



**INSTITUTO POLITECNICO  
NACIONAL**



**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA  
UNIDAD ZACATENCO**

**SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION**

**TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS DE INGENIERIA MECANICA  
OPCION DISEÑO**

**“ANALISIS CINEMATICO Y DINAMICO DE  
MANIPULADORES ROBOTICOS POR LA  
METODOLOGIA DE LOS NUMEROS DUALES”**

**ALUMNO:**

**GONZALEZ MORENO DENISE**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. GUILLERMO URRIOLAGOITIA CALDERON**



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14

**ACTA DE REVISIÓN DE TESIS**

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 18:00 horas del día 4 del mes de Agosto del 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis de titulada:

**“ANÁLISIS CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE MANIPULADORES ROBÓTICOS  
POR LA METODOLOGÍA DE LOS NÚMEROS DUALES.”**

Presentada por el alumno:

**GONZÁLEZ**

Apellido paterno

**MORENO**

Apellido materno

**DENISE**

Nombre(s)

Con registro:

B	0	6	1	1	6	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISIÓN REVISORA**

Director(a) de tesis

DR. GUILLERMO URRIOLAGOITIA CALDERÓN

Presidente

DR. LUÍS HÉCTOR HERNÁNDEZ GÓMEZ

Tercer Vocal

Segundo Vocal

DR. JUAN ALFONSO BELTRÁN FERNÁNDEZ

Secretario

DR. ALEJANDRO TONATILH VELÁZQUEZ SÁNCHEZ

DR. GUILLERMO URRIOLAGOITIA SOSA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCÍA





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 9 del mes de Agosto del año 2010, la que suscribe Denise González Moreno alumna del programa de Maestría en Ciencias de Ingeniería Mecánica con número de registro B061167, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la E.S.I.M.E. Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de: Dr. Guillermo Urriolagoitia Calderón y cede los derechos del trabajo intitulado: Análisis Cinemático y Dinámico de Manipuladores Robóticos por la metodología de los Números Duales, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director de trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: denisse080983@hotmail.com Si el permiso se otorga el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre y Firma

---

Denise González Moreno

## RESUMEN

El presente trabajo aborda los procedimientos para la realización de análisis cinemáticos y dinámicos de manipuladores robóticos usando números duales en lugar de números ordinarios.

El análisis cinemático se divide en dos partes, la primera corresponde al análisis de desplazamiento donde se determinarán posiciones y orientaciones mediante la determinación del modelo directo del manipulador auxiliándose de los parámetros de Denavit-Hartenberg, pero con aplicación a álgebra dual.

La segunda parte del análisis cinemático corresponde al estudio de velocidad, se determinan las velocidades lineales y angulares en su forma dual y se usará el método de propagación de velocidades para determinar la velocidad del sistema.

La realización del análisis dinámico tiene como finalidad obtener las ecuaciones duales de equilibrio dinámico empleando el método de Newton-Euler pero adaptado a álgebra dual.

Finalmente los procedimientos y resultados se aplican a un manipulador de configuración cilíndrica.

## ABSTRACT

This work presents the procedures for the realization of kinematic and dynamic analysis of robotic manipulators using dual numbers instead of ordinary numbers.

The kinematic analysis is divided into two parts, the first one is for the displacement analysis which will determine positions and orientations by determining the direct model of the manipulator using the Denavit-Hartenberg parameters, but with application to dual algebra.

The second part of the kinematic analysis is for the study of the velocity, determining the linear and angular velocities in dual form and will be used the method of propagation velocity to determine the velocity of the system.

The realization of dynamic analysis is intended to obtain the dual dynamic equilibrium equations using the Newton-Euler method but adapted to dual algebra.

Finally, the procedures and results are applied to a cylindrical configuration manipulator.

**TABLA DE CONTENIDO**

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
TABLA DE CONTENIDO	iii
ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS	ix
OBJETIVO GENERAL	xiii
JUSTIFICACIÓN	xiii
<b>CAPÍTULO 1. HISTORIA DEL ARTE</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUCCIÓN	
1.2 HISTORIA DE LA ROBÓTICA	2
1.3 MECANISMOS APLICADOS EN ROBÓTICA	9
1.3.1 Mecanismos	9
1.3.2 Articulaciones	11
1.3.3 Configuraciones	13
1.4 ANÁLISIS CINEMÁTICOS Y DINÁMICOS EN ROBÓTICA	17
1.5 ANTECEDENTES DE LOS NUMEROS DUALES	19
<b>CAPÍTULO 2. MARCO TEORICO</b>	<b>22</b>
2.1 INTRODUCCIÓN	23

2.2	NUMEROS DUALES	23
2.2.1	Definición	23
2.2.2	Adición de números duales	24
2.2.3	Sustracción de números duales	24
2.2.4	Multiplicación de números duales	24
2.2.5	División de números duales	25
2.2.6	Potencia en números duales	25
2.2.7	Raíz de números duales	26
2.2.8	Series de Taylor en números duales	26
2.3	ÁNGULOS DUALES	26
2.4	IDENTIDADES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN ÁNGULOS DUALES	27
2.5	VECTORES	28
2.5.1	Vectores Libres	28
2.5.2	Vectores Fijos	28
2.5.3	Vectores Duales	29
2.6	LA ECUACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN	30
2.7	REPRESENTACIÓN LINEAR	32
2.8	GEOMETRÍA	33
2.9	CICLOS	33
2.10	GENERALIZACIÓN	34

---

---

TABLA DE CONTENIDO

---

---

2.11 DIFERENCIACIÓN	34
2.12 CORDENADA DE TRANSFORMACIÓN	35
2.12.1 Desplazamientos relativos y orientaciones	35
2.12.2 Movimiento de Rotación con respecto a los ejes de coordenadas	35
2.12.3 Movimiento de un vector a través de un ángulo dual	41
2.12.4 Transformación Inversa	42
2.12.5 Transformaciones sucesivas	44
2.12.6 Rotar-Proyectar-Orientar con respecto a ejes fijos	45
2.12.7 Ángulos de Euler XYZ	46
2.12.8 Ángulos de Euler ZYZ	50
2.12.9 Transformación Relativa	51
2.12.10 Movimiento de rotación con respecto a un vector unitario general	52
2.12.11 Determinación del ángulo dual y eje de un movimiento de rotación dado.	55
2.13 MODELADO DE MATRICES PARA ARTICULACIONES Y ESLABONES	62
2.13.1 Localización del Marco	64
2.13.2 Transformaciones articulación-eslabón	64
2.13.3 Transformaciones articulación-eslabón	68
2.13.4 Eslabones con articulaciones planares	69
<b>CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO</b>	<b>72</b>
3.1 INTRODUCCIÓN	73
3.2 ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO CONVENCIONAL	74

---

---

TABLA DE CONTENIDO

---

---

3.2.1	Análisis de desplazamiento en el mecanismo de cuatro barras por el método gráfico	74
3.2.2	Análisis de desplazamiento en el mecanismo de cuatro barras por el método analítico.	75
3.2.3	Análisis de desplazamiento de manipuladores robóticos.	78
3.3	<b>METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO CON NÚMEROS DUALES</b>	<b>88</b>
3.3.1	Ventajas de la aplicación de la metodología de los números duales en los análisis cinemáticos.	89
3.3.2	Condición de cadena cerrada	89
3.3.3	Eslabonamiento de cuatro barras	90
3.3.4	Eslabonamiento de cuatro barras esférico.	94
3.4	<b>APLICACIONES</b>	<b>102</b>
3.4.1	Manipulador plano con tres articulaciones de rotación.	103
3.4.2	Manipulador configuración cilíndrica	110
3.5	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>117</b>
	<b>CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE VELOCIDAD</b>	<b>118</b>
4.1	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>119</b>
4.2	<b>VELOCIDADES LINEALES Y ANGULARES</b>	<b>119</b>
4.2.1	Velocidad lineal	120
4.2.2	Velocidad Angular	121
4.2.3	Propagación de velocidades	122
4.3	<b>JACOBIANO DEL MANIPULADOR</b>	<b>125</b>

---

---

TABLA DE CONTENIDO

---

---

4.4 ANALISIS DE VELOCIDAD CON NUMEROS DUALES	130
4.4.1 Conceptos Básicos	130
4.4.2 Método matriz de transformación	138
4.4.3 Velocidades en diferentes puntos de un cuerpo rígido.	139
4.5 APLICACIONES	142
4.6 CONCLUSIONES	145
<b>CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINAMICO</b>	<b>146</b>
5.1 INTRODUCCIÓN	147
5.2 ARTICULACIÓN DE SIMPLE ROTACIÓN	147
5.3 GENERALIZACIÓN: MODELO DE UN ROBOT MANIPULADOR CON N ARTICULACIONES.	150
5.4 FORMULACIÓN DE LAGRANGE-EULER	151
5.5 MÉTODO DE NEWTON-EULER	153
5.5.1 Aceleraciones	153
5.5.2 Ecuaciones de Newton-Euler. Formulación iterativa	155
5.6 ANÁLISIS DINÁMICO DE LOS MANIPULADORES	162
5.7 OBTENCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS ARTICULARES.	164
5.7 ANÁLISIS DINÁMICO CON NUMEROS DUALES	165
5.7.1 Aceleraciones duales	165
5.7.2 Momento Dual	168
5.7.3 Centro de masa y Radios de Giro	178
5.7.4 Fuerza de Inercia Dual	179

---

---

TABLA DE CONTENIDO

---

---

5.7.5 Equilibrio Dinámico de un Conector	180
5.7.6 Análisis Dinámico de Mecanismos	181
5.8 APLICACIONES	182
5.9 CONCLUSIONES	189
<b>CONCLUSIONES GENERALES</b>	<b>191</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>193</b>

## ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

Figura 1.1 Telar de Jacquard	3
Figura 1.2 Robot “Shakey”	5
Figura 1.3 Robot “Unimate”	6
Figura 1.4 “Omnibot 2000”	7
Figura 1.5 “Aibo” de Sony	7
Figura 1.6 Eslabonamiento de cuatro barras	10
Figura 1.7 Eslabonamiento de seis barras	11
Figura 1.8 Articulación de Rotación	11
Figura 1.9 Articulación Prismática	12
Figura 1.10 Articulación Cilíndrica	12
Figura 1.11 Articulación Planar	12
Figura 1.12 Articulación Esférica	13
Figura 1. 13 Configuración Cartesiana	14
Figura 1. 14 Configuración Cilíndrica	15
Figura 1. 15 Configuración Esférica	15
Figura 1. 16 Configuración Angular	16
Figura 1. 17 Configuración Scara	17

Figura 2.1 El ángulo dual expresa la relación entre dos líneas en el espacio.	26
Figura 2.2 Un vector libre $\vec{V}_L$ debe mantener su magnitud y dirección pero puede ser posicionado en cualquier lugar del espacio	28
Figura 2.3 Un vector fijo $\vec{V}_F$ es muy útil para la localización de un punto P.	29
Figura 2.4 Un vector dual $\hat{V}$ esta simulado sobre la línea R en el espacio.	29
Figura 2.5 La ecuación de transformación permite a un vector dual expresado en un marco {O} ser expresado en un marco {P} orientado similarmente.	31
Figura 2.6 Sistema de coordenadas {B} relativo al sistema de coordenadas {A} por movimiento de rotación con respecto al eje x del marco {A}.	36
Figura 2.7 Marco de coordenadas {B} relativo al marco {A} por el movimiento de rotación con respecto al eje Y del marco {A}.	40
Figura 2.8 Marco {B} relativo al marco {A} por movimiento de rotación con respecto al eje Z del marco {A}.	41
Figura 2.9 Eslabón n con articulaciones n y n-1.	63
Figura 2.10 Eslabón en arco	66
Figura 2.11 Coincidencia en cuenta del espesor de los eslabones	67
Figura 2.12 Un sujetador es en ocasiones usado para obtener una articulación de rotación sin punto de coincidencia.	67
Figura 2.13 Eslabón con articulación esférica	69
Figura 2.14 La articulación planar	70
Figura 3.1 Análisis gráfico de desplazamientos del mecanismo de cuatro barras	74

Figura 3.2 Mecanismo de cuatro barras	76
Figura 3.3 Segunda inversión geométrica (primera inversión mostrada con línea discontinua)	77
Figura 3.4 Asignación de sistemas de referencia.	79
Figura 3.5 Asignación de cuadros de referencia a articulaciones consecutivas.	83
Figura 3. 6 Manipulador con tres articulaciones de rotación	87
Tabla 3.1 Parámetros de Denavit-Hartenberg del manipulador con tres articulaciones de rotación	87
Figura 3.7 Desplazamiento de un mecanismo planar de cuatro barras.	90
Tabla 3.2 Parámetros de Denavit Hartenberg mecanismo planar de cuatro barras	91
Figura 3.8 Desplazamientos de un mecanismo esférico de cuatro barras	94
Tabla 3.3 Parámetros de Denavit Hartenberg mecanismo esférico de cuatro barras	95
Figura 3.9 Marco Universal, marco de la base del robot, marco de la muñeca y marco del efector final.	97
Figura 3.10 Vectores que definen el marco de la muñeca	99
Figura 3.11 Sistema Robótico.	101
Tabla 3.4 Parámetros de Denavit-Hartenberg para el sistema robótico	101
Figura 3. 6 Manipulador con tres articulaciones de rotación	103
Figura 3.12 Manipulador robótico configuración cilíndrica.	110
Figura 4.1. Velocidad de traslación y rotación.	120
Figura 4.2. Vectores velocidad de dos articulaciones consecutivas.	123

Figura 4.3 Manipulador con tres articulaciones de rotación	127
Figura 4.4 Velocidades duales de los puntos P y Q de un cuerpo rígido.	131
Figura 4.5 Cuando varios cuerpos se mueven relativamente uno de otro. Las velocidades duales se pueden obtener usando la ecuación de la velocidad relativa dual.	141
Figura 5.1 Articulación de Rotación	148
Figura 5.2 Manipulador con una articulación.	149
Figura 5.3 Balance de fuerzas en dos articulaciones consecutivas	157
Figura 5.4 Cuerpo rígido A en movimiento relativo al marco fijo {0}	167
Figura 5.5 Fuerzas duales actuando sobre el eslabón A en sus articulaciones A y B.	181

## OBJETIVO GENERAL

Realizar el análisis cinemático y dinámico de un manipulador robótico aplicando la metodología de los números duales a las técnicas ya conocidas con la finalidad de demostrar que al usar algebra dual en lugar de algebra ordinaria los resultados se producirán más compactos y a la vez más completos.

## JUSTIFICACIÓN

El uso de manipuladores robóticos es en la actualidad es numeroso, la creciente demanda de estos dispositivos obliga a proyectar mejores expectativas en el diseño y operación de los mismos.

La operación y funcionamiento de los manipuladores robóticos se lleva a cabo mediante un control, este a su vez, generalmente se opera mediante un software que se programa de acuerdo a las tareas que se desea que el robot realice, la reincidencia y el tiempo en el cual se deben realizar, crear los algoritmos y códigos que conformarán estos software resulta generalmente difícil pues los algoritmos se desarrollan en base a las ecuaciones que definen los modelos cinemáticos y dinámicos de los manipuladores robóticos y dichas ecuaciones resultan muy extensas y complejas.

Las ecuaciones que definen los modelos cinemáticos y dinámicos de los manipuladores robóticos resultan de los análisis cinemáticos y dinámicos de dichos robots, estos análisis también son dificultosos, por lo tanto si se encuentra la manera de simplificar estos procedimientos los resultados que generarán también resultarán más factibles. Estos análisis se pueden simplificar mediante el uso de matemáticas avanzadas.

# CAPÍTULO 1

## HISTORIA DEL ARTE



Se considera de suma importancia, para este capítulo presentar los antecedentes históricos de la Robótica con el fin de conocer sus orígenes y evolución, de la misma forma se presenta la reseña histórica de los números duales desde su aparición hasta la época actual, de esta manera se le facilitara al lector encontrar la conveniente relación de ambos temas en los análisis cinemáticas y dinámicos.

## 1.1 INTRODUCCIÓN

Hoy en día la robótica ha crecido insólitamente impulsada por los avances en computación, sensores, electrónica y software.

Los robots están presentes en cada aspecto relevante de el crecimiento de la tecnología en la Tierra, se han aplicado accidentes nucleares, exploraciones marítimas a grandes profundidades donde el ser humano no puede llegar, viajes espaciales, cirugías medicas, se han convertido en herramientas para producir, trabajar, y realizar labores peligrosas en el planeta y fuera de él.

La robótica está cambiando la forma de vida y trabajo proporcionando nuevas maneras de construir, mantener la seguridad, producir y distribuir energía, tecnología y alimentos al mundo y de esta forma le da la oportunidad a la humanidad de expandir los límites de la experiencia humana.

Para incrementar la efectividad de las tareas de los robots es indispensable hacer análisis cinemáticos y dinámicos de estos, con el fin de obtener mayor exactitud, sistemas de control más prácticos, movimientos más precisos y un sin número de ventajas.

Los análisis a robots resultan ser un tanto complicado sobre todo los dinámicos, es por eso que la metodología de los números duales facilita en gran manera este proceso ya que simplifica la solución de expresiones matemáticas muy complejas que se usan regularmente en el proceso de análisis tradicional.

## 1.2 HISTORIA DE LA ROBÓTICA

Por siglos el ser humano ha construido máquinas que imiten las partes del cuerpo humano. Los antiguos egipcios unieron brazos mecánicos a las estatuas de sus dioses. Estos brazos fueron operados por sacerdotes, quienes afirmaban que el movimiento de estos era inspiración de sus dioses. Los griegos construyeron

estatuas que operaban con sistemas hidráulicas, los cuales se utilizaban para fascinar a los adoradores de los templos.

Durante los siglos XVII y XVIII en Europa fueron construidos muñecos mecánicos muy ingeniosos que tenían algunas características de robots.

En 1805, Henri Maillardert construyó una muñeca mecánica que era capaz de hacer dibujos. Una serie de levas se utilizaban como “el programa” para el dispositivo en el proceso de escribir y dibujar. Estas creaciones mecánicas de forma humana deben considerarse como inversiones aisladas que reflejan el genio de hombres que se anticiparon a su época. Hubo otras invenciones mecánicas durante la revolución industrial, creadas por mentes de igual genio, muchas de las cuales estaban dirigidas al sector de la producción textil. Entre ellas se puede citar la hiladora giratoria de Hargreaves (1770), la hiladora mecánica de Crompton (1779), el telar mecánico de Cartwright (1785), el telar de Jacquard (1801), y otros.

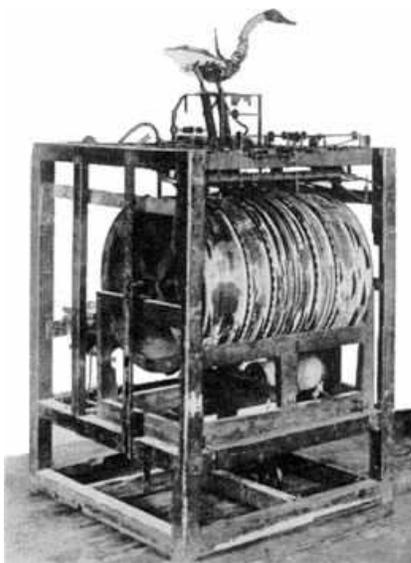


Figura 1.1 Telar de Jacquard (History of Robotics, 2005).

Una obra checoslovaca publicada en 1917 por Karel Kapek, denominada Rossum's Universal Robots, dio lugar al término robot. La palabra checa 'Robota' significa servidumbre o trabajador forzado, y cuando se tradujo al inglés se convirtió en el término robot. Dicha narración se refiere a un brillante científico llamado Rossum y su hijo, quienes desarrollan una sustancia química que es similar al protoplasma.

Utilizan ésta sustancia para fabricar robots, y sus planes consisten en que los robots sirvan a la clase humana de forma obediente para realizar todos los trabajos físicos.

Rossum sigue realizando mejoras en el diseño de los robots, elimina órganos y otros elementos innecesarios, y finalmente desarrolla un ser perfecto. El argumento experimenta un giro desagradable cuando los robots perfectos comienzan a no cumplir con su papel de servidores y se rebelan contra sus dueños, destruyendo toda la vida humana.

El desarrollo en la tecnología, donde se incluyen las poderosas computadoras electrónicas, los actuadores de control retroalimentados, transmisión de potencia a través de engranes, y la tecnología en sensores han contribuido a flexibilizar los mecanismos autómatas para desempeñar tareas dentro de la industria. Son varios los factores que intervienen para que se desarrollaran los primeros robots en la década de los 50's. La investigación en inteligencia artificial desarrolló maneras de emular el procesamiento de información humana con computadoras electrónicas e inventó una variedad de mecanismos para probar sus teorías.

En 1951 los científicos Goertz y Bergsland realizaron el primer trabajo de desarrollo de manipuladores de control remoto para manejar materiales radioactivos. Para 1954 se solicitó la primera patente para diseño de robot por el inventor británico C. W. Kenward. Finalmente en 1959 se introdujo el primer robot comercial por Planet Corporation, el cual estaba controlado por interruptores de fin de carrera.

Al iniciar la década de los 60's Se introdujo el primer robot "Unimate", basada en la transferencia de artículos programada" de Devol, utilizaba los principios de control numérico para el control del manipulador y era un era un robot de transmisión hidráulica. En 1961 Un robot Unimate se instaló en la Ford Motors Company para atender una máquina de fundición de troquel. Para 1966, una firma noruega llamada Trallfa construyó e instaló un robot de pintura por pulverización. En 1968 Un robot

móvil llamado ‘Shakey’ se desarrollo en el Standford Research Institute, estaba provisto de una diversidad de sensores así como una cámara de visión y sensores táctiles y podía desplazarse por el suelo.



Figura 1.2 Robot “Shakey” (History of Robotics, 2005).

La época de los 70’s no fue menos importante, ya que durante ésta se desarrollaron los primeros lenguajes de programación para robot, en 1974 se introdujo el robot IR6 de accionamiento completamente eléctrico y en ese mismo año Cincinnati Milacron introdujo el robot T3 con control por computadora. También se realizó una de las primitivas aplicaciones de la robótica al montaje cuando en 1975 el robot ‘Sigma’ de Olivetti se utilizó en operaciones de montaje. En el año de 1978 Unimation introdujo el robot PUMA (Programmable Universal Machine for Assambly) para tareas de montaje, basándose en diseños obtenidos en un estudio de la General Motors mientras que el robot T3 de Cincinnati Milacron se adaptó y programó para realizar operaciones de taladro y circulación de materiales en componentes de aviones, bajo el patrocinio de Air Force ICAM (Integrated Computer- Aided Manufacturing). A finales de la década de los 70’s se Desarrollo del robot tipo SCARA (Selective Compliance Arm for Robotic Assambly) en la Universidad de Yamanashi en Japón para montaje. Varios robots SCARA comerciales se introdujeron hacia 1981.

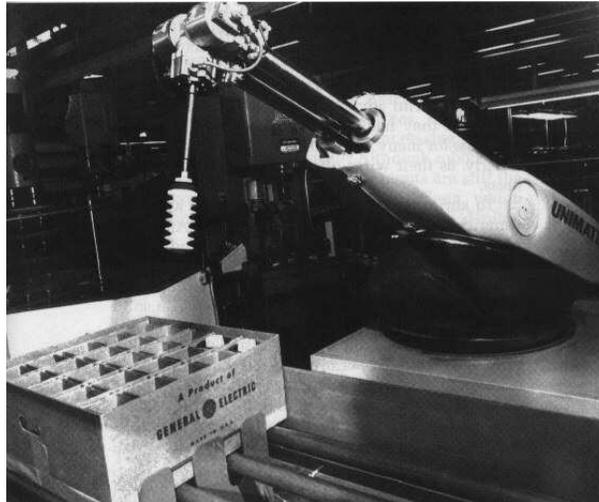


Figura 1.3 Robot "Unimate" (History of Robotics, 2005).

En 1982 IBM introdujo el robot RS-1 para montaje, basado en varios años de desarrollo interno. Se trata de un robot de estructura de caja que utiliza un brazo constituido por tres dispositivos de deslizamiento ortogonales. El lenguaje del robot AML, desarrollado por IBM, se introdujo también para programar el robot RS-1.

En 1984 varios sistemas de programación fuera de línea se demostraron en la exposición "Robots 8" la operación típica de estos sistemas permitía que se desarrollaran programas de robots utilizando gráficos interactivos en una computadora personal y luego se cargaban en el robot (Historia, 1999-2000).

La compañía Tomy Kyogo creó un robot juguete, el "Omnibot 2000" el cual se manipulaba por un control remoto a través de programas almacenados en cinta magnética.



Figura 1.4 “Omnibot 2000” (History of Robotics, 2005).

En el sentido común de un máquina que imita la figura y los movimientos de un ser animado, el mayor robot en el mundo tendría que ser el “Maeslantkering”, una barrera para tormentas del Plan Delta en los Países Bajos construida en los años 1990, la cual se cierra automáticamente cuando es necesario. Sin embargo, esta estructura no satisface los requerimientos de movilidad o generalidad.

En 2002 Honda y Sony, comenzaron a vender comercialmente robots humanoides como “mascotas”. Los robots con forma de perro o de serpiente se encuentran, sin embargo, en una fase de producción muy amplia, el ejemplo más notorio ha sido Aibo de Sony.



Figura 1.5 “Aibo” de Sony (History of Robotics, 2005).

Los robots son usados hoy en día para llevar a cabo tareas sucias, peligrosas, difíciles, repetitivas o embotadas para los humanos. Esto usualmente toma la forma de un robot industrial usado en las líneas de producción. Otras aplicaciones incluyen la limpieza de residuos tóxicos, exploración espacial, minería, búsqueda y rescate de personas y localización de minas terrestres. La manufactura continúa siendo el principal mercado donde los robots son utilizados. En particular, robots articulados (similares en capacidad de movimiento a un brazo humano) son los más usados comúnmente. Las aplicaciones incluyen soldado, pintado y carga de maquinaria. La Industria automotriz ha tomado gran ventaja de esta nueva tecnología donde los robots han sido programados para reemplazar el trabajo de los humanos en muchas tareas repetitivas. Existe una gran esperanza, especialmente en Japón, de que el cuidado del hogar para la población de edad avanzada pueda ser llevado a cabo por robots.

Recientemente, se ha logrado un gran avance en los robots dedicados a la medicina, con dos compañías en particular, Computer Motion e Intuitive Surgical, que han recibido la aprobación regulatoria en América del Norte, Europa y Asia para que sus robots sean utilizados en procedimientos de cirugía invasiva mínima. Desde la compra de Computer Motion (creador del robot Zeus) por Intuitive Surgical, se han desarrollado ya dos modelos de robot daVinci por esta última. En la actualidad, existen más de 800 robots quirúrgicos daVinci en el mundo, con aplicaciones en Urología, Ginecología, Cirugía general, Cirugía Pediátrica, Cirugía Torácica, Cirugía Cardíaca y ORL.

La automatización de laboratorios también es un área en crecimiento. Aquí, los robots son utilizados para transportar muestras biológicas o químicas entre instrumentos tales como incubadoras, manejadores de líquidos y lectores. Otros lugares donde los robots están reemplazando a los humanos son la exploración del fondo oceánico y exploración espacial. Para esas tareas, robots de tipo artrópodo son generalmente utilizados. Mark W. Tilden del Laboratorio Nacional de los Álamos

se especializa en robots económicos de piernas dobladas pero no empalmadas, mientras que otros buscan crear la réplica de las piernas totalmente empalmadas de los cangrejos.

Robots alados experimentales y otros ejemplos que explotan el biomimetismo también están en fases previas. Se espera que los así llamados nanomotores y cables inteligentes simplifiquen drásticamente el poder de locomoción, mientras que la estabilización en vuelo parece haber sido mejorada substancialmente por giroscopios extremadamente pequeños. Un impulsor muy significativo de este tipo de trabajo es el desarrollar equipos de espionaje militar (Robot, 2008).

### **1.3 MECANISMOS APLICADOS EN ROBÓTICA**

#### **1.3.1 Mecanismos**

Un mecanismo es un dispositivo mecánico que tiene el propósito de transferir el movimiento y/o fuerza de una fuente a una salida. Un eslabonamiento consiste en barras (llamadas eslabones), generalmente consideradas rígidas, conectadas por articulaciones, para formar cadenas abiertas o cerradas. Tales cadenas cinemáticas con un eslabón fijo como mínimo, so mecanismos si, por lo menos, otros dos eslabones retienen movilidad, o estructuras si no tienen movilidad alguna. En otras palabras, un mecanismo permite el movimiento relativo entre sus eslabones “rígidos”, una estructura, en cambio, no lo permite. Los eslabonamientos forman mecanismos simples y pueden diseñarse para efectuar tareas complejas, como movimientos no lineales y transmisión de fuerza.

*Eslabonamiento de cuatro barras.*- Los mecanismos se usan en una gran variedad de máquinas y dispositivos. El eslabonamiento de lazo cerrado más simple es el de cuatro barras, que tiene tres eslabones móviles y un eslabón fijo más cuatro articulaciones.

El eslabón conectado a la fuente de potencia se llama eslabón de entrada. El eslabón seguidor conecta la articulación móvil B a tierra. El eslabón acoplador ó flotante

conecta los dos eslabones móviles A y B, acoplando el eslabón de entrada con el eslabón de salida.

El eslabonamiento de cuatro barras es la cadena más básica de eslabones conectados por pasadores que permite movimiento relativo entre los eslabones. No obstante que se trata de un mecanismo simple, las cuatro barras forman un mecanismo muy versátil usado en miles de aplicaciones.

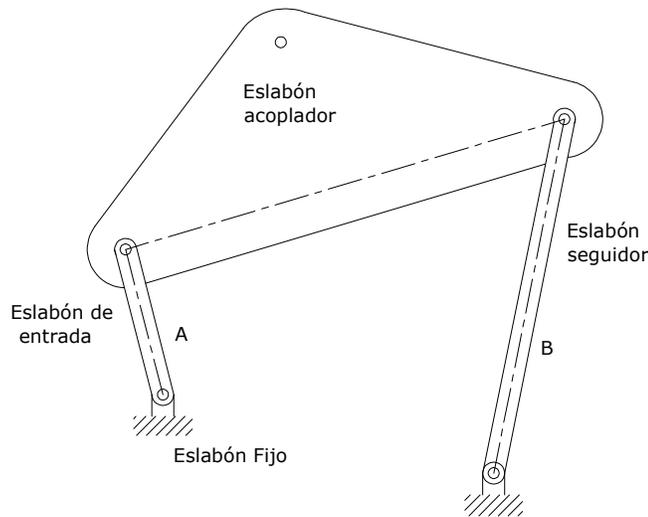


Figura 1.6 Eslabonamiento de cuatro barras

*Cadena de seis barras.*- si un eslabonamiento de cuatro barras no proporciona el tipo de desempeño requerido para una aplicación particular, usualmente se considera como siguiente posibilidad uno de los dos tipos de eslabones de seis barras de un solo grado de libertad: la cadena de Watt o la cadena de Stephenson.

Los mecanismos pueden clasificarse en tres categorías dependiendo de las tareas que realizan: generación de función, generación de trayectoria, y generación de movimiento (Erdman&Sandor, 1998).

Las características básicas de la estructura de los robots están formadas por los tipos de articulaciones y configuraciones clásicas de brazos de robots industriales. Los robots manipuladores son esencialmente, brazos articulados. De forma más precisa, un manipulador industrial convencional es una cadena cinemática abierta formada por un conjunto de eslabones o elementos de la cadena interrelacionados

mediante articulaciones o pares cinemáticos. Las articulaciones permiten el movimiento relativo entre los sucesivos eslabones (Ollero, 2001).

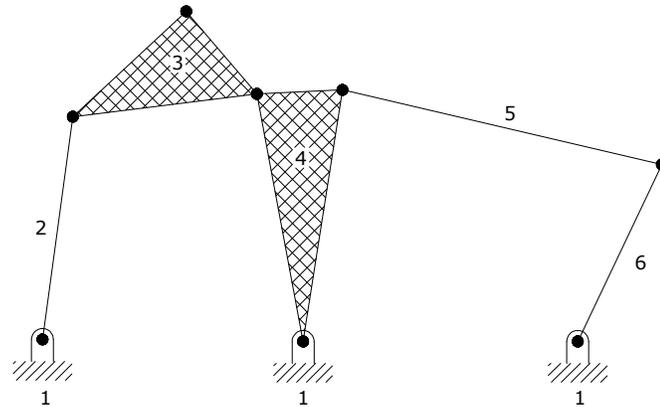


Figura 1.7 Eslabonamiento de seis barras

### 1.3.2 Articulaciones

Existen diferentes tipos de articulaciones, las más utilizadas en robótica se detallan a continuación:

*Rotación.*- Consiste en una rotación alrededor del eje de la articulación y suministra un grado de libertad, los grados de libertad son el número de parámetros independientes que fijan la situación del órgano terminal.

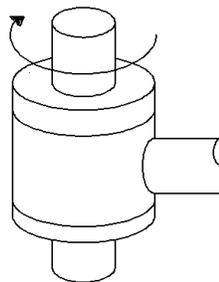


Figura 1.8 Articulación de Rotación

*Prismática.*- El grado de libertad consiste en una traslación a lo largo del eje de la articulación.

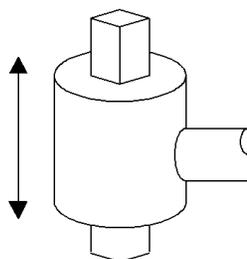


Figura 1.9 Articulación Prismática

*Cilíndrica.*- Existen dos grados de libertad: una rotación y una traslación.

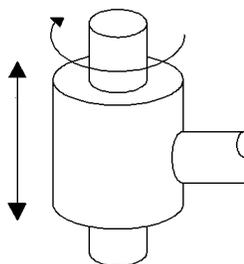


Figura 1.10 Articulación Cilíndrica

*Planar.*- Se caracteriza por el movimiento de desplazamiento en un plano, existiendo por lo tanto, dos grados de libertad.

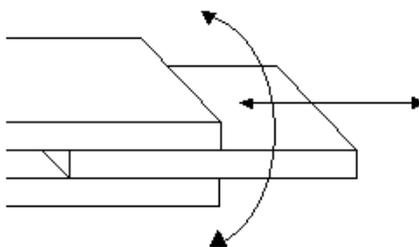


Figura 1.11 Articulación Planar

*Esférica.*- También llamada de Rótula, combina tres giros en tres direcciones perpendiculares en el espacio.

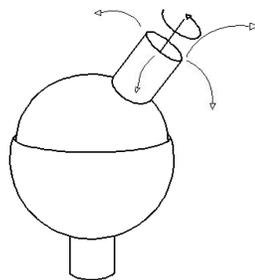


Figura 1.12 Articulación Esférica

### 1.3.3 Configuraciones

La estructura típica de un manipulador consiste en un brazo compuesto por elementos con articulaciones entre ellos. En el último enlace se coloca un órgano terminal o efector final tal como una pinza o un dispositivo especial para realizar operaciones.

Se consideran, en primer lugar, las estructuras más utilizadas como brazo de un robot manipulador. Estas estructuras tienen diferentes propiedades en cuanto a espacio de trabajo y accesibilidad a posiciones determinadas.

El espacio de trabajo es el conjunto de puntos en los que puede situarse el efector final del manipulador. Corresponde al volumen encerrado por las superficies que determinan los puntos a los que accede el manipulador con su estructura totalmente extendida y totalmente plegada.

Por otra parte, todos los puntos del espacio de trabajo no tienen la misma accesibilidad. Los puntos de accesibilidad mínima son los que las superficies que delimitan el espacio de trabajo ya que a ellos solo puede llegarse con una única orientación.

*Configuración Cartesiana.-* La configuración tiene tres articulaciones prismáticas (3D o estructura PPP). Esta configuración es bastante usual en estructuras industriales, tales como pórticos, empleadas para el transporte de cargas voluminosas. La especificación de posición de un punto se efectúa mediante las coordenadas cartesianas (x,y,z). Los valores que deben tomar las variables

articulares corresponden directamente a las coordenadas que toma el extremo del brazo. Esta configuración no resulta adecuada para acceder a puntos situados en espacios relativamente cerrados y su volumen de trabajo es pequeño cuando se compara con el que puede obtenerse con otras configuraciones.

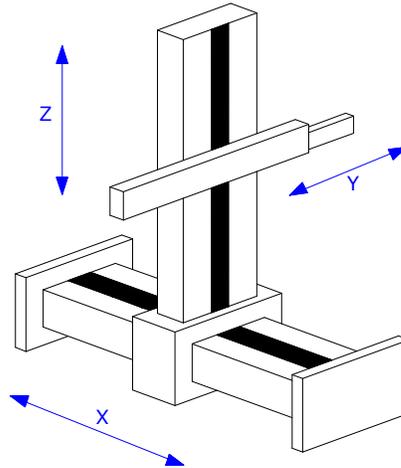


Figura 1. 13 Configuración Cartesiana

*Configuración Cilíndrica.*- Esta configuración tiene dos articulaciones prismáticas y una de rotación (2D, 1G). La primera articulación es normalmente de rotación (estructura RPP). La posición se especifica de forma natural en coordenadas cilíndricas. Esta configuración puede ser de interés en una célula flexible, con el robot situado en el centro de la célula sirviendo a diversas máquinas dispuestas radialmente a su alrededor. El volumen de trabajo de esta estructura RPP (o de la PRP), suponiendo un radio de giro de 360 grados y un rango de desplazamiento de L, es el de un lado de sección cuadrada de radio interior L y radio exterior 2L. Se demuestra que el volumen resultante es:  $3\pi L^3$ .

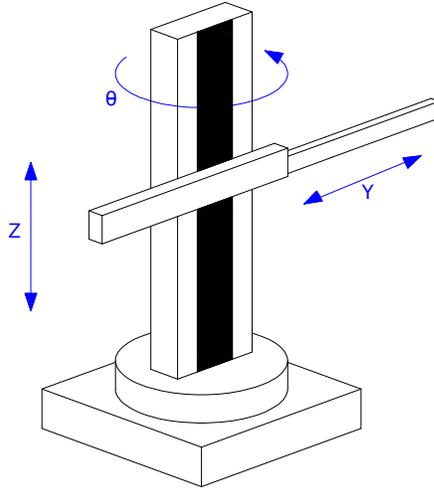


Figura 1. 14 Configuración Cilíndrica

*Configuración Polar y Esférica.-* Está configuración se caracteriza por dos articulaciones de rotación y una prismática (2G, 1D o estructura RRP). En este caso las variables articulares expresan la posición del extremo del tercer enlace en coordenadas polares. En un manipulador con tres enlaces de longitud L, el volumen de trabajo de esta estructura, suponiendo un radio de giro de 360 grados y un rango de desplazamiento de L, es el que existe entre una esfera de radio 2L y otra concéntrica de radio L. Por consiguiente el volumen es  $(28/3)\pi L^3$ .

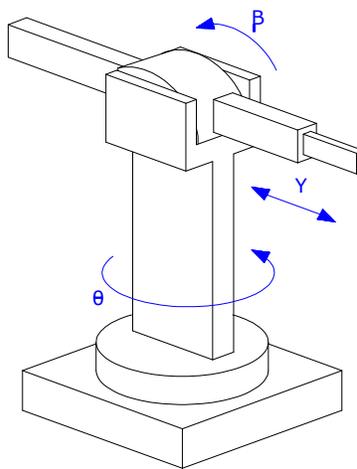


Figura 1. 15 Configuración Esférica

*Configuración Angular.*- Esta configuración es una estructura con tres articulaciones de rotación (3G o RRR). La posición del extremo final se especifica de forma natural en coordenadas angulares.

La estructura tiene un mejor acceso a espacios cerrados y es fácil desde el punto de vista constructivo. Es muy empleada en robots manipuladores industriales, especialmente en tareas de manipulación que tengan una cierta complejidad. La configuración angular es la más utilizada en educación y actividades de investigación y desarrollo. En esta estructura es posible conseguir un gran volumen de trabajo. Si la longitud de sus tres enlaces es de  $L$ , suponiendo un radio de giro de 360 grados, el volumen de trabajo sería el de una esfera de radio  $2L$ , es decir  $(32/3)\pi L^3$

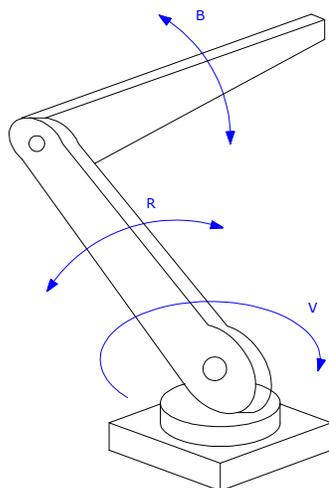


Figura 1. 16 Configuración Angular

*Configuración Scara.*- Esta configuración está especialmente diseñada para realizar tareas de montaje en un plano. Está constituida por dos articulaciones de rotación con respecto a dos ejes paralelos, y una de desplazamiento en sentido perpendicular al plano. El volumen de trabajo de este robot, suponiendo segmentos de longitud  $L$ , un radio de giro de 360 grados y un rango de desplazamiento de  $L$  es de  $4\pi L^3$  (Ollero, 2001).

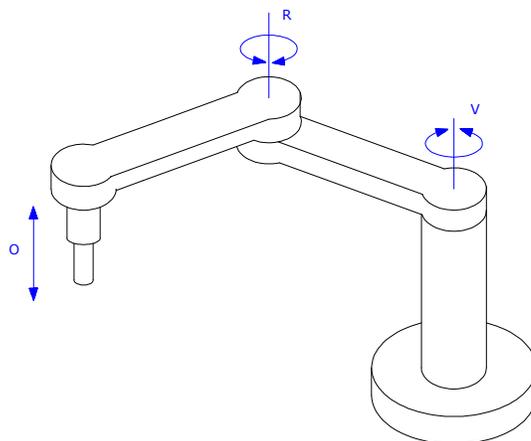


Figura 1. 17 Configuración Scara

#### 1.4 ANÁLISIS CINEMÁTICOS Y DINÁMICOS EN ROBÓTICA

Puesto que los mecanismos son elementos cinemáticos de las máquinas e instrumentos mecánicos, los métodos de síntesis y análisis de mecanismos se aplican en la etapa preliminar del diseño de cualquier mecanismo real, junto con otras disciplinas como el diseño mecánico, la resistencia de materiales, procesos de manufactura, etc. En un principio los métodos de síntesis y análisis de mecanismos se basaban en procesos gráficos, puesto que daban una solución relativamente sencilla a problemas muy complejos. Después se introdujeron los métodos analíticos que tienen la ventaja sobre el método gráfico de que pueden hacer el análisis de conjuntos de mecanismos tanto planos como espaciales, con la exactitud que se requiera, aunque presentan la necesidad de operar a veces con expresiones matemáticas muy complejas lo cual no representa un problema en la actualidad pues con las calculadoras y las computadoras este problema se resuelve fácilmente.

La matemática, la física y la química son las ciencias fundamentales en que se basa la ingeniería. En la mayoría de los casos, la ingeniería implica el análisis de la conversión de energía de alguna fuente hacia una o más salidas, usando uno o más

de los principios básicos de esas ciencias. La mecánica de sólidos es una de las ramas de la física que, entre otras, contiene otras tres ramificaciones principales: la cinemática, que trata del estudio del movimiento relativo; la estática, que es el estudio de fuerzas y momentos, separados del movimiento, y la cinética, que trata de la acción de las fuerzas sobre los cuerpos. La combinación de la cinemática y la cinética se denomina dinámica (Erdman&Sandor, 1998).

En robótica es necesario poder describir de forma conveniente las posiciones y orientaciones de los objetos en el espacio. Para lo cual es necesario dominar los conceptos básicos que se emplearán en los modelos cinemáticos y dinámicos que se estudiarán mas adelante. Se comienza por estudiar la posición y orientación en el plano introduciendo las operaciones elementales de rotación y traslación, y considerando los cambios de sistemas de referencia. También se debe dominar los problemas en tres dimensiones, el concepto de transformación homogénea, transformaciones compuestas, inversa de una transformación y como complemento algunas formas alternativas para representar la orientación de un cuerpo en el espacio.

Para poder realizar el análisis cinemático se estudian los modelos geométricos de los robots, estos modelos junto con los modelos cinemáticos se emplean tanto para simulación como para control. Los modelos se basan en el empleo de las transformaciones entre sistemas de referencia. El modelo directo permite obtener la posición y orientación del efector final del robot en función de las variables de las articulaciones mientras que el modelo inverso obtiene las variables articulares que hacen la posición y orientación del efector final sea la deseada.

Las velocidades lineales y angulares vienen dadas por las fuerzas y los pares que se aplican a la estructura mecánica y dependen también de las magnitudes de las masas y su distribución. Las relaciones involucradas constituyen el modelo dinámico del manipulador. La identificación del modelo dinámico de un robot es por lo general difícil. Asimismo, la consideración de dicho modelo complica el desarrollo e implantación del sistema de control.

Por ello, muchos sistemas de control de robots han sido diseñados utilizando fundamentalmente el modelo cinemático. Los resultados son aceptables cuando los movimientos del robot son suaves no produciéndose aceleraciones significativas. Sin embargo, cuando es necesario realizar movimientos rápidos involucrándose aceleraciones y masas importantes, la consideración del movimiento mecánico resulta imprescindible (Ollero, 2001).

Los componentes principales en lo que se llama dinámica de sistemas mecánicos son la fuerza y el movimiento. El grado de dificultad de un análisis dinámico estriba en determinar qué es conocido y qué es desconocido en un problema y en la hipótesis que pueden hacerse sobre las incógnitas (Erdman&Sandor, 1998).

## **1.5 ANTECEDENTES DE LOS NUMEROS DUALES**

En 1873 fue introducido por Clifford el concepto de “número dual”. William Kingdon Clifford nació en 1845 en Exeter, Inglaterra, fue un matemático británico, Profesor en el Colegio Universitario de Londres y miembro de la Sociedad Matemática de dicha ciudad. Además de las investigaciones de los números duales realizó estudios sobre geometría, en especial no euclidiana y generalizó el estudio de los cuaterniones (introducidos por Hamilton en 1843), finalmente Clifford murió en 1879 en Madeira, Portugal (O’Connor, 1996).

En 1971 An Tzu Yang publicó un artículo titulado “Inertia Force Analysis of Spatial Mechanisms” el cual se fundamenta en la aplicación de la ecuación dual de la dinámica basada en vectores duales y cálculos de rotación con el fin de proporcionar una herramienta analítica para el estudio de la dinámica del cuerpo rígido en cualquier sistema mecánico complejo. Aplicando esta ecuación al momento de inercia en el análisis de un mecanismo RCCC; teniendo las reacciones y el par de inercia se obtienen en forma cerrada las expresiones en números duales. Tales expresiones son más susceptibles a la interpretación geométrica y a una buena adaptación de la computación digital (Yang, 1971).

También en 1971 el asistente de profesor de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Tennessee, C. Bagci publicó uno de sus más significativos artículos basado en las expresiones duales. "Fuerza estática y análisis de torque usando una matriz de rotación de  $3 \times 3$ , y criterio de transmisión para mecanismos espaciales" es el título de dicho artículo y Bagci lo resume así: el método de determinación de la fuerza estática y la distribución de torques en mecanismos espaciales mediante el uso de una matriz de rotación de  $3 \times 3$  es desarrollado en este escrito. Durante el proceso, las ecuaciones duales de equilibrio, una por cada eslabón, se escriben en forma vectorial dual, entonces éstas se resuelven simultáneamente para obtener los componentes duales de la fuerza. De esta forma se obtienen expresiones explícitas para las fuerzas y torques en los mecanismos espaciales RCCC y RSSR (Bagci, 1971).

Para 1988 You Liang Gu difundió un artículo en inglés para la revista de Robótica y Automatización titulado "Transformación con números duales y sus aplicaciones a Robótica" en el cual se propone que siendo la transformación homogénea un punto de transformación se sustituya por una línea de transformación. En Robótica, para hacer frente a la transformación de coordenadas en tres dimensiones en el espacio cartesiano, la transformación homogénea es el método más usualmente aplicado este se define en el espacio de cuatro dimensiones y su matriz de multiplicación realiza la rotación y traslación simultánea.

Para la cinemática y dinámica en robótica, los vectores de velocidad y aceleración son blancos directos de análisis. La línea de transformación tiene ventajas sobre el punto común de transformación, ya que la combinación de las cantidades lineales y angulares puede ser representada por líneas en el espacio tridimensional. Ya que una línea en el espacio tridimensional es determinada por cuatro parámetros independientes, buscando un tipo apropiado de "representación numérica", que combina dos variables reales como el primer requisito fundamental.

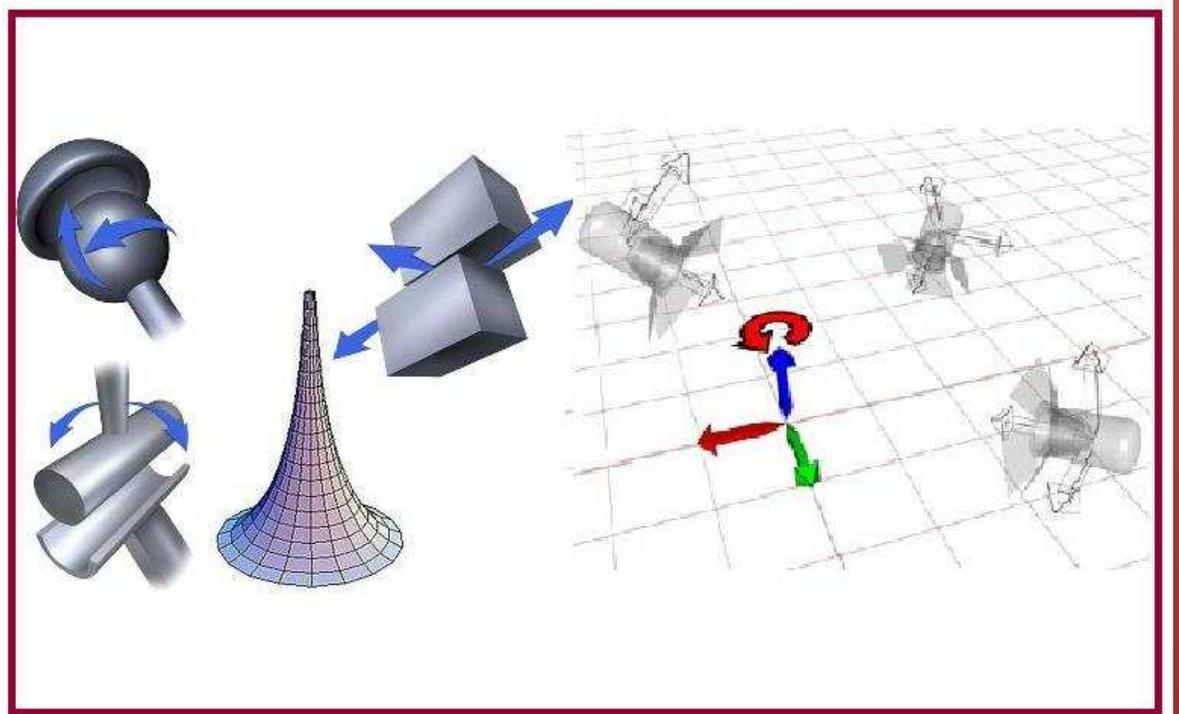
El número dual elegido para la línea de la representación, y teoremas que indican las propiedades más relevantes del número dual, los vectores duales, y matrices duales se proponen. Esto es seguido por la transformación y manipulación de las aplicaciones robóticas.

Este procedimiento ofrece un algoritmo que se ocupa del análisis simbólico para ambos; rotación y traslación. En especial, este puede ser efectivamente utilizado de para la determinación directa de las matrices Jacobianas y sus derivadas. Se muestra que el procedimiento propuesto contribuye a un enfoque simplificado para la formulación de la cinemática y dinámica en robótica (Gu, 1988).

Vladimir Brodsky y Moshe Shoham miembros del departamento de Ingeniería Mecánica del Instituto Tecnológico de Israel publicaron un artículo en inglés titulado "Dual numbers representation of rigid body dynamics" en este trabajo se presenta una ecuación dinámica tridimensional para un cuerpo rígido con respecto a un punto arbitrario, la representación tridimensional de las ecuaciones dinámicas de un cuerpo rígido es posible introduciendo el operador dual de la inercia y usando las reglas de la transformación del motor. Entonces, la ecuación dual de Lagrange se formula desarrollando las reglas de derivación de una función real con respecto a las variables duales.

# CAPÍTULO 2

## MARCO TEÓRICO



El propósito de este de capítulo es presentar las bases y conocimientos necesarios para aplicar la metodología de los números duales, como su definición, operaciones básicas y funciones trigonométricas. Así también se presentan los métodos utilizados para realizar análisis cinemáticos y dinámicos explicando las operaciones básicas como transformaciones homogéneas, rotaciones, entre otras.

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Basado en principio de la geometría no euclídea William Clifford desarrolló los números duales, los cuales cuentan con específicos procedimientos algébricos, trigonométricos, de cálculo vectorial, además de propiedades, nomenclatura, y representación exclusiva entre otros factores. En este capítulo se estudian cada una de estas particularidades de lo que se puede llamar las matemáticas de los números duales.

En el estudio de mecanismos con números duales representan una gran ventaja ya que permiten compactar formulaciones lo cual facilita el proceso de análisis. A lo largo de este apartado se presentan las herramientas y conceptos necesarios para que la metodología de los números duales pueda resultar en una exitosa aplicación en los análisis estáticos, dinámicos, de desplazamiento y velocidad de un mecanismo.

Se introducen algunos criterios nuevos como la coordenada de transformación, y se presentan otros tradicionalmente usados pero ahora con aplicación a los números duales como la ecuación de la transformación, los ángulos de Euler, eslabones y articulaciones, etc.

## 2.2 NUMEROS DUALES

### 2.2.1 Definición

Los números duales son una ampliación de los números reales mediante un elemento nuevo  $\varepsilon$  el cual tiene las siguientes propiedades:

$$\varepsilon \neq 0 \quad (2-1)$$

$$\varepsilon^2 = 0 \quad (2-2)$$

Los números duales (que también pueden ser llamados “números dúplex”) se escriben en la forma:

$$\hat{a} = a + \varepsilon a_0 \quad (2-3)$$

Donde “a” es la parte primaria y representa la parte real del número dual, “a<sub>0</sub>” es la parte secundaria y se refiere al componente dual del número dúplex.

El plano de todos los números duales es un plano alternativo complejo que complementa al plano de un número ordinario complejo (Fischer, 1999).

### 2.2.2 Adición de números duales

La adición de números duales se realiza sumando primero las partes primarias ó componentes reales y después los componentes duales:

$$\hat{a} = a + \varepsilon a_0 \quad (2-3)$$

$$\hat{e} = e + \varepsilon e_0 \quad (2-4)$$

$$\hat{a} + \hat{e} = (a + e) + \varepsilon(a_0 + e_0) \quad (2-5)$$

### 2.2.3 Sustracción de números duales

La sustracción de números duales sigue el mismo procedimiento que la adición, a diferencia de que en lugar de sumar los componentes, estos se restan.

$$\hat{a} - \hat{e} = (a + e) - \varepsilon(a_0 + e_0) \quad (2-6)$$

### 2.2.4 Multiplicación de números duales

La multiplicación de números duales se define en forma similar al procedimiento algebraico que se sigue para obtener el producto de dos polinomios.

$$\hat{a}\hat{e} = (a + \varepsilon a_0)(e + \varepsilon e_0) \quad (2-7)$$

$$\hat{e} = ae + a\epsilon_0 + e\epsilon a_0 \quad (2-8)$$

$$\hat{e} = ae + \epsilon(ae_0 + ea_0) \quad (2-9)$$

### 2.2.5 División de números duales

La división de números duales solo se puede realizar cuando la parte real del denominador es diferente de cero, el proceso de división es análogo al procedimiento algebraico, donde el denominador debe ser multiplicado por su conjugado con la finalidad de eliminar la parte dual.

$$\frac{\hat{a}}{\hat{e}} = \frac{a + \epsilon a_0}{e + \epsilon e_0} \quad (2-10)$$

$$\frac{\hat{a}}{\hat{e}} = \frac{a + \epsilon a_0}{e + \epsilon e_0} \frac{e - \epsilon e_0}{e - \epsilon e_0} \quad (2-11)$$

$$\frac{\hat{a}}{\hat{e}} = \frac{ae - a\epsilon e_0 + e\epsilon a_0 - \epsilon^2 a_0 e_0}{(e^2 + e\epsilon e_0 - e\epsilon e_0 - \epsilon^2 e_0^2)} \quad (2-12)$$

$$\frac{\hat{a}}{\hat{e}} = \frac{ae - a\epsilon e_0 + e\epsilon a_0}{e^2} \quad (2-13)$$

$$\frac{\hat{a}}{\hat{e}} = \frac{a}{e} + \epsilon \frac{(ae_0 - ea_0)}{e^2} \quad (2-14)$$

### 2.2.6 Potencia en números duales

Para elevar un número dual a una potencia es necesario separar el número en su parte primaria y secundaria, la parte primaria se eleva a la potencia en cuestión y la parte secundaria se multiplica por el valor de la potencia y se eleva al equivalente de dicha potencia menos 1.

$$\hat{a}^n = (a + \epsilon a_0)^n \quad (2-15)$$

$$\hat{a} = a^n + \varepsilon n a_0 a^{n-1} \quad (2-16)$$

### 2.2.7 Raíz de números duales

La raíz de un número dual se define obteniendo primero la raíz de la parte real y posteriormente dividiendo la parte secundaria ó dual entre el producto del doble de la raíz de la parte primaria.

$$\sqrt{\hat{a}} = \sqrt{a} + \varepsilon \frac{a_0}{2\sqrt{a}} \quad (2-17)$$

### 2.2.8 Series de Taylor en números duales

La representación de las series de Taylor en números duales es la siguiente:

$$f(\hat{a}) = f(a + \varepsilon a_0) \quad (2-18)$$

$$f(\hat{a}) = f(a) + \varepsilon a_0 \frac{df(a)}{da} \quad (2-19)$$

## 2.3 ÁNGULOS DUALES

Los ángulos duales representan la orientación entre dos líneas en el espacio y el desplazamiento relativo entre estas.

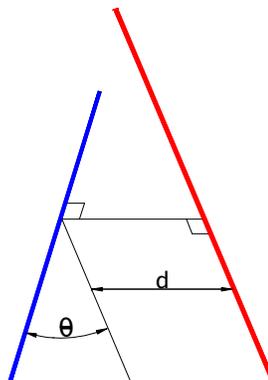


Figura 2.1 El ángulo dual expresa la relación entre dos líneas en el espacio.

El ángulo dual se define así:

$$\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d \quad (2-20)$$

Dónde:

$\theta$  = Ángulo proyectado entre la línea roja y la línea azul.

$d$  = La distancia más corta entre la línea roja y la línea azul.

Si las líneas se interceptan:

$$\hat{\theta} = \theta \quad (2-21)$$

En caso de que las líneas sean paralelas (Fischer, 1999):

$$\hat{\theta} = \varepsilon d \quad (2-22)$$

## 2.4 IDENTIDADES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN ÁNGULOS DUALES

Las funciones trigonométricas de un ángulo dual se obtienen usando las series de Taylor referidas en la ecuación (2-19).

$$\text{sen } \hat{\theta} = \text{sen } \theta + \varepsilon \text{dcos } \theta \quad (2-23)$$

$$\text{cos } \hat{\theta} = \text{cos } \theta - \varepsilon \text{dsen } \theta \quad (2-24)$$

$$\text{tan } \hat{\theta} = \text{tan } \theta + \varepsilon \text{dsec}^2 \theta \quad (2-25)$$

Las identidades trigonométricas que se usan con los ángulos ordinarios son totalmente aplicables a los ángulos duales gracias al principio de transferencia (Fischer, 1999). Las identidades trigonométricas más usadas son:

$$\text{sen}^2 \hat{\theta} + \text{cos}^2 \hat{\theta} = 1 \quad (2-26)$$

$$\text{sen} 2\hat{\theta} = 2\text{sen } \hat{\theta} \text{cos } \hat{\theta} \quad (2-27)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta \quad (2-28)$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{\text{sen} \theta} \quad (2-29)$$

## 2.5 VECTORES

### 2.5.1 Vectores Libres

Los vectores libres están compuestos por una magnitud y una dirección, gráficamente se representan con una flecha cuya longitud representa la magnitud y la orientación corresponde a la dirección.

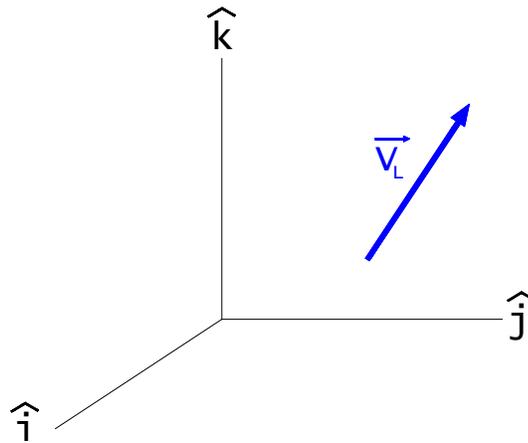


Figura 2.2 Un vector libre  $\vec{V}_L$  debe mantener su magnitud y dirección pero puede ser posicionado en cualquier lugar del espacio.

### 2.5.2 Vectores Fijos

El extremo de un vector fijo está empotrado al origen del sistema de coordenadas.

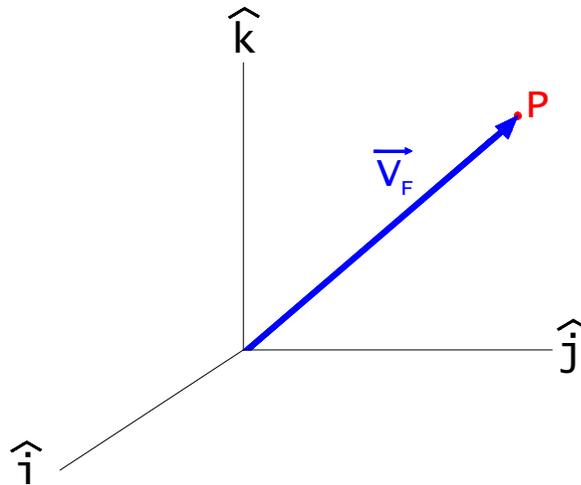


Figura 2.3 Un vector fijo  $\vec{V}_F$  es muy útil para la localización de un punto P.

### 2.5.3 Vectores Duales

Un vector lineal es un vector que se simula sobre una línea definida en el espacio.

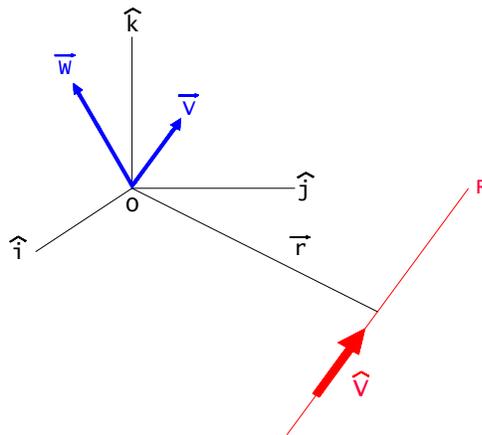


Figura 2.4 Un vector dual  $\hat{V}$  esta simulado sobre la línea R en el espacio.

El vector lineal también es llamado “Vector Dual” cuando se expresa en la forma:

$$\hat{V} = \vec{V} + \epsilon \vec{W} \quad (2-30)$$

Dónde:

$\vec{V}$  = Es el vector resultante y contiene la magnitud y dirección del vector dual  $\hat{V}$  y es independiente de la localización en el origen del sistema de coordenadas.

$\vec{W}$  = Es el componente dual llamado también “Vector Momento”.

El vector momento varía de acuerdo con el origen del sistema de coordenadas que se designe, y se define:

$$\vec{W} = \vec{r} \times \vec{V} \quad (2-31)$$

El vector  $\vec{r}$  conecta el origen “O” a cualquier punto de la línea R del vector dual  $\hat{V}$ . Los vectores duales pueden ser expresados en términos de componentes del sistema de coordenadas como vectores unitarios.

$$\hat{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} + \epsilon (W_x \vec{i} + W_y \vec{j} + W_z \vec{k}) \quad (2-32)$$

Las seis cantidades escalares componen el vector lineal  $\hat{V}$  (Fischer, 1999).

## 2.6 LA ECUACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN

La “ecuación de la Transformación” permite la expresión de un vector dual dado en términos de un sistema de coordenadas con origen en un punto O, en términos de otro sistema de coordenadas orientado de forma similar con origen en otro punto P.

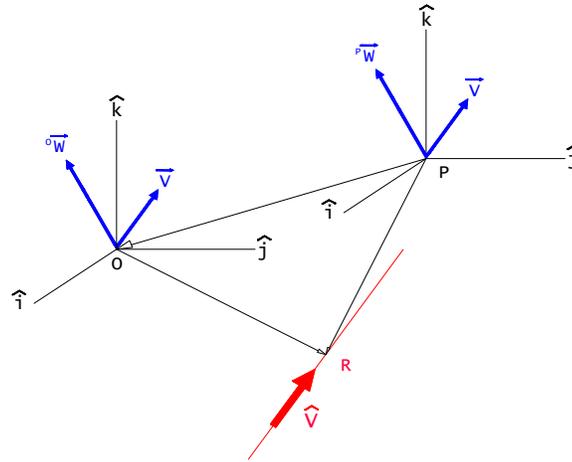


Figura 2.5 La ecuación de transformación permite a un vector dual expresado en un marco {O} ser expresado en un marco {P} orientado similarmente.

La notación que se toma para especificar el marco en el cual actúa un elemento es una letra que represente el marco escrita en forma de superíndice de lado izquierdo del elemento.

Se analiza el vector dual:

$${}^O\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon {}^O\vec{W} \quad (2-33)$$

Dónde el vector resultante  $\vec{V}$  es invariante con respecto al origen y momento y el vector  $\vec{W}$  varía con respecto al origen, entonces la ecuación (2-33) se puede reescribir así:

$${}^O\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon (\overline{OR} \times \vec{V}) \quad (2-34)$$

Dónde el punto R es cualquier punto sobre la línea del vector dual  $\hat{V}$ .

Si se considera:

$${}^P\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon (\overline{PR} \times \vec{V}) \quad (2-35)$$

Dónde:

$$\overline{PR} = \overline{PO} + \overline{OR} \quad (2-36)$$

Por lo tanto:

$${}^P\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon[(\overline{PO} + \overline{OR}) \times \vec{V}] \quad (2-37)$$

$${}^P\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon[(\overline{PO} \times \vec{V}) + (\overline{OR} \times \vec{V})] \quad (2-38)$$

Retomando:

$${}^O\vec{W} = \overline{OR} \times \vec{V} \quad (2-39)$$

Consecuentemente:

$${}^P\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon({}^O\vec{W} + \overline{PO} \times \vec{V}) \quad (2-40)$$

Este resultado es llamado “ecuación de la transformación” y transforma un vector dual  $\hat{V}$  expresado en términos de los vectores unitarios de un marco coordenado {O} dentro de los términos de los vectores unitarios de un marco coordenado {P} el cual es orientado al igual que el marco {O} pero cuyo origen es localizado por una traslación a través del vector  $\overline{OP}$  de el origen del marco {O} (Fischer, 1999).

## 2.7 REPRESENTACIÓN LINEAR

Si el número 1 es familiar en la matriz de adición y la matriz de multiplicación, entonces el número dual puede ser representado así:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-41)$$

El número dual genérico puede ser tomado como:

$$a + \varepsilon a_0 = \begin{pmatrix} a & a_0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (2-42)$$

La suma y el producto de dos números duales corresponden cada cual a la operación apropiada de la matriz. Ambas operaciones son conmutativas y asociativas (Dual Number, 2008).

## 2.8 GEOMETRÍA

El círculo unitario de números duales consiste de aquellos donde  $e = 1$  ó  $-1$  ya que éstos satisfacen la regla  $e\hat{e} = 1$ , donde  $\hat{e} = e - \varepsilon e_0$ , Sin embargo nótese que:

$$\exp(\varepsilon e_0) = 1 + \varepsilon e_0 \quad (2-43)$$

Así que la función exponencial aplicada al eje  $\varepsilon$  sólo cubre la mitad del círculo.

Si  $e \neq 0$  y  $m = e_0/e$ , entonces  $\hat{e} = e(1 + \varepsilon m)$  y es la coordenada polar del numero dual  $\hat{e}$  y la pendiente  $m$  es su parte angular. El concepto de rotación en el plano de un número dual es equivalente al plano cortante vertical desde  $(1 + \varepsilon p)(1 + \varepsilon q) = 1 + \varepsilon(p + q)$  (Dual Number, 2008).

## 2.9 CICLOS

Considerando dos números duales  $p$  y  $q$ , estos determinan la expansión de  $\hat{e}$  tal que el ángulo entre las líneas de “e” hacia  $p$  y  $q$  es constante. Esta expansión es un ciclo en el plano de un número dual; ya que la ecuación que ajusta las diferencias en las pendientes de las líneas a una constante es una ecuación cuadrática en la parte real de  $\hat{e}$ , un ciclo es una parábola. En el ámbito de la geometría inversa uno de los números duales encuentra un ciclo de rotación como una proyección sobre la línea descriptiva sobre los números duales (Dual Number, 2008).

## 2.10 GENERALIZACIÓN

Esta construcción puede ser llevada a cabo más generalmente: por un círculo conmutativo  $R$  se pueden definir los números duales sobre  $R$  como el cociente del polinomio del círculo  $R[X]$  por el ideal  $(X^2)$ : la imagen de  $X$  entonces ha coincidido igual a cero y corresponde al elemento  $\varepsilon$ .

Este círculo y sus generalizaciones juegan un papel importante en la teoría algebraica de derivaciones y de los diferenciales de Kähler (formas puramente algebraicas diferenciales).

Sobre cualquier círculo  $R$ , el número dual  $a + \varepsilon b$  es una unidad, si y sólo si “ $a$ ” es una unidad en  $R$ . En este caso, la inversa de  $a + \varepsilon b$  es  $a^{-1} - \varepsilon b a^{-2}$ . Como consecuencia de ello, nótese que el número dual respecto de cualquiera campo (o de cualquier círculo conmutativo local) forman un círculo local (Dual Number, 2008).

## 2.11 DIFERENCIACIÓN

Una aplicación de los números duales es la diferenciación automática. Dado cualquier polinomio real es sencillo ampliar el dominio de éste, al de un polinomio de números duales. Si se tiene:

$$P(a + \varepsilon e) = P(a) + eP'(a)\varepsilon \quad (2-44)$$

Dónde  $P'$  es la derivada de  $P$ . Mediante un programa de cómputo usando números duales en lugar de los números reales se puede calcular las derivadas de polinomios. Más generalmente podemos definir la división de números duales, y a continuación, definir las funciones trascendentales de los números duales mediante:

$$f(a + \varepsilon e) = f(a) + e f'(a)\varepsilon \quad (2-45)$$

Por operaciones computacionales de estas funciones usando números duales y examinando el coeficiente de  $\varepsilon$  en el resultado, se puede encontrar y obtener automáticamente la derivada de la operación.

Este efecto puede ser explicado si no se estandariza el punto de vista del análisis. La unidad imaginaria  $\varepsilon$  de un número dual es relativamente cercano al infinitesimal usando en los cálculos no estandarizados: de hecho, el cuadrado (ó cualquier otra potencia más alta) de  $\varepsilon$  es exactamente cero y el cuadrado de un infinitesimal es casi cero en la escala infinitesimal (Dual Number, 2008).

## 2.12 COORDENADA DE TRANSFORMACIÓN

### 2.12.1 Desplazamientos relativos y orientaciones

Se propone una técnica matemática para tratar con los desplazamientos relativos y orientaciones de los componentes de los mecanismos. Esta técnica también se puede aplicar a los análisis de velocidad y dinámicos.

Este esquema permitirá definir los sistemas de coordenadas que son fijados en cada eslabón, y los relacionan a través de las matemáticas de los números duales con coordenadas de transformación de  $3 \times 3$ . (Fischer, 1999).

### 2.12.2 Movimiento de Rotación con respecto a los ejes de coordenadas

Un marco de coordenadas también llamado sistema de coordenadas, se puede representar con vectores unitarios, vectores alineados con sus ejes y de longitud unitaria, donde el marco {A} especificado por los vectores unitarios se indica con subíndices a la derecha y el sistema de coordenadas {B} en cuyos vectores unitarios estos vectores son expresados y se indica con superíndices a la izquierda.

$${}^B\hat{i}_A, \quad {}^B\hat{j}_A, \quad {}^B\hat{k}_A \quad (2-46)$$

*Movimiento de Rotación con respecto al eje X.*- Los vectores unitarios del marco {A} se pueden escribir en forma de vectores en columna:

$${}^A\hat{i}_A = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad {}^A\hat{j}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad {}^A\hat{k}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-47)$$

Estos vectores columna pueden ser combinados dentro de una sola matriz:

$$\{A\} = [{}^A\hat{i}_A, {}^A\hat{j}_A, {}^A\hat{k}_A] \quad (2-48)$$

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

Si se considera un movimiento de rotación a través de un ángulo dual  $\theta$  con respecto al eje X del marco {A} como se muestra en la figura:

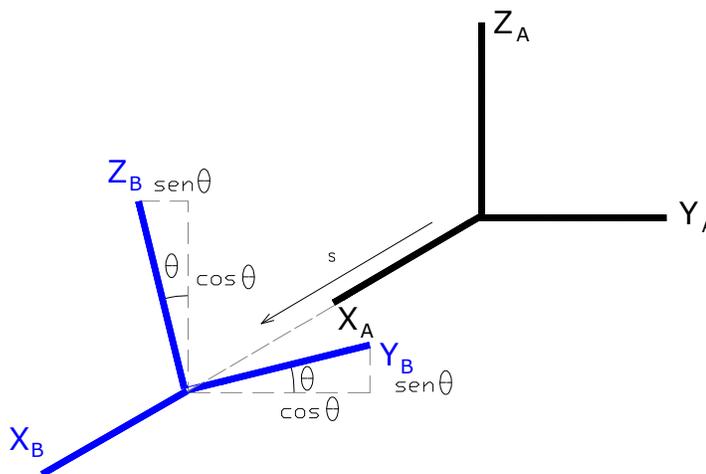


Figura 2.6 Sistema de coordenadas {B} relativo al sistema de coordenadas {A} por movimiento de rotación con respecto al eje x del marco {A}.

En el cual el ángulo  $\theta$  representa la rotación sobre el eje x y la distancia  $s$  representa la traslación a lo largo del eje de rotación. El sentido positivo de la rotación se define mediante la regla de la mano derecha como sentido contrario a las manecillas del reloj cuando se examina el final del eje positivo hacia el origen.

Los vectores unitarios del marco {B} expresados en términos de vectores unitarios del marco {A} son:

$${}^A\hat{i}_B = {}^A\hat{i}_A = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-50)$$

$$\begin{aligned} {}^A\hat{j}_B &= (\cos \theta \hat{j} + \text{sen } \theta \hat{k}) + \varepsilon [d\vec{i} \times (\cos \theta \hat{j} + \text{sen } \theta \hat{k})] \\ &= (\cos \theta - \varepsilon d \text{sen } \theta) \hat{j} + \varepsilon (\text{sen } \theta + \varepsilon d \cos \theta) \hat{k} \\ &= (\cos \hat{\theta} \hat{j} + \text{sen } \hat{\theta} \hat{k}) \end{aligned}$$

$${}^A\hat{j}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \hat{\theta} \\ \text{sen } \hat{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2-51)$$

$$\begin{aligned} {}^A\hat{k}_B &= (-\text{sen } \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) + \varepsilon [d\vec{i} \times (-\text{sen } \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k})] \\ &= (-\text{sen } \hat{\theta} \hat{j} + \cos \hat{\theta} \hat{k}) \end{aligned}$$

$${}^A\hat{k}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\text{sen } \hat{\theta} \\ \cos \hat{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2-52)$$

Así se puede describir el marco {B} en términos de los vectores unitarios del marco {A} como vectores:

$${}^A\hat{i}_B, \quad {}^A\hat{j}_B, \quad {}^A\hat{k}_B \quad (2-53)$$

Se combina dentro de una sola matriz:

$$\{B\} = [{}^A\hat{i}_B, {}^A\hat{j}_B, {}^A\hat{k}_B] \quad (2-54)$$

$$\{B\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{\theta} & -\text{sen } \hat{\theta} \\ 0 & \text{sen } \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

Se busca un operador  ${}^A\hat{X}_B$  el cual trazará un mapa del marco {A} al marco {B}:

$$\{B\} = {}^A\hat{X}_B\{A\} \quad (2-56)$$

Las ecuaciones (2-49) y (2-55) son substituidas en la ecuación (2-56):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\hat{\theta} & -\text{sen}\hat{\theta} \\ 0 & \text{sen}\hat{\theta} & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix} = {}^A\hat{X}_B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-57)$$

Entonces se tiene que:

$${}^A\hat{X}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\hat{\theta} & -\text{sen}\hat{\theta} \\ 0 & \text{sen}\hat{\theta} & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

$${}^A\hat{X}_B = [{}^A\hat{i}_B, {}^A\hat{j}_B, {}^A\hat{k}_B] \quad (2-59)$$

Por lo cual se puede afirmar que el operador  ${}^A\hat{X}_B$  es la “matriz de transformación que describe el marco {B} relativo al marco {A}”, este operador es una descripción de los vectores unitarios del marco {B} en términos de los vectores unitarios del marco {A}.

El operador  ${}^A\hat{X}_B$  permite que cualquier vector expresado en términos de vectores unitarios del marco {B} se pueda representar en términos de vectores unitarios del marco {A}.

$${}^A\hat{V} = {}^A\hat{X}_B {}^B\hat{V} \quad (2-60)$$

${}^A\hat{V}$  es un vector dual expresado en el marco {A} y  ${}^B\hat{V}$  es el mismo vector dual expresado en el marco {B}.

$${}^A\hat{V} = {}^A\vec{V} + \mathcal{E} {}^A\vec{W} \quad (2-61)$$

$${}^B\hat{V} = {}^B\vec{V} + \mathcal{E} {}^B\vec{W} \quad (2-62)$$

$${}^A\hat{X}_B = {}^A R_B + \mathcal{E} {}^A S_B \quad (2-63)$$

La matriz  ${}^A R_X$  representa una rotación simple con respecto al eje X por medio del ángulo  $\theta$ .

La matriz  ${}^A S_X$  representa una simple traslación a lo largo del eje X a través de la distancia S. Por lo tanto:

$${}^A \vec{V} + \mathcal{E} {}^A \vec{W} = \left( {}^A R_X + \mathcal{E} {}^A S_X \right) \left( {}^B \vec{V} + \mathcal{E} {}^B \vec{W} \right) \quad (2-64)$$

$$= {}^A R_X {}^B \vec{V} + \mathcal{E} \left[ {}^A R_X {}^B \vec{W} + {}^A S_X {}^B \vec{V} \right] \quad (2-65)$$

Si se analiza la parte primaria de la ecuación (2-65):

$${}^A \vec{V} = {}^A R_X {}^B \vec{V} \quad (2-66)$$

El único cambio en el vector resultante es que se da en términos de vectores unitarios orientados de manera diferente, a través de una rotación del ángulo  $-\theta$  con respecto al eje X.

Considerando el componente dual de la ecuación (2-65):

$${}^A \vec{W} = {}^A R_X {}^B \vec{W} + \mathcal{E} {}^A S_X {}^B \vec{V} \quad (2-67)$$

El término  ${}^A R_X {}^B \vec{W}$  representa el vector momento descrito en términos de vectores unitarios orientados diferente, a través de una rotación del ángulo  $-\theta$  con respecto al eje X.

Al examinar el término  ${}^A S_X {}^B \vec{V}$  se puede ampliar así:

$${}^A S_X {}^B \vec{V} = s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen} \theta & -\text{cos} \theta \\ 0 & \text{cos} \theta & -\text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^B v_x \\ {}^B v_y \\ {}^B v_z \end{Bmatrix} \quad (2-68)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ s(-{}^B v_y \text{sen} \theta - {}^B v_z \text{cos} \theta) \\ s({}^B v_y \text{cos} \theta - {}^B v_z \text{sen} \theta) \end{Bmatrix} \quad (2-69)$$

Entonces el lado derecho de esta ecuación se puede escribir así:

$${}^A S_X {}^B \vec{V} = {}^A R_x \left[ -s \vec{i} \times {}^B \vec{V} \right] \quad (2-70)$$

Esto es equivalente al segundo término del vector momento en la ecuación de la transformación representados en vectores unitarios del marco {A}, obtenido por un movimiento de rotación a través del ángulo dual  $-\hat{\theta}$  con respecto al eje X.

$$-\hat{\theta} = -\theta - \varepsilon s \quad (2-71)$$

*Movimiento de rotación con respecto al eje Y.*- El movimiento de rotación a través del ángulo dual  $\hat{\theta}$  con respecto al eje Y se muestra en la Figura 2.7.

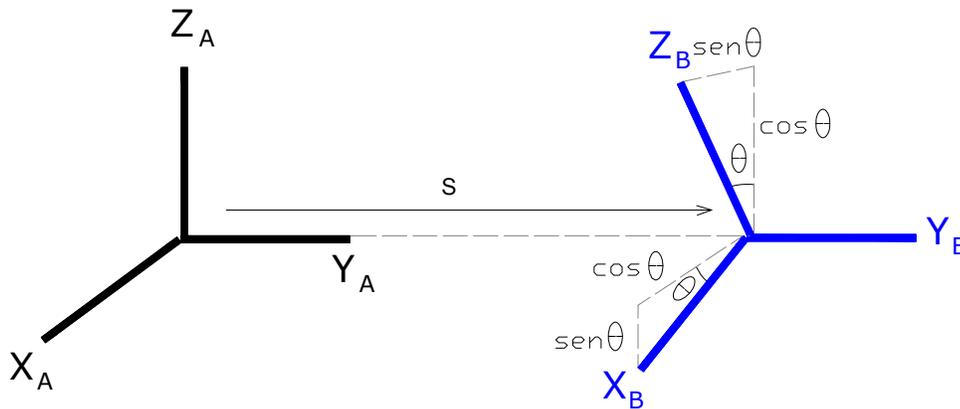


Figura 2.7 Marco de coordenadas {B} relativo al marco {A} por el movimiento de rotación con respecto al eje Y del marco {A}.

Este movimiento de rotación puede ser manejado de igual manera al movimiento de rotación con respecto al eje X. Por lo tanto:

$${}^A\hat{Y}_B = [{}^A\hat{i}_B, {}^A\hat{j}_B, {}^A\hat{k}_B] \quad (2-72)$$

$${}^A\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2-73)$$

*Movimiento de rotación con respecto al eje Z.*- El movimiento de rotación a través del ángulo  $\theta$  con respecto al eje Z se muestra en la Figura 2.8.

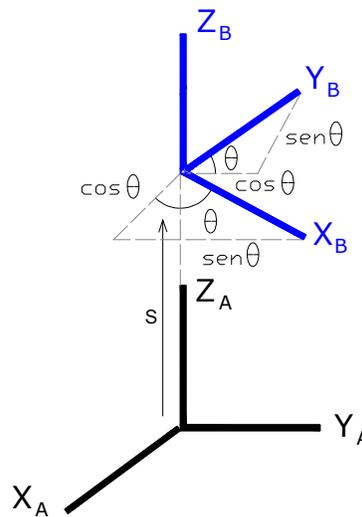


Figura 2.8 Marco {B} relativo al marco {A} por movimiento de rotación con respecto al eje Z del marco {A}.

Además también se aplica el mismo procedimiento para movimiento de rotación en cualquier eje X ó Y (Fischer, 1999).

. Entonces:

$${}^A\hat{Z} = [{}^A\hat{i}_B, {}^A\hat{j}_B, {}^A\hat{k}_B] \quad (2-74)$$

$${}^A\hat{Z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-75)$$

### 2.12.3 Movimiento de un vector a través de un ángulo dual

Hasta el momento solo se ha considerado el caso cuando el vector es inmóvil y el nuevo marco se mueve relativamente al marco anterior, entonces se puede aplicar la cinemática inversa y considerar el movimiento del vector relativo al marco inmóvil.

Se supone que el vector se mueve de la posición 1 a la posición 2 donde el marco permanece inmóvil, si un observador se fija sobre el vector, y el movimiento se lleva

a cabo tan fácilmente que es imperceptible al observador, se podría pensar que el marco está moviéndose. La apariencia es que el marco se mueve en dirección inversa a la del actual movimiento del vector relativo al marco fijo.

$$\hat{V}_2 = {}^2_1\hat{T}\hat{V}_1 \quad (2-76)$$

Entonces las mismas matemáticas que se aplican a los marcos en movimiento y vectores fijos también se pueden usar para marcos fijos y vectores en movimiento.

Se observa que el vector  $\hat{V}_1$  y el vector  $\hat{V}_2$  son vectores diferentes como lo indican sus subíndices diferentes, pero ambos son representados por vectores unitarios del mismo marco (Fischer, 1999).

#### 2.12.4 Transformación Inversa

La matriz de identidad dual  $\hat{I}$ , es una matriz única de 3x3 de tal manera que:

$$\hat{M} = \hat{I}\hat{M} \quad (2-77)$$

Donde  $\hat{M}$  es cualquier vector de la matriz por el cual la multiplicación puede ser realizada.

Siendo que:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-78)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

$$= I + \varepsilon[0] \quad (2-80)$$

Donde el símbolo  $I$  representa la matriz de identidad de  $3 \times 3$  y el símbolo  $[0]$  representa la matriz nula de  $3 \times 3$ .

Puesto que la operación entre la matriz de identidad dual y un vector ó un marco no produce cambio, la acción es equivalente a permanecer fijo.

Si se considera la transformación:

$${}^2\hat{V} = {}^2\hat{T} {}^1\hat{V} \quad (2-81)$$

Y otra transformación idéntica en magnitudes pero opuesta en direcciones:

$${}^1\hat{V} = {}^1\hat{T} {}^2\hat{V} \quad (2-82)$$

Al substituir la ecuación (2-81) en la ecuación (2-82):

$${}^1\hat{V} = {}^1\hat{T} {}^2\hat{T} {}^1\hat{V} \quad (2-83)$$

Eliminando los términos en común:

$$\hat{I} = {}^1\hat{T} {}^2\hat{T} \quad (2-84)$$

Esto es evidente ya que el operador  ${}^2\hat{T} {}^1\hat{T}$  no produce cambios en el vector dual  ${}^1\hat{V}$ .

Si el producto de dos matrices da como resultado la matriz de identidad dual  $\hat{I}$ , entonces una matriz es inversa a la otra.

Esto se escribe como:

$${}^1\hat{T} = {}^2\hat{T}^{-1} \quad (2-85)$$

También se puede escribir:

$${}^2\hat{T} = {}^1\hat{T}^{-1} \quad (2-86)$$

Ahora, se observa que el valor de la determinante de cualquier matriz coordenada de transformación con números duales es unitario, esto indica que la matriz coordenada de transformación con números duales es ortogonal. Para un matriz ortogonal, la inversa es igual a la transpuesta.

$${}^1\hat{T} = {}^2\hat{T}^{-1} = {}^2\hat{T}^T \quad (2-87)$$

Por tanto al obtener la inversa de una matriz coordenada de transformación con números duales, solo se necesita intercambiar el orden de los subíndices de los elementos. Esto representa una gran ventaja sobre todo con las matrices coordenadas de transformación homogéneas donde encontrando la inversa facilita varias operaciones aritméticas (Fischer, 1999).

La inversa de:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon 7 \end{bmatrix} \quad (2-88)$$

Se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon 7 \end{bmatrix} \quad (2-89)$$

Esto prueba que:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-90)$$

### 2.12.5 Transformaciones sucesivas

Las transformaciones sucesivas con respecto a ejes fijos de coordenadas son manejadas por multiplicación sucesiva hacia la izquierda.

Considerando un movimiento de rotación de {1} a {2} seguido de un movimiento de rotación de {2} a {3} y después un movimiento de rotación de {3} a {4}. La transformación de matrices es  ${}^2\hat{T}_1 {}^3\hat{T}_2 {}^4\hat{T}_3$ .

Se hacen las transformaciones individuales:

$${}^2\hat{V} = {}^2\hat{T}_1 {}^1\hat{V} \quad (2-91)$$

$${}^3\hat{V} = {}^3\hat{T}{}^2\hat{V} \quad (2-92)$$

$${}^4\hat{V} = {}^4\hat{T}{}^3\hat{V} \quad (2-93)$$

Substituyendo la ecuación (2-92) en la ecuación (2-93):

$${}^4\hat{V} = {}^4\hat{T}{}^3\hat{T}{}^2\hat{V} \quad (2-94)$$

Y al substituir la ecuación (2-91) en la ecuación (2-94):

$${}^4\hat{V} = {}^4\hat{T}{}^3\hat{T}{}^2\hat{T}{}^1\hat{V} \quad (2-95)$$

Entonces las transformaciones sucesivas pueden ser concentradas dentro de una transformación simple:

$${}^4\hat{T}{}^1 = {}^4\hat{T}{}^3\hat{T}{}^2\hat{T}{}^1 \quad (2-96)$$

Por lo tanto:

$${}^4\hat{V} = {}^4\hat{T}{}^1\hat{V} \quad (2-97)$$

Este concepto funciona para cualquier número de transformaciones. Generalizando la concentración de transformaciones toma la forma:

$${}^Z\hat{T}{}^A = {}^Z\hat{T}{}^{Z-1}{}^{Z-2} \dots \dots \dots {}^{A+2}\hat{T}{}^{A+1}{}^A \quad (2-98)$$

Se puede notar que el orden de los movimientos de rotación es importante.

Además se observa que en la ecuación (2-98) que todos los movimientos son respecto al marco {A}, el marco fijo, a pesar de las posiciones y orientaciones intermedias del vector móvil ó el marco (Fischer, 1999).

### 2.12.6 Rotar-Proyectar-Orientar con respecto a ejes fijos

Suponga un marco de coordenadas fijo en el espacio. Rotar a través de un ángulo dual es un movimiento de rotación con respecto al eje X de dicho marco. Proyectar a través de un ángulo dual es un movimiento de rotación con respecto al eje Y. Por último orientar a través de un ángulo dual es un movimiento de rotación con respecto al eje Z del marco de coordenadas.

Ahora es más conveniente usar las letras “s” y “c” en lugar de las abreviaciones de *sen* y *cos* para representar las funciones seno y coseno respectivamente.

*rotar*( $\gamma$ ) = Movimiento de rotación  $\gamma = \gamma + \epsilon G$  respecto al eje X

*proyectar*( $\beta$ ) = Movimiento de rotación  $\beta = \beta + \epsilon B$  respecto al eje Y

*orientar*( $\alpha$ ) = Movimiento de rotación  $\alpha = \alpha + \epsilon A$  respecto al eje Z

Una combinación de esto es:

$${}^A\hat{T}_{RPO} = \text{rotar}(\alpha)\text{proyectar}(\beta)\text{orientar}(\gamma) = \hat{Z}(\alpha)\hat{Y}(\beta)\hat{X}(\gamma) \quad (2-99)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \quad (2-100)$$

$${}^A\hat{T}_{RPO}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - c\alpha s\gamma \\ s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2-101)$$

Es importante resaltar que el orden de los movimientos es muy importante. Secuenciación de la rotación, proyección y orientación de otra manera se traducirá en una expresión diferente de la ecuación (2-101) (Fischer, 1999).

### 2.12.7 Ángulos de Euler XYZ

En el tema anterior, se consideraron movimientos de rotación con respecto de un sistema de coordenadas fijo en el espacio. El cuerpo siguió una serie de movimientos, cada movimiento estaba referido a los ejes del mismo marco de coordenadas.

Pero también se puede expresar los movimientos del cuerpo con respecto a los ejes de un marco de coordenadas fijo en el cuerpo. Cuando cada movimiento de rotación se completó, la localización y orientación de ese marco de coordenadas ha cambiado de tal forma que el cuerpo sobre el cual el marco es fijado se ha movido. Cada movimiento de rotación sucesivo ocurre con respecto a un eje cuya localización y orientación depende de los movimientos anteriores. Se podría decir que los movimientos de rotación son tomados con respecto a los ejes de un marco de coordenadas móvil se llaman ángulos duales de Euler.

Si se observan movimientos de rotación a través de los ángulos duales de Euler con respecto a cualquier secuencia de ejes siempre y cuando no repita el mismo eje consecutivamente. Al considerar los ángulos duales de Euler XYZ donde los movimientos de rotación ocurren con respecto a los ejes  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ . Estos van a ser referidos como ángulos duales de Euler XYZ. Cabe señalar que los ángulos duales de Euler ZYZ son otra forma popular.

Analizando un marco {A} en el espacio que será sometido a movimientos de rotación a través de los ángulos duales de Euler XYZ  $\gamma, \beta, \alpha$  para avanzar a la adaptación con un marco {B}. El movimiento se producirá en tres pasos:

- Rotación del marco {A} con respecto al eje  $\hat{x}_A$  a través del ángulo  $\gamma$  al marco {B'}
- Rotación del marco {A} con respecto al eje  $\hat{y}_{B'}$  a través del ángulo  $\beta$  al marco {B'}
- Rotación del marco {A} con respecto al eje  $\hat{z}_{B''}$  a través del ángulo  $\alpha$  al marco {B'}

Ahora se desea evaluar una matriz de coordenadas de transformación  ${}^A_B E(\gamma, \beta, \alpha)$  que va a transformar a un marco de coordenadas {A} a través de los ángulos duales de Euler  $\gamma, \beta, \alpha$  en alineación con el marco de coordenadas {B}.

El problema reside en que los 3 componentes de los movimientos de rotación están expresados en marcos diferentes, y el método previamente desarrollado para concentrar transformaciones sucesivas aplica solo para movimientos de rotación con respecto a ejes del mismo marco. Para combinar movimientos de rotación con respecto a ejes de tres marcos diferentes dentro de una sola matriz de transformación. Los movimientos deben estar todos referidos al mismo grupo de ejes.

Evidentemente, la definición de los ángulos duales de Euler se refiere a movimientos de rotación con respecto a ejes de diferentes sistemas de coordenadas. Por lo tanto la formulación de los movimientos a través de los ángulos de Euler exige un enfoque distinto al de la consideración previa de las transformaciones sucesivas con respecto a un marco fijo. Esencialmente se tiene un sistema de coordenadas fijado en un cuerpo en movimiento y un sistema de coordenadas fijo en el universo. De acuerdo a las definiciones se toman los movimientos de rotación con respecto al sistema sobre el cuerpo en movimiento.

Supóngase que una persona viajará en el cuerpo mientras este se mueve en el espacio, si los movimientos son tan suaves que las aceleraciones no se perciben, la persona sentiría que se mantiene en su posición y que el universo se está moviendo. Además, la persona podría sentir que el universo se está moviendo en dirección opuesta al desplazamiento del cuerpo, como cuando los pasajeros de un tren que avanza hacia el oeste pueden llegar a sentir que el tren está parado y que el paisaje visto a través de una ventana se está moviendo hacia el este.

Así que al considerar la parte estacionaria y el movimiento del universo se pueden tomar todos los movimientos de rotación con respecto al mismo marco.

En lugar de observar al primer movimiento como un movimiento de rotación con respecto al eje  $x_A$  (del sistema universal) a través del ángulo dual  $\gamma$ , se considera este como un movimiento de rotación con respecto al eje  $x_B$ , a través del ángulo dual  $-\gamma$ .

En lugar de examinar el segundo movimiento como un movimiento de rotación con respecto al eje  $y_{B'}$ , a través del ángulo dual  $\beta$ , se considera este como un movimiento de rotación con respecto al eje  $y_{B''}$ , a través del ángulo dual  $-\beta$ .

Y en lugar de observar el tercer movimiento como un movimiento de rotación con respecto al eje  $z_{B''}$ , a través del ángulo dual  $\alpha$ , se considera este como un movimiento de rotación con respecto al eje  $z_{B'''}$ , a través del ángulo dual  $-\alpha$ .

Así que:

$${}^B_A\hat{E} = \hat{X}(-\hat{\gamma})\hat{Y}(-\hat{\beta})\hat{Z}(-\hat{\alpha}) \quad (2-102)$$

Después:

$$\hat{X}(-\hat{\gamma}) = \hat{X}^{-1}(\hat{\gamma}) \quad (2-103)$$

$$\hat{Y}(-\hat{\beta}) = \hat{Y}^{-1}(\hat{\beta}) \quad (2-104)$$

$$\hat{Z}(-\hat{\alpha}) = \hat{Z}^{-1}(\hat{\alpha}) \quad (2-105)$$

Por lo tanto:

$${}^B_A\hat{E} = \hat{X}^{-1}(\hat{\gamma})\hat{Y}^{-1}(\hat{\beta})\hat{Z}^{-1}(\hat{\alpha}) \quad (2-106)$$

$${}^B_A\hat{E}\hat{Z}(\hat{\alpha}) = \hat{X}^{-1}(\hat{\gamma})\hat{Y}^{-1}(\hat{\beta}) \quad (2-107)$$

$${}^B_A\hat{E}\hat{Z}(\hat{\alpha})\hat{Y}(\hat{\beta}) = \hat{X}^{-1}(-\hat{\gamma}) \quad (2-108)$$

$${}^B_A\hat{E}\hat{Z}(\hat{\alpha})\hat{Y}(\hat{\beta})\hat{X}(\hat{\gamma}) = \hat{I} \quad (2-109)$$

$$\hat{Z}(\hat{\alpha})\hat{Y}(\hat{\beta})\hat{X}(\hat{\gamma}) = {}^B_A\hat{E}^{-1} \quad (2-110)$$

Así que:

$${}^A_B\hat{E} = {}^B_A\hat{E}^{-1} \quad (2-111)$$

Por lo tanto:

$${}^A_B\hat{E} = \hat{Z}(\hat{\alpha})\hat{Y}(\hat{\beta})\hat{X}(\hat{\gamma}) \quad (2-112)$$

Entonces:

$$= \begin{bmatrix} c\hat{\alpha} & -s\hat{\alpha} & 0 \\ s\hat{\alpha} & c\hat{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\hat{\beta} & 0 & s\hat{\beta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\hat{\beta} & 0 & c\hat{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\hat{\gamma} & -s\hat{\gamma} \\ 0 & s\hat{\gamma} & c\hat{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2-113)$$

$${}^A_B \hat{E} = \begin{bmatrix} c\hat{\alpha}c\hat{\beta} & c\hat{\alpha}s\hat{\beta}s\hat{\gamma} - s\hat{\alpha}c\hat{\gamma} & c\hat{\alpha}s\hat{\beta}s\hat{\gamma} + s\hat{\alpha}s\hat{\gamma} \\ s\hat{\alpha}c\hat{\beta} & s\hat{\alpha}s\hat{\beta}s\hat{\gamma} + c\hat{\alpha}c\hat{\gamma} & c\hat{\alpha}s\hat{\beta}s\hat{\gamma} - c\hat{\alpha}s\hat{\gamma} \\ s\hat{\beta} & c\hat{\beta}s\hat{\gamma} & c\hat{\beta}c\hat{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2-114)$$

Note que la expresión para la transformación a través de los ángulos duales de Euler con respecto a los ejes  $-x, -y$  y  $-z$  determinada en la ecuación (2-113) es idéntica a la matriz de la ecuación (2-100), representando los mismos tres movimientos de rotación tomados con respecto a los ejes fijos en orden contrario.

Los tres ángulos duales de Euler representados en una matriz con números duales de  $3 \times 3$  pueden ser determinados en la misma manera que los ángulos duales de rotación-proyección-orientación para movimientos de rotación con respecto a un marco fijo (Fischer, 1999).

### 2.12.8 Ángulos de Euler ZYZ

Una forma muy común de los ángulos de Euler es la secuencia ZYZ. En este régimen se comienza con un sistema móvil alineado a un marco fijo  $\{A\}$ . Primero se realiza un movimiento de rotación con respecto al eje Z a través del ángulo dual  $\hat{\alpha}$ . Después se hace un movimiento de rotación con respecto al eje Y del sistema de coordenadas móvil a través del ángulo dual  $\hat{\beta}$ . Por último se realiza un movimiento de rotación a través del ángulo dual  $\hat{\gamma}$  con respecto al eje Z del sistema móvil (Fischer, 1999).

$${}^A_B \hat{D} = \hat{Z}(\hat{\alpha})\hat{Y}(\hat{\beta})\hat{X}(\hat{\gamma}) \quad (2-115)$$

$$= \begin{bmatrix} c\hat{\alpha} & -s\hat{\alpha} & 0 \\ s\hat{\alpha} & c\hat{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\hat{\beta} & 0 & s\hat{\beta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\hat{\beta} & 0 & c\hat{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\hat{\gamma} & -s\hat{\gamma} & 0 \\ s\hat{\gamma} & c\hat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-116)$$

$${}^A_B \hat{D} = \begin{bmatrix} c\hat{\alpha}c\hat{\beta}c\hat{\gamma} - s\hat{\alpha}s\hat{\gamma} & -c\hat{\alpha}c\hat{\beta}s\hat{\gamma} - s\hat{\alpha}c\hat{\gamma} & c\hat{\alpha}s\hat{\beta} \\ s\hat{\alpha}c\hat{\beta}c\hat{\gamma} - c\hat{\alpha}s\hat{\gamma} & -s\hat{\alpha}c\hat{\beta}s\hat{\gamma} + c\hat{\alpha}c\hat{\gamma} & s\hat{\alpha}s\hat{\beta} \\ -s\hat{\beta}c\hat{\gamma} & s\hat{\beta}s\hat{\gamma} & c\hat{\beta} \end{bmatrix} \quad (2-117)$$

Substituyendo valores:

$$= \begin{bmatrix} -s\alpha s\gamma + c\alpha c\beta c\gamma & -s\alpha c\gamma - c\alpha c\beta s\gamma & c\alpha s\beta \\ -\varepsilon \begin{bmatrix} A(c\alpha s\gamma - s\alpha c\beta c\gamma) \\ + Bc\alpha s\beta s\gamma \\ + G(s\alpha c\gamma + c\alpha c\beta s\gamma) \end{bmatrix} & +\varepsilon \begin{bmatrix} -A(c\alpha c\gamma - s\alpha c\beta s\gamma) \\ + Bc\alpha s\beta s\gamma \\ + G(s\alpha s\gamma - c\alpha c\beta c\gamma) \end{bmatrix} & +\varepsilon \begin{bmatrix} -As\alpha s\beta \\ + Bc\alpha c\beta \end{bmatrix} \\ c\alpha s\gamma + s\alpha c\beta c\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha c\beta s\gamma & s\alpha s\beta \\ +\varepsilon \begin{bmatrix} A(s\alpha s\gamma + c\alpha c\beta c\gamma) \\ -Bs\alpha s\beta c\gamma \\ -G(c\alpha c\gamma - s\alpha c\beta s\gamma) \end{bmatrix} & +\varepsilon \begin{bmatrix} -A(s\alpha c\gamma + c\alpha c\beta s\gamma) \\ + Bs\alpha s\beta s\gamma \\ -G(c\alpha c\gamma + s\alpha c\beta s\gamma) \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} Ac\alpha s\beta \\ + Bs\alpha c\beta \end{bmatrix} \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \\ +\varepsilon \begin{bmatrix} -Bc\beta c\gamma \\ +Gs\beta s\gamma \end{bmatrix} & +\varepsilon \begin{bmatrix} Bc\beta s\gamma \\ +Gs\beta c\gamma \end{bmatrix} & -\varepsilon Bs \end{bmatrix} \quad (2-118)$$

### 2.12.9 Transformación Relativa

Las transformaciones sucesivas de coordenadas son concentradas en una simple matriz por la pre-multiplicación (hacia la izquierda) si las transformaciones son hechas con respecto a los ejes de un sistema de coordenadas fijo.

Las transformaciones sucesivas de coordenadas son concentradas dentro de una matriz única por la post-multiplicación (hacia la derecha) si las transformaciones son hechas con respecto a los ejes de un marco de coordenadas móvil (Fischer, 1999).

### 2.12.10 Movimiento de rotación con respecto a un vector unitario general

Las matrices de transformación de coordenadas han sido desarrolladas para tratar con movimientos de rotación sólo cuando son respecto a ejes de marcos de coordenadas.

Sin embargo, es posible considerar movimientos de rotación con respecto a un eje general, alguna línea en el espacio que no coincide con los ejes de coordenadas.

Si se supone que se va a transformar un marco de coordenadas {A} en coincidencia con un marco de coordenadas {B} mediante la adopción de un movimiento de rotación a través del ángulo dual  $\hat{\theta} = \theta + \varepsilon s$  con respecto a algún eje representado por la línea unitaria de un vector  $\hat{h} = \vec{f} + \varepsilon \vec{g}$  tal como:

$$\{A\} = {}_B^A \hat{T}(\hat{\theta}, \hat{h}) \{B\} \quad (2-119)$$

A fin de dar cabida a la limitación de sólo poder estudiar los movimientos de rotación con respecto a ejes de coordenadas, el movimiento de rotación es considerado con respecto a algún marco {C} cuyo eje Z coincide con el eje de rotación general. Entonces el sistema de coordenadas {A} en el cual el eje de rotación  $\hat{h}$  se ha especificado, se transforma a este marco {C}. Por tanto los movimientos de rotación del cuerpo a través del ángulo dual  $\hat{\theta}$  son tomados con respecto al eje  ${}^C Z$  que corresponde al eje de rotación  $\hat{h}$ . El resultado de esto es así transformado regresando del marco {C} al marco de referencia {A} en el cual los vectores unitarios del marco {B} se han especificado. Esto se logra por la concentración de las matrices de transformación de coordenadas.

$${}_B^A \hat{T}(\hat{\theta}, \hat{h}) = {}_B^A \hat{T} \hat{Z}(\hat{\theta}) {}_A^C \hat{T} \quad (2-120)$$

Donde la matriz  $\hat{Z}(\theta)$  representa un movimiento de rotación a través del ángulo dual  $\theta$  con respecto al eje Z y la matriz  ${}^A\hat{T}$  (de la cual la matriz  ${}^C\hat{T}$  es la inversa) representa la transformación del marco de coordenadas {A} al marco de coordenadas {B}. Ahora, las tres columnas de la matriz de transformación  ${}^C\hat{T}$  representan los vectores duales unitarios del marco {C} que son expresados en términos del marco de coordenadas {A}. De estos, los elementos del eje  ${}^C X$  son representados por los símbolos  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , el eje  ${}^C Y$  por los símbolos  $\hat{D}, \hat{E}, \hat{F}$ , si bien el eje  ${}^C Z$  esta agrupado en alineamiento con los ejes del movimiento de rotación, el vector dual  $\hat{h}$  por lo que:

$${}^A\hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{D} & \hat{h}_x \\ \hat{B} & \hat{E} & \hat{h}_y \\ \hat{C} & \hat{F} & \hat{h}_z \end{bmatrix} \quad (2-121)$$

En consecuencia, la ecuación (2-118) se puede describir:

$${}^A\hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{D} & \hat{h}_x \\ \hat{B} & \hat{E} & \hat{h}_y \\ \hat{C} & \hat{F} & \hat{h}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} & \hat{C} \\ \hat{D} & \hat{E} & \hat{F} \\ \hat{h}_x & \hat{h}_y & \hat{h}_z \end{bmatrix} \quad (2-122)$$

La amplificación de este producto puede ser simplificada considerablemente, haciendo varias observaciones.

El producto escalar de una fila o columna de una matriz de transformación de coordenadas con cualquier otra fila o columna desaparecerán ya que los vectores que comprende la matriz son perpendiculares y se interceptan a fin de que:

$$\hat{A}\hat{D} + \hat{B}\hat{E} + \hat{C}\hat{F} = 0 \quad (2-123)$$

$$\hat{A}\hat{B} + \hat{D}\hat{E} + \hat{h}_x\hat{h}_y = 0 \quad (2-124)$$

$$\hat{A}\hat{C} + \hat{D}\hat{F} + \hat{h}_x\hat{h}_z = 0 \quad (2-125)$$

$$\hat{B}\hat{C} + \hat{E}\hat{F} + \hat{h}_y\hat{h}_z = 0 \quad (2-126)$$

El producto escalar de una fila o columna de una matriz de transformación de coordenadas con ella misma es la unidad ya que se trata de unidad dual de modo que los vectores:

$$\hat{A}\hat{A} + \hat{B}\hat{B} + \hat{C}\hat{C} = 1 \quad (2-127)$$

$$\hat{D}\hat{D} + \hat{E}\hat{E} + \hat{F}\hat{F} = 1 \quad (2-128)$$

$$\hat{A}\hat{A} + \hat{D}\hat{D} + \hat{h}_x\hat{h}_x = 1 \quad (2-129)$$

$$\hat{B}\hat{B} + \hat{E}\hat{E} + \hat{h}_y\hat{h}_y = 1 \quad (2-130)$$

$$\hat{C}\hat{C} + \hat{F}\hat{F} + \hat{h}_z\hat{h}_z = 1 \quad (2-131)$$

El producto cruzado de dos columnas de una matriz de transformación de coordenadas es la tercera columna ya que las columnas representan un conjunto de vectores unitarios perpendiculares que interceptan en el origen del marco de manera precisa a fin de que:

$$\hat{B}\hat{F} - \hat{C}\hat{E} = \hat{h}_x \quad (2-132)$$

$$\hat{C}\hat{D} - \hat{A}\hat{F} = \hat{h}_y \quad (2-133)$$

$$\hat{A}\hat{E} - \hat{B}\hat{D} = \hat{h}_z \quad (2-134)$$

Substituyendo las ecuaciones (2-123) a la (2-134) dentro de la ampliación de la ecuación (2-122) beneficia la matriz de transformación representando un movimiento de rotación a través del ángulo dual  $\theta$  con respecto a un eje especificado por el vector unitario  $\hat{h}$ .

$$\begin{aligned}
 {}^A_B\hat{T}(\hat{\theta}, \hat{h}) &= \begin{bmatrix} \hat{t}_{11} & \hat{t}_{12} & \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{21} & \hat{t}_{22} & \hat{t}_{23} \\ \hat{t}_{31} & \hat{t}_{32} & \hat{t}_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{h}_X^2 v\hat{\theta} + c\hat{\theta} & \hat{h}_X \hat{h}_Y v\hat{\theta} - \hat{h}_Z s\hat{\theta} & \hat{h}_X \hat{h}_Z v\hat{\theta} + \hat{h}_Y s\hat{\theta} \\ \hat{h}_X \hat{h}_Y v\hat{\theta} + \hat{h}_Z s\hat{\theta} & \hat{h}_Y^2 v\hat{\theta} + c\hat{\theta} & \hat{h}_Y \hat{h}_Z v\hat{\theta} - \hat{h}_X s\hat{\theta} \\ \hat{h}_X \hat{h}_Z v\hat{\theta} - \hat{h}_Y s\hat{\theta} & \hat{h}_Y \hat{h}_Z v\hat{\theta} + \hat{h}_X s\hat{\theta} & \hat{h}_Z^2 v\hat{\theta} + c\hat{\theta} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-135}$$

Donde  $v\hat{\theta}$  indica *verseno*  $\hat{\theta} = 1 - c\hat{\theta}$  (Fischer, 1999).

### 2.12.11 Determinación del ángulo dual y eje de un movimiento de rotación dado.

*Procedimiento para un movimiento general.*- Si se considera la situación donde se desea determinar el ángulo dual  $\hat{\theta} = \theta + \varepsilon s$  y  $\hat{h} = \bar{f} + \varepsilon \bar{g}$  de un movimiento de rotación general representado por una transformación dada  ${}^A_B\hat{T}$  con elementos  $\hat{t}_{ij}$ .

Si igualamos las sumas de los elementos en diagonal de la ecuación (2-135):

$$\begin{aligned}
 \hat{t}_{11} + \hat{t}_{22} + \hat{t}_{33} &= \hat{h}_X^2 v\hat{\theta} + c\hat{\theta} + \hat{h}_Y^2 v\hat{\theta} + c\hat{\theta} + \hat{h}_Z^2 v\hat{\theta} + c\hat{\theta} \\
 &= (\hat{h}_X^2 + \hat{h}_Y^2 + \hat{h}_Z^2) v\hat{\theta} + 3c\hat{\theta}
 \end{aligned} \tag{2-136}$$

Se puede aceptar:

$$\hat{t}_{11} = u_{11} + \varepsilon v_{11} \tag{2-137}$$

$$\hat{t}_{22} = u_{22} + \varepsilon v_{22} \tag{2-138}$$

$$\hat{t}_{33} = u_{33} + \varepsilon v_{33} \tag{2-139}$$

Y también:

$$\hat{h}_X = f_X + \varepsilon g_X \tag{2-140}$$

$$\hat{h}_Y = f_Y + \varepsilon g_Y \tag{2-141}$$

$$\hat{h}_z = f_z + \varepsilon g_z \quad (2-142)$$

Además:

$$v\hat{\theta} = 1 - c\hat{\theta} = 1 - c\hat{\theta} + \varepsilon S s \theta \quad (2-143)$$

De esta forma la ecuación (2-134) se puede escribir:

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{22} + u_{33} + \varepsilon(v_{11} + v_{22} + v_{33}) \\ = \\ [(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) + \varepsilon 2(f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z)] [(1 - c\theta) + \varepsilon S s \theta] \\ + 3c\theta - \varepsilon e S s \theta \end{aligned} \quad (2-144)$$

Ya que el vector  $\vec{f}$  es de longitud unitaria:

$$f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = 1 \quad (2-145)$$

Y además:

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{22} + u_{33} + \varepsilon(v_{11} + v_{22} + v_{33}) \\ = \\ 1 + 2c\theta + \varepsilon 2[(f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z)(1 - c\theta) - S s \theta] \end{aligned} \quad (2-146)$$

Entonces el componente primario de la ecuación (2-144) resulta:

$$u_{11} + u_{22} + u_{33} = 1 + 2c\theta \quad (2-147)$$

Y por lo tanto:

$$c\theta = \frac{u_{11} + u_{22} + u_{33} - 1}{2} \quad (2-148)$$

Si se hace una resta entre dos términos en diagonal de la ecuación (2-135):

$$\hat{t}_{32} - \hat{t}_{23} = (\hat{h}_y \hat{h}_z v \theta + \hat{h}_x s \theta) - (\hat{h}_y \hat{h}_z v \theta + \hat{h}_x s \theta) = 2\hat{h}_x s \theta \quad (2-149)$$

Los componentes de esta ecuación son:

$$u_{32} - u_{23} = 2f_x s \theta \quad (2-150)$$

Y también:

$$v_{32} - v_{23} = 2(f_X Sc\theta + g_X s\theta) \quad (2-151)$$

De la misma forma:

$$u_{13} - u_{31} = 2f_Y s\theta \quad (2-152)$$

$$v_{13} - v_{31} = 2(f_Y Sc\theta + g_Y s\theta) \quad (2-153)$$

$$u_{21} - u_{12} = 2f_Z s\theta \quad (2-154)$$

$$v_{21} - v_{12} = 2(f_Z Sc\theta + g_Z s\theta) \quad (2-155)$$

Una expresión para el seno de rotación de un ángulo  $\theta$  se obtiene sumando los cuadrados de los componentes primarios:

$$(u_{32} - u_{23})^2 + (u_{13} - u_{31})^2 + (u_{21} - u_{12})^2 = 4(f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2)s^2\theta \quad (2-156)$$

Y usando la ecuación (2-144):

$$(u_{32} - u_{23})^2 + (u_{13} - u_{31})^2 + (u_{21} - u_{12})^2 = 4s^2\theta \quad (2-157)$$

Así que:

$$s\theta = \pm \frac{\sqrt{(u_{32} - u_{23})^2 + (u_{13} - u_{31})^2 + (u_{21} - u_{12})^2}}{2} \quad (2-158)$$

La ecuación (2-158) evaluada para el seno de un ángulo de rotación  $\theta$  y la ecuación (2-148) evaluada para el coseno del ángulo de rotación  $\theta$  son considerados juntos muy precisos para determinar la rotación del ángulo  $\theta$ . Usualmente el signo más en la ecuación (2-158) se escoge a manera de conveniencia. Si se elige el signo negativo sólo resulta en un cambio correspondiente en el sentido del vector unitario resultante componente del eje de rotación del movimiento.

Conociendo la rotación del ángulo  $\theta$ , el componente primario de la diferencia de los términos en diagonal en la ecuación (2-135) pueden ser usados para determinar los componentes del vector unitario resultante  $\vec{f}$ .

$$f_X = \frac{u_{32} - u_{23}}{2s\theta} \quad (2-159)$$

$$f_Y = \frac{u_{13} - u_{31}}{2s\theta} \quad (2-160)$$

$$f_Z = \frac{u_{21} - u_{12}}{2s\theta} \quad (2-161)$$

El producto escalar de un vector resultante y un vector momento compuesto por un vector desaparecerán (lo que puede demostrarse mediante la ampliación  $\vec{f} \cdot \vec{g} = \vec{f} \cdot (\vec{r} \times \vec{f})$  donde  $\vec{r}$  es el vector desde el origen del marco de coordenadas a cualquier punto en la línea del vector resultante).

$$f_X g_X + f_Y g_Y + f_Z g_Z = 0 \quad (2-162)$$

El componente dual de la ecuación (2-144) es:

$$v_{11} + v_{22} + v_{33} = 2[(f_X g_X + f_Y g_Y + f_Z g_Z)(1 - c\theta) - Ss\theta] \quad (2-163)$$

De tal manera que substituyendo la ecuación (2-144) en la ecuación (2-163),

$$v_{11} + v_{22} + v_{33} = -2Ss\theta \quad (2-164)$$

Y así la traslación a lo largo del eje de rotación es:

$$S = -\frac{v_{11} + v_{22} + v_{33}}{2s\theta} \quad (2-165)$$

Las ecuaciones (2.151), (2-153), (2-155) pueden ser resueltas por los componentes del vector momento  $\vec{g}$ .

$$g_X = \frac{v_{32} - v_{23} - 2f_X S c \theta}{2s\theta} \quad (2-166)$$

$$g_Y = \frac{v_{13} - v_{31} - 2f_Y S c \theta}{2s\theta} \quad (2-167)$$

$$g_Z = \frac{v_{21} - v_{12} - 2f_Z S c \theta}{2s\theta} \quad (2-168)$$

*Procedimiento para una traslación pura.*- Cuando un movimiento es traslación pura, entonces el ángulo de rotación  $\theta=0^\circ$ , la ecuaciones (2-159), (2-160) y (2-161) no pueden ser usadas para evaluar la dirección del movimiento. Este caso es fácilmente detectado, ya que cuando el ángulo de rotación  $\theta=0^\circ$ , la ecuación (2-147) resulta que:

$$u_{11} + u_{22} + u_{33} = 3 \quad (2-169)$$

Luego sigue para determinar la traslación de la distancia  $S$  y la dirección del movimiento que esta dado por el vector resultante  $\vec{f}$ .

Cuando el ángulo de rotación  $\theta=0^\circ$ , la ecuación (2-135) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} \hat{t}_{11} & \hat{t}_{12} & \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{21} & \hat{t}_{22} & \hat{t}_{23} \\ \hat{t}_{31} & \hat{t}_{32} & \hat{t}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon S f_Z & \epsilon S f_Y \\ \epsilon S f_Z & 1 & -\epsilon S f_X \\ -\epsilon S f_Y & \epsilon S f_X & 1 \end{bmatrix} \quad (2-170)$$

De la cual los componentes duales son:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -S f_Z & S f_Y \\ S f_Z & 0 & -S f_X \\ -S f_Y & S f_X & 0 \end{bmatrix} \quad (2-171)$$

Sumando los cuadrados de los elementos 3-2, 1-3, 2-1 y observando que el vector resultante  $\vec{f}$  es de longitud unitaria:

$$v_{32}^2 + v_{13}^2 + v_{21}^2 = S^2 f_X^2 + S^2 f_Y^2 + S^2 f_Z^2 = S^2 \quad (2-172)$$

Entonces la traslación se define como:

$$S = \pm \sqrt{v_{32}^2 + v_{13}^2 + v_{21}^2} \quad (2-173)$$

La elección de un signo u otro en la traslación  $S$  tendrá como resultado un cambio correspondiente en el sentido computarizado del vector resultante  $\vec{f}$  a fin de mantener el mismo movimiento.

Cuando el valor de la traslación  $S$  es conocido, los componentes del vector resultante  $\vec{f}$  dando la dirección de la traslación pueden determinarse de los elementos 3-2, 1-3, 2-1 de la ecuación (2-171).

$$f_x = \frac{v_{32}}{S} \quad (2-174)$$

$$f_y = \frac{v_{13}}{S} \quad (2-175)$$

$$f_z = \frac{v_{21}}{S} \quad (2-176)$$

El eje de una traslación pura tiene una dirección única pero no una única línea como sería para el eje general de un movimiento de rotación o una traslación pura. En consecuencia para una traslación pura del vector momento  $\vec{g}$  no tiene sentido, y no es necesario calcularlo.

*Procedimiento para un medio giro de movimiento de rotación.*- Otra situación es en la cual las ecuaciones (2-159), (2-160), (2-161) no pueden ser usados cuando el desplazamiento de un movimiento de rotación en un medio giro, cuando el ángulo de rotación  $\theta=180^\circ$ . Para el caso de un medio giro, la ecuación (2-147) resulta en:

$$u_{11} + u_{22} + u_{33} = -1 \quad (2-177)$$

Esta condición puede ser usada para detectar fácilmente la situación de un medio giro. Esto entonces sigue siendo para determinar el vector resultante  $\vec{f}$  indicando la dirección y el vector momento  $\vec{g}$  deduciendo la localización del eje de rotación y el valor de la traslación  $S$ .

Cuando el desplazamiento de un movimiento de rotación en un medio giro, la ecuación (2-135) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} \hat{t}_{11} & \hat{t}_{12} & \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{21} & \hat{t}_{22} & \hat{t}_{23} \\ \hat{t}_{31} & \hat{t}_{32} & \hat{t}_{33} \end{bmatrix} = \quad (2-178)$$

$$\begin{bmatrix} 2f_x^2 - 1 + \epsilon 4f_x g_x & 2f_z f_y + \epsilon(2f_z g_y + 2f_y g_z + S f_z) & 2f_z f_z + \epsilon(2f_z g_z + 2f_z g_z - S f_y) \\ 2f_z f_y + \epsilon(2f_z g_y + 2f_y g_z - S f_z) & 2f_y^2 - 1 + \epsilon 4f_y g_y & 2f_y f_z + \epsilon(2f_y g_z + 2f_z g_y + S f_z) \\ 2f_z f_z + \epsilon(2f_z g_z + 2f_z g_z + S f_y) & 2f_z f_y + \epsilon(2f_y g_z + 2f_z g_y - S f_z) & 2f_z^2 - 1 + \epsilon 4f_z g_z \end{bmatrix}$$

El componente primario de esta ecuación es:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f_x^2 - 1 & 2f_x f_y & 2f_x f_z \\ 2f_x f_y & 2f_y^2 - 1 & 2f_y f_z \\ 2f_x f_z & 2f_z f_y & 2f_z^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (2-179)$$

Los elementos 1-1, 1-2, 1-3 de la ecuación (2-179) pueden ser usadas para determinar los componentes del vector resultante  $\vec{f}$ .

$$f_x = \pm \sqrt{\frac{u_{11} + 1}{2}} \quad (2-180)$$

$$f_y = \sqrt{\frac{u_{12}}{2f_x}} \quad (2-181)$$

$$f_z = \sqrt{\frac{u_{13}}{2f_x}} \quad (2-182)$$

Los componentes duales de la ecuación (2-178) son:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = \quad (2-183)$$

$$\begin{bmatrix} 4f_x g_x & 2(f_x g_y + f_y g_x) - S f_z & 2(f_x g_z + f_z g_x) - S f_y \\ 2(f_x g_y + f_y g_x) - S f_z & 4f_y g_y & 2(f_y g_z + f_z g_y) + S f_x \\ 2(f_x g_z + f_z g_x) + S f_y & 2(f_y g_z + f_z g_y) - S f_x & 4f_z g_z \end{bmatrix}$$

Usando los resultados obtenidos para los componentes del vector resultante  $\vec{f}$ , los componentes de la diagonal de la ecuación (2-183) pueden ser usados para determinar los componentes del vector momento  $\vec{g}$ .

$$g_x = \frac{v_{11}}{4f_x} \quad (2-184)$$

$$g_y = \frac{v_{22}}{4f_y} \quad (2-185)$$

$$g_z = \frac{v_{33}}{4f_z} \quad (2-186)$$

Un elemento de la diagonal de la ecuación (2-183) puede ser usado para determinar la traslación S.

$$S = \frac{v_{12} - 2(f_x g_y + f_y g_x)}{f_z} \quad (2-187)$$

También se puede usar:

$$S = \frac{v_{23} - 2(f_y g_z + f_z g_y)}{f_x} \quad (2-188)$$

$$S = \frac{v_{31} - 2(f_x g_z + f_z g_x)}{f_y} \quad (2-189)$$

La elección de las ecuaciones (2-187), (2-188) y (2-189) es determinada por el mayor de los componentes del vector resultante  $f_x, f_y$  ó  $f_z$  de tal forma que la división es desarrollada con la mejor precisión (Fischer, 1999).

## 2.13 MODELADO DE MATRICES PARA ARTICULACIONES Y ESLABONES

Un mecanismo está compuesto de eslabones cuyas conexiones se llaman articulaciones.

Sobre cada eslabón en un mecanismo se fija un sistema de coordenadas. Usando las matemáticas de la transformación de coordenadas se puede determinar la relación de cada sistema a otro y por lo tanto determinar la posición y orientación de cada eslabón así como de las articulaciones del mecanismo.

Un eslabón es considerado como un cuerpo rígido definiendo la relación entre dos ejes de articulaciones vecinas. Los dos ejes de articulaciones de un eslabón son cada uno una línea en el espacio. Dos parámetros definen su ubicación relativa:

$a$  = Distancia entre los ejes de las articulaciones de un eslabón  
(Longitud del eslabón)

$\alpha$  = Ángulo entre los ejes de las articulaciones de un eslabón  
(Giro del eslabón)

Entonces las dimensiones de un eslabón pueden ser definidas por un ángulo dual:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \varepsilon a \quad (2-190)$$

Los eslabones vecinos comparten una articulación entre sí, los parámetros de las articulaciones son:

$\theta$  = Rotación de la articulación (Movimiento angular)

$d$  = Compensación de la articulación (Movimiento deslizante, de traslación ó prismático)

Por lo tanto el desplazamiento en una articulación puede ser especificado por un ángulo dual:

$$\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d \quad (2-191)$$

Los valores  $\alpha, a, \theta, d$  serán referidos a menudo como “Parámetros de Denavit-Hartenberg”



$\hat{k}_{n+1}$  = Eje que coincide con el eje de la articulación  $n+1$ .

$\hat{i}_{n+1}$  = Eje que coincide con la distancia más corta entre los ejes  $\hat{k}_n$  y  $\hat{k}_{n+1}$

$\hat{j}_{n+1}$  = Eje que es perpendicular a los ejes  $\hat{i}_n$  y  $\hat{k}_{n+1}$

El origen del marco  $\{n+1\}$  está localizado en la intersección de los ejes  $\hat{k}_n$  y  $\hat{k}_{n+1}$ .

### 2.13.2 Transformaciones articulación-eslabón

La matriz de transformación de coordenadas de modelado de cada uno de los eslabones de un mecanismo será considerada el producto de una matriz especificada por el desplazamiento a la próxima articulación del eslabón y una matriz especificada por las dimensiones del eslabón.

Cada una de estas matrices será una función de un único numero dual, los componentes escalares son fácilmente obtenidos por inspección.

Esto traza la trayectoria a través del eslabón como se muestra en la Figura 2.9, del marco  $\{n\}$  fijado sobre el eslabón  $n-1$  en la articulación  $n$  al marco  $\{n+1\}$  fijado sobre el eslabón  $n$  en la articulación  $n+1$ .

Primero la transformación a través del ángulo dual  $\hat{\theta}_n = \theta_n + \varepsilon d_n$  con respecto al eje  $\hat{k}_n$  del marco  $\{n\}$  al marco  $\{m\}$ .

$${}^n_Z(\hat{\theta}_n) = \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -s\hat{\theta}_n & 0 \\ s\hat{\theta}_n & c\hat{\theta}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-192)$$

Después la transformación a través del ángulo dual  $\hat{\alpha}_n = \alpha_n + \varepsilon a_n$  con respecto al eje  $\hat{i}_m$  del marco  $\{m\}$  al marco  $\{n+1\}$ .

$${}^m_{n+1}\hat{X}(\hat{\alpha}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\hat{\alpha}_n & -s\hat{\alpha}_n \\ 0 & s\hat{\alpha}_n & c\hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad (2-193)$$

Al concentrar a la forma de la expresión total del modelado del eslabón:

$${}_{n+1}^n \hat{M}(\hat{\theta}_n, \hat{\alpha}_n) = {}_m^n \hat{Z}(\hat{\theta}_n) {}_{n+1}^m \hat{X}(\hat{\alpha}_n) \quad (2-194)$$

$$= \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -s\hat{\theta}_n & 0 \\ s\hat{\theta}_n & c\hat{\theta}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\hat{\alpha}_n & -s\hat{\alpha}_n \\ 0 & s\hat{\alpha}_n & c\hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad (2-195)$$

$$= \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -c\hat{\alpha}_n s\hat{\theta}_n & s\hat{\alpha}_n s\hat{\theta}_n \\ s\hat{\theta}_n & c\hat{\alpha}_n c\hat{\theta}_n & -s\hat{\alpha}_n c\hat{\theta}_n \\ 0 & s\hat{\alpha}_n & c\hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad (2-196)$$

$${}_{n+1}^n \hat{M}(\hat{\theta}_n, \hat{\alpha}_n)$$

=

$$\begin{bmatrix} c\theta_n & -c\alpha_n s\theta_n & s\alpha_n s\theta_n \\ s\theta_n & c\alpha_n c\theta_n & -s\alpha_n c\theta_n \\ 0 & s\alpha_n & c\alpha_n \end{bmatrix} \quad (2-197)$$

+

$$\varepsilon \begin{bmatrix} -d_n s\theta_n & a_n s\alpha_n s\theta_n - d_n c\alpha_n c\theta_n & a_n c\alpha_n s\theta_n + d_n s\alpha_n c\theta_n \\ d_n c\theta_n & -a_n s\alpha_n s\theta_n - d_n c\alpha_n c\theta_n & -a_n c\alpha_n c\theta_n + d_n s\alpha_n s\theta_n \\ 0 & a_n c\alpha_n & -a_n s\alpha_n \end{bmatrix}$$

La ecuación (2-197) es la ecuación de modelado del eslabón-articulación para cualquier eslabón binario (dos articulaciones).

Un eslabón en arco como el que se muestra en la Figura 2.10 puede parecer diferente al eslabón recto como el que se muestra en la Figura 2.9, pero las definiciones que se les aplican son las mismas. El material que constituye al eslabón no tiene que estar instalado sobre la distancia más corta entre los ejes de las articulaciones.

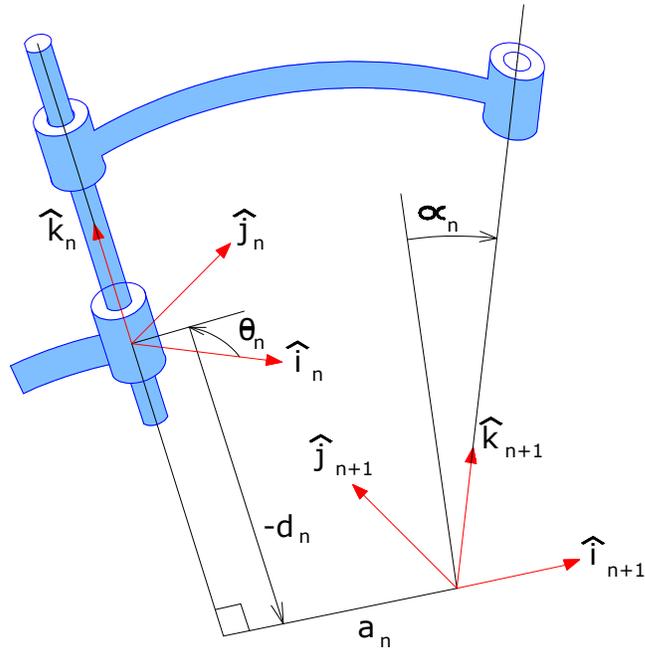


Figura 2.10 Eslabón en arco

Si la articulación es de rotación, entonces la articulación equilibrada es constante, establecida para coincidir entre los eslabones como se muestra en la Figura 2.11. Frecuentemente los mecanismos son considerados planares y la coincidencia se omite ( $d_n=0$ ). Algunas veces una sujetador, como el que se muestra en la Figura 2.12, se usa para obtener una verdadera articulación  $d_n=0$ .

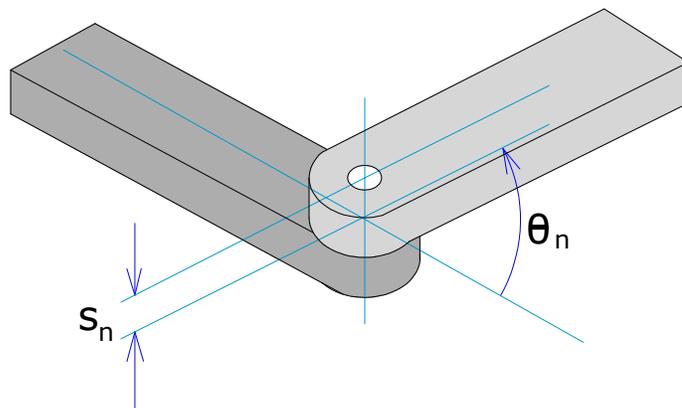


Figura 2.11 Coincidencia en cuenta del espesor de los eslabones

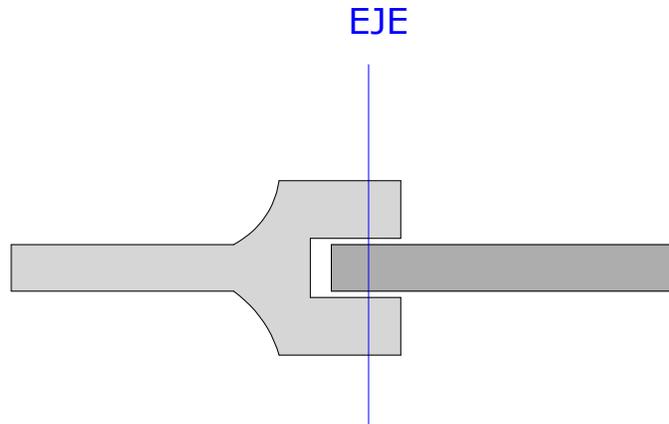


Figura 2.12 Un sujetador es en ocasiones usado para obtener una articulación de rotación sin punto de coincidencia.

### 2.13.3 Transformaciones articulación-eslabón

Una articulación esférica permite movimiento con respecto a los tres ejes pertenecientes a un grupo de ejes perpendiculares. Sin embargo, estos ejes no se definen igual a los ejes de una articulación cilíndrica. Por lo tanto, se seleccionan los ejes que permiten los movimientos de rotación arbitrariamente, escogiendo los ángulos duales de Euler XYZ.

$${}^n\hat{L} = \hat{Z}(\hat{\theta}_n)\hat{Y}(\hat{\eta}_n)\hat{X}(\hat{\zeta}_n)\hat{X}(\hat{\alpha}_n) \quad (2-198)$$

$$= \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -s\hat{\theta}_n & 0 \\ s\hat{\theta}_n & c\hat{\theta}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\hat{\eta}_n & 0 & s\hat{\eta}_n \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\hat{\eta}_n & 0 & c\hat{\eta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\hat{\zeta}_n & -s\hat{\zeta}_n \\ 0 & s\hat{\zeta}_n & c\hat{\zeta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\hat{\alpha}_n & -s\hat{\alpha}_n \\ 0 & s\hat{\alpha}_n & c\hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad (2-199)$$

Donde los ángulos de Euler son:  $\hat{\theta}_n = \theta_n + \varepsilon S_n$ ,  $\hat{\eta}_n = \eta_n + \varepsilon E_n$ ,  $\hat{\zeta}_n = \zeta_n + \varepsilon Z_n$ ,  $\hat{\alpha}_n = \alpha_n + \varepsilon A_n$ . Frecuentemente los movimientos a través del ángulo dual  $\hat{\zeta}_n = \zeta_n + \varepsilon Z_n$  representa un grado de libertad pasivo y el eslabón arqueado no tiene sentido. Por ejemplo, un eslabón conectado por articulaciones esféricas en ambos extremos como el que se

muestra en la Figura 2.13, puede girar con respecto al eje sin efecto significativo sobre la situación de otros eslabones en el mecanismo.

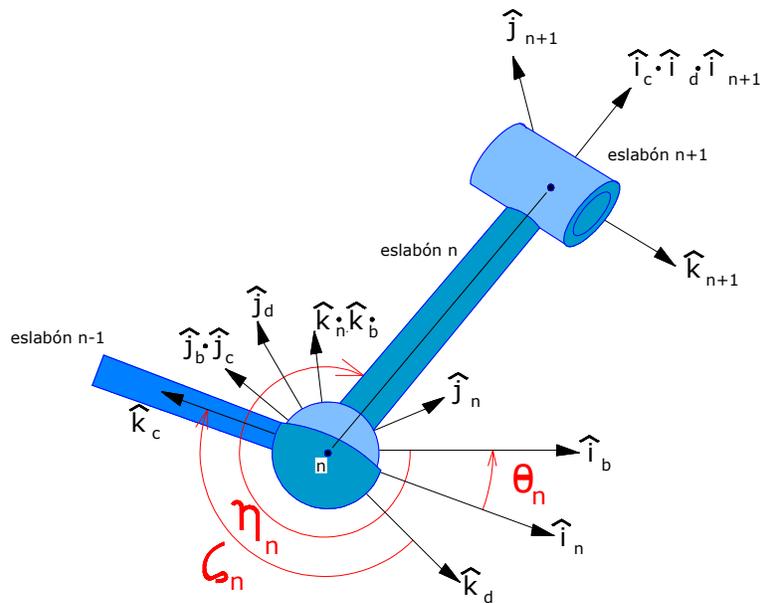


Figura 2.13 Eslabón con articulación esférica

Teniendo en cuenta esta simplificación:

$${}_{n+1}^n \hat{K} = \hat{Z}(\hat{\theta}_n) \hat{Y}(\hat{\eta}_n) X(A_n) \quad (2-200)$$

$$= \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -s\hat{\theta}_n & 0 \\ s\hat{\theta}_n & c\hat{\theta}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\hat{\eta}_n & 0 & s\hat{\eta}_n \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\hat{\eta}_n & 0 & c\hat{\eta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathcal{E}A_n \\ 0 & \mathcal{E}A_n & 1 \end{bmatrix} \quad (2-201)$$

Generalmente los movimientos permitidos por la articulación esférica son puramente giratorios pero los movimientos de rotación se han considerado para permitir la generalidad.

### 2.13.4 Eslabones con articulaciones planares

Una articulación planar cuenta con una superficie plana en un eslabón que se mantiene en contacto para formar un cojinete con una superficie plana en otro eslabón por lo tanto se permiten tres grados de libertad.

Estos tres grados de libertad, son dos traslaciones en las superficies de los planos rodantes y una rotación con respecto a un eje perpendicular a los planos del cojinete.

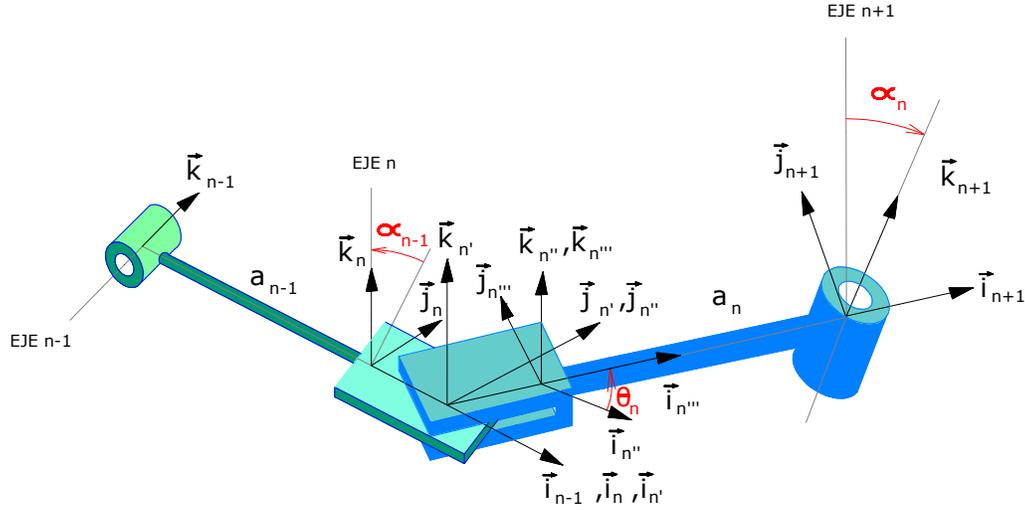


Figura 2.14 La articulación planar

La articulación en el extremo próximo del eslabón  $n$  como se muestra en la Figura 2.14 se modela por consideración de la traslación a través del desplazamiento  $r_n$  a lo largo del eje  $\vec{i}_n$  del marco  $\{n\}$  al marco  $\{n'\}$  seguido por la traslación a través de la distancia  $s_n$  a lo largo del eje  $\vec{j}_n$  del marco  $\{n''\}$  y después por una rotación a través del ángulo  $\theta_n$  con respecto al eje  $\vec{k}_n$  dentro del alineamiento con el marco  $\{n''\}$  el cual es seguido por un movimiento de rotación a través de la longitud del eslabón  $a_n$  y el giro  $\alpha_n$  con respecto al eje  $\vec{i}_{n''}$  del marco  $\{n+1\}$ . Esto se puede representar así:

$${}_{n+1}^n \hat{P} = {}_n^{\prime} \hat{X}(\epsilon r_n) {}_n^{\prime\prime} \hat{Y}(\epsilon s_n) {}_{n+1}^{\prime\prime} \hat{Z}(\theta_n) {}_{n+1}^{\prime\prime\prime} \hat{X}(\alpha_n + \epsilon a_n) \quad (2-202)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\epsilon r_n \\ \epsilon r_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \epsilon s_n \\ 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon s_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_n & -s\theta_n & 0 \\ s\theta_n & c\theta_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\epsilon a_n \\ 0 & \epsilon a_n & 1 \end{bmatrix} \quad (2-203)$$

$${}_{n+1}^n \hat{P} = \begin{bmatrix} c\theta_n & -s\theta_n & \varepsilon(a_n s\theta_n + S_n) \\ s\theta_n & c\theta_n & -\varepsilon(a_n c\theta_n + r_n) \\ \varepsilon(r_n s\theta_n - S_n c\theta_n) & \varepsilon(r_n c\theta_n + S_n s\theta_n + \varepsilon a_n) & 1 \end{bmatrix} \quad (2-204)$$

Las transformaciones articulación-eslabón se ha formulado de distintas maneras por los investigadores. Es importante comprender la formulación utilizada y mantener la coherencia dentro de un único análisis.

Por ejemplo, si la transformación a través del eslabón es formulada considerando la articulación más distante al extremo, entonces:

$$\hat{T}_{XZ} = \hat{X}\hat{Z} = \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -s\hat{\theta}_n & 0 \\ c\hat{\alpha}_{n-1}s\hat{\theta}_n & c\hat{\alpha}_{n-1}c\hat{\theta}_n & -s\hat{\alpha}_{n-1} \\ s\hat{\alpha}_{n-1}s\hat{\theta}_n & s\hat{\alpha}_{n-1}c\hat{\theta}_n & c\hat{\alpha}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-205)$$

O si la longitud del eslabón esta sobre el eje Y y la articulación al extremo próximo, entonces:

$$\hat{T}_{YZ} = \hat{Y}\hat{Z} = \begin{bmatrix} c\hat{\alpha}_n c\hat{\theta}_n & -s\hat{\theta}_n & s\hat{\alpha}_n c\hat{\theta}_n \\ c\hat{\alpha}_n s\hat{\theta}_n & c\hat{\theta}_n & s\hat{\alpha}_n s\hat{\theta}_n \\ -s\hat{\alpha}_{n-1} & 0 & c\hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad (2-206)$$

Cualquiera de estas formulaciones se puede usar propiamente para deducir como están situados los eslabones de un mecanismo unos con respecto a otros. Las ecuaciones resultantes parecerán diferentes y por lo tanto, es importante entender a qué valores de los parámetros y variables se refieren.

# CAPÍTULO 3

## ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO



A lo largo de este capítulo se presenta la primera parte del análisis cinemático de los robots manipuladores, se documentan los conceptos y procesos cinemáticos necesarios para desarrollar el análisis de desplazamiento y la aplicación de estos en la metodología de los números duales, demostrando las ventajas que este método ofrece al simplificar y precisar los resultados.

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Cinemática se refiere al estudio del movimiento sin considerar las fuerzas que lo producen, por tanto, se considera en el análisis cinemático de un manipulador robótico tanto el posicionamiento estático como las variaciones en el tiempo de las posiciones y orientaciones; es decir las velocidades.

De esta forma se puede determinar que el estudio cinemático de un manipulador robótico se conforma de los análisis de desplazamiento y velocidad. En este capítulo el tema a abordar es el análisis de desplazamiento.

Una cuestión de suma importancia dentro del ámbito de la Robótica es la de determinar de forma correcta y lo más exacta posible las posiciones y orientaciones de los objetos en el espacio, ya que es necesario considerar estos aspectos en el modelado y control de los manipuladores.

Los manipuladores robóticos tienen su estructura basada en cadenas cinemáticas, estas se clasifican de manera general en cadenas abiertas y cerradas. Las cadenas cerradas son las que conforman la estructura de los mecanismos como el eslabonamiento de cuatro barras y las cadenas abiertas se aplican a la estructura de los manipuladores robóticos.

Se comienza por presentar análisis correspondientes a cadenas cinemáticas cerradas con la finalidad de desarrollar de forma más profunda los principios cinemáticos y de los números duales, la mayoría de los análisis de cadena cinemática cerrada desarrollados en este capítulo corresponden al eslabonamiento de cuatro barras aunque los procedimientos son aplicables también para eslabonamientos más complejos.

Finalmente se aplican los principios cinemáticos y de la metodología de los números duales a las cadenas cinemáticas abiertas a fin de realizar el análisis de desplazamiento para robots manipuladores.

### 3.2 ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO CONVENCIONAL

En este apartado se estudiará los procedimientos cinemáticos que se deben desarrollar para realizar el análisis de desplazamiento. Se aborda primero el mecanismo de cuatro barras ya que aunque no es una estructura propia de un manipulador robótico su estudio proporciona una visión completa del procedimiento de análisis de desplazamiento y en base a este se desarrolla el proceso para analizar los mecanismos de cadena abierta que corresponden a los robots manipuladores.

#### 3.2.1 Análisis de desplazamiento en el mecanismo de cuatro barras por el método gráfico

Aplicando la ecuación de Gruebler se encontró que el mecanismo de cuatro barras tiene solo un grado de libertad lo que permite que pueda ser analizado gráficamente respecto a desplazamientos relativos sin gran dificultad. Este método consiste en restringir los eslabones a moverse sobre sus trayectorias respectivas y la exactitud depende de la similitud y escala precisa del dibujo con respecto al eslabonamiento.

Para este análisis gráfico lo único que se necesita son escuadras de dibujo y compás. La precisión de este método se ve afectada por anomalías en la exactitud del dibujo, por intersecciones planas de arcos y líneas y por intersecciones que quedan fuera del papel.

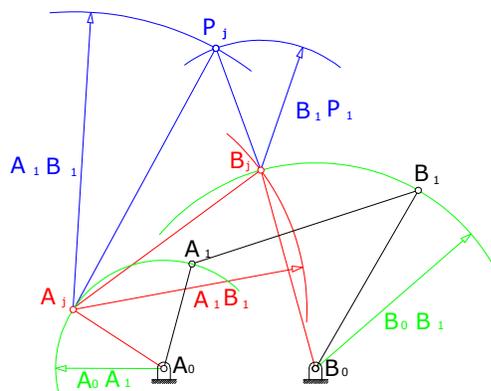


Figura 3.1 Análisis gráfico de desplazamientos del mecanismo de cuatro barras

En la Figura 3.1, se pretende construir la posición  $j$ -ésima del mecanismo de cuatro barras generador de trayectoria  $A_0AB_0BP$ . La posición primera o de partida está marcada con el subíndice 1. Para construir la posición  $j$ -ésima se procede de la siguiente manera:

- 1) Se dibujan arcos alrededor de  $A_0$  con radio  $A_0A_1$  y alrededor de  $B_0$  con radio  $B_0B_1$ . Éstas son las trayectorias de las juntas A y B respectivamente.
- 2) Se dibuja la posición  $j$ -ésima del eslabón de entrada  $A_0A_j$ .
- 3) Con radio  $A_1B_1$  se dibuja un arco alrededor de  $A_1$  que corte la trayectoria de B. Y este punto es  $B_j$ .
- 4) Se construye el punto  $P_j$  por la intersección del arco de radio  $B_1P_1$  con centro en  $B_j$ , con el arco de radio  $A_1P_1$  con centro en  $A_j$  (Erdman&Sandor, 1998).

### **3.2.2 Análisis de desplazamiento en el mecanismo de cuatro barras por el método analítico.**

Los mecanismos que tienen solo un grado de libertad, como el eslabonamiento de cuatro barras, al prescribirse un parámetro de posición, como el ángulo del eslabón de entrada, quedará completamente especificada la posición del resto del mecanismo cuando se seleccione una de las dos posibles inversiones geométricas, que son las configuraciones alternativas para una posición dada de la entrada.

Se presentará una expresión analítica que relacione las posiciones angulares absolutas de los eslabones de un mecanismo de cuatro barras. Esto proporciona mayor utilidad que el método gráfico cuando es necesario analizar varias posiciones o en el caso de mecanismos diferentes, pues las expresiones que se presentarán son fácilmente programables para su implementación en computadoras.

Cuando el análisis de desplazamiento usando ecuaciones de circuito resulta en ecuaciones no lineales, se requerirá de un método numérico para la resolución de estas. Es por esto que el procedimiento para el análisis de desplazamiento que se presenta en esta sección, desarrolla ecuaciones que dan lugar a una solución cerrada.

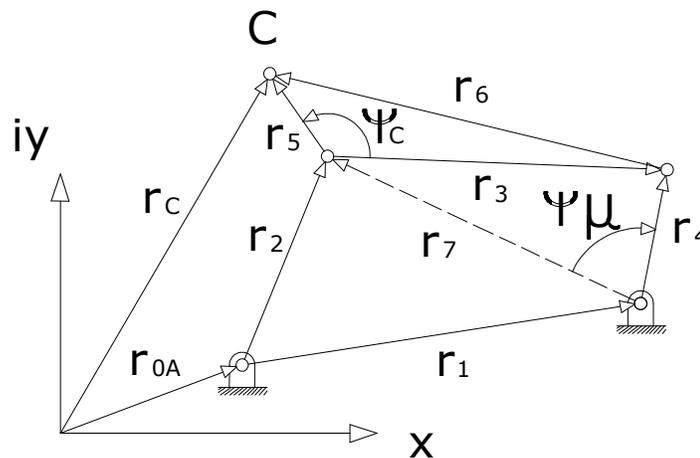


Figura 3.2 Mecanismo de cuatro barras

El mecanismo de cuatro barras mostrado en la Figura 3.2 puede ensamblarse en dos configuraciones diferentes, es decir, las inversiones geométricas, para una orientación dada del eslabón  $r_2$ . La Figura 3.3 muestra la segunda inversión geométrica para la misma posición del eslabón de entrada  $r_2$ .

La variable  $\mu$  se usará para denotar la inversión geométrica, a esta variable se le permite asumir sólo dos valores discretos, +1 y -1, donde +1 corresponde a una de las inversiones geométricas y -1 a la otra. Sea  $\Psi$  el valor absoluto del ángulo entre  $r_7$  y  $r_4$  con  $0 \leq \Psi < \pi$ . El ángulo con signo entre  $r_7$  y  $r_4$  se define entonces como  $\mu\Psi$ . Por lo tanto para una rotación horaria de  $r_7$  a  $r_4$ , como se muestra en la Figura 3.2.

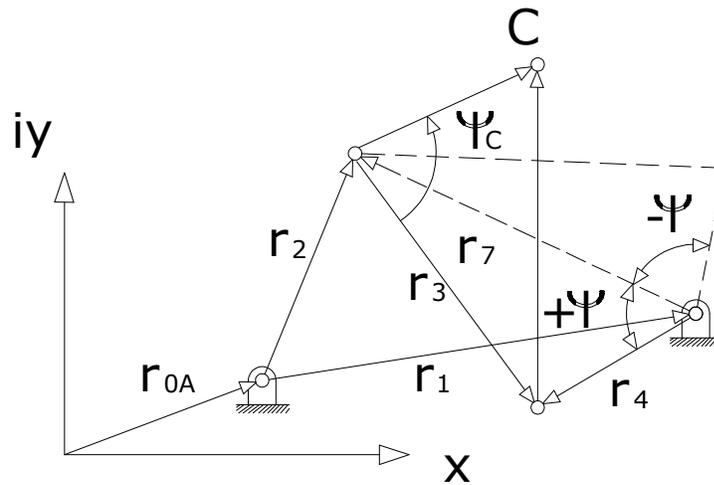


Figura 3.3 Segunda inversión geométrica (primera inversión mostrada con línea discontinua)

El siguiente ejemplo presenta un método analítico para determinar la inversión geométrica del eslabonamiento de cuatro barras de la Figura 3.2 dadas las posiciones iniciales del eslabón de entrada  $r_2$  y del seguidor  $r_3$ . (Erdman&Sandor, 1998).

Supóngase que estando determinadas las longitudes y orientaciones de los eslabones  $r_{0A}$ ,  $r_1$ , las longitudes de los eslabones:  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $r_5$  y  $\Psi_C$ ; y las posiciones iniciales  $r_2$  y  $r_4$ , encontrar  $\mu$ .

1) Primero se calcula el vector  $r_7$

$$r_7 = r_2 - r_1$$

2) Después se ángulo entre  $r_7$  y  $r_4$

$$\mu\Psi = \arg(r_4) - \arg(r_7)$$

3) Convertir  $\mu\Psi$  de manera que  $-\pi < \mu\Psi \leq \pi$

4) Si  $\mu\Psi > 0$ , entonces  $\mu=+1$

Si  $\mu\Psi < 0$ , entonces  $\mu=-1$

El símbolo  $\mu$  indica el ángulo del vector medido siempre en sentido levógiro desde el eje x positivo.

### 3.2.3 Análisis de desplazamiento de manipuladores robóticos.

Para realizar análisis en manipuladores robóticos se recurre al uso de modelos geométricos y cinemáticos de los robots. Estos modelos se emplean tanto para la simulación como para el control. Los modelos se basan en el empleo de las transformaciones entre sistemas de referencia.

*Relaciones entre sistemas de referencia.*- En la Figura 3.4 se ilustra una aplicación robótica general en la que se involucra un robot móvil consistente en un vehículo robótico dotado de un manipulador. A continuación se estudiará la relación entre los diferentes sistemas de referencia.

El sistema de referencia  $\{V\}$  es el asociado al vehículo y el  $\{B\}$  el asociado a la base del manipulador. Normalmente no existirá ningún movimiento entre ellos, por lo que solo se utilizará el sistema  $\{B\}$  que se relaciona con el sistema  $\{V\}$  empleando una transformación constante.

El manipulador está definido por una cadena cinemática en cuyo extremo existe una articulación estilo muñeca con sistema de referencia  $\{M\}$ .

Otro sistema asociado al manipulador es el  $\{H\}$ , correspondiente a la herramienta que soporta la muñeca del manipulador. Este sistema se define, con respecto al de la muñeca  $\{M\}$ , dependiendo de las características de la herramienta y de la forma de sujeción.

Por otro lado, se tienen los sistemas de referencia asociados a la tarea u objeto que se pretende manipular, así, puede identificarse un sistema objetivo {O} que permite definir dónde debe colocar el robot la herramienta para realizar la tarea. Este sistema corresponde al objeto que se pretende manipular. Generalmente resulta conveniente definir {O} con respecto a un sistema {P} característico del puesto de trabajo, en el que se realiza la tarea. De esta forma, si se desea realizar la misma tarea en otro puesto de trabajo basta con modificar {P}.

A su vez, el sistema característico del puesto de trabajo está relacionado con respecto al robot mediante una transformación  ${}^B_P T$ .

Al final del movimiento, {H} debe coincidir con {O}.

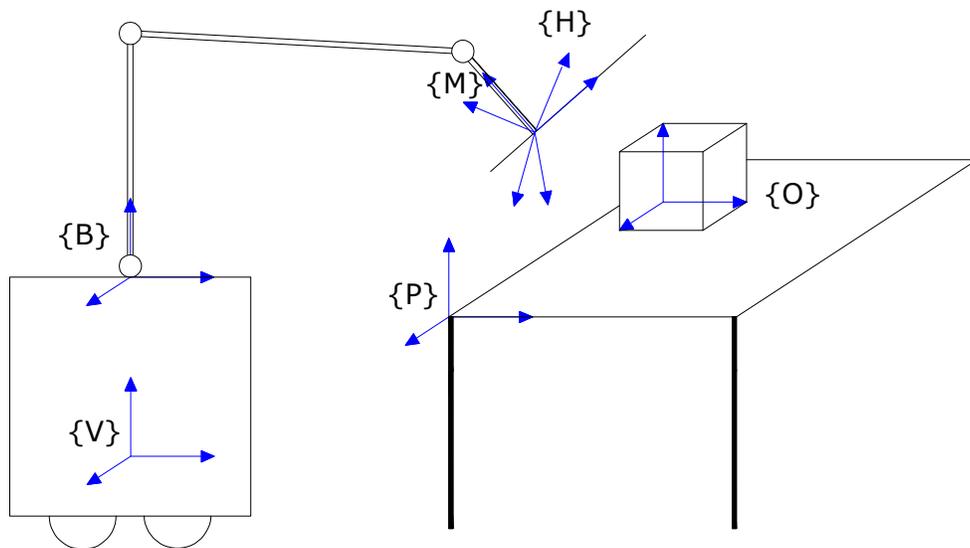


Figura 3.4 Asignación de sistemas de referencia.

Para posicionar la herramienta interesa calcular {H} relativo a {P}. Con este objetivo pueden efectuarse las transformaciones:

$${}^P_H T = {}^B_P T^{-1} \cdot {}^B_M T \cdot {}^M_H T \quad (3-1)$$

Esta ecuación permite definir un modelo generalizado del robot, a partir del cual es posible calcular dónde está la herramienta que lleva el manipulador, con respecto a un sistema de referencia de la estación de trabajo.

La transformación que involucra la cadena cinemática formada por las articulaciones del manipulador es  ${}^B_M T$ . En su formulación se emplean las ecuaciones cinemáticas de los enlaces del manipulador.

Si los sistemas de referencia de las articulaciones son  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ , ..... ,  $\{n\}$ , el sistema de referencia  $\{B\}$  coincide con el  $\{0\}$  y el  $\{M\}$  con el  $\{n\}$ . Por lo tanto, el sistema de referencia  $\{M\}$  se define con respecto a la base mediante una transformación:

$$\{M\} = {}^B_M T = {}^0_n T \quad (3-2)$$

Esta transformación se obtiene mediante las ecuaciones cinemáticas del manipulador. Más adelante se estudiará con detalle la obtención de esta transformación que relaciona el espacio de las variables articulares, con el espacio cartesiano en el que se define  $\{M\}$ . (Ollero, 2001)

*Modelo directo del manipulador.*- El modelo directo permite obtener la posición y orientación del efector final del robot, en función de las variables de las articulaciones.

El modelo directo viene dado por una función que permite expresar la posición y orientación del sistema de referencia objetivo en el espacio cartesiano (operacional o de la tarea)  $p$ , en términos de las variables articulares  $q$ :

$$p = \varphi(q) \quad (3-3)$$

Siendo  $\varphi$  un conjunto de funciones no lineales.

En la simulación del manipulador, el interés del modelo directo es que, conociendo las variables articulares (entradas), se desea saber dónde está el manipulador.

Para construir el modelo directo de un determinado robot existen dos alternativas típicas:

- Utilización de relaciones específicas del robot: Consiste en el empleo de las relaciones geométricas que pueden establecerse en el robot de que se trate.
- Método General: Se trata de emplear matrices de transformación que relacionan sistemas de referencia tal como se definieron en el capítulo anterior.

Para fines de este estudio se usará el método general.

Un robot articulado puede describirse definiendo cuatro magnitudes asociadas a cada articulación. Una de estas magnitudes corresponde a la variable de la articulación y las tres restantes corresponden a parámetros fijos para cada robot.

Estos parámetros permiten definir una representación de las relaciones de traslación y rotación entre los enlaces adyacentes. A esta relación se le denomina representación de Denavit-Hartenberg.

Así, la variable de una articulación  $i$  de rotación se representará mediante el ángulo  $\theta_i$  y la de una prismática mediante el desplazamiento  $d_i$ . Los otros dos parámetros de la articulación son la distancia  $a_{i-1}$  entre el eje de la articulación  $i - 1$  y el eje de la articulación  $i$ , medida sobre la línea perpendicular común, y el ángulo  $\alpha_{i-1}$  entre estos dos ejes (ángulo entre las proyecciones de los dos ejes en un plano cuya normal es la perpendicular común), medido como rotación alrededor de la

perpendicular común hasta hacer coincidir las direcciones de los ejes. Cuando el eje  $i - 1$  y el  $i$  se interceptan, el valor del parámetro  $a_{i-1}$  es cero.

Las cadenas cinemáticas se describirán indicando los cuatro parámetros de Denavit-Hartenberg de las articulaciones. En la primera articulación de la cadena, el valor de los parámetros  $a_0, \alpha_0$ , es arbitrario y se toma como cero. Si la articulación es de rotación, el parámetro  $d_i$  correspondiente se toma también como cero. Si la articulación es prismática, el parámetro  $\theta_i$  se hace igual a cero.

Los sistemas de referencia se asignan haciendo coincidir uno de los ejes del sistema de coordenadas, usualmente el  $\hat{Z}_i$ , con el eje de la articulación. El origen de  $\{i\}$  se escoge en el punto en el que la línea sobre la que se define  $a_i$  intercepta el eje de la articulación  $i$ . El eje  $\hat{X}_i$  se elige en la dirección de la perpendicular común entre el eje de la articulación y la siguiente. Para elegir el eje  $\hat{Y}_i$  se sigue la regla de la mano derecha.

De esta forma  $a_i$  y  $\alpha_i$  resultan ser respectivamente la distancia desde  $\hat{Z}_i$  hasta  $\hat{Z}_{i+1}$  y el ángulo entre estos dos ejes medida sobre el eje  $\hat{X}_i$ . El signo de  $\alpha_i$  será positivo si al llevar  $\hat{Z}_i$  sobre  $\hat{Z}_{i+1}$  por el camino más corto, el sentido que resulte de aplicar la regla de la mano derecha es el mismo que el del vector  $\hat{X}_i$ . Asimismo,  $d_i$  y  $\theta_i$  son respectivamente, la distancia desde  $\hat{X}_{i-1}$  hasta  $\hat{X}_i$  y el ángulo entre estos dos ejes, medidos sobre el eje  $\hat{Z}_i$ . El signo de  $\theta_i$  será positivo si al llevar  $\hat{X}_{i-1}$  sobre  $\hat{X}_i$  por el camino más corto, el sentido que resulte de aplicar la regla de la mano derecha es el mismo que el del vector  $\hat{Z}_i$ .

El sistema de referencia  $\{0\}$  se elige de forma que  $\hat{Z}_0$  coincida con  $\hat{Z}_1$  cumpliéndose siempre que  $a_0 = \alpha_0 = 0$ . Cuando la última articulación es de rotación, el sistema de referencia  $\{n\}$  se elige con la dirección de  $\hat{X}_n$  alineada con  $\hat{X}_{n-1}$  cuando  $\theta_n = 0$ . Si  $\{n\}$  es prismática, su origen se elige en la intersección entre su eje y  $\hat{X}_{n-1}$  cuando  $d_n = 0$ .

La elección de los sistemas de referencia no es única. Existen variantes según se tome el sentido del eje  $\hat{Z}_i$ , o bien en situaciones tales como la que se presenta cuando interceptan dos ejes consecutivos de articulaciones  $\hat{Z}_i$  y  $\hat{Z}_{i+1}$  ( $a_i = 0$ ) y puede escogerse el signo de  $\alpha_i$  en uno u otro sentido de la normal al plano formado por  $\hat{Z}_i$  y  $\hat{Z}_{i+1}$ .

En el modelado de manipuladores es necesario representar  $\{i\}$  con respecto a  $\{i-1\}$ -, cada transformación puede definirse según tres parámetros y una variable de la articulación. Existe también una transformación compuesta por cuatro transformaciones elementales, tal como se ilustra en la Figura 3.5.

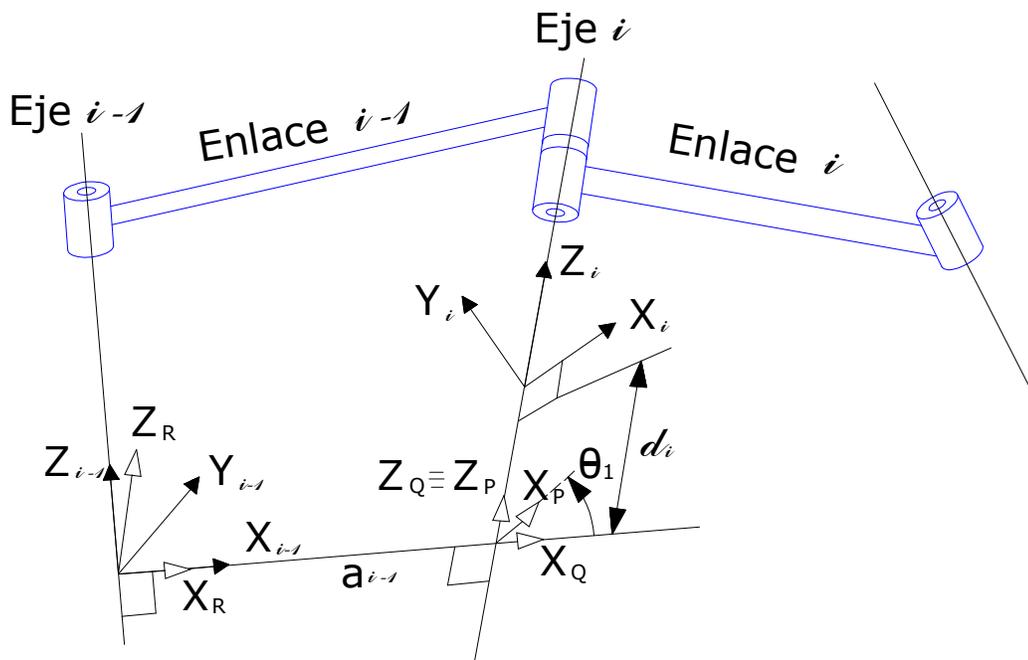


Figura 3.5 Asignación de cuadros de referencia a articulaciones consecutivas.

Si se supone que entre la localización inicial  $\{i-1\}$  y la final  $\{i\}$  existen tres localizaciones intermedias P, Q y R (figura 3.5), se tendrá

$${}^{i-1}_i T = Rot(\hat{X}_{i-1}, \alpha_{i-1})Tras(\hat{X}_{i-1}, a_{i-1})Rot(\hat{Z}_i, \theta_i)Tras(\hat{Z}_i, d_i) \quad (3-4)$$

Si se componen estas transformaciones aplicando las matrices de una transformación elemental para las rotaciones y las traslaciones, se obtiene la siguiente forma general asociada a la articulación:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_1 \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

Para construir el modelo directo de un robot con  $n$  articulaciones es necesario definir un sistema de referencia solidario a cada segmento y elegir sus parámetros. A partir de las matrices de cada articulación puede obtenerse la transformación compuesta  ${}^0T_n$  que relaciona la localización  $\{n\}$  con la  $\{0\}$ . Estas transformaciones será función de las  $n$  articulaciones:  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , puede calcularse la posición y orientación cartesiana de la ultima articulación como:

$$P = \varphi(q) = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n = {}^0T_n \quad (3-6)$$

La aplicación de estas ecuaciones permite estimar la posición y orientación del efector final del manipulador, conociendo los valores de las variables articulares.

Consideraciones en el algoritmo de Denavit-Hartenberg:

- 1) Todas las articulaciones deben ser de un grado de libertad.
- 2) Los eslabones son enumerados empezando desde la base y la base corresponde al eslabón 0.

- 3) Enumerar todas las articulaciones.
- 4) Determinar el ángulo entre los ejes de acción.
- 5) Determinar la distancia  $d_1$
- 6) Encontrar la distancia entre los ejes comunes de su perpendicular.
- 7) Encontrar  $\theta$  que es el ángulo de interconexión.

Procedimiento para encontrar la cinemática directa de un robot con los parámetros de Denavit- Hartenberg:

- 1) Numerar los eslabones comenzando con 0 para la base y hasta  $n$  del elemento final.
- 2) Numerar cada articulación comenzando por 1 que le corresponde al 1er. Grado de libertad.
- 3) Localizar los ejes de acción de cada articulación (articulación rotativa sobre el eje de giro y articulación prismática en el eje a lo largo del desplazamiento).
- 4) Para cada eje de acción de la articulación, situar el eje  $Z_i$  sobre el eje de la articulación  $i$ .
- 5) Situar el origen del marco de la base en cualquier punto del eje  $Z_0$ .

- 6) Para cada eje de acción, situar el marco  $\{M_i\}$  solidario al eslabón  $i$ , con origen en la intersección del eje  $Z_i$ , con la perpendicular común  $a_i$ , si se cortan ambos ejes, se sitúa el marco  $\{M_i\}$  en el punto de corte perpendicular a ellos. Si fueran paralelos, el marco  $\{M_i\}$  se situará en la articulación  $i + 1$ .
- 7) Situar el eje  $X_i$  en la línea  $a_i$ .
- 8) Situar el eje  $Y_i$  según la regla de la mano izquierda.
- 9) Situar el marco  $\{M_n\}$  en el extremo del robot, de modo que  $Z_n$  coincida con la dirección  $Z_{n-1}$  y  $X_n$  sea perpendicular común  $Z_{n-1}$  y  $Z_n$ .
- 10) Obtener los parámetros de Denavit-Hartenberg  $\alpha_{i-1}, a_{i-1}, d_i, \theta_i$ .
- 11) Obtener las matrices de transformación homogénea  ${}^{i-1}_i T$ .
- 12) Obtener la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema de la base con el extremo del robot.
- 13) La matriz  ${}^0_n T$  define la cinemática del manipulador, es decir, la orientación y posición del elemento final, referido a la base en función del conocimiento de la posición y orientación de las  $n$  articulaciones que le anteceden.

Para el manipulador que se muestra en la Figura 3.6. a fin de aplicar los conceptos y procedimientos presentados con anterioridad, se pide encontrar la matriz que define el modelo directo del manipulador

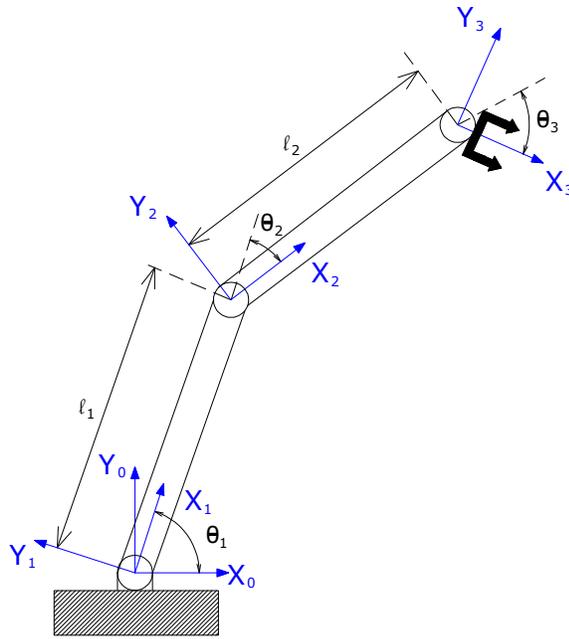


Figura 3. 6 Manipulador con tres articulaciones de rotación

La asignación de los marcos de referencia se muestra en la Figura 3.6. Los ejes  $\hat{Z}_0, \hat{Z}_1$  y  $\hat{Z}_2$  de los marcos de referencia  $\{0\}$ ,  $\{1\}$  y  $\{2\}$  son paralelos y en la misma dirección que los ejes de las tres articulaciones apuntando hacia afuera, entonces los parámetros  $d_i$  y los  $\alpha_i$  son todos nulos. En la tabla 3.1 se indican los parámetros de Denavit-Hartenberg que resultan de la asignación de los sistemas de referencia que se muestran en la Figura 3.6. Véase que las variables  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  tienen signos. La configuración que se muestra en la Figura 3.6,  $\theta_1$  es positiva y  $\theta_2$  y  $\theta_3$  son negativas.

Tabla 3.1 Parámetros de Denavit-Hartenberg del manipulador con tres articulaciones de rotación

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\theta_i$	$d_i$
1	0	0	$\theta_1$	0
2	0	$l_1$	$\theta_2$	0
3	0	$l_2$	$\theta_3$	0

Sea  $c\theta_1 = \cos \theta_1$  y  $s\theta_1 = \sin \theta_1$ . Las matrices de transformación de las tres articulaciones son:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

Por tanto, el modelo directo viene dado por:

$${}^0_iT = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_{123} & -s\theta_{123} & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12} \\ s\theta_{123} & c\theta_{123} & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

### 3.3 METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO CON NÚMEROS DUALES

En esta sección se estudiará los procedimientos presentados en la sección anterior pero en lugar de trabajar con números tradicionales se ocupan números duales, al igual que en el apartado precedente y por las mismas razones se aborda primero el mecanismo de cuatro barras.

### 3.3.1 Ventajas de la aplicación de la metodología de los números duales en los análisis cinemáticos.

Los análisis de desplazamiento con números duales permiten obtener los resultados de una forma más directa que con los métodos analíticos y presentando mayor precisión, con el método tradicional se consigue el modelo directo del manipulador a partir de una matriz de 4x4, aplicando la metodología de los números duales la matriz que define el modelo directo del manipulador es de 3x3.

### 3.3.2 Condición de cadena cerrada

Supóngase que un mecanismo tiene cuatro eslabones, los cuales pueden ser representados por la modelación de matrices articulación-eslabón  ${}^1_2\hat{M}$ ,  ${}^2_3\hat{M}$ ,  ${}^3_4\hat{M}$ ,  ${}^4_1\hat{M}$ . Si la coordenada de transformación esta hecha del eslabón de entrada al eslabón acoplador, siguiendo al eslabón de salida, después al eslabón tierra y finalmente al eslabón de entrada, el resultado total de las transformaciones es un regreso al sistema de coordenadas inicial. Esto es lo que se conoce como condición de cadena cerrada que se expresa matemáticamente como sigue:

$${}^1_2\hat{M}{}^2_3\hat{M}{}^3_4\hat{M}{}^4_1\hat{M} = \hat{I} \quad (3-11)$$

Donde  $\hat{I}$  representa a la matriz de identidad dual. Las ecuaciones análogas pueden ser escritas para el desarrollo de mecanismos de cadena cerrada de más de cuatro eslabones. Entonces, los desplazamientos desconocidos de los mecanismos pueden ser encontrados mediante la solución de esta ecuación.

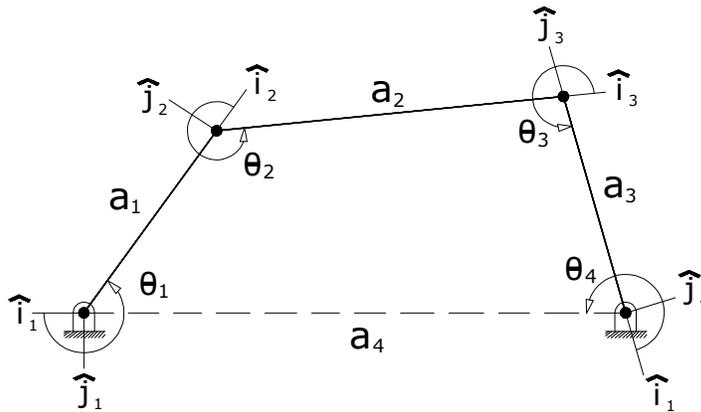


Figura 3.7 Desplazamiento de un mecanismo planar de cuatro barras.

### 3.3.3 Eslabonamiento de cuatro barras

Se considera un mecanismo planar de cuatro barras, como el de la Figura 3.7, el cual es un mecanismo de cuatro eslabones que actúa dentro de un plano, conectado por articulaciones de rotación, este es un mecanismo de un grado de libertad y la variable de la entrada es la orientación del eslabón manivela de entrada, rotación  $\theta_1$ . El eslabón manivela de la entrada tiene una longitud  $a_1$ , el eslabón acoplador tiene una longitud  $a_2$ , el eslabón manivela de salida tiene una longitud  $a_3$  y el eslabón fijo tiene una longitud  $a_4$ . Se debe determinar la rotación de la salida  $\theta_4$  y las rotaciones intermedias  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .

Una forma organizada con la cual se pueden analizar los desplazamientos en este mecanismo, es estableciendo una tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, con las transformaciones articulación-eslabón, substituyendo valores dentro de la ecuación de la condición de cadena cerrada y manipulando la expresión para obtener los resultados requeridos.

Tabla 3.2 Parámetros de Denavit Hartenberg mecanismo planar de cuatro barras

$i$	Nombre	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$
1	Entrada	$\theta_1$	0	$0^\circ$	$a_1$
2	Acoplador	$\theta_2$	0	$0^\circ$	$a_2$
3	Salida	$\theta_3$	0	$0^\circ$	$a_3$
4	Fijo	$\theta_4$	0	$0^\circ$	$a_4$

Se puede hacer una tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg para este mecanismo, considerando las rotaciones en los eslabones y las longitudes, así como los movimientos permitidos en las articulaciones. En la Tabla 3.2 se puede notar que las rotaciones de los eslabones  $\alpha_i$  tienen todas valor cero, puesto que los ejes de las articulaciones son paralelos unos con otros. Los desplazamientos de las articulaciones  $d_i$  también tienen todos valor cero, a causa de que este mecanismo es considerado planar.

Para los valores particulares que se muestran en la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, se puede observar lo siguiente:

$$s\hat{\theta}_n = s\theta_n + \varepsilon d_n c\theta_n \rightarrow s\hat{\theta}_n = s\theta_n$$

$$c\hat{\theta}_n = c\theta_n - \varepsilon d_n s\theta_n \rightarrow c\hat{\theta}_n = c\theta_n$$

$$s\hat{\alpha}_n = s\alpha_n + \varepsilon a_n c\alpha_n \rightarrow s\hat{\alpha}_n = \varepsilon a_n$$

$$c\hat{\alpha}_n = c\alpha_n - \varepsilon a_n s\alpha_n \rightarrow c\hat{\alpha}_n = 1$$

Dentro de la matriz de transformación articulación-eslabón. se substituyen los resultados para obtener:

$${}_{n+1}^n\hat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_n & -s\theta_n & \varepsilon a_n s\theta_n \\ s\theta_n & c\theta_n & -\varepsilon a_n c\theta_n \\ 0 & \varepsilon a_n & 1 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

Estas cuatro matrices se substituyen dentro de la ecuación de condición de cadena cerrada (3-11).

$${}^1\hat{M}_2^2\hat{M}_3^3\hat{M}_4^4\hat{M}_1^1\hat{M} = \hat{I} \quad (3-11)$$

Se realiza una expansión de esta ecuación para identificar los elementos necesarios a fin de obtener expresiones para las rotaciones desconocidas  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$ . En la práctica, es conveniente primero manipular esta ecuación para que las rotaciones intermedias queden de un lado y las de entrada y salida queden del otro lado.

$${}^2\hat{M}_3^3\hat{M}_4^4\hat{M}_1^1\hat{M} = {}^1\hat{M}^{-1} \quad (3-13)$$

$${}^2\hat{M}_3^3\hat{M}_4^4\hat{M} = {}^1\hat{M}^{-1}{}^4\hat{M}_1^1\hat{M}^{-1} \quad (3-14)$$

$${}^2\hat{M}_3^3\hat{M}_4^4\hat{M} = {}^1\hat{M}^T{}^4\hat{M}_1^1\hat{M}^T \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & \varepsilon a_2 s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & -\varepsilon a_2 c\theta_2 \\ 0 & \varepsilon a_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & \varepsilon a_3 s\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & -\varepsilon a_3 c\theta_3 \\ 0 & \varepsilon a_3 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & \varepsilon a_1 \\ \varepsilon a_1 s\theta_1 & -\varepsilon a_1 c\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_4 & s\theta_4 & 0 \\ -s\theta_4 & c\theta_4 & \varepsilon a_4 \\ \varepsilon a_4 s\theta_4 & -\varepsilon a_4 c\theta_4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_2 s\theta_3 & -c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_2 c\theta_3 & \varepsilon a_3 c\theta_2 s\theta_3 + \varepsilon a_3 s\theta_2 c\theta_3 + \varepsilon a_2 s\theta_2 \\ s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_2 c\theta_3 & \varepsilon a_3 s\theta_2 s\theta_3 - \varepsilon a_3 c\theta_2 c\theta_3 - \varepsilon a_2 c\theta_2 \\ \varepsilon a_2 s\theta_3 & \varepsilon a_2 c\theta_3 + \varepsilon a_3 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_4 - s\theta_1 s\theta_4 & c\theta_1 s\theta_4 + s\theta_1 c\theta_4 & \varepsilon a_4 s\theta_1 \\ -s\theta_1 c\theta_4 - c\theta_1 s\theta_4 & -s\theta_1 s\theta_4 - c\theta_1 c\theta_4 & \varepsilon a_4 c\theta_1 \\ \varepsilon a_1 s\theta_1 c\theta_4 + \varepsilon a_1 c\theta_1 s\theta_4 + \varepsilon a_4 s\theta_4 & \varepsilon a_1 s\theta_1 s\theta_4 - \varepsilon a_1 c\theta_1 c\theta_4 - \varepsilon a_4 c\theta_4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-17)$$

Igualando los elementos 1-3:

$$\varepsilon a_2 s\theta_3 = \varepsilon a_1 s\theta_1 c\theta_4 + \varepsilon a_1 c\theta_1 s\theta_4 + \varepsilon a_4 s\theta_4 \quad (3-18)$$

Los cuales pueden ser manipulados para obtener

$$s\theta_3 = \frac{a_1(s\theta_1 c\theta_4 + c\theta_1 s\theta_4) + a_4 s\theta_4}{a_2} \quad (3-19)$$

Al igualar los elementos 2-3:

$$\varepsilon a_2 c\theta_3 + \varepsilon a_3 = \varepsilon a_1 s\theta_1 s\theta_4 - \varepsilon a_1 c\theta_1 c\theta_4 - \varepsilon a_4 c\theta_4 \quad (3-20)$$

Y se puede escribir de la siguiente manera:

$$c\theta_3 = \frac{a_1(s\theta_1 s\theta_4 - c\theta_1 c\theta_4) - a_4 c\theta_4 - \varepsilon a_3}{a_2} \quad (3-21)$$

Cuadrando ambos lados de las ecuaciones (3-19) y (3-20) para el seno y coseno del ángulo intermedio  $\theta_3$  y se simplifica:

$$-a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - 2a_1 a_4 c\theta_4 = 2a_1 a_3 c(\theta_1 + \theta_4) \quad (3-22)$$

Este resultado es la ecuación de Freudenstein. Las diferencias en la definición del ángulo deben ser consideradas cuando se compara con otras formulaciones de la ecuación de Freudenstein.

### 3.3.4 Eslabonamiento de cuatro barras esférico.

Un mecanismo esférico es una vinculación espacial cuyas articulaciones tienen ejes que se interceptan en un punto en común. Por lo tanto, la distancia más corta entre los ejes de las articulaciones de cada eslabón se define como  $a_i = 0$ , para todas las  $i$ . Los eslabones pueden ser considerados como arcos flotando en la superficie de una esfera. La dimensión angular de cada eslabón es su ángulo de giro  $\alpha_i$ . Tal mecanismo se muestra en la Figura 3.8.

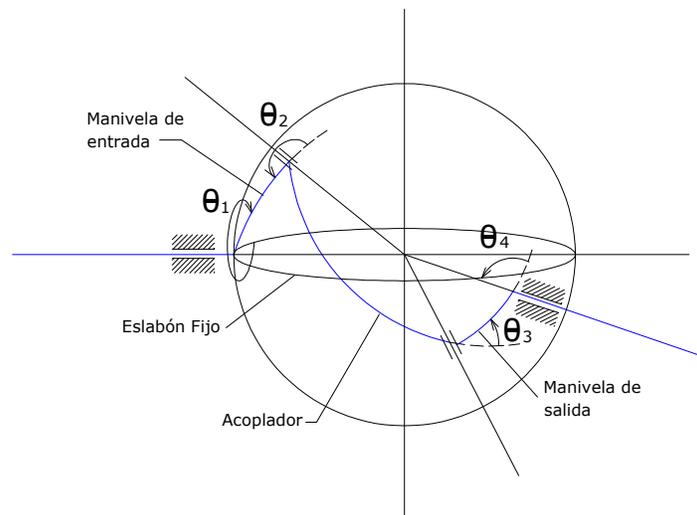


Figura 3.8 Desplazamientos de un mecanismo esférico de cuatro barras

Tabla 3.3 Parámetros de Denavit Hartenberg mecanismo esférico de cuatro barras

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$
1	$\theta_1$	0	$\alpha_1$	0
2	$\theta_2$	0	$\alpha_2$	0
3	$\theta_3$	0	$\alpha_3$	0
4	$\theta_4$	0	$\alpha_4$	0

Las articulaciones de un mecanismo esférico de cuatro barras son todas de revolución, por lo tanto los desplazamientos  $d_i=0$ , para todas las  $i$ .

Usando los valores que se presentan en la Tabla 3.3, la matriz articulación-eslabón fácilmente se puede escribir de la siguiente manera:

$${}_{i+1}^i\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

Las cuatro matrices del mecanismo que se representarán con la ecuación (3-23), se sustituyen dentro de la ecuación (3-11), que es la ecuación de cadena cerrada, para obtener el desplazamiento del eslabón de salida  $\theta_4$  y los desplazamientos de las articulaciones intermedias  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , la ecuación de condición de cadena cerrada se manipula de la siguiente forma:

$${}^2_3\widehat{M}^3_4\widehat{M} = {}^1_2\widehat{M}^T {}^4_1\widehat{M}^T \quad (3-24)$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_2 & -c\alpha_2 s\theta_2 & s\alpha_2 s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\alpha_2 c\theta_2 & -s\alpha_2 c\theta_2 \\ 0 & s\alpha_2 & c\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -c\alpha_3 s\theta_3 & s\alpha_3 s\theta_3 \\ s\theta_3 & c\alpha_3 c\theta_3 & -s\alpha_3 c\theta_3 \\ 0 & s\alpha_3 & c\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & s\alpha_1 \\ s\alpha_1 s\theta_1 & -s\alpha_1 c\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_4 & s\theta_4 & 0 \\ -s\theta_4 & c\theta_4 & s\alpha_4 \\ s\alpha_4 s\theta_4 & -s\alpha_4 c\theta_4 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 - c\alpha_2 s\theta_2 s\theta_3 & -c\theta_2 c\alpha_3 s\theta_3 - c\alpha_2 s\theta_2 c\alpha_3 c\theta_3 + s\alpha_2 s\theta_2 s\alpha_3 & c\theta_2 s\alpha_3 s\theta_3 + c\alpha_2 s\theta_2 s\alpha_3 c\theta_3 + s\alpha_2 s\theta_2 c\alpha_3 \\ s\theta_2 c\theta_3 + c\alpha_2 c\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_2 c\alpha_3 s\theta_3 + c\alpha_2 c\theta_2 c\alpha_3 c\theta_3 - s\alpha_2 c\theta_2 s\alpha_3 & s\theta_2 s\alpha_3 s\theta_3 - c\alpha_2 c\theta_2 s\alpha_3 c\theta_3 - s\alpha_2 c\theta_2 c\alpha_3 \\ s\alpha_2 s\theta_3 & c\alpha_3 c\theta_3 s\alpha_2 + c\alpha_2 s\alpha_3 & -s\alpha_3 c\theta_3 s\alpha_2 + c\alpha_2 c\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_4 - s\theta_1 s\theta_4 & c\theta_1 s\theta_4 + s\theta_1 c\theta_4 & s\alpha_4 s\theta_1 \\ -s\theta_1 c\theta_4 - c\theta_1 s\theta_4 + s\alpha_1 s\alpha_4 s\theta_4 & -s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4 - s\alpha_4 c\theta_4 s\alpha_1 & s\alpha_4 c\theta_1 s\alpha_1 \\ s\alpha_1 s\theta_1 c\theta_4 + s\alpha_1 c\theta_1 s\theta_4 + s\alpha_4 s\theta_4 & s\alpha_1 s\theta_1 s\theta_4 - s\alpha_1 c\theta_1 c\theta_4 - s\alpha_4 c\theta_4 & -s\alpha_1 c\theta_1 s\alpha_4 + 1 \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

Igualando los elementos 1-3:

$$s\alpha_2 s\theta_3 = s\alpha_1 s\theta_1 c\theta_4 + s\alpha_1 c\theta_1 s\theta_4 + s\alpha_4 s\theta_4 \quad (3-27)$$

Los cuales pueden ser manipulados para obtener:

$$s\theta_3 = \frac{s\alpha_1 (s\theta_1 c\theta_4 + c\theta_1 s\theta_4) + s\alpha_4 s\theta_4}{s\alpha_2} \quad (3-28)$$

Al igualar los elementos 2-3:

$$c\alpha_3 c\theta_3 s\alpha_2 + c\alpha_2 s\alpha_3 = s\alpha_1 s\theta_1 s\theta_4 - s\alpha_1 c\theta_1 c\theta_4 - s\alpha_4 c\theta_4 \quad (3-29)$$

Y se puede escribir de la siguiente manera:

$$(3-30)$$

$$c\theta_3 = \frac{s\alpha_1 s\theta_1 s\theta_4 - s\alpha_1 c\theta_1 c\theta_4 - s\alpha_4 c\theta_4 - c\alpha_2 s\alpha_3}{c\alpha_3 s\alpha_2}$$

### 3.3.5 Sistemas Robóticos (Mecanismos de cadena abierta)

Si se tiene un robot el cual desarrolla cierta operación sobre una pieza de trabajo, se desea determinar los desplazamientos de las articulaciones del robot.

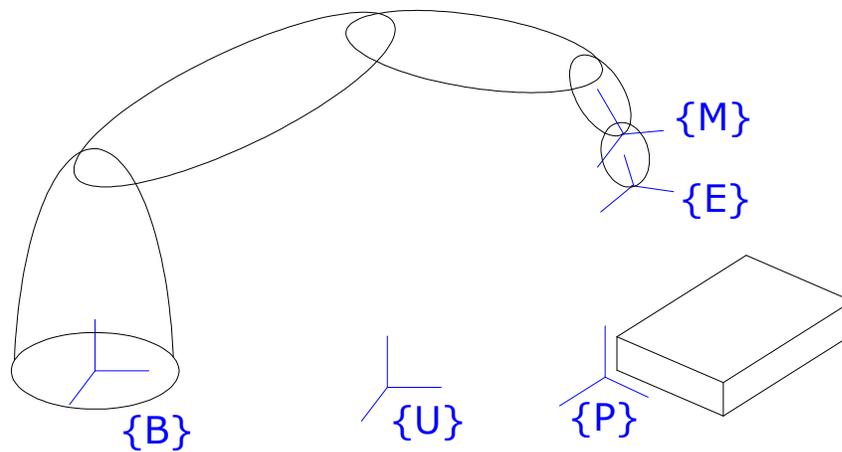


Figura 3.9 Marco Universal, marco de la base del robot, marco de la muñeca y marco del efector final.

En este sistema robótico, los marcos mostrados en la Figura 3.9, se refieren a:

{U} = Universo

{B} = Base del Robot

{M} = Muñeca

{E} = Efector Final

{P} = Pieza de Trabajo

Para un mecanismo de cadena abierta como un manipulador robótico, se puede crear una ecuación análoga a la ecuación de cadena cerrada, completando las partes faltantes de la cadena.

$${}^U\hat{T}_B {}^B\hat{T}_M {}^M\hat{T}_E {}^E\hat{T}_P {}^P\hat{T}_U = \hat{I} \quad (3-31)$$

Donde:

${}^U\hat{T}_B$  = Representa la situación del robot dentro del universo.

${}^B\hat{T}_M$  = Representa la configuración del robot y se debe obtener como el primer paso en la determinación de los desplazamientos de las articulaciones.

${}^M\hat{T}_E$  = Representa la situación de la punta de la herramienta relativa a la muñeca (depende de las herramientas).

${}^E\hat{T}_P$  = Representa la situación de la herramienta relativa a la pieza de trabajo (depende de la operación deseada).

${}^P\hat{T}_U$  = Representa la pieza de trabajo en el Universo.

La ecuación (3-31) puede reordenarse para obtener la transformación que debe ser determinada de la siguiente manera:

$${}^B\hat{T}_M = {}^B\hat{T}_U {}^U\hat{T}_P {}^P\hat{T}_E {}^E\hat{T}_M \quad (3-32)$$

El lado derecho de la ecuación (3-32) consiste de las dimensiones de los eslabones del robot y los desplazamientos de las articulaciones desconocidas, mientras que el

lado izquierdo es una constante que puede ser evaluada mediante un control de la localización de la muñeca.

Ahora, se analizará a detalle la matriz que especifica el marco de la muñeca:

$${}^B_M\hat{T} = [{}^B\hat{e} \quad {}^B\hat{o} \quad {}^B\hat{n}] \quad (3-33)$$

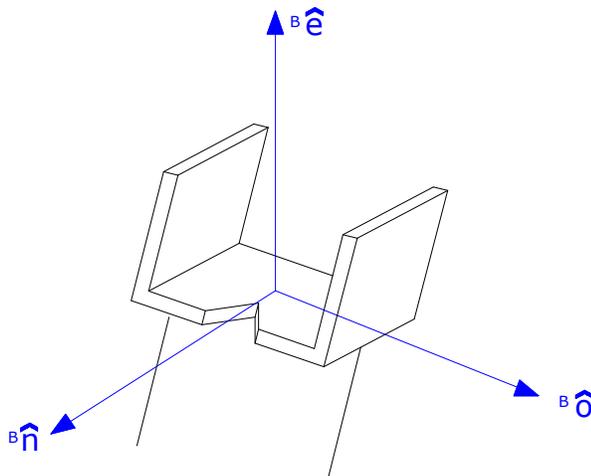


Figura 3.10 Vectores que definen el marco de la muñeca

Los componentes de los vectores unitarios, mostrados en la Figura 3.10, son:

$${}^R\hat{e} = \begin{bmatrix} {}^R e_x \\ {}^R e_y \\ {}^R e_z \end{bmatrix} = \text{Vector de enfoque ó dirección} \quad (3-34)$$

$${}^R\hat{o} = \begin{bmatrix} {}^R o_x \\ {}^R o_y \\ {}^R o_z \end{bmatrix} = \text{Vector de orientación} \quad (3-35)$$

$${}^R\hat{n} = \begin{bmatrix} {}^Rn_x \\ {}^Rn_y \\ {}^Rn_z \end{bmatrix} = \text{Vector normal} \quad (3-36)$$

Debido a que estos vectores forman un sistema de coordenadas, estos vectores están relacionados unos con otros entre sí, por lo tanto:

$${}^B\hat{n} \times {}^B\hat{o} = {}^B\hat{e} \quad (3-37)$$

$${}^B\hat{e} \times {}^B\hat{n} = {}^B\hat{o} \quad (3-38)$$

$${}^B\hat{o} \times {}^B\hat{e} = {}^B\hat{n} \quad (3-39)$$

Usando los conceptos de los vectores de dirección, orientación y normal, la matriz  ${}^B_M\hat{T}$  se puede construir fácilmente y puede usarse la ecuación (3-32) donde las otras matrices contienen las dimensiones y los desplazamientos de las articulaciones del robot.

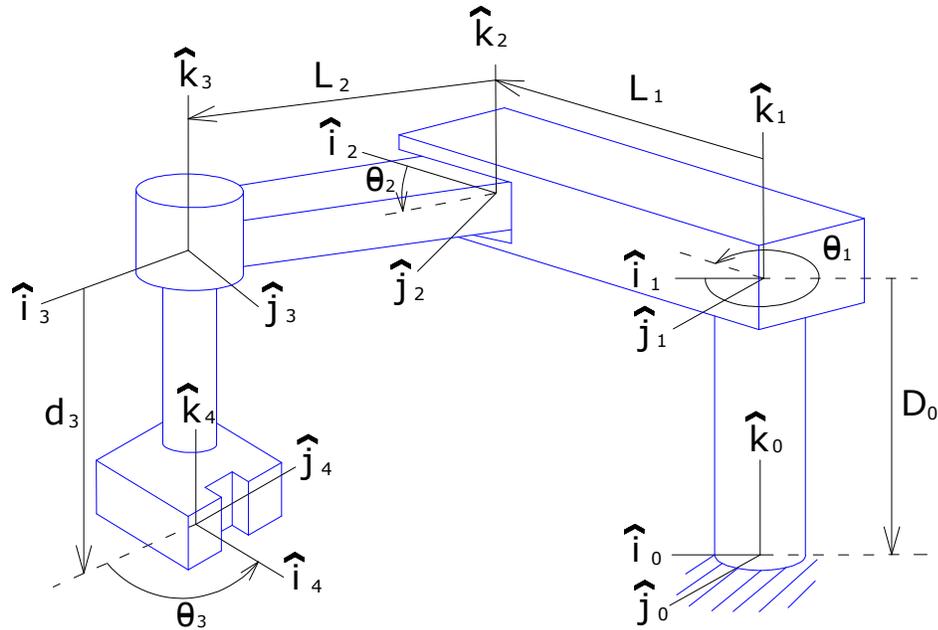


Figura 3.11 Sistema Robótico.

A continuación se analizan los desplazamientos del sistema robótico mostrado en la Figura 3.11. Se consideran los sistemas de referencia {3} y {4}, los ejes  $\hat{k}_3$  y  $\hat{k}_4$  son colineales, así que la longitud del eslabón  $a_4 = 0$ . El ángulo entre los ejes  $\hat{k}_3$  y  $\hat{k}_4$  es el giro  $\alpha_4 = 0$ . El desplazamiento de la articulación 3 es la longitud  $d_3$  (la dirección mostrada del desplazamiento es negativa). La rotación de la articulación 3 es el ángulo  $\theta_3$ .

Los parámetros de Denavit-Hartenberg para este sistema robótico se muestran en la Tabla 3.4:

Tabla 3.4 Parámetros de Denavit-Hartenberg para el sistema robótico

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$\theta_i$	$d_i$
0	0	0	0	$D_0$
1	0	$L_1$	$\theta_1$	0
2	0	$L_2$	$\theta_2$	0
3	0	0	$\theta_3$	$d_3$

Estos valores se pueden introducir dentro de la matriz de transformación:

$${}^0\widehat{M}_1^1\widehat{M}_2^2\widehat{M}_3^3\widehat{M}_4^4 = {}_M^B\widehat{T} = {}^0\widehat{M}_4 \quad (3-40)$$

=

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon D_0 & 0 \\ -\varepsilon D_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & \varepsilon L_1 s\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & -\varepsilon L_1 c\theta_1 \\ 0 & \varepsilon L_1 & 1 \end{bmatrix}$$

x

$$\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & \varepsilon L_2 s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & -\varepsilon L_2 c\theta_2 \\ 0 & \varepsilon L_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 - \varepsilon d_3 s\theta_3 & -s\theta_3 - \varepsilon d_3 c\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 + \varepsilon d_3 c\theta_3 & c\theta_3 - \varepsilon d_3 s\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

=

$$\begin{bmatrix} c\theta_{123} + \varepsilon(D_0 - d_3)s\theta_{123} & -s\theta_{123} + \varepsilon(D_0 - d_3)c\theta_{123} & \varepsilon(L_1 s\theta_1 + L_2 s\theta_{12}) \\ s\theta_{123} - \varepsilon(D_0 - d_3)c\theta_{123} & c\theta_{123} + \varepsilon(D_0 - d_3)s\theta_{123} & -\varepsilon(L_1 c\theta_1 - L_2 c\theta_{12}) \\ \varepsilon(L_2 s\theta_3 + L_1 s\theta_{23}) & \varepsilon(L_2 c\theta_3 - L_1 c\theta_{23}) & 1 \end{bmatrix} \quad (3-42)$$

Substituyendo los desplazamientos de las articulaciones se puede obtener la posición de la muñeca del sistema robótico, esta es una tarea simple llamada transformación directa.

### 3.4 APLICACIONES

En este módulo se realizará el análisis de desplazamiento para dos robots, el primero es un manipulador plano con tres articulaciones de rotación que ya se ha estudiado en el presente capítulo, el segundo es un manipulador de configuración cilíndrica que fue diseñado por la autora de esta tesis.

### 3.4.1 Manipulador plano con tres articulaciones de rotación.

Para realizar este análisis se toma el mismo robot que se usó en la sección 3.2.3 del presente capítulo, a fin de comparar ambos procedimientos y la exactitud de los resultados que se obtienen en ambos.

Procedimiento:

1) Asignación de los marcos de referencia:

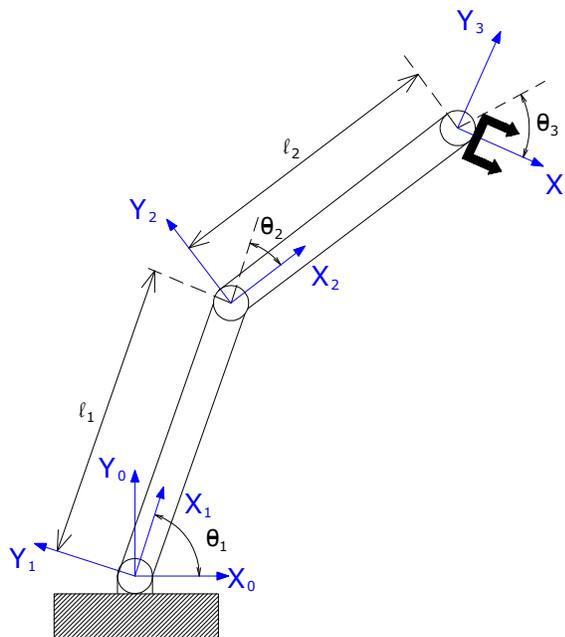


Figura 3. 6 Manipulador con tres articulaciones de rotación

2) Establecer parámetros de Denavit-Hartenberg:

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$\theta_i$	$d_i$
1	0	$l_1$	$\theta_1$	0
2	0	$l_2$	$\theta_2$	0
3	0	0	$\theta_3$	0

3) Obtener matrices de transformación:

La ecuación de cadena cinemática para este mecanismo, aplicando la condición de cadena cerrada, queda de la siguiente manera:

$${}^0\hat{M}_1{}^1\hat{M}_2{}^2\hat{M}_3{}^3\hat{M}_4 = \hat{I} \quad (3-43)$$

El sistema de coordenadas 0 es el mismo que el sistema de coordenadas 4, por lo tanto la matriz de transformación  ${}^3_0\hat{M}$  se obtiene de la ecuación (3-43):

$${}^3_0\hat{M} = {}^0_1\hat{M}_1{}^1_2\hat{M}_2{}^2_3\hat{M}_3{}^3_4\hat{M}_4 \quad (3-44)$$

La matriz de transformación para  ${}_{n+1}^n\hat{M}$ , tomada del capítulo 2 ecuación (2-196) es:

$${}_{n+1}^n\hat{M} = \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -c\hat{\alpha}_n s\hat{\theta}_n & s\hat{\alpha}_n s\hat{\theta}_n \\ s\hat{\theta}_n & c\hat{\alpha}_n c\hat{\theta}_n & s\hat{\alpha}_n c\hat{\theta}_n \\ 0 & s\hat{\alpha}_n & c\hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

Para los valores particulares que se muestran en la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, se puede observar lo siguiente:

$$s\hat{\theta}_n = s\theta_n + \varepsilon d_n c\theta_n \rightarrow s\hat{\theta}_n = s\theta_n$$

$$c\hat{\theta}_n = c\theta_n - \varepsilon d_n s\theta_n \rightarrow c\hat{\theta}_n = c\theta_n$$

$$s\hat{\alpha}_n = s\alpha_n + \varepsilon a_n c\alpha_n \rightarrow s\hat{\alpha}_n = \varepsilon a_n$$

$$c\hat{\alpha}_n = c\alpha_n - \varepsilon a_n s\alpha_n \rightarrow c\hat{\alpha}_n = 1$$

Se substituyen en la matriz los valores de los parámetros de Denavit-Hartenberg:

$${}^0_1\widehat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

$${}^1_2\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & \varepsilon l_1 s\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & -\varepsilon l_1 c\theta_1 \\ 0 & \varepsilon l_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

$${}^2_3\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & \varepsilon l_2 s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & -\varepsilon l_2 c\theta_2 \\ 0 & \varepsilon l_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

$${}^3_4\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

Teniendo las matrices elementales, se procede a obtener la matriz de transformación, sin tomar en cuenta la matriz  ${}^0_1\widehat{M}$  pues es una matriz de identidad:

$${}^3_0\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & \varepsilon l_1 s\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & -\varepsilon l_1 c\theta_1 \\ 0 & \varepsilon l_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & \varepsilon l_2 s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & -\varepsilon l_2 c\theta_2 \\ 0 & \varepsilon l_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

### ***Multiplicación de matrices***

Primero se multiplican las primeras dos matrices:

$${}^2_0\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & \varepsilon l_1 s\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & -\varepsilon l_1 c\theta_1 \\ 0 & \varepsilon l_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & \varepsilon l_2 s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & -\varepsilon l_2 c\theta_2 \\ 0 & \varepsilon l_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

Elemento 1-1 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[(c\theta_1)(c\theta_2) + (-s\theta_1)(s\theta_2) + (\varepsilon l_1 s\theta_1)(0)] = c\theta_{12} - s\theta_{12}$$

Elemento 1-2 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1)(c\theta_2) + (c\theta_1)(s\theta_2) + (-\varepsilon l_1 c\theta_1)(0)] = s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2$$

Elemento 1-3 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[(0)(c\theta_2) + (\varepsilon l_1)(s\theta_2) + (1)(0)] = \varepsilon l_1 s\theta_2$$

Elemento 2-1 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[(c\theta_1)(-s\theta_2) + (-s\theta_1)(c\theta_2) + (\varepsilon l_1 s\theta_1)(\varepsilon l_2)] = -c\theta_1 s\theta_2 - s\theta_1 c\theta_2$$

Elemento 2-2 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1)(-s\theta_2) + (c\theta_1)(c\theta_2) + (-\varepsilon l_1 c\theta_1)(\varepsilon l_2)] = -s\theta_{12} + c\theta_{12}$$

Elemento 2-3 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[((0)(-s\theta_2)) + ((\varepsilon l_1)(c\theta_2)) + ((1)(\varepsilon l_2))] = \varepsilon l_1 c\theta_2 + \varepsilon l_2$$

Elemento 3-1 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[(c\theta_1)(\varepsilon l_2 s\theta_2)) + ((-s\theta_1)(-\varepsilon l_2 c\theta_2)) + ((\varepsilon l_1 s\theta_1)(1))] = c\theta_1 \varepsilon l_2 s\theta_2 + s\theta_1 \varepsilon l_2 c\theta_2 + \varepsilon l_1 s\theta_1$$

Elemento 3-2 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1)(\varepsilon l_2 s\theta_2)) + ((c\theta_1)(-\varepsilon l_2 c\theta_2)) + ((-\varepsilon l_1 c\theta_1)(1))] = \varepsilon l_2 s\theta_{12} - \varepsilon l_2 c\theta_{12} - \varepsilon l_1 c\theta_1$$

Elemento 3-3 de la matriz  ${}^2_0\widehat{M}$ :

$$[((0)(\varepsilon l_2 s\theta_2)) + ((\varepsilon l_1)(-\varepsilon l_2 c\theta_2)) + ((1)(1))] = 1$$

El resultado de la multiplicación de matrices dado en la ecuación (3-51) es:

$${}^2_0\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_{12} - s\theta_{12} & -c\theta_1 s\theta_2 - s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 \varepsilon l_2 s\theta_2 + s\theta_1 \varepsilon l_2 c\theta_2 + \varepsilon l_1 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_{12} + c\theta_{12} & \varepsilon l_2 s\theta_{12} - \varepsilon l_2 c\theta_{12} - \varepsilon l_1 c\theta_1 \\ \varepsilon l_1 s\theta_2 & \varepsilon l_1 c\theta_2 + \varepsilon l_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

Se multiplica la matriz de la ecuación (3-49) y la de la ecuación (3-52) para obtener la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$${}^3_0\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_{12} - s\theta_{12} & -c\theta_1 s\theta_2 - s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 \varepsilon l_2 s\theta_2 + s\theta_1 \varepsilon l_2 c\theta_2 + \varepsilon l_1 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_{12} + c\theta_{12} & \varepsilon l_2 s\theta_{12} - \varepsilon l_2 c\theta_{12} - \varepsilon l_1 c\theta_1 \\ \varepsilon l_1 s\theta_2 & \varepsilon l_1 c\theta_2 + \varepsilon l_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

### ***Multiplicación de matrices***

Elemento 1-1 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((c\theta_{12} - s\theta_{12})(c\theta_3)) + ((-c\theta_1 s\theta_2 - s\theta_1 c\theta_2)(s\theta_3)) + ((c\theta_1 \varepsilon l_2 s\theta_2 + s\theta_1 \varepsilon l_2 c\theta_2 + \varepsilon l_1 s\theta_1)(0))] \\ & = (c\theta_{123} - s\theta_{12}) + (-c\theta_1 s\theta_{23} - s\theta_{13} c\theta_2) = c\theta_{123} - s\theta_{12} - c\theta_1 s\theta_{23} + s\theta_{13} c\theta_2 \end{aligned}$$

Elemento 1-2 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2)(c\theta_3)) + ((-s\theta_{12} + c\theta_{12})(s\theta_3)) + ((\varepsilon l_2 s\theta_{12} - \varepsilon l_2 c\theta_{12} - \varepsilon l_1 c\theta_1)(0))] \\ & = (s\theta_1 c\theta_{32} + c\theta_{13} s\theta_2) + (-s\theta_{123} + c\theta_{12} s\theta_3) \\ & = s\theta_1 c\theta_{32} + c\theta_{13} s\theta_2 - s\theta_{123} - c\theta_{12} s\theta_3 \end{aligned}$$

Elemento 1-3 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((\varepsilon l_1 s\theta_2)(c\theta_3)) + ((\varepsilon l_1 c\theta_2 + \varepsilon l_2)(s\theta_3)) + ((1)(0))] = \varepsilon l_1 s\theta_2 c\theta_3 + \varepsilon l_1 c\theta_2 s\theta_3 + \varepsilon l_2 s\theta_3 + 1 = \\ & \varepsilon l_1 (s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_2 s\theta_3) + \varepsilon l_2 s\theta_3 + 1 \end{aligned}$$

Elemento 2-1 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((c\theta_{12} - s\theta_{12})(-s\theta_3)) + ((-c\theta_1s\theta_2 - s\theta_1c\theta_2)(c\theta_3)) + ((c\theta_1\epsilon l_2s\theta_2 + s\theta_1\epsilon l_2c\theta_2 + \epsilon l_1s\theta_1)(0))] \\ & = (-c\theta_{12}s\theta_3 - s\theta_{123}) + (-c\theta_{13}s\theta_2 - s\theta_1c\theta_{23}) \\ & = -c\theta_{12}s\theta_3 - s\theta_{123} - c\theta_{13}s\theta_2 + s\theta_1c\theta_{23} \end{aligned}$$

Elemento 2-2 de la matriz  ${}^3_0\hat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((s\theta_1c\theta_2 + c\theta_1s\theta_2)(-s\theta_3)) + ((-s\theta_{12} + c\theta_{12})(c\theta_3)) + ((\epsilon l_2s\theta_{12} - \epsilon l_2c\theta_{12} - \epsilon l_1c\theta_1)(0))] \\ & = (-s\theta_{13}c\theta_2 - c\theta_1s\theta_{23}) + (-s\theta_{12}c\theta_3 + c\theta_{123}) \\ & = -s\theta_{13}c\theta_2 - c\theta_1s\theta_{23} - s\theta_{12}c\theta_3 + c\theta_{123} \end{aligned}$$

Elemento 2-3 de la matriz  ${}^3_0\hat{M}$ :

$$[((\epsilon l_1s\theta_2)(-s\theta_3)) + ((\epsilon l_1c\theta_2 + \epsilon l_2)(c\theta_3)) + ((1)(0))] = -\epsilon l_1s\theta_{23} + \epsilon l_1c\theta_{23} + \epsilon l_2c\theta_3$$

Elemento 3-1 de la matriz  ${}^3_0\hat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((c\theta_{12} - s\theta_{12})(0)) + ((-c\theta_1s\theta_2 - s\theta_1c\theta_2)(0)) + ((c\theta_1\epsilon l_2s\theta_2 + s\theta_1\epsilon l_2c\theta_2 + \epsilon l_1s\theta_1)(1))] \\ & = c\theta_1\epsilon l_2s\theta_2 + s\theta_1\epsilon l_2c\theta_2 + \epsilon l_1s\theta_1 \end{aligned}$$

Elemento 3-2 de la matriz  ${}^3_0\hat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((s\theta_1c\theta_2 + c\theta_1s\theta_2)(0)) + ((-s\theta_{12} + c\theta_{12})(0)) + ((\epsilon l_2s\theta_{12} - \epsilon l_2c\theta_{12} - \epsilon l_1c\theta_1)(1))] \\ & = \epsilon l_2s\theta_{12} - \epsilon l_2c\theta_{12} - \epsilon l_1c\theta_1 \end{aligned}$$

Elemento 3-3 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[(\varepsilon l_1 s \theta_2)(0)] + [(\varepsilon l_1 c \theta_2 + \varepsilon l_2)(0)] + [(1)(1)] = 1$$

4) Se define el modelo directo del manipulador dado por la matriz:

$${}^3_0\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_{123} - s\theta_{12} - c\theta_1 s\theta_{23} + s\theta_{13} c\theta_2 & -c\theta_{12} s\theta_3 - s\theta_{123} - c\theta_{13} s\theta_2 + s\theta_1 c\theta_{23} & c\theta_1 \varepsilon l_2 s\theta_2 + s\theta_1 \varepsilon l_2 c\theta_2 + \varepsilon l_1 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_{32} + c\theta_{13} s\theta_2 - s\theta_{123} - c\theta_{12} s\theta_3 & -s\theta_{13} c\theta_2 - c\theta_1 s\theta_{23} - s\theta_{12} c\theta_3 - c\theta_{123} & \varepsilon l_2 s\theta_{12} - \varepsilon l_2 c\theta_{12} - \varepsilon l_1 c\theta_1 \\ \varepsilon l_1 (s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_2 s\theta_3) + \varepsilon l_2 s\theta_3 + 1 & -\varepsilon l_1 s\theta_{23} + \varepsilon l_1 c\theta_{23} + \varepsilon l_2 c\theta_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

### 3.4.2 Manipulador configuración cilíndrica

1) Asignación de los marcos de referencia:

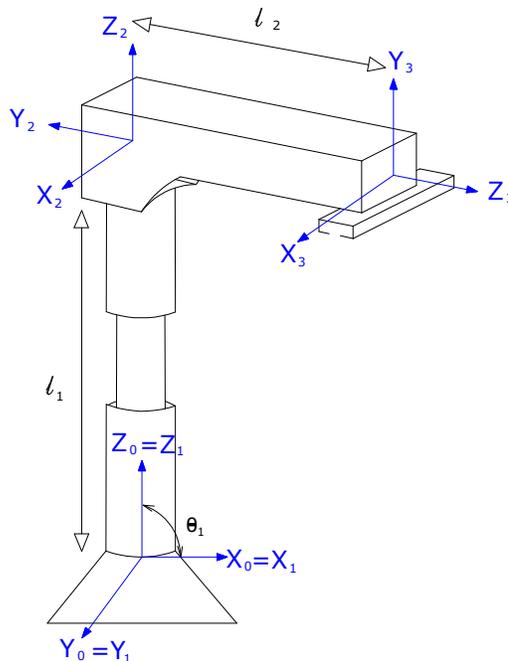


Figura 3.12 Manipulador robótico configuración cilíndrica.

2) Establecer parámetros de Denavit-Hartenberg:

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$\theta_i$	$d_i$
1	0	0	$\theta_1$	0
2	0	0	0	$l_1$
3	-90	0	0	$l_2$

3) Obtener matrices de transformación:

$${}^3\hat{M} = {}^1_0\hat{M} {}^2_1\hat{M} {}^3_2\hat{M} {}^4_3\hat{M} \quad (3-55)$$

La matriz  ${}^1_0\hat{M}$  se eliminará puesto que es una matriz de identidad y, por lo tanto:

$${}^3_0\hat{M} = {}^2_1\hat{M} {}^3_2\hat{M} {}^4_3\hat{M} \quad (3-56)$$

Utilizando la matriz de transformación para números duales: tomada de la ecuación (2-196) es:

$${}^{n+1}_n\hat{M} = \begin{bmatrix} c\hat{\theta}_n & -c\hat{a}_n s\hat{\theta}_n & s\hat{a}_n s\hat{\theta}_n \\ s\hat{\theta}_n & c\hat{a}_n c\hat{\theta}_n & s\hat{a}_n c\hat{\theta}_n \\ 0 & s\hat{a}_n & c\hat{a}_n \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

Para los valores particulares que se muestran en la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, se puede observar lo siguiente:

$$s\hat{\theta}_n = s\theta_n + \varepsilon d_n c\theta_n$$

$$c\hat{\theta}_n = c\theta_n - \varepsilon d_n s\theta_n$$

$$s\hat{a}_n = s\alpha_n + \varepsilon a_n c\alpha_n \rightarrow s\hat{a}_n = s\alpha_n$$

$$c\hat{a}_n = c\alpha_n - \varepsilon a_n s\alpha_n \rightarrow c\hat{a}_n = c\alpha_n$$

Se substituyen en la matriz los valores de los parámetros de Denavit-Hartenberg:

Tomando en cuenta que para la 1ra articulación, el parámetro  $\theta_i = \theta_1$ , y todos los parámetros restantes tienen valor de cero, se tiene:

$$\begin{matrix} s\hat{\theta}_1 = s\theta_1 & s\hat{\alpha}_1 = 0 \\ c\hat{\theta}_1 = c\theta_1 & c\hat{\alpha}_1 = 1 \end{matrix} \quad \therefore \quad {}^1_2\hat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

Para la 2da articulación, el parámetro  $d_2 = l_1$ , y todos los parámetros restantes tienen valor de cero, entonces:

$$\begin{matrix} s\hat{\theta}_2 = \varepsilon l_1 & s\hat{\alpha}_2 = 0 \\ c\hat{\theta}_2 = 1 & c\hat{\alpha}_2 = 1 \end{matrix} \quad \therefore \quad {}^2_3\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon l_1 & 0 \\ \varepsilon l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

En la 3ra articulación, los parámetros  $\alpha_3 = 90$  y  $d_3 = l_2$ , los parámetros restantes tienen valor de cero, por lo tanto:

$$\begin{matrix} s\hat{\theta}_3 = \varepsilon l_2 & s\hat{\alpha}_3 = 1 \\ c\hat{\theta}_3 = 1 & c\hat{\alpha}_3 = 0 \end{matrix} \quad \therefore \quad {}^3_4\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon l_2 \\ \varepsilon l_2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

Teniendo las matrices elementales, se procede a obtener la matriz de transformación:

$${}^3_0\hat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon l_1 & 0 \\ \varepsilon l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon l_2 \\ \varepsilon l_2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

Primero se procede a obtener la matriz de transformación  ${}^1_3\hat{M}$ :

$${}^1_3\hat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon l_1 & 0 \\ \varepsilon l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

***Multiplicación de matrices***

Elemento 1-1 de la matriz  $\frac{1}{3}\widehat{M}$ :

$$[(c\theta_1)(1) + (-s\theta_1)(\varepsilon l_1) + (0)(0)] = c\theta_1 - s\theta_1\varepsilon l_1$$

Elemento 1-2 de la matriz  $\frac{1}{3}\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1)(1) + (c\theta_1)(\varepsilon l_1) + (0)(0)] = s\theta_1 + c\theta_1\varepsilon l_1$$

Elemento 1-3 de la matriz  $\frac{1}{3}\widehat{M}$ :

$$[(0)(1) + (0)(\varepsilon l_1) + (1)(0)] = 0$$

Elemento 2-1 de la matriz  $\frac{1}{3}\widehat{M}$ :

$$[(c\theta_1)(-\varepsilon l_1) + (-s\theta_1)(1) + (0)(0)] = -c\theta_1\varepsilon l_1 - s\theta_1$$

Elemento 2-2 de la matriz  $\frac{1}{3}\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1)(-\varepsilon l_1) + (c\theta_1)(1) + (0)(0)] = -s\theta_1\varepsilon l_1 + c\theta_1$$

Elemento 2-3 de la matriz  ${}^1_3\widehat{M}$ :

$$[(0)(-\varepsilon l_1) + (0)(1) + (1)(0)] = 0$$

Elemento 3-1 de la matriz  ${}^1_3\widehat{M}$ :

$$[(c\theta_1)(0) + (-s\theta_1)(0) + (0)(1)] = 0$$

Elemento 3-2 de la matriz  ${}^1_3\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1)(0) + (c\theta_1)(0) + (0)(1)] = 0$$

Elemento 3-3 de la matriz  ${}^1_3\widehat{M}$ :

$$[(0)(0) + (0)(0) + (1)(1)] = 1$$

Entonces, el resultado de la multiplicación de matrices de la ecuación (3-61) es:

$${}^1_3\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 - s\theta_1\varepsilon l_1 & -c\theta_1\varepsilon l_1 - s\theta_1 & 1 \\ s\theta_1 + c\theta_1\varepsilon l_1 & -s\theta_1\varepsilon l_1 + c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-62)$$

Ahora se multiplican las matrices (3-59) y (3-62), para obtener la matriz de transformación del manipulador:

$${}^3_0\widehat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 - s\theta_1\varepsilon l_1 & -c\theta_1\varepsilon l_1 - s\theta_1 & 1 \\ s\theta_1 + c\theta_1\varepsilon l_1 & -s\theta_1\varepsilon l_1 + c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon l_2 \\ \varepsilon l_2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-62)$$

Elemento 1-1 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((c\theta_1 - s\theta_1\varepsilon l_1)(1)) + ((-c\theta_1\varepsilon l_1 - s\theta_1)(\varepsilon l_2)) + ((0)(0))] = c\theta_1 - s\theta_1\varepsilon l_1 - c\theta_1 - s\theta_1\varepsilon l_2 \\ & = -s\theta_1\varepsilon l_1 - s\theta_1\varepsilon l_2 \end{aligned}$$

Elemento 1-2 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$\begin{aligned} & [((s\theta_1 + c\theta_1\varepsilon l_1)(1)) + ((-s\theta_1\varepsilon l_1 + c\theta_1)(\varepsilon l_2)) + ((0)(0))] = s\theta_1 + c\theta_1\varepsilon l_1 - s\theta_1 + c\theta_1\varepsilon l_2 \\ & = c\theta_1\varepsilon l_1 + c\theta_1\varepsilon l_2 \end{aligned}$$

Elemento 1-3 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[((0)(1)) + ((0)(\varepsilon l_2)) + ((1)(0))] = 0$$

Elemento 2-1 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[((c\theta_1 - s\theta_1\varepsilon l_1)(0)) + ((-c\theta_1\varepsilon l_1 - s\theta_1)(0)) + ((0)(1))] = 0$$

Elemento 2-2 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1 + c\theta_1\epsilon l_1)(0)] + [(-s\theta_1\epsilon l_1 + c\theta_1)(0)] + [(0)(1)] = 0$$

Elemento 2-3 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[(0)(0)] + [(0)(0)] + [(1)(1)] = 1$$

Elemento 3-1 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[(c\theta_1 - s\theta_1\epsilon l_1)(\epsilon l_2)] + [(-c\theta_1\epsilon l_1 - s\theta_1)(-1)] + [(0)(0)] = c\theta_1\epsilon l_2 + c\theta_1\epsilon l_1 + s\theta_1$$

Elemento 3-2 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[(s\theta_1 + c\theta_1\epsilon l_1)(\epsilon l_2)] + [(-s\theta_1\epsilon l_1 + c\theta_1)(-1)] + [(0)(0)] = s\theta_1\epsilon l_2 + s\theta_1\epsilon l_1 - c\theta_1$$

Elemento 3-3 de la matriz  ${}^3_0\widehat{M}$ :

$$[(0)(\epsilon l_2)] + [(0)(-1)] + [(1)(0)] = 0$$

4) Se define el modelo directo del manipulador dado por la matriz:

$${}^3_0\hat{M} = \begin{bmatrix} -s\theta_1\epsilon l_1 - s\theta_1\epsilon l_2 & 0 & c\theta_1\epsilon l_2 + c\theta_1\epsilon l_1 + s\theta_1 \\ c\theta_1\epsilon l_1 + c\theta_1\epsilon l_2 & 0 & s\theta_1\epsilon l_2 + s\theta_1\epsilon l_1 - c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-63)$$

### 3.5 CONCLUSIONES

El análisis de desplazamiento de un robot manipulador permite determinar su posición y orientación en el espacio, siendo el espacio un plano tridimensional, si los análisis y procesos cinemáticos se llevan a cabo con la metodología de los números duales el desarrollo será mucho más directo, pues como se ha estudiado los números duales son una extensión de los números convencionales que se aplican sobre un plano complejo, al ser el espacio un plano tridimensional se puede identificar más con un plano complejo que con un plano ordinario.

Los procedimientos de análisis de desplazamiento convencionales y con números duales son prácticamente los mismos, pero con números duales las formulaciones toman una forma más compacta, así podemos notar que el modelo directo del manipulador empleando números duales se obtiene a partir de operaciones con matrices de 3x3, en cambio con el análisis de desplazamiento convencional se trabaja con matrices de 4x4 y frecuentemente es más necesario recurrir al empleo de programas computacionales para obtener los resultados.

Es importante apreciar que el modelo directo del manipulador que se obtiene como resultado de un análisis con números duales es un elemento más preciso y completo pues además de incluir la posición de los ángulos, también comprende el desplazamiento entre estos.



# CAPÍTULO 4

## ANÁLISIS DE VELOCIDAD



En este capítulo se expone la segunda parte del análisis cinemático de los robots manipuladores, es decir, el análisis de velocidad, se documentan los conceptos y procesos cinemáticos necesarios para desarrollar dicho análisis y la aplicación de estos en la metodología de los números duales, buscando simplificar las formulaciones.

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Una vez estudiado el posicionamiento estático del manipulador robótico se procede a examinar las variaciones en el tiempo de las posiciones y orientaciones; es decir las velocidades.

Así se completa el análisis cinemático de un manipulador robótico conformado de los análisis de desplazamiento y velocidad. En el presente capítulo se tiene en cuenta la velocidad del movimiento considerando la relación entre las variaciones de las variables articulares y las variaciones de las variables en el espacio cartesiano.

Se comienza por abordar el análisis de velocidad tradicional a fin de establecer la base de los conceptos básicos y procedimientos para después emplear los mismos pero utilizando los números duales.

## 4.2 VELOCIDADES LINEALES Y ANGULARES

Se trata ahora de relacionar las velocidades del efector final en el espacio cartesiano con las velocidades del movimiento de las articulaciones. Para ello se comienza por tratar la expresión de las velocidades lineales y angulares de acuerdo con la notación introducida en los capítulos precedentes. A continuación se trata la propagación de las velocidades en las articulaciones. En este apartado se empleará también la notación de desarrollos de Craig (1986).

### 4.2.1 Velocidad lineal

Se estudia en primer lugar la *velocidad lineal* o *de traslación* de un punto  ${}^B Q$  con respecto al sistema fijo  $\{A\}$ , suponiendo conocidas su velocidad lineal  ${}^B V_Q$  con respecto a  $\{B\}$  y la velocidad lineal  ${}^A V_{ORGB}$  del origen del sistema  $\{B\}$  con respecto al  $\{A\}$ . La situación se ilustra en la Figura 4.1

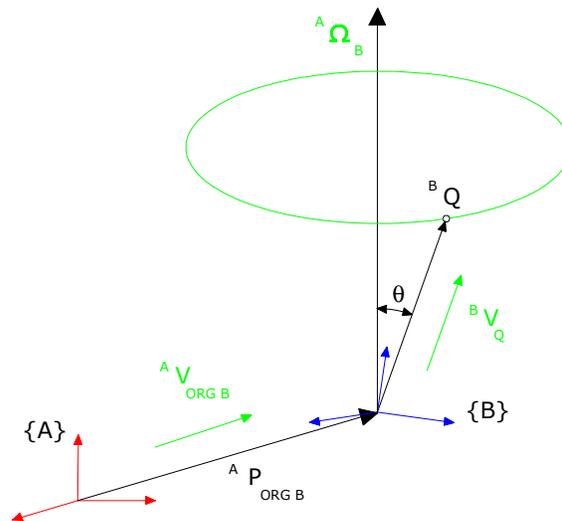


Figura 4.1. Velocidad de traslación y rotación.

Supóngase que la localización  $\{B\}$  relativa a  $\{A\}$  está descrita por un vector de posición  ${}^A P_{ORGB}$  y una matriz de rotación  ${}^A_B R$ . La velocidad  ${}^B V_Q$  del punto  $Q$  en el sistema de referencia  $\{B\}$  se define como:

$${}^B V_Q = \frac{d}{dx} {}^B Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B Q(t + \Delta t) - {}^B Q(t)}{\Delta t} \quad (4-1)$$

Expresión en la cual la derivada se toma con respecto al sistema de referencia  $\{B\}$ . Suponiendo que el origen de  $\{B\}$  se mantiene fijo con respecto a  $\{A\}$ , el vector velocidad puede expresarse en el sistema de referencia  $\{A\}$  como:

$${}^A({}^B V_Q) = {}^A \left( \frac{d}{dx} {}^B Q \right) = {}^A {}_B^R {}^B V_Q \quad (4-2)$$

Si ahora se considera que el origen del sistema {B} se mueve con respecto al sistema {A} con una velocidad  ${}^A V_{ORGB}$ , y se supone que la orientación relativa de {B} con respecto a {A} no varía ( ${}^A {}_B^R$  constante), la velocidad lineal del punto Q con respecto al sistema {A} viene dada por:

$${}^A V_Q = {}^A V_{ORGB} + {}^A {}_B^R {}^B V_Q \quad (4-3)$$

#### 4.2.2 Velocidad Angular

Si ahora se supone que los sistemas {A} y {B} mantienen sus orígenes coincidentes en el tiempo (la velocidad de traslación del {B} con respecto al {A} es nula), pero el sistema {B} está rotado con respecto al {A}. Se trata de estudiar la velocidad del punto Q con respecto al sistema {A}, conociendo su velocidad lineal  ${}^B V_Q$  con respecto al sistema {B} y la *velocidad angular o de rotación*  ${}^A \Omega_B$  del sistema {B} con respecto al {A}. La situación se muestra en la Figura 4.1.

La velocidad angular o de rotación de un cuerpo rígido se expresa como el movimiento de rotación de un sistema de referencia solidario al cuerpo. La dirección de la velocidad angular  ${}^A \Omega_B$  del sistema {B} con respecto al {A} expresada en el sistema {A}, proporciona el eje instantáneo de rotación y su magnitud la velocidad de rotación, tal como se muestra en la Figura 4.1 (Craig, 1986). El cambio diferencial en  $\Delta^A Q$  es perpendicular tanto a  ${}^A \Omega_B$  como a  ${}^A Q(t)$  y su magnitud viene dada por:

$$|\Delta Q| = (|{}^A Q| \operatorname{sen} \theta) (|{}^A \Omega_B| \Delta t) \quad (4-4)$$

Por consiguiente, conociendo la posición  ${}^B Q$  del punto en el sistema {B}, la velocidad de  $Q$  visto desde {A} debido a la rotación  ${}^A \Omega_B$  puede expresarse mediante el producto vectorial:

$${}^A V_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q = {}^A \Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q \quad (4-5)$$

Por otra parte, el cambio del vector  $Q$  con respecto a {B} viene dado por la velocidad  ${}^A V_Q$  que expresada en el sistema {A} es  ${}^A_B R {}^B V_Q$ .

Por tanto, la velocidad resultante del cambio del vector  $Q$  con respecto a {B} y de la rotación de {B} con respecto a {A}, expresada en {A}, es:

$${}^A V_Q = {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q \quad (4-6)$$

Considérese ahora la *combinación de la velocidad de traslación con la de rotación*. Teniendo en cuenta las ecuaciones 4.3 y 4.6 la velocidad resultante es:

$${}^A V_Q = {}^A V_{ORGB} + ({}^A_B R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q) \quad (4-7)$$

### 4.2.3 Propagación de velocidades

Se trata ahora de estudiar la propagación de las velocidades por las articulaciones de un robot. Los enlaces entre dos articulaciones suponen cuerpos rígidos con movimiento descrito por vectores de velocidades lineales y angulares.

Sea {0} la articulación que se toma como referencia. La velocidad lineal del origen del sistema { $i$ } se representa por  $v_i$  y la velocidad angular de este sistema por  $\omega_i$ . La velocidad del enlace  $i + 1$  es la del  $i$  más los componentes que añade la articulación

$i + 1$ . En lo que sigue se considera en, primer lugar, la propagación de velocidades en las articulaciones de rotación y a continuación en las de traslación. En la Figura 4.2 se representan los vectores de velocidad.

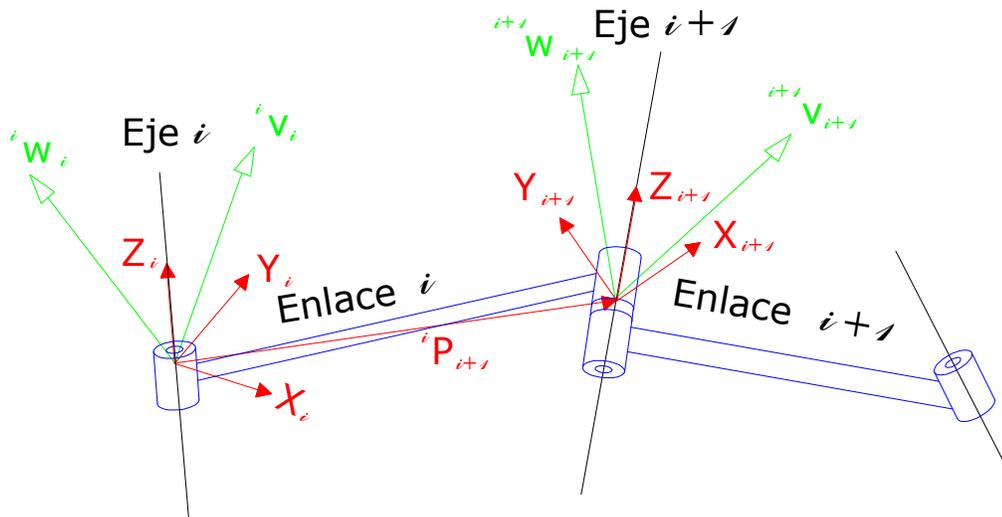


Figura 4.2. Vectores velocidad de dos articulaciones consecutivas.

Se supondrá, en primer lugar, que la articulación considerada es de *rotación*. Si el eje de esta rotación coincide con el eje  $\hat{Z}$ , la expresión de la *velocidad angular* del enlace  $i + 1$  en términos del sistema en  $\{i\}$  es:

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}_{i+1}^iR \theta'_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (4-8)$$

Siendo  $\theta'_{i+1}$  la derivada con respecto al tiempo de la variable articular que en forma vectorial, se representa como:

$$\theta'_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^{i+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

Y  ${}^{i+1}_i R$  la matriz que rota el eje de  $\{i+1\}$  a su descripción en  $\{i\}$  para poder sumar las dos componentes de velocidades angulares.

Asimismo, la *velocidad angular* del enlace de  $i+1$  expresada en  $\{i+1\}$  es:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R \quad {}^i\omega_i + \theta'_{i+1} \quad {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (4-10)$$

Por otra parte, también en la articulación de rotación, la *velocidad lineal* del origen de  $\{i+1\}$  es la del origen de  $\{i\}$  más una componente originada por la velocidad angular de  $i$ :

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} \quad (4-11)$$

Siendo  ${}^i P_{i+1}$  el vector que expresa la posición del origen de  $\{i+1\}$  en el sistema  $\{i\}$ . Ver Figura 4.2.

La expresión resultante de la velocidad con respecto al sistema  $\{i+1\}$  es:

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ( {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} ) \quad (4-12)$$

Se consideran ahora *articulaciones de traslación*. En este caso, las velocidades lineales y angulares son:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R \quad {}^i \omega_i \quad (4-13)$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ( {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} ) + d'_{i+1} \quad {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (4-14)$$

Suponiendo  ${}^0\omega_0 = 0$ ,  ${}^0v_0 = 0$ , la aplicación sucesiva de las expresiones correspondiente a las ecuaciones (4-10) y (4-12) (articulaciones de rotación) y a las ecuaciones (4-13) y (4-14) (articulaciones de traslación) permite propagar las velocidades desde la  $i = 1$  hasta a  $i = N$  obteniendo finalmente  ${}^N\omega_N$ ,  ${}^Nv_N$ . Para referirlas a la base se multiplica por  ${}^0_NR$ .

### 4.3 JACOBIANO DEL MANIPULADOR

El jacobiano del manipulador relaciona las velocidades articulares con las velocidades cartesianas del extremo:

$${}^0v = {}^0J(q) \cdot q' \quad (4-15)$$

Expresión en la cual se ha tomado como referencia el sistema  $\{0\}$ . Obsérvese como el Jacobiano se expresa en un determinado sistema de referencia. Asimismo, nótese como, para unos determinados valores de las variables articulares, las relaciones entre las velocidades articulares y las velocidades en el espacio cartesiano son lineales.

El vector de velocidades en el espacio cartesiano puede escribirse como:

$${}^0v = \begin{bmatrix} {}^0v \\ {}^0\omega \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

Siendo  ${}^0v$  un vector 3x3 de velocidades lineales,  ${}^0\omega$  un vector 3x3 de velocidades rotacionales.

En un robot con seis articulaciones,  $q'$  es un vector 6x1 de velocidades de las articulaciones. Por consiguiente, en este caso,  $J$  es una matriz 6x6.

En general, el número de columnas de  $J$  es el número de articulaciones y el número de filas el de grados de libertad.

El jacobiano no es necesariamente cuadrado. En efecto, en robots redundantes, el número de columnas es mayor que el de filas.

Existen diferentes métodos para obtener el jacobiano de un determinado robot. El más evidente es el de la obtención analítica de expresiones de las velocidades cartesianas en función de las articulares. Para ello, puede aplicarse la técnica de propagación de las velocidades expuesta anteriormente.

La obtención de las velocidades articulares en función de las velocidades cartesianas en el extremo involucra la consideración de la inversa del jacobiano. Si la matriz es no singular puede escribirse:

$$q' = J^{-1}(q) \cdot v \quad (4-17)$$

Sin embargo, es frecuente que existan valores de  $q$  para los que el jacobiano sea singular. Estas singularidades se presentan en los límites del espacio de trabajo, o en su interior cuando dos o más ejes de articulaciones están alineados.

En las singularidades se produce pérdida de grados de libertad en el espacio cartesiano; es decir, direcciones o subespacios en los que no es posible mover el órgano terminal. Se recuerda, por ejemplo, el caso en que los ejes de la cuarta y la sexta articulación del robot Puma están alineados. (Ollero, 2001)

Con la finalidad de aplicar el método enunciado se considera otra vez el manipulador plano con tres articulaciones de rotación (Figura 4.3) de los ejemplos de las aplicaciones del capítulo precedente, pero en este caso, con los ejes del marco de referencia {3} en la misma dirección que los del {2}. Se desean encontrar la velocidad en el origen del sistema {3} y el jacobiano del manipulador.

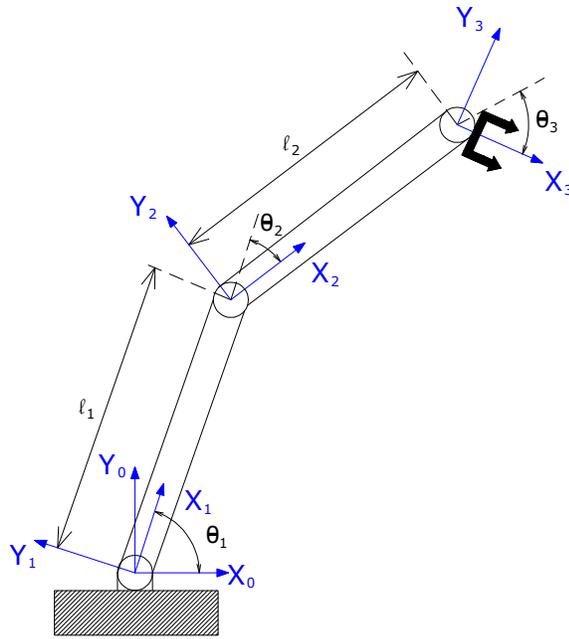


Figura 4.3 Manipulador con tres articulaciones de rotación

Las matrices de rotación de las transformaciones son:

$${}^1_0R = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

$${}^2_1R = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

$${}^3_2R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Suponiendo que  $\{0\}$  tiene velocidad nula, y propagando desde esta articulación empleando las ecuaciones (4-10) y (4-12) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 {}^1\omega_1 &= {}^1_0R \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix}; \quad {}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2\omega_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 + \theta'_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-21}$$

Si  ${}^1P_2$  es el vector desde el origen del sistema {1} al del sistema {2} expresado en el sistema {1} se tiene:

$${}^1\omega_1 \times {}^1P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\theta'_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-22}$$

$${}^2v_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\theta'_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} l_1s_2\theta'_1 \\ l_1c_2\theta'_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-23}$$

$${}^3\omega_3 = {}^2\omega_2 \tag{4-24}$$

Si ahora  ${}^2P_3$  es el vector desde el origen del sistema {2} al del sistema {3} expresado en el sistema {2} se tiene:

$${}^2\omega_2 \times {}^2P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\theta'_1 + \theta'_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-25}$$

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} l_1s_2\theta'_1 \\ l_1c_2\theta'_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\theta'_1 + \theta'_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1s_2\theta'_1 \\ l_1c_2\theta'_1 + l_2(\theta'_1 + \theta'_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-26}$$

Por tanto, el jacobiano expresado en {3} es:

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

La velocidad del extremo expresada con respecto al sistema {0} es

$${}^0v_3 = {}^0R_3 {}^3v_3 = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 {}^3v_3 = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 \theta'_1 + l_2 s_{12}(\theta'_1 + \theta'_2)) \\ l_1 c_1 \theta'_1 + l_2 c_{12}(\theta'_1 + \theta'_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

Por consiguiente, el jacobiano expresado en {0}, tal como está definido en la ecuación (4-15), es:

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

La inversa del jacobiano es:

$${}^0J^{-1}(\theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -(l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

Obsérvese como existe una singularidad para  $\theta_2 = 0$  que corresponde al brazo completamente estirado (límite del espacio de trabajo) o bien cuando  $\theta_2 = 180^\circ$  (brazo plegado sobre sí mismo).

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_{23} + l_2 s_3 & l_2 s_3 & 0 \\ l_1 c_{23} + l_2 c_3 & l_2 c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} & 0 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

## 4.4 ANALISIS DE VELOCIDAD CON NUMEROS DUALES

### 4.4.1 Conceptos Básicos

La metodología de los números duales necesita manejar sus propios conceptos, ya que difiere en demasía la definición de velocidad al concepto de velocidad dual, pues se toman en cuenta elementos que permiten extender, profundizar y enriquecer los análisis de velocidad. Estos conceptos se presentan a continuación:

#### **Velocidad dual de los puntos de un eje de rotación:**

La velocidad de este movimiento es:

$V$  = velocidad lineal a lo largo del eje de rotación

$\Omega$  = velocidad angular con respecto al eje de rotación

La dirección y ubicación del eje de rotación será definido por el vector unitario de rotación:

$$\hat{u} = \vec{u} + \varepsilon(\overrightarrow{OP} \times \vec{u}) \quad (4-33)$$

Donde:

$\vec{u}$  = Es el vector unitario

$\overrightarrow{OP}$  = Es el vector que va del origen del sistema de coordenadas a un punto P sobre el eje de rotación.

Estas cantidades se pueden combinar dentro de un “motor”, el múltiplo dual de un vector unitario lineal.

$$\hat{V} = (\Omega + \varepsilon V)\hat{u} \quad (4-34)$$

Se debe observar que  $\hat{V}$  y  $\hat{u}$  son vectores duales porque  $\Omega$  y  $V$  son vectores escalares.

La ecuación (4-34) proporciona la velocidad dual de cualquier punto P sobre el eje de rotación (todos los puntos sobre un eje de rotación tienen la misma velocidad dual).

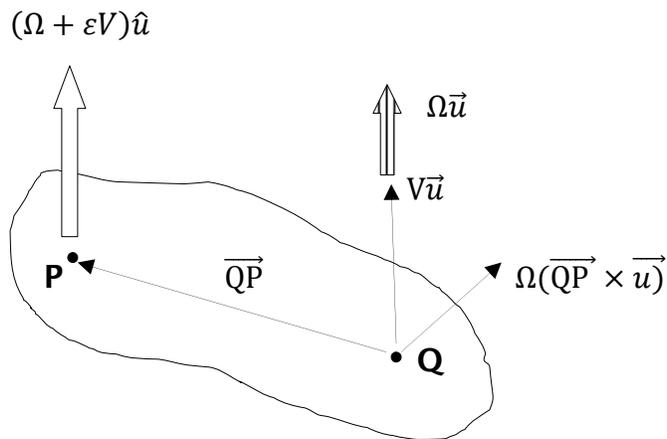


Figura 4.4 Velocidades duales de los puntos P y Q de un cuerpo rígido.

### Velocidad dual de puntos fuera del eje de rotación

Tomando como referencia el cuerpo rígido que se muestra en la Figura 4.4, considere el punto P sobre el eje de rotación como el origen de un marco y el punto Q como el origen de otro marco con la misma orientación.

La ecuación de transformación da como resultado:

$${}^Q\hat{u} = \vec{u} + \varepsilon(\overline{QP} \times \vec{u}) \quad (4-35)$$

Al substituir la ecuación (4-35) en la ecuación (4-34) se obtiene la velocidad dual en el punto Q

$$\hat{V}^Q = (\Omega + \varepsilon V)[\vec{u} + \varepsilon(\overline{QP} \times \vec{u})] \quad (4-36)$$

$$\hat{V}^Q = \Omega\vec{u} + \varepsilon[V\vec{u} + \Omega(\overline{QP} \times \vec{u})] \quad (4-37)$$

Donde el componente primario  $\Omega\vec{u}$  representa la velocidad angular del cuerpo y el componente dual  $[V\vec{u} + \Omega(\overline{QP} \times \vec{u})]$  representa la velocidad linear de un punto Q en el cuerpo. Esta velocidad linear se compone de una velocidad de deslizamiento  $V\vec{u}$  que representa la velocidad componente a lo largo del eje de rotación y la velocidad tangencial  $\Omega(\overline{QP} \times \vec{u})$  perpendicular al eje de rotación y al vector que se encuentra entre el punto Q y el eje de rotación.

Se puede observar en la ecuación (4-37) que la velocidad angular de un cuerpo rígido es la misma en todos sus puntos.

La velocidad lineal de los puntos de un cuerpo rígido consiste de un componente de deslizamiento en la dirección del eje de rotación el cual es constante para todos los puntos del cuerpo y un componente tangencial el cual varía con la distancia del punto al eje de rotación.

En el eje de rotación, el componente tangencial de la velocidad desaparece. Por lo tanto el eje de rotación es el único en el cual las velocidades angulares y lineales de sus puntos se orientan a lo largo del mismo.

Una forma alternativa de la ecuación (4-37) se presenta a continuación:

$$\hat{V}^Q = \Omega \vec{u} + \varepsilon [V \vec{u} + \Omega (\vec{u} \times \overrightarrow{PQ})] \quad (4-38)$$

Las ecuaciones (4-37) y (4-38) se pueden resumir en

$$\hat{V}^Q = \vec{\Omega} + \varepsilon \vec{V}^Q \quad (4-39)$$

De las ecuaciones (4-37) y (4-39) se puede observar que:

$$\Omega = |\vec{\Omega}| \quad (4-40)$$

La velocidad lineal de un punto en el eje de rotación se define como:

$$V = \frac{\vec{\Omega} \cdot \hat{V}^Q}{\Omega} \quad (4-41)$$

Esta ecuación se puede sustentar al hacer la substitución del componente primario y del componente dual de la ecuación (4-39) como se obtuvo en la ecuación (4-38).

$$V = \frac{\Omega \vec{u} \cdot [V\vec{u} + \Omega(\overline{QP} \times \vec{u})]}{\Omega} \quad (4-42)$$

$$= \frac{\Omega \vec{u} \cdot \vec{u} + \Omega^2 \vec{u} \cdot (\overline{QP} \times \vec{u})}{\Omega} \quad (4-43)$$

Ahora,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \quad (4-44)$$

Además,

$$\vec{u} \cdot (\overline{QP} \times \vec{u}) = 0 \quad (4-45)$$

Porque  $(\overline{QP} \times \vec{u}) \perp \vec{u}$ . Así que,

$$V = \frac{\Omega V}{\Omega} = V \quad (4-46)$$

Y la ecuación (4-41) es válida.

Se puede notar que la velocidad a lo largo del eje de rotación  $\vec{V}$  es independiente del punto  $Q$  empleado en la ecuación (4-41).

**Eje de rotación de una velocidad dual.**

La rotación unitaria se especifica de la siguiente manera:

$${}^Q\hat{u} = \frac{\vec{\Omega}}{\Omega} + \varepsilon \left[ \frac{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{V})}{\Omega^3} \right] \quad (4-47)$$

El cual se puede comprobar de la siguiente manera:

El componente primario de la rotación unitaria  ${}^Q\hat{u}$  es el vector de dirección  $\vec{u}$ , el cual se puede obtener considerando los componentes primarios de las ecuaciones (4-39) y (4-37):

$$\vec{u} = \frac{\vec{\Omega}}{\Omega} \quad (4-48)$$

Se procede a construir el componente dual de la ecuación (4-47).

La velocidad del punto  $Q$  es:

$$\hat{V}^Q = V\vec{u} + \Omega(\overline{QP} \times \vec{u}) \quad (4-49)$$

Substituyendo las ecuaciones (4-48) y (4-49) dentro de la ecuación (4.47) se obtiene:

$${}^Q\hat{u} = \frac{\Omega\vec{u} \times \{\Omega\vec{u} \times [V\vec{u} + \Omega(\overline{QP} \times \vec{u})]\}}{\Omega^3} \quad (4-50)$$

$$= \frac{\Omega \vec{u} \times \{\Omega V \vec{u} \times \vec{u} + \Omega^2 [\vec{u} + (\overline{QP} \times \vec{u})]\}}{\Omega^3} \quad (4-51)$$

Tomando en cuenta que:

$$\vec{u} \times \vec{u} = 0 \quad (4-52)$$

Y además:

$$\vec{u} \times (\overline{QP} \times \vec{u}) = \overline{PQ} \quad (4-53)$$

Con referencia en que  $\vec{u} \perp (\overline{QP} \times \vec{u})$ , entonces:

$${}^0\hat{u} = \frac{\Omega \vec{u} \times \Omega^2 \overline{PQ}}{\Omega^3} \quad (4-54)$$

$$= \frac{\Omega^3 (\vec{u} \times \overline{PQ})}{\Omega^3} \quad (4-55)$$

$${}^0\hat{u} = \vec{u} \times \overline{PQ} \quad (4-56)$$

Ò también se puede escribir:

$${}^Q\hat{u} = \overline{QP} \times \vec{u} \quad (4-57)$$

Que es compatible con el componente dual de la rotación unitaria que se especifico en la ecuación (4-35).

### Vector localizador del eje de rotación, dada la velocidad dual en un punto.

Dada la velocidad dual de un cuerpo en un punto  $Q$ , es posible localizar el eje de rotación mediante la determinación del vector  $\vec{r}$  que se extiende desde el punto  $Q$  hasta el eje al que es perpendicular.

La velocidad dual del cuerpo en el punto  $Q$  es:

$$\hat{V}^Q = \overline{\Omega} + \varepsilon \vec{V}^Q = \Omega \vec{u} + \varepsilon [V\vec{u} + \Omega(\vec{r} \times \vec{u})] \quad (4-58)$$

Siendo que, el componente dual de esta velocidad es:

$$\vec{V}^Q = V\vec{u} + \Omega(\vec{r} \times \vec{u}) \quad (4-59)$$

Por lo tanto:

$$\vec{V}^Q \times \vec{u} = [V\vec{u} + \Omega(\vec{r} \times \vec{u})] \times \vec{u} \quad (4-60)$$

$$= \Omega(\vec{r} \times \vec{u}) \times \vec{u} \quad (4-61)$$

Utilizando un vector identidad,

$$= -\Omega \vec{r} \quad (4-62)$$

Sustituyendo la ecuación (4-48) y reordenando, se obtiene:

$$-\vec{r} = \frac{\vec{v}^e \times \vec{\Omega}}{\Omega^2} \quad (4-63)$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}^e}{\Omega^2} \quad (4-64)$$

#### 4.4.2 Método matriz de transformación

Se puede observar que la ecuación (4-47) es semejante a la ecuación de transformación la cual fue desarrollada para cambiar la especificación de un vector dual de un sistema de coordenadas hasta otro con la misma orientación.

Así, se puede notar que si se conocen las velocidades lineales y angulares de un punto sobre el eje de rotación de un cuerpo rígido, se puede determinar las velocidades lineales y angulares de cualquier punto en el cuerpo mediante la expresión de la velocidad dual del eje de rotación en términos de un sistema de coordenadas con origen en el punto de interés.

Tal como se ha utilizado las matrices de transformación en lugar de la ecuación de la transformación para describir los vectores duales en diferentes marcos, se puede utilizar las matrices de transformación para determinar la velocidad dual de cualquier punto en un cuerpo, teniendo la velocidad dual del eje de rotación. El enfoque de la matriz puede tener en cuenta no solo la transformación entre el marco

con origen sobre el eje de rotación y el marco con origen en el punto de interés, pero además cualquier rotación entre los marcos.

Por ende, se debe adoptar la siguiente notación para velocidad dual:

${}^P\hat{V}_{ij}^R$  = Velocidad dual en el punto P de un cuerpo  $i$  relativo a un cuerpo  $j$  en términos de los vectores unitarios del marco {R}.

#### 4.4.3 Velocidades en diferentes puntos de un cuerpo rígido.

Si se conoce la velocidad dual  ${}^S\hat{V}_{ij}^S$  de un cuerpo rígido expresado en un marco {S} con origen en un punto S sobre el eje de rotación, entonces la velocidad dual en cualquier otro punto P en el cuerpo expresado en los vectores unitarios de un marco {P} con origen en el punto P y posiblemente gira relativa al marco {S} es:

$${}^P\hat{V}_{ij}^P = {}^P\hat{T}^S {}^S\hat{V}_{ij}^S \quad (4-65)$$

#### 4.4.4 Velocidades expresadas en diferentes marcos.

Para expresar esta velocidad en los vectores unitarios de un marco {Q} diferente que el marco {P}, es necesario considerar solo la rotación entre los dos marcos. Por lo tanto:

$${}^Q\hat{V}_{ij}^P = {}^Q\hat{T}_P {}^P\hat{V}_{ij}^P \quad (4-66)$$

Donde la matriz  ${}^Q\hat{T}_P$  es el componente primario del número dual de la matriz coordenada de transformación  ${}^Q\hat{T}_P$ .

Porque la velocidad dual no es un vector lineal, la traslación entre los diferentes marcos en los cuales esta expresado no es un factor.

#### 4.4.5 Velocidad relativa.

La ecuación de velocidad relativa de cinemática elemental se puede amplificar a números-duales mecánicos.

$$\hat{V}_{ki} = \hat{V}_{ji} + \hat{V}_{kj} \quad (4-67)$$

Donde  $\hat{V}_{mn}$  denota la velocidad dual del eslabón  $m$  relativo al eslabón  $n$ . Cuando el eslabón  $n$  es el fijo el subfijo es omitido en las formulaciones cinemáticas elementales.

Con el fin de completar estas velocidades duales, deben representarse todos los movimientos en el mismo punto y expresarse en el mismo marco. Permitir al punto A ser la articulación donde los eslabones  $i$  y  $j$  se conectan y permitir que el punto B sea la articulación donde los eslabones  $j$  y  $k$  se conectan como se muestra en la Figura 4.5. Las velocidades relativas de los eslabones adyacentes son generalmente expresadas en su articulación y en un marco con origen en la articulación. Así se tienen las velocidades  ${}^A\hat{V}_{ji}^A$  y  ${}^B\hat{V}_{kj}^B$ .

Para expresar cada velocidad dual en el mismo punto y de esta forma los mismos vectores unitarios, se realiza la transformación de  ${}^A\hat{V}_{ji}^A$  a  ${}^B\hat{V}_{ji}^B$  mediante:

$${}^B\hat{V}_{ji}^B = {}^B\hat{T}_A^{} \quad {}^A\hat{V}_{ji}^A \quad (4-68)$$

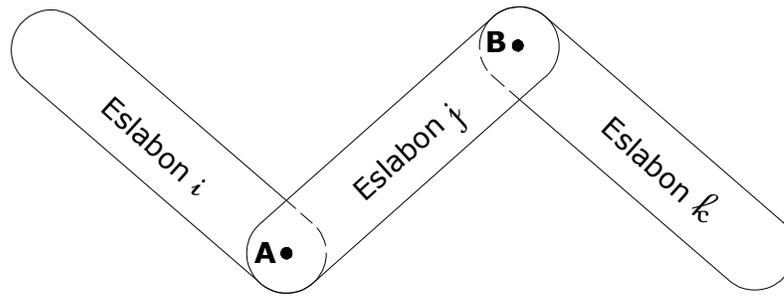


Figura 4.5 Cuando varios cuerpos se mueven relativamente uno de otro. Las velocidades duales se pueden obtener usando la ecuación de la velocidad relativa dual.

Substituyendo la ecuación (4-68) en la ecuación (4-67) se obtiene:

$${}^B\hat{V}_{ki}^B = {}^B\hat{T}_A {}^A\hat{V}_{ji}^A + {}^A\hat{V}_{kj}^B \quad (4-69)$$

Esta es la ecuación de la velocidad relativa dual. (Fischer, 1999)

Si la velocidad dual  ${}^B\hat{V}_{ki}^B$  se requiere en los vectores unitarios de algún sistema de coordenadas {C}, se puede simplemente rotar:

$${}^C\hat{V}_{ki}^C = {}^C\hat{T}_B {}^B\hat{V}_{ki}^B \quad (4-70)$$

### 4.5 APLICACIONES

A continuación se presenta el desarrollo del procedimiento y resultados del análisis de velocidad del manipulador de configuración cilíndrica que se ha tomado como modelo en el análisis de desplazamiento del capítulo precedente, se utilizará el método de la propagación de las velocidades usando la ecuación de velocidad relativa dual.

1) Se realiza la asignación de marcos de referencia:

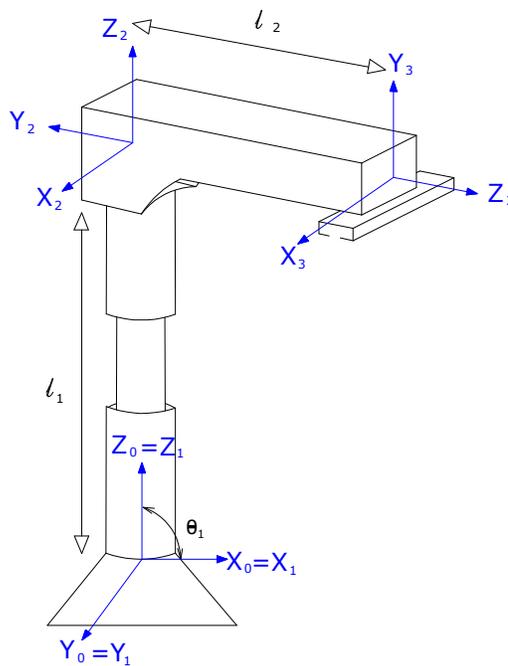


Figura 3.12 Manipulador robótico configuración cilíndrica.

2) Se establecen los parámetros de Denavit-Hartenberg para cualquier ángulo:

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$\theta_i$	$d_i$
1	0	0	$\theta_1$	0
2	0	0	0	$l_1$
3	-90	0	0	$l_2$

3) Se toman las matrices de transformación para determinar sus transpuestas:

$${}^0_1\hat{M} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow {}^1_0\hat{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-71)$$

$${}^1_2\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon l_1 & 0 \\ \varepsilon l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow {}^2_1\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon l_1 & 0 \\ -\varepsilon l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-72)$$

$${}^2_3\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon l_2 \\ \varepsilon l_2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow {}^3_2\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon l_2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-73)$$

4) Se realiza el análisis de velocidad:

A continuación se presentan las velocidades que se manejan para cada articulación:

$${}^1\hat{V}_{10}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad (4-74)$$

$${}^2\hat{V}_{21}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{l}_1 \end{Bmatrix} \quad (4-75)$$

$${}^3\hat{V}_{32}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{l}_2 \end{Bmatrix} \quad (4-76)$$

Estas velocidades duales permiten obtener la velocidad a la cual el eslabón 1 se mueve relativamente al eslabón fijo 0 Ecuación (4-74), la velocidad a la cual se mueve el eslabón 2 con respecto al 1, Ecuación (4-75) y finalmente la velocidad a la cual el eslabón 3 se mueve relativamente al 2, Ecuación (4-76).

Para determinar la velocidad del efector final (eslabón 3) relativa al eslabón fijo 0, se emplea el método de velocidades relativas, la ecuación que define esta velocidad dual se escribe a continuación:

$${}^3\hat{V}_{30}^3 = {}^3\hat{T}^2 {}^2\hat{V}_{20}^2 + {}^3\hat{V}_{32}^3 \quad (4-77)$$

Para resolver la Ecuación (4-77), es necesario determinar la velocidad dual en el punto 2 del eslabón 2 relativo al eslabón fijo 0 en términos de los vectores unitarios del marco {0}, usando también el método de la velocidad relativa dual se procede a resolver la ecuación:

$${}^2\hat{V}_{20}^2 = {}^2\hat{T}^1 {}^1\hat{V}_{10}^1 + {}^2\hat{V}_{21}^2 \quad (4-78)$$

$${}^2\hat{V}_{20}^2 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon l_1 & 0 \\ -\varepsilon l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + l_1 \end{Bmatrix}$$

Conociendo ahora el valor de  ${}^2\hat{V}_{20}^2$ , se puede resolver la Ecuación (4-47), que corresponde a la velocidad del manipulador robótico.

$${}^3\hat{V}_{30}^3 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon l_2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + l_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{Bmatrix} \quad (4-77)$$

$${}^3\hat{V}_{30}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + l_1 + l_2 \end{Bmatrix}$$

## 4.6 CONCLUSIONES

Al realizar el análisis de velocidad para el manipulador robótico de configuración cilíndrica, se puede observar que el método de velocidades relativas resulto practico y breve, pero esta ventaja se debe a que se trabaja con elementos duales puesto que este mismo método aplicado en números convencionales resulta más complejo.

Al trabajar con números convencionales la dificultad que presenta el método de propagación de velocidades provoca que se adopte un nuevo método que es el de Jacobiano, el cual se presento al principio de este capítulo, este método requiere aproximadamente la mitad de las operaciones que requiere el método de propagación de velocidades para resolver el análisis del manipulador. En cambio al emplear números duales no es necesario usar el jacobiano, en el cual se necesitarían definir además de las matrices de transformación, las matrices de los jacobianos y las ecuaciones que permitirían sintetizar todas estas en un solo elemento que definiría la velocidad del manipulador.

El método de velocidades relativas con números duales permite teniendo las matices de transformación pasar directamente a la resolución de ecuaciones mismas que son de composición sencilla, y el numero de ecuaciones a resolver dependerá de el numero de eslabones del manipulador y no involucrara los grados de libertad a diferencia del método del Jacobiano.

# CAPÍTULO 5

## ANÁLISIS DINÁMICO



En este capítulo se comenzará por considerar el modelo de una articulación simple de rotación y su generalización al caso de  $n$  articulaciones. Después se introduce la formulación de Lagrange-Euler. La siguiente sección se dedicará al método de Newton- Euler, Posteriormente se aplicaran todos estos conceptos a la metodología de los números duales para entonces comparar los resultados.

## 5.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo del desarrollo de esta investigación se ha considerado la geometría de los robots, así como el movimiento sin analizar las fuerzas que lo producen, es necesario considerar que las velocidades lineales y angulares viene dadas por las fuerzas y pares que se aplican a la estructura mecánica y dependen también de las magnitudes de las masas y su distribución. Las relaciones involucradas constituyen el modelo dinámico del manipulador. La identificación del modelo dinámico de un robot podría considerarse en general difícil. Por lo tanto, la consideración de dicho modelo complica el desarrollo e implantación del sistema de control. Por ello, muchos sistemas de control de robots han sido diseñados utilizando fundamentalmente el modelo cinemático, Los resultados son aceptables cuando los movimientos del robot son suaves no produciéndose aceleraciones significativas. Sin embargo, cuando es necesario realizar movimientos rápidos involucrándose aceleraciones y masas importantes, la consideración del modelo dinámico resulta imprescindible.

Asociado a esto, cabe señalar también que la evolución de la robótica ha llevado al desarrollo de maquinas en las que los aspectos dinámicos son los más importantes en el diseño del sistema de control, tal como sucede en los manipuladores flexibles o en los vehículos robóticos.

## 5.2 ARTICULACIÓN DE SIMPLE ROTACIÓN

Se considera el posicionamiento de un eje correspondiente a una articulación caracterizada por un momento de inercia  $I$  y un coeficiente de fricción viscosa  $b$  en el que se aplica un par  $\tau$ , tal como se ilustra en la Figura 5.1

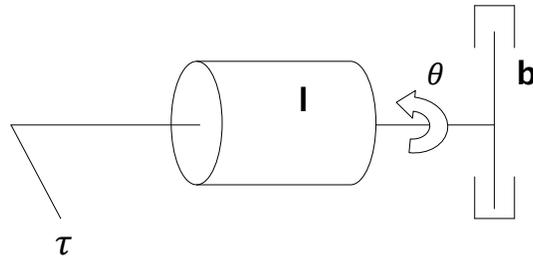


Figura 5.1 Articulación de Rotación

El par aplicado  $\tau$  y el ángulo girado  $\theta$  están relacionados mediante:

$$\tau = I\theta'' + b\theta \quad (5-1)$$

El primer término del lado derecho representa el par de inercia, y el segundo el de rozamiento viscoso, en este caso, el modelo es lineal. Tomando transformadas de Laplace para condiciones iniciales nulas, se tiene que la función de transferencia viene dada por:

$$\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{Is^2 + bs} \quad (5-2)$$

Siendo  $\tau(s)$  la transformada de Laplace del par de entrada, y  $\theta(s)$  la transformada de Laplace del ángulo girado.

Este modelo simple puede complicarse si se considera, por ejemplo, un modelo más completo de las fricciones, incluyendo tanto la fricción viscosa como la de Coulomb. En este caso se tendría el modelo no lineal:

$$\tau = I\theta'' + b\theta' + c \operatorname{sig}(\theta') \quad (5-3)$$

Siendo  $\operatorname{sig}(\theta')$  la función de signo definida como:

$$\text{sig}(\theta') = 1 \quad \text{para } \theta' > 0$$

$$\text{sig}(\theta') = -1 \quad \text{para } \theta' < 0$$

Considérese ahora un péndulo invertido, que puede contemplarse también como un manipulador con una única articulación de rotación, como se ilustra en la Figura 5.2.

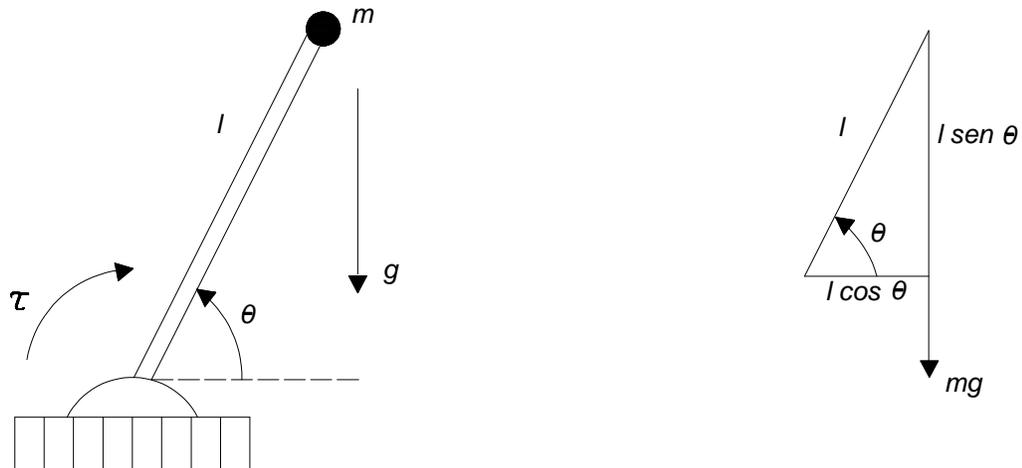


Figura 5.2 Manipulador con una articulación.

Si se supone que la masa está concentrada en el extremo, se tendrá un momento de inercia de  $I = ml^2$ . La gravedad genera un par sobre el eje de la base que viene dado por  $mgl \cos \theta$ . Considérese ahora un modelo de las fricciones en el que se incluyen fricciones viscosas y las de Coulomb. En este caso, el modelo vendrá dado por:

$$\tau = ml^2\theta'' + mgl \cos \theta + b\theta' + c \text{sig}(\theta') \quad (5-4)$$

La Ecuación (5-4) puede escribirse como:

$$\tau = I\theta'' + G(\theta) + F(\theta') \quad (5-5)$$

En la cual:

$$G(\theta) = mlg \cos \theta \quad (5-6)$$

Representa los efectos gravitatorios y

$$F(\theta') = b\theta' + c \operatorname{sig}(\theta') \quad (5-7)$$

Son los pares generados por las fricciones. (Ollero, 2001)

### 5.3 GENERALIZACIÓN: MODELO DE UN ROBOT MANIPULADOR CON $n$ ARTICULACIONES.

Para este análisis, continuando con la hipótesis de masas concentradas, se considera un robot con  $n$  articulaciones.

En este caso, cuando se estudia una articulación será necesario tener en cuenta los pares generados sobre ella por el resto de las articulaciones. Como se abordará más adelante en este capítulo, el modelo dinámico completo de un manipulador de  $n$  articulaciones tiene la forma

$$\tau = M(\theta)\theta'' + G(\theta) + V(\theta, \theta') + F(\theta') \quad (5-8)$$

En la cual  $\tau, G, V$  y  $F$  son ahora vectores de  $n$  elementos y  $M(\theta)$  es una matriz de  $n \times n$  a la que se conoce como matriz de masas del manipulador. Los elementos de  $M$  dependen de las distintas variables articulares y tienen como coeficientes expresiones en las que intervienen los valores de las masas concentradas y las longitudes entre ellas.

Los elementos del vector de términos gravitatorios  $G(\theta)$  también depende las distintas variables articulares.

Por lo que respecta al vector de fricciones  $F(\theta')$ , sus elementos dependen solo de la variable articular correspondiente; es decir, pueden desacoplarse.

En último lugar se nota que se ha añadido un vector  $V(\theta)$  que permite considerar los pares generados por las fuerzas centrífugas y de Coriolis.(Ollero, 2001)

#### 5.4 FORMULACIÓN DE LAGRANGE-EULER

Esta formulación está basada en una interpretación de la energía involucrada.

En el ejemplo del manipulador con una única articulación de la sección precedente, la energía cinética está dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}I\theta'^2 \quad (5-9)$$

Y la energía potencial se define mediante:

$$E_p = mgl \operatorname{sen}\theta \quad (5-10)$$

La función de Lagrange se define como:

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\theta'^2 - mgl \operatorname{sen}\theta \quad (5-11)$$

La formulación dinámica se basa en la ecuación:

$$\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (5-12)$$

Siendo  $\tau$  el par aplicado.

Por tanto derivando en (5-11) se tendrá:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \cos\theta \quad (5-13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = ml^2 \theta' \quad (5-14)$$

Substituyendo en (5-12) se obtiene:

$$\tau = ml^2 \theta'' + mgl \cos\theta \quad (5-15)$$

Que coincide con la ecuación (5-4) cuando no se consideran las fricciones.

La formulación dinámica (5-12) se generaliza para el caso de un manipulador con n articulaciones según:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1 \dots \dots \dots n \quad (5-16)$$

Donde:

$q_i, \quad i = 1 \dots \dots \dots n$  = Las variables articulares

$q_i', \quad i = 1 \dots \dots \dots n$  = Las velocidades articulares

$L = E_c - E_p$  = La diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial total

La ecuación (5-16) sigue siendo válida para el movimiento de sólidos con n coordenadas generalizadas.

Conociendo las matrices de transformación entre los sistemas de referencias asociados a cada articulación y los tensores de inercia, es posible formular un algoritmo para obtener las matrices M, G y V en la ecuación (5.8) (Ollero, 2001)

## 5.5 MÉTODO DE NEWTON-EULER

La obtención de un modelo dinámico como el de la ecuación (5-8) requiere generalizar a las aceleraciones los conceptos y notación introducidos en el capítulo anterior para las velocidades. Por lo tanto se comenzará por presentar las expresiones correspondientes a las aceleraciones y posteriormente se expone el método Newton-Euler en su forma iterativa.

### 5.5.1 Aceleraciones

**Aceleración lineal.**- Se toma en cuenta que la velocidad  ${}^A V_Q$  del punto  $Q$  con respecto al marco  $\{A\}$  conocidos la posición  ${}^B Q$  y velocidad  ${}^B V_Q$  con respecto a  $\{B\}$  cuando los orígenes de  $\{A\}$  y  $\{B\}$  son coincidentes, viene dada por:

$${}^A V_Q = {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q \quad (5-17)$$

Que también se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} ({}^A_B R {}^B Q) = {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q \quad (5-18)$$

Si en la ecuación (5-18) se sustituye la posición por la velocidad, esta expresión se puede utilizar para la aceleración:

$$\frac{d}{dt}({}^A R {}^B V_Q) = {}^A R {}^B V'_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B V_Q \quad (5-19)$$

Tomando derivadas con respecto al tiempo en (5-17) se obtiene:

$${}^A V'_Q = \frac{d}{dt}({}^A R {}^B V_Q) + {}^A \Omega'_B \times {}^A R {}^B Q + {}^A \Omega_B \times \frac{d}{dt}({}^A R {}^B Q) \quad (5-20)$$

Al substituir la ecuación (5-18) en el último termino de lado derecho de la ecuación (5-20):

$$\begin{aligned} {}^A V'_Q &= {}^A R {}^B V'_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega'_B \times {}^A R {}^B Q + {}^A \Omega_B \times ({}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B Q) \\ &= {}^A R {}^B V'_Q + 2 {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega'_B \times {}^A R {}^B Q + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B Q) \end{aligned} \quad (5-21)$$

Si los orígenes de los sistemas de referencias {A} y {B} no son coincidentes, hay que añadir el término  ${}^A V'_{ORGB}$  que representa la aceleración lineal de origen:

$${}^A V'_Q = {}^A V'_{ORGB} + {}^A R {}^B V'_Q + 2 {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega'_B \times {}^A R {}^B Q + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B Q) \quad (5-22)$$

Para el caso particular en el que el punto Q no varía con respecto a B se tendrá:

$${}^B V_Q = {}^B V'_Q = 0 \quad (5-23)$$

De donde:

$${}^A V'_Q = {}^A V'_{ORGB} + {}^A \Omega_B \times ({}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B Q) + {}^A \Omega'_B \times {}^A R {}^B Q \quad (5-24)$$

Una expresión de gran utilidad cuando se requiere calcular la velocidad lineal de un manipulador.

**Aceleración angular.**- Si se supone que el marco {B} esta rotando con relación al sistema de referencia {A} con  ${}^A\Omega_B$ , y el marco {C} rotando con respecto a {B} con  ${}^B\Omega_C$ . Para calcular  ${}^A\Omega_C$  se suman los vectores expresados con relación al sistema de referencia {A}:

$${}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A_B R {}^B\Omega_C = 0 \quad (5-25)$$

Al derivar con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned} {}^A\Omega'_C &= {}^A\Omega'_B + \frac{d}{dt}({}^A_B R {}^B\Omega_C) \\ &= {}^A\Omega'_B + {}^A_B R {}^B\Omega'_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B\Omega_C \end{aligned} \quad (5-26)$$

Ecuación de interés para calcular la aceleración angular del manipulador.

### 5.5.2 Ecuaciones de Newton-Euler. Formulación iterativa

**Ecuaciones básicas.**-Si se considera un cuerpo rígido de masa total  $m$  cuyo centros de masas tiene una aceleración  $v'_C$ . De acuerdo con la ecuación de Newton, la fuerza que actúa en el centro de masas viene dada por:

$$F = mv'_C \quad (5-27)$$

Por otra parte, si un cuerpo rígido rota con velocidad angular  $\omega$  y aceleración angular  $\omega'$ , el momento angular que actúa en el cuerpo viene dado por la ecuación de Euler:

$$N = {}^C I \omega' + \omega + {}^C I \omega \quad (5-28)$$

Siendo  ${}^C I$  el tensor de inercias del cuerpo de un marco {C} cuyo origen está en el centro de masas.

Ahora, se pretende aplicar estas ecuaciones para calcular los pares que hay que aplicar a las articulaciones de un robot para que la posición  $\theta$ , velocidad  $\omega = \theta'$  y aceleración  $\omega' = \theta''$  de las articulaciones sean las deseadas. Se supondrá que la distribución de masas es conocida.

El problema puede resolverse de forma iterativa realizando, en primer lugar, iteraciones hacia fuera, desde la base a la última articulación, con objeto de calcular velocidades y aceleraciones y, a continuación, se calculan las fuerzas y pares actuando en cada articulación.

En las iteraciones hacia fuera se calculan la velocidad angular y las aceleraciones lineales y angulares del centro de masas, desde la articulación 1 a la  $n$ . Para ello es necesario propagar las velocidades angulares de la misma forma que se trató en el modelo cinemático. Si se considera el enlace, o eslabón de la cadena cinemática,  $i$  entre las articulaciones  $i$  e  $i + 1$  tal como se ilustra en la Figura 5.3. La relación entre las velocidades angulares en los sistemas de referencia  $\{i\}$  e  $\{i + 1\}$  asociados a las articulaciones viene dada por:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}{}_i R \ {}^i\omega_i + \theta'_{i+1} + {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (5-29)$$

Donde  ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$  es el vector unitario según el eje de la articulación  $\{i + 1\}$ .

Asimismo, es necesario propagar las aceleraciones. Teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior, la relación entre las aceleraciones de dos articulaciones consecutivas viene dada por:

$${}^{i+1}\omega'_{i+1} = {}^{i+1}\omega'_i + \theta''_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}R {}^i\omega_i \times \theta'_{i+1} + {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (5-30)$$

De donde:

$${}^{i+1}\omega'_{i+1} = {}^{i+1}R {}^i\omega'_i + \theta''_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}R {}^i\omega_i \times \theta'_{i+1} + {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (5-31)$$

Cuando la articulación  $i + 1$  es prismática como en la ecuación (5-31) se simplifica a:

$${}^{i+1}\omega'_{i+1} = {}^{i+1}R {}^i\omega'_i \quad (5-32)$$

Por otra parte, la aceleración lineal del origen de  $\{i + 1\}$  viene dada por:

$${}^{i+1}v'_{i+1} = {}^{i+1}R [ {}^i\omega'_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ( {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1} ) + {}^i v'_i ] \quad (5-33)$$

Donde  ${}^iP_{i+1}$  es el vector que expresa la posición del origen del marco  $\{i + 1\}$  en el marco  $\{i\}$  tal como se muestra en la Figura 5.3.

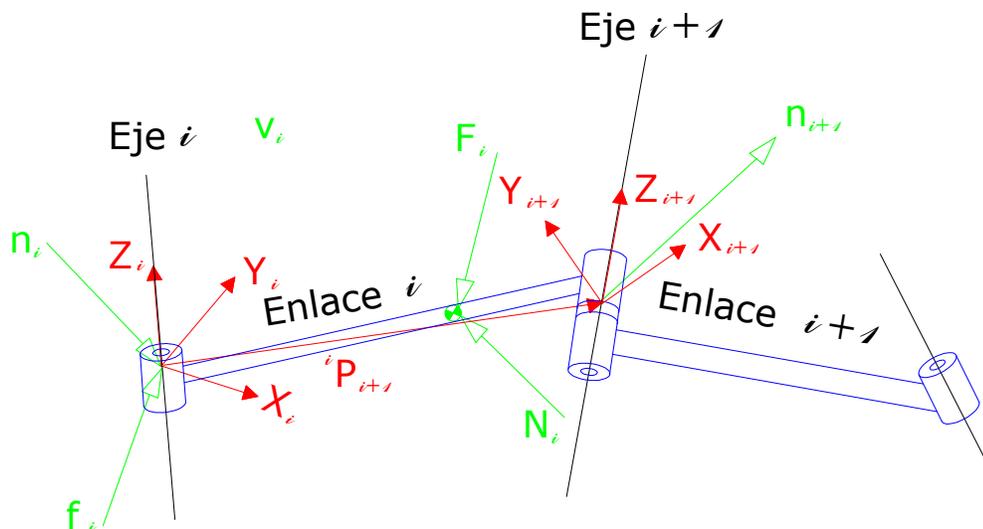


Figura 5.3 Balance de fuerzas en dos articulaciones consecutivas.

Si la articulación es prismática, hace falta añadir los términos correspondientes al desplazamiento  $d_i$  según la variable articular. Utilizando la expresión general de la aceleración lineal es posible escribir:

$${}^{i+1}v'_{i+1} = {}^{i+1}R'_i \left( {}^i\omega'_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^iv'_i \right) + 2 {}^{i+1}\omega_{i+1} \times d'_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + d''_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (5-34)$$

Por último, suponiendo que existe un marco  $\{C_i\}$  solidario a cada segmento, con su origen centrado en el centro de masas y con la misma orientación que la  $\{i\}$ , la aceleración de este centro viene dada por la misma expresión que la del origen, pero en este caso expresada en el marco  $\{i\}$ :

$${}^iv'_{ci} = {}^i\omega'_i \times {}^iP_{ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{ci}) + {}^iv'_i \quad (5-35)$$

En el segmento 1 las expresiones se simplifican ya que:

$${}^0\omega_0 = {}^0\omega'_0 = 0 \quad (5-36)$$

Una vez calculada la aceleración del centro de masas, pueden aplicarse las ecuaciones de Newton-Euler para determinar la fuerza y el par que actuarán en el centro de masas de cada enlace:

$$F_i = mv'_{ci} \quad (5-37)$$

$$N_i = {}^{c_1}I\omega'_i + \omega_i \times {}^{c_2}I\omega_i \quad (5-38)$$

A continuación se procede a realizar las iteraciones hacia adentro; es decir desde la última articulación hasta la base.

Sean  $f_i$  y  $n_i$  la fuerza y el par ejercidos en  $i$  por  $i - 1$ . El equilibrio de fuerzas en el eslabón  $i$  de la Figura 5.3 es:

$${}^iF_i = {}^i f_i - {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}f_{i+1} \quad (5-39)$$

El equilibrio de pares en el centro de masas es:

$${}^iN_i = {}^i n_i - {}^i n_{i+1} + (- {}^iP_{Ci}) \times {}^i f_i - ({}^iP_{i+1} - {}^iP_{Ci}) \times {}^i f_{i+1} \quad (5-40)$$

En consecuencia:

$${}^iN_i = {}^i n_i - {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}n_{i+1} - {}^iP_{Ci} \times {}^iF_i - {}^iP_{i+1} \times {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}f_{i+1} \quad (5-41)$$

Estas ecuaciones se aplican desde la última articulación hasta la primera. Si el extremo del manipulador está libre, se tendrá:  ${}^{N+1}f_{N+1} = 0$ ,  ${}^{N+1}n_{N+1} = 0$ ; en caso contrario, se comenzaría con los valores de las fuerzas y pares externos que actúan en el extremo.

Las expresiones en forma iterativa son:

$${}^i f_i = {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i \quad (5-42)$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{Ci} \times {}^iF_i + {}^iP_{i+1} \times {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}f_{i+1} \quad (5-43)$$

El par en una articulación rotacional es la componente  $\hat{Z}$  del par aplicado por un enlace en el siguiente:

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (5-44)$$

Asimismo, la fuerza en una articulación prismática es:

$$\tau_i = {}^i f_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (5-45)$$

Estas ecuaciones permiten calcular las actuaciones necesarias en todas las articulaciones.

Las expresiones anteriores hacen posible formular un algoritmo iterativo. Este algoritmo tiene dos partes. En la primera se calculan las velocidades y aceleraciones de los enlaces directamente desde el enlace 1 al  $n$ , aplicando las ecuaciones de Newton-Euler en cada enlace.

En la segunda, se calculan las fuerzas y pares de interacción y finalmente los pares que hay que aplicar en los actuadores de las articulaciones, todo ello comenzando en la articulación  $n$  y terminado en la 1.

Por consiguiente, el algoritmo para un robot manipulador con seis articulaciones consiste en ejecutar las siguientes operaciones. (Craig, 1986)

### ***Iteraciones hacia fuera***

Para  $i = 0$  hasta 5

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \quad {}^i\omega_i + \theta'_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (5-46)$$

$${}^{i+1}\omega'_{i+1} = {}^{i+1}R \quad {}^i\omega'_i + {}^{i+1}R \quad {}^i\omega'_i \times \theta'_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \theta''_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (5-47)$$

$${}^{i+1}v'_{i+1} = {}^{i+1}{}_iR \left[ {}^i\omega'_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^iv'_i \right] \quad (5-48)$$

$${}^{i+1}v'_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\omega'_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}v'_{i+1} \quad (5-49)$$

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}v'_{C_{i+1}} \quad (5-50)$$

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\omega'_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1} \quad (5-51)$$

### ***Iteraciones hacia dentro***

Para  $i = 6$  hasta 1.

$${}^if_i = {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i \quad (5-52)$$

$$n_1 = {}^iN_i + {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{C_i} \times {}^iF_i + {}^iP_{i+1} \times {}_{i+1}{}^iR \quad {}^{i+1}f_{i+1} \quad (5-53)$$

$$\tau_i = {}^in_i^T \quad {}^i\hat{Z}_i \quad (5-54)$$

El efecto de las cargas gravitatorias en las articulaciones puede tenerse en cuenta haciendo  ${}^0v'_0 = G$ , siendo  $G$  el vector de la aceleración de la gravedad.

Las ecuaciones presentadas pueden utilizarse como método numérico o de forma analítica para desarrollar ecuaciones simbólicas.

El empleo como método numérico puede aplicarse de forma general para cualquier robot manipulador. Una vez que se ha especificado tensores de inercia, masas de enlaces, vectores  $P_C$  y matrices  ${}^{i+1}{}_iR$  de un determinado manipulador, las ecuaciones

pueden aplicarse directamente para calcular los pares de las articulaciones en cualquier movimiento.

## 5.6 ANÁLISIS DINÁMICO DE LOS MANIPULADORES

Si se considera el modelo dinámico expresado mediante la ecuación (5-8) al cual se añade ahora un nuevo término  $T_d$  para tener en cuenta dinámicas no modeladas y perturbaciones externas:

$$\tau = M(\theta)\theta'' + G(\theta) + F(\theta') + V(\theta, \theta') + T_d \quad (5-55)$$

Donde:

$\tau = [\tau_1 \dots \tau_n]^T$  = Los pares ejercidos por los actuadores en las  $n$  articulaciones.

$\theta = [\theta_1 \dots \theta_n]^T$  = El vector de las variables articulares.

$M(\theta)$  = La matriz  $n \times n$  de masas del manipulador.

$V(\theta, \theta')$  = Los pares debidos a las fuerzas centrífugas y de Coriolis.

$F(\theta')$  = Los pares debidos a las fricciones.

$G(\theta)$  = Los pares debidos a la gravedad.

La dificultad principal de estos modelos es la determinación de los parámetros.

La matriz de masas  $M(\theta)$  del manipulador es una matriz simétrica, definida positiva. Está acotada superior e inferiormente ya que sus elementos dependen de las variables  $\theta_i$  de las articulaciones mediante funciones trigonométricas de senos y cosenos (funciones acotadas para cualquier valor del argumento) que aparecen siempre en el numerador. La matriz es siempre invertible y su inversa es también definida positiva y acotada. Puede demostrarse que la energía cinética del manipulador viene dada por:

$$\frac{1}{2}\theta'^T M(\theta)\theta' \quad (5-56)$$

Los términos centrífugos y de Coriolis  $V(\theta, \theta')$  son cuadráticos en  $\theta'$ . En particular, los términos en  $\theta_i'^2$  corresponden a las fuerzas centrífugas de las articulaciones, y los términos en  $\theta_i\theta_j$  a las fuerzas de Coriolis. Estas funciones pueden factorizarse como:

$$V(\theta, \theta') = V_m(\theta, \theta')\theta' \quad (5-57)$$

Donde  $V_m(\theta, \theta')$  está relacionada con la derivada en el tiempo de la matriz de masas según:

$$V_m(\theta, \theta') = \frac{1}{2}(M'(\theta, \theta') + S) \quad (5-58)$$

Considerando que  $S$  es una matriz que satisface la propiedad ("skew symmetric")  $x^T S x = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{R}^n$ .

Esta matriz puede determinarse según  $S = U - U^T$ , siendo  $U$  una matriz de dimensiones  $n \times n$  que se obtiene mediante  $U = (I_n \otimes \theta'^T)(\partial M / \partial \theta)$ , expresión en la cual el primer paréntesis del lado derecho es una matriz  $n \times n$  que resulta del producto de Kronecker de la matriz unida por el vector de variables articulares (cada elemento de la matriz unida se multiplica por la transpuesta del vector de variables articulares), y  $\partial M / \partial \theta = [\partial M / \partial \theta_1 \dots \partial M / \partial \theta_n]^T$  es una matriz  $n^2 \times n$  que se obtiene derivando la matriz de masas con respecto a las variables articulares. (Lewis, 1993).

Los términos de fricción  $F(\theta')$  son complejos y difíciles de determinar. En principio, dependen de las velocidades de las variables articulares. Un posible modelo es:

$$F(\theta) = \tau_{fv} + \tau_{fc} \quad (5-59)$$

Donde  $\tau_{fv}$  es el par de fricción viscosa, que resulta ser proporcional a la velocidad  $\theta'$ :

$$\tau_{fv} = k\theta' \quad (5-60)$$

Siendo  $k$  una constante, y  $\tau_{fc}$  el par de fricción de Coloumb:

$$\tau_{fc} = c \operatorname{sgn}(\theta') \quad (5-61)$$

Tomando en cuenta que  $\operatorname{sgn}(\theta')$  la función signo. La fricción tiene un efecto local.  $F(\theta')$  esta desacoplada y cada elemento puede escribirse como  $f_i(\theta'_i)$ . En algunos casos se supone que las fuerzas de fricción son solo viscosas, por lo tanto:

$$F(\theta') = F_m\theta' + T_{df} \quad (5-62)$$

Donde  $F_m$  es una matriz diagonal de fricción viscosa y  $T_{df}$  representa otros efectos no estructurales de fricción (resonancias). A veces se modela también el efecto de las excentricidades en los engranajes y otros efectos que hacen que la fricción dependa, además de la velocidad  $\theta'$ , de las propias variables articulares  $\theta$ , con lo cual se escribe  $F(\theta, \theta')$ .

Finalmente, los términos  $G(\theta)$  son en los que aparece la gravedad  $g$ . Estos términos dependen en senos y cosenos de las variables articulares.  $G(\theta)$  esta acotada para cualquier valor de  $\theta$ .

## 5.7 OBTENCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS ARTICULARES.

La ecuación (5-8) que define el modelo dinámico relaciona los pares de control en las articulaciones. Si se pretende simular el comportamiento dinámico del manipulador ante determinados pares, es necesario resolver el modelo para obtener las trayectorias articulares. Se debe observar que, a partir de la ecuación (5-8) se obtiene:

$$\theta''(0) = M^{-1}(\theta)[\tau - V(\theta, \theta') - G(\theta) - F(\theta, \theta')] \quad (5-63)$$

Se recuerda que, como se indico en la sección anterior, la matriz de masas  $M(\theta)$  es invertible.

Las trayectorias articulares pueden obtenerse mediante la integración numérica. Suponiendo conocidas las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = \theta_0; \quad \theta'(0) = 0; \quad \theta''(0) = 0; \quad (5-64)$$

Puede aplicarse la ecuación (5-63) para obtener las segundas derivadas y, a partir de estas, las velocidades y las posiciones empleando técnicas tales como las de Euler.

El método de Newton-Euler presentado en la sección 5.5 de este capítulo puede aplicarse para resolver cualquier tipo de manipulador sin más que conocer sus parámetros. En particular, el método iterativo es más eficiente que otras formulaciones existentes en la literatura. Sin embargo, si solo se pretende resolver un determinado manipulador, resulta más apropiado emplear la forma cerrada de la ecuación (5-8).

## 5.7 ANÁLISIS DINÁMICO CON NUMEROS DUALES

Se requiere comenzar por generalizar a las aceleraciones los conceptos y notación introducidos en el capítulo anterior para las velocidades.

### 5.7.1 Aceleraciones duales

Si un punto P sobre el eje de rotación  $\vec{u}$  del movimiento de un cuerpo rígido tiene una velocidad dual:

$$\hat{V}^P = (\Omega + \varepsilon V)\vec{u} \quad (5-65)$$

Entonces aplicando la ecuación de transformación obtenemos la velocidad del cuerpo rígido en el punto Q:

$$\hat{V}^Q = \Omega \vec{u} + \varepsilon [V\vec{u} + \Omega(\vec{u} \times \vec{\rho})] \quad (5-66)$$

Donde el vector  $\vec{\rho}$  se extiende desde el punto P sobre el eje de rotación hasta el punto Q. La aceleración está definida como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, entonces la aceleración del cuerpo rígido en el punto Q será:

$$\hat{A}^Q = \frac{d}{dt} \hat{V}^Q = \frac{d}{dt} \{ \Omega \vec{u} + \varepsilon [V\vec{u} + \Omega(\vec{u} \times \vec{\rho})] \} \quad (5-67)$$

$$\hat{A}^Q = \frac{d}{dt} \Omega \vec{u} + \varepsilon \left[ \frac{d}{dt} V\vec{u} + \left( \frac{d}{dt} \Omega \right) (\vec{u} \times \vec{\rho}) + \Omega \left( \vec{u} \times \frac{d}{dt} \vec{\rho} \right) \right] \quad (5-68)$$

Ahora se usará el símbolo  $\alpha = \dot{\Omega}$  para representar la aceleración angular del cuerpo sobre el eje de rotación y el símbolo  $a = \dot{V}$  representando la aceleración lineal del punto P del cuerpo a lo largo del eje de rotación. Obsérvese que el eje de rotación  $\vec{u}$  es un vector constante durante todo el intervalo de tiempo, pues el vector  $\vec{\rho}$  localizado en el punto Q del cuerpo y el punto P en el eje de rotación se moverán juntos puesto que están fijados al cuerpo, por eso se puede decir que:

$$\frac{d}{dt} \vec{u} = 0 \quad (5-69)$$

Y además:

$$\frac{d}{dt} \vec{\rho} = \dot{\vec{\rho}} + \Omega(\vec{u} \times \vec{\rho}) = \Omega \vec{u} \times \vec{\rho} \quad (5-70)$$

Donde la velocidad  $\dot{\vec{\rho}} = 0$ , debido a la condición de cuerpo-rígido.

Entonces, la Ecuación (5-68) puede expresarse de la forma:

$$\hat{A}^Q = \alpha \vec{u} + \varepsilon [a \vec{u} + \alpha (\vec{u} \times \vec{\rho}) - \Omega^2 \vec{\rho}] \quad (5-71)$$

Cada término en esta ecuación tiene cierta importancia en el análisis físico del movimiento. El término  $\alpha \vec{u}$  representa la aceleración angular del cuerpo sobre el eje de rotación. Los términos duales son aceleraciones lineales. El término  $a \vec{u}$  representa la aceleración del deslizamiento a lo largo del eje de rotación, el término  $\alpha (\vec{u} \times \vec{\rho})$  corresponde a la aceleración tangencial a la trayectoria del punto Q y el término  $\Omega^2 \vec{\rho}$  indica la aceleración en la dirección normal a la trayectoria del punto Q.

Debido al componente normal, la aceleración dual no es un vector dual. Una comparación de la expresión para la aceleración dual con la expresión para la velocidad dual mostrará la diferencia. Debido al término extra, las aceleraciones de diferentes puntos en un cuerpo rígido no pueden obtenerse con la aplicación de la ecuación de transformación. Por esta razón, Yang (1966) ha descrito a la aceleración dual como un “vector pseudo-dual.”

Normalmente, el análisis dinámico se realiza basándose en aceleraciones, pero debido a que la aceleración dual no es un vector dual, esto nos dará una pequeña ventaja, y en su lugar consideraremos un momento dual en la formulación del comportamiento dinámico.

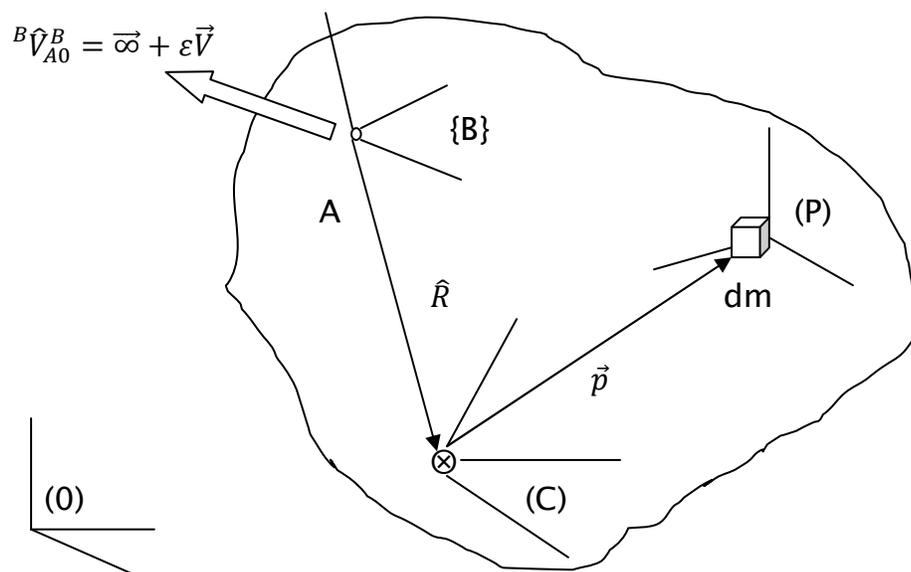


Figura 5.4 Cuerpo rígido A en movimiento relativo al marco fijo {0}

## 5.7.2 Momento Dual

Si se considera un cuerpo rígido en movimiento con respecto al sistema fijo 0 como se muestra en la Figura 5.4. Este cuerpo consiste de elementos  $dm$  en los puntos  $P$ , comprendiendo la masa total del cuerpo como:

$$m_A = \int dm \quad (5-72)$$

Y la velocidad del cuerpo A en el punto B relativa al sistema 0 en términos de un marco {B} con origen en el punto B es:

$${}^B\hat{V}_{AO}^B = \vec{\omega} + \varepsilon\vec{v} \quad (5-73)$$

Donde el vector  $\vec{v}$  representa la velocidad lineal y el vector  $\vec{\omega}$  representa la velocidad angular en el punto B, ambos vectores expresados en términos del marco {B}.

La velocidad dual del cuerpo A relativa al sistema 0 en términos del marco {P} orientada de la misma manera que en el marco {B} con el origen en el punto P es obtenida de la ecuación de transformación:

$${}^{B=P}\hat{V}_{AO}^B = \vec{\omega} + \varepsilon[\vec{v} - (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho}) \times \vec{\omega}] \quad (5-74)$$

En esta ecuación, el vector  $\vec{R}$  se extiende desde el punto B hasta un punto de referencia C y es expresado en términos de vectores unitarios del marco {B}. El vector  $\vec{\rho}$  va desde el punto C al punto P y se expresa en vectores unitarios de un marco {C} con el origen en el punto C cuya orientación relativa con el marco {B} está especificada por la transformación de la matriz  ${}^B T_P$ . El signo negativo aparece de elegir la dirección de los vectores desde el punto de la velocidad conocida hasta el punto de la velocidad desconocida.

El momento lineal de una partícula P en el punto P de un cuerpo rígido A relativo al sistema 0 con respecto al punto B en términos del marco {B} se define como:

$${}^B\vec{P}_P = [\vec{v} - (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho}) \times \vec{\omega}] dm \quad (5-75)$$

Donde la partícula tiene una masa elemental  $dm$ . El momento angular o momentum del momento de una partícula con masa elemental  $dm$  en el punto P dentro de un cuerpo rígido A en términos del marco {B} es:

$${}^B\vec{H}_P = (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho}) \times {}^B\vec{P}_P \quad (5-76)$$

$${}^B\vec{H}_P = (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho}) \times [\vec{v} - (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho}) \times \vec{\omega}] dm \quad (5-77)$$

El momento dual de la partícula es:

$${}^B\hat{H}_P = {}^B\vec{P}_P + \varepsilon {}^B\vec{H}_P \quad (5-78)$$

El momento dual de un cuerpo rígido A en el marco {B} es la suma del momento dual de cada una de las partículas que lo componen:

$${}^B\hat{H}_A = \int_A ({}^B\vec{P}_P + \varepsilon {}^B\vec{H}_P) \quad (5-79)$$

Substituyendo las ecuaciones (5-75) y (5-77) dentro de la ecuación (5-79) se obtiene:

$${}^B\hat{H}_A = \int_A [\vec{v} - (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho})] dm + \varepsilon \int_A (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho}) \times [\vec{v} - (\vec{R} + {}^B T_P \vec{\rho}) \times \vec{\omega}] dm \quad (5-80)$$

$$= \int_A \vec{v} dm - \int_A \vec{R} \times \vec{\omega} dm - \int_A {}^B T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm + \left\{ \begin{array}{l} \int_A \vec{R} \times \vec{v} dm + \int_A {}^B T_P \vec{\rho} \times \vec{v} dm \\ - \int_A \vec{R} \times \vec{R} \times \vec{\omega} dm - \int_A \vec{R} \times {}^B T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm - \int_A {}^B T_P \vec{\rho} \times \vec{R} \times \vec{\omega} dm - \int_A {}^B T_P \vec{\rho} \times {}^B T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm \end{array} \right\} \quad (5-81)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_A \vec{v} dm - \int_A \vec{R} \times \vec{\omega} dm - \int_A {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm \\
 &\quad + \\
 &\varepsilon \left\{ \begin{aligned} &\int_A \vec{R} \times \vec{v} dm + \int_A {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{v} dm \\ & - \int_A \vec{R} \times \vec{R} \times \vec{\omega} dm - \int_A \vec{R} \times {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm + \int_A \vec{R} \times {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm - \int_A {}^B_C T_P \vec{\rho} \times {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm \end{aligned} \right\} \quad (5-82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_A \vec{v} dm - \int_A \vec{R} \times \vec{\omega} dm - \int_A {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm \\
 &\quad + \\
 &\varepsilon \left\{ \int_A \vec{R} \times \vec{v} dm + \int_A {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{v} dm - \int_A \vec{R} \times \vec{R} \times \vec{\omega} dm - \int_A {}^B_C T_P \vec{\rho} \times {}^B_C T_P \vec{\rho} \times \vec{\omega} dm \right\} \quad (5-83)
 \end{aligned}$$

Ahora, se realizarán las siguientes substituciones:

$$\vec{R} \times = \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5-84)$$

$${}^B_C T_P \vec{\rho} \times = {}^B_C T_P \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} {}^B_C T_P^{-1} \quad (5-85)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 {}^B\hat{H}_A = & \int_A \vec{v} dm - \int_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \vec{\omega} dm - \int_A {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \vec{\omega} dm \\
 & + \\
 \varepsilon \left\{ \begin{aligned} & \int_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \vec{v} dm + \int_A {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \vec{v} dm \\ & - \int_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \vec{\omega} dm \\ & - \int_A {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \vec{\omega} dm \end{aligned} \right\} \quad (5-86)
 \end{aligned}$$

Ahora, las velocidades en el punto  $B$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{\omega}$ , el vector  $\vec{R}$  y el operador de rotación  ${}^B T_P$  son constantes para todos los puntos del cuerpo rígido  $A$ , así que pueden sacarse de las integrales

$$\begin{aligned}
 {}^B\hat{H}_A = & m_A \vec{v} - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{\omega} + {}^B T_P \left\{ \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm \right\} {}^B T_P^{-1} \vec{\omega} \\
 & + \\
 \varepsilon \left\{ \begin{aligned} & m_A \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{v} + {}^B T_P \left\{ \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm \right\} {}^B T_P^{-1} \vec{v} \\ & - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{\omega} \\ & - {}^B T_P \left\{ \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm \right\} {}^B T_P^{-1} \vec{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (5-87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_A \vec{v} - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{\omega} + {}^B C T_P \left\{ \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm \right\} {}^B C T_P^{-1} \vec{\omega} \\
 + \\
 \left. \begin{aligned}
 & \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} + {}^B C T_P \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm {}^B C T_P^{-1} \right\} \vec{v} \\
 & - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + {}^B C T_P \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm {}^B C T_P^{-1} \right\} \vec{\omega}
 \end{aligned} \right\} \quad (5-88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_A \vec{v} - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{\omega} + {}^B C T_P \left\{ \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm \right\} {}^B C T_P^{-1} \vec{\omega} \\
 + \\
 \left. \begin{aligned}
 & \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} + {}^B C T_P \int_A \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} dm {}^B C T_P^{-1} \right\} \vec{v} \\
 & - \left\{ m_A \begin{bmatrix} -R_y^2 - R_z^2 & R_x R_y & R_x R_z \\ R_x R_y & -R_x^2 - R_z^2 & R_y R_z \\ R_x R_z & R_y R_z & -R_x^2 - R_y^2 \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + {}^B C T_P \int_A \begin{bmatrix} -\rho_y^2 - \rho_z^2 & \rho_x \rho_y & \rho_x \rho_z \\ \rho_x \rho_y & -\rho_x^2 - \rho_z^2 & \rho_y \rho_z \\ \rho_x \rho_z & \rho_y \rho_z & -\rho_x^2 - \rho_y^2 \end{bmatrix} dm {}^B C T_P^{-1} \right\} \vec{\omega}
 \end{aligned} \right\} \quad (5-89)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m_A \vec{v} - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} + {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -\int_A \rho_z dm & \int_A \rho_y dm \\ \int_A \rho_z dm & 0 & -\int_A \rho_x dm \\ -\int_A \rho_y dm & \int_A \rho_x dm & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \right\} \vec{\omega} \\
 & + \left\{ \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} + {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -\int_A \rho_z dm & \int_A \rho_y dm \\ \int_A \rho_z dm & 0 & -\int_A \rho_x dm \\ -\int_A \rho_y dm & \int_A \rho_x dm & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \right\} \vec{v} \right. \\
 & \left. + \left\{ m_A \begin{bmatrix} -R_y^2 - R_z^2 & R_x R_y & R_x R_z \\ R_x R_y & -R_x^2 - R_z^2 & R_y R_z \\ R_x R_z & R_y R_z & -R_x^2 - R_y^2 \end{bmatrix} \right. \right. \\
 & \left. \left. + {}^B T_P \begin{bmatrix} -\int_A (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm & \int_A \rho_x \rho_y dm & \int_A \rho_x \rho_z dm \\ \int_A \rho_x \rho_y dm & -\int_A (\rho_x^2 + \rho_z^2) dm & \int_A \rho_y \rho_z dm \\ \int_A \rho_x \rho_z dm & \int_A \rho_y \rho_z dm & -\int_A (\rho_x^2 + \rho_y^2) dm \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \right\} \vec{\omega} \right\} \quad (5-90)
 \end{aligned}$$

Los primeros momentos de inercia del cuerpo A con respecto al punto C, en términos de vectores unitarios del marco {C} se definen a continuación:

$${}^C S_{Ax}^C = \int_A \rho_x dm \quad (5-91)$$

$${}^c S_{Ay}^c = \int_A \rho_y dm \quad (5-92)$$

$${}^c S_{Az}^c = \int_A \rho_z dm \quad (5-93)$$

Estos pueden ser combinados dentro de una matriz:

$$[{}^c S_A^c] = \begin{bmatrix} 0 & -{}^c S_{Az}^c & {}^c S_{Ay}^c \\ {}^c S_{Az}^c & 0 & -{}^c S_{Ax}^c \\ -{}^c S_{Ay}^c & {}^c S_{Ax}^c & 0 \end{bmatrix} \quad (5-94)$$

Los segundos momentos de inercia del cuerpo A con respecto al punto C en términos de vectores unitarios del marco {C} se definen como:

$${}^c J_{Axx}^c = \int_A (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm \quad (5-95)$$

$${}^c J_{Ayy}^c = \int_A (\rho_x^2 + \rho_z^2) dm \quad (5-96)$$

$${}^c J_{Azz}^c = \int_A (\rho_x^2 + \rho_y^2) dm \quad (5-97)$$

Los productos de inercia del cuerpo A con respecto al punto C en términos de vectores unitarios del marco {C} se definen como:

$${}^c J_{Axy}^c = \int_A \rho_x \rho_y dm \quad (5-98)$$

$${}^c J_{Ayz}^c = \int_A \rho_y \rho_z dm \quad (5-99)$$

$${}^c J_{Axz}^c = \int_A \rho_x \rho_z dm \quad (5-100)$$

Los segundos momentos de inercia y los productos de inercia son combinados dentro de una matriz de inercia (en realidad un tensor de inercia) definido como:

$$[{}^C J_A^C] = \begin{bmatrix} {}^C J_{Axx}^C & -{}^C J_{Axy}^C & -{}^C J_{Axz}^C \\ -{}^C J_{Axy}^C & {}^C J_{Ayy}^C & -{}^C J_{Ayz}^C \\ -{}^C J_{Axz}^C & -{}^C J_{Ayz}^C & {}^C J_{Azz}^C \end{bmatrix} \quad (5-101)$$

La ecuación para el momento dual del cuerpo A ahora puede escribirse de la siguiente manera:

$$m_A \vec{v} - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} + {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -{}^C S_{Az}^C & {}^C S_{Ay}^C \\ {}^C S_{Az}^C & 0 & -{}^C S_{Ax}^C \\ -{}^C S_{Ay}^C & {}^C S_{Ax}^C & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \vec{\omega} \right\} + \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} + {}^B T_P \begin{bmatrix} 0 & -{}^C S_{Az}^C & {}^C S_{Ay}^C \\ {}^C S_{Az}^C & 0 & -{}^C S_{Ax}^C \\ -{}^C S_{Ay}^C & {}^C S_{Ax}^C & 0 \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \vec{v} \right\} - \left\{ m_A \begin{bmatrix} -R_y^2 - R_z^2 & R_x R_y & R_x R_z \\ R_x R_y & -R_x^2 - R_z^2 & R_y R_z \\ R_x R_z & R_y R_z & -R_x^2 - R_y^2 \end{bmatrix} + {}^B T_P \begin{bmatrix} {}^C J_{Axx}^C & -{}^C J_{Axy}^C & -{}^C J_{Axz}^C \\ -{}^C J_{Axy}^C & {}^C J_{Ayy}^C & -{}^C J_{Ayz}^C \\ -{}^C J_{Axz}^C & -{}^C J_{Ayz}^C & {}^C J_{Azz}^C \end{bmatrix} {}^B T_P^{-1} \vec{\omega} \right\} \quad (5-102)$$

Ahora, los primeros momentos de inercia y segundos momentos de inercia del cuerpo A con respecto al punto C en términos del marco {B} son:

$$[{}^B S_A^C] = {}^B T_P [{}^C S_A^C] {}^B T_P^{-1} \quad (5-103)$$

$$[{}^B J_A^C] = {}^B T_P [{}^C J_A^C] {}^B T_P^{-1} \quad (5-104)$$

Si la transformación de matriz  ${}^B T_P$  representa una rotación sobre el eje z, entonces las ecuaciones anteriores pueden reducirse a las ecuaciones dadas en textos estándares para calcular los primeros y segundos momentos y productos de inercia en un marco de coordenadas que tiene una orientación diferente a la original (en la que fueron dados los datos).

Entonces la ecuación para el momento dual puede reescribirse así:

$$\begin{aligned}
 & m_A \vec{v} - \left\{ m_A \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -{}^B S_{Az}^C & {}^B S_{Ay}^C \\ {}^B S_{Az}^C & 0 & -{}^B S_{Ax}^C \\ -{}^B S_{Ay}^C & {}^B S_{Ax}^C & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{\omega} \\
 & + \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -{}^B S_{Az}^C & {}^B S_{Ay}^C \\ {}^B S_{Az}^C & 0 & -{}^B S_{Ax}^C \\ -{}^B S_{Ay}^C & {}^B S_{Ax}^C & 0 \end{bmatrix} \vec{v} \right. \\
 & \left. - \left\{ m_A \begin{bmatrix} -R_y^2 - R_z^2 & R_x R_y & R_x R_z \\ R_x R_y & -R_x^2 - R_z^2 & R_y R_z \\ R_x R_z & R_y R_z & -R_x^2 - R_y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^B J_{Axx}^C & -{}^B J_{Axy}^C & -{}^B J_{Axx}^C \\ -{}^B J_{Axy}^C & {}^B J_{Ayy}^C & -{}^B J_{Ayz}^C \\ -{}^B J_{Axx}^C & -{}^B J_{Ayz}^C & {}^B J_{Azz}^C \end{bmatrix} \right\} \vec{\omega} \right\} \quad (5-105)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m_A \vec{v} - \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -m_A R_z - {}^B S_{Az}^C & m_A R_y + {}^B S_{Ay}^C \\ m_A R_z + {}^B S_{Az}^C & 0 & -m_A R_x - {}^B S_{Ax}^C \\ -m_A R_y - {}^B S_{Ay}^C & m_A R_x + {}^B S_{Ax}^C & 0 \end{array} \right] \vec{\omega} \\
 & + \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -m_A R_z - {}^B S_{Az}^C & m_A R_y + {}^B S_{Ay}^C \\ m_A R_z + {}^B S_{Az}^C & 0 & -m_A R_x - {}^B S_{Ax}^C \\ -m_A R_y - {}^B S_{Ay}^C & m_A R_x + {}^B S_{Ax}^C & 0 \end{array} \right\} \vec{v} \\
 & + \left[ \begin{array}{ccc} m_A (R_y^2 + R_z^2) + {}^B J_{Axx}^C & -m_A R_x R_y - {}^B J_{Axy}^C & -m_A R_x R_z - {}^B J_{Axx}^C \\ -m_A R_x R_y - {}^B J_{Axy}^C & m_A (R_x^2 + R_z^2) + {}^B J_{Ayy}^C & -m_A R_y R_z - {}^B J_{Ayz}^C \\ -m_A R_x R_z - {}^B J_{Axx}^C & -m_A R_y R_z - {}^B J_{Ayz}^C & m_A (R_x^2 + R_y^2) + {}^B J_{Azz}^C \end{array} \right] \vec{\omega} \right\} \quad (5-106)
 \end{aligned}$$

Ahora, los primeros y segundos momentos de inercia y productos de inercia del cuerpo A con respecto al punto B en términos de vectores unitarios del marco {B} son:

$${}^B S_{Ax}^B = m_A R_x + {}^B S_{Ax}^C \quad (5-107)$$

$${}^B S_{Ay}^B = m_A R_y + {}^B S_{Ay}^C \quad (5-108)$$

$${}^B S_{Az}^B = m_A R_z + {}^B S_{Az}^C \quad (5-109)$$

$${}^B J_{Axx}^B = m_A (R_y^2 + R_z^2) + {}^B J_{Axx}^C \quad (5-110)$$

$${}^B J_{Ayy}^B = m_A (R_x^2 + R_z^2) + {}^B J_{Ayy}^C \quad (5-111)$$

$${}^B J_{Azz}^B = m_A (R_x^2 + R_y^2) + {}^B J_{Azz}^C \quad (5-112)$$

$${}^B J_{Axy}^B = m_A R_x R_y + {}^B J_{Axy}^C \quad (5-113)$$

$${}^B J_{Ayz}^B = m_A R_y R_z + {}^B J_{Ayz}^C \quad (5-114)$$

$${}^B J_{Axz}^B = m_A R_x R_z + {}^B J_{Axz}^C \quad (5-115)$$

Estas expresiones permiten definir los primeros momentos, segundos momentos y productos de inercia especificados en cierto marco en términos de otro marco orientado igual que el primero pero con el origen desplazado con respecto del primer marco y ellos constituyen el teorema de ejes paralelos discutido en textos estándares.

Combinando los primeros momentos dentro de una matriz,

$$[{}^B S_A^B] = \begin{bmatrix} 0 & -{}^B S_{Az}^B & {}^B S_{Ay}^B \\ {}^B S_{Az}^B & 0 & -{}^B S_{Ax}^B \\ -{}^B S_{Ay}^B & {}^B S_{Ax}^B & 0 \end{bmatrix} \quad (5-116)$$

Y combinando los segundos momentos de inercia y los productos de inercia dentro de una matriz:

$$[{}^B J_A^B] = \begin{bmatrix} {}^B J_{Axx}^B & -{}^B J_{Axy}^B & -{}^B J_{Axz}^B \\ -{}^B J_{Axy}^B & {}^B J_{Ayy}^B & -{}^B J_{Ayz}^B \\ -{}^B J_{Axz}^B & -{}^B J_{Ayz}^B & {}^B J_{Azz}^B \end{bmatrix} \quad (5-116)$$

Substituyendo estas expresiones dentro de la ecuación para el momento dual en un cuerpo rígido se obtiene:

$${}^B \hat{H}_A = m_A \vec{v} - [{}^B S_A^B] \vec{\omega} + \varepsilon([{}^B S_A^B] \vec{v} + [{}^B J_A^B] \vec{\omega}) \quad (5-117)$$

O también:

$${}^B \hat{H}_A = m_A {}^B \vec{V}_{A0d}^B - [{}^B S_A^B] {}^B \vec{V}_{A0p}^B + \varepsilon([{}^B S_A^B] {}^B \vec{V}_{A0d}^B + [{}^B J_A^B] {}^B \vec{V}_{A0p}^B) \quad (5-118)$$

Donde las velocidades  ${}^B \vec{V}_{A0p}^B = \vec{\omega}$  y  ${}^B \vec{V}_{A0d}^B = \vec{v}$  son los componentes primarios y duales de la velocidad absoluta  ${}^B \vec{V}_{A0}^B$ . Se puede observar que todas las cantidades son expresadas en el mismo marco {B} fijado en el extremo distal del conector A.

### 5.7.3 Centro de masa y Radios de Giro

Los conceptos de centro de masa y radios de giro pueden usarse frecuentemente para simplificar las matrices de inercia.

El centro de masa de un cuerpo es un punto seleccionado de tal manera que los segundos términos de los primeros momentos de inercia son despreciables. Si el centro de masa de un conector A que conecta las uniones A y B está ubicado en un marco {B} con el origen en la unión B por un vector:

$${}^B \vec{G}_A = \begin{Bmatrix} g_{Ax} \\ g_{Ay} \\ g_{Az} \end{Bmatrix} \quad (5-119)$$

Entonces el primer momento de masas de la matriz del eslabón A en términos del marco {B} es:

$$[{}^B S_A^B] = m_A \begin{bmatrix} 0 & -g_{Az} & g_{Ay} \\ g_{Az} & 0 & -g_{Ax} \\ -g_{Ay} & g_{Ax} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-120)$$

Cuando el centro de masa es usado como punto de referencia, el segundo y tercer término dentro del segundo momento de inercia son despreciables, y las expresiones toman la apariencia del teorema de ejes paralelos. Además, la referencia al marco {B} puede ser orientada de tal manera que los productos de inercia desaparezcan, donde el marco tome la orientación de los ejes principales. En este caso:

$$[{}^B J_A^B] = m_a \begin{bmatrix} k_{Ax}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{Ay}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Az}^2 \end{bmatrix} \quad (5-121)$$

Donde los términos de la diagonal contienen los radios de giro  $k_{Ax}^2$ ,  $k_{Ay}^2$  y  $k_{Az}^2$ .

#### 5.7.4 Fuerza de Inercia Dual

Ahora, la fuerza de inercia de un cuerpo en movimiento,  ${}^B \hat{f}_A$ , se obtiene derivando su respectivo momento con respecto al tiempo.

$${}^B \hat{f}_A = \frac{d}{dt} ({}^B \hat{H}_A) \quad (5-122)$$

$$= {}^B \dot{\hat{H}}_A + {}^B \hat{V}_{A0} \times {}^B \hat{H}_A \quad (5-123)$$

$$= \begin{Bmatrix} {}^B \dot{\hat{H}}_{Ai} \\ {}^B \dot{\hat{H}}_{Aj} \\ {}^B \dot{\hat{H}}_{Ak} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^B \hat{V}_{Ai}^B \\ {}^B \hat{V}_{Aj}^B \\ {}^B \hat{V}_{Ak}^B \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} {}^B \hat{H}_{Ai} \\ {}^B \hat{H}_{Aj} \\ {}^B \hat{H}_{Ak} \end{Bmatrix} \quad (5-124)$$

$$= \begin{Bmatrix} {}^B \dot{\hat{H}}_{Ai} \\ {}^B \dot{\hat{H}}_{Aj} \\ {}^B \dot{\hat{H}}_{Ak} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -{}^B \hat{V}_{Ak}^B & {}^B \hat{V}_{Aj}^B \\ {}^B \hat{V}_{Ak}^B & 0 & -{}^B \hat{V}_{Ai}^B \\ -{}^B \hat{V}_{Aj}^B & {}^B \hat{V}_{Ai}^B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^B \hat{H}_{Ai} \\ {}^B \hat{H}_{Aj} \\ {}^B \hat{H}_{Ak} \end{Bmatrix} \quad (5-125)$$

Esto se expande a las ecuaciones duales de Euler:

$${}^B \hat{f}_A = \begin{Bmatrix} {}^B \hat{f}_{Ai} \\ {}^B \hat{f}_{Aj} \\ {}^B \hat{f}_{Ak} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^B \dot{\hat{H}}_{Ai} - {}^B \hat{V}_{Ak}^B {}^B \hat{H}_{Aj} + {}^B \hat{V}_{Aj}^B {}^B \hat{H}_{Ak} \\ {}^B \dot{\hat{H}}_{Aj} - {}^B \hat{V}_{Ai}^B {}^B \hat{H}_{Ak} + {}^B \hat{V}_{Ak}^B {}^B \hat{H}_{Ai} \\ {}^B \dot{\hat{H}}_{Ak} - {}^B \hat{V}_{Aj}^B {}^B \hat{H}_{Ai} + {}^B \hat{V}_{Ai}^B {}^B \hat{H}_{Aj} \end{Bmatrix} \quad (5-126)$$

Las ecuaciones duales de Euler son usadas para calcular la fuerza dual de inercia  ${}^B \hat{f}_A$  asociada con la masa y el movimiento de un cuerpo rígido A en términos de de las coordenadas del marco  $\{B\}$  fijo en el cuerpo.

### 5.7.5 Equilibrio Dinámico de un Conector

El principio de D'Alembert puede aplicarse para que esta fuerza de momento dual pueda usarse con las fuerzas duales aplicadas y así establecer una ecuación que describa el estado de equilibrio dinámico de un cuerpo rígido. La combinación de las fuerzas duales de inercia y las fuerzas duales aplicadas, juntas, producen el equilibrio. Por lo tanto, para un conector A conectando las uniones A y B como se muestra en la Figura 5.5, la suma del efecto en la unión distal B de la fuerza  ${}^A \hat{F}_A$  aplicada en la unión A y la reacción  $-{}^B \hat{F}_B$  aplicada en la unión B hacia la fuerza dual  ${}^B \hat{F}_B$  que ejerce la unión A sobre la unión B es igual a la fuerza dual de inercia de la unión A, todo expresado en términos de un marco fijado sobre el conector en la unión distal B:

$${}^B\hat{f}_A = {}^B\hat{M}_A {}^A\hat{f}_A - {}^B\hat{F}_B \quad (5-127)$$

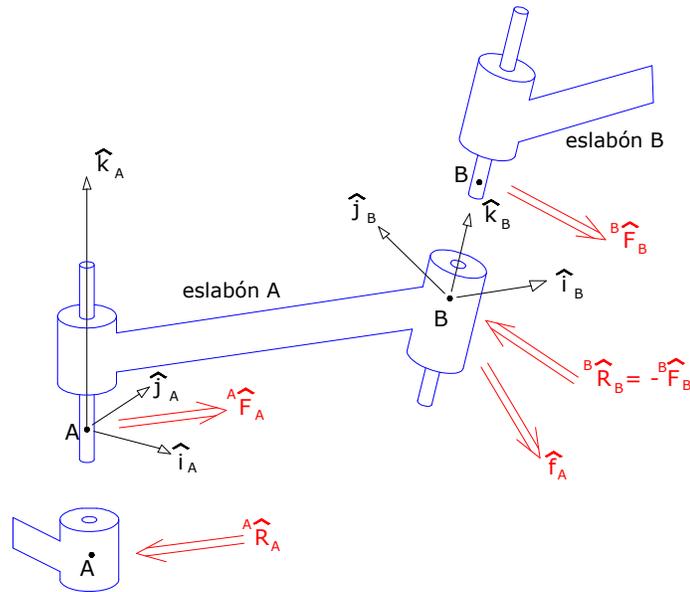


Figura 5.5 Fuerzas duales actuando sobre el eslabón A en sus articulaciones A y B.

### 5.7.6 Análisis Dinámico de Mecanismos

La ecuación dual de Euler puede ser usada para analizar el comportamiento de los mecanismos utilizando un procedimiento que consiste en los siguientes pasos.

**Paso 1.** Obtener la velocidad absoluta  ${}^B\hat{V}_{A0}^B$  de cada conector A conectando las uniones A y B en términos de vectores unitarios del marco {B} con origen en la unión distal.

**Paso 2.** Establecer las matrices de inercia  $[{}^B S_A]$  y  $[{}^B J_A]$  de cada conector móvil A en el mecanismo.

**Paso 3.** Obtener el momento dual  ${}^B\hat{H}_A$  de cada conector móvil.

**Paso 4.** Derivar el momento dual con respecto al tiempo para obtener los momentos derivados  ${}^B\hat{H}_A$ .

**Paso 5.** Sustituir estas cantidades dentro de las ecuaciones de Euler para obtener la fuerza dual de inercia de cada conector móvil con respecto al punto  $B$  en términos del marco  $\{B\}$ ,  ${}^B\hat{f}_A$ .

**Paso 6.** Usando las fuerzas duales de inercia y las fuerzas duales aplicadas especificadas, escribir la ecuación de equilibrio dinámico para cada conector en términos de fuerzas duales internas y externas mediante la aplicación del principio de D'Alembert.

**Paso 7.** Las ecuaciones de equilibrio dinámico para el movimiento de los conectores en el mecanismo forman un sistema de ecuaciones simultáneas que pueden resolverse para las fuerzas duales internas y externas.

## 5.8 APLICACIONES

1) Se realiza la asignación de marcos de referencia:

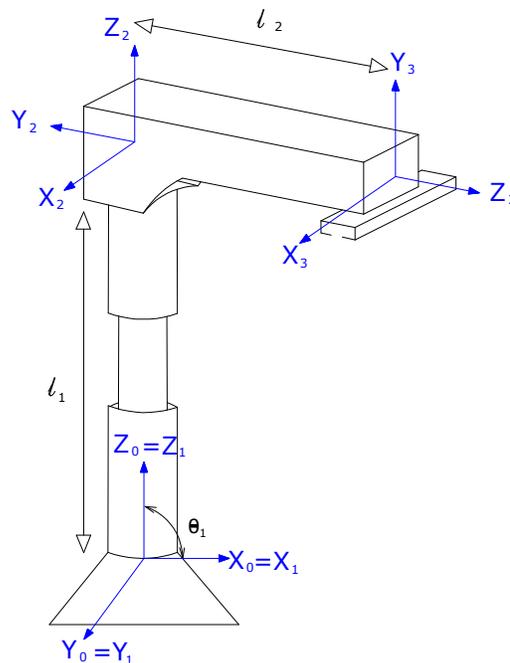


Figura 3.12 Manipulador robótico configuración cilíndrica.

2) Se establecen los parámetros de Denavit-Hartenberg para cualquier ángulo:

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$\theta_i$	$d_i$
1	0	0	$\theta_1$	0
2	0	0	$\theta_2$	$d_2$
3	0	0	$\theta_3$	$d_3$

3) Se retoman los valores para velocidad que se obtuvieron en el capítulo 4.

$${}^1\hat{V}_{10}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad (4-74)$$

$${}^2\hat{V}_{20}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon l_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4-78)$$

$${}^3\hat{V}_{30}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon l_2 \dot{\theta}_1 \\ \theta_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad (4-77)$$

4) Se establecen los centros de masa.

$${}^2\vec{G}_1 = \begin{Bmatrix} g_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-127)$$

$${}^3\vec{G}_2 = \begin{Bmatrix} g_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-128)$$

$${}^1\vec{G}_3 = \begin{Bmatrix} g_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-129)$$

5) Se establecen las matrices de inercia.

Los primeros momentos de inercia son:

$$[{}^2S_1^2] = m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_1 \\ 0 & g_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-130)$$

$$[{}^3S_2^3] = m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 \\ 0 & g_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-131)$$

$$[{}^1S_3^1] = m_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-132)$$

Los segundos momentos de inercia son:

$$[{}^2J_1^2] = m_1 \begin{bmatrix} k_{1x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{1y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1z}^2 \end{bmatrix} \quad (5-133)$$

$$[{}^3J_2^3] = m_2 \begin{bmatrix} k_{2x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{2z}^2 \end{bmatrix} \quad (5-134)$$

$$[{}^1J_3^1] = m_3 \begin{bmatrix} k_{3x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{3y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{3z}^2 \end{bmatrix} \quad (5-135)$$

6) Se obtiene el momento dual de cada articulación.

$${}^B\hat{H}_A = m_A {}^B\vec{V}_{Ad}^B - [{}^BS_A^B] {}^B\vec{V}_{Ap}^B + \varepsilon([{}^BS_A^B] {}^B\vec{V}_{Ad}^B + [{}^BJ_A^B] {}^B\vec{V}_{Ap}^B) \quad (5-136)$$

Para el primer eslabón:

$${}^2\hat{H}_1 = m_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1(l_1 + g_1) \\ \varepsilon\dot{\theta}_1(l_1g_1 + k_{1z}^2) \end{Bmatrix} \quad (5-137)$$

Para el segundo eslabón:

$${}^3\hat{H}_2 = m_2 \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 l_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 l_1 c\theta_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(l_2 + g_2) \\ \varepsilon[\dot{\theta}_1 l_1 g_2 c\theta_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(l_2 g_2 + k_{1z}^2)] \end{Bmatrix} \quad (5-138)$$

Para el efector final:

$${}^1\hat{H}_3 = m_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad (5-139)$$

7) Se deriva el momento dual con respecto al tiempo.

$${}^2\hat{H}_1 = m_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1(l_1 + g_1) \\ \varepsilon\ddot{\theta}_1(l_1g_1 + k_{1z}^2) \end{Bmatrix} \quad (5-140)$$

$${}^3\hat{H}_2 = m_2 \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 l_1 s\theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 c\theta_2 \\ \ddot{\theta}_1 l_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 s\theta_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)(l_2 + g_2) \\ \varepsilon[\ddot{\theta}_1 l_1 g_2 c\theta_2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 g_2 s\theta_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)(l_2 g_2 + k_{1z}^2)] \end{Bmatrix} \quad (5-141)$$

$${}^1\hat{H}_3 = m_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad (5-142)$$

8) Sustituir dentro de las ecuaciones de Euler.

Para el primer eslabón:

$${}^2\hat{f}_1 = \begin{Bmatrix} {}^2\hat{f}_{1i} \\ {}^2\hat{f}_{1j} \\ {}^2\hat{f}_{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^2\hat{H}_{1i} - {}^2\hat{V}_{1k}^2 {}^2\hat{H}_{1j} + {}^2\hat{V}_{1j}^2 {}^2\hat{H}_{1k} \\ {}^2\hat{H}_{1j} - {}^2\hat{V}_{1i}^2 {}^2\hat{H}_{1k} + {}^2\hat{V}_{1k}^2 {}^2\hat{H}_{1i} \\ {}^2\hat{H}_{1k} - {}^2\hat{V}_{1j}^2 {}^2\hat{H}_{1i} + {}^2\hat{V}_{1i}^2 {}^2\hat{H}_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5-143)$$

Y se obtiene:

$${}^2\hat{f}_1 = m_1 \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1^2 (l_1 + g_1) \\ \ddot{\theta}_1 (l_1 + g_1) \\ \varepsilon \ddot{\theta}_1 (l_1 + g_1) \end{Bmatrix} \quad (5-144)$$

Para el segundo eslabón:

$${}^3\hat{f}_2 = \begin{Bmatrix} {}^3\hat{f}_{2i} \\ {}^3\hat{f}_{2j} \\ {}^3\hat{f}_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^3\hat{H}_{2i} - {}^3\hat{V}_{2k}^3 {}^3\hat{H}_{2j} + {}^3\hat{V}_{2j}^3 {}^3\hat{H}_{2k} \\ {}^3\hat{H}_{2j} - {}^3\hat{V}_{2i}^3 {}^3\hat{H}_{2k} + {}^3\hat{V}_{2k}^3 {}^3\hat{H}_{2i} \\ {}^3\hat{H}_{2k} - {}^3\hat{V}_{2j}^3 {}^3\hat{H}_{2i} + {}^3\hat{V}_{2i}^3 {}^3\hat{H}_{2j} \end{Bmatrix} \quad (5-145)$$

Y se obtiene:

$${}^3\hat{f}_2 = m_2 \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 l_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_1 l_1 c\theta_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (l_2 + g_2) \\ \dot{\theta}_1 l_1 c\theta_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)(l_2 + g_2) + \dot{\theta}_1^2 l_1 s\theta_2 \\ \varepsilon [\ddot{\theta}_1 l_1 g_2 c\theta_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)(l_2 g_2 + k_{1z}^2) - \dot{\theta}_1^2 l_1 g_2 s\theta_2] \end{Bmatrix} \quad (5-146)$$

Para el tercer eslabón:

$${}^1\hat{f}_3 = \begin{Bmatrix} {}^1\hat{f}_{3i} \\ {}^1\hat{f}_{3j} \\ {}^1\hat{f}_{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^1\hat{H}_{3i} - {}^1\hat{V}_{3k}^1 {}^1\hat{H}_{3j} + {}^1\hat{V}_{3j}^1 {}^1\hat{H}_{3k} \\ {}^1\hat{H}_{3j} - {}^1\hat{V}_{3i}^1 {}^1\hat{H}_{3k} + {}^1\hat{V}_{3k}^1 {}^1\hat{H}_{3i} \\ {}^1\hat{H}_{3k} - {}^1\hat{V}_{3j}^1 {}^1\hat{H}_{3i} + {}^1\hat{V}_{3i}^1 {}^1\hat{H}_{3j} \end{Bmatrix} \quad (5-147)$$

Y se obtiene:

$${}^1\hat{f}_3 = m_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad (5-148)$$

Ahora se evalúan las fuerzas de inercia duales:

$${}^1\hat{F}_1 = \begin{pmatrix} F_{1i} \\ F_{1j} \\ \varepsilon T_{1k} \end{pmatrix} \quad (5-149)$$

$${}^2\hat{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{2i} \\ F_{2j} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5-150)$$

$${}^3\hat{F}_3 = m_3 \begin{pmatrix} F_{3i} \\ 0 \\ F_{3k} \end{pmatrix} \quad (5-151)$$

Se substituyen las ecuaciones de inercia duales en las ecuaciones de equilibrio dinámico:

Para el primer eslabón:

$${}^2_1\hat{M} {}^1\hat{F}_1 - {}^2\hat{F}_2 = {}^2\hat{f}_1 \quad (5-152)$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & \varepsilon l_1 \\ \varepsilon l_1 s\theta_1 & -\varepsilon l_1 c\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{1i} \\ F_{1j} \\ \varepsilon T_{1k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{2i} \\ F_{2j} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1i} \\ f_{1j} \\ \varepsilon t_{1k} \end{pmatrix} \quad (5-153)$$

$$\begin{pmatrix} F_{1i}c\theta_1 + F_{1j}s\theta_1 - F_{2i} \\ -F_{1i}s\theta_1 + F_{1j}c\theta_1 - F_{2j} \\ \varepsilon[F_{1i}l_1s\theta_1 - F_{1j}l_1c\theta_1 - T_{1k}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1i} \\ f_{1j} \\ \varepsilon t_{1k} \end{pmatrix} \quad (5-154)$$

Para el segundo eslabón:

$${}^3_2\hat{M} {}^2\hat{F}_2 - {}^3\hat{F}_3 = {}^3\hat{f}_2 \quad (5-155)$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & \varepsilon l_2 \\ \varepsilon l_2 s\theta_2 & -\varepsilon l_2 c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{2i} \\ F_{2j} \\ \varepsilon T_{2k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{3i} \\ F_{3j} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2i} \\ f_{2j} \\ \varepsilon t_{2k} \end{pmatrix} \quad (5-156)$$

$$\begin{pmatrix} F_{2i}c\theta_2 + F_{2j}s\theta_2 - F_{3i} \\ -F_{2i}s\theta_2 + F_{2j}c\theta_2 - F_{3j} \\ \varepsilon[F_{2i}l_2s\theta_2 - F_{2j}l_2c\theta_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2i} \\ f_{2j} \\ \varepsilon t_{2k} \end{pmatrix} \quad (5-157)$$

Para el tercer eslabón:

$${}^1\widehat{M} {}^3\widehat{F}_3 - {}^1\widehat{F}_1 = {}^1\widehat{f}_3 \quad (5-158)$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_3 & s\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s\theta_3 & -c\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3i} \\ F_{3j} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ 0 \\ F_{1j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{3k} \end{Bmatrix} \quad (5-159)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{3i}c\theta_3 + F_{3j}s\theta_3 - F_{1i} \\ 0 \\ F_{3i}s\theta_3 - F_{3j}c\theta_3 - F_{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{3k} \end{Bmatrix} \quad (5-160)$$

Las ecuaciones (5-154), (5-157) y (5-160) se compilan en forma de matriz como un sistema de ocho ecuaciones lineales con ocho fuerzas desconocidas:

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1s\theta_1 & -l_1c\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\theta_2 & s\theta_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2s\theta_2 & l_2c\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\theta_3 & s\theta_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s\theta_3 & -c\theta_3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ F_{1j} \\ F_{1k} \\ F_{2i} \\ F_{2j} \\ F_{2k} \\ F_{3i} \\ F_{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1i} \\ f_{1j} \\ t_{1k} - T_{1k} \\ f_{2i} \\ f_{2j} \\ f_{2k} \\ 0 \\ f_{3k} \end{Bmatrix} \quad (5-162)$$

9) Así se puede obtener las ecuaciones de equilibrio dinámico:

$$F_{1i} = \frac{(T_{1k} - t_{1k})c\theta_{12}}{l_1s\theta_2} - \left[ \frac{(a_2f_{1j}c\theta_2 + t_{2k})}{l_2s\theta_2} + f_{1i} \right] c\theta_1 \quad (5-163)$$

$$F_{1j} = \frac{(T_{1k} - t_{1k})s\theta_{12}}{l_1s\theta_2} \quad (5-164)$$

$$F_{2i} = \frac{(T_{1k} - t_{1k})}{l_2 \tan \theta_2} + \frac{t_{2k}}{l_2 s \theta_2} - \frac{f_{1j}}{\tan \theta_2} \quad (5-165)$$

$$F_{2j} = \frac{(T_{1k} - t_{1k})}{l_1} - f_{1j} \quad (5-166)$$

$$F_{3i} = \frac{(T_{1k} - t_{1k})}{l_1 s \theta_2} + \frac{t_{2k} c \theta_2}{l_2 s \theta_2} - \frac{f_{1j}}{s \theta_2} + f_{2j} \quad (5-167)$$

$$F_{3j} = -\frac{t_{2k}}{l_2} - f_{2j} \quad (5-168)$$

$$F_{3i} = \frac{(T_{1k} - t_{1k} - l_1 f_{1j}) c \theta_3}{l_1 s \theta_2} + \frac{t_{2k} c \theta_{23}}{l_2 s \theta_2} - f_{2i} c \theta_3 - f_{2j} s \theta_3 \quad (5-169)$$

$$F_{3k} = \frac{(T_{1k} - t_{1k} - l_1 f_{1j}) s \theta_3}{l_1 s \theta_2} + \frac{t_{2k} c \theta_{23}}{l_2 s \theta_2} - f_{2i} s \theta_3 - f_{2j} c \theta_3 - f_{2k} \quad (5-170)$$

## 5.9 CONCLUSIONES

Los análisis dinámicos tiene la finalidad de ayudar a implementar el sistema de control determinando los movimientos, fuerzas y pares que aparecen sobre cada eslabón del manipulador en sus diferentes posiciones de funcionamiento, al considerar estas variantes resultaría imposible no tomar en cuenta las velocidades y aceleraciones que se producen a causa de dichos movimientos y fuerzas pero, relacionar todos estos elementos resulta muy complicado y considerando que cuando las aceleraciones producidas en el movimiento de un manipulador robótico no son relevantes, el análisis dinámico se puede omitir.

Aunque el procedimiento del análisis dinámico es complejo, el aplicarlo con números duales proporciona una disminución en el grado de complejidad del proceso puesto que al no existir la aceleración dual como vector dual, y tomando en cuenta que los

análisis dinámicos se llevan a cabo basándose en aceleraciones. Al no hacer uso de las aceleraciones se emplean los momentos duales con los cuales la obtención de la ecuaciones de equilibrio dinámico resultan más directas.

## CONCLUSIONES GENERALES

Al realizar los análisis se obtuvo que los procedimientos se simplificaron siendo posible obtener las ecuaciones requeridas para los estudios cinemáticos y dinámicos sin necesidad de recurrir a un algún método numérico y/o programación para resolver sistemas de ecuaciones.

La compactación de las expresiones finales facilita el proceso de programación de software, pues una expresión convencional se puede programar con aproximadamente el triple de operaciones que las que requiere programar una expresión dual.

El uso de la metodología dual facilita en gran manera los procesos pues al concentrarse distancias y ángulos dentro de un mismo número (que es el número dual) el análisis de desplazamiento resulta más completo y al no existir el término de aceleración dual y optar por un vector pseudo-dual el análisis dinámico se facilita determinantemente.

Aunque para el robot analizado durante las aplicaciones el análisis dinámico no es necesario puesto que su sistema de control se puede establecer basándose únicamente con el análisis cinemático ya que este manipulador no está diseñado para operar en condiciones de aceleraciones significativas, el análisis dinámico de cualquier forma se desarrollo con la finalidad de proporcionar todas las herramientas necesarias para que el método sugerido en este trabajo se pueda aplicar a cualquier manipulador, el realizar los análisis en el manipulador de configuración cilíndrica solo es a manera de ejemplificar la aplicación del método.

En este trabajo no se incluyen códigos de programación en algún software, pues aunque es una herramienta necesaria en la realización de análisis cinemáticos y dinámicos, la finalidad de esta investigación es proponer un método que facilitara la obtención y estructura de las ecuaciones y modelos matemáticos de los cuales parte la programación, se espera que el lector pueda hacer uso de las ventajas del algebra dual y pueda obtener los resultados de los análisis del manipulador de su interés de

forma más completa y sencilla, para así poder realizar la programación de la operación del robot de acuerdo a sus necesidades y optando por el software de su preferencia.

Como recomendaciones para trabajos futuros se sugiere realizar el análisis cinemático y dinámico de un robot móvil en el cual el análisis dinámico resulta imprescindible pero a la vez sumamente complicado.

REFERENCIAS

**Agrawal S.K.** (1993) *Multibody dynamics: A formulation using a Kane's method and dual vectors*. J. Mech. Volumen 115, pagina 6.

**Craig, John.** (2006) *Robotica 3ra. Edicion*. Prentice Hall; Mexico.

**Erdman, A.G., & Sandor, G.N.** (1998) *Diseño de mecanismos, análisis y síntesis, tercera edición*. México:Roig.

**Fischer, Ian. S.** (1999) *Dual number methods in kinematics, statics and dynamics*. USA: CRC Press.

**Fischer, Ian.S.** (1992) *A complete notation for dual velocity*. J. Mech. Volumen 114, pagina 6.

**Historia.** (1999-2000). *eitig.com, Breve Historia de la Robótica*. Obtenida el 19 de enero de 2008 de <http://www.eitig.com/intelartificial/robotica/historia.htm>

**History of Robotics.** (2005). *Robotic Timeline*. Obtenida el 19 de enero de 2008 de <http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~jaeger/visualMedia/robotHistory.html>

**Ollero, B.A.** (2001). *Robótica Manipuladores y Robots Móviles*. Marcombo: Autor.

**Robot.** (2008). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Obtenida el 21 abril de 2008 de <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Robot&oldid=16783790>.

**Shigley, J.J.** (1980) *Theory of machines and mechanisms*. Mc Graw Hill.