la disponibilidad en el mercado del material. Debido a estos factores el diseño de la estructura se llevaba a cabo por medio de la construcción de modelos para experimentación, la simulación por computadora, así como por el cálculo matemático.

El diseño empieza proponiendo una configuración de estructura la cual se debe analizar e ir mejorando en un proceso iterativo. En el caso del presente trabajo se seleccionó una semiala semimonocoque de configuración de doble flechado compuesta por 2 vigas en las que se distribuyeron 16 costillas con la forma de un perfil NACA 4412 (figura 2.1).

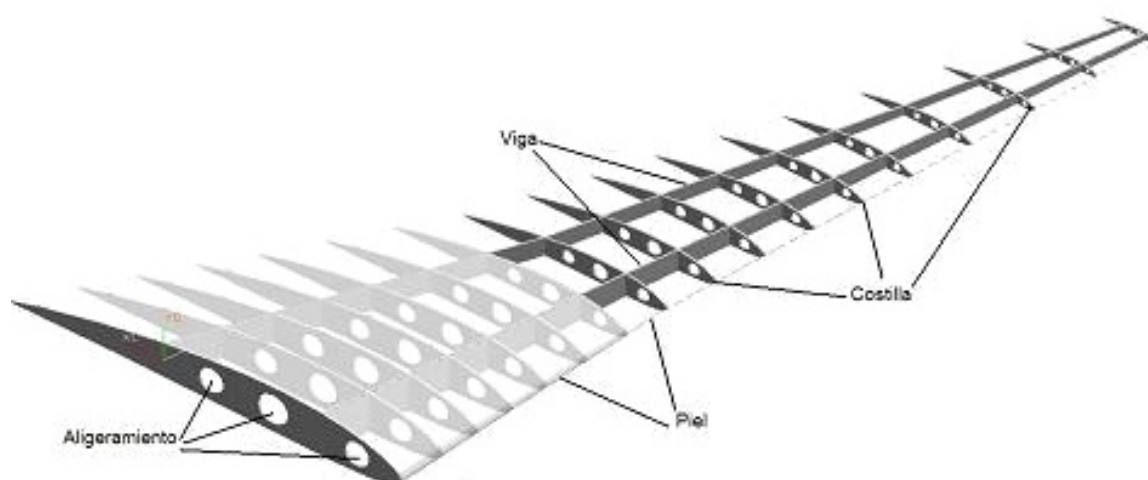


Fig. 2.1.1 Modelo de semiala

Teniendo el modelo listo y este se va a someter a un estudio de vibración libre, la estructura no debe estar sujeta a ninguna excitación externa y mucho menos a una amortiguación por lo que únicamente se desea ver el comportamiento bajo la acción de su masa y su rigidez. El análisis de la estructura en movimiento libre no amortiguado muestra la frecuencia natural y los correspondientes modos de vibración. La teoría de vibraciones nos dice que un problema puede ser discretizado de manera arbitraria siempre y cuando este conserven sus características iniciales de masa y de rigidez, esto es sumamente importante ya que de la apreciación que se le de al problema este puede simplificarse o complicarse tanto como se desee. En la práctica estos problemas involucran tiempo y dinero, es lógico pensar que entre más complicado sea un problema este llevará más tiempo y dinero ser resuelto, lo cual no siempre es bien visto por que

en todos los casos simplemente se cuenta con un presupuesto. Un período de tiempo en el cual tendría que ser entregada la solución para continuar con el proyecto, dando al problema otro grado más de dificultad.

Pensemos ahora en las limitantes tecnológicas, dentro de esta fase podemos decir que la capacidad de computo no es siempre la adecuada a los requerimientos del problema, lo que deriva en otra frontera que es complicada de establecer, realmente un ingeniero debe buscar que todas estas variables cuadren con el propósito de entregar los resultados. Su apreciación y decisiones son vitales en la implementación de la técnica a resolver por que de seguir una línea equivocada de estudio y desarrollo el problema se puede complicar tanto que podría parecer avasallador.

Como ya mencionamos la semiala consta de 16 costillas con sus aligeramientos, 2 vigas de sección transversal asimétrica y su piel. En el primer capítulo se menciona que algunas estructuras pueden ser simplificadas y se representadas por medio de un sistema masa – resorte en el caso de este trabajo se eligió un sistema de cuatro grados de libertad por lo que la masa de la piel, las costillas y las vigas se han sumado y dividido en 4 masas puntuales, los resorte que unen estas masas tendrán una rigidez que será calculada con la sección transversal de las vigas del modelo. La figura 2.1.2a muestra el diagrama masa – resorte al que fue simplificado la semiala además de un diagrama de cuerpo libre donde son colocadas las fuerzas y desplazamiento que afectan el sistema.

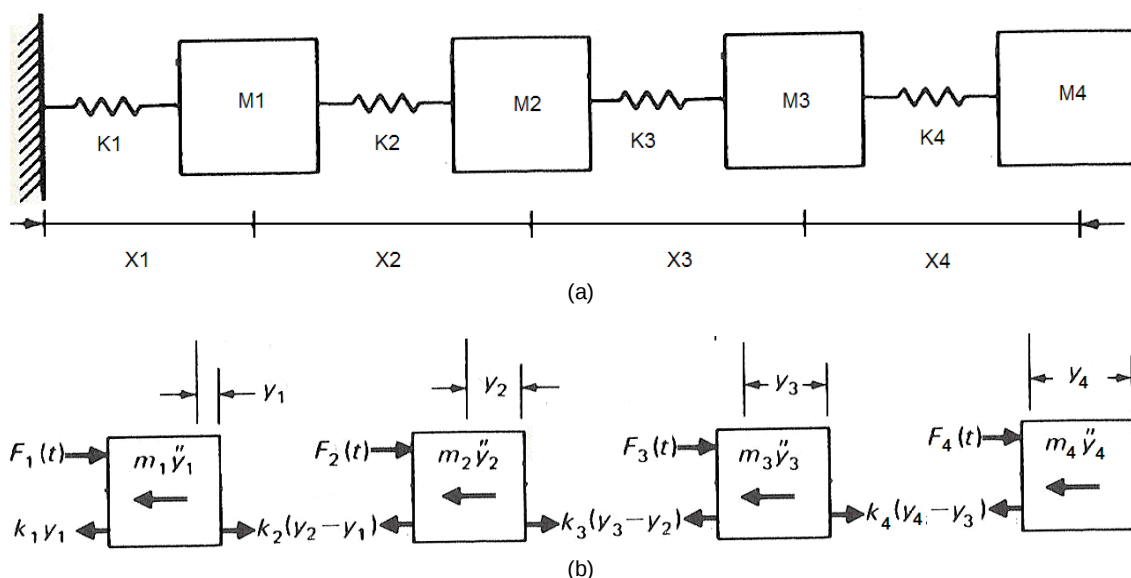


Fig. 2.1.2 (a) Sistema masa – resorte de la semiala. (b) Diagrama de cuerpo libre de la semiala

Ahora podemos escribir las ecuaciones de movimiento a partir de la figura y el diagramas de cuerpo libre de la figura 2.1.2 b, realizando las sumatorias de fuerzas que tiene ingerencia en cada masa e igualando estas ecuaciones a cero obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

$$m_1 \ddot{y}_1 - k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) = 0 \quad (2.1a)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) - F_2(t) = 0 \quad (2.1b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) - k_4 (y_4 - y_3) - F_3(t) = 0 \quad (2.1c)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 + k_4 (y_4 - y_3) - F_4(t) = 0 \quad (2.1d)$$

Al ordenar y agrupar términos obtenemos la ecuación (1.12) del capítulo 1 la cual en forma matricial es representada por:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = [F] \quad (1.12)$$

Donde $[M]$ y $[K]$ son respectivamente las matrices de masas y rigidez, que para el sistema de cuatro grados de libertad están dadas por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

Por lo que la ecuación (1.12) puede ser rescrita de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \{\ddot{y}\} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \{y\} = [F] \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es la formulación para un sistema de 4 grados de libertad a partir de las rigideces.

2.2 FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACION.

Partiendo de la ecuación (2.2) la cual representa el movimiento del sistema el cual posee 4 grados de libertad, y es el clásico problema de eigenvalores y eigenvectores, rescribiendo la ecuación utilizando el procedimiento para obtener las frecuencias

naturales del sistema del apartado 2.2.4.1 la ecuación puede ser resuelta de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_3 + k_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_4 + k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \{a\} = 0 \quad (2.3)$$

Como podemos observar $[F]$ es igualada a cero debido a que se trata de un problema de vibración libre donde no existen fuerzas externas que actúen sobre la estructura. La formulación de la ecuación (2.3) es un importante problema matemático conocido como un eigenproblema. Donde existe una solución trivial, esto es, la solución para el cual no todos los valores $a_i = 0$, para esto se requiere que el determinante de la matriz $\{a\}$ sea igual a cero; por lo tanto:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0$$

O lo que es igual

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_3 + k_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_4 + k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Al resolver el determinante de la ecuación (2.4) se obtendrá un polinomio del cual podremos encontrar las raíces de omega y estas serán las frecuencias naturales del sistema. Con el problema planteado lo que resta es asignarle valores numéricos a las masas y rigideces del sistema, para obtener el valor de la rigidez de cada tramo, partiremos de la consideración de que las dos vigas son asimétricas, lo que significa que en cada tramo tendrá un valor propio de rigidez por lo que es necesario determinar la rigidez equivalente de cada tramo del sistema, esto es posible ya que cuando se tienen dos rigideces en paralelo la rigidez equivalente es igual a la suma de ambas, el cálculo de la rigidez se obtuvo utilizando la ecuación (2.5).

$$k = \frac{12EI}{L^3} \quad (2.5)$$

Para obtener los valores se utilizó un módulo de elasticidad de 2×10^9 que corresponde al acrílico, material del cual está hecho el modelo experimental, el momento de inercia fue calculado por medio de la ecuación (2.6).

Con estos datos se calculan los valores del momento de inercia así como la rigidez en cada tramo de la viga frontal y son mostrados en la tabla 2.2.1 así mismo en la tabla 2.2.2 se muestran los mismo datos pero de la viga trasera.

Tabla 2.2.1 Momento de inercia y rigidez en la viga frontal

Sección	h (m)	b (m)	L (m)	I_{xx} (m ⁴)	k ($\frac{N}{m}$)
1	0.056688	0.003	0.241314	4.55421E-08	77781.64069
2	0.038665	0.003	0.274	1.44509E-08	4214.96152
3	0.026426	0.003	0.301	4.61354E-09	1015.046795
4	0.015496	0.003	0.37976	9.30248E-10	101.9113198

Tabla 2.2.2 Momento de inercia y rigidez en la viga trasera

Sección	h (m)	b (m)	L (m)	I_{xx} (m ⁴)	k ($\frac{N}{m}$)
1	0.044901	0.003	0.248811	2.26312E-08	35262.29386
2	0.030626	0.003	0.280797	7.18143E-09	1946.187608
3	0.020931	0.003	0.30298	2.2925E-09	494.5603652
4	0.012274	0.003	0.380095	4.62273E-10	50.5095089

Como se menciona anteriormente las dos vigas se encuentran por lo que el valor de la rigidez equivalente del sistema es simplemente la suma de los valores de rigidez del tramo trasero más el delantero, la tabla 2.2.3 muestra los valores totales de rigidez para el sistema.

Tabla 2.2.3 Rigideces equivalentes

Sección	k_{equi} ($\frac{N}{m}$)
1	113043.9346
2	6161.149128
3	1509.60716
4	152.4208287

Sustituyendo los valores de las tablas anteriores en la matriz de rigidez de la estructura esta queda de la siguiente manera:

$$[K] = \begin{bmatrix} 119205.0837 & -6161.149128 & 0 & 0 \\ -6161.149128 & 7670.756288 & -1509.60716 & 0 \\ 0 & -1509.60716 & 1662.027989 & -152.4208287 \\ 0 & 0 & -152.4208287 & 152.4208287 \end{bmatrix}$$

Ahora bien ya que se tiene la matriz de rigideces con valores numéricos, los que resta es asignarle valores numéricos a la matriz de masas, estos valores serán la suma de las masas de las costillas, la piel y las vigas que estarán concentradas en 4 puntos. La tabla 2.2.4 muestra la sumatoria de las masas en las 4 secciones en la que la semiala fue dividida.

Tabla 2.2.4 Masas concentradas del sistema

Sección	Masa pie (kg)	Masa viga frontal (kg)	Masa viga Trasera (kg)	Masa columna (kg)	Masa total (concentrada) (kg)
1	0.029549234	0.049462	0.040464	0.3160132	0.435488434
2	0.022633158	0.038219	0.0310473	0.1066784	0.198577858
3	0.016937598	0.028631	0.022824	0.049679	0.118071598
4	0.012267225	0.020793	0.016576	0.0156334	0.065269625

Sustituyendo los valores de la tabla anterior en la matriz de masas de la estructura esta queda de la siguiente manera:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.435488434 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.198577858 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.118071598 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.065269625 \end{bmatrix}$$

Si uno observa puede notarse que la matriz de masa no posee valores afuera de su diagonal principal, esto se debe a que la fuerza de inercia producida por la aceleración de la masa solo actúa en el nodo. Otro punto que se debe mencionar es que la masa se encuentra bajo el supuesto de que no tendrá inercia rotacional, con lo que la masa que pueda asociarse al grado de libertad de rotación es cero.

Ya es posible en este punto obtener los valores de las frecuencias naturales de vibración procedemos a sustituir en el determinante (2.4) la matriz de masas y la de rigideces con los valores numéricos. Con lo cual obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 119205.0 & -6161.1 & 0 & 0 \\ -6161.1 & 7670.7 & -1509.6 & 0 \\ 0 & -1509.6 & 1662.0 & -152.4 \\ 0 & 0 & -152.4 & 152.4 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0.435 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.118 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.065 \end{bmatrix} = 0$$

Al ser simplificada el determinante anterior queda como:

$$\begin{vmatrix} 1.1921 \times 10^5 - 0.43549\omega^2 & -6161.1 & 0 & 0 \\ -6161.1 & 7670.8 - 0.19856\omega^2 & -1509.6 & 0 \\ 0 & -1509.6 & 1662.0 - 0.11807\omega^2 & -152.42 \\ 0 & 0 & -152.42 & 152.42 - 0.06257\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Al resolver este determinante es posible obtener el polinomio característico del sistema que es la siguiente:

$$1.6026 \times 10^{14} - 9.9184 \times 10^{10} \omega^2 + 1.0126 \times 10^7 \omega^4 - 219.09 \omega^6 + 6.6638 \times 10^{-4} \omega^8 \quad (2.8)$$

Utilizando un programa numérico es posible resolver las raíces del polinomio característico que serían las frecuencias naturales de la estructura.

La tabla 2.2.5 muestra las raíces de $p(\omega)$ nomín (2.8) que como ya se mencionó son las frecuencias naturales del sistema, estas frecuencias se presentan en radianes sobre segundo y en Hertz.

Tabla 2.2.5 Frecuencias naturales del sistema.

No. Frecuencia	ω (rad/s)	ω (Hz)
1	44.841	7.1367
2	103.58	16.485
3	201.12	32.009
4	524.96	83.55

2.3 MODOS DE VIBRACION.

En este último apartado se mostraran los modos de vibración (eigenvector) que se obtienen a partir de las frecuencias naturales de vibración de la estructura, también se mostrara las gráficas que representan dicho modo de vibración, cabe mencionar que el procedimiento analítico solo es realizado para el primer modo de vibración, ya que cada uno de los siguientes modos de vibración se obtienen de la misma manera, al final de este apartado se muestran las cada una de las graficas de cada modo con su frecuencia correspondiente.

Para la obtención del primer modo de vibración se parte de la obtención de las frecuencias, (o eigenvalor), se toma la ecuación (2.7) y se multiplica por un vector de desplazamiento que se propone arbitrariamente, de lo que resulta un sistema de ecuaciones de primer orden (ecuación 2.9).

$$\begin{bmatrix} 1.1921 \times 10^5 a - 0.43549 \omega_1^2 a & -6161.1b & 0 & 0 \\ -6161.1a & 7670.8b - 0.19856 \omega_1^2 b & -1509.6c & 0 \\ 0 & -1509.6b & 1662.0c - 0.11807 \omega_1^2 c & -152.42d \\ 0 & 0 & -152.42c & 152.42d - 0.06257 \omega_1^2 d \end{bmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

Como podemos apreciar en la ecuación (2.9) ω (ω) tiene un subíndice especificado con el número 1, este subíndice nos indica el número de frecuencia que estamos utilizando en este caso para el primer modo de vibración utilizamos la 1ra frecuencia. El paso que sigue es tomar el valor numérico de ω_1^2 sustituirlo en la ecuación (2.9).

$$\begin{bmatrix} 1.1833 \times 10^5 a & -6161.1b & 0 & 0 \\ -6161.1a & 7271.6b & -1509.6c & 0 \\ 0 & -1509.6b & 1424.6c & -152.42d \\ 0 & 0 & -152.42c & 21.181d \end{bmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

El sistema de ecuaciones obtenido al ser resuelto nos brindará el modo de vibración para esto la incógnita a debe asignársele un valor de 1 con lo que el resto de las ecuaciones puede ser resuelta.

$$\begin{bmatrix} 1.1833 \times 10^5 a - 6161.1b \\ -6161.1a + 7271.6b - 1509.6c \\ -1509.6b + 1424.6c - 152.42d \\ -152.42c + 21.181d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ b = 19.206 \\ c = 88.432 \\ d = 636.31 \end{bmatrix}$$

Nuestro último paso corresponde al escalamiento o normalización del modo de vibración este se hace multiplicando la matriz transpuesta del vector de modos por la matriz de masa de nuevo por el vector de modos, el resultado que da se le saca la raíz cuadrada y finalmente el vector de modos de vibración se divide entre este número, tal y como lo muestra la ecuación (2.11).

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\{a_j\}^T [M] \{a_j\}}} \quad (2.11)$$

Aplicando la ecuación (2.11) tenemos:

$$\{a_j\}^T [M] \{a_j\} = \begin{bmatrix} 1 & 19.206 & 88.432 & 636.31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.435 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.118 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 19.206 \\ 88.432 \\ 636.31 \end{bmatrix} = 26099$$

$$\phi_{ij} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 19.206 \\ 88.432 \\ 636.31 \end{bmatrix}}{161.55}$$

Finalmente el vector normalizado de los modos de vibración queda de la siguiente forma:

$$\phi_{ij} = \begin{bmatrix} 0.00619 \\ 0.11889 \\ 0.5474 \\ 3.9388 \end{bmatrix}$$

A continuación la tabla 2.3.1 muestra cada uno de los modos de vibración con su frecuencia correspondiente. En el capítulo 5 mostraremos en forma grafica cada uno de

los modos con su frecuencia natural además de que serán comparados con los resultados del análisis numérico y experimental.

Tabla 2.3.1 Modos de vibración del sistema

Frecuencia	7.1367 Hz	16.485 Hz	32.009 Hz	83.55 Hz
Distancia de las masas	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
0	0	0	0	0
0.241314	0.00619	0.041736	0.12712	0.76628
0.515314	0.11889	0.77592	2.0961	-0.09995
0.816314	0.5474	2.6774	-1.0198	-0.0122
1.196074	3.9388	-0.74186	0.073169	3.4607

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

CAPITULO III

ANÁLISIS NUMERICO

3.1

SIMULACION COMPUTACIONAL DE SEMIALA

Si bien el desarrollo teórico que se realizó en el capítulo anterior es de gran exactitud, siempre es recomendable realizar a la par un análisis numérico y/o experimental que nos ayude a corroborar los resultados obtenidos. En cualquiera de los diseños que se realizan hoy en día los análisis numérico, experimental o teórico van de la mano debido a que se debe tener al menos dos de ellos para poder comparar resultados y asegurar que lo que se está obteniendo sea correcto y se pueda emplear para dicho diseño.

Hoy en día el desarrollo de computadoras personales de alta capacidad de procesamiento ha hecho posible que los diseños consuman mucho menos tiempo ya que ha permitido desarrollar los métodos numéricos de una mejor forma, debido a esto se han desarrollado en todo el mundo programas especializados en diseño y en el análisis numérico como lo son Fluent, Ansys, Nastran, NX, CATIA, Autocad, Solid Work, por mencionar algunos. En este capítulo se ocuparán 2 de los programas mencionados para realizar primero el modelado y segundo para realizar el análisis modal de la semiala.

En el proceso de modelado se tomaron en cuenta la forma y tamaño de las alas de varios aviones con el fin de darnos una idea de las dimensiones y escalas que se debían tomar así como de las distintas configuraciones que existen, al final se decidió que la semiala tuviera una configuración semimonocoque de doble flechado compuesta por 2 vigas en las que se distribuyeron 16 costillas con la forma de un perfil NACA 4412 (Figura 3.1.1).

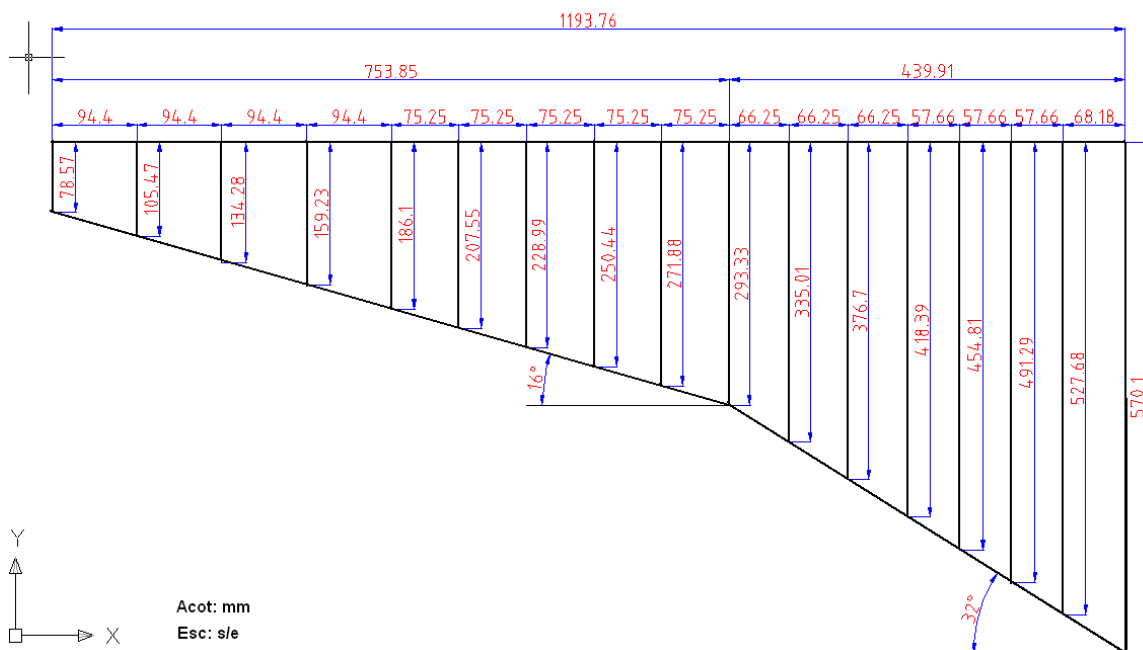


Fig. 3.1.1 Distribución de las costillas de la semiala

El modelado de la semiala se hizo en dos programas diferentes, en principio se pensó realizar el modelo geométrico en el software NX y después exportar la geometría al software Ansys para ser analizada, sin embargo debido a que ambos programas no son de la misma compañía es necesario convertir el modelo geométrico a un tipo de archivo que ambos programas sean capaces de leer. Para este caso los archivos con extensión “.iges” son aceptados en la mayoría de los programas y en este caso también por Ansys y NX, sin embargo existen errores en estos archivos cuando son importados lo que ocasiona que las geometrías convertidas no aparezcan tal y como fueron enviadas, los errores mas frecuentes son la repetición de líneas, áreas o volúmenes, además de que se presentan errores de unión de líneas, por lo que si aseamos el balance del tiempo en que uno tarda en rectificar cada uno de los errores presentes o modelar en cada uno de los programas, por regular es mas productivo modelar las geometrías en cada programas, además de que se cuenta con la ventaja de tener un comparativo entre un modelo realizado en un paquete y otro. Por lo que serán mostrados en este capítulo el proceso de modelado en el software NX y en el Ansys, la metodología que se siguió para modelar la semiala en cada uno de estos serán mostrado a continuación.

3.1.1 MODELADO DE LA SEMIALA EN NX.

Dentro del programa NX existen muchos módulos como lo son el de modelado, dibujo, manufactura, análisis estructural, placas, cableado, 3-D estudio, dibujo, etc. Para el caso de nuestro trabajo solo fueron utilizados dos módulos, el de modelado y el de análisis estructural, en el de modelado como su nombre lo dice fue donde se realizó el modelo tridimensional de la semiala en seguida será descrito a grandes rasgo la realización de la semiala.

Tabla 3.1.1 Puntos del perfil

% de la cuerda	Distancia en Y del Extrados	Distancia en Y del intrados
1.0000	0.0013	-0.0013
0.9500	0.0147	-0.0016
0.9000	0.0271	-0.0022
0.8000	0.0489	-0.0039
0.7000	0.0669	-0.0065
0.6000	0.0814	-0.0100
0.5000	0.0919	-0.0140
0.4000	0.0980	-0.0180
0.3000	0.0976	-0.0226
0.2500	0.0941	-0.0250
0.2000	0.0880	-0.0274
0.1500	0.0789	-0.0288
0.1000	0.0659	-0.0286
0.0750	0.0576	-0.0274
0.0500	0.0473	-0.0249
0.0250	0.0339	-0.0195
0.0125	0.0244	-0.0143
0.0000	0.0000	0.0000

Lo primero que se realizó fue ingresar los puntos del intrados y extrados del perfil (Tabla 3.1.1), de la costilla de la semiala, como se menciona anteriormente el perfil seleccionado es el NACA 4412, mediante la herramienta de curvas spline, se unen los puntos del perfil para formar la superficie de presión y de succión de la semiala (Figura 3.1.2), debido a que cuando ingresamos los puntos estos se encuentran en forma de % de la cuerda, debemos escalar el perfil a la medida que deseamos, en este caso, las medidas de la cuerda de cada una de las costillas aparecen en la figura 3.1.1

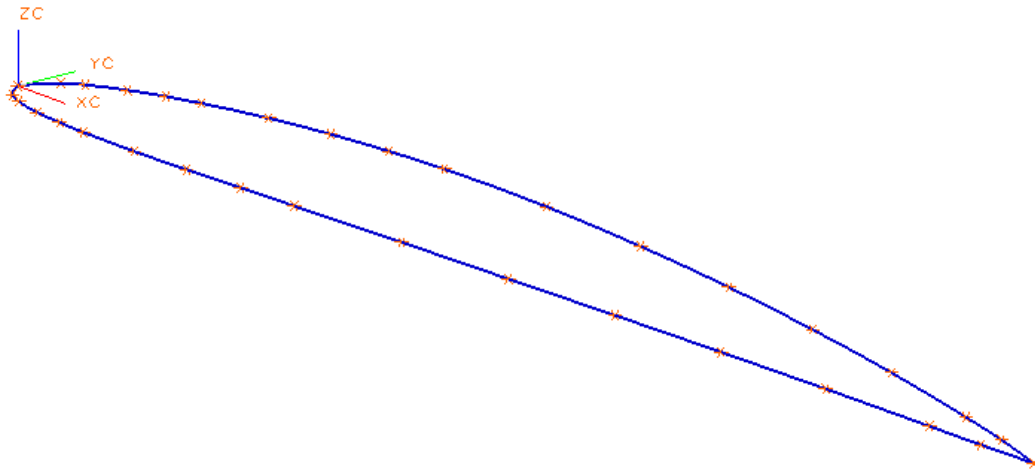


Fig. 3.1.2 Puntos unidos por líneas para formar el perfil

Ya estando construido el perfil se procedió a realizarle los aligeramientos, se tomó en cuenta la restricción de que el área de los aligeramientos no debe sobrepasar el 35% del área del perfil por lo que propusimos que la costilla tuviera 3 aligeramientos en forma de círculos distribuidos en las dos primeros tercios de la longitud del perfil, además se colocaron las líneas por donde pasa la viga principal y la viga secundaria, alado de estas se colocaron 2 líneas mas que señalan los puntos donde iniciaban y terminaban los patines, sin embargo al paso del trabajo se simplificó esto haciendo que estas líneas solo fueran una referencia. Realizado ya el perfil con sus aligeramientos y líneas de las vigas, se procedió a copiar y pegar el perfil 15 veces separándolos a las distancias que la figura 3.1 señala, colocados en su posición respectiva cada uno de los perfiles, se les cambió su escala para darle el doble flechado y tener la silueta de la semiala, luego se unieron los extremos de las líneas de la viga principal y la viga secundarias para formar el contorno de estas; al tener el contorno, usando la función de "áreas a través de cuatro puntos" se formó lo que sería el alma de las vigas, cada una de estas se realizó en dos partes, la primera empezando en el perfil de raíz y terminando en el perfil donde cambia el ángulo de flechado y la segunda parte empezando donde cambia el ángulo de flechado y terminando en el perfil de punta

cuando se tuvieron las cuatro áreas se unieron las dos de la viga principal y las dos de la viga secundaria (figura 3.1.3).

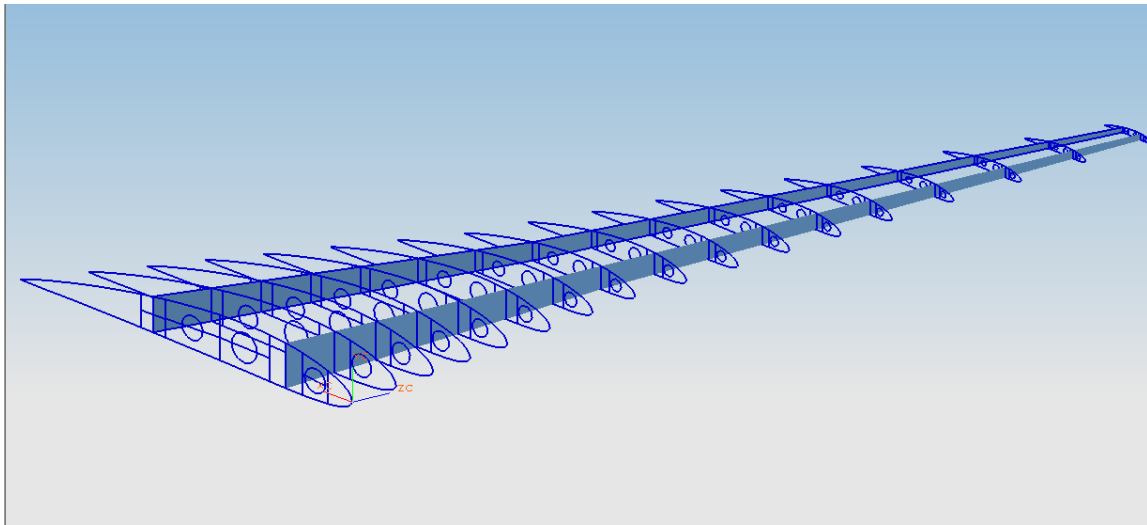


Fig. 3.1.3 Contornos de la semiala con áreas como almas de viga.

Ya con las áreas de las vigas y los contornos de los perfiles procedimos a darle volumen, esto se realizó con la función “extrude”, para esto se seleccionó para cada perfil cada una de sus líneas y los círculos que la conformaban y dándole el espesor deseado que en este caso fue de 3mm, de igual forma se seleccionó el área de la viga principal y de la viga secundaria para convertirla en un volumen del mismo espesor que los perfiles, el paso siguiente fue unirlos mediante la función “unite”, con el fin de que formaran finalmente la estructura de la semiala, para crear la piel de la estructura se utilizó la función “ruled” la cual crea áreas a través de líneas que tengan algún grado de curvatura, esto se realizó en cuatro partes, primero dos en el intrados y luego dos en el extrados, para luego unirlos y formar una sola piel, por último debido a que no se pueden borrar líneas y/o áreas debido a que son parte de los volúmenes estas fueron blanqueadas con la función blank quedando finalmente el modelo de la semiala, (figura 3.1.4), al cual se le extraerán los modos y frecuencias de vibración.

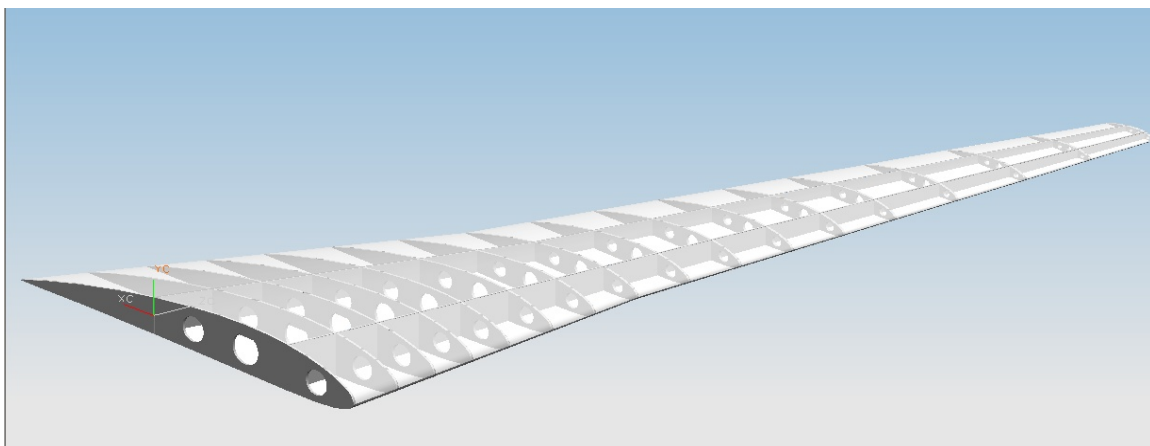


Fig. 3.1.4 Modelo final de la semiala semimonocoque

3.1.2 EXTRACCIÓN DE FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN EN NX

Como ya se mencionó antes NX es un programa de diseño, pero cuenta con una aplicación que permite resolver problemas estructurales, sin embargo sus opciones para solucionar problemas es muy limitada compara con otros software especialmente dedicado a esto, por lo que en este apartado solo con fines comparativos se describirá de manera general como es el proceso de extracción de frecuencias y modos de vibración.

Primero se ingresa al menú de de aplicaciones, se selecciona la aplicación de análisis estructural, aquí aparece una ventana donde se seleccionar el solver, para el caso de este trabajo se utilizo el solver “Structures P.E.”, se selecciona el tipo de análisis estructural y como tipo de solución el modal tal como se muestra en la de la figura 3.1.5; dentro de la solución modal se encuentra predeterminado que la extracción sea por el método “LANCZOS” y que sean extraídos únicamente los 5 primeros modos con sus frecuencias correspondientes.

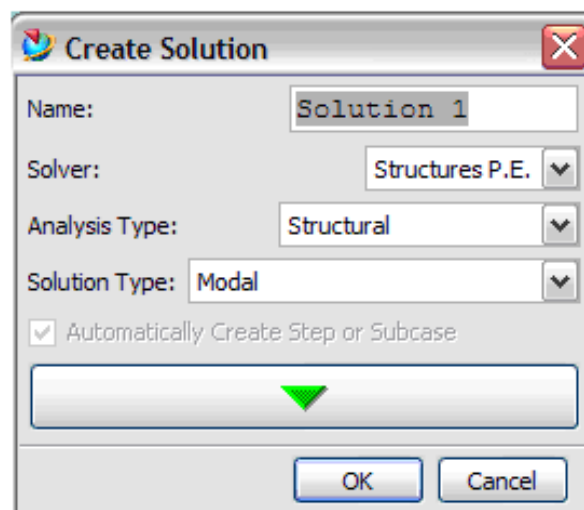


Fig. 3.1.5 Ventana de selección del tipo de solución.

Después es necesario darle a los elementos de las estructuras propiedades para que se comporten como materiales reales (densidad, modulo de Young, coeficiente de Poisson) y dependiendo de estos la extracción de modos y frecuencias se llevada a cabo. Para esto se entra a la ventana de “materials Properties” (Figura 3.1.6), esta ventana se encuentra en la barra de herramientas “stuctures”, dentro de su biblioteca se encuentran muchos materiales, en este caso se seleccionamos el acrílico y se le asigna a todo nuestro modelo. Cuando son colocadas las propiedades del material debemos realizar la discretización de nuestro modelo, en el caso del tipo de “solver” que utilizamos no posee una variedad amplia de elementos, ya que solo se puede elegir entre un elemento tetraedro de 4 nodos y otro de 10, así que se selecciono el elemento tetraedro de 4 nodos, se le asigno un tamaño de elemento 4 y se la aplico al modelo.

Teniendo el mallado de la estructura debemos aplicarle restricciones geométricas y cargas pero debido a que el estudio es un análisis en vibración libre no es sometido a ninguna carga. La única restricción que se debe aplicar es un empotre completamente restringido en la costilla de la raíz tal como lo vemos en la figuras 3.7. Este empotre tiene la característica de no permitir desplazamiento y rotaciones en los ejes X, Y, y Z, y alrededor de ellos respectivamente.

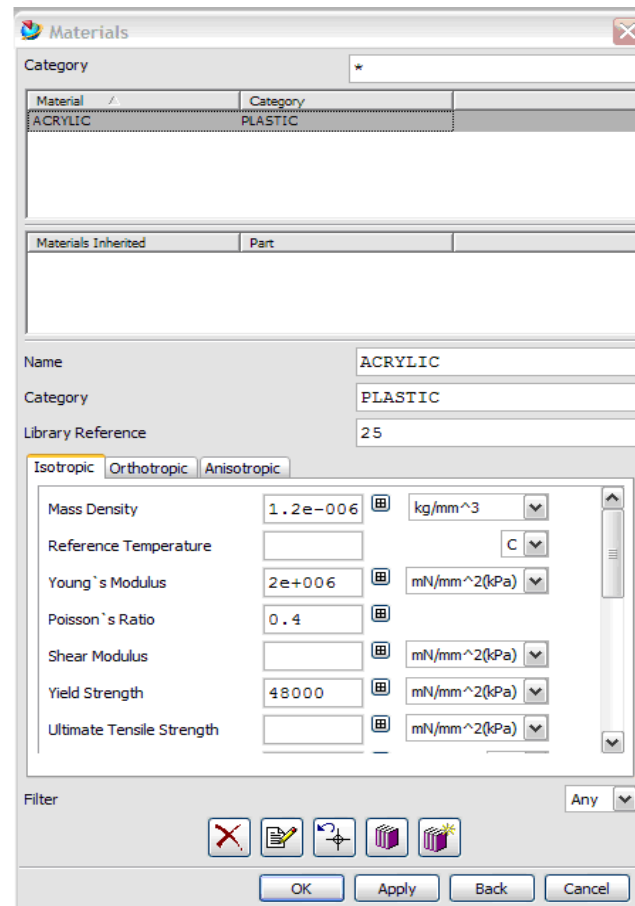


Fig. 3.1.6 Ventana de propiedades de los materiales.

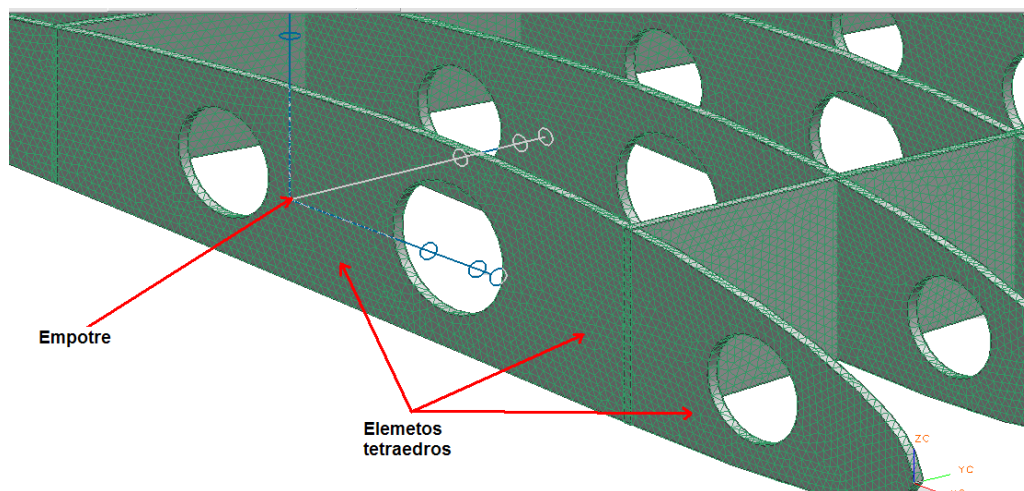


Fig. 3.1.7 Mallado y empotre de la semiala

Teniendo listo el modelo se resolvió el sistema por medio de método de bloques, antes el tamaño de elemento que se utilizó fue de 5, en este caso, se tomó un tamaño de elemento grande debido a la capacidad de procesamiento de la máquina en la que se realizó el análisis, además cabe aclarar que en para esta simulación no se realizó un estudio de independencia de malla debido a que el análisis realizado en NX solo servirá de comparativo, los resultados de la simulación son presentados a continuación.

Tabla 3.1.2 Resultados de la simulación en Nx.

Modo de vibración	Frecuencia Natural (Hz)
1	7.324
2	9.964
3	13.14
4	15.81
5	20.55

La tabla 3.1.2 muestra las frecuencias naturales en Hertz de los 5 primeros modos de vibración de la estructura; en las siguientes figuras 3.1.8 – 3.1.12 son presentados cada uno de estos modos de vibración, los mapas de colores representan los desplazamientos en mm, siendo el color rojo el que indica el máximo desplazamiento y el azul el mínimo, cabe mencionar que la piel del modelo no fue colocada debido a que el NX no nos permite pegar piel a la estructura, sin embargo como ya lo mencionamos debido a que esto solo se realizó en forma comparativa para observar como se comporta la estructura no es de gran importancia que no sea presentada la piel, ya que este análisis en el que si es contemplada la piel se realizó con ANSYS.

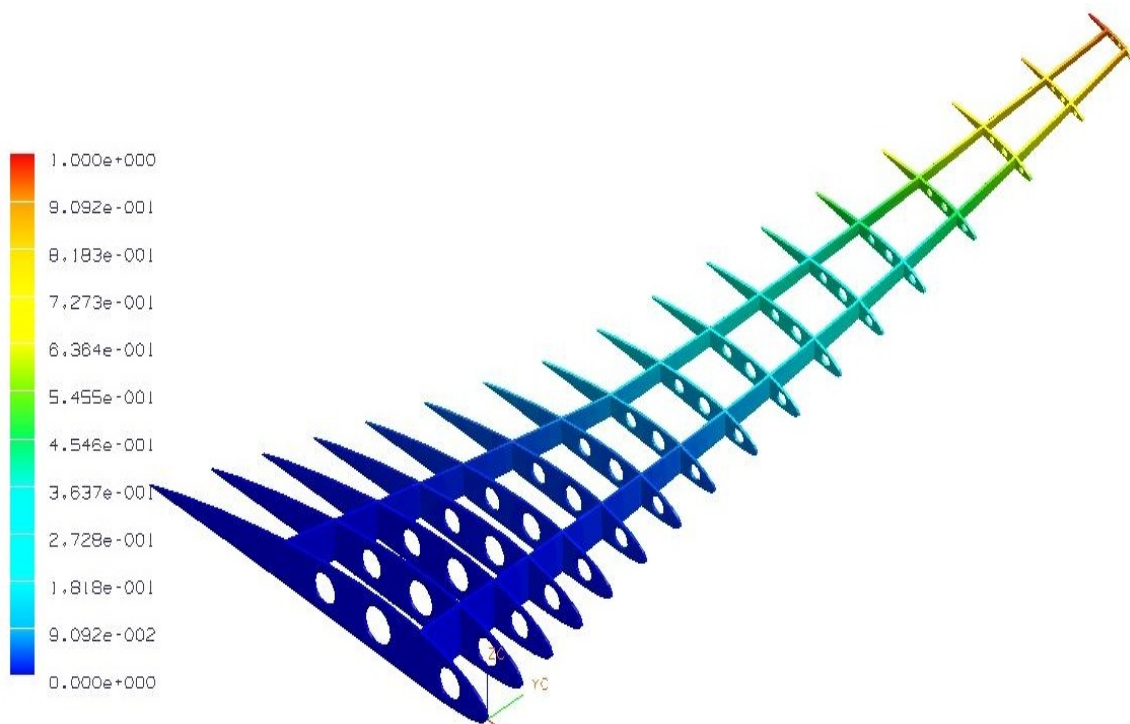


Fig. 3.1.8 Primer modo de vibración a una frecuencia de 7.32 Hz.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

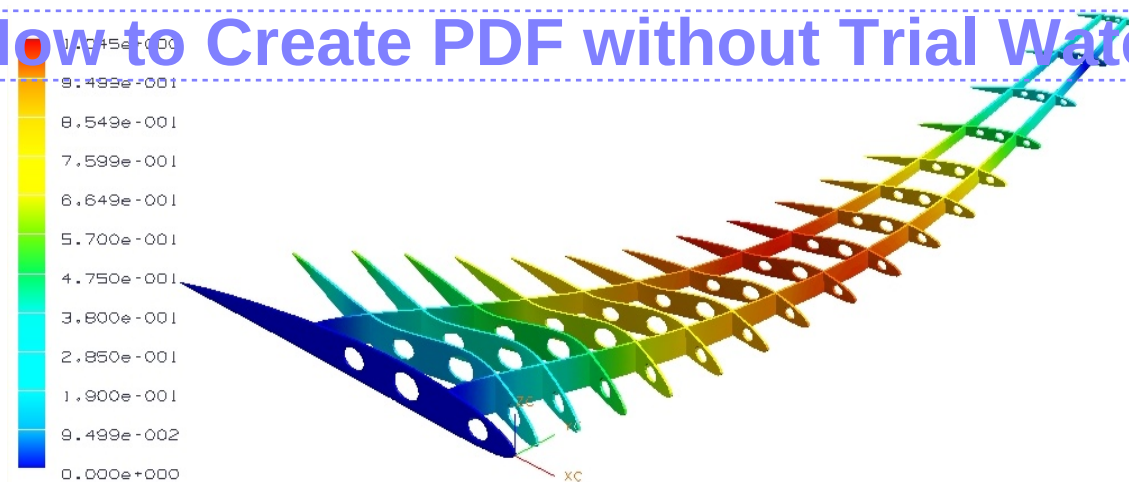


Fig. 3.1.9 Segundo modo de vibración a un frecuencia de 9.96 Hz.

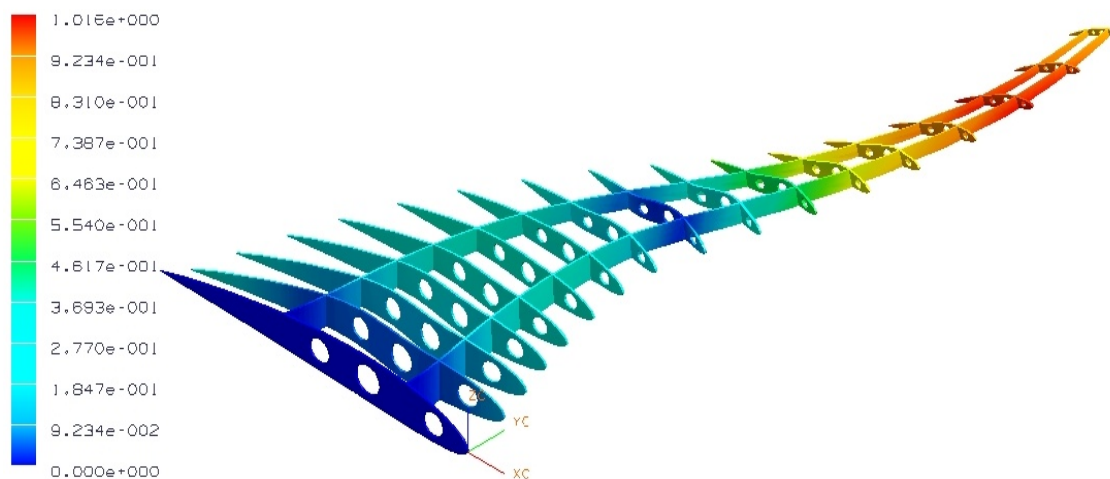


Fig. 3.1.10 Tercer modo de vibración a un frecuencia de 13.14 Hz.

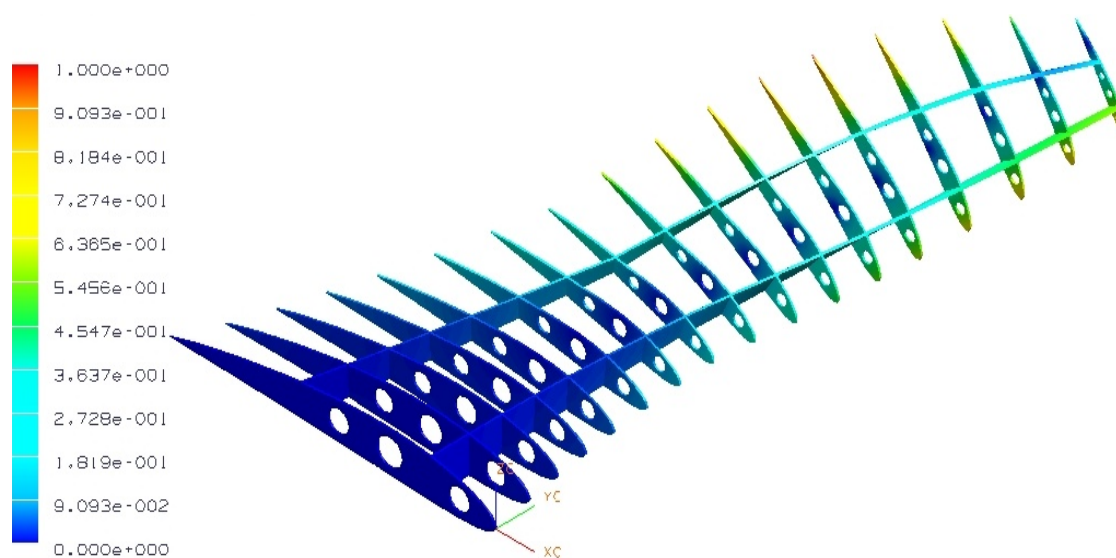


Fig. 3.1.11 Cuarto modo de vibración a un frecuencia de 15.81 Hz.

Created by eDocPrinter PDF Pro!! 78

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

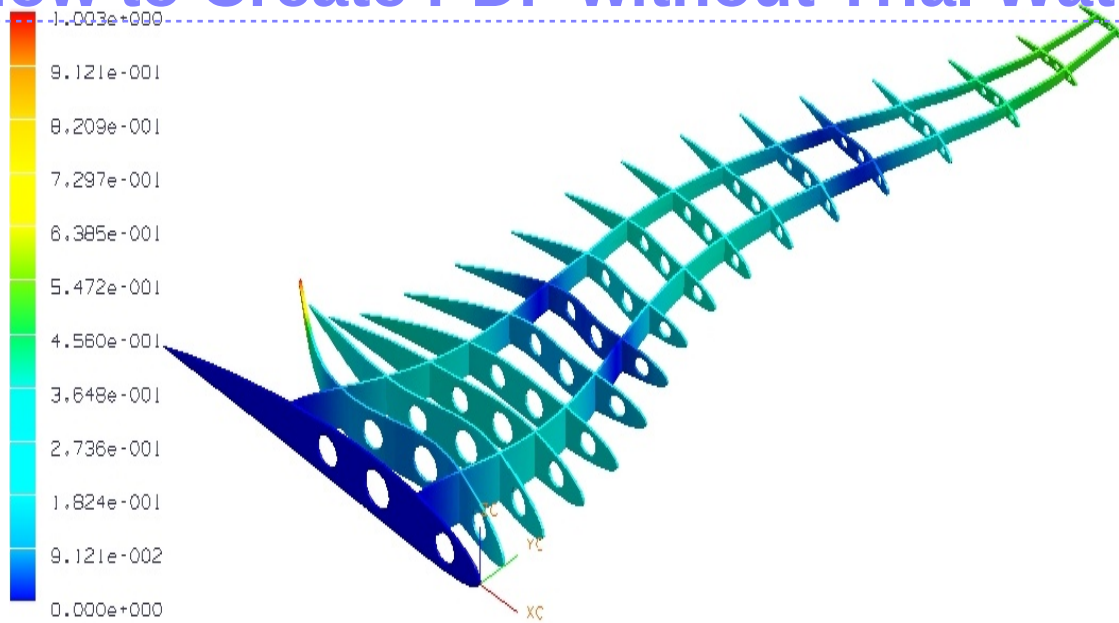


Fig. 3.1.12 Quinto modo de vibración a un frecuencia de 20.55 Hz.

3.1.3 MODELADO DE LA SEMIALA EN ANSYS.

El programa Ansys es un software diseñado para resolver problemas de análisis estructural, transferencia de calor, flujo de fluidos, potencial eléctrico y magnético. Lo que lo hace muy impracticable para el modelado, por esta razón es que la mayoría de los investigadores, estudiantes o usuarios prefieren modelar en otro software y luego exportar la geometría, pero como lo mencionamos esto trae muchos problemas. Por lo cual se hará una descripción de cómo fue modelada la semiala en este software. En general el proceso es el mismo que en NX sin embargo existe diferencias tanto del ambiente como en las funciones. El primer paso es ingresar los puntos del intrados y extrados del perfil, (Tabla 3.1), en Ansys estos puntos son llamados Keypoints y se les asigna un número conforme son ingresados, para formar la línea que une estos puntos se necesita la función spline, la cual une los puntos del perfil que son seleccionados y de igual forma le es asignado un número por cada línea, cuando tenemos las dos líneas se procede a formar el área con la función “area - arbitrary - by lines”, como en el caso anterior los puntos se encuentran en % de la cuerda, por lo que se debe escalar el perfil a la medida que se desea, para crear los aligeramientos debemos antes crear tres puntos los cuales serán el centro de cada círculo, al tener estos tres puntos formamos los aligeramientos circulares con la función “area – circle – solid circle” se selecciona cada punto y se le asigna el radio que se desea, luego se le sustrae al perfil cada uno de los círculos con la función “operate – booleans – subtract - areas”, habiendo elaborado esto, al perfil solo le resta unir 4 keypoints dos por cada lugar donde pase una viga (principal y secundaria) en este caso los keypoints que se unieron fueron el 11 y 25 para la viga principal y el 6 y 30 para la viga secundaria (Figura 3.1.13).

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

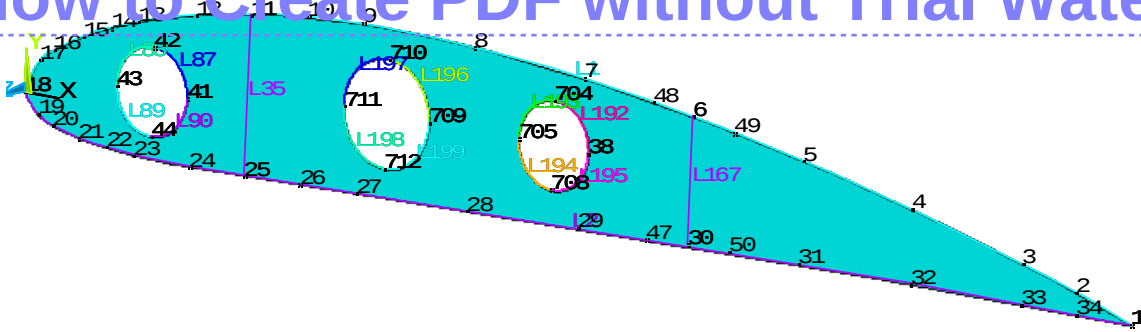


Fig. 3.1.13 Costilla de semiala modelada en Ansys

Realizado el perfil con sus aligeramientos y líneas de las vigas, luego se traza una línea perpendicular al punto 11, sobre esta línea se crean keypoints a las distancias indicadas en la figura 3.1.1, luego se copia (“copy – área”) el área del perfil y se mueve (“move – area”) a cada uno de los puntos creados en la línea perpendicular al punto 11, colocados en su posición respectiva cada uno de los perfiles, se les cambio su escala con “operate – scale – areas” después se unieron los extremos de las líneas de la viga principal y la viga secundarias para formar el contorno de estas; al tener el contorno, usando la función “area - arbitrary - by lines” se formo lo que es el alma de las vigas, el paso siguiente fue unir con líneas los bordes de ataque y de salida para así formar la piel de la estructura aquí de igual forma se utilizo “area - arbitrary - by lines” la cual sin importar que las líneas tengan algún grado de curvatura forma el área requerida, esto se realizo de igual forma en cuatro partes, primero dos en el intrados y luego dos en el extrados, quedando finalmente el modelo de la semiala, (figura 3.1.14), como podemos observar en este modelo no realizaron volúmenes lo que lo hace un modelo mas sencillo que el modelado en NX, sin embargo es mas difícil de modelar este comparado con NX, esto debido a que Ansys no es un software de modelado.

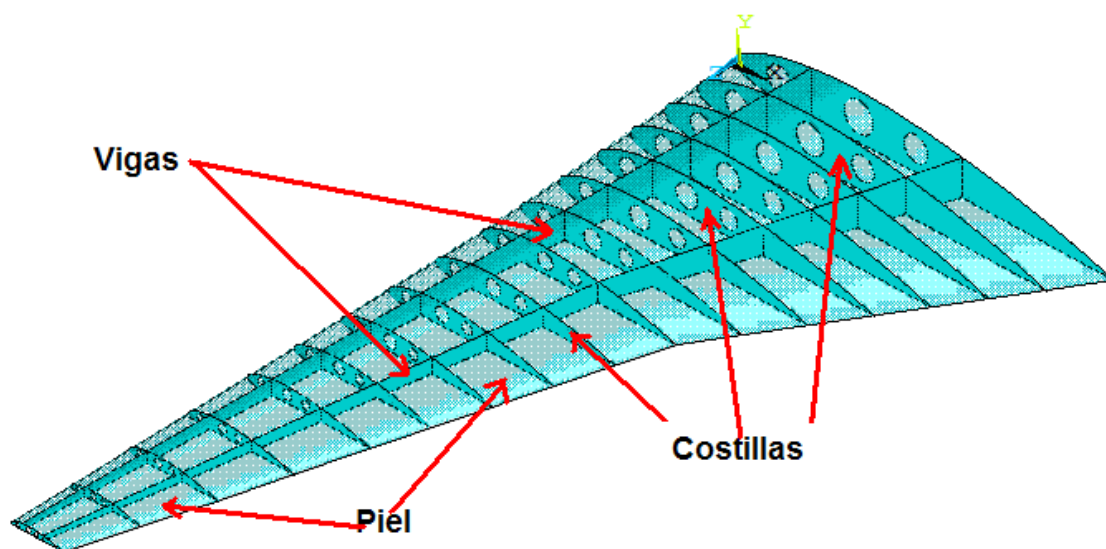


Fig. 3.1.14 Modelo final de la semiala semimonocoque en Ansys

3.1.4 EXTRACCIÓN DE FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN EN ANSYS

La semiala mostrada en la figura 3.1.14, es el modelo del cual se obtendrán las frecuencias y modos de vibración, como podemos ver la semiala esta formada por 2 vigas, 16 costillas y la piel, este modelo debe ser discretizado en un número n finito de elementos de ahí el nombre del “método del elemento finito” estos elementos deben tener ciertas características que le permitan comportarse como la parte estructural que van a representar, ansys posee un gran número de elementos que pueden ser utilizados para la simulación, como lo son los tipos link, beam, pipe, solid, shell, solid shell, constraint, viscoelastic, etc.

Cada uno de los tipos de elementos es utilizado para diferentes propósitos incluso para simplificar problemas pueden ser utilizado un elemento en lugar de otro; por ejemplo si quiere analizar una viga, se puede utilizar un elemento tipo “solid” y dibujar toda la viga, pero si se requiere ahorrar recursos de computo, este problema puede ser simplificado utilizando un elemento tipo “beam” y dándole las propiedades correspondientes. En el caso del análisis presente, se utilizan las características que tienen los elementos de poderse ejemplificar mediante otro elemento y propusimos la utilización del elemento placa (shell).

El tipo de elemento utilizado para realizar la discretización (mallado) de la semiala fue el elemento SHELL63 este elemento posee propiedades de una placa elástica es mostrado en la figura 3.1.15

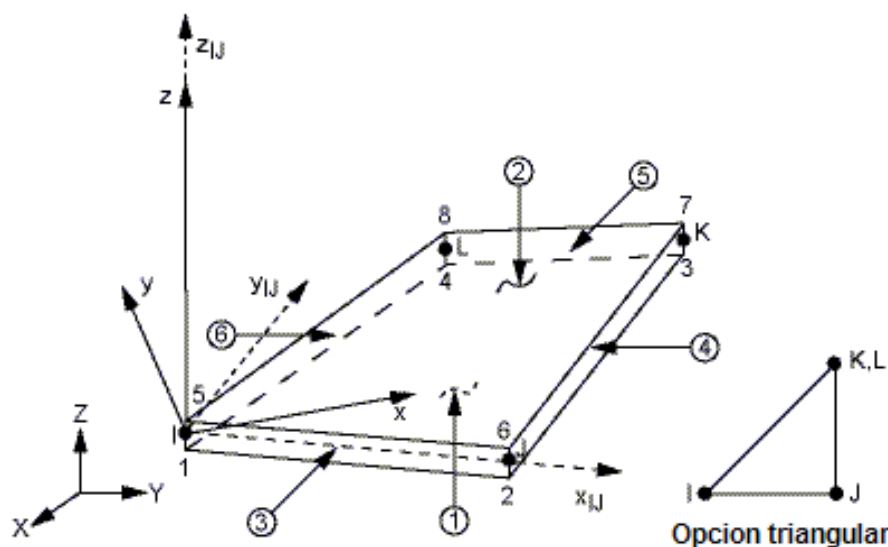


Fig. 3.1.15 Geometría del elemento SHELL63

El elemento SHELL63 puede utilizarse como placa con curvatura y/o como membrana. En ambos casos se les pueden aplicar cargas tanto normales como axiales. El elemento tiene seis grados de libertad por cada nodo: Traslación en la dirección X , Y , y

Z y rotación alrededor de los ejes X, Y y Z. Tiene también la capacidad de soportar esfuerzos y deflexiones muy grandes. Además de poseer la opción de aplicar matrices de rigideces consistentes para cuando se desea un análisis donde las deflexiones son muy grandes. En la tabla 3.1.3 se muestran las propiedades del elemento SHELL63, las cuales se configuran mediante el apartado Real Constants.

Tabla 3.1.3 Constante reales del elemento SHELL63

No.	Nombre	Descripción
1	TK(I)	Espesor de la placa en el nodo I
2	TK(J)	Espesor de la placa en el nodo J
3	TK(K)	Espesor de la placa en el nodo K
4	TK(L)	Espesor de la placa en el nodo L
5	EFS	Rigidez de la fundación elástica
6	THETA	Angulo de rotación del elemento con respecto al eje X
7	RMI	Relación del momento de inercia de la curvatura
8	CTOP	Distancia desde la mitad de la superficie hasta arriba
9	CBOT	Distancia desde la mitad de la superficie hasta abajo
10, ..., 18	(Blank)	--
19	ADMSUA	Masa agregada

Las constantes reales que se utilizan en nuestro análisis son 2: una se utiliza para las costillas y las vigas, y la otra es usada para la piel, la figura 3.16 y 3.17 nos muestra las ventanas donde deben ser definidos los valores de las constantes reales.

Real Constant Set Number 1, for SHELL63

Element Type Reference No. 1

Real Constant Set No. 1

Shell thickness at node I TK(I) 3

at node J TK(J) 3

at node K TK(K) 3

at node L TK(L) 3

Elastic foundation stiffness EFS 0

Element X-axis rotation THETA 0

Bending mom of inertia ratio RMI 0

Dist from mid surf to top CTOP 0

Dist from mid surf to bot CBOT 0

Added mass/unit area ADMSUA 0

OK Apply Cancel Help

Fig. 3.1.16 Constantes reales para las costillas y viga

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

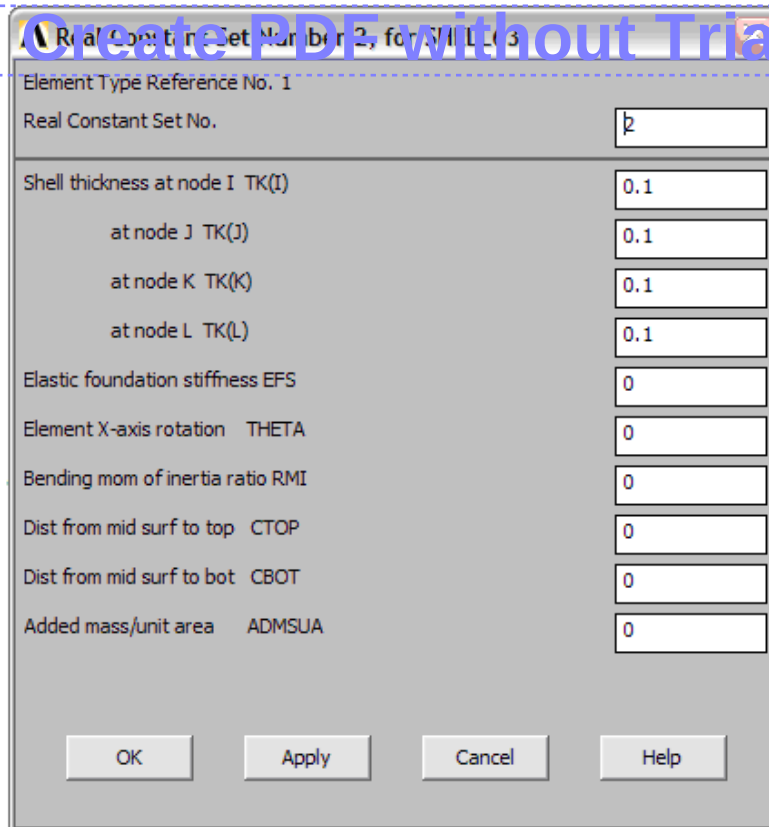
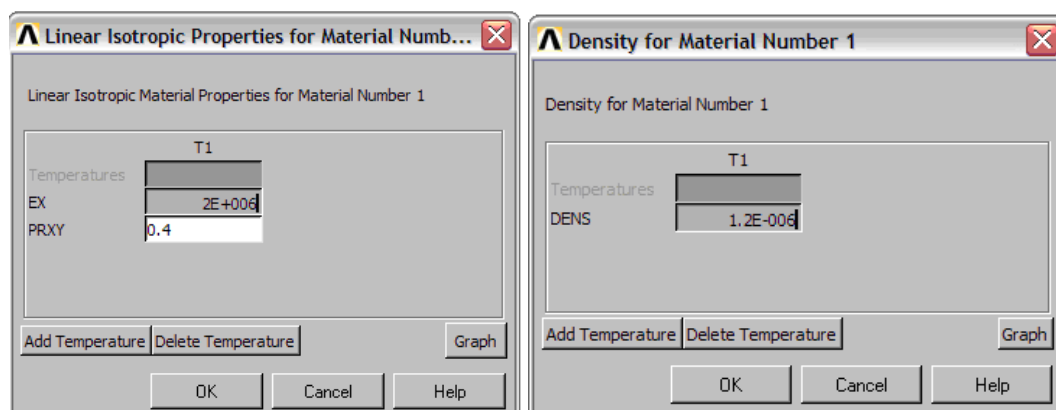


Fig. 3.1.17 constantes reales para la piel

Cuando tenemos el tipo de elemento y a este se le ha asignado sus constantes reales se debe designar propiedades tales que indiquen el comportamiento y composición de un material en específico, el material de estos tres componentes (viga, costilla y piel) está denotado por el material número 1 que es acrílico, el cual se define dentro del software como un material lineal elástico e isotrópico; en la figura 3.1.18 a) y b) podemos ver las ventanas donde introducimos los valores de las propiedades mecánicas y la densidad del material respectivamente.



a) b)
Fig. 3.1.18 Definición de las propiedades del acrílico material

Cumpliendo con los pasos anteriores se procede a realizar el mallado de la geometría teniendo en cuenta que se debe seleccionar para las vigas y costillas unas constantes

reales y para la piel otras. En la figura 3.19 observamos las costillas, vigas y piel mallada, y en la figura 3.20 podemos ver un acercamiento del mallado de uno de los perfiles y una parte de la piel, aquí podemos observar que el mallado es de tipo cuadrangular pero existe una parte de la imagen que se encuentra de color morado, esto nos indica que existen algunos elemento triangulares, esto es debido a la irregularidad de las formas, sin embargo esto no incurre ni afecta la solución del problema.

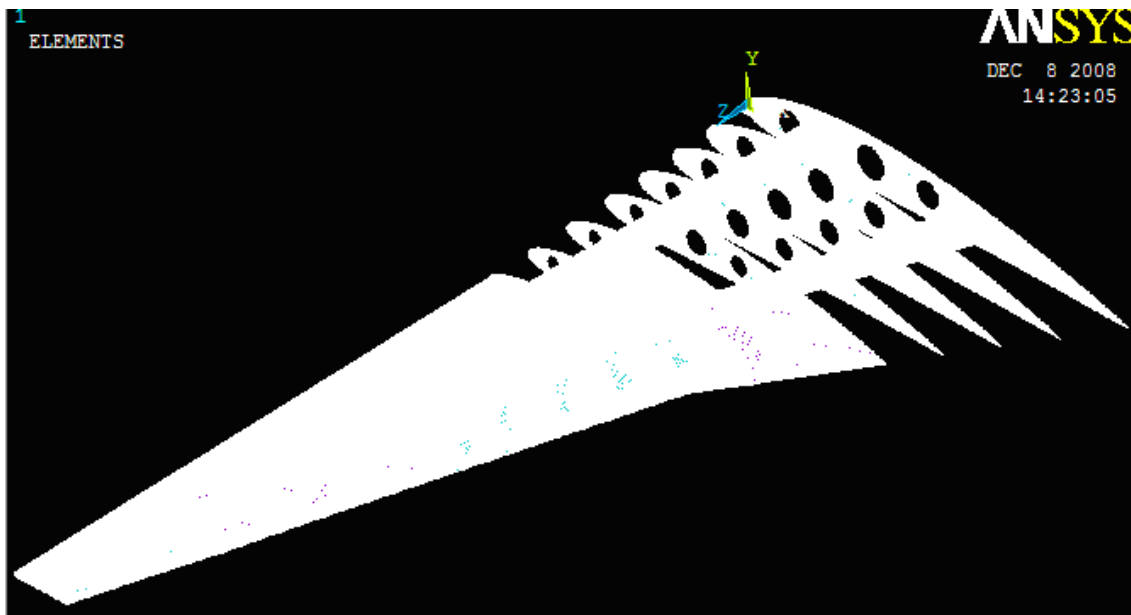


Fig. 3.1.19 Semiala Mallada

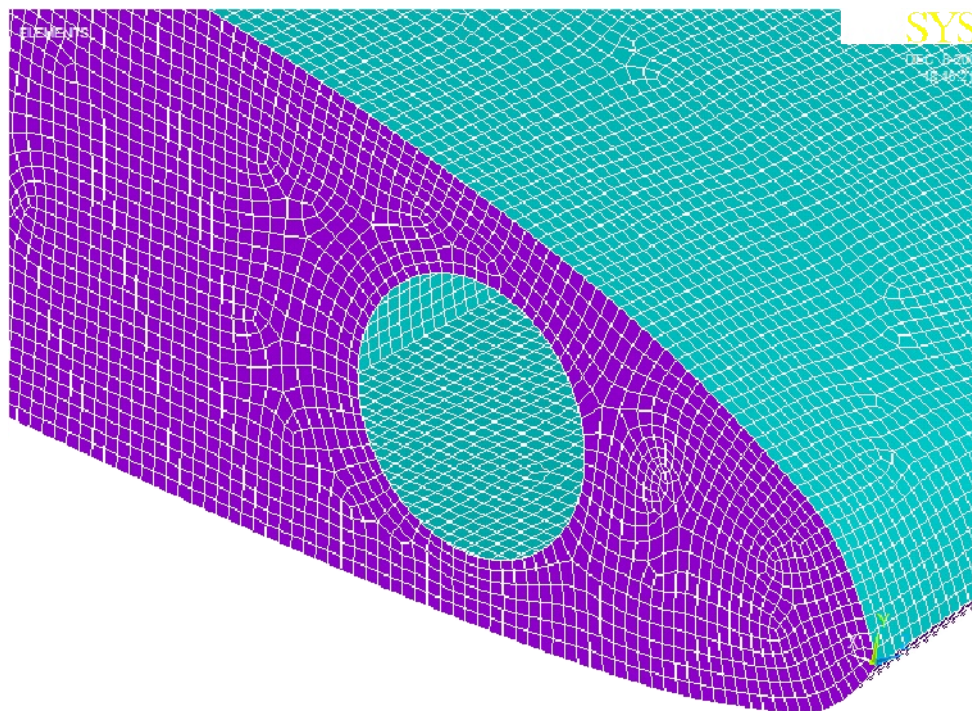


Fig. 3.1.20 Acercamiento de la malla de la costilla y piel

Una vez realizada la malla, se procede a aplicar las restricciones geométricas y las cargas a las que está sometido la semiala. Pero debido a que la semiala solo es analizada en vibración libre, no se le aplica ninguna carga. En la figura 3.1.21 se muestran el tipo de apoyo correspondiente a la semiala. El tipo de apoyo aplicado es de tipo empotre (Este empotre tiene la característica de no permitir desplazamiento y rotaciones en los ejes X, Y, y Z, y alrededor de ellos respectivamente o sea es completamente restringido).

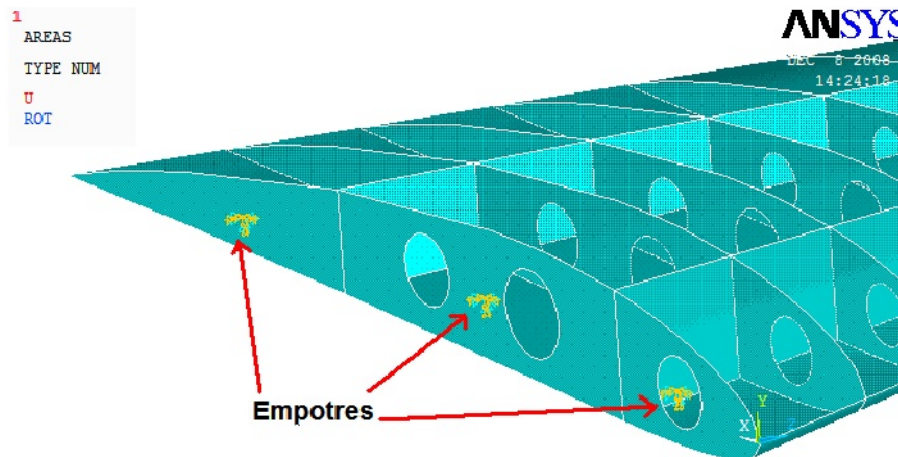


Fig. 3.1.21 Empotre de la semiala

Ahora que el modelo ya está restringido lo único que falta es resolver el problema para esto tenemos que la ecuación clásica que se resuelve para problemas de eigenvalores en un análisis modal sin amortiguamiento es:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (1.27)$$

Muchos métodos numéricos están disponibles para resolver la ecuación mostrada en la parte de arriba. ANSYS por su parte utiliza los siguientes métodos:

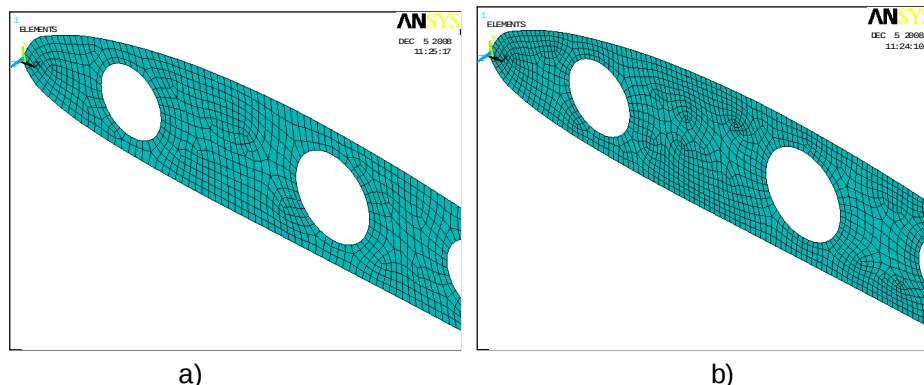
- Block Lanczos
- Subspace
- PowerDynamics
- Reduced (Householder)
- Unsymmetric
- Damped
- QR damped

Los primeros cuatro métodos (Block Lanczos, subspace, PowerDynamics, y reduced) son los que son usados mas comúnmente. La tabla 3.1.4 muestra la comparación y aplicación de forma general de estos cuatro tipos de métodos.

Tabla 3.4.4 Métodos de obtención de los modos de vibración.

Método	Aplicación	Requerimiento de memoria	Requerimiento de disco duro
Block Lanczos	Sirve para encontrar muchos modos (alrededor de cuarenta) de modelos muy complejos. Es recomendado cuando el modelo consiste de elementos sólidos y placa con formas irregulares. El desempeño de este método es muy bueno cuando el modelo consiste de placas o sólidos o una combinación de ellos. Trabaja más rápido que el método Subspace pero requiere más o menos 50% más de memoria.	Medio	Bajo
Subspace	Sirve para encontrar solo algunos modos de modelos grandes. Es recomendado cuando el modelo consiste de elementos sólidos y placa con formas regulares. Trabaja bien si la memoria es limitada.	Bajo	Alto
Power Dynamics	Sirve para encontrar algunos modos (alrededor de 20) en modelos grandes. Es recomendado por su rápido calculo de eigenvalores cuando el modelo consta de alrededor de 100,000 grados de libertad. En modelos con mallas densas, las frecuencias son aproximaciones. Es posible perder modos cuando frecuencias repetidas existen.	Alto	Bajo
Reduced	Sirve para encontrar todos (alrededor de 10,000) lo modos de modelos pequeños y medianos. Puede ser usado para encontrar algunos modos (alrededor de 40) de modelos grandes seleccionando previamente grados de libertad maestros, pero la precisión de las frecuencias depende del tipo de grado de libertad seleccionado.	Bajo	Bajo

En el análisis fue utilizado el método Block Lanczos el cual utiliza el algoritmo de Lanczos desempeñado como un bloque de vectores. Este método es tan preciso como el método subspace, pero mucho más rápido utiliza el método de solución de matrices escaso, que primordialmente todos los métodos son resueltos vía el comando EQSLV. Este método es especialmente poderoso cuando se buscando las frecuencias del sistema en un rango dado del espectro. El tiempo de convergencia puede ser el mismo cuando se extraen modos en el rango medio y alto del espectro de frecuencias como cuando se extraen los modos en el rango más bajos de frecuencias. Habiendo realizado la solución del problema utilizando el método descrito anteriormente debemos saber si nuestros resultados no varían con respecto al tamaño de la malla por lo que se realiza un estudio de independencia de malla.



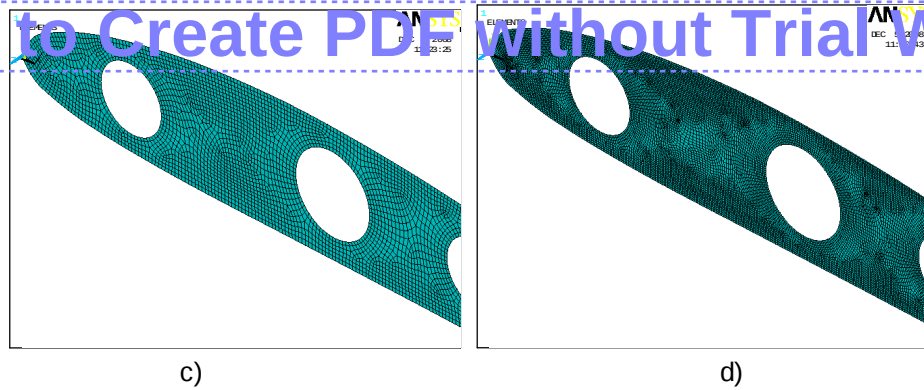


Fig. 3.1.22 Costilla de semiala mallado con a) tamaño de elemento 4, b) tamaño de elemento 3, c) tamaño de elemento 2, d) tamaño de elemento 1.

El estudio de independencia de malla se utiliza para encontrar un balance entre el tamaño de elemento y la exactitud y precisión de los resultados de los modelos, este estudio es necesario realizarlo siempre, ya que nunca podemos dar por hecho que un tamaño de elemento puesto arbitrariamente nos dará un resultado correcto. Además es importante conocer el número de elementos del que constara nuestro modelo ya que este número nos dirá si nuestro equipo computacional es capaz de resolver el sistema, en la actualidad este es uno de los grandes problemas que se tiene en la investigación, debido a que en ocasiones se carece de supercomputadoras capaces de resolver sistemas de millones o miles de millones de elemento. El estudio de independencia de malla del presente trabajo fue realizado para 5 tamaños de elemento (Figura 3.1.22) los cuales se presentan en la tabla 3.1.5 que nos muestran la cantidad de elementos que se forman con un tamaño de elemento dado.

Tabla 3.1.5 Tamaño y número de elementos en el modelo

Tamaño de elemento	Número total de elementos en el modelo
4	65000
3	85000
2	104000
1.5	250000
1	350000

Como podemos ver entre mas pequeño es el tamaño del elemento aumenta considerablemente el número de elementos del modelo y por consecuencia el número de ecuaciones que el programa debe realizar, como observamos el número de elementos no nos dice que tan exacto es la solución, por lo que se debe realizar la solución del sistema con cada uno de los tamaños de elemento y verificar cual es el error que existe entre cada uno de ellos, y así poder decidir cual tamaño de elemento es el óptimo tanto en exactitud y precisión como en exigencia de procesamiento del equipo de computo y tiempo. La tabla 3.1.6 nos muestra las frecuencias naturales de los 5 primeros modos de vibración de la semiala con 5 tamaños de elementos diferentes.

Tabla 3.1.6 Frecuencias de los 5 primeros modos de vibración

Modo numero	Frecuencia (Hz) del tamaño 4	Frecuencia (Hz) del tamaño 3	Frecuencia (Hz) del tamaño 2	Frecuencia (Hz) del tamaño 1.5	Frecuencia (Hz) del tamaño 1
1	7.1619	7.1669	7.1685	7.1700	7.1706
2	9.6821	9.6710	9.6608	9.6568	9.6535
3	12.729	12.699	12.673	12.664	12.657
4	15.681	15.672	15.663	15.660	15.658
5	19.901	19.872	19.839	19.827	19.818

Observamos que para nuestro modelo la variación de las frecuencias dependiendo del tamaño del elemento es de centésimas y en algunos caso de décimas por lo que podemos concluir que cualquiera del tamaño de elemento que se utilice (entre tamaño 1 y 4) los resultados serán confiables. Para darnos una idea de esta confiabilidad la tabla 3.1.7 nos muestra una comparación del porcentaje de error que tienen cada uno de los tamaños de elemento con respecto al tamaño de elemento 1, que por capacidad computacional fue el de menor tamaño que se pudo calcular.

Tabla 3.1.7 Porcentaje de error dependiendo el tamaño de elemento

Modo	% Error			
	tamaño 4 respecto al tamaño 1	tamaño 3 respecto al tamaño 1	tamaño 2 respecto al tamaño 1	tamaño 1.5 respecto al tamaño 1
1	0.12132876	0.05159959	0.02928625	0.0083675
2	0.2962656	0.1812814	0.07562024	0.03418449
3	0.56885518	0.33183219	0.12641226	0.05530536
4	0.14688977	0.08941116	0.03193256	0.01277302
5	0.41881118	0.27247956	0.10596427	0.04541326

Los resultados de la simulación serán mostrados, analizados y comparados en el capítulo 5.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

CAPITULO IV

ANÁLISIS EXPERIMENTAL

4.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS Y VIBRACIONES.

La experimentación con modelos reales nos da una validación que sirve de base para los resultados obtenidos por métodos numéricos o analíticos, cabe mencionar que muchas de las teorías o leyes que se han establecido hasta nuestros días han sido a partir de que alguien hizo una serie de varios experimentos, tabulo los resultados, los ordeno e interpreto para después desarrollar modelos matemáticos que permitieran la reproducción de ese mismo experimento, en diferentes partes del mundo.

El presente trabajo pretende mostrar de manera práctica como es la experimentación con un modelo desarrollado en software, llevándolo a la realidad a través del maquinado por control numérico y su ensamble pieza por pieza. El resultado es un trabajo que incluye la experimentación con un polariscopio circular de refracción y un acelerómetro triaxial.

La forma de experimentar con un acelerómetro triaxial facilita la obtención de datos por que es posible fijarlo a la conveniencia del usuario, la obtención de datos se hace por medio de la computadora mediante un programa que tabula aceleración y posición en un periodo de tiempo dado. Basta fijarlo en una zona donde la estructura del modelo oscile a causa de su vibración natural o forzada.

Dentro del análisis experimental de esfuerzos tenemos el método fotoelástico este método basa sus principios como se menciona en el primer capítulo de este trabajo por medio de un modelo plástico de alta respuesta óptica y otro idéntico de baja respuesta óptica; lo cual nos permite determinar, de forma indirecta, por medio de la luz polarizada de un polariscopio, la magnitud de los esfuerzos principales y sus trayectorias.

Esta tesis utiliza un modelo plástico de alta respuesta óptica que fue emplazado en un polariscopio circular de campo claro; el cual permitió la observación de franjas isocromáticas, las cuales están ligadas a la diferencia de los esfuerzos principales. El material empleado es el birrefringente de dos dimensiones, este tipo de material es útil cuando se pretende que el estudio aplicado se lleve del modelo al prototipo, ya que la distribución de los esfuerzos no depende de la magnitud de la carga ó del factor de escala del modelo, ni de las constantes elásticas (cuando las fuerzas de cuerpo son constantes ó valen cero); de tal manera que, cuando el modelo y el prototipo son geoméricamente similares, bajo estos parámetros es posible entender de mejor manera los requerimientos en la construcción de la semiala.

4.2 DESARROLLO DEL MODELO PARA EXPERIMENTACIÓN

Dentro de los objetivos de ésta tesis uno de ellos es poder visualizar los esfuerzos producidos en el empotre de la viga principal a partir del método de fotoelasticidad, como hemos mencionado anteriormente los modelos fotoelásticos requieren ser contruidos con material birrefringente éste material es de un alto costo económico, sumamente sensible al maquinado y su presentación comercial es en pequeñas hojas que generalmente no exceden los 26×26 cm. Debido a estas razones en vez de producir una semiala completamente de material birrefringente se decidió que la semiala fuera construida de acrílico, ya que si bien no es un material sumamente sensible al la luz polarizada es posible apreciar los esfuerzos con resultados aceptables; además de que el acrílico muestra la dirección de los esfuerzos como se mostrará más adelante.

Con la intención de no perder validez en nuestros resultados hemos implementado la puesta de tres claros de viga hechos de material birrefringente para modelos foto elásticos bidimensionales, esto se hizo pegando estas placas de material a la viga principal. Una de las propiedades más interesantes de este material es que sin importar que el tramo de una sección de prueba se haya construido de manera continua o en secciones la propagación de los esfuerzos no se ve afectada y estos se muestran con continuidad en el polariscopio.

Es importante recordar que cuando se hacen análisis experimentales de esfuerzos el material que será empleado debe ser transparente a la luz, esto permite que la apreciación de las franjas sea mucho mejor, además se debe procurar escoger un material que sea sensible a las variaciones de esfuerzo y deformación, esto implica que el material tendrá una valor bajo de franja en términos de f_{σ} y f_{ϵ} . Si f_{σ} es bajo, puede obtenerse un patrón de franjas satisfactorio cuando se carga al modelo con fuerzas relativamente bajas. Se aceptan los siguientes intervalos:

$$f_{\sigma} = 0.035 \text{ a } 350 \text{ KN/m}$$

$$f_{\epsilon} = 0.005 \text{ a } 0.5 \text{ mm}$$

El material debe presentar un amplio rango de proporción lineal en las relaciones esfuerzo deformación y diferencia de esfuerzos contra orden de franja. Considérese también que el material debe de ser isótropo y homogéneo.

Para la sección de empotre y para colocar la semiala en la balanza aerodinámica se selecciono una barra de acero inoxidable de 1.9 cm de diámetro. Uno de los puntos que

no se muestran en el plano de planta de la semiala con las dos barras de fibra de carbono instaladas tanto en el borde de ataque como en el borde de salida; la primera de 3.2 mm de diámetro y la segunda de 1.2 mm estas dos barras no se contemplan en el diseño por que no ayudan a la rigidez de la semiala, la razón por la que son instaladas es por que al momento de forrar con el plástico PVC, éste no se hunda entre los perfiles creando una curvatura que modificaría las propiedades aerodinámicas del perfil.

Anteriormente mostramos el modelo elaborado en el software NX en las computadoras de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Ticomán nuestro modelo final consta de 2 vigas de sección transversal variable en donde se distribuyen 16 costillas que tiene la forma del perfil aerodinámico NACA 4412 se debe mencionar que el perfil se seccionó en tres partes para poder ensamblar el ala al final y colocar ambas vigas, una de ellas muestra un ángulo de flechado.

Otra parte esencial del modelado fue el empotre del ala ya que esta se sujeta de la balanza aerodinámica, en el presente trabajo proponemos un empotre tipo sándwich, se hace de esta manera ya que la mayoría de los aviones en los empotres muestran una serie de perfiles muy cercanos entre ellos que se unen por pequeñas vigas (figura 4.2.1). Para evitar la rotación en el empotre y poder fijar la semiala en la balanza aerodinámica, se diseñaron unas pequeñas placas rectangulares, a las cuales se les hicieron tres barrenos con la finalidad de pasar tornillos a lo largo del empotre; asegurando finalmente que no hubiera rotación en el eje X una vez montada en la balanza aerodinámica, la figura 4.2.2 muestra dichos objetos.

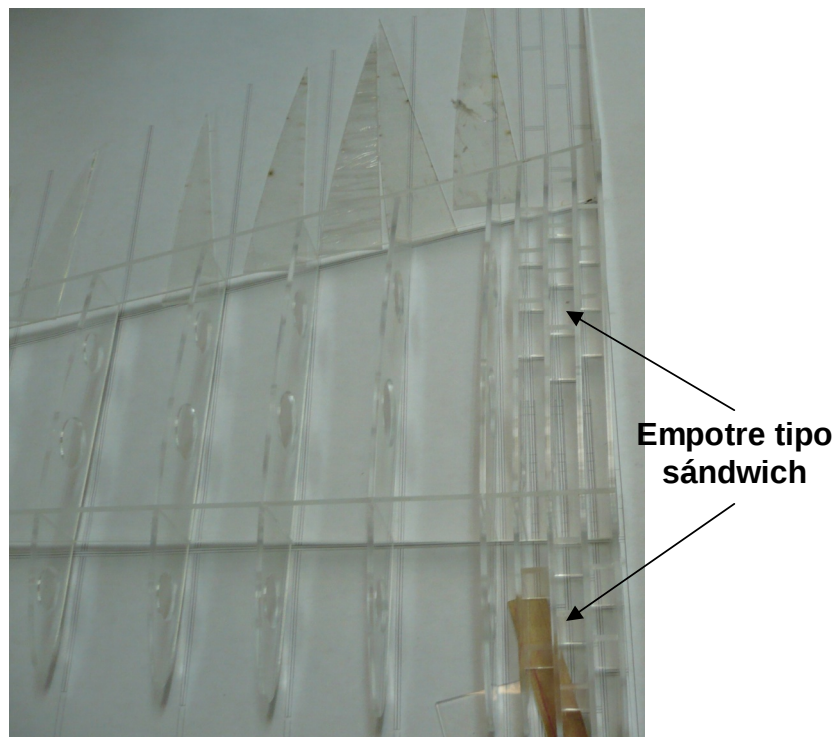


Fig. 4.2.1 Empotre de la semiala

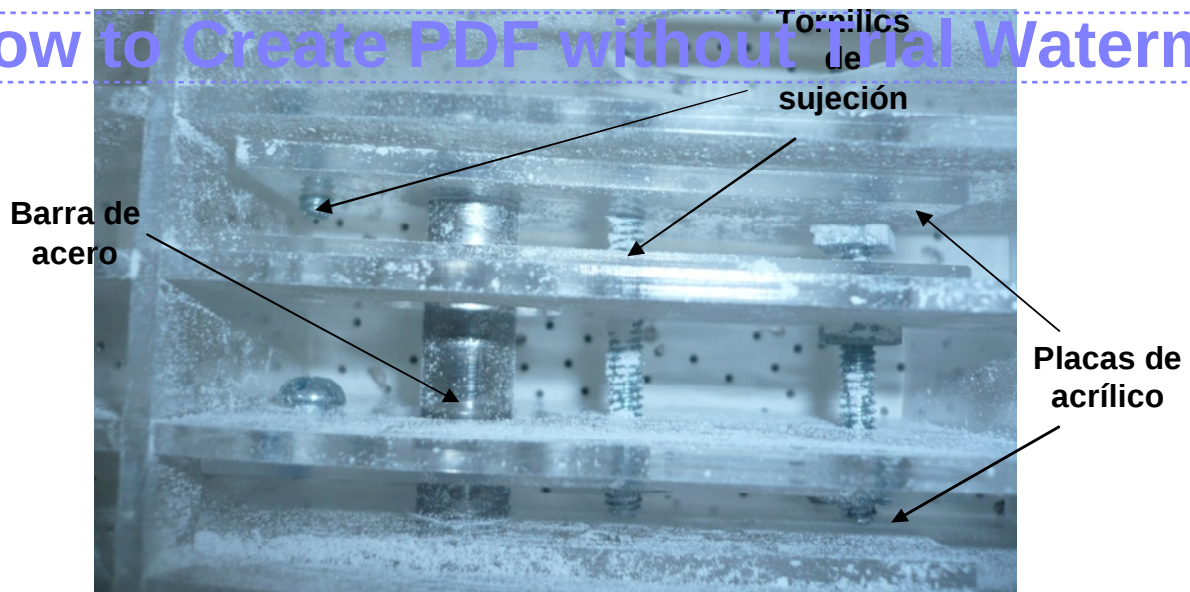


Fig. 4.2.2 Detalle del empotre de la semiala

Como se puede apreciar en las figuras el detalle del modelo es bastante complejo tanto por la forma asimétrica de las vigas y las costillas como por la distribución de estas últimas alrededor de la viga, existen diferentes maneras de construir un modelo real basándonos en los planos de un modelo creado por computadora, el equipo de trabajo optó por un manufactura precisa y sujeta completamente el plano por lo que se inclinó por la máquina de control numérico que existe en la escuela llamada CINCINATTI este es un equipo de tipo industrial con un área de trabajo de 60×45 cm aproximadamente, pero por un mal funcionamiento de la máquina no fue posible llevar acabo todo el trabajo dentro de las instalaciones del la ESIME TICOMAN.

En lugar de esto se llevaron los planos a una empresa dedicada a la construcción de modelos de acrílico bajo diseño, el equipo que utiliza esta empresa es una cortadora de láser y un router de control numérico las descripciones de los equipos se muestran en la tabla 4.2.1 y 4.2.2

Tabla 4.2.1 Características de la maquina cortadora LASER

Característica	
Potencia de láser	60 watts
Área máxima de grabado	1m x 60 cm
Velocidad de grabado	40m/s
Tipo de láser	LASER de cristal CO2
Tamaño mínimo de carácter	1mm
Potencia de maquina	15000 w
Software de control	Láser soft. V 4.0
Precisión de legibilidad	0.025mm
Plataforma de grabado	Control eléctrico de la plataforma
Dimensiones	1.430m x 1.10m x 0.95m
Voltaje de alimentación	120v/60hz
Temperatura ambiente	5° a 35°

Tabla 4.2.2 Características de la máquina router CNC

Características	
Motor	6hp
Área útil de trabajo	1.22 x 2.44m
Bomba de vacío	6hp
Puntos de succión	6
Válvulas de control independiente	3 x 160m ³ /hr
Memoria interna	128 Mb
Entrada de memoria USB	
Extractor de polvo	7.5hp
Set básico de corte	
Cableado para corriente	5m

Una de las más notorias ventajas de este tipo de máquinas es que al ser máquinas comerciales trabajan con programas comunes, por lo que los operadores solo necesitaron de los contornos de la figura en archivos con extensión DWG estos archivos son los que utiliza Autocad. Con estos dos equipos fue posible el maquinado de todas las piezas principales de la semiala; que comprende las dos vigas y todas las costillas, el paquete de piezas se muestra en la figura 4.2.3.



Fig. 4.2.3 Conjunto de piezas maquinadas con LASER y router.

La tolerancia mecánica de la cortadora de láser es de 1 mm mientras que del router es de 3 mm con lo que concuerda con las tolerancias geométricas que se establecieron para cada una de las piezas en el modelado.

Una vez realizado el paquete de piezas se procedió a la creación de las pequeñas vigas que conforman el empotre estas se llevaron acabo en el laboratorio de CNC de ESIME TICOMAN, bajo el programa Master-CAM, el equipo que se utilizó para el maquinado es

un equipo DENFORD TRIAC VMC (figura 4.2.4) las características de este equipo se muestran a continuación en la tabla 4.2.3.



Fig. 4.2.4 Fresadora CNC DENFORD TRIAC VMC.

Tabla 4.2.3 Características del equipo CNC

Características	
Mesa de trabajo	500mm x 160mm
Viaje longitudinal (eje x)	290mm
Viaje longitudinal (eje y)	170mm
Viaje longitudinal (eje z)	ATC 200mm x 235mm
Musillo a la columna	170mm
Afilamiento del husillo (+ cambio rápido)	ISO30
Eje Z	16mm dia x 5mm diapasón
Eje Y	16mm dia x 5mm diapasón
Eje X	16mm dia x 5mm diapasón
Longitud de la máquina	1285mm/1885mm
Ancho de la máquina	890mm
Altura de la máquina	720mm/1170mm
Longitud de la caja de control	600mm
Ancho máximo de la caja de Control	360mm
Altura de la caja de control	780mm
Peso de la máquina	240 kg
Peso de la caja de control	70 kg
Peso de la maquina con ATC	320 kg
Resolución de la máquina	0.01mm
Rango de velocidad del husillo	Programable de 0-4000 rpm

Las figuras 4.2.6 y 4.2.7 muestran el proceso de maquinado que se realizó para la obtención de las vigas que se utilizaron para el empotre además de las placas que sujetan la barra a la balanza aerodinámica.

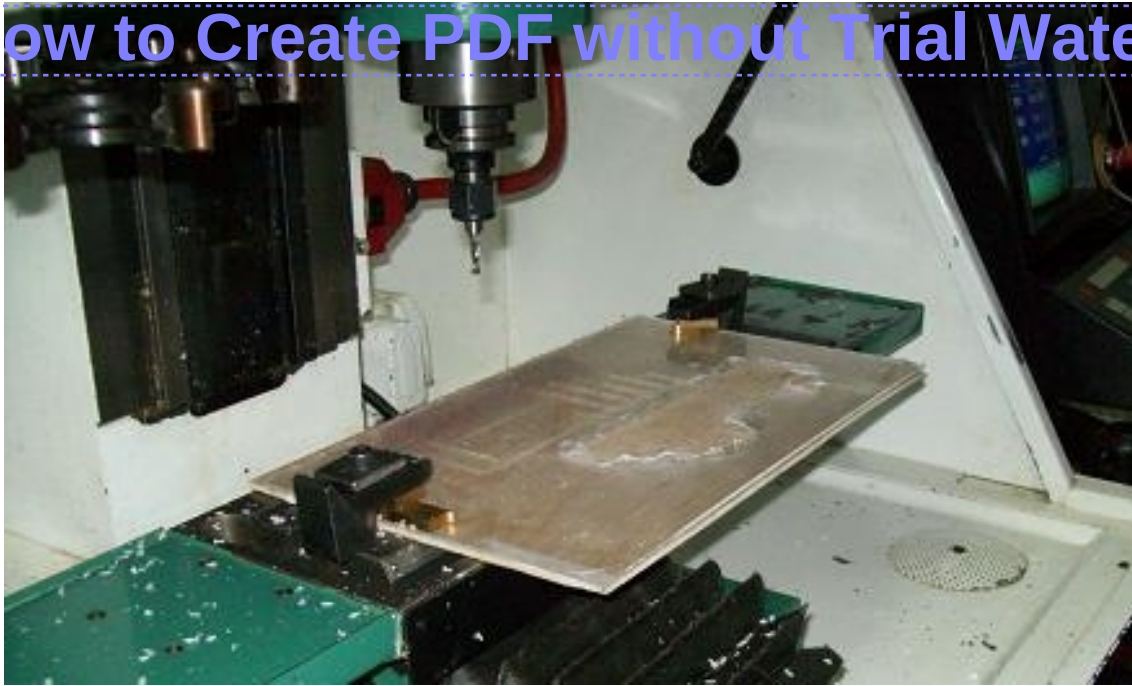


Fig. 4.2.6 Maquinado de vigas para el empotre y piezas de sujeción

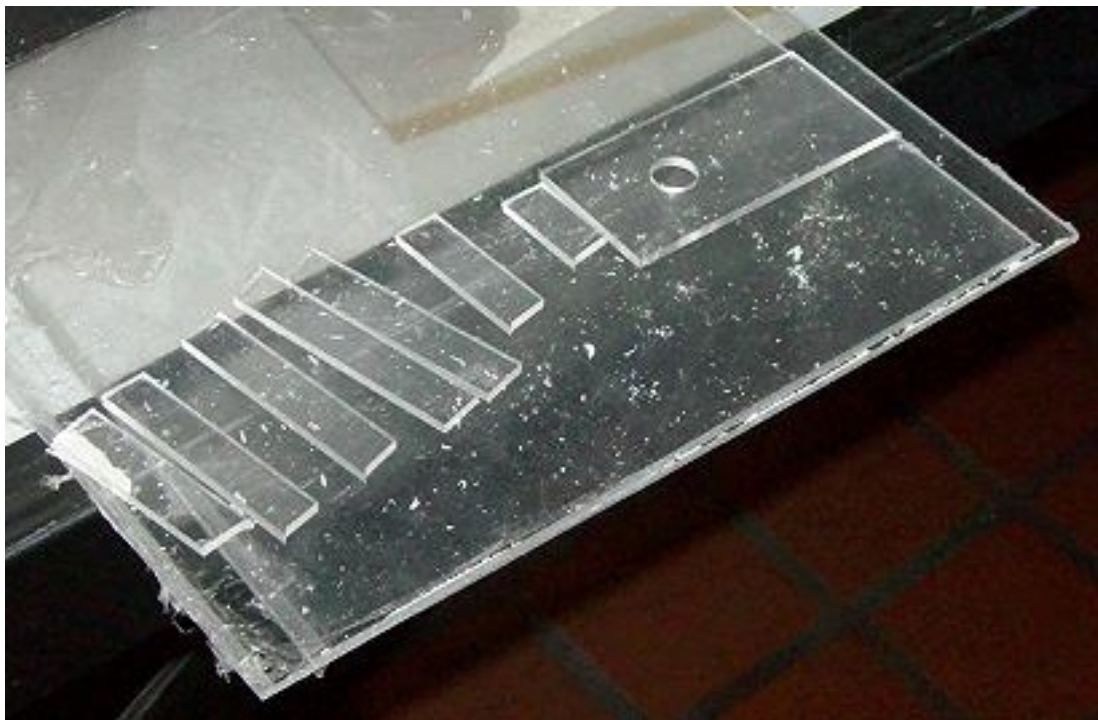


Fig. 4.2.7 Piezas Maquinadas

Finalmente al tener todos elementos necesarios para comenzar a realizar el ensamble, fue necesario probar con el polariscopio cada una de las piezas con el objetivo de demostrar que no existían esfuerzos residuales en ninguna de las piezas producidos por el proceso de maquinado a LASER y/o con el router, para esto se utilizó tanto el campo oscuro como el campo claro, podemos apreciar este proceso el las figuras 4.2.8 a la 4.2.11.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

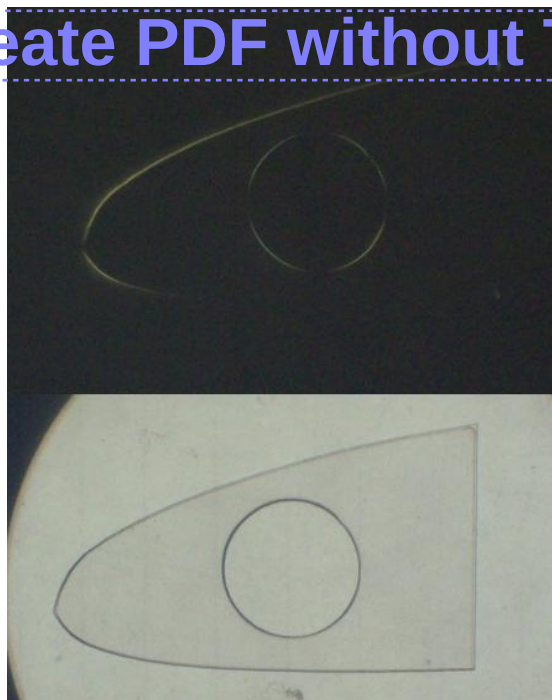


Fig. 4.2.8 Borde de ataque en campo claro y oscuro.

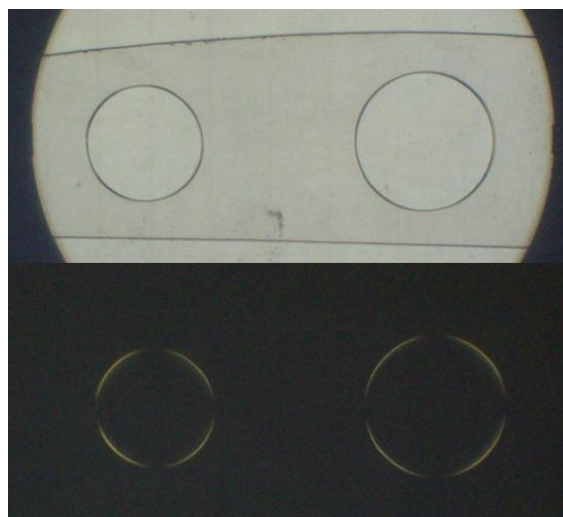


Fig. 4.2.9 Sección media del perfil en campo claro y oscuro.

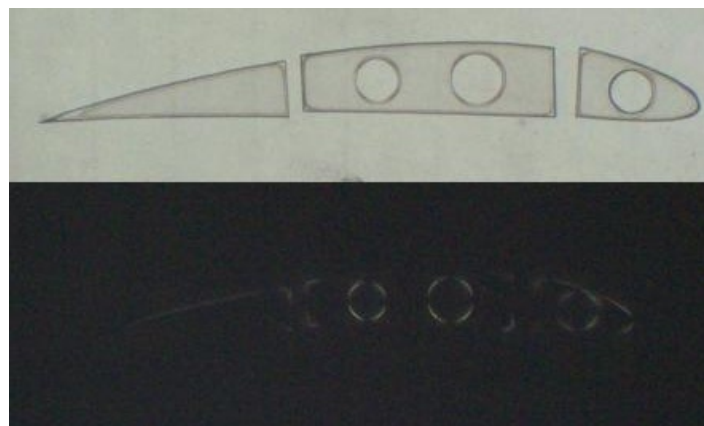


Fig. 4.2.10 Perfil seccionado en campo claro y oscuro.

Habiéndonos asegurado de que en los perfiles no se generaron grandes esfuerzos residuales, se procede a realizar la construcción del modelo, lo primero que se debe hacer es pegar los bordes de ataque a la viga principal, esto se hace por medio de una escuadra y teniendo cuidado en el pegado, la figura 4.2.11 muestra como finamente quedan los bordes de ataque pegados a la viga.

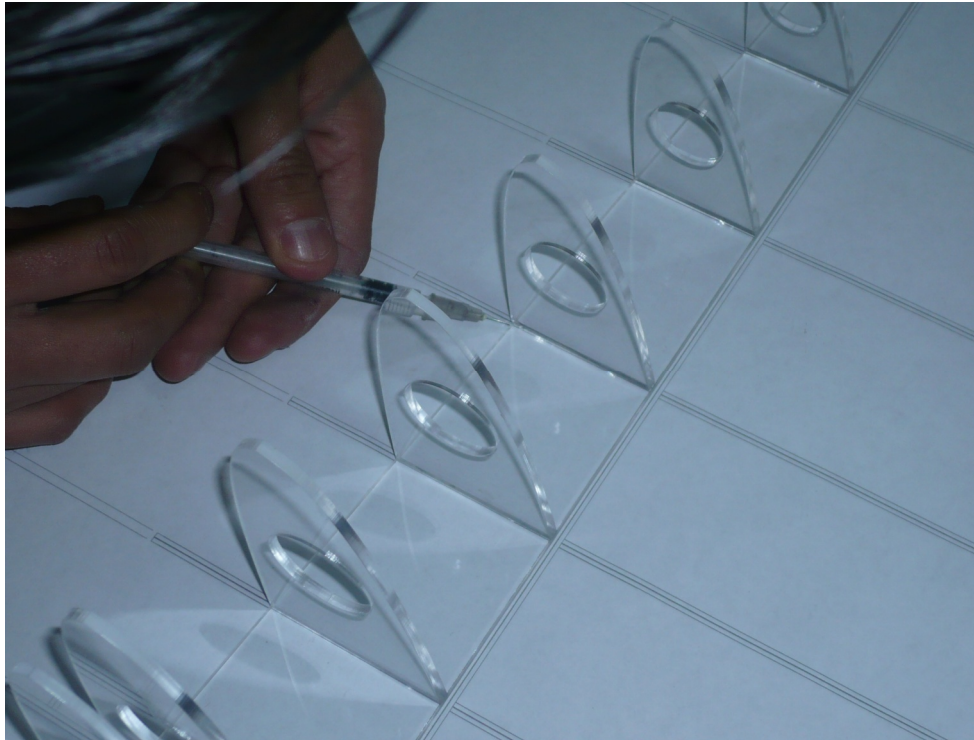


Fig. 4.2.11 Ensamble de los bordes de ataque a la viga principal

Después se colocó un sistema de sujeción que permitiera pegar la sección media de las costillas a la viga principal, del mismo modo fue necesario el uso de una escuadra y un nivel para este proceso, la figura 4.2.12 muestra el ensamble de las secciones medias del perfil y en la 4.2.13 podemos observar el ensamble final de las secciones medias.



Fig. 4.2.12 Pegado de la sección media de los perfiles.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!



Fig. 4.2.13 Ensamble final de secciones medias de las costillas

Después debido a que en el modelo la viga trasera tiene un ángulo para formar el doble flechado se requiere que el material sea doblado esto lo logramos calentándolo por medio de una resistencia para lograr que el calor salga de manera lineal para no hacerlo burbujear, la figura 4.14 muestra la viga trasera después de este proceso, las figuras 4.15 y 4.16 muestran que al calentar el material la resistencia deja esfuerzos residuales por lo que se recomienda que al hacer este tipo de ángulos se haga de manera precisa y cuidadosa ya que el acrílico por este proceso se vuelve extremadamente duro y poco tenaz por lo que su fragilidad aumenta, recordemos que este modelo será empleado en el túnel de viento y que debe soportar la distribución de presiones que se logre generar con la puesta en marcha de cada uno de los motores del túnel de viento.



Fig. 4.2.14 Sección de la viga donde se realizo el ángulo.

Created by eDocPrinter PDF Pro!! 99

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!



Fig. 4.2.15 Esfuerzos residuales en campo claro.



Fig. 4.2.16 Esfuerzos residuales en campo oscuro.

Cuando se realiza el doble la viga trasera se ensambla, acto seguido los bordes de salida son colocados, la figura 4.2.17 nos muestra como se realizo el ensamble tanto de la viga trasera como los bordes de salida.

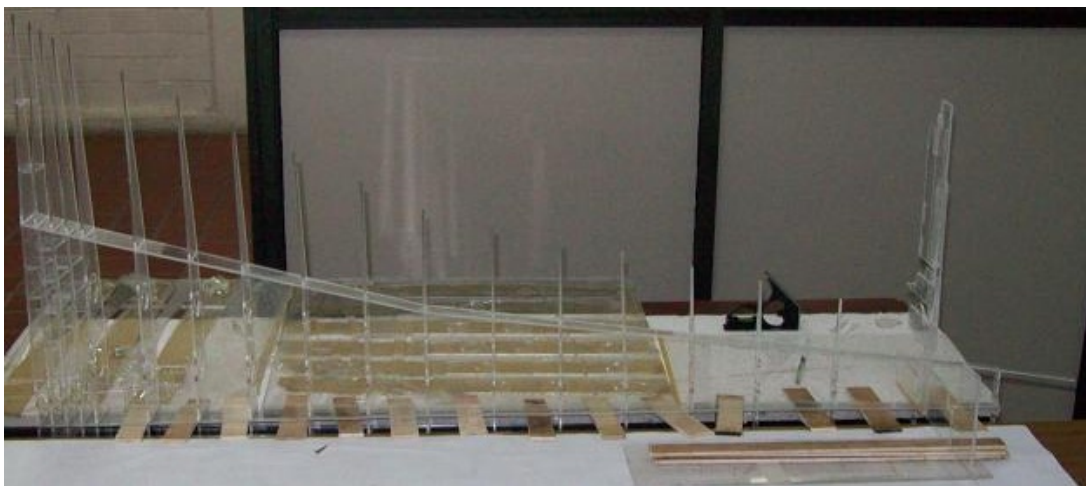


Fig. 4.2.17 Ensamble de viga trasera y bordes de salida.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Para simular los atiesadores se colocaron dos barras de fibra de carbono en el borde de ataque y en el borde de salida, (figura 4.2.18). Cabe mencionar que se quiere evitar que la luz se refleje de manera excesiva ya que si esto fuera así el polariscopio no podría reflejar y por lo consiguiente no podríamos observar nada, por lo que a toda la semiala se añadió óxido de titanio.

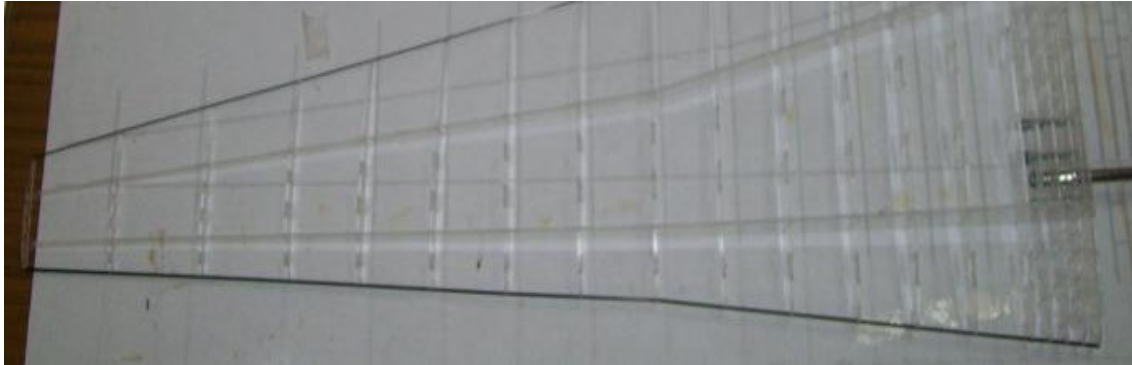


Fig. 4.2.18 Atiesadores de fibra de carbono

Con el propósito de que el modelo mostrara los esfuerzos a través del polariscopio se manufacturaron con material birrefringente de 2 dimensiones tres paneles que se situaron en los primeros tres claros de la viga principal, (figuras 4.2.19). La razón de situar estos paneles en esta zona es debido a que la zona del empotre es la que sufre las mayores deformaciones y esfuerzos, la validez de los resultados es aceptable por que es en la superficie donde tienen lugar comúnmente los esfuerzos más grandes y también los de mayor importancia.



Fig. 4.2.19 Maquinado de material birrefringente.

El material birrefringente es capaz de maquinarse por medios convencionales el equipo DENFORD de ESIME TICOMAN es capaz de maquinarlo en intervalos de 750 rpm o superiores, (en la tabla 4.3 se menciona este intervalo), cuidando siempre evitar

producir grandes fuerzas en el corte, así como un excesivo calentamiento, ya que es posible que el calor le produzca escurrimiento plástico; de ser así, al aplicar la carga no se podrá considerar como un comportamiento elástico, sino viscoelástico.

Los tres paneles de material birrefringente colocados en los claros de la viga se sometieron a una prueba en el polariscopio en campo claro, se observó que en algunos de estos existía una precarga debido a la presión ejercida por los bordes de ataque, (figura 4.20), lo cual provoco que dichos paneles fueran rebajados hasta embonaran de forma correcta.

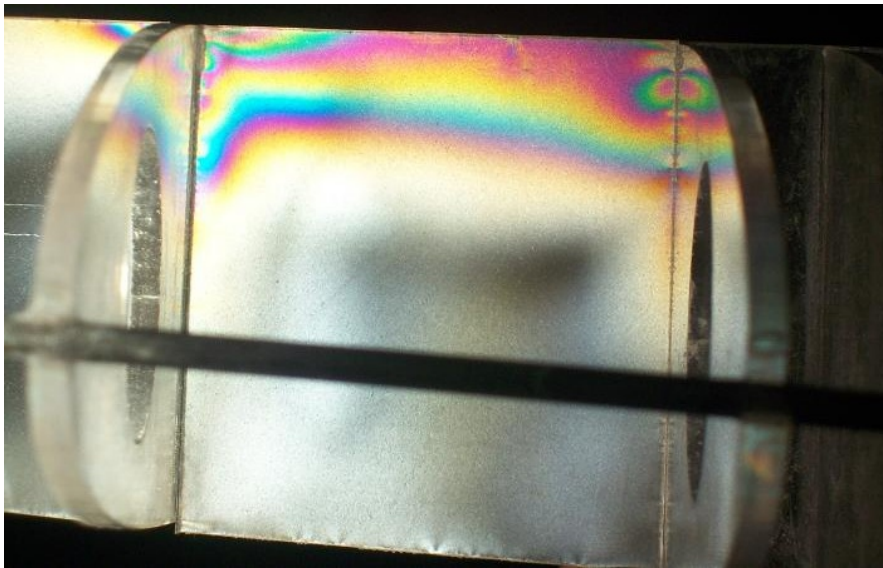


Fig. 4.2.20 Precarga en los paneles de material birrefringente.

La figura 4.2.21 muestra que al realizar el maquinado y posteriormente el ensamble los esfuerzos residuales no se presentaron, esto nos garantiza una lectura correcta del orden de franja.



Fig. 4.2.21 Ensamble final del material birrefringente en la semiala.

Se recomienda ampliamente que, de ser posible y dentro de los márgenes de lo razonable una vez que el modelo es maquinado y se encuentra listo para su análisis este se lleve acabo de inmediato, la importancia radica en que el material fotoelástico llega a presentar esfuerzos por efecto de tiempo. El problema en cuestión aparece cuando se hace un análisis del modelo, en función del tiempo y en condiciones de cero cargas. Los esfuerzos, que se presentan en el modelo como patrones de franjas, producidos por este efecto; afectan considerablemente a los esfuerzos que se presentan bajo la acción de una carga, ya que habrá una superposición de patrones debido al efecto del tiempo y a la carga.

El origen de este efecto se basa en la difusión del vapor de agua del aire dentro del modelo; la cual es tan lenta que en ciertos materiales se requiere mucho tiempo para alcanzar el equilibrio. La forma de evitar este problema es seleccionar un día relativamente seco (humedad relativa menor el 40 ó 50%). Si el modelo se maquina de un material que se ha mantenido en condiciones de humedad relativa constante, durante algunos meses; entonces habrá equilibrio y el efecto de tiempo no se presentará si se realiza la prueba bajo las mismas condiciones de humedad.

El último proceso fue el forrado de la semiala con PVC termofomable, el hecho de forrar con este material permite que a pesar de que el forrado no logre quedar correctamente, al agregarle calor este estire logrando paneles completamente lisos haciendo que todo el ala trabaje como un conjunto, (figura 4.2.22).

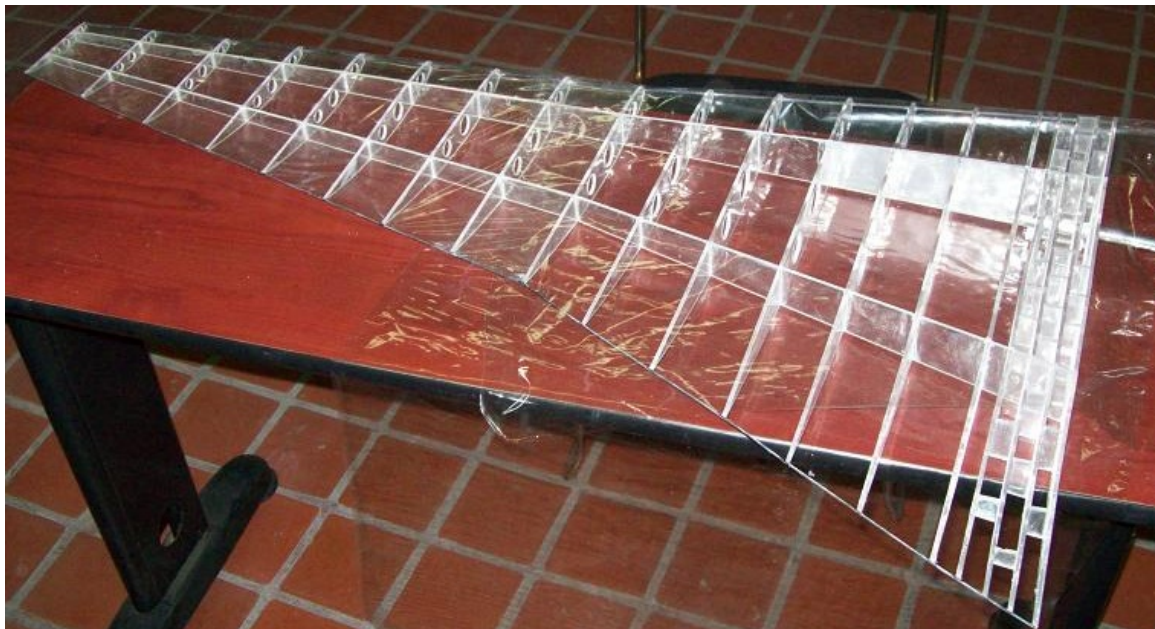


Fig. 4.2.22 Forrado de la semiala

4.3 EXPERIMENTACIÓN CON EL MODELO

El equipo de laboratorio que fue ocupado en la experimentación es el siguiente:

- Polariscopio de reflexión.- este esta compuesto por un lente polarizador, un lente analizador, un compensador, una fuente de luz polarizadora, (figura 4.3.1 a).
- Acelerómetro triaxial.- esta formada por el acelerómetro y una tarjeta transductora, (figura 4.3.1 b).
- Computadora par adquisición de datos del acelerómetro, (figura 4.3.1 c).
- Cámara de video para adquisición de imágenes del polariscopio, (figura 4.3.1 d).
- Túnel de viento de cuatro motores, (figura 4.3.2).



Fig. 4.3.1 Equipo utilizado en el experimento

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!



Fig. 4.3.2 Túnel de viento de la ESIME TICOMAN

La realización de la experimentación se llevó acabo en el laboratorio de aerodinámica de ESIME TICOMAN en el túnel de viento de cuatro motores (figura 4.3.2), la semiala se empotró en la parte izquierda del túnel fijada por medio de la balanza aerodinámica, sin embargo esta no fue ocupada para adquisición de datos, después se colocó el acelerómetro en la penúltima costilla de la punta de la viga principal y el polariscopio frente al túnel en dirección de la zona donde se colocó el material birrefringente, (figura 4.3.3).



Fig. 4.3.3 Posicionamiento del polariscopio en el túnel.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

Al terminar la preparación del modelo y su colocación dentro del túnel además del polariscopio así como el acelerómetro la metodología seguida fue la siguiente:

Se obtuvieron datos de cuatro corridas del experimento, en cada una de ellas se prendieron de manera gradual cada uno de los cuatro motores del túnel de viento. La adquisición de datos por medio del acelerómetro triaxial fue con una duración de cuatro minutos y medio, primero la semiala se probó 30 segundos con los motores apagados con el objetivo de calibrar tanto el acelerómetro como el polariscopio, después cada uno de los motores se fue prendiendo en intervalos de tiempo de un minuto, hasta tener los cuatro motores en marcha.

Para la visualización de esfuerzos el polariscopio se monto en la parte de afuera del túnel de viento la luz polarizada se dirigió hacia la sección de interés y se grabó en el mismo periodo que se obtuvieron los datos con el acelerómetro triaxial, para la etapa de visualización se considero únicamente el campo claro, al momento de la prueba se fue variando el ángulo del compensador para poder apreciar a cada ciertos grados el campo de esfuerzos producidos por cada uno de los motores, la variación de la escala de grados se hizo cada 6 segundos empezando desde el cero cada diez grados así hasta llegar a un ángulo de noventa grados.

Se debe mencionar que el experimento se realizo para tres diferentes ángulos de ataque, el primer ángulo que se utilizó fue el de 0 grados, después con 5 grados y por último a 10 grados en cada etapa se realizo el procedimiento antes mencionado. Los resultados de la visualización de esfuerzos así como la adquisición de datos de cada una de las corridas se expondrán en la el capitulo 5.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

CAPITULO V

INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS

5.1 RESULTADOS DEL ANÁLISIS TEÓRICO

En este subcapítulo se presentaran los resultado del análisis teórico, como podemos apreciar la tabla 5.1.1 nos presenta los primero 4 modos de vibración con cada una de sus respectivas frecuencias, cabe aclarar que estos son modos flexionante es decir solo representan a la semiala como si esta fuese una viga en voladizo en dos dimensiones por lo que al entrar en resonancia las deformaciones solo ocurrirán en el eje “Y”, si bien a simple vista pareciera que estos resultados no pueden ser comparados con los de la simulación, se debe recordar que en el caso de la semiala el primer modo siempre es flexionante ya sea en 2 o 3 dimensiones, por lo que la comparación es directa ya que en el caso de un análisis en 3 dimensiones en el primer modo solo ocurrirán deformaciones en el eje “Y”

Tabla 5.1.1 Modos de vibración del sistema

Frecuencia	7.1367 Hz	16.485 Hz	32.009 Hz	83.55 Hz
Distancia de las masas	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
0	0	0	0	0
0.241314	0.00619	0.041736	0.12712	0.76628
0.515314	0.11889	0.77592	2.0961	-0.09995
0.816314	0.5474	2.6774	-1.0198	-0.0122
1.196074	3.9388	-0.74186	0.073169	3.4607

Las figuras 5.1.1 a la 5.1.4 nos representan gráficamente la forma en que se deforma la estructura al entrar en resonancia a cierta frecuencia, los puntos que se muestran representan las masas concentradas, cada una de estas esta separada a una distancia característica, en la tabla anterior se muestra dicha distancia, mas adelante en el subcapítulo 5.4 se comparara el primer modo de vibración de cada uno de los análisis

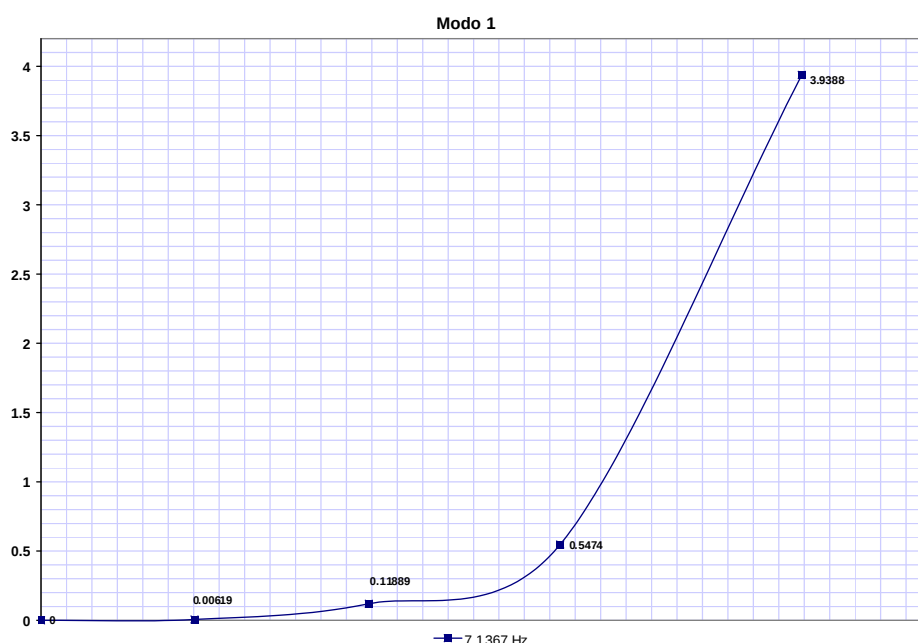


Fig. 5.1.1 Primer modo de vibración a una frecuencia natural de 7.13 Hz.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

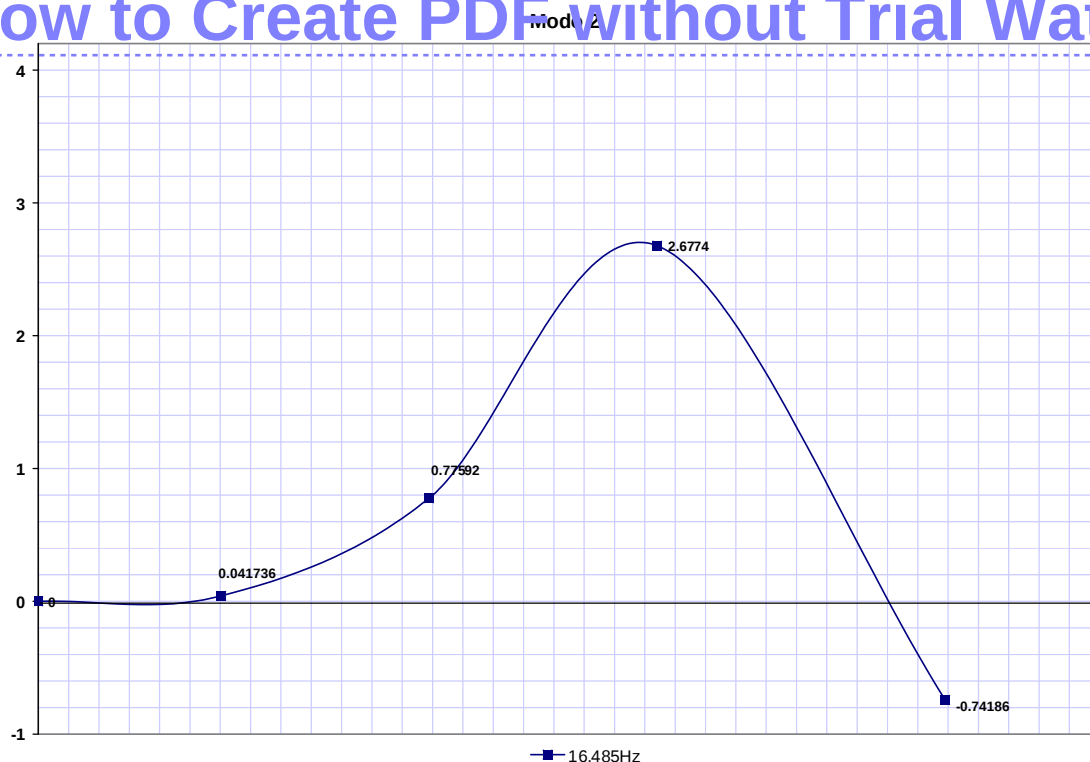


Fig. 5.1.2 Segundo modo de vibración a una frecuencia natural de 16.48 Hz.

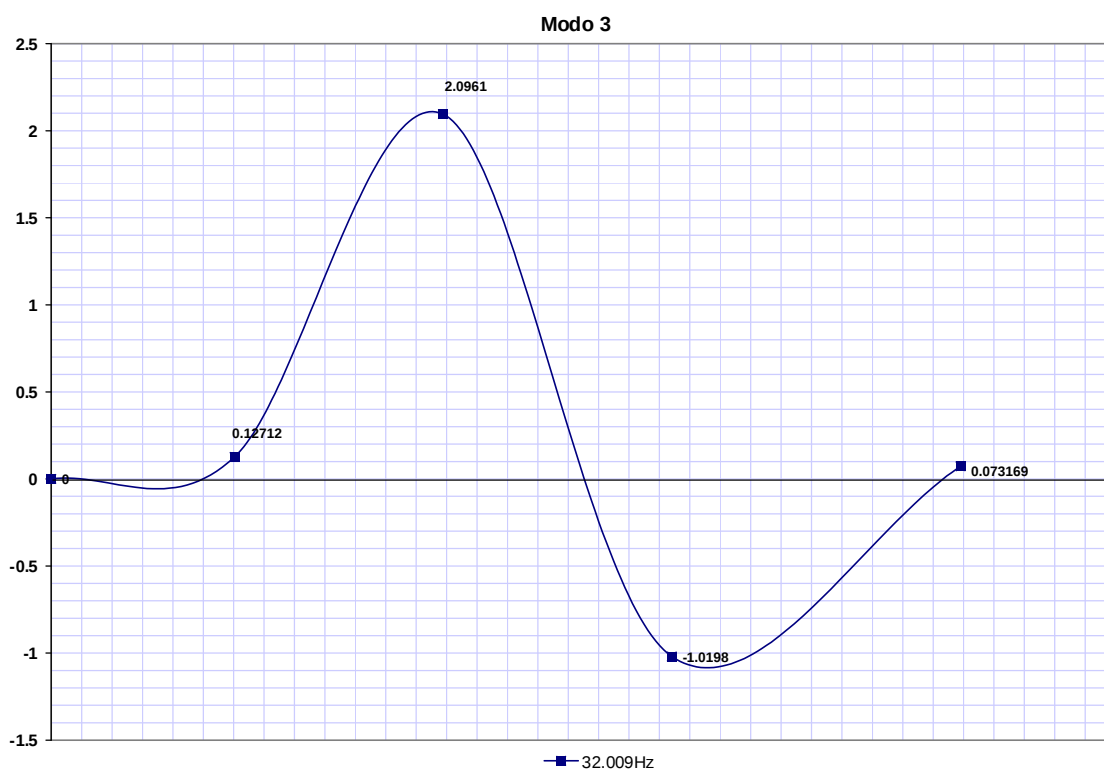


Fig. 5.1.3 Tercer modo de vibración a una frecuencia natural de 32.009 Hz.

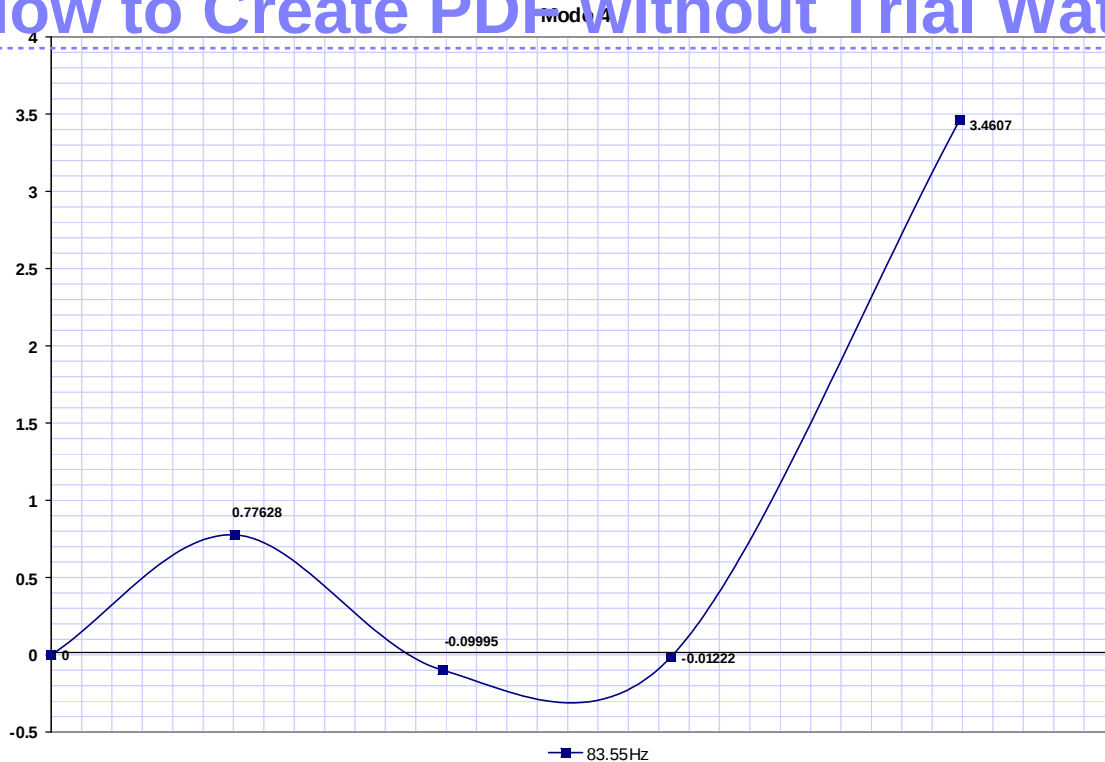


Fig. 5.1.4 Cuarto modo de vibración a una frecuencia natural de 83.55 Hz.

Por ultimo cabe decir que este análisis se va haciendo mas preciso conforme el ala se discretiza en un número mayor de masa, e incluso existe un método por el cual se puede analizar como una estructura formada por varios elementos estructurales, sin embargo tanto el ir aumentado el número de masa en las que es discretizada la semiala como el resolver el sistema como una estructura van aumentando el grado de dificultad del problema y su tiempo de solución, en este caso se opto por discretizar el continuo en 4 masa ya que representaba un problema fácil de solucionar y una muy buena aproximación a lo real.

5.2 RESULTADOS DEL ANÁLISIS NUMERICO.

Aquí se presentaran los resultados del capítulo 3. El análisis que se realizo finalmente fue con un tamaño 2 de elemento, la tabla 5.2.1 nos muestra las frecuencias obtenidas.

Tabla 5.2.1 Frecuencias de los 5 primeros modos de vibración sin piel

Modo número	Frecuencia (Hz)
1	7.1685
2	9.6608
3	12.673
4	15.663
5	19.839

Tabla 5.2.2 Frecuencias de los 5 primeros modos de vibración con piel

Modo número	Frecuencia (Hz)
1	7.2344
2	18.1190
3	19.6810
4	21.2800
5	22.5580

Estas frecuencias fueron obtenidas analizando solo la estructura, sin la piel, ya que al tener una piel muy delgada como la que se tenía (calibre 100, Aprox. 0.000024mm) la estructura no trabajaba en conjunto, ya que después de presentar el primer modo en los modo siguientes la piel entraba en resonancia e impedía ver como la estructura trabajaba y se deformaba en conjunto, en la tabla 5.2.2, mostramos las frecuencias naturales que fueron obtenidas con la piel, en la figura 5.2.1 se muestra el primer modo de vibración con la piel y en la figura 5.2.2 el mismo modo pero sin la piel, como se aprecia la diferencia entre las dos frecuencias naturales solo es de 0.066 Hz, por lo que podemos decir que esta diferencia puede ser despreciable, esta pequeña variación que se tiene es debida principalmente al cambio de masa que existe (aproximadamente 5 - 10 gr.) y al pequeño aporte de rigidez de la piel a la estructura.

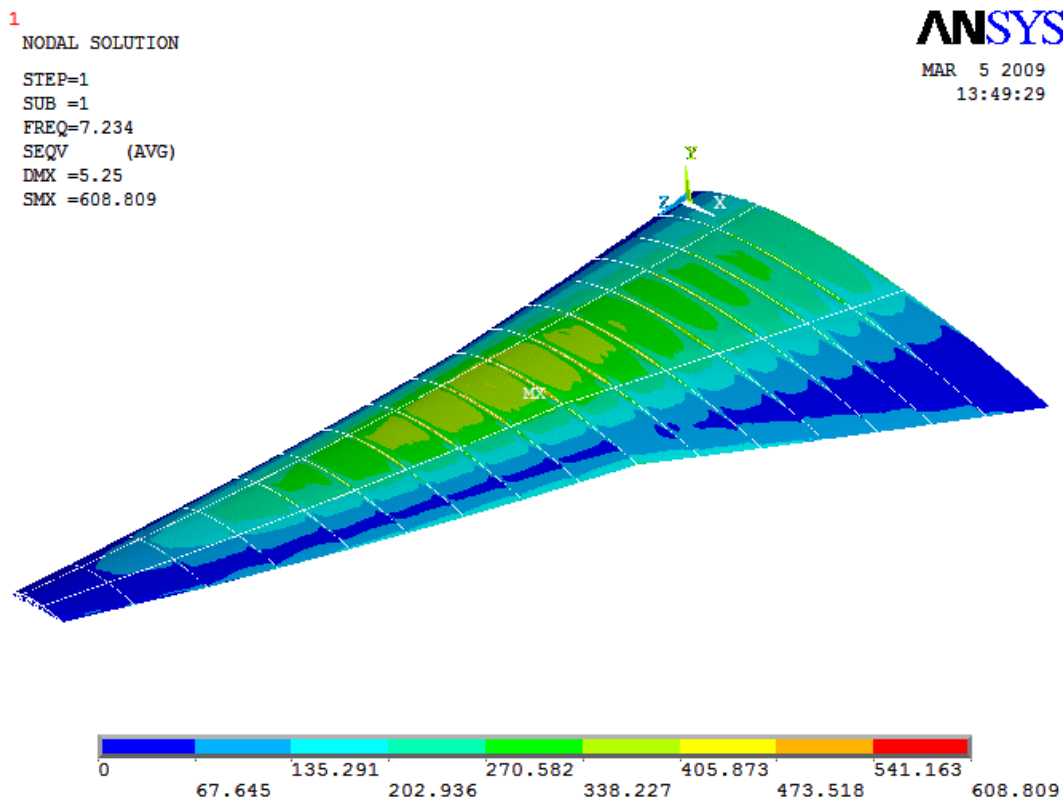


Fig. 5.2.1 Primer modo de vibración de la semiala con piel

En las figuras podemos apreciar una escala de colores esta nos muestra la intensidad de los esfuerzos de Von Mises debido a la deformación a la que es sometida la estructura al entrar en resonancia, esta escala se encuentra en KPa y como podemos apreciar el

esfuerzo máximo se produce en la piel cerca de la estación media de la costilla número 8 y es de alrededor de 608.809 KPa para la semiala con piel y para la semiala sin piel se produce en la viga principal cerca de la costilla número 8 y este es de 424.59 KPa, en la figura 5.2.3 podemos observar a detalle la zona donde ocurre el esfuerzo máximo de la semiala sin piel.

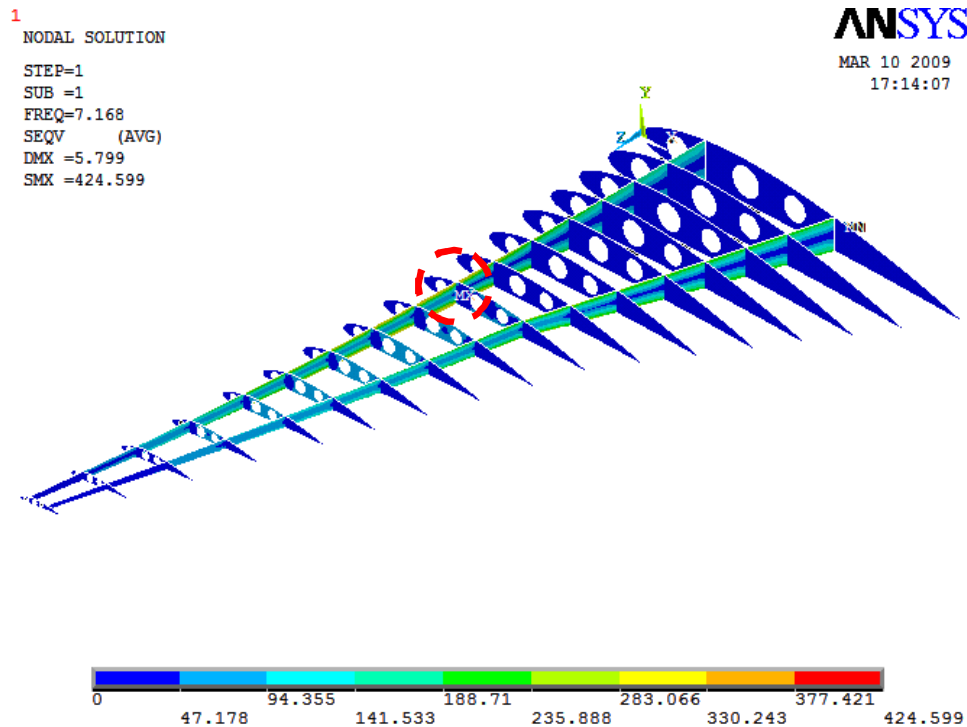


Fig. 5.2.2 Primer modo de vibración de la semiala sin piel.

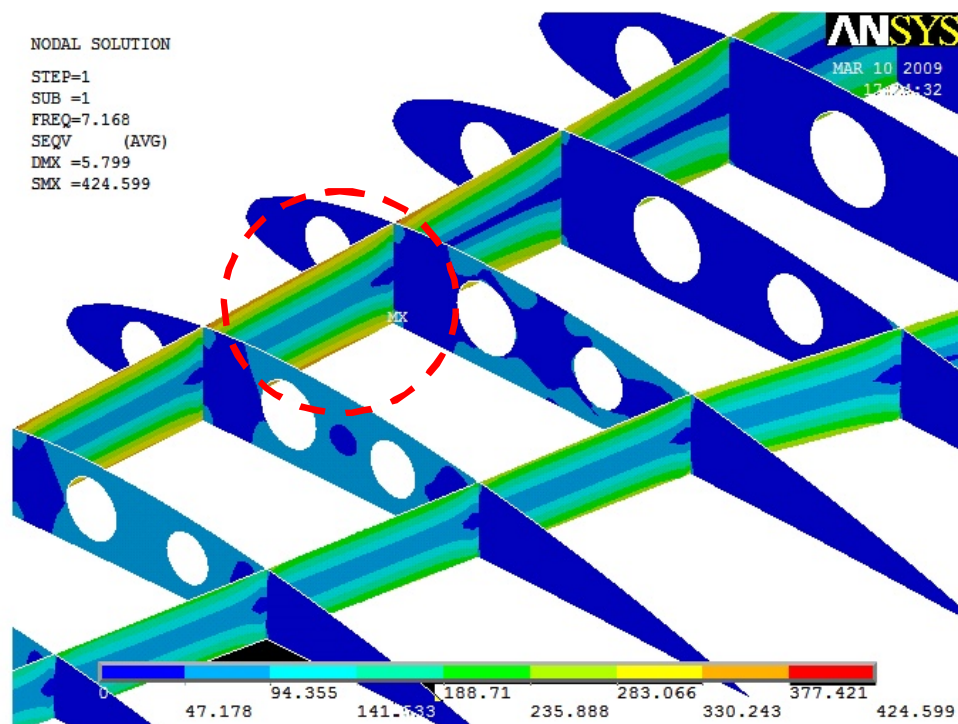


Fig. 5.2.3 Detalle de la zona del esfuerzo máximo

Las figuras 5.2.4 y 5.2.5 muestran el segundo modo de vibración de la semilla con piel y sin piel respectivamente, al contrario del primer modo, el segundo modo difiere bastante con piel y sin ella, como se puede observar en la figura 5.2.4 la piel entra en resonancia a una frecuencia de 18.11 Hz, provocando un desprendimiento de esta, por otro lado en la figura 5.2.5 vemos como la estructura es flexionada en forma paralela al eje X.

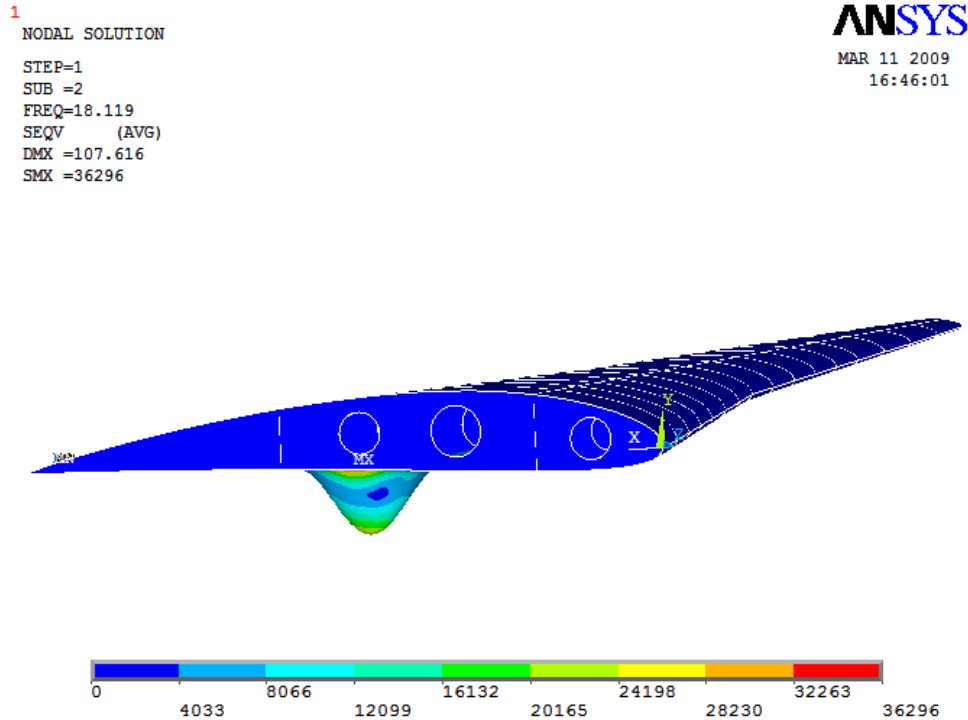


Fig. 5.2.4 Segundo modo de vibración de la semilla con piel

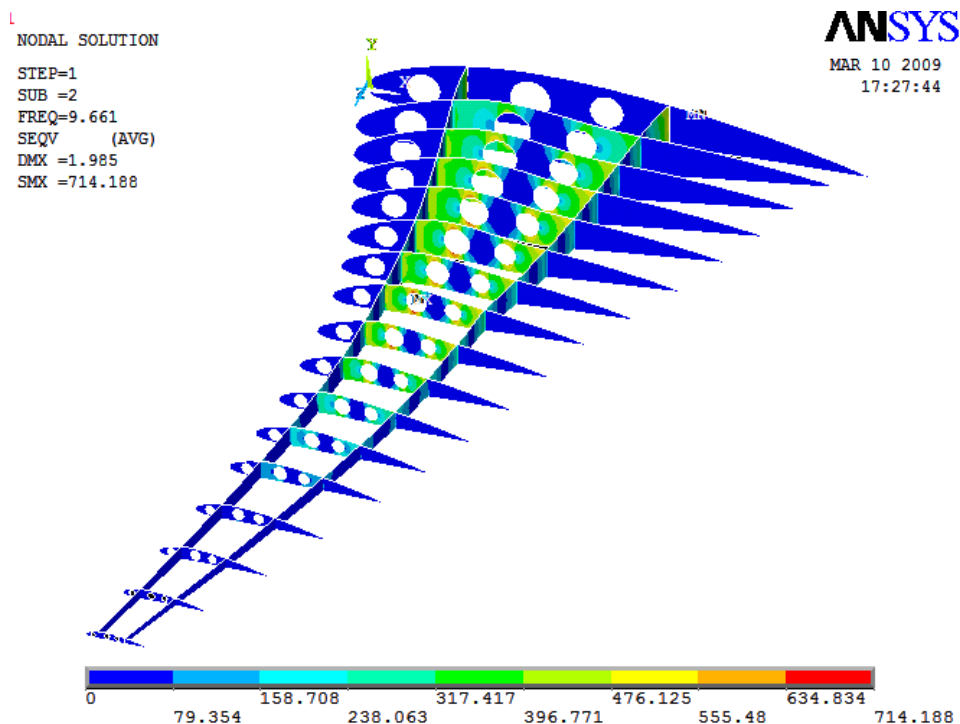


Fig. 5.2.5 Segundo modo de vibración de la semilla sin piel

Las figuras 5.2.6 a la 5.2.8 muestran el 3er, 4to y 5to modo de vibración de la semiala sin piel esto con el propósito de mostrar como es deformada la estructura, ya que si colocamos los modos con piel la deformación de la estructura como conjunto no es visible debido a que se menciona la piel por ser tan delgada entra en resonancia.

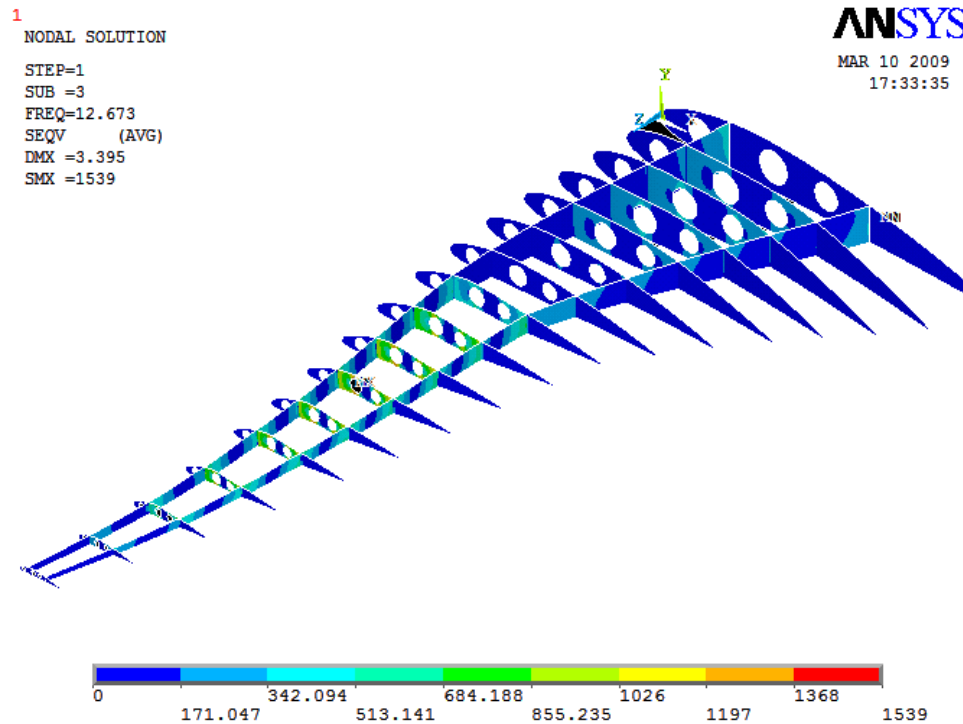


Fig. 5.2.6 Tercer modo de vibración de la semiala sin piel

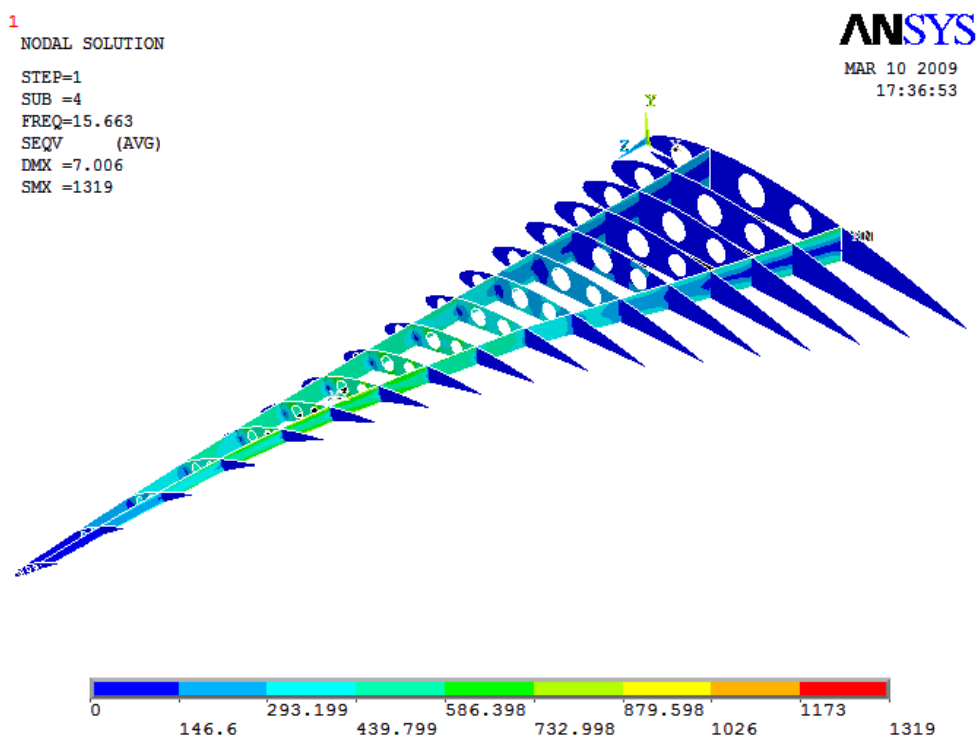


Fig. 5.2.7 Cuarto modo de vibración de la semiala sin piel.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

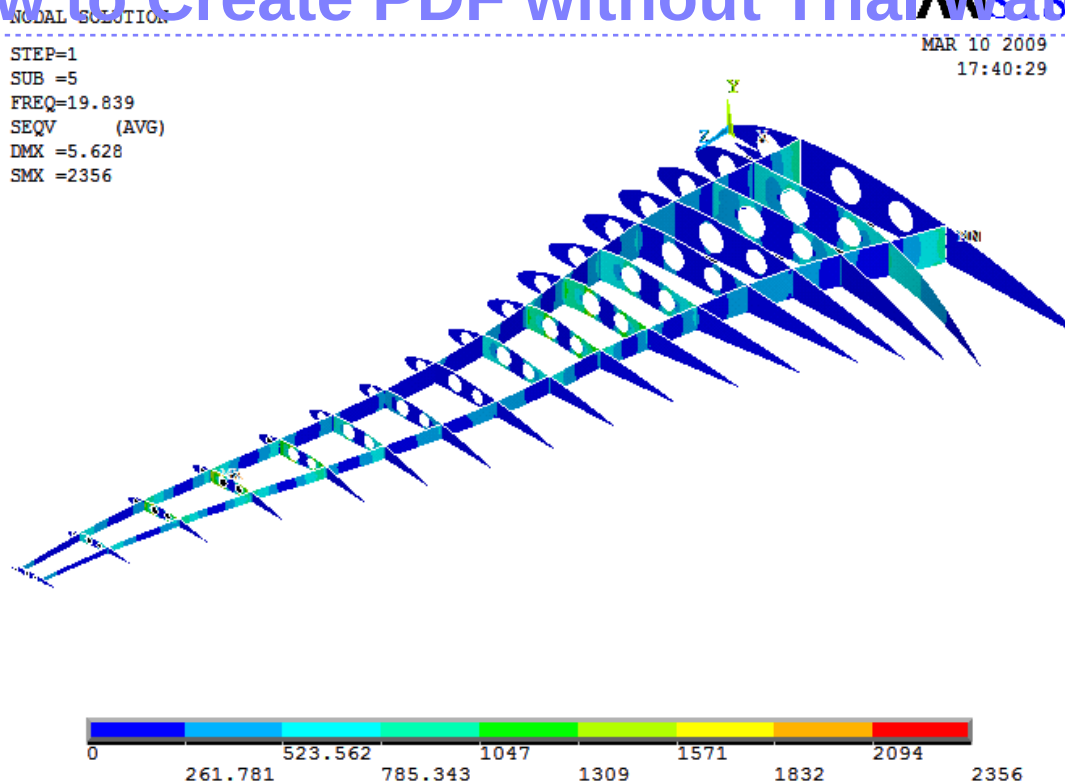


Fig. 5.2.8 Quinto modo de vibración de la semiala sin piel

5.3 RESULTADOS DEL ANÁLISIS EXPERIMENTAL.

5.3.1 VISUALIZACION DE ESFUERZOS POR MEDIO DE LA FOTOELASTICIDAD.

La fotoelasticidad es un método ampliamente empleado para obtener mediciones muy precisas de las deformaciones de las superficies que determinar los esfuerzos en una parte específica o en toda la estructura durante una prueba estática o dinámica.

Los resultados del experimento como veremos a continuación dados por una carga aplicada a la semiala (que en este caso es simplemente la interacción fluido estructura, generada por la puesta en marcha de cada uno de los motores del túnel de viento), el material birrefringente es iluminado por la luz polarizada desde un polariscopio de reflexión. Al momento de ver este material a través del analizador del polariscopio, muestra todas las deformaciones en un campo lleno de color, que es un patrón informativo que inmediatamente revela toda la distribución de deformaciones y señala las áreas altamente deformadas. Al tener el compensador, varios análisis pueden llevarse a cabo de manera rápida y fácil. Registros permanentes de toda la distribución de deformaciones puede hacerse simplemente fotografiando o grabándose.

Los resultados de un estudio fotoelástico dependen de sus objetivos con:

- Poder identificar áreas críticas, destacando regiones sobre esforzadas o poco esforzadas.
- Medir de manera precisa picos de esfuerzos y determinar concentraciones de esfuerzos alrededor de husillos, nodos, muescas, filos y cualquier tipo de fallas potenciales.
- Optimizar la distribución de esfuerzos en las partes, y estructuras para una disminución de peso y una máxima confiabilidad.
- Medir la dirección de los esfuerzos principales en cualquier punto del material.
- Identificar y medir en los ensamble esfuerzos residuales.
- Detectar el rendimiento y observar la redistribución de esfuerzos en el intervalo de deformación plástica.

Para cualquier análisis experimental siempre se deben tomar las condiciones atmosféricas en el momento en que se va a realizar el experimento la tabla 5.3.1, nos muestra las condiciones que imperaban durante cada una de las pruebas dentro del laboratorio.

Tabla 5.3.1 Condiciones atmosféricas del laboratorio.

Condición	Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4	Ensayo 5
Hora	13:50	16:48	17:01	17:31	17:55
Temperatura ambiente	23.6	25.6	25.6	25	24.5
Humedad relativa	58	56	56	56	56
Presión atmosférica	600	599	599	600	600

Con las condiciones mostradas en la tabla anterior podemos calcular la densidad promedio del laboratorio, esto se hace siguiendo el procedimiento descrito en el apéndice A, con esta densidad y mediante la toma de presión estática y total con un tubo pitot podemos calcular la velocidad del túnel de viento con 1, 2, 3 y 4 motores, la tabla 5.3.2 nos muestra dichas velocidades.

Tabla 5.3.2 Velocidades del túnel de viento y densidad del aire.

Densidad promedio del aire $\rho_z = 0.924798613 \frac{kg \cdot s^2}{m^4}$				
Motor	1	1 y 2	1,2 y 3	1,2,3 y 4
V (m/s)	4.606021032	10.29937613	14.56551741	25.64523976
V(Km./h)	1.279450287	2.860937815	4.045977059	7.123677711

En las siguientes páginas veremos una serie de fotos en las que se visualizara el campo completo del patrón de franjas isocromáticas visto desde el analizador posicionado a 0 y 90° respectivamente, la primera serie de fotos muestra el campo cuando la semiala se encuentra con un ángulo de ataque de 0°, (figuras 5.3.1), la segunda serie de imágenes

muestra el campo cuando la semiala está posicionada con un ángulo de ataque de 5° , (figuras 5.3.2); por ultimo se muestra el campo cuando la semiala está con un ángulo de ataque de 90° , (figuras 5.3.3).

PRUEBA CON UN ÁNGULO DE ATAQUE DE 0°

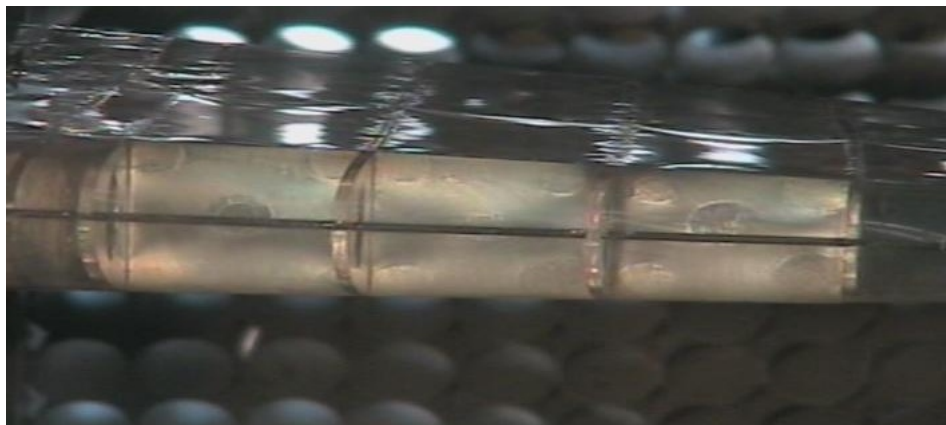


Fig. 5.3.1 a Vista del material birrefringente con los motores apagados

Motor 1 encendido.

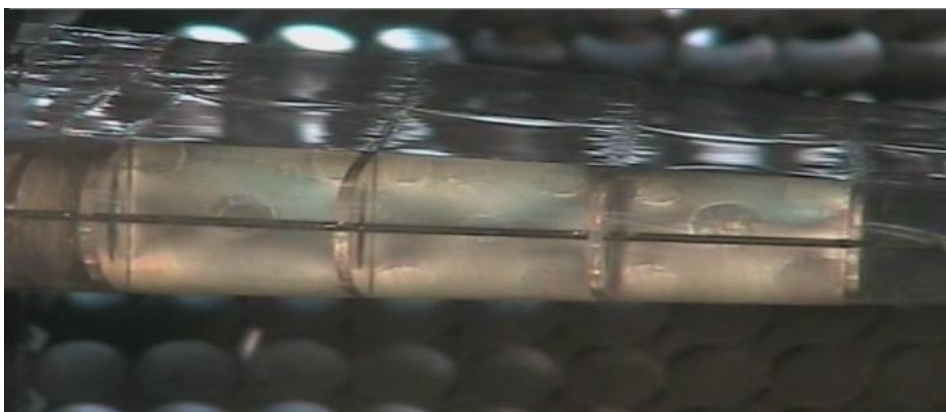


Fig. 5.3.1 b Polariscopio a 0° con un motor encendido

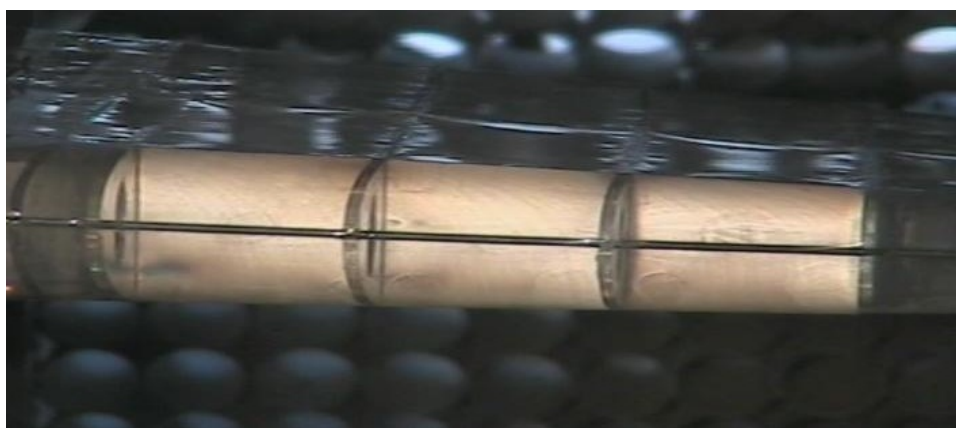


Fig. 5.3.1 c Polariscopio a 90° con un motor encendido.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

Motor 1, 2 encendidos



Fig. 5.3.1 d Polariscope a 0° con motor 1 y 2 encendidos.

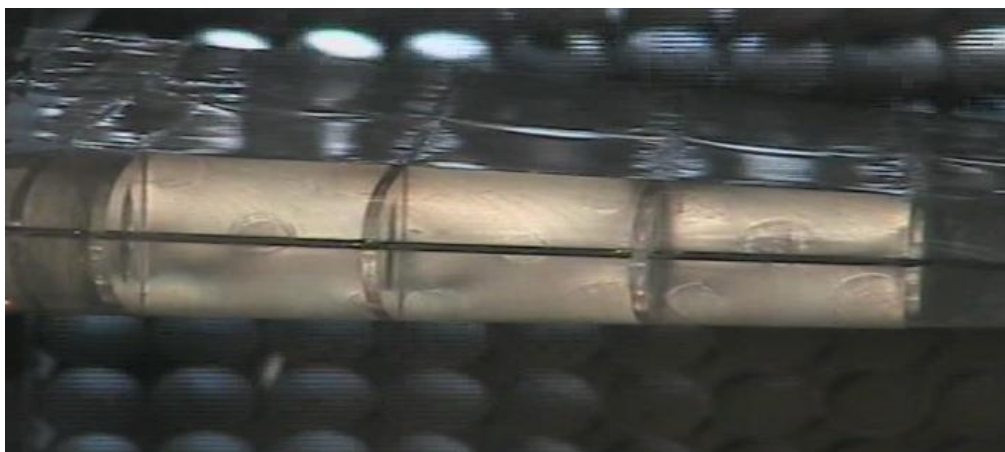


Fig. 5.3.1 e Polariscope a 90° con un motor 1 y 2 encendidos.

Motor 1, 2 y 3 encendidos

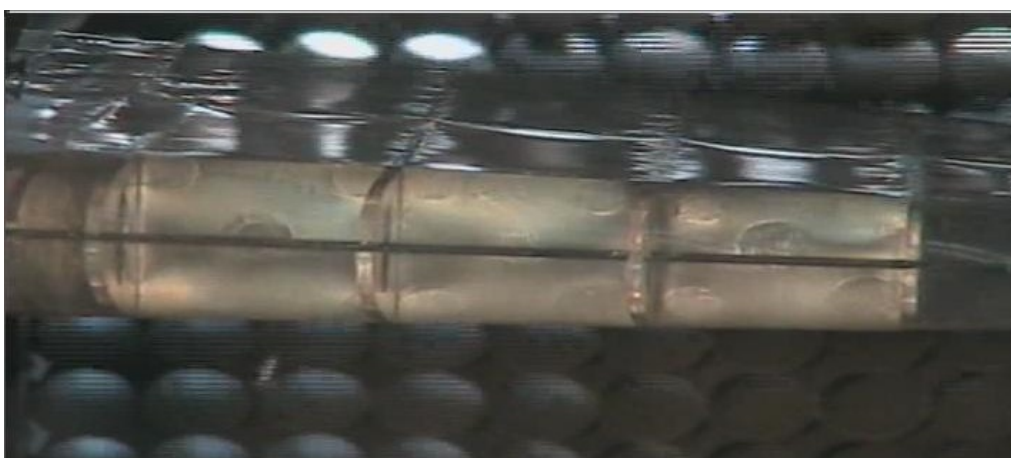


Fig. 5.3.1 f Polariscope a 0° con un motor 1, 2 y 3 encendidos.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!



Fig. 5.3.1 g Polariscope a 90° con un motor 1, 2 y 3 encendidos.

Motor 1, 2, 3 y 4 en marcha.



Fig. 5.3.1 h Polariscope a 0° con un 4 motores encendidos.

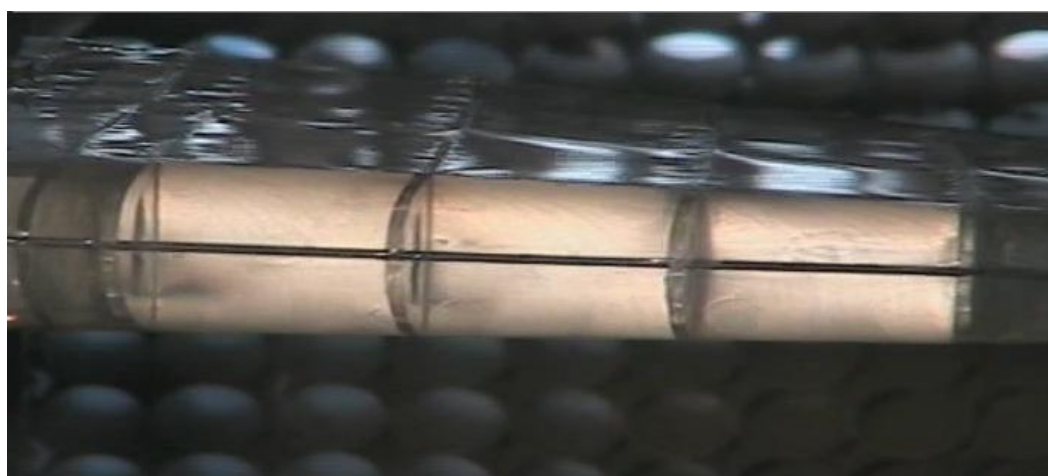


Fig. 5.3.1 i Polariscope a 90° con un 4 motores encendidos.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

PRUEBA CON UN ÁNGULO DE ATAQUE DE 5°



Fig. 5.3.2 a Semiala a 5° con motores apagados

Motor 1 encendido.



Fig. 5.3.2 b Polariscopio a 0° con un motor 1 encendido.



Fig. 5.3.2 c Polariscopio a 90° con un motor 1 encendido.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

2 motores en marcha



Fig. 5.3.2 d Polariscope a 0° con dos motores encendidos.



Fig. 5.3.2 e Polariscope a 90° con dos motores encendidos.

3 motores en marcha



Fig. 5.3.2 f Polariscope a 0° con tres motores encendidos.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!



Fig. 5.3.2 g Polariscopio a 90° con tres motores encendidos.

4 motores en marcha

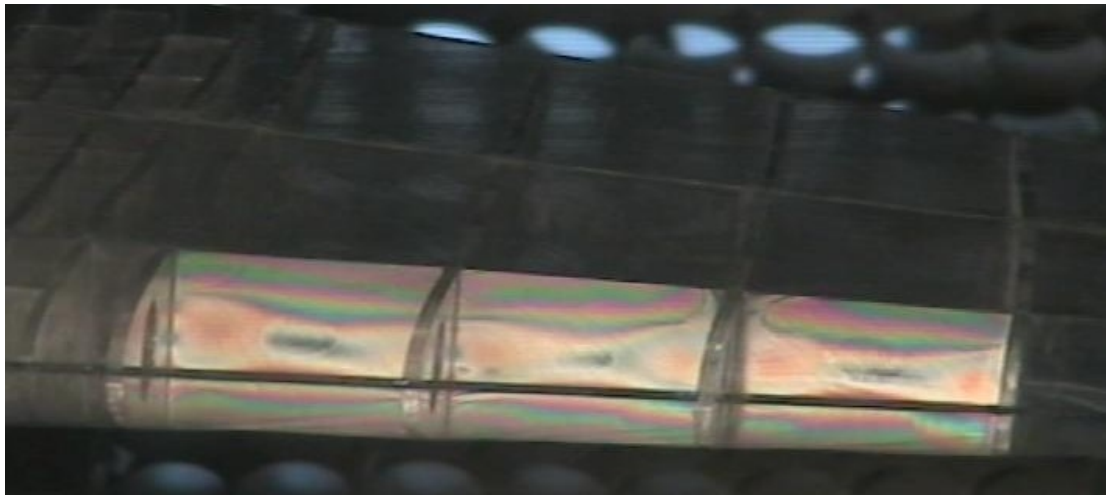


Fig. 5.3.2 h Polariscopio a 0° con un motores.



Fig. 5.3.2 i Polariscopio a 90° con cuatro motores

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

PRUEBA CON UN ÁNGULO DE ATAQUE DE 10°

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

Motor apagado

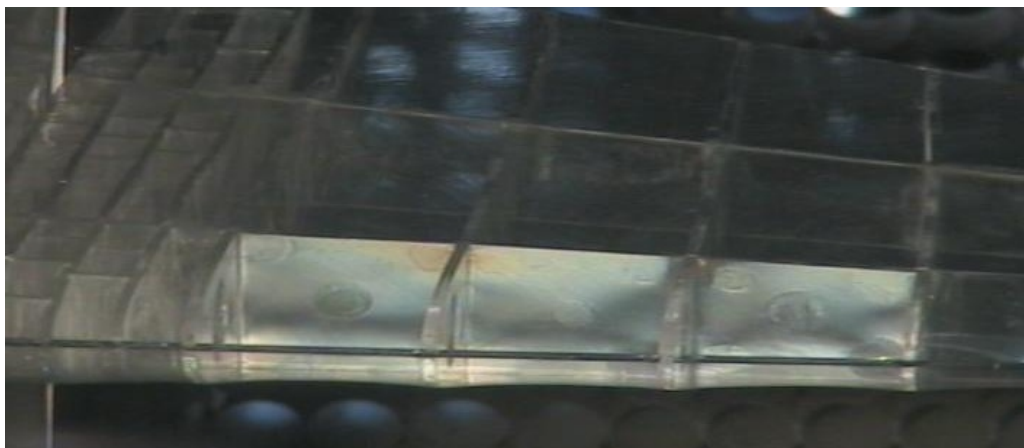


Fig. 5.3.3 a Polariscope a 0° con motores apagados.

1 motor encendido



Fig. 5.3.3 b Polariscope a 0° con un motor encendido.



Fig. 5.3.3 c Polariscope a 90° con un motor encendido.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

2 motores en marcha



Fig. 5.3.3 d Polariscope a 0° con dos motores encendidos.



Fig. 5.3.3 e Polariscope a 90° con dos motores encendidos.

3 motores en marcha



Fig. 5.3.3 f Polariscope a 0° con tres motores encendidos.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!



Fig. 5.3.3 g Polariscope a 90° con tres motores encendidos.

Momento de ruptura del empotre



Fig. 5.3.3 h Polariscope a 0° con cuatro motores encendidos.

5.3.2 INTERPRETACIÓN DEL CAMPO COMPLETO DE DEFORMACIONES.

Como se puede apreciar en las imágenes anteriores los esfuerzos causan deformaciones que existen en general a través de toda la viga sobre su superficie. Debido a que el material birrefringente se encuentra pegado al acrílico, las deformaciones en la viga son transmitidas a los paneles de material birrefringente. Estas deformaciones en el material producen efectos ópticos que se muestran a través del polariscopio como las llamadas **franjas isocromáticas**.

Debido a que las imágenes nos muestran el campo completo de la distribución de esfuerzos generada por efecto del aire en el túnel de viento, debe de notarse que existen zonas sobre esforzadas que pueden llegar a ser las causantes de fallas, y estas a su vez se encuentran rodeadas de zonas que son cercanas a esfuerzos de valor cero. Con las imágenes anteriores, podemos interpretar que es posible hacer modificaciones en el peralte de la viga en la sección cercana al empotre, lo que inmediatamente forzaría al material que se encuentra en el centro de la viga a llevar su parte en la

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

distribución de esfuerzos, esta modificación permitirá alcanzar un estado de peso mínimo y óptima funcionalidad, lo que se traduciría en un ahorro de material y dinero.

5.3.3 IDENTIFICACIÓN DE LAS FRANJAS.

Se puede apreciar a través de las fotos que una vez puesto en marcha el primer motor las franjas aparecen en un inicio en las zonas que están sometidas a los mayores esfuerzos. A medida que la carga se aumentaba por efecto de la presión del viento debido a la puesta en marcha del segundo motor, nuevas franjas aparecen y las franjas anteriores son empujadas hacia zonas de menor esfuerzo. Con el tercer motor en marcha la carga es mucho mayor sobre el ala lo que provoca, que franjas adicionales se generen en las zonas de mayor esfuerzo y se muevan hacia zonas donde los esfuerzos sean menores o muy cercanos a cero. Una vez puesto en marcha el cuarto motor el flujo se desarrolla completamente y obtenemos una condición de carga máxima, que vuelve a repetir el patrón de franjas como lo hemos descrito.

Lo anterior es aplicable a cada uno de los tres casos del presente trabajo. Analizaremos el último caso, por ser donde las franjas isocromáticas se muestran con mayor definición y su aparición es más notoria desde las primeras imágenes.

Es posible asignarles a las franjas números ordinales (primero, segundo, tercero, etc.) así como fueron apareciendo, y estas mantendrán sus identidades individuales ("orden") a través de toda la secuencia de carga. Se debe notar que las franjas no solamente se ordenan en el sentido de la numeración, si no que a su vez lo hacen ordenadamente, las franjas nunca se cruzan unas con otras, como tampoco emergen de otras franjas y estas siempre mantienen su posición en una secuencia ordenada.

Las franjas isocromáticas en las figuras 5.3.2 f y 5.3.3 f aparecen como series sucesivas y contiguas de bandas de diferentes colores, donde cada banda representa un grado diferente de birrefringencia que corresponde a la deformación subyacente en la viga principal de la semiala. Así, el color de cada una identifica la birrefringencia, o el orden de la franja (y su nivel de deformación), a lo largo de toda la banda.

La manera en que los colores aparecen es debido al orden de extinción de la longitud de onda, provocado por el efecto de la carga, al aumentar esta la birrefringencia también aumenta y cada color en el espectro es extinguido por turnos de acuerdo a su longitud de onda. En la figura 5.3.3 d el color empieza con violeta, que es la longitud de onda más corta visible.

Observemos las figuras 5.3.1 a, 5.3.2 a y 5.3.3 a, que es cuando el ala se encuentra sin carga, el material birrefringente se muestra uniformemente negra. Conforme el primer motor es encendido, como hemos mencionado las zonas que se encuentran sometidas

a los mayores esfuerzos se tornan grises, después se observa un poco de blanco; y después cuando el violeta se extingue, amarillo. Con el segundo motor el azul se extingue y muestra naranja; después verde, para dar rojo. Con el tercer motor el siguiente color en extinguirse es el amarillo, llevando al morado; y este es seguido por la extinción del naranja, produciendo una franja de azul oscuro.

La franja de color morado, que se distingue fácilmente de la roja y la azul, resulta ser sumamente sensible a los cambios en el nivel de deformaciones, esto se refiere a la **tonalidad de paso**. Debido a su carácter distintivo y resolución, la tonalidad de paso morado se selecciona para marcar el incremento en el retraso relativo que es igual al orden de franja de la unidad ($N = 1$). Posteriormente la repetición de la tonalidad de paso significa la presencia de ordenes de franja enteros mucho mayores ($N = 2, N = 3$, et.). La tabla 5.3.3 nos describe las características de las franjas isocromáticas.

Tabla 5.3.3 Características de las franjas isocromáticas.

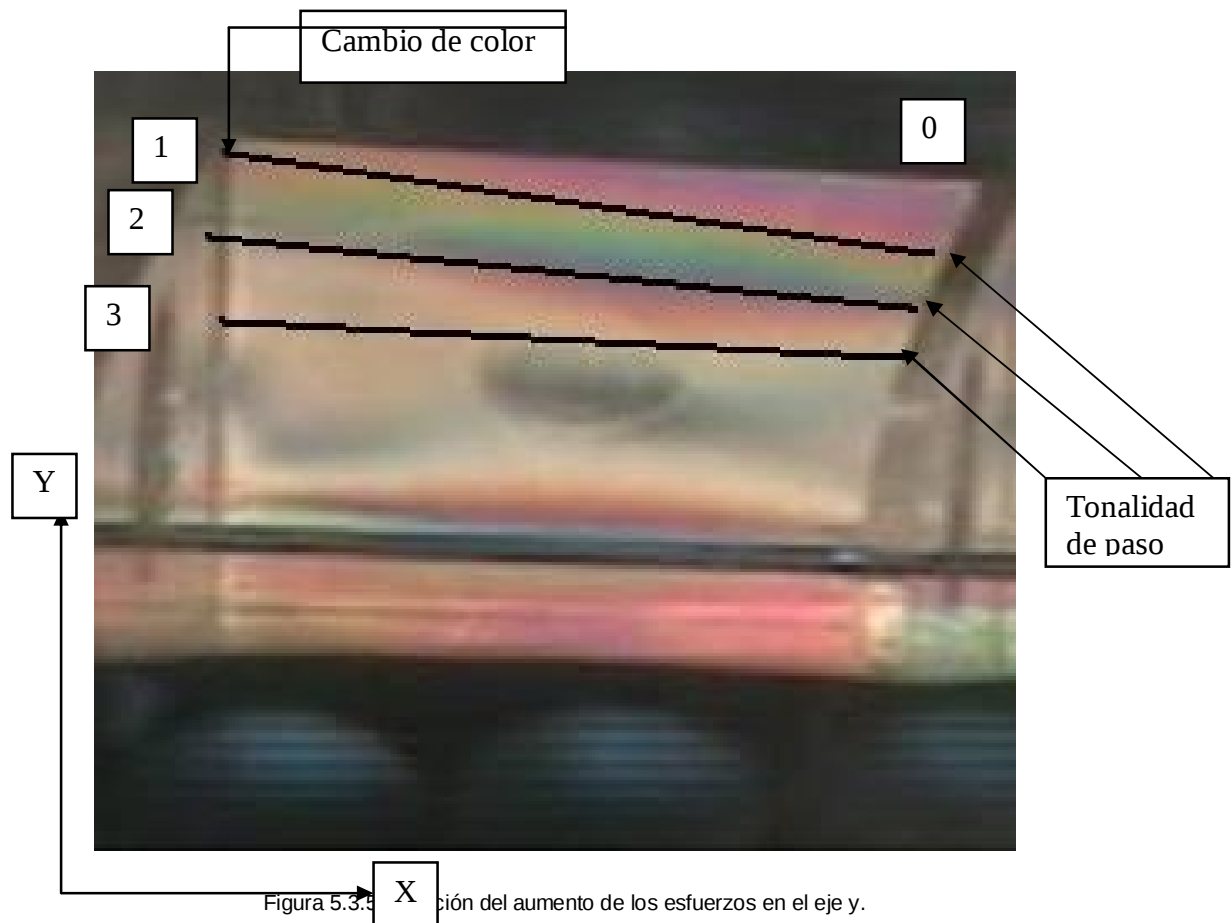
Color	Retraso Relativo Aproximado (nm)	Orden de Franja (N)
Negro	0	0
Gris	160	0.28
Blanco	260	0.45
Amarillo pálido	345	0.60
Naranja	460	0.80
Rojo oscuro	520	0.90
Morado (Tonalidad de paso)	575	1
Azul oscuro	620	1.08
Azul-Verde	700	1.22
Verde-Amarillo	800	1.39
Naranja	935	1.63
Rojo rozado	1050	1.82
Morado (Tonalidad de paso)	1150	2
Verde	1350	2.35
Verde-Amarillo	1440	2.50
Rojo	1520	2.65
Rojo / Transición Verde	1730	3
Verde	1800	3.10
Rosa	2100	3.65
Rosa / Transición Verde	2300	4.00
Verde	2400	4.15

Con cada ciclo de color completado, el efecto aumenta en complejidad debido a la simultaneidad de extinciones que causan que las franjas de colores se vuelvan paralelas y menos distintivas (figura 5.3.4). Debido a este efecto, los ordenes de franjas encima de 4 ó 5 no son distinguibles por color en la luz blanca. Aunque franjas de orden superior a 3 son raramente encontradas (o necesitadas) en los análisis de esfuerzos, para poder apreciar franjas de este tipo de orden se puede usar un monocromador con el polariscopio.



Fig. 5.3.4 Detalle de las franjas

La figura 5.3.5 muestra las franjas identificadas por efecto de la deformación y la tabla 5.3.4 nos muestra la diferencia de las principales deformaciones (figura proveniente de la prueba con un ángulo de ataque de 10° con tres motores y flujo alineado, detalle de la primera placa).



$$\left. \begin{array}{l} t = 2.54mm \\ K = 0.15 \\ \lambda = 575nm \end{array} \right\} f = 757\mu m / m / \text{franja}$$

Tabla 5.3.4 Valores del orden de franja

Orden de Franja N	Deformación $(\varepsilon_x - \varepsilon_y) = Nf$
0 (Franja negra)	0
1 (Amarillo-Verde)	757 $\mu\text{m/m}$ (1f)
2 (1er Azul-Rojo)	1514 $\mu\text{m/m}$ (2f)
3 (2do Rojo-Verde)	2271 $\mu\text{m/m}$ (3f)

5.3.4 RELACIÓN ENTRE LOS ÓRDENES DE FRANJAS Y MAGNITUD DE LOS ESFUERZOS Y LAS DEFORMACIONES.

Ahora que sabemos que los ordenes de franja son proporcionales a la diferencia entre las deformaciones principales en los claros de material birrefringente (y en la superficie de la viga principal de la semiala) podemos conocer los esfuerzos en cualquier punto de la placas de material birrefringente recordemos del capítulo 1 la ecuación (1.52).

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{1+\nu} Nf \quad (1.52)$$

Sabemos que la mitad de la diferencia de los esfuerzos principales es lo que se conoce como el esfuerzo cortante describimos a esta ecuación como la (1.75).

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1+\nu} \right) Nf \quad (1.75)$$

Estas ecuaciones dan solamente la diferencia de las deformaciones principales, no las cantidades individuales. Para determinar las magnitudes individuales y los signos de cada una de las deformaciones principales o los esfuerzos generales se requiere, para estados de esfuerzo biaxial, una prueba secundaria.

Existen casos donde uno de los esfuerzos principales en la superficie es cero, estos casos incluyen miembros estructurales rectos, o de sección transversal uniforme que se encuentran en tensión sobre su eje o compresión, también a flexión, lejos del punto de aplicación de la carga. Incluso para miembros estructurales de sección transversal variable como el caso de nuestra viga, por lo cargado, el estado de esfuerzos es muy cercano al uní axial, así $\sigma_x = 0$ y la ecuación (1.52) se convierte en

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} Nf \quad (1.52a)$$

Esta ecuación puede emplearse como una aproximación muy precisa en la determinación de esfuerzos.

De la figura 5.3.5 se ha determinado el orden de la franja lo que haremos ahora con esta misma sección de prueba es determinar el σ_y con la suposición mencionada antes; se puede apreciar que la franja de orden tres no existe por lo que la aproximación la haremos para 1 y 2 con lo que hemos determinado lo siguiente:

$$E = 2.24Gpa$$

$$\nu = 0.4$$

$$Nf = 757\mu m$$

$$\sigma_y = \frac{2.24Gpa}{1+0.4} 757\mu m = 1.2112MPa$$

$$Nf = 1514\mu m$$

$$\sigma_y = \frac{2.24GPa}{1+0.4} 1514\mu m = 2.4224Mpa$$

5.3.5 ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE VIBRACIONES.

Las frecuencias que obtuvimos experimentalmente fueron a partir de un acelerómetro triaxial, el cual fue colocado en la penúltima costilla de la semiala, (figura 5.3.6).

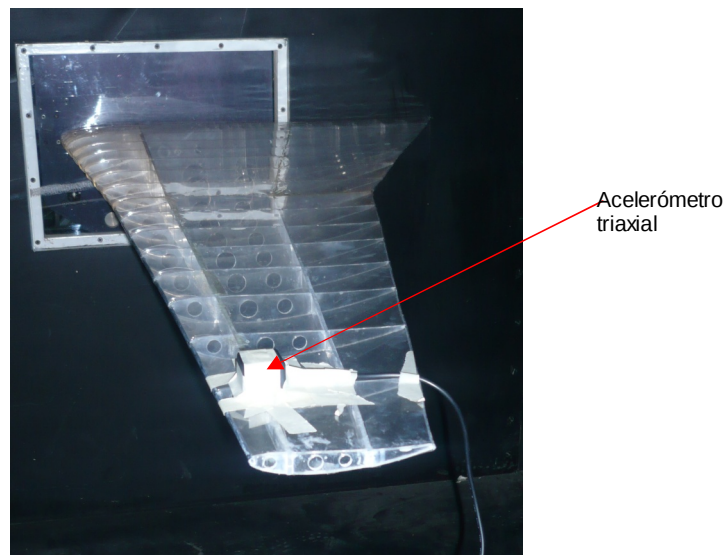


Fig. 5.3.6 Colocación del acelerómetro.

El acelerómetro a su vez estaba conectado por medio de una tarjeta transductora de información a una computadora personal, la computadora estaba equipada con el software Logger Pro, que permitía la adquisición de los datos, al ponerse en marcha el programa este capta y grafica los movimientos en los ejes "X", "Y" y "Z" del cuerpo al

que el acelerómetro está sujeto a figura 5.3.7 muestra una de las graficas que el programa desarrolla, en esta grafica podemos ver claramente que la amplitud cambia a cierto tiempo, este cambio obedece al cambio de velocidad en el túnel de viento producido por el encendido sucesivo, (intervalo de 1 minuto), de cada uno de los motores del túnel.

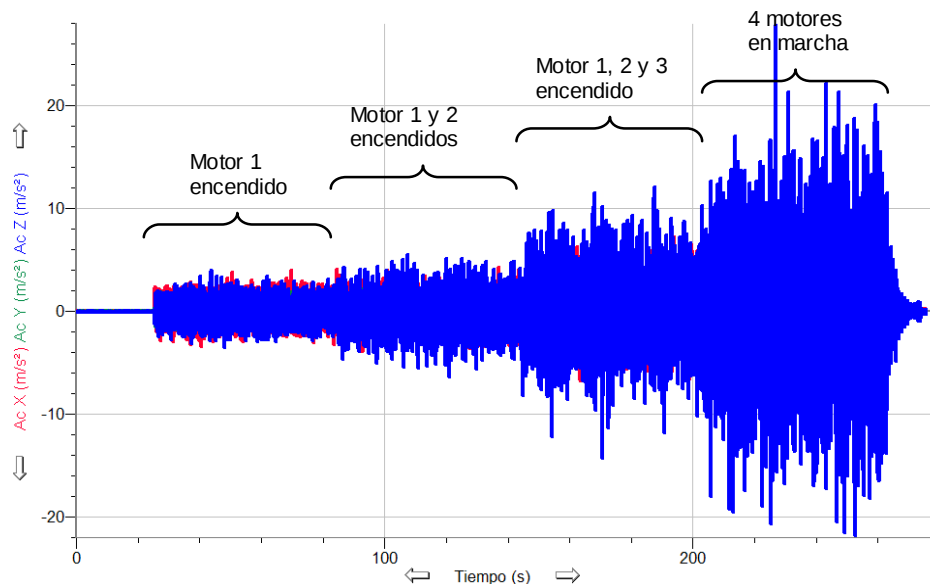


Fig. 5.3.7 Grafica del movimiento de la semiala

Por medio del programa es posible realizar el ajuste de curvas de las graficas que se obtuvieron en un intervalo de tiempo seleccionado, en este caso comprende de un 1 segundo, por lo que la curva pudo ser ajustada 50 veces para cada motor debido a que se dejo una tolerancia de 5 segundos entre el encendido de cada motor para que las oscilaciones estuvieran en un estado estacionario, la figura 5.3.8 muestra el ajuste de curvas, cabe señalar que este ajuste, automáticamente nos daba las frecuencias en $\frac{rad}{s}$.

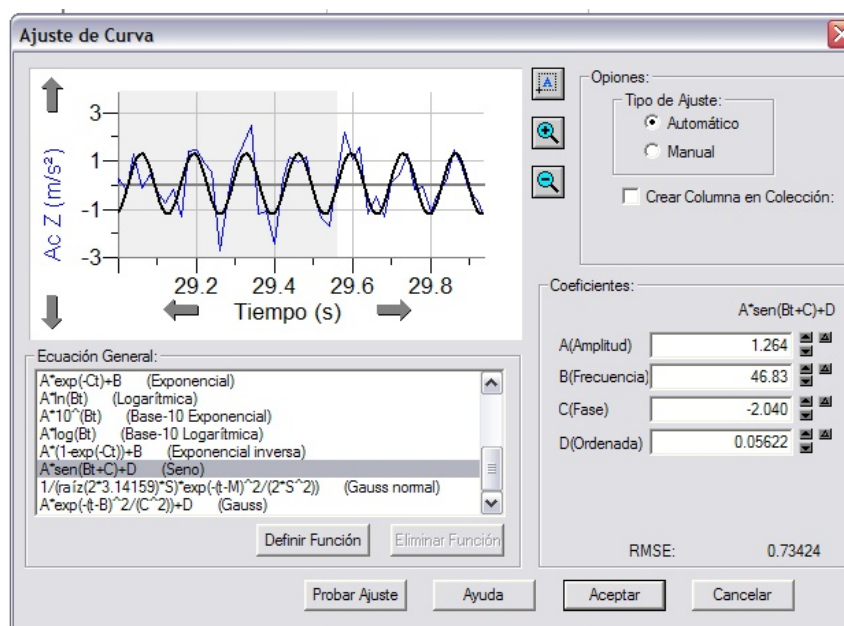


Fig. 5.3.8 Ajuste de curvas.

El ajuste de curvas se realizó para 7 pruebas de las cuales se obtuvieron datos de frecuencias, estos fueron tomados y tabulados, la totalidad de estos datos son mostrados en el apéndice B, por su parte las tabla 5.3.5 a la 5.3.8 muestra un promedio de frecuencias que fueron obtenidas en el experimento con uno, dos, tres y cuatro motores.

Tabla5.3.5 Promedio de frecuencias para el experimento con 1 motor.

	MOTOR 1					
Prueba	2	3	4	5	6	7
Frecuencia Promedio	42.51	46.06	42.52	44.09	40.65	46.65
Frecuencia (rad/s)	43.75					
Frecuencia Final (Hz)	6.96					

Tabla5.3.6 Promedio de frecuencias para el experimento con 2 motores.

	MOTOR 1 y 2							
Prueba	1	1.5	2	3	4	5	6	7
Frecuencia Promedio	44.9	45.21	40.54	56.23	50.18	47.20	51.55	56.67
Frecuencia (rad/s)	49.06							
Frecuencia Final (Hz)	7.80							

Tabla5.3.7 Promedio de frecuencias para el experimento con 3 motores.

	MOTOR 1, 2 y 3				
Prueba	3	4	5	6	7
Frecuencia Promedio	67.91	56.24	75.44	65.50	56.93
Frecuencia (rad/s)	64.40				
Frecuencia Final (Hz)	10.25				

Tabla5.3.8 Promedio de frecuencias para el experimento con 4 motores.

	MOTOR 1,2,3 y 4	
Prueba	5	6
Frecuencia Promedio	85.64	81.78
Frecuencia (rad/s)	83.71	
Frecuencia Final (Hz)	13.32	

Como podemos darnos cuenta dentro del rango de las frecuencias promedios que obtenemos con 1 y 2 motores se encuentra la primera frecuencia natural de la estructura.

5.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Por último tenemos la comparación de los resultados teóricos numéricos y experimentales, solo nos concentraremos en la primer frecuencia de vibración, por que en cualquiera de los tres casos es la primer frecuencia que con cada uno de los métodos de análisis se alcanza. En la siguiente tabla 5.4.1 podemos observar las frecuencias para cada uno de los métodos de análisis.

Tabla 5.4.1 Comparación de frecuencias resultantes

Método	Analítico	Numérico	Exp. con 1 motor	Exp. con 2 motores
Frecuencia (Hz)	7.1367	7.1619	6.96	7.80

El lector se podrá percatar que tanto el método analítico y el numérico comprueban que se encuentran dentro del rango de la frecuencia natural mínima, no así las frecuencias obtenidas por el método experimental, ya que estas dos no son frecuencias naturales pero demuestran que la frecuencia natural se encuentra en el intervalo de ambas debido a que los desplazamientos marcados por el acelerómetro en las gráficas muestran una variación en su posición de entre 4mm y 7mm; y esto coincide con los desplazamientos obtenidos con el método teórico y la simulación numérica (3.94mm y 5.94mm respectivamente).

Por lo que las dos frecuencias naturales obtenidas por el método teórico y numérico son validadas por el método experimental. Y debemos señalar que debido a que la discretización del modelo teórico fue simplificada la frecuencia natural no empata completamente con la del método numérico pero aun así es muy cercana.

Finalmente en lo que corresponde a la visualización del campo de esfuerzos podemos apreciar en la figura 5.4.1, 5.4.2 y 5.4.3 los contornos de colores de esfuerzos en la semiala experimental, la semiala con piel y la semiala sin piel respectivamente, como podemos apreciar, las franjas del modelo experimental tienen una tendencia que se asemeja a los contornos de colores de la simulación, sin embargo esto no lo podemos presentar como un resultado concluyente, ya que estos colores solo nos indican un orden de franja y no un esfuerzo, se necesitaría calcular los esfuerzo mediante el procedimiento mostrado en la sección 5.3.3 y 5.3.4 en cada una de las zonas para determinar si concuerdan los resultados experimentales con los numéricos, por otra parte en la simulación podemos ver que la variación de los esfuerzos en el empotre de la semiala con piel y del empotre de la semiala sin piel son de alrededor de 35 KPa y esta se aprecia en la parte superior del tercer claro de la viga contando de izquierda a derecha.

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!



Fig. 5.4.1 Franjas de colores en los tres primeros claros de la viga de la semiala

NODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =1
FREQ=7.234
SEQV (AVG)
DMX =5.25
SMX =608.809

ANSYS

MAR 5 2009
14:09:40

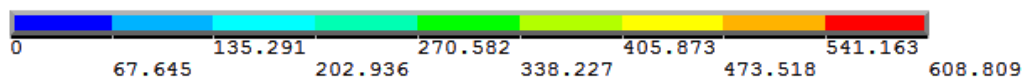
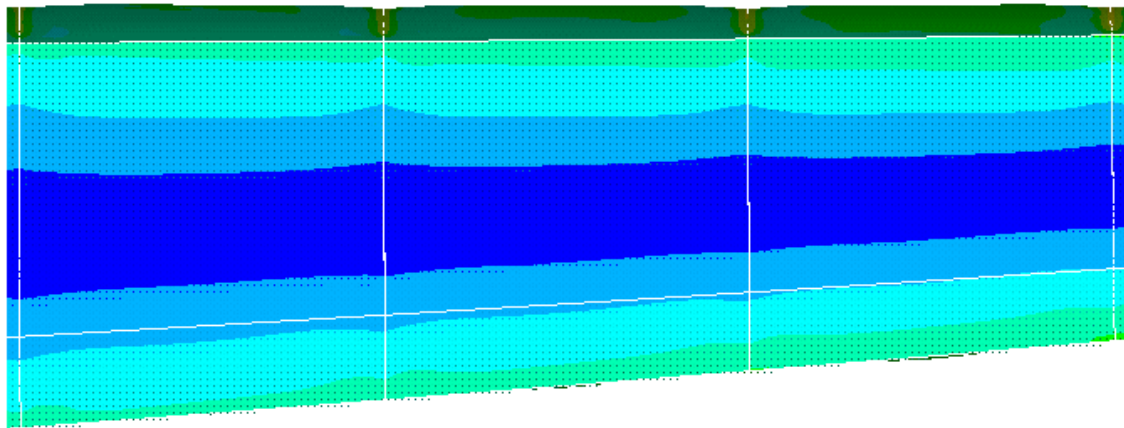


Fig. 5.4.2 Contorno de colores de esfuerzos en los tres primeros claros de la viga de la semiala con piel.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

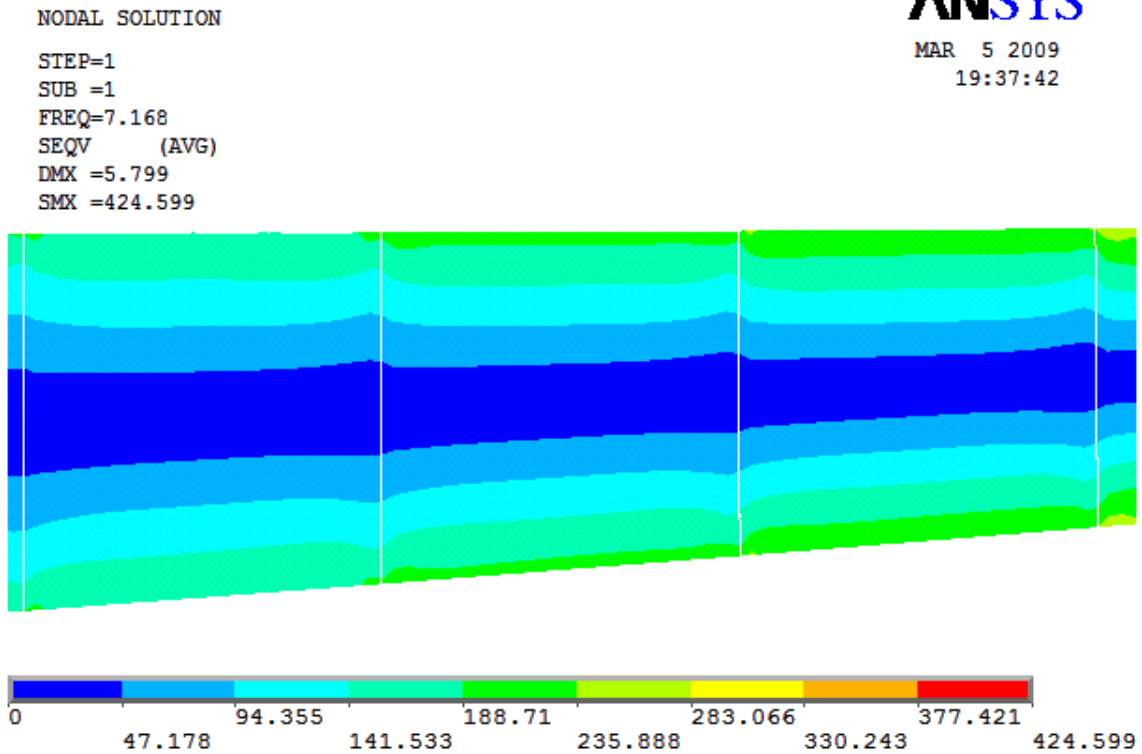


Fig. 5.4.3 Contorno de colores de esfuerzos en los tres primeros claros de la viga de la semiala sin piel.

CONCLUSIONES

Se determinó, mediante un análisis teórico, numérico y experimental, el comportamiento estructural de una semiala en vibración libre, de la cual se obtuvo los modos de vibración y sus respectivas frecuencias naturales, para el caso de la simulación se mostró la distribución de esfuerzos debidos a las deformaciones por la vibración, también se pudo visualizar por medio del método experimental fotoelástico la magnitud y distribución de las deformaciones de la sección del empotre de la viga, con estos análisis se puede comenzar con el rediseño de la semiala, que permita reducir el peso de esta sin restarle rigidez.

Pudimos ver que el conjunto de varios procesos forma parte del diseño de aeronaves, uno de ellos es el proceso del cálculo estructural y dentro de este se encuentra el cálculo de las frecuencias naturales de las alas. Para poder brindar una geometría es indispensable pensar el propósito específico del la aeronave y prepara una lista que contenga aquellos conceptos que tendrán mayor impacto en el diseño, nuestro caso particular fue crear una semiala semimonocoque doble flechado con propósitos experimentales para un túnel de viento.

Se puede observar en el capítulo dos que nuestra discretización del modelo se decidió de 4 masas y 4 resortes lo que da una matriz mucho más manejable, una ventaja significativa de hacer esto es que se puede resolver este tipo de sistemas, sin necesidad de recurrir a un software especializado, por métodos numéricos en el caso del polinomio característico del sistema, (un ejemplo sería el método de Bairstow utilizado para resolver polinomios de orden superior). Por otra parte, hacer esto puede repercutir directamente en la fidelidad del resultado, lo que en nuestro caso no ha sido problema ya que como podemos observar en la sección 5.4 en nuestra comparación de resultados, la variación entre el modelo matemático y el numérico es muy pequeña.

Los resultados en lo referente a el análisis numérico en el que el primer modo de vibración lo encontramos en 7.16 Hz es corroborado por el análisis teórico y validado por el experimental ya que en estos la primera frecuencia natural se encuentra en el caso teórico en 7.13 Hz. y en el experimental esta en el intervalo comprendido por 6.8 Hz. y 7.8 Hz; en lo que corresponde a la distribución de esfuerzos indican que la zona más crítica en la semiala se encuentra cerca del cambio de geometría de la viga principal donde el valor máximo de esfuerzo es de magnitud igual a 424 KPa y esto corresponde a que ese cambio de geometría puede verse como un concentrador de esfuerzos.

El experimento fotoelástico resulta en suma didáctico, es posible comprender los efectos producidos por la interacción fluido estructura, ver el campo completo de la distribución de los esfuerzos y las deformaciones, este guarda una proporción real de lo que ocurre en el momento en que una carga mayor es aplicada. Debe de quedar muy

claro que el patrón de franjas isocromáticas no describen la magnitud de los esfuerzos si no la de los desplazamientos y es a través de estos que es posible calcular los esfuerzos con la ley de Hooke. El comportamiento del modelo foto elástico guarda una estrecha relación con el comportamiento del prototipo, el único factor a consideración es la relación de Poisson ya que en algunos problemas bidimensionales; la distribución de esfuerzos depende de ella. En este método no es necesario que la pieza sea manufacturada en un solo tramo de material, ya que la distribución de esfuerzos ocurre de manera continua, sin afectar el resultado final. La manufactura debe ser cuidadosa, cualquier sobre esfuerzo con el cortador y calentamiento excesivo resulta en una lectura incorrecta del orden de franja. El método es ampliamente recomendable para que el estudiante comprenda y tenga la proporción real de lo que ocurre cuando le es aplicada una fuerza aerodinámica a un objeto en este caso una semiala, esto produce una deformación y es lo que se conoce como interacción fluido estructura.

Por otra parte en lo que corresponde a la obtención de frecuencias por medio de la experimentación, podemos decir que nuestro trabajo quedo validado con los datos obtenidos por medio de este análisis, pues si bien las frecuencias promedio que obtuvimos no son exactamente iguales a las teóricas y numéricas, (esto se debe a que si hubiéramos encontrado la primera frecuencia natural experimentalmente el modelo hubiera sido destruido debido a la resonancia), estas ultimas si caen dentro del intervalo de frecuencias que se obtienen cuando 1 y 2 motores están encendidos, también esto es visible ya que el desplazamiento máximo de la punta del ala no excede los 6cm. Cabe aclarar que la información obtenida experimentalmente fue de 7 pruebas que se realizaron con la semiala, para obtener una mayor exactitud en las frecuencias se deben realizar un número mayor de pruebas.

Por ultimo podemos decir que muchas veces la obtención de las frecuencias naturales nos permite evitar el fenómeno de resonancia pura que se conoce como una "sintonización" de la frecuencia impulsora con la de las vibraciones libres, pero no únicamente este, puede llegar a rebasar el límite plástico del material y destruir la estructura. Conocemos a la resonancia como un fenómeno lineal, en el cual no existe amortiguamiento alguno en el sistema, pero además de este fenómeno de vibración existen otras consideraciones que se deben hacer y comprender para evitar un colapso estructural. Fenómenos no lineales pueden llegar a rebasar los límites elásticos del material, esto puede llegarse a dar con situaciones en que las amplitudes de las oscilaciones aumentan al transcurrir el tiempo, por que la amplitud de un término en la solución, durante cualquier ciclo, es directamente proporcional a la velocidad al principio del ciclo y (debe quedar claro que) esto no es siempre resultado de la resonancia.

RECOMENDACIONES

Al experimentar la semiala se fracturo en la zona del empotre esto debido a que la barra de acero que se utilizo para sujetar la semiala a la balanza aerodinámica solo estaba sujeta a la sección media de los perfiles del empotre, y estos a su vez se encontraban pegados a la viga principal y secundaria, se recomienda diseñar un empotre que tenga mayor contacto con las vigas o que la barra este conectada directamente con estas, incluso se podría diseñar un empotre de una sola pieza o bien utilizar un pegamento mas potente.

Construir un modelo de la semiala de material birrefringente de 3 dimensiones ya que con este modelo podrían ser apreciados los esfuerzos generados en cualquier dirección y punto de la semiala, de igual forma se recomienda construir las vigas en forma de *I* para apreciar los esfuerzos en los patines, además de que se debe diseñar previendo los espacios y/u orificios para la colocación de los atiesadores, (barras de fibra de carbono).

Para la parte de la experimentación con las frecuencias naturales primero es recomendado construir varios modelos también se debe contar con un mayor número de acelerómetros triaxiales que permitan censar la semiala en varios puntos, además de que se debe contar con un túnel de viento con control de velocidad para que permita llegar a la frecuencia natural.

Realizar un modelo en el que se puedan colocar tomas de presión estática para poder obtener la distribución de presiones y conocer la distribución de cargas en la semiala y calcular teóricamente los esfuerzos generados, a la par se debe realizar una simulación por medio de algún programa de CFD para poder comparar los resultados.

Finalmente como petición y no como recomendación se debe de adquirir un polariscopio de mayores dimensiones que permita observar una mayor sección del modelo que se este analizando, ya que como pudimos observar, lo pequeño del equipo solo permite enfocarnos a una sección del modelo.

REFERENCIAS

- I. "Dynamic of Structures", 1993, Ray W. Clough, Joseph Penzien, Editorial McGraw Hill.
- II. "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado", 7ª Edición, 2004, Dennis G. Zill, Editorial Thomson Laerning.
- III. "Experimental Stress Analysis", 1978, Rally, James W. Riley, William F. Editorial McGraw-Hill Kogakusha.
- IV. "First Course in the Finite Element Method", 2002, Daryl L. Logan, Editorial Brooks/cole.
- V. "Fotoelasticidad: Método Experimental de Análisis de Esfuerzos", 1985, Pedro Santamaría Briones.
- VI. "Generic Approach to Determine Optimum Aeroelastic Characteristics for Composite Forward-Swept-Wing Aircraft", 1984,
- VII. "Hanbook of Experimental Streess Análisis", 1950, M. Hetenyi, Editorial John Wiley and Sons, Inc.
- VIII. "Mecánica Vectorial para Ingenieros, Estática", 10ª Edición, 2004, Hibbeler, R.C. Editorial Pearson Educación.
- IX. TN-702-1 "Introduction to Stress Analysis by the PhotoStress Method", 1989, Measurements Group.
- X. "Photoelasticity" Vol.1, 1948, Max Mark Froncht, Editorial John Wiley and Sons, Inc.
- XI. Release ANSYS 10.0 Documentation.
- XII. "Structural Dynamics Theory and Computation", 1991, Mario Paz, Editorial Van Nostran Reinhold.
- XIII. "The Finite Element Method Its Basis and Fundamentals", 2005, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu, Editorial Elsevier.
- XIV. TN-707 "Photoelastic Model Making" 1982, Measurements Group.
- XV. TN-708 Principal Stress Separation in PhotoStress Measurements", 1986, Measurements Group.

APENDICE A

Las condiciones ambientales se determinan para conocer la **densidad del aire**, la cual esta afectada por la temperatura ambiente, la humedad y la presión atmosférica.

El aire es una mezcla de gases, uno de ellos es el vapor de agua, la cantidad de este puede variar en forma más notable que los otros gases, por lo que su influencia en la densidad del aire es mayor.

En las siguientes ecuaciones se utilizará esta notación:

P_A =presión del aire seco.

P_V =presión del vapor de agua.

P_Z =presión de la mezcla aire seco + vapor de agua.

P_S =presión de saturación.

T =temperatura ambiente en unidades absolutas.

ρ_A =densidad del aire seco.

ρ_V =densidad del vapor de agua.

ρ_Z =densidad de la mezcla aire seco + vapor de agua.

R_A =constante específica para el aire seco.

R_V =constante específica para el vapor de agua

Las ecuaciones de estado para el aire seco y el vapor del agua son:

$$\begin{aligned} P_A &= \rho_A g R_A T \\ P_V &= \rho_V g R_V T \end{aligned} \quad (1)$$

La presión total de la mezcla aire-vapor de agua es igual a la suma de la presión parcial ejercida por el aire seco y el vapor de agua:

$$P_Z = P_A + P_V \quad (2)$$

De la misma manera, la densidad de la mezcla aire-vapor de agua es:

$$\rho_Z = \rho_A + \rho_V \quad (3)$$

Entonces despejando a la densidad de las ecuaciones 1 y sustituyendo 2 y 1 en ecuación 3 podemos obtener el valor de la densidad del aire en el laboratorio, esto es, la densidad de la mezcla aire seco mas vapor de agua:

$$\rho_Z = \frac{1}{g R_A T} \left[P_Z - P_V \left(1 - \frac{R_A}{R_V} \right) \right] \quad (4)$$

Los valores de R_A Y R_V son:

$$R_A = 29.256 \text{ m}^2/\text{K}$$

$$R_V = 47.031 \text{ m}^2/\text{K}$$

Entonces podemos volver a escribir a la ecuación 4 como:

$$\rho_Z = \frac{1}{g R_A T} [P_Z - 0.3779 P_V] \quad (5)$$

La ecuación 5 nos permite conocer el valor de la densidad del aire a partir de:

-La temperatura ambiente en grados Kelvin. Este dato se obtiene de la lectura del termómetro colocado en el laboratorio. (no olvide efectuar la conversión de unidades, ya que la escala del termómetro está graduada en centígrados o grados Fahrenheit.).

-La presión atmosférica P_Z en kg/m^2 . Este dato se obtiene de la lectura del barómetro, esta puede ser en mm de Hg o en pulgadas de Hg. Se debe **realizar una corrección**⁵ para eliminar el error producido por la dilatación del mercurio en el barómetro y finalmente convertir este valor a kg/m^2 .

- La presión de vapor P_V en kg/m^2 . Este dato se obtiene de la siguiente manera:

a) Se debe conocer el valor de la presión de saturación, que es el valor máximo de presión a la cual el aire puede mantener agua en estado gaseoso a una temperatura dada, su valor se puede calcular mediante la fórmula empírica:

$$\begin{aligned} P_S &= 2.685 + 3.537 \times 10^{-3} (t)^{2.245} \\ (P_S \text{ se obtiene en } \text{lb}/\text{ft}^2 \text{ y } t \text{ debe estar en } ^\circ\text{F}) \end{aligned} \quad (6)$$

b) Se mide el valor de la humedad relativa que indica el higrómetro⁶. La humedad relativa⁷ se define como el cociente que resulta de dividir la presión de vapor entre la presión de saturación:

$$H_r = \frac{P_V}{P_S}, \text{ finalmente la presión de vapor se obtiene con: } P_V = H_r P_S \quad (7)$$

Note que las unidades de la presión de vapor se obtienen de acuerdo a las unidades en que este la presión de saturación, puesto que la humedad relativa es adimensional. Entonces si de la ecuación 6 se obtienen lb/ft^2 , la presión de vapor también se obtendrá en estas unidades al utilizar la ecuación 7, y se deberá de convertir a kg/m^2 para al utilizar la ecuación 5, o bien directamente convertir a kg/m^2 el valor de P_S obtenido de la ecuación 6.

⁵La presión leída del barómetro deberá de corregirse con: $P_{\text{CORR}} = P_{\text{LEIDA}} \left[\frac{1 + (0.0000184 \frac{1}{^\circ\text{C}})t}{1 + (0.0001818 \frac{1}{^\circ\text{C}})t} \right]$ t es la temperatura ambiente en centígrados.

⁶Se acostumbra graduar la escala de los higrómetros en porcentaje, indicándolo con %RH, en este caso, simplemente se deberá de cambiar la lectura a su valor decimal, por ejemplo: 23% a 0.23.

⁷ Algunas veces se expresa también como RH (relative humidity).

APENDICE B

Tabla B1- Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 1 motor

Segundos	MOTOR 1					
	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4	Prueba 5	Prueba 6	Prueba 7
Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
6	52.9	42.97	41.6	63.53	39.52	46.72
7	41.24	43.11	40.8	64.7	40	46.59
8	42.32	43.35	40.78	40.76	41.55	46.18
9	42.13	43.07	41.27	50.06	39.69	46.14
10	40.59	42.4	39.85	50.38	40.77	46.24
11	40.77	42.43	41.03	35.21	39.54	46.06
12	41.95	44.09	40.92	64.45	45.15	46.73
13	41.82	43.15	41.72	37.05	41.31	46.04
14	41.21	43.23	41.58	42.35	41.67	46.6
15	42.37	42.77	41.02	54.53	40.68	46.83
16	41.81	43.41	60.46	37.12	39.93	45.87
17	42.73	42.54	43.04	43.32	40.1	46.56
18	41.76	42.27	41.56	43.51	39.54	46.84
19	41.65	64.3	42.04	40.86	39.59	47.38
20	41.16	65.1	41.09	41.96	39.52	47.2
21	41.02	64.3	40.3	42.8	44.94	46.24
22	42.07	64.7	41.66	40.95	40.09	46.89
23	41.09	42.75	40.28	39.95	39.72	46.56
24	42.09	42.91	40.83	41.74	39.16	45.79
25	41.64	43.13	42.72	39.27	39.37	46.15
26	43.11	45.09	40.52	40.7	40.21	46.63
27	40.22	43.38	41.21	55.05	39.86	46.42
28	40.21	42.49	40.2	47.25	40.03	46.72
29	41.54	41.5	41.59	44.05	39.45	46.79
30	40.55	63	41.04	34.97	40.32	47.08
31	46.27	43.05	40.65	47.57	39.71	46.18
32	47.3	44.33	40.59	49.83	40.2	46.75
33	42.02	42.46	41.71	49.01	40.58	46.88
34	42.94	41.65	42.44	41.6	40.28	47.01
35	41.85	42.72	41.72	44.22	45.16	46.23
36	42.55	45.79	42.36	39.57	40.44	46.11
37	42.73	67	45.16	43.27	40.41	47.24
38	41.47	43.18	42.99	41.42	40.64	46.73
39	41.73	41.6	43.18	44.47	40.23	46.18
40	44.23	43.97	41.21	40.98	40.79	46.62
41	41.9	51.85	43	52.52	40.75	46.24
42	43.39	42.57	42.51	40.48	40.43	46.9
43	43.72	59.04	44.51	42.08	41.05	47.3
44	43.38	43.46	44.01	46.61	40.53	46.73
45	41.48	42.9	41.42	42.4	41.35	46.49
46	42.25	43	43.65	40.59	40.41	46.95
47	43.18	43.37	55.62	40.14	41.28	46.39
48	41.68	42.73	53.61	31.92	41.04	47.33
49	44.52	42.64	43.21	33.02	41.37	46.93
50	45.02	41.72	41.04	40.85	41.21	47.11
51	42.3	42.32	39.26	41.27	40.69	46.71
52	43.75	42.26	41.77	39.57	40.78	47.48
53	42.84	42.76	40.87	50.98	40.77	47.1
54	42.05	41.54	39.65	41.4	40.31	46.81
55	41.23	44.12	41.09	42.33	40.5	47.03
Promedio	42.5146	46.0694	42.5268	44.0924	40.6524	46.6536
Frecuencia Promedio (rad/s)	43.75153333					
Frecuencia Final (Hz)	6.963272798					

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

Tabla B2-Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 2 motores

Segundo	MOTOR 2							
	Prueba 1	Prueba 1.5	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4	Prueba 5	Prueba 6	Prueba 7
	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
6	41.88	64.55	40.89	39.68	40.23	41.09	56.34	40.53
7	42.62	77.41	39.12	40.74	42.04	40.12	38.13	43.21
8	42.6	59.93	40.72	55.78	42.8	41.11	43.08	60.27
9	42.27	56.83	40.28	41.05	42.65	42.95	43.06	47.61
10	42.24	42.89	39.8	40.69	39.64	46.27	41.86	42.97
11	41.36	39.51	39.77	40.56	39.09	41.56	42.22	57.74
12	42.74	41.16	39.84	40.19	65.94	42.53	45.42	54.91
13	43.42	40.54	40.35	101.4	53.43	56.3	42.07	47.77
14	42.53	54.23	40.42	78.5	52.95	45.4	41.58	42.01
15	41.52	41.94	39.99	63.46	52.42	47.8	43.23	47.33
16	39	42.55	40.46	64.3	41.35	47.06	41.71	51.93
17	3	41.29	40.4	65.7	58.29	53.11	40.72	58.41
18	40.57	39.54	40.55	64.35	63.4	53.21	72.37	77.75
19	40.18	40.14	40.1	39.87	48.59	47.87	76	63.39
20	40.96	53.66	30.42	75.35	47.02	48.82	55.36	75.33
21	40.82	41.43	45.87	76.8	48.49	52.72	57.61	45.97
22	40.57	41.07	39.43	49.86	46.19	56.11	46.05	84.89
23	40.99	41.34	39.55	40.07	43.63	50.04	46.37	84.48
24	40.49	39.72	41.51	54.76	51.66	41.9	48.8	69.55
25	41.18	41.24	40	58.77	41.98	44.22	63.86	71.6
26	40.81	40.85	40.18	60.3	41.93	46.5	52.43	65.27
27	40.07	40.56	40.35	55.65	64.91	38.84	48.14	46.99
28	40.44	39.57	40.58	59.14	48.71	43.54	45.54	52.99
29	41.7	45.2	41.26	40.55	61.51	61.93	58.6	62.98
30	41.25	41.7	56.88	39.96	51.26	42.8	49.02	43.58
31	40.7	41.29	54.94	41.3	43.35	43.81	46.79	41.88
32	39.31	40.47	39.96	55.14	43.26	48.05	41.19	61.8
33	59	40.55	39.16	57.1	44.76	42.28	50.41	66
34	57.31	41.26	39.79	40.92	45.08	47.21	46.68	64.65
35	78.37	41.21	40.47	74.59	48.32	63.36	56.27	56.08
36	39.88	40.97	38.64	75.9	47.8	48.88	56.62	41.67
37	56.11	39.81	40.7	65.3	65.43	37.96	55.58	45.59
38	41.2	40.42	39.81	76.3	38.46	52.63	59.62	39.95
39	52.42	40.62	39.38	76.3	68.16	54.54	47.73	71.66
40	66.76	41.87	41.92	59.16	45.59	66.3	44.8	41.3
41	52.9	44.42	40.73	76.3	56.73	42.8	40.67	119
42	52.09	41.03	40.33	53.04	66.56	45.68	55.18	52.92
43	40.54	41.76	39.09	54.05	49.25	52.73	53.39	50.74
44	39.43	40.93	39.28	59.17	55.91	42.05	49	49.07
45	39.85	43.69	38.82	56.28	53.24	41.55	63.37	53.53
46	40.57	41.55	39.75	48.57	50.96	40.41	94.71	57.04
47	54.67	40.24	40.27	76.3	49.97	40.24	69.97	59.57
48	47.41	41.06	40.24	61.14	54.59	51.84	54.62	50.66
49	40.16	78.505	39.87	57.48	62.08	56.14	51.7	48.77
50	41.02	64.005	40.12	54.2	42.16	56.07	65.33	51.93
51	54.81	60.73	39.42	48.09	48.91	39.26	39.97	55.03
52	55.5	40.85	39.71	39.03	54.97	38.96	51.55	57.91
53	55.59	41.5	37.66	40.45	42.01	40.54	52	44.02
54	40.7	40.82	39.19	38.69	54.18	39.57	48.35	61.11
55	63.49	42.33	39.46	39.43	47.64	53.44	42.44	52.51
Promedio	44.9	45.2148	40.5486	56.2342	50.1896	47.202	51.5502	56.677
Frecuencia Promedio (rad/s)	49.06455							
Frecuencia Final (Hz)	7.808865663							

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

Tabla B3-Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 3 motores

Segundo	MOTOR 3				
	Prueba 3	Prueba 4	Prueba 5	Prueba 6	Prueba 7
Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia
6	60.81	51.46	56.39	55.65	55.2
7	58.55	61.78	56.7	41.26	55.17
8	38.82	64.08	52.62	70.46	57.64
9	73.32	41.88	49.94	68.06	59.68
10	53.86	39.01	51.36	64.45	54.05
11	61.37	37.81	68.56	70.39	62.87
12	60.25	66.19	39.5	71.11	58.32
13	50.9	53.01	54.87	74.66	55.98
14	74.15	53.93	42.14	64.7	54.99
15	56.76	50.66	55.89	134.4	55.39
16	54.94	52.12	57.39	62.4	55.77
17	78.55	51.64	41.05	47.03	55.08
18	51.35	48.4	60.2	70.77	56.07
19	78.55	61.3	46.56	101.9	48.73
20	78.55	65.5	62.74	46.04	44.82
21	83.91	47.07	62.5	75.09	55.23
22	86.05	49.15	58.84	61.52	63.66
23	63.55	52.56	55.55	55.95	45.32
24	52.59	73.1	67.29	75.3	65.57
25	68.45	45.02	39.58	59.85	56.46
26	50.45	59.45	39.32	58.92	54.14
27	63.23	52.65	37.33	57.46	60.45
28	63.4	55.47	80.88	48.3	63.31
29	64.35	77.05	83.33	46.88	68.93
30	59.1	77.74	88	64.56	56.35
31	45.8	46.35	71.2	55.48	56.19
32	118.6	69.95	52.89	52.28	56.55
33	63.9	65.29	76.05	44.39	56.55
34	54.45	59.17	76.05	62.16	48.31
35	78.55	46.41	55.33	90.02	48.57
36	78.41	59.29	65.14	86.24	50.94
37	56.75	59.48	57.4	65.29	59.98
38	54.27	72.08	73.1	85.89	56.08
39	57.71	41.18	56.64	91.82	49.8
40	228.9	57.3	38.77	102.3	66.49
41	52.15	56.23	75.51	43.5	50.51
42	153.8	60.09	70.05	71.84	66.48
43	55.25	56.59	72.1	69.56	59.41
44	59.5	57.95	66.13	60.17	61.51
45	52.44	50.81	75.15	53.05	54.97
46	50.3	64.2	63.1	49.51	55.86
47	54.47	49.66	53.92	57.16	56.21
48	51.24	56.76	46.57	74.56	63.84
49	50.29	55.51	52.73	59.43	58.21
50	50.86	51.86	52.46	68.64	57.28
51	37.75	53.82	53.46	72.25	57.06
52	117.8	53.87	882.15	48.22	56.95
53	66.42	60.3	67.13	50.93	57.14
54	63.65	67.5	45.48	52	66.74
55	56.44	52.63	65.32	61.54	55.86
Promedio	67.9102	56.2462	75.4472	65.5068	56.9334
Frecuencia Promedio (rad/s)	64.40876				
Frecuencia Final (Hz)	10.25097253				

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

Tabla B4 Datos de las frecuencias tomadas por el acelerómetro para 4 motores

Segundo	MOTOR 4	
	Prueba 5	Prueba 6
	Frecuencia	Frecuencia
6	65.08	95.75
7	50.25	73.75
8	47.87	83.81
9	69.81	101.7
10	99	73.36
11	68.61	115.8
12	55.7	78.15
13	50.37	71.36
14	115.1	78.13
15	119.4	106
16	67.6	101.3
17	83.8	56.89
18	58.2	55.05
19	149.7	94.29
20	102.8	142.1
21	120.1	72.62
22	111.97	58.29
23	182	51.97
24	67.19	121.6
25	118.5	58.04
26	77.94	93.96
27	110.48	74.99
28	58.23	59.11
29	94.8	52.88
30	109.4	147.5
31	78.15	44.32
32	106.8	50.75
33	157.1	72.53
34	84.1	71.57
35	86.39	66.06
36	97.2	66.74
37	93.1	57.14
38	81.15	56.03
39	80.64	111.3
40	57.38	68.21
41	89.94	104.7
42	61.93	76.26
43	41.7	68.48
44	54.61	63.92
45	78.91	86.26
46	72.27	97.47
47	75.33	69.91
48	137.1	73.01
49	62.61	72.05
50	61.81	56.81
51	52.57	86.18
52	60.64	128
53	145.7	106.7
54	47.6	101.5
55	63.63	114.9
Promedio	85.6452	81.784
Frecuencia Promedio (rad/s)	83.7146	
Frecuencia Final (Hz)	13.3235924	